Deducción de la ecuación $\boldsymbol{K}^{(e)}\boldsymbol{a}^{(e)} - \boldsymbol{f}^{(e)} = \boldsymbol{q}^{(e)}$ empleando funciones de forma locales para el EF de barra de 2 nodos

1. Se definen los campos vectoriales de desplazamientos y de desplazamientos virtuales

Desplazamientos al interior del elemento:

$$
\begin{aligned}
u^{(e)}(x) &= N_1^{(e)}(x)u_1^{(e)} + N_2^{(e)}(x)u_2^{(e)} = \sum_{i=1}^{2} N_i^{(e)}(x)u_i^{(e)} \\
&= \underbrace{\begin{bmatrix} N_1^{(e)}(x) & N_2^{(e)}(x) \end{bmatrix}}_{\boldsymbol{N}^{(e)}(x)} \underbrace{\begin{bmatrix} u_1^{(e)} \\ u_2^{(e)} \end{bmatrix}}_{\boldsymbol{a}^{(e)}} = \boldsymbol{N}^{(e)}(x)\boldsymbol{a}^{(e)}
\end{aligned}
$$

Desplazamientos virtuales al interior del elemento:

$$
\begin{aligned}
\delta u^{(e)}(x) &= N_1^{(e)}(x)\delta u_1^{(e)} + N_2^{(e)}(x)\delta u_2^{(e)} = \sum_{i=1}^{2} N_i^{(e)}(x)\delta u_i^{(e)} \\
&= \underbrace{\begin{bmatrix} N_1^{(e)}(x) & N_2^{(e)}(x) \end{bmatrix}}_{\boldsymbol{N}^{(e)}(x)} \underbrace{\begin{bmatrix} \delta u_1^{(e)} \\ \delta u_2^{(e)} \end{bmatrix}}_{\delta\boldsymbol{a}^{(e)}} = \boldsymbol{N}^{(e)}(x)\delta\boldsymbol{a}^{(e)}
\end{aligned}
$$

$\boldsymbol{N}^{(e)}(x)$ se conoce como la *matriz de funciones de forma (locales) del elemento e.*

$\boldsymbol{a}^{(e)} = [u_1^{(e)},\ u_2^{(e)}]^T$ es el *vector de desplazamientos nodales del elemento e.*

$\delta\boldsymbol{a}^{(e)} = [\delta u_1^{(e)},\ \delta u_2^{(e)}]^T$ es el *vector de desplazamientos virtuales nodales del elemento e.*

2. Se definen los campos vectoriales de deformaciones y de deformaciones virtuales

Deformaciones al interior del elemento:

$$\varepsilon^{(e)}(x) = \frac{\mathrm{d}u^{(e)}(x)}{\mathrm{d}x} = \sum_{i=1}^{2} \frac{\mathrm{d}N_i^{(e)}(x)}{\mathrm{d}x} u_i^{(e)}$$

$$= \underbrace{\begin{bmatrix} \frac{\mathrm{d}N_1^{(e)}(x)}{\mathrm{d}x} & \frac{\mathrm{d}N_2^{(e)}(x)}{\mathrm{d}x} \end{bmatrix}}_{\boldsymbol{B}^{(e)}(x)} \underbrace{\begin{bmatrix} u_1^{(e)} \\ u_2^{(e)} \end{bmatrix}}_{\boldsymbol{a}^{(e)}} = \boldsymbol{B}^{(e)}(x)\boldsymbol{a}^{(e)}$$

Deformaciones virtuales al interior del elemento:

$$\delta\varepsilon^{(e)}(x) = \delta\left(\frac{\mathrm{d}u^{(e)}(x)}{\mathrm{d}x}\right) = \frac{\mathrm{d}\delta u^{(e)}(x)}{\mathrm{d}x} = \sum_{i=1}^{2} \frac{\mathrm{d}N_i^{(e)}(x)}{\mathrm{d}x} \delta u_i^{(e)}$$

$$= \underbrace{\begin{bmatrix} \frac{\mathrm{d}N_1^{(e)}(x)}{\mathrm{d}x} & \frac{\mathrm{d}N_2^{(e)}(x)}{\mathrm{d}x} \end{bmatrix}}_{\boldsymbol{B}^{(e)}(x)} \underbrace{\begin{bmatrix} \delta u_1^{(e)} \\ \delta u_2^{(e)} \end{bmatrix}}_{\delta\boldsymbol{a}^{(e)}} = \boldsymbol{B}^{(e)}(x)\delta\boldsymbol{a}^{(e)}$$

$\boldsymbol{B}^{(e)}(x)$ se conoce como la *matriz de deformaciones del elemento e.*

$\boldsymbol{a}^{(e)} = [u_1^{(e)},\ u_2^{(e)}]^T$ es el *vector de desplazamientos nodales del elemento e.*

$\delta\boldsymbol{a}^{(e)} = [\delta u_1^{(e)},\ \delta u_2^{(e)}]^T$ es el *vector de desplazamientos virtuales nodales del elemento e.*

3. Se define el campo vectorial de esfuerzos

$$\begin{aligned}\sigma^{(e)}(x) &= E^{(e)}(x)\varepsilon^{(e)}(x)\\ &= E^{(e)}(x)\boldsymbol{B}^{(e)}(x)\boldsymbol{a}^{(e)}\end{aligned}$$

Tenga en cuenta que las fuerzas axiales al interior del elemento están dadas por:

$$\begin{aligned}f_{\text{axial}}^{(e)}(x) &= A^{(e)}(x)\sigma^{(e)}(x)\\ &= \underbrace{E^{(e)}(x)A^{(e)}(x)}_{\boldsymbol{D}^{(e)}(x)}\boldsymbol{B}^{(e)}(x)\boldsymbol{a}^{(e)}\\ &= \boldsymbol{D}^{(e)}(x)\boldsymbol{B}^{(e)}(x)\boldsymbol{a}^{(e)}\end{aligned}$$

$\boldsymbol{D}^{(e)}(x)$ se conoce como la *matriz constitutiva del elemento e.*

$\boldsymbol{B}^{(e)}(x)$ se conoce como la *matriz de deformaciones del elemento e.*

$\boldsymbol{a}^{(e)} = [u_1^{(e)},\ u_2^{(e)}]^T$ es el *vector de desplazamientos nodales del elemento e.*

4. Se reemplaza en el principio de los trabajos virtuales

$$\iiint_{V^{(e)}} \delta\varepsilon^{(e)}(x)\sigma^{(e)}(x)\,\mathrm{d}V = \int_{x_1^{(e)}}^{x_2^{(e)}} \delta u^{(e)}(x)b^{(e)}(x)\,\mathrm{d}x + \delta u_1^{(e)}q_1^{(e)} + \delta u_2^{(e)}q_2^{(e)}$$

Teniendo en cuenta que para un escalar c se tiene que $c = c^T$ tenemos que:

$$\iiint_{V^{(e)}} \underbrace{\delta\boldsymbol{a}_{(e)}^T\boldsymbol{B}_{(e)}^T(x)}_{\delta\varepsilon_{(e)}^T(x)}\underbrace{E^{(e)}(x)\boldsymbol{B}^{(e)}(x)\boldsymbol{a}^{(e)}}_{\sigma^{(e)}(x)}\,\mathrm{d}V = \int_{x_1^{(e)}}^{x_2^{(e)}} \underbrace{\delta\boldsymbol{a}_{(e)}^T\boldsymbol{N}_{(e)}^T(x)}_{\delta u_{(e)}^T(x)}b^{(e)}(x)\,\mathrm{d}x + \underbrace{\begin{bmatrix}\delta u_1^{(e)} & \delta u_2^{(e)}\end{bmatrix}}_{\delta\boldsymbol{a}_{(e)}^T}\underbrace{\begin{bmatrix}q_1^{(e)}\\ q_2^{(e)}\end{bmatrix}}_{\boldsymbol{q}^{(e)}}$$

Tenga en cuenta que $A(x)$ tiene dos connotaciones dependientes del contexto: la primera es la región de la sección transversal que se encuentra en la posición x (se utiliza como la región de integración de $\iint_{A^{(e)}(x)} \cdot\,\mathrm{d}x$); la segunda es el área de la región anterior.

Y como los vectores $\boldsymbol{a}^{(e)}$ y $\delta\boldsymbol{a}^{(e)}$ son independientes de x, salen de las integrales:

$$\delta\boldsymbol{a}_{(e)}^T \int_{x_1^{(e)}}^{x_2^{(e)}} \iint_{A^{(e)}(x)} \boldsymbol{B}_{(e)}^T(x)E^{(e)}(x)\boldsymbol{B}^{(e)}(x)\,\mathrm{d}A\,\mathrm{d}x\;\boldsymbol{a}^{(e)} - \delta\boldsymbol{a}_{(e)}^T \int_{x_1^{(e)}}^{x_2^{(e)}} \boldsymbol{N}_{(e)}^T(x)b^{(e)}(x)\,\mathrm{d}x - \delta\boldsymbol{a}_{(e)}^T\boldsymbol{q}^{(e)} = 0$$

Se factoriza $\delta\boldsymbol{a}_{(e)}^T$ y se tiene en cuenta que el integrando de la primera integral no depende de A

$$\delta\boldsymbol{a}_{(e)}^T\left[\int_{x_1^{(e)}}^{x_2^{(e)}} \boldsymbol{B}_{(e)}^T(x)E^{(e)}(x)A^{(e)}(x)\boldsymbol{B}^{(e)}(x)\,\mathrm{d}x\boldsymbol{a}^{(e)} - \int_{x_1^{(e)}}^{x_2^{(e)}} \boldsymbol{N}_{(e)}^T(x)b^{(e)}(x)\,\mathrm{d}x - \boldsymbol{q}^{(e)}\right] = 0$$

Teniendo en cuenta que $\boldsymbol{D}^{(e)}(x) = E^{(e)}(x)A^{(e)}(x)$ y que el vector de desplazamientos virtuales $\delta\boldsymbol{a}^{(e)}$ es arbitrario, se tiene que el término entre corchetes debe valer cero, por lo que:

$$\underbrace{\int_{x_1^{(e)}}^{x_2^{(e)}} \boldsymbol{B}_{(e)}^T(x)\boldsymbol{D}^{(e)}(x)\boldsymbol{B}^{(e)}(x)\,\mathrm{d}x}_{\boldsymbol{K}^{(e)}}\,\boldsymbol{a}^{(e)} - \underbrace{\int_{x_1^{(e)}}^{x_2^{(e)}} \boldsymbol{N}_{(e)}^T(x)b^{(e)}(x)\,\mathrm{d}x}_{\boldsymbol{f}^{(e)}} = \boldsymbol{q}^{(e)}$$

es decir,
$$\boldsymbol{K}^{(e)}\boldsymbol{a}^{(e)} - \boldsymbol{f}^{(e)} = \boldsymbol{q}^{(e)}$$

NOTA: la matriz $\boldsymbol{K}^{(e)}$ es simétrica y semi-positiva definida. Tiene un valor propio nulo asociado con la translación rígida horizontal.