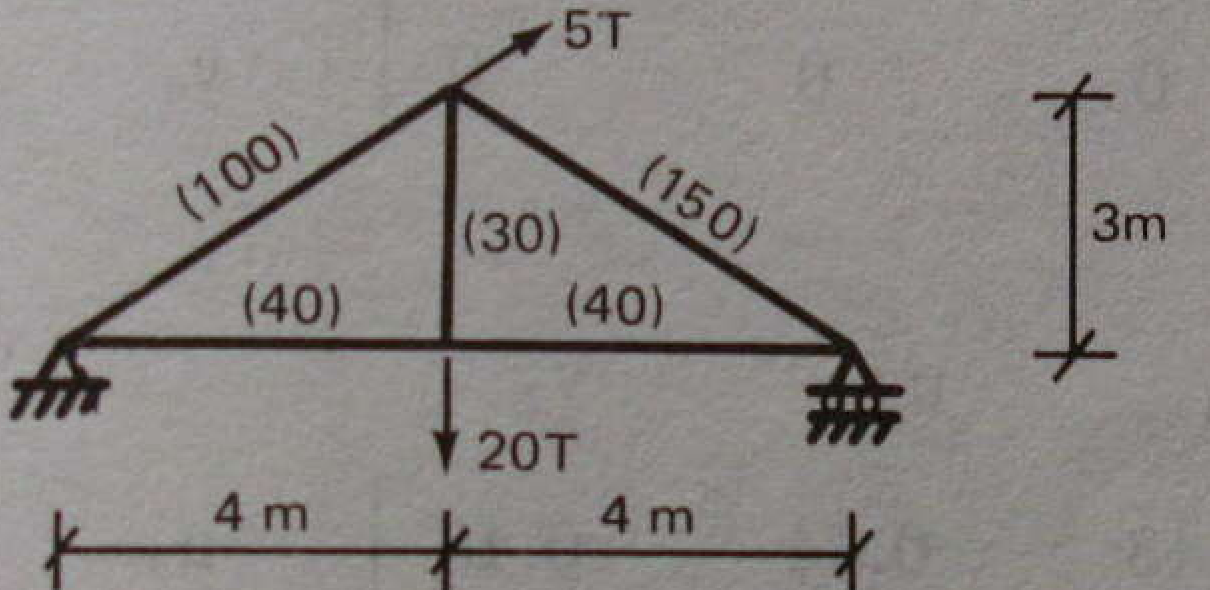
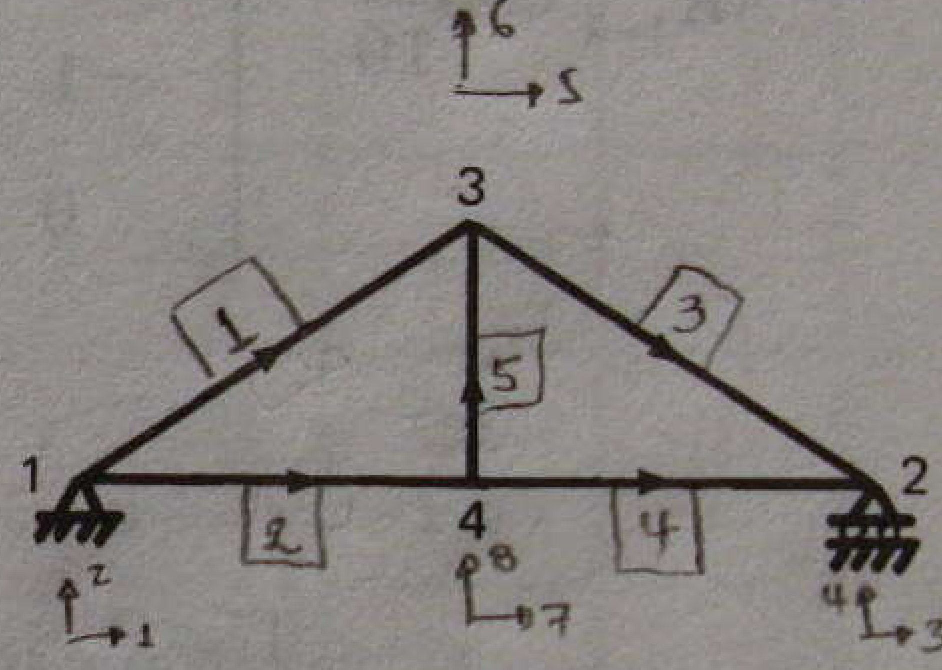
Ejemplo 11.3

Resuelva completamente la estructura mostrada. El material es acero estructural con $E = 2040\ T/cm^2$. Las áreas están dadas entre paréntesis en cm^2.





restringidos = 1, 2, 4.

Solución

Se empieza por numerar los nudos y asignarle un sentido a las barras (figura superior derecha). Obsérvese que se han numerado de últimos los nudos libres para minimizar el reordenamiento de la matriz de rigidez. A continuación se elabora el cuadro de funciones trigonométricas:

ELEMENTO	ϕ	cos ϕ	sen ϕ	$\cos^2\phi$	$\text{sen}^2\phi$	cos ϕ sen ϕ
1 1 – 3	36.87°	0.8	0.6	0.64	0.36	0.48
2 1 – 4	0°	1	0	1	0	0
3 3 – 2	–36.87°	0.8	–0.6	0.64	0.36	–0.48
4 4 – 2	0°	1	0	1	0	0
5 4 – 3	90°	0	1	0	1	0

utilizando este cuadro y la ecuación 11.29:

$$K_{1-3} = \frac{E}{5}\begin{array}{c} \begin{array}{cccc} u_1 & v_1 & u_3 & v_3 \end{array} \\ \left[\begin{array}{cccc} 0.64 & 0.48 & -0.64 & -0.48 \\ 0.48 & 0.36 & -0.48 & -0.36 \\ -0.64 & -0.48 & 0.64 & 0.48 \\ -0.48 & -0.36 & 0.48 & 0.36 \end{array}\right] \end{array} \begin{array}{c} \\ u_1 \\ v_1 \\ u_3 \\ v_3 \end{array}$$

$$K_{1-4} = \frac{E}{10}\begin{array}{c} \begin{array}{cccc} u_1 & v_1 & u_4 & v_4 \end{array} \\ \left[\begin{array}{cccc} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right] \end{array} \begin{array}{c} \\ u_1 \\ v_1 \\ u_4 \\ v_4 \end{array}$$

$$K_{3-2} = \frac{3E}{10}\begin{array}{c} \begin{array}{cccc} u_3 & v_3 & u_2 & v_2 \end{array} \\ \left[\begin{array}{cccc} 0.64 & -0.48 & -0.64 & 0.48 \\ -0.48 & 0.36 & 0.48 & -0.36 \\ -0.64 & 0.48 & 0.64 & -0.48 \\ 0.48 & -0.36 & -0.48 & 0.36 \end{array}\right] \end{array} \begin{array}{c} \\ u_3 \\ v_3 \\ u_2 \\ v_2 \end{array}$$

$$K_{4-2} = \frac{E}{10} \begin{array}{c} \begin{matrix} u_4 & v_4 & u_2 & v_2 \end{matrix} \\ \left[\begin{matrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{matrix}\right] \end{array} \begin{matrix} u_4 \\ v_4 \\ u_2 \\ v_2 \end{matrix}$$

$$K_{4-3} = \frac{E}{10} \begin{array}{c} \begin{matrix} u_4 & v_4 & u_3 & v_3 \end{matrix} \\ \left[\begin{matrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \end{matrix}\right] \end{array} \begin{matrix} u_4 \\ v_4 \\ u_3 \\ v_3 \end{matrix}$$

y ensamblando por superposición:

$K = \frac{E}{10}$

u_1	v_1	u_2	v_2	u_3	v_3	u_4	v_4	
1 1.28	0.96			−1.28	−0.96	−1		u_1
0.96	0.72			−0.96	−0.72			v_1
		1 1.92	−1.44	−1.92	1.44	−1		u_2
		−1.44	1.08	1.44	−1.08			v_2
−1.28	−0.96	−1.92	1.44	1.28 1.92	0.96 −1.44			u_3
−0.96	−0.72	1.44	−1.08	0.96 −1.44	1 0.72 1.08		−1	v_3
−1		−1				1 1		u_4
					−1		1	v_4

de manera que la ecuación matricial queda así:

$$\begin{bmatrix} X_1 \\ Y_1 \\ X_2 = 0 \\ Y_2 \\ X_3 = 4 \\ Y_3 = 3 \\ X_4 = 0 \\ Y_4 = -20 \end{bmatrix} = \frac{E}{10}\begin{bmatrix} 2.28 & 0.96 & 0 & 0 & -1.28 & -0.96 & -1 & 0 \\ 0.96 & 0.72 & 0 & 0 & -0.96 & -0.72 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2.92 & -1.44 & -1.92 & 1.44 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1.44 & 1.08 & 1.44 & -1.08 & 0 & 0 \\ -1.28 & -0.96 & -1.92 & 1.44 & 3.20 & -0.48 & 0 & 0 \\ -0.96 & -0.72 & 1.44 & -1.08 & -0.48 & 2.80 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} u_1 = 0 \\ v_1 = 0 \\ u_2 \\ v_2 = 0 \\ u_3 \\ v_3 \\ u_4 \\ v_4 \end{bmatrix}$$

Reordenando:

$$\left[\begin{array}{l} X_1 \\ Y_1 \\ Y_2 \\ \hline X_2 = 0 \\ X_3 = 4 \\ Y_3 = 3 \\ X_4 = 0 \\ Y_4 = -20 \end{array}\right] = \frac{E}{10}\left[\begin{array}{rrr|rrrrr} 2.28 & 0.96 & 0 & 0 & -1.28 & -0.96 & -1 & 0 \\ 0.96 & 0.72 & 0 & 0 & -0.96 & -0.72 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1.08 & -1.44 & 1.44 & -1.08 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & -1.44 & 2.92 & -1.92 & 1.44 & -1 & 0 \\ -1.28 & -0.96 & 1.44 & -1.92 & 3.20 & -0.48 & 0 & 0 \\ -0.96 & -0.72 & -1.08 & 1.44 & -0.48 & 2.80 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 1 \end{array}\right]\left[\begin{array}{l} u_1 = 0 \\ v_1 = 0 \\ v_2 = 0 \\ \hline u_2 \\ u_3 \\ v_3 \\ u_4 \\ v_4 \end{array}\right]$$

Obsérvese que al mismo resultado se habría llegado si el ensamblaje se hubiese hecho directamente en este orden. Efectuando la partición en la forma establecida e invirtiendo (véase el Apéndice C):

$$\begin{bmatrix} u_2 \\ u_3 \\ v_3 \\ u_4 \\ v_4 \end{bmatrix} = \frac{10}{E} \begin{bmatrix} 2.92 & -1.92 & 1.44 & -1 & 0 \\ -1.92 & 3.20 & -0.48 & 0 & 0 \\ 1.44 & -0.48 & 2.80 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 1 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 0 \\ 4 \\ 3 \\ 0 \\ -20 \end{bmatrix} =$$

$$= \frac{10}{E} \begin{bmatrix} 2 & 1 & -1.333 & 1 & -1.333 \\ 1 & 0.826 & -0.580 & 0.500 & -0.580 \\ -1.333 & -0.580 & 1.468 & -0.667 & 1.468 \\ 1 & 0.500 & -0.667 & 1 & -0.667 \\ -1.333 & -0.580 & 1.468 & -0.667 & 2.468 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 4 \\ 3 \\ 0 \\ -20 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} .1307 \\ .0645 \\ -.1337 \\ .0654 \\ -.2317 \end{bmatrix} \text{cm}$$

Ahora se pueden calcular las reacciones:

$$\begin{bmatrix} X_1 \\ Y_1 \\ Y_2 \end{bmatrix} = 204 \begin{bmatrix} 0 & -1.28 & -0.96 & -1 & 0 \\ 0 & -0.96 & -0.72 & 0 & 0 \\ -1.44 & 1.44 & -1.08 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} .1307 \\ .0645 \\ -.1337 \\ .0654 \\ -.2317 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -4 \\ 7.01 \\ 10.01 \end{bmatrix}_T$$

Finalmente se calculan las fuerzas internas

$$S_{1-3} = 408 \quad [\,0.8 \quad 0.6\,] \begin{bmatrix} 0.0645 - 0 \\ -0.1337 - 0 \end{bmatrix} = -11.68\ \text{T} \quad (\text{C})$$

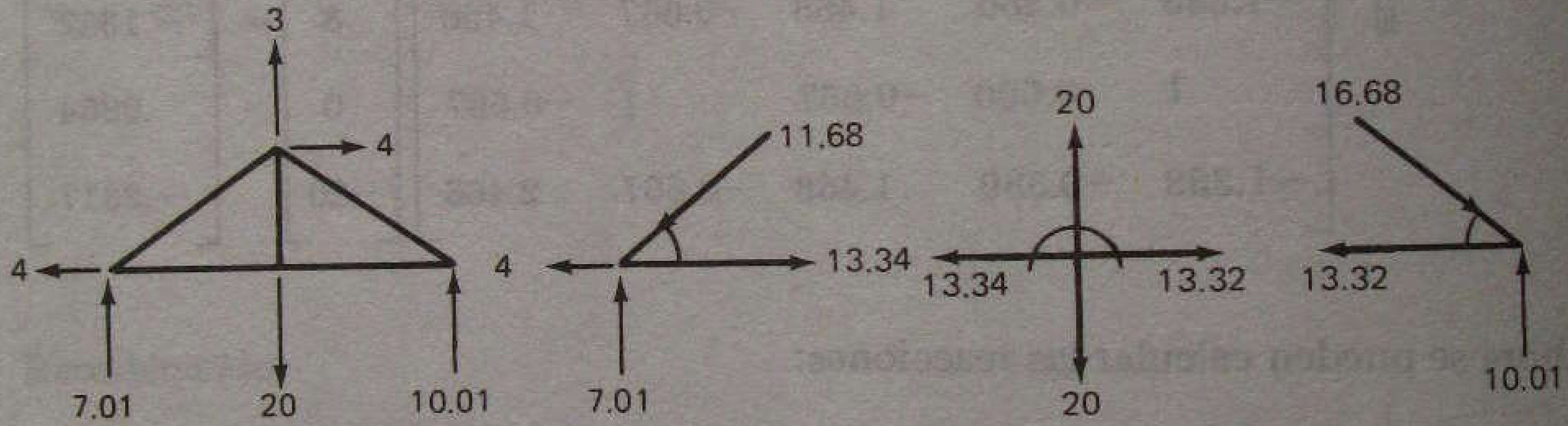
$$S_{1-4} = 204 \quad [\,1 \quad 0\,] \begin{bmatrix} 0.0654 - 0 \\ -0.2317 - 0 \end{bmatrix} = 13.34\ \text{T} \quad (\text{T})$$

$$S_{3-2} = 612 \begin{bmatrix} 0.8 & -0.6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0.1307 - 0.0645 \\ 0 \quad + 0.1337 \end{bmatrix} = -16.68\ \text{T} \quad (\text{C})$$

$$S_{4-2} = 204 \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0.1307 - 0.0654 \\ 0 \quad + 0.2317 \end{bmatrix} = 13.32\ \text{T} \quad (\text{T})$$

$$S_{4-3} = 204 \begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0.0645 - 0.0654 \\ -0.1337 + 0.2317 \end{bmatrix} = 20.00\ \text{T} \quad (\text{T})$$

los siguientes diagramas prueban la bondad de estas respuestas:



$\Sigma F_x = 0$ $\qquad$ $\Sigma F_x = 0$ $\qquad$ $\Sigma F_x = .02\ \text{T} \leftarrow$ $\qquad$ $\Sigma F_x = .02\ \text{T} \rightarrow$

$\Sigma F_y = 0.02\ \text{T} \uparrow$ $\qquad$ $\Sigma F_y = 0$ $\qquad$ $\Sigma F_y = 0$ $\qquad$ $\Sigma F_y = 0$

$\Sigma M_A = 0.08\ \text{T.m}$