Deducción de la ecuación $\boldsymbol{K}^{(e)}\boldsymbol{a}^{(e)} - \boldsymbol{f}^{(e)} = \boldsymbol{q}^{(e)}$ para un EF bidimensional de n nodos

A continuación no se escribirá el superíndice $^{(e)}$, en varias de las ecuaciones, para evitar saturar la notación.

1. Se definen los campos vectoriales de desplazamientos y de desplazamientos virtuales

Se interpolan los desplazamientos al interior del EF:

$$
\begin{aligned}
u(x,y) &= \sum_{i=1}^{n} N_i(x,y)u_i = N_1(x,y)u_1 + N_2(x,y)u_2 + \cdots + N_n(x,y)u_n \\
v(x,y) &= \sum_{i=1}^{n} N_i(x,y)v_i = N_1(x,y)v_1 + N_2(x,y)v_2 + \cdots + N_n(x,y)v_n.
\end{aligned}
$$

Observe que se están empleando las mismas funciones de forma para interpolar los deplazamientos u y v. De hecho, no existe razón alguna para utilizar funciones de forma diferentes para la interpolación de u y de v.

Las ecuaciones anteriores se pueden escribir matricialmente como:

$$\underbrace{\begin{bmatrix} u(x,y) \\ v(x,y) \end{bmatrix}}_{\boldsymbol{u}(x,y)} = \underbrace{\begin{bmatrix} N_1(x,y) & 0 & N_2(x,y) & 0 & \cdots & N_n(x,y) & 0 \\ 0 & N_1(x,y) & 0 & N_2(x,y) & \cdots & 0 & N_n(x,y) \end{bmatrix}}_{\boldsymbol{N}(x,y)} \underbrace{\begin{bmatrix} u_1 \\ v_1 \\ u_2 \\ v_2 \\ \vdots \\ u_n \\ v_n \end{bmatrix}}_{\boldsymbol{a}},$$

es decir,

$$\boldsymbol{u}^{(e)}(x,y) = \boldsymbol{N}^{(e)}(x,y)\boldsymbol{a}^{(e)}.$$

Análogamente, a como se hizo con el EF de barra, los desplazamientos virtuales al interior del elemento son:

$$\delta u(x,y) = \sum_{i=1}^{n} N_i(x,y)\delta u_i \qquad \delta v(x,y) = \sum_{i=1}^{n} N_i(x,y)\delta v_i,$$

y ambos se expresan en forma matricial como:

$$\delta\boldsymbol{u}^{(e)}(x,y) = \boldsymbol{N}^{(e)}(x,y)\delta\boldsymbol{a}^{(e)}. \tag{1}$$

Los términos expresados en las ecuaciones anteriores son:

$\boldsymbol{u}^{(e)}(x,y)$	campo vectorial de desplazamientos del elemento e.
$\boldsymbol{N}^{(e)}(x,y)$	matriz de funciones de forma (locales) del elemento e.
$\boldsymbol{a}^{(e)}$	vector de desplazamientos nodales del elemento e.
$\delta\boldsymbol{a}^{(e)}$	vector de desplazamientos virtuales nodales del elemento e.

2. Se definen los campos vectoriales de deformaciones y de deformaciones virtuales

Las deformaciones longitudinales del EF están dadas por:

$$\begin{aligned}
\varepsilon_x(x,y) &= \frac{\partial u(x,y)}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\sum_{i=1}^{n} N_i(x,y)u_i\right) = \sum_{i=1}^{n}\frac{\partial N_i(x,y)}{\partial x}u_i \\
\varepsilon_y(x,y) &= \frac{\partial v(x,y)}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\sum_{i=1}^{n} N_i(x,y)v_i\right) = \sum_{i=1}^{n}\frac{\partial N_i(x,y)}{\partial y}v_i,
\end{aligned}$$

y las deformaciones angulares por:

$$\gamma_{xy}(x,y) = \frac{\partial u(x,y)}{\partial y} + \frac{\partial v(x,y)}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\sum_{i=1}^{n} N_i(x,y)v_i\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(\sum_{i=1}^{n} N_i(x,y)u_i\right) = \sum_{i=1}^{n}\frac{\partial N_i(x,y)}{\partial x}v_i + \sum_{i=1}^{n}\frac{\partial N_i(x,y)}{\partial y}u_i,$$

es decir,

$$\begin{aligned}
\varepsilon_x &= +\frac{\partial N_1}{\partial x}u_1 \phantom{+\frac{\partial N_1}{\partial y}v_1} + \frac{\partial N_2}{\partial x}u_2 \phantom{+\frac{\partial N_2}{\partial y}v_2} + \cdots + \frac{\partial N_n}{\partial x}u_n \\
\varepsilon_y &= \phantom{+\frac{\partial N_1}{\partial y}u_1} + \frac{\partial N_1}{\partial y}v_1 \phantom{+\frac{\partial N_2}{\partial y}u_2} + \frac{\partial N_2}{\partial y}v_2 + \cdots \phantom{+\frac{\partial N_n}{\partial y}u_n} + \frac{\partial N_n}{\partial y}v_n \\
\gamma_{xy} &= +\frac{\partial N_1}{\partial y}u_1 + \frac{\partial N_1}{\partial x}v_1 + \frac{\partial N_2}{\partial y}u_2 + \frac{\partial N_2}{\partial x}v_2 + \cdots + \frac{\partial N_n}{\partial y}u_n + \frac{\partial N_n}{\partial x}v_n.
\end{aligned}$$

Las ecuaciones anteriores se pueden expresar en forma matricial como:

$$\underbrace{\begin{bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{bmatrix}}_{\boldsymbol{\varepsilon}(x,y)} = \underbrace{\begin{bmatrix} \frac{\partial N_1}{\partial x} & 0 & \frac{\partial N_2}{\partial x} & 0 & \cdots & \frac{\partial N_n}{\partial x} & 0 \\ 0 & \frac{\partial N_1}{\partial y} & 0 & \frac{\partial N_2}{\partial y} & \cdots & 0 & \frac{\partial N_n}{\partial y} \\ \frac{\partial N_1}{\partial y} & \frac{\partial N_1}{\partial x} & \frac{\partial N_2}{\partial y} & \frac{\partial N_2}{\partial x} & \cdots & \frac{\partial N_n}{\partial y} & \frac{\partial N_n}{\partial x} \end{bmatrix}}_{\boldsymbol{B}(x,y)} \underbrace{\begin{bmatrix} u_1 \\ v_1 \\ u_2 \\ v_2 \\ \vdots \\ u_n \\ v_n \end{bmatrix}}_{\boldsymbol{a}},$$

es decir,

$$\boldsymbol{\varepsilon}^{(e)}(x,y) = \boldsymbol{B}^{(e)}(x,y)\boldsymbol{a}^{(e)}.$$

De forma análoga a como se hizo con el EF de barra, las deformaciones virtuales al interior del elemento están dadas por:

$$\delta\boldsymbol{\varepsilon}^{(e)}(x,y) = \boldsymbol{B}^{(e)}(x,y)\delta\boldsymbol{a}^{(e)}. \tag{2}$$

Los términos expresados en las ecuaciones anteriores son:

$\boldsymbol{\varepsilon}^{(e)}(x,y)$	campo vectorial de deformaciones del elemento e.
$\boldsymbol{B}^{(e)}(x,y)$	matriz de deformaciones del elemento e.
$\boldsymbol{a}^{(e)}$	vector de desplazamientos nodales del elemento e.
$\delta\boldsymbol{a}^{(e)}$	vector de desplazamientos virtuales nodales del elemento e.

3. Se define el campo vectorial de esfuerzos

Para un elemento finito sujeto a deformaciones y esfuerzos iniciales, el campo vectorial de esfuerzos está dado por:

$$\begin{aligned}\boldsymbol{\sigma}(x,y) &= \boldsymbol{D}(x,y)\left(\boldsymbol{\varepsilon}(x,y) - \boldsymbol{\varepsilon}_0(x,y)\right) + \boldsymbol{\sigma}_0(x,y) \\ &= \boldsymbol{D}(x,y)\left(\boldsymbol{B}(x,y)\boldsymbol{a} - \boldsymbol{\varepsilon}_0(x,y)\right) + \boldsymbol{\sigma}_0(x,y),\end{aligned}$$

es decir,

$$\boldsymbol{\sigma}^{(e)}(x,y) = \boldsymbol{D}^{(e)}(x,y)\boldsymbol{B}^{(e)}(x,y)\boldsymbol{a}^{(e)} - \boldsymbol{D}^{(e)}(x,y)\boldsymbol{\varepsilon}_0^{(e)}(x,y) + \boldsymbol{\sigma}_0^{(e)}(x,y). \tag{3}$$

Tenga en cuenta que $\boldsymbol{\sigma}(x,y) = [\sigma_x(x,y),\ \sigma_y(x,y),\ \tau_{xy}(x,y)]^T$.

Aquí:

$\boldsymbol{\sigma}^{(e)}(x,y)$	campo vectorial de esfuerzos del elemento e.
$\boldsymbol{D}^{(e)}(x,y)$	matriz constitutiva del elemento e.
$\boldsymbol{B}^{(e)}(x,y)$	matriz de deformaciones del elemento e.
$\boldsymbol{a}^{(e)}$	vector de desplazamientos nodales del elemento e.
$\boldsymbol{\varepsilon}_0^{(e)}(x,y)$	campo vectorial de deformaciones iniciales del elemento e.
$\boldsymbol{\sigma}_0^{(e)}(x,y)$	campo vectorial de esfuerzos iniciales del elemento e.

4. Se reemplaza en el principio de los trabajos virtuales

Haciendo $\boldsymbol{x} = [x,\ y]^T$, y teniendo en cuenta las fuerzas que se muestran en la Figura 1, escribimos el PTV en 2D:

$$\underbrace{t \iint_A \delta\boldsymbol{\varepsilon}^T(\boldsymbol{x})\boldsymbol{\sigma}(\boldsymbol{x})\,\mathrm{d}A}_{\text{trabajo realizado por las deformaciones virtuales sobre los esfuerzos en el EF}} = \underbrace{t \iint_A \delta\boldsymbol{u}^T(\boldsymbol{x})\boldsymbol{b}(\boldsymbol{x})\,\mathrm{d}A}_{\text{trabajo realizado por las fuerzas másicas sobre los desplazamientos virtuales en el EF}} + \underbrace{t \oint_{\partial A} \delta\boldsymbol{u}^T\big(\boldsymbol{x}(s)\big)\boldsymbol{t}\big(\boldsymbol{x}(s)\big)\,\mathrm{d}s}_{\text{trabajo realizado por las fuerzas superficiales (que actúan en el contorno del EF) sobre los desplazamientos virtuales en el EF}} + \underbrace{\sum_{i=1}^{n} \delta\boldsymbol{u}^T(\boldsymbol{x}_i)\boldsymbol{p}_i}_{\text{trabajo realizado por las fuerzas puntuales aplicadas sobre los nodos del EF sobre sus correspondientes desplazamientos virtuales}} + \underbrace{\sum_{i=1}^{n} \delta\boldsymbol{u}^T(\boldsymbol{x}_i)\boldsymbol{q}_i}_{\text{trabajo realizado por las fuerzas nodales de equilibrio sobre los desplazamientos virtuales de los nodos del EF}}. \tag{4}$$

donde:

$t^{(e)}$	espesor del elemento e.
$A^{(e)}$	región del plano asociada al EF e, sobre la cual se realiza la integración.
$\boldsymbol{\sigma}^{(e)}(x, y)$	campo vectorial de esfuerzos del elemento e.
$\boldsymbol{b}^{(e)}(x, y)$	vector de fuerzas másicas asociadas al elemento e.
$\boldsymbol{t}^{(e)}(x(s), y(s))$	vector de fuerzas superficiales que actúan en el contorno del elemento e.
$\boldsymbol{p}_i^{(e)}$	vector de fuerzas puntuales aplicadas sobre el nodo i-ésimo del EF e.
$\boldsymbol{q}_i^{(e)}$	vector de fuerzas nodales de equilibrio del nodo i-ésimo del EF e.
$\delta\boldsymbol{u}_i^{(e)}$	vector de desplazamiento virtual asociado al nodo i-ésimo del elemento e.
$\delta\boldsymbol{\varepsilon}^{(e)}(x, y)$	campo vectorial de deformaciones virtuales del elemento e.

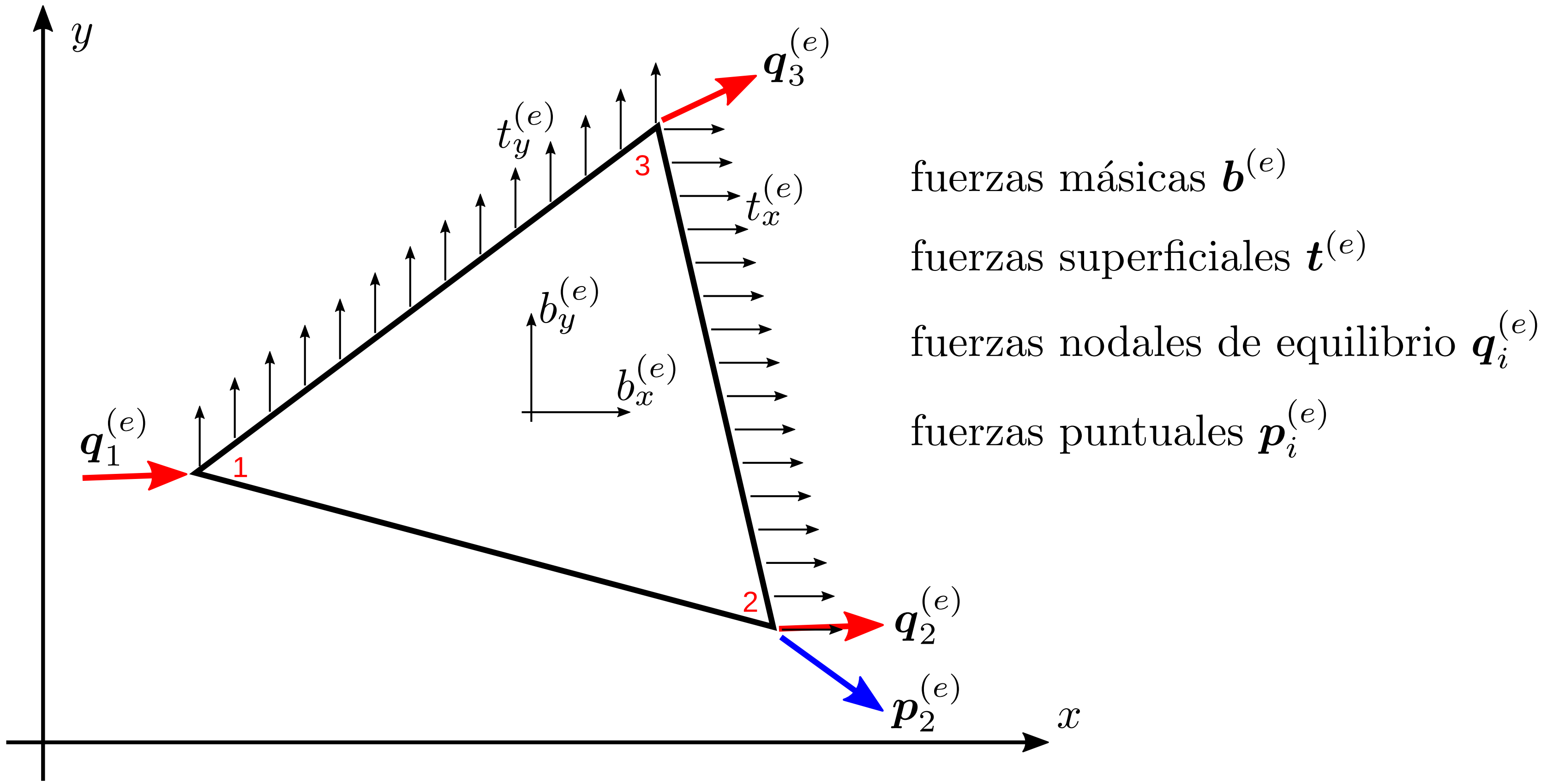

Figura 1: Fuerzas que actúan sobre un elemento finito

Observe que $\delta\boldsymbol{\varepsilon}^T\boldsymbol{\sigma} := \sigma_x\delta\varepsilon_x + \sigma_y\delta\varepsilon_y + \tau_{xy}\delta\gamma_{xy} + \overbrace{\sigma_z\delta\varepsilon_z + \tau_{xz}\delta\gamma_{xz} + \tau_{yz}\delta\gamma_{yz}}^{=0}$ (esta expresión denota el trabajo virtual interno por unidad de volumen en un punto $\boldsymbol{x}$ dado). El término señalado vale cero ya que en tensión plana $\sigma_z = \tau_{xz} = \tau_{yz} = 0$ y en deformación plana $\varepsilon_z = \gamma_{xz} = \gamma_{yz} = 0$.

A partir de las ecuaciones (1) y (2), y teniendo en cuenta que $(\boldsymbol{A}\boldsymbol{B})^T = \boldsymbol{B}^T\boldsymbol{A}^T$, se obtiene:

$$\delta\boldsymbol{u}^T(\boldsymbol{x}) = \delta\boldsymbol{a}^T\boldsymbol{N}^T(\boldsymbol{x}) \qquad \delta\boldsymbol{\varepsilon}^T(\boldsymbol{x}) = \delta\boldsymbol{a}^T\boldsymbol{B}^T(\boldsymbol{x}).$$

Reemplazando las dos ecuaciones anteriores en (4), resulta:

$$t\iint_A \delta\boldsymbol{a}^T\boldsymbol{B}^T(\boldsymbol{x})\boldsymbol{\sigma}(\boldsymbol{x})\,\mathrm{d}A = t\iint_A \delta\boldsymbol{a}^T\boldsymbol{N}^T(\boldsymbol{x})\boldsymbol{b}(\boldsymbol{x})\,\mathrm{d}A + t\oint_{\partial A}\delta\boldsymbol{a}^T\boldsymbol{N}^T\big(\boldsymbol{x}(s)\big)\boldsymbol{t}\big(\boldsymbol{x}(s)\big)\,\mathrm{d}s + \sum_{i=1}^{n}\delta\boldsymbol{u}^T(\boldsymbol{x}_i)\boldsymbol{p}_i + \sum_{i=1}^{n}\delta\boldsymbol{u}^T(\boldsymbol{x}_i)\boldsymbol{q}_i. \tag{5}$$

Ahora, teniendo en cuenta que:

$$\boldsymbol{p} = \begin{pmatrix}\boldsymbol{p}_1\\ \boldsymbol{p}_2\\ \vdots\\ \boldsymbol{p}_n\end{pmatrix} \qquad \boldsymbol{q} = \begin{pmatrix}\boldsymbol{q}_1\\ \boldsymbol{q}_2\\ \vdots\\ \boldsymbol{q}_n\end{pmatrix} \qquad \boldsymbol{a} = \begin{pmatrix}\boldsymbol{a}_1\\ \boldsymbol{a}_2\\ \vdots\\ \boldsymbol{a}_n\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\boldsymbol{u}(\boldsymbol{x}_1)\\ \boldsymbol{u}(\boldsymbol{x}_2)\\ \vdots\\ \boldsymbol{u}(\boldsymbol{x}_n)\end{pmatrix} \qquad \delta\boldsymbol{a} = \begin{pmatrix}\delta\boldsymbol{a}_1\\ \delta\boldsymbol{a}_2\\ \vdots\\ \delta\boldsymbol{a}_n\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\delta\boldsymbol{u}(\boldsymbol{x}_1)\\ \delta\boldsymbol{u}(\boldsymbol{x}_2)\\ \vdots\\ \delta\boldsymbol{u}(\boldsymbol{x}_n)\end{pmatrix}$$

resulta que

$$\sum_{i=1}^{n}\delta\boldsymbol{u}^T(\boldsymbol{x}_i)\boldsymbol{p}_i = \delta\boldsymbol{a}^T\boldsymbol{p} \qquad \sum_{i=1}^{n}\delta\boldsymbol{u}^T(\boldsymbol{x}_i)\boldsymbol{q}_i = \delta\boldsymbol{a}^T\boldsymbol{q}.$$

Al reemplazar dichos términos en (4) y pasando la parte derecha de la ecuación a la parte izquierda, obtenemos:

$$t\iint_A \delta\boldsymbol{a}^T\boldsymbol{B}^T(\boldsymbol{x})\boldsymbol{\sigma}(\boldsymbol{x})\,\mathrm{d}A - t\iint_A \delta\boldsymbol{a}^T\boldsymbol{N}^T(\boldsymbol{x})\boldsymbol{b}(\boldsymbol{x})\,\mathrm{d}A - t\oint_{\partial A}\delta\boldsymbol{a}^T\boldsymbol{N}^T\big(\boldsymbol{x}(s)\big)\boldsymbol{t}\big(\boldsymbol{x}(s)\big)\,\mathrm{d}s - \delta\boldsymbol{a}^T\boldsymbol{p} - \delta\boldsymbol{a}^T\boldsymbol{q} = 0.$$

En la ecuación anterior, el desplazamiento virtual es independiente de los integrandos de todas las integrales, por lo que sale de la integral y se factoriza para quedar:

$$\underbrace{\delta \boldsymbol{a}^T}_{\neq \boldsymbol{0}} \underbrace{\left[t \iint_A \boldsymbol{B}^T(\boldsymbol{x}) \boldsymbol{\sigma}(\boldsymbol{x}) \,\mathrm{d}A - t \iint_A \boldsymbol{N}^T(\boldsymbol{x}) \boldsymbol{b}(\boldsymbol{x}) \,\mathrm{d}A - t \oint_{\partial A} \boldsymbol{N}^T\big(\boldsymbol{x}(s)\big) \boldsymbol{t}\big(\boldsymbol{x}(s)\big) \,\mathrm{d}s - \boldsymbol{p} - \boldsymbol{q} \right]}_{=\boldsymbol{0}} = 0.$$

Si el producto punto anterior vale cero es porque $\delta \boldsymbol{a} = \boldsymbol{0}$ o porque el término entre corchetes es igual a $\boldsymbol{0}$. Lo primero no es cierto, ya que se sabe que el desplazamiento virtual $\delta \boldsymbol{a}$ representa el conjunto de todos los desplazamientos posibles de los nodos del EF, es decir, $\delta \boldsymbol{a}$ es un vector arbitrario. En consecuencia el término entre corchetes es cero y:

$$t \iint_A \boldsymbol{B}^T(\boldsymbol{x}) \boldsymbol{\sigma}(\boldsymbol{x}) \,\mathrm{d}A - t \iint_A \boldsymbol{N}^T(\boldsymbol{x}) \boldsymbol{b}(\boldsymbol{x}) \,\mathrm{d}A - t \oint_{\partial A} \boldsymbol{N}^T\big(\boldsymbol{x}(s)\big) \boldsymbol{t}\big(\boldsymbol{x}(s)\big) \,\mathrm{d}s - \boldsymbol{p} - \boldsymbol{q} = \boldsymbol{0}.$$

Al reemplazar (3) en la ecuación anterior, se obtiene

$$t \iint_A \boldsymbol{B}^T(\boldsymbol{x}) \big(\boldsymbol{D}(\boldsymbol{x}) \boldsymbol{B}(\boldsymbol{x}) \boldsymbol{a} - \boldsymbol{D}(\boldsymbol{x}) \boldsymbol{\varepsilon}_0(\boldsymbol{x}) + \boldsymbol{\sigma}_0(\boldsymbol{x}) \big) \,\mathrm{d}A - t \iint_A \boldsymbol{N}^T(\boldsymbol{x}) \boldsymbol{b}(\boldsymbol{x}) \,\mathrm{d}A - t \oint_{\partial A} \boldsymbol{N}^T\big(\boldsymbol{x}(s)\big) \boldsymbol{t}\big(\boldsymbol{x}(s)\big) \,\mathrm{d}s - \boldsymbol{p} - \boldsymbol{q} = \boldsymbol{0},$$

es decir,

$$\begin{aligned} &\underbrace{t \iint_A \boldsymbol{B}^T(\boldsymbol{x}) \boldsymbol{D}(\boldsymbol{x}) \boldsymbol{B}(\boldsymbol{x}) \,\mathrm{d}A}_{\boldsymbol{K}} \, \boldsymbol{a} - \underbrace{t \iint_A \boldsymbol{B}^T(\boldsymbol{x}) \boldsymbol{D}(\boldsymbol{x}) \boldsymbol{\varepsilon}_0(\boldsymbol{x}) \,\mathrm{d}A}_{\boldsymbol{f}_{\boldsymbol{\varepsilon}_0}} - \underbrace{\left(-t \iint_A \boldsymbol{B}^T(\boldsymbol{x}) \boldsymbol{\sigma}_0(\boldsymbol{x}) \,\mathrm{d}A \right)}_{\boldsymbol{f}_{\boldsymbol{\sigma}_0}} \\ &\qquad - \underbrace{t \iint_A \boldsymbol{N}^T(\boldsymbol{x}) \boldsymbol{b}(\boldsymbol{x}) \,\mathrm{d}A}_{\boldsymbol{f}_{\boldsymbol{b}}} - \underbrace{t \oint_{\partial A} \boldsymbol{N}^T\big(\boldsymbol{x}(s)\big) \boldsymbol{t}\big(\boldsymbol{x}(s)\big) \,\mathrm{d}s}_{\boldsymbol{f}_{\boldsymbol{t}}} - \boldsymbol{p} = \boldsymbol{q}, \end{aligned}$$

lo cual se expresa de forma compacta como:

$$\boldsymbol{K}^{(e)} \boldsymbol{a}^{(e)} - \boldsymbol{f}^{(e)} = \boldsymbol{q}^{(e)},$$

donde,

$\boldsymbol{K}^{(e)} = t \iint_A \boldsymbol{B}^T(\boldsymbol{x}) \boldsymbol{D}(\boldsymbol{x}) \boldsymbol{B}(\boldsymbol{x}) \,\mathrm{d}A$	matriz de rigidez del elemento e.
$\boldsymbol{a}^{(e)}$	vector de desplazamientos nodales del elemento e.
$\boldsymbol{f}^{(e)} = \boldsymbol{f}^{(e)}_{\boldsymbol{\varepsilon}_0} + \boldsymbol{f}^{(e)}_{\boldsymbol{\sigma}_0} + \boldsymbol{f}^{(e)}_{\boldsymbol{b}} + \boldsymbol{f}^{(e)}_{\boldsymbol{t}} + \boldsymbol{p}^{(e)}$	vector de fuerzas nodales equivalentes del elemento e.
$\boldsymbol{q}^{(e)}$	vector de fuerzas nodales de equilibrio del EF e.
$\boldsymbol{f}^{(e)}_{\boldsymbol{\varepsilon}_0} = t \iint_A \boldsymbol{B}^T(\boldsymbol{x}) \boldsymbol{D}(\boldsymbol{x}) \boldsymbol{\varepsilon}_0(\boldsymbol{x}) \,\mathrm{d}A$	vector de fuerzas nodales equivalentes del elemento e asociado a las deformaciones iniciales.
$\boldsymbol{f}^{(e)}_{\boldsymbol{\sigma}_0} = -t \iint_A \boldsymbol{B}^T(\boldsymbol{x}) \boldsymbol{\sigma}_0(\boldsymbol{x}) \,\mathrm{d}A$	vector de fuerzas nodales equivalentes del elemento e asociado a los esfuerzos iniciales.
$\boldsymbol{f}^{(e)}_{\boldsymbol{b}} = t \iint_A \boldsymbol{N}^T(\boldsymbol{x}) \boldsymbol{b}(\boldsymbol{x}) \,\mathrm{d}A$	vector de fuerzas nodales equivalentes del elemento e asociado a las fuerzas másicas.
$\boldsymbol{f}^{(e)}_{\boldsymbol{t}} = t \oint_{\partial A} \boldsymbol{N}^T\big(\boldsymbol{x}(s)\big) \boldsymbol{t}\big(\boldsymbol{x}(s)\big) \,\mathrm{d}s$	vector de fuerzas nodales equivalentes del elemento e asociado a las fuerzas superficiales actuantes en el contorno del EF.
$\boldsymbol{p}^{(e)}$	vector de fuerzas puntuales aplicadas sobre los nodos del EF e.

Hay que destacar que estas expresiones son totalmente generales y, por consiguiente, aplicables a cualquier elemento finito bidimensional.

Finalmente, tenga en cuenta que las ecuaciones anteriores solo involucran hasta las derivadas primeras del desplazamiento; por lo tanto, es posible utilizar elementos finitos continuos de clase C_0. Este requisito aplicará también para el caso tridimensional, pero no para el caso de vigas, placas y cascarones.

NOTA: la matriz $\boldsymbol{K}^{(e)}$ es simétrica y semi-positiva definida. Tiene tres valores propios nulo asociados con las dos translaciones rígidas y con la rotación. El rango de $\boldsymbol{K}^{(e)}$ es $2n-3$; este rango puede disminuir si se integra la matriz numéricamente con integración reducida.