

00 – Conceptos fundamentales de la mecánica de sólidos

Diego Andrés Álvarez Marín
Profesor Asistente
Universidad Nacional de Colombia
Sede Manizales



Contenido

- Esfuerzos, esfuerzos principales
- Deformaciones
- Ley de Hooke
- Tensión plana, deformación plana
- Ecuaciones diferenciales fundamentales de la teoría de la elasticidad
- Energía potencial elástica, energía ejercida por las fuerzas superficiales y másicas
- Principio del trabajo virtual

Fuerzas que actúan sobre un sólido

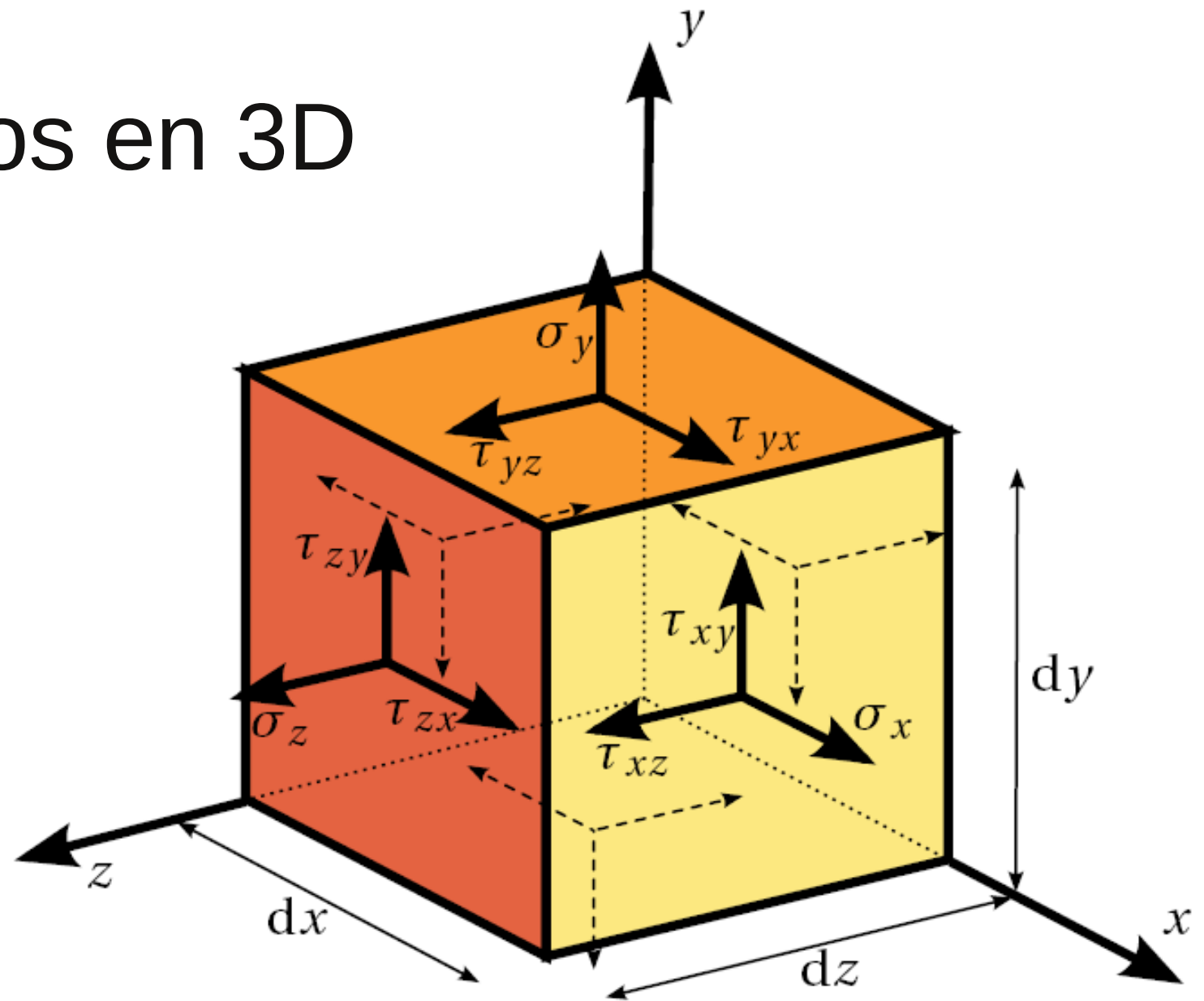
- Fuerzas de contacto o superficiales

$$\mathbf{f}_{\Gamma}(x, y, z) := [\bar{X}(x, y, z), \bar{Y}(x, y, z), \bar{Z}(x, y, z)]^T$$

- Fuerzas másicas o de volumen

$$\mathbf{b}(x, y, z) := [X(x, y, z), Y(x, y, z), Z(x, y, z)]^T$$

Esfuerzos en 3D

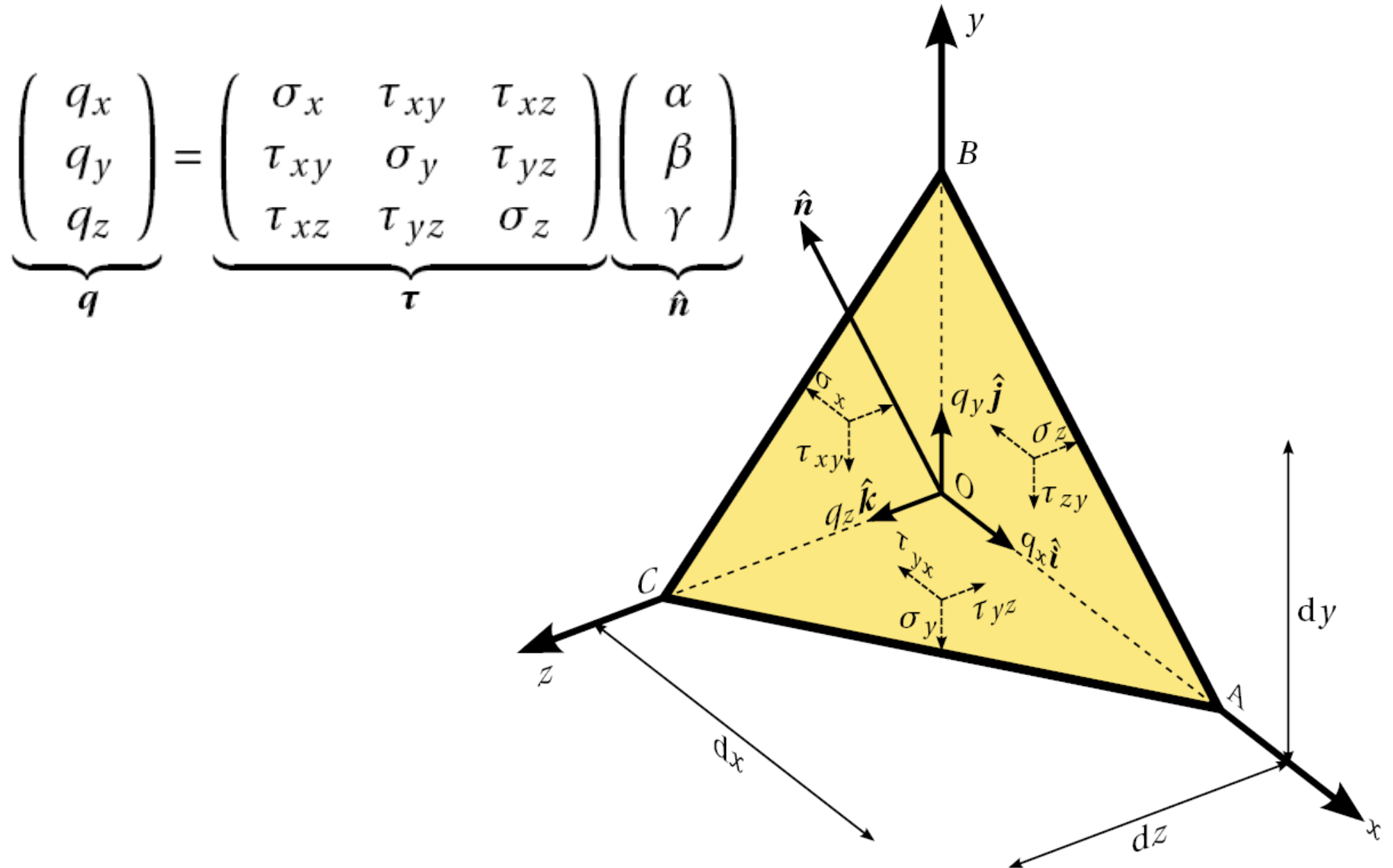


$$\tau_{yz} = \tau_{zy}$$

$$\tau_{zx} = \tau_{xz}$$

$$\tau_{xy} = \tau_{yx}$$

Esfuerzos en 3D



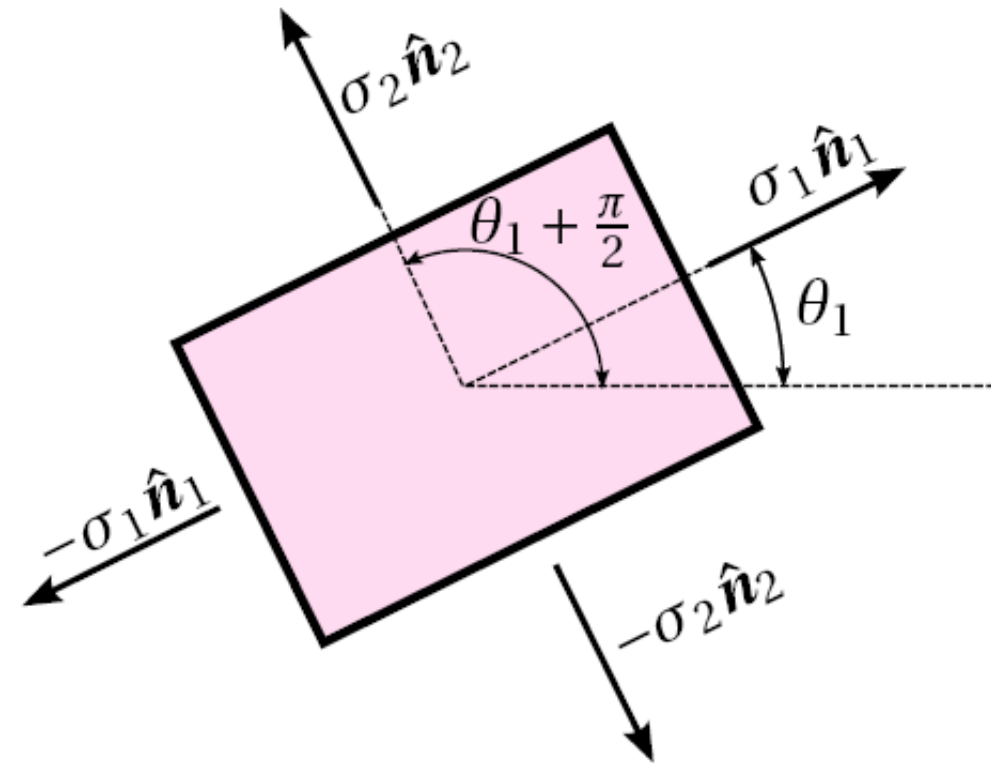
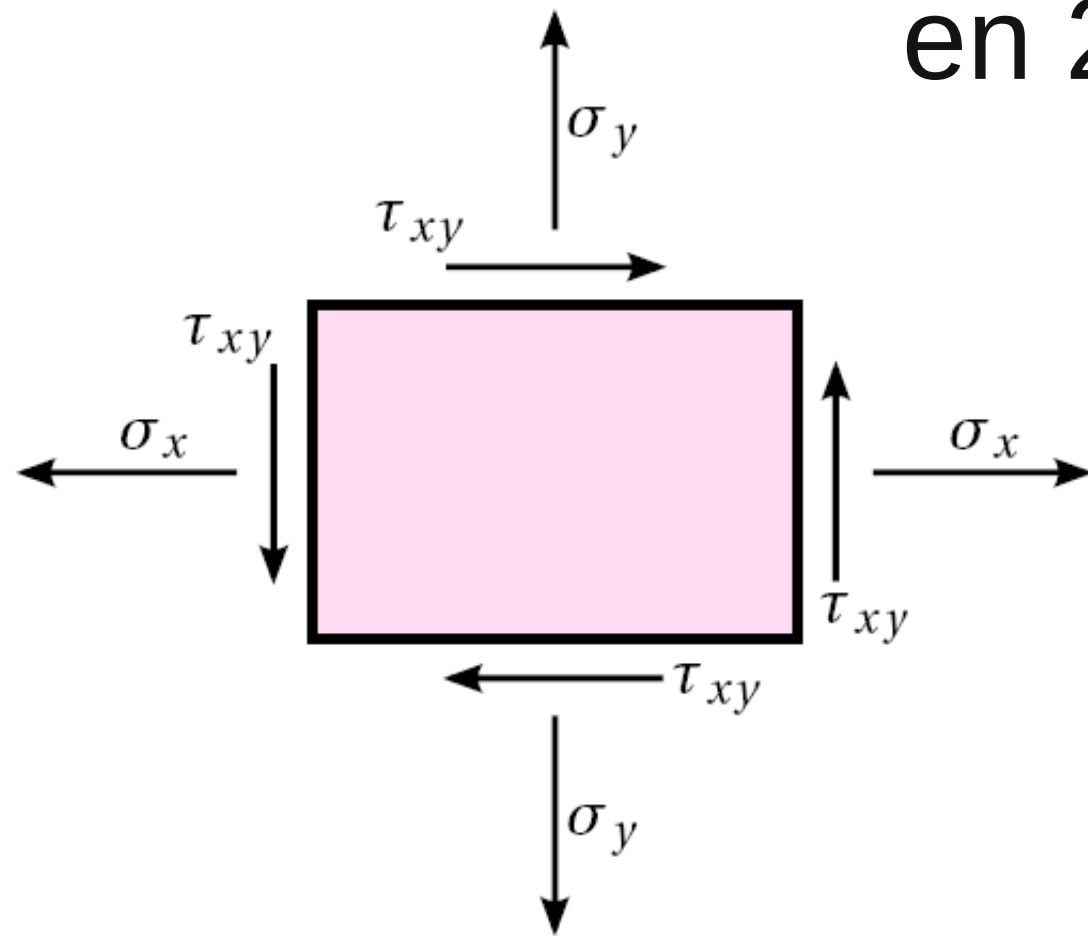
Esfuerzos y direcciones principales

- Se encuentran al obtener los valores y vectores propios de la matriz de tensiones

$$\boldsymbol{\tau} \hat{\mathbf{n}} = \sigma_n \hat{\mathbf{n}};$$

$$\det(\boldsymbol{\tau} - \sigma_n \mathbf{I}) = 0.$$

Esfuerzos y direcciones principales en 2D



$$\sigma_1 = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} + \sqrt{\left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\right)^2 + \tau_{xy}^2}$$

$$\sigma_2 = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} - \sqrt{\left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\right)^2 + \tau_{xy}^2}$$

$$\tan 2\theta = \frac{2\tau_{xy}}{\sigma_x - \sigma_y}$$

$$\tau_{\text{máx}} = \frac{\sigma_1 - \sigma_2}{2}$$

Ejemplo bidimensional

```
>> [vecp, valp] = eig([3 -4; -4 2])
```

```
vecp =
```

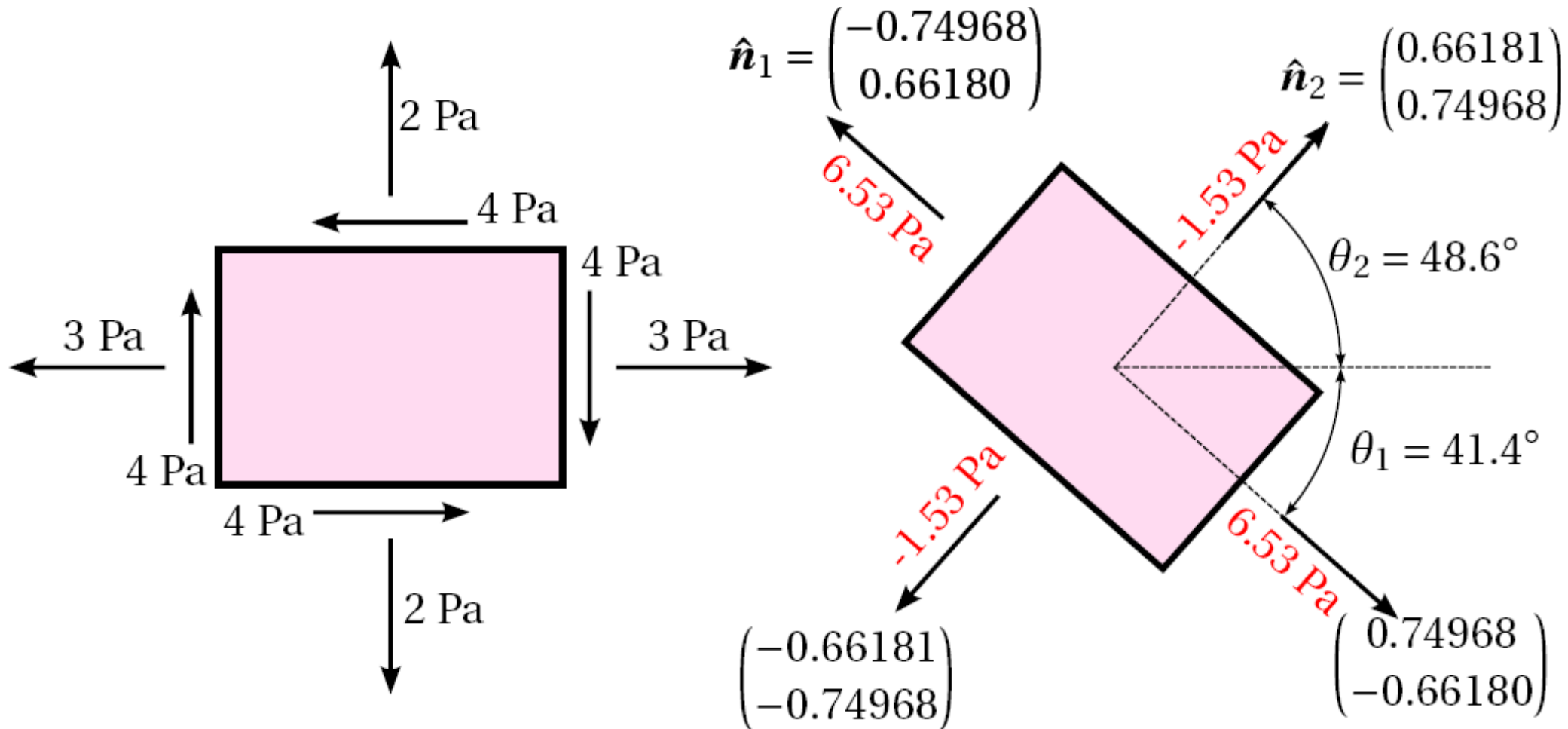
```
    -0.6618    -0.7497  
    -0.7497     0.6618
```

$$\boldsymbol{\tau} = \begin{pmatrix} 3 & -4 \\ -4 & 2 \end{pmatrix}$$

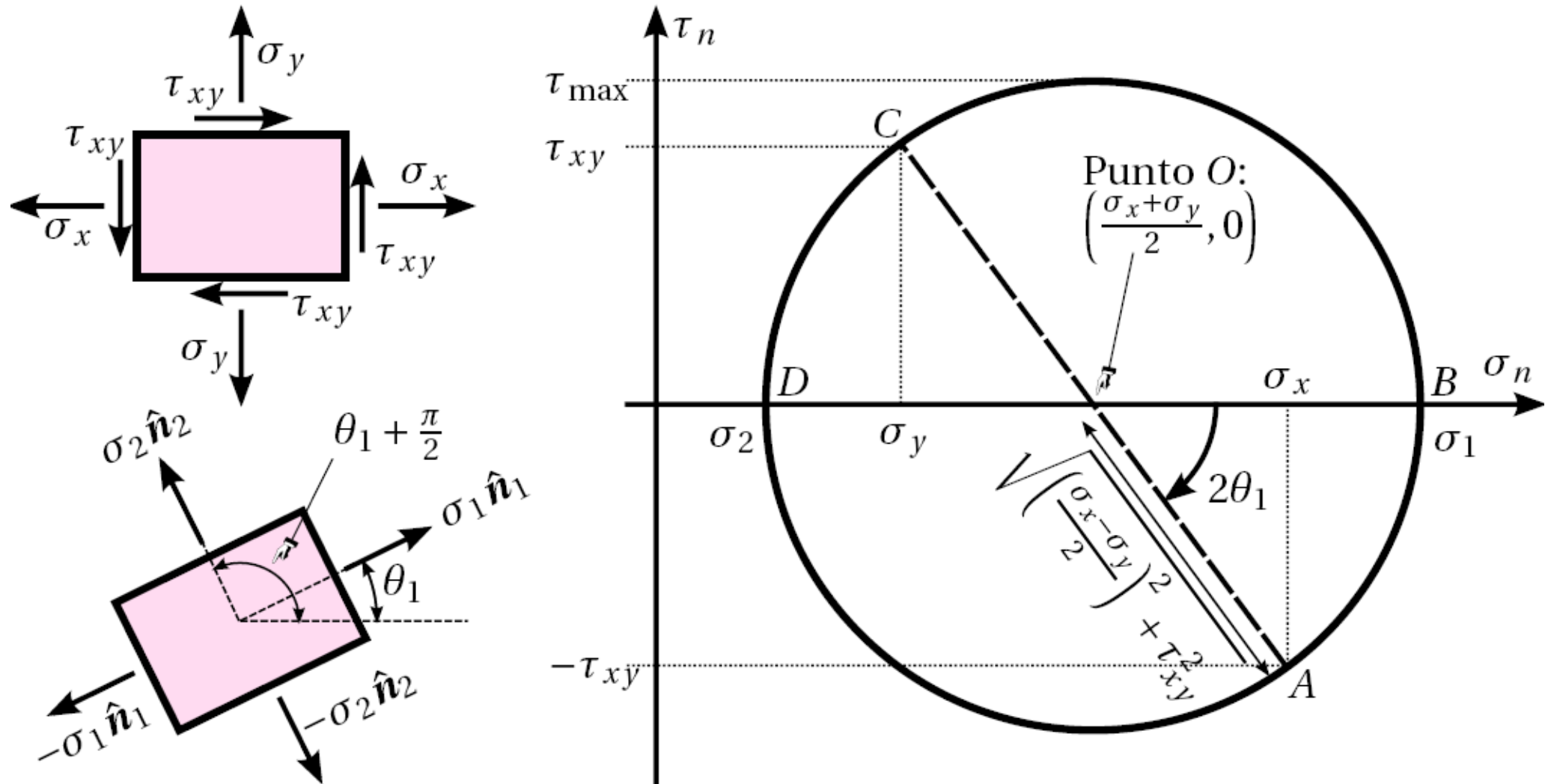
```
valp =
```

```
    -1.5311         0  
         0     6.5311
```

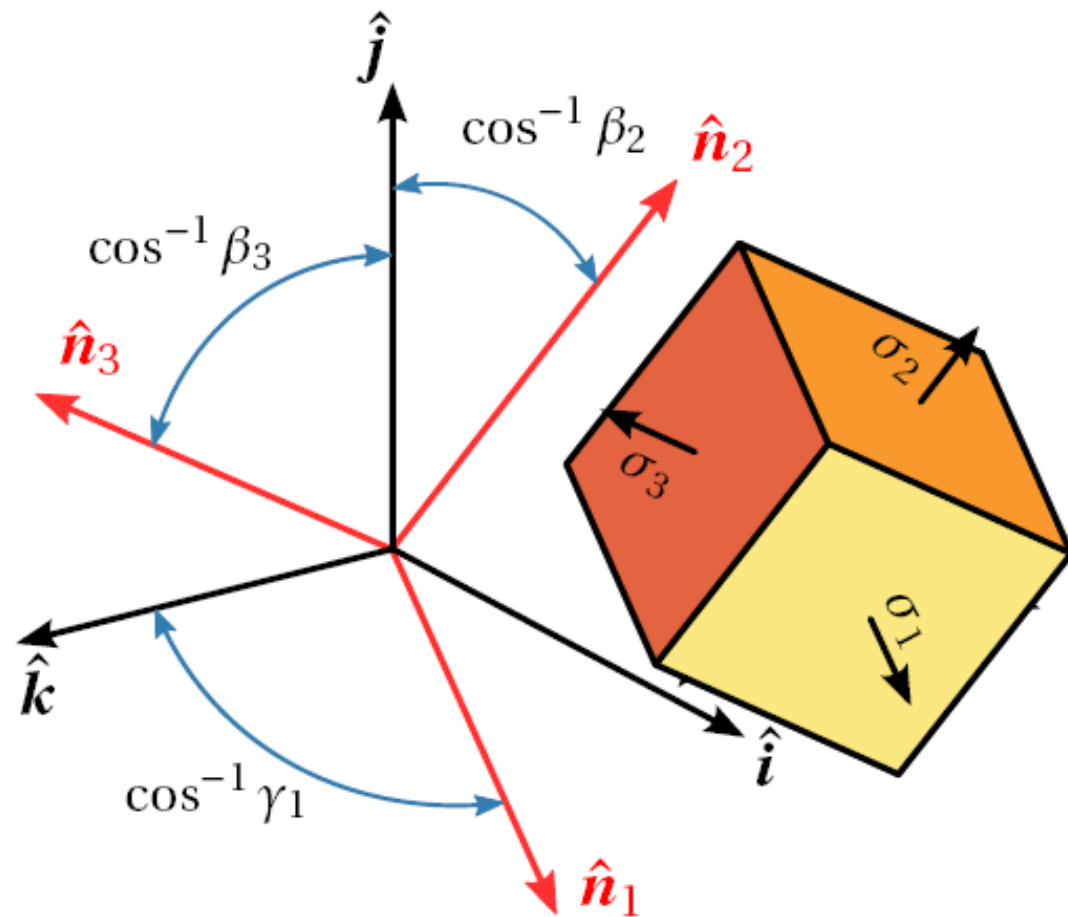
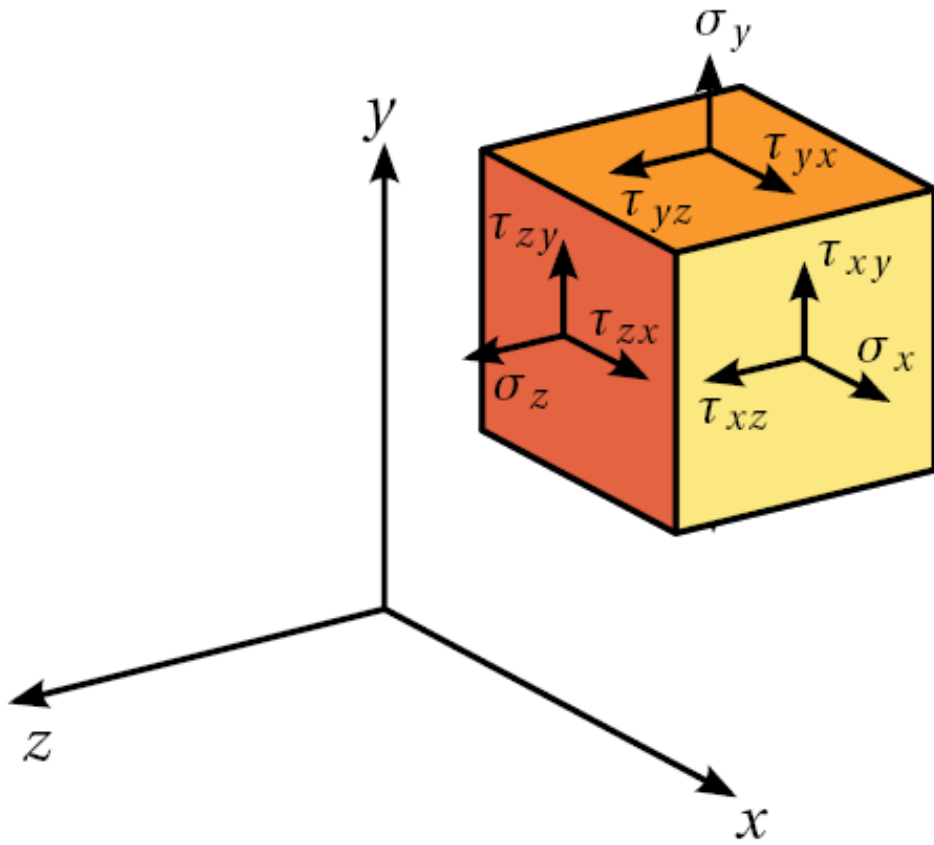

Ejemplo bidimensional



Círculo de Mohr en 2D



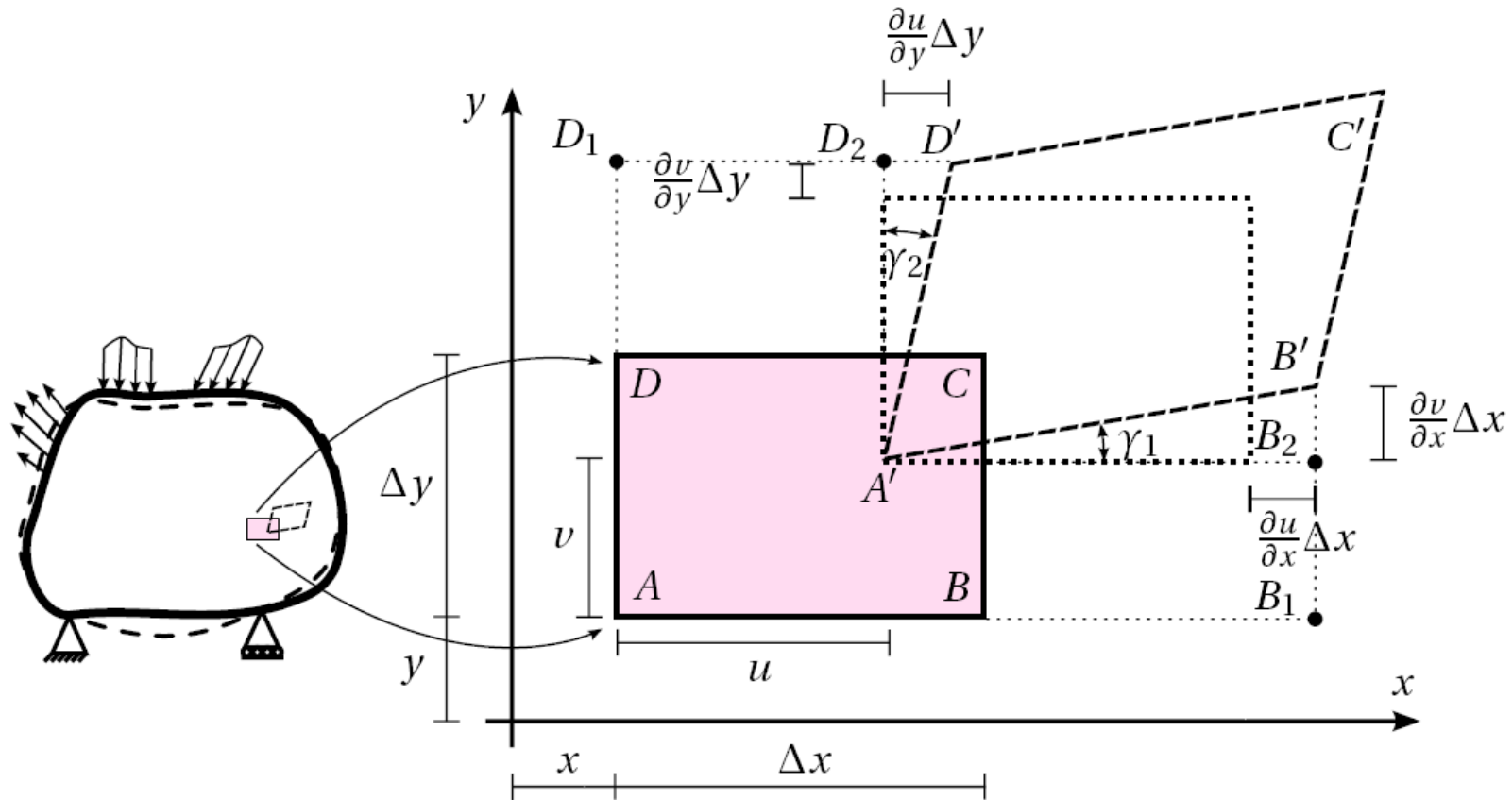
Esfuerzos y direcciones principales en 3D



$$\boldsymbol{\tau} = \begin{pmatrix} \sigma_x & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{xy} & \sigma_y & \tau_{yz} \\ \tau_{xz} & \tau_{yz} & \sigma_z \end{pmatrix}$$

$$\boldsymbol{\tau} \hat{n} = \sigma_n \hat{n};$$

Deformaciones longitudinales



$$\varepsilon = \lim_{\Delta L \rightarrow 0} \frac{\Delta \delta}{\Delta L}$$

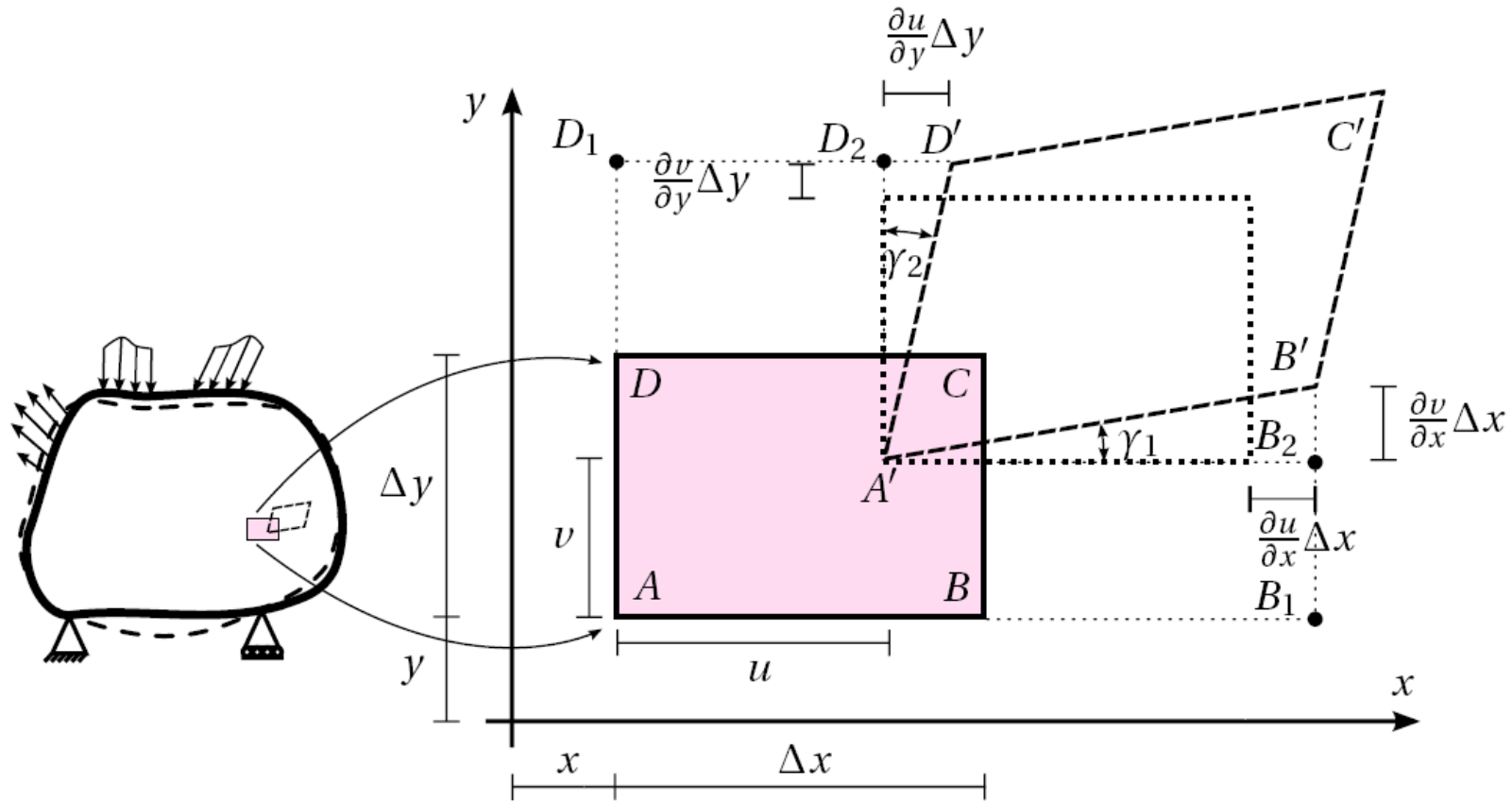
$$\varepsilon_x = \lim_{AB \rightarrow 0} \frac{A'B' - AB}{AB}$$

$$\varepsilon_x(x, y, z) := \left. \frac{\partial u}{\partial x} \right|_{(x, y, z)}$$

$$\varepsilon_y(x, y, z) := \left. \frac{\partial v}{\partial y} \right|_{(x, y, z)}$$

$$\varepsilon_z(x, y, z) := \left. \frac{\partial w}{\partial z} \right|_{(x, y, z)}$$

Deformaciones angulares



$$\gamma_{xy} := \lim_{\substack{\Delta x \rightarrow 0 \\ \Delta y \rightarrow 0}} (\gamma_1 + \gamma_2)$$

$$\gamma_{xy} \approx \lim_{\substack{\Delta x \rightarrow 0 \\ \Delta y \rightarrow 0}} \left(\frac{B_2 B'}{A' B_2} + \frac{D_2 D'}{A' D_2} \right)$$

$$\gamma_{xy}(x, y, z) := \frac{\partial u(x, y, z)}{\partial y} + \frac{\partial v(x, y, z)}{\partial x}$$

$$\gamma_{xz}(x, y, z) := \frac{\partial u(x, y, z)}{\partial z} + \frac{\partial w(x, y, z)}{\partial x}$$

$$\gamma_{yz}(x, y, z) := \frac{\partial v(x, y, z)}{\partial z} + \frac{\partial w(x, y, z)}{\partial y}$$

Ley de Hooke: relación entre esfuerzos y deformaciones

$$\sigma_x = \lambda e + 2G\varepsilon_x$$

$$\sigma_y = \lambda e + 2G\varepsilon_y$$

$$\sigma_z = \lambda e + 2G\varepsilon_z$$

$$\tau_{xy} = G\gamma_{xy}$$

$$\tau_{xz} = G\gamma_{xz}$$

$$\tau_{yz} = G\gamma_{yz}$$

$$\lambda := \frac{\nu E}{(1 + \nu)(1 - 2\nu)}$$

$$G := \frac{E}{2(1 + \nu)}$$

Ley de Hooke: relación entre esfuerzos y deformaciones

$$\begin{pmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \sigma_z \\ \tau_{yz} \\ \tau_{xz} \\ \tau_{xy} \end{pmatrix} = \frac{E}{(1+\nu)} \begin{pmatrix} \frac{1-\nu}{1-2\nu} & \frac{\nu}{1-2\nu} & \frac{\nu}{1-2\nu} & 0 & 0 & 0 \\ \frac{\nu}{1-2\nu} & \frac{1-\nu}{1-2\nu} & \frac{\nu}{1-2\nu} & 0 & 0 & 0 \\ \frac{\nu}{1-2\nu} & \frac{\nu}{1-2\nu} & \frac{1-\nu}{1-2\nu} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1/2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1/2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \varepsilon_z \\ \gamma_{yz} \\ \gamma_{xz} \\ \gamma_{xy} \end{pmatrix}$$

$$\boldsymbol{\sigma} = \mathbf{C}\boldsymbol{\varepsilon}$$

$$\sigma_{ij} = c_{ijkl}\varepsilon_{kl}$$

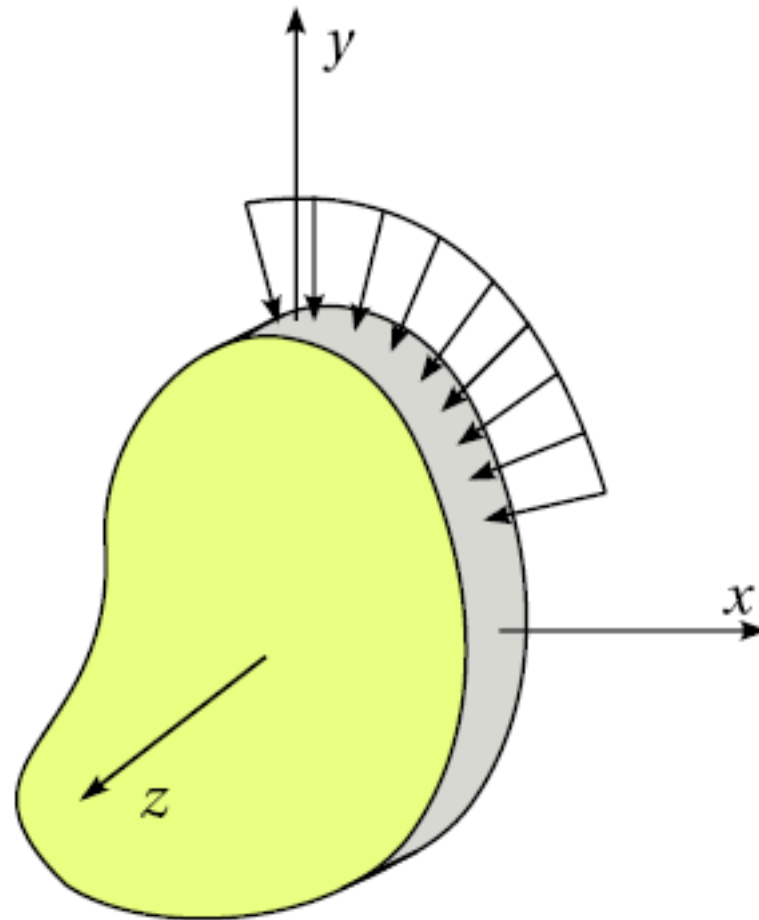
Tensión plana

tensión plana

$$\sigma_z = 0$$

$$\tau_{xz} = 0$$

$$\tau_{yz} = 0$$



$$\begin{pmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{E}{1-\nu^2} & \frac{E\nu}{1-\nu^2} & 0 \\ \frac{E\nu}{1-\nu^2} & \frac{E}{1-\nu^2} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{E}{2(1+\nu)} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \epsilon_x \\ \epsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{pmatrix}$$

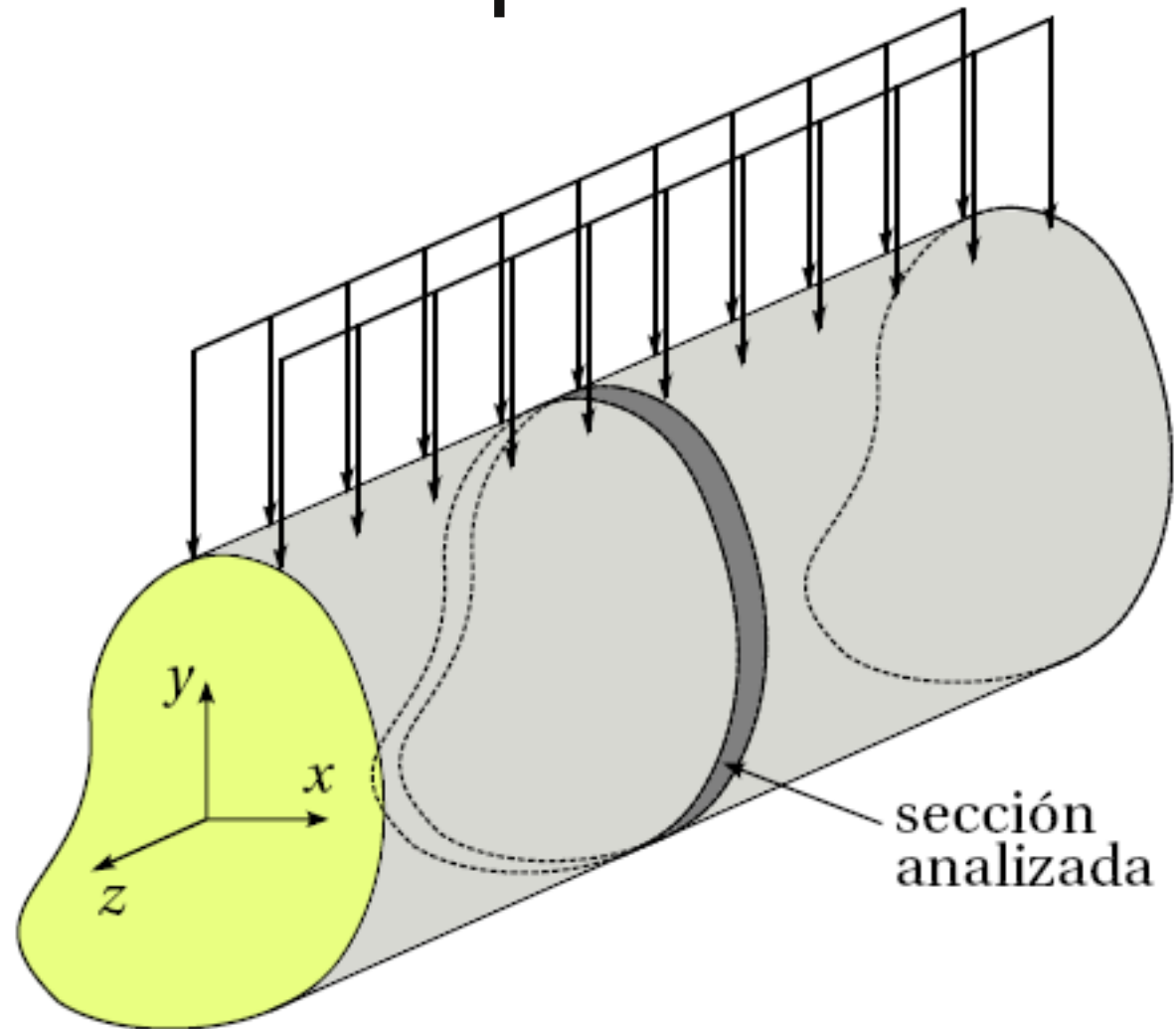
Deformación plana

deformación plana

$$\varepsilon_z = 0$$

$$\gamma_{xz} = 0$$

$$\gamma_{yz} = 0$$



$$\begin{pmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{E(1-\nu)}{(1+\nu)(1-2\nu)} & \frac{E\nu}{(1+\nu)(1-2\nu)} & 0 \\ \frac{E\nu}{(1+\nu)(1-2\nu)} & \frac{E(1-\nu)}{(1+\nu)(1-2\nu)} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{E}{2(1+\nu)} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{pmatrix}$$

Ecuaciones diferenciales de equilibrio

Estas establecen el equilibrio de fuerzas al interior de un sólido

$$\frac{\partial \sigma_x(x, y, z)}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}(x, y, z)}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{xz}(x, y, z)}{\partial z} + X(x, y, z) = 0$$

$$\frac{\partial \tau_{xy}(x, y, z)}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_y(x, y, z)}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{yz}(x, y, z)}{\partial z} + Y(x, y, z) = 0$$

$$\frac{\partial \tau_{xz}(x, y, z)}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yz}(x, y, z)}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_z(x, y, z)}{\partial z} + Z(x, y, z) = 0;$$

Ecuaciones de compatibilidad

$$\frac{\partial^2 \varepsilon_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \varepsilon_y}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 \gamma_{xy}}{\partial x \partial y}$$

$$\frac{\partial^2 \varepsilon_y}{\partial z^2} + \frac{\partial^2 \varepsilon_z}{\partial y^2} = \frac{\partial^2 \gamma_{yz}}{\partial y \partial z}$$

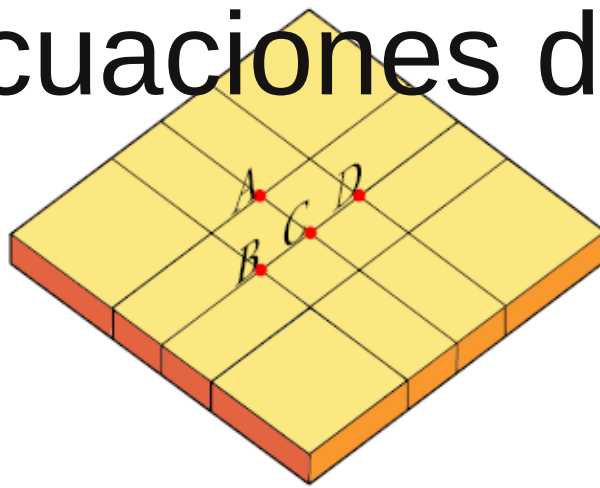
$$\frac{\partial^2 \varepsilon_z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varepsilon_x}{\partial z^2} = \frac{\partial^2 \gamma_{xz}}{\partial x \partial z}$$

$$2 \frac{\partial^2 \varepsilon_x}{\partial y \partial z} = \frac{\partial}{\partial x} \left(-\frac{\partial \gamma_{yz}}{\partial x} + \frac{\partial \gamma_{xz}}{\partial y} + \frac{\partial \gamma_{xy}}{\partial z} \right)$$

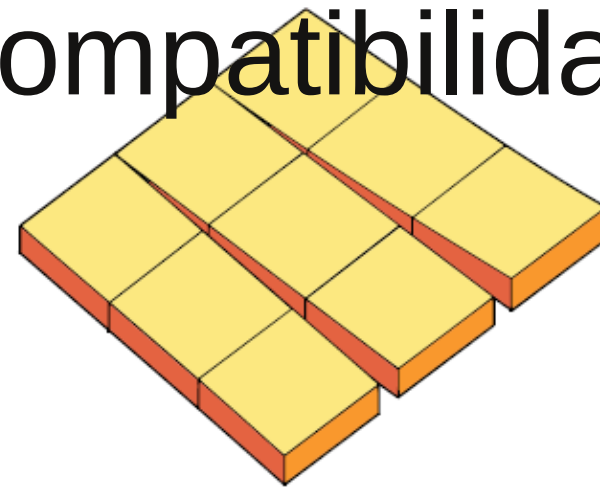
$$2 \frac{\partial^2 \varepsilon_y}{\partial x \partial z} = \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial \gamma_{yz}}{\partial x} - \frac{\partial \gamma_{xz}}{\partial y} + \frac{\partial \gamma_{xy}}{\partial z} \right)$$

$$2 \frac{\partial^2 \varepsilon_z}{\partial x \partial y} = \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\partial \gamma_{yz}}{\partial x} + \frac{\partial \gamma_{xz}}{\partial y} - \frac{\partial \gamma_{xy}}{\partial z} \right);$$

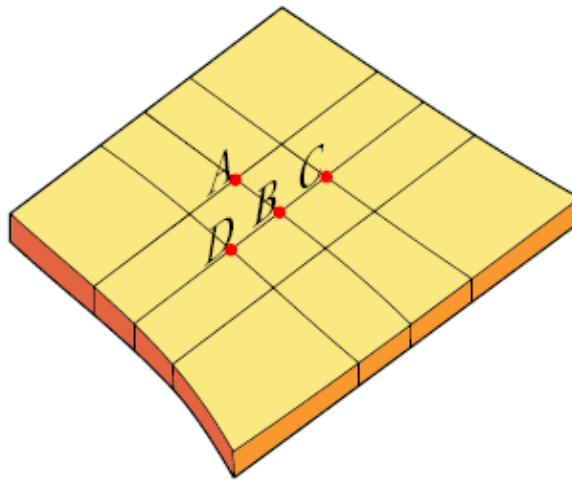
Ecuaciones de compatibilidad



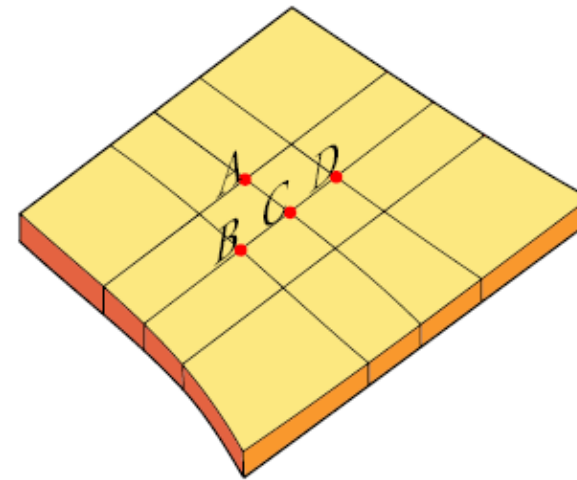
original



deformación no compatible: grietas



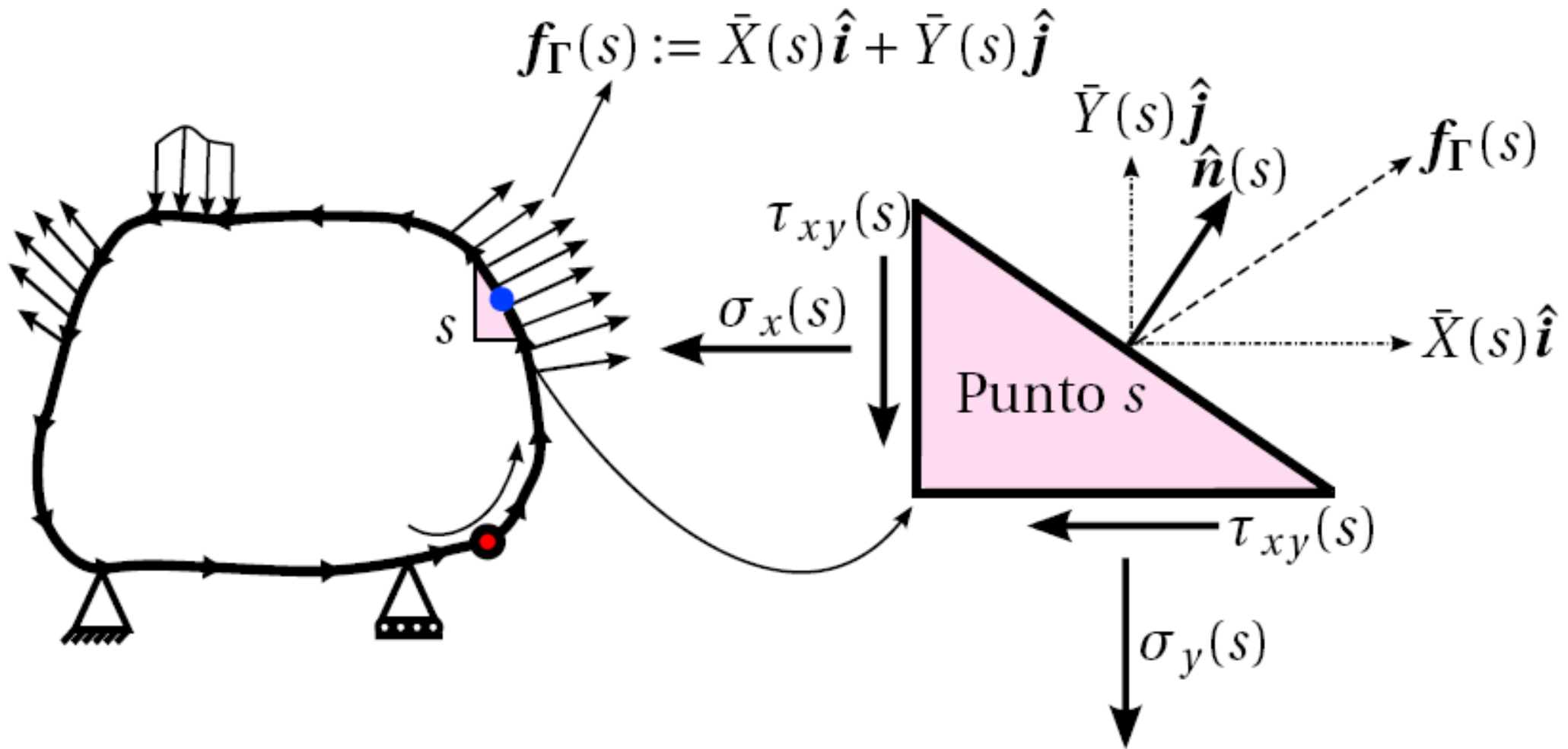
deformación no compatible: traslapos



deformación compatible

Figura 5.2: Las condiciones de compatibilidad expresan la idea que, después de la deformación, el cuerpo es todavía continuo en el sentido que en su interior no han aparecido ni grietas, huecos o vacíos y como no existirán traslapos de material la posición relativa de las partículas se conservará.

Condiciones de equilibrio en la frontera



$$\underbrace{\begin{pmatrix} \bar{X}(s) \\ \bar{Y}(s) \end{pmatrix}}_{\bar{f}_\Gamma(s)} = \underbrace{\begin{pmatrix} \sigma_x(s) & \tau_{xy}(s) \\ \tau_{xy}(s) & \sigma_y(s) \end{pmatrix}}_{\boldsymbol{\tau}(s)} \underbrace{\begin{pmatrix} \alpha(s) \\ \beta(s) \end{pmatrix}}_{\hat{n}(s)}.$$

Ecuaciones diferenciales de Cauchy-Navier

$$(\lambda + G) \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} \right) + G \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \right) + X = 0$$

$$(\lambda + G) \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} \right) + G \left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial z^2} \right) + Y = 0$$

$$(\lambda + G) \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} \right) + G \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial z^2} \right) + Z = 0$$

con las condiciones de frontera:

$$\begin{pmatrix} \bar{X} \\ \bar{Y} \\ \bar{Z} \end{pmatrix} = \left(\begin{bmatrix} \lambda e & 0 & 0 \\ 0 & \lambda e & 0 \\ 0 & 0 & \lambda e \end{bmatrix} + G \begin{bmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} & \frac{\partial u}{\partial y} & \frac{\partial u}{\partial z} \\ \frac{\partial v}{\partial x} & \frac{\partial v}{\partial y} & \frac{\partial v}{\partial z} \\ \frac{\partial w}{\partial x} & \frac{\partial w}{\partial y} & \frac{\partial w}{\partial z} \end{bmatrix} + G \begin{bmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} & \frac{\partial v}{\partial x} & \frac{\partial w}{\partial x} \\ \frac{\partial u}{\partial y} & \frac{\partial v}{\partial y} & \frac{\partial w}{\partial y} \\ \frac{\partial u}{\partial z} & \frac{\partial v}{\partial z} & \frac{\partial w}{\partial z} \end{bmatrix} \right) \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{pmatrix}$$

Unicidad de la solución

Una pregunta natural que resulta al plantear las ecuaciones de Cauchy-Navier junto con sus correspondientes condiciones de frontera es si la solución a dichas ecuaciones es única, o si por lo contrario existen varias soluciones al mismo tiempo que las satisfacen.

El físico alemán Gustav Robert Kirchhoff (1824--1887) determinó que si una solución existe, esta es única en términos de esfuerzos y deformaciones y que los desplazamientos son únicos dentro de los límites impuestos por un movimiento rígido arbitrario; es decir, dos soluciones diferentes al mismo problema no pueden existir excepto para soluciones que únicamente difieren en rotaciones y translaciones rígidas.

Energía elástica potencial almacenada en un sólido

Cuando un cuerpo elástico está sometido a la acción de fuerzas externas, éste se deforma y por lo tanto, las fuerzas realizan cierta cantidad de trabajo al deformarla. Si se descarga lentamente el cuerpo deformado, este regresará todo el trabajo hecho por esas fuerzas externas. Por tal razón, el trabajo hecho al deformar dicho cuerpo puede considerarse como energía almacenada en el sólido; a esta energía se le conoce como *energía de deformación* o *energía potencial elástica*.

La energía aplicada al sólido (suponiendo que este no intercambia calor con el medio) se convierte en:

$$\text{Energía aplicada} = \text{Energía térmica} + \text{Energía potencial elástica} + \text{Energía cinética}, \quad (11.5)$$

sin embargo, si se deforma un sólido lentamente, las energías térmica y cinética que aparecen en el proceso tendrán una magnitud despreciable en comparación a la energía potencial elástica, por lo tanto la expresión (11.5) se puede reducir a:

$$\text{Energía aplicada} \approx \text{Energía potencial elástica}$$

Energía elástica potencial almacenada en un sólido

$$W_{\text{elast}} = \frac{1}{2} \iiint_{\Omega} \boldsymbol{\sigma} \cdot \boldsymbol{\varepsilon} \, dV$$

$$\boldsymbol{\sigma} = [\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z, \tau_{yz}, \tau_{xz}, \tau_{xy}]^T$$

$$\boldsymbol{\varepsilon} = [\varepsilon_x, \varepsilon_y, \varepsilon_z, \gamma_{yz}, \gamma_{xz}, \gamma_{xy}]^T$$

Energía externa aplicada por las fuerzas másicas y superficiales

$$W_{\text{ext}} = \oiint_{\partial\Omega} (\bar{X}u + \bar{Y}v + \bar{Z}w) \, dS + \iiint_{\Omega} (Xu + Yv + Zw) \, dx \, dy \, dz$$

Principio del trabajo virtual para sólidos deformables

Un sólido deformable está en equilibrio bajo la acción de un sistema de fuerzas másicas, superficiales y exteriores puntuales, si y solo si al imponer a la misma unos desplazamientos arbitrarios (virtuales) compatibles con las condiciones en los apoyos y de continuidad del campo de deformaciones, el trabajo virtual hecho por esas fuerzas sobre los desplazamientos virtuales es igual al trabajo que realizan los esfuerzos en el sólido sobre las deformaciones $\delta\epsilon$ producidas por los desplazamientos virtuales.

$$\text{3D} \blacktriangleright \iiint_{\Omega} \mathbf{b} \cdot \delta \mathbf{u} \, dV + \oiint_{\partial\Omega} \mathbf{f} \cdot \delta \mathbf{u} \, dS + \sum_{i=1}^n \mathbf{q}_i \cdot \delta \mathbf{u}_i = \iiint_{\Omega} \boldsymbol{\sigma} \cdot \delta \boldsymbol{\epsilon} \, dV$$

$$\text{2D} \blacktriangleright t \iint_{\Omega} \mathbf{b} \cdot \delta \mathbf{u} \, dA + t \oint_{\partial\Omega} \mathbf{f} \cdot \delta \mathbf{u} \, dS + \sum_{i=1}^n \mathbf{q}_i \cdot \delta \mathbf{u}_i = t \iint_{\Omega} \boldsymbol{\sigma} \cdot \delta \boldsymbol{\epsilon} \, dA$$

Principio de la energía potencial mínima

De todos los desplazamientos \mathbf{v} que satisfacen unas condiciones de frontera dadas, aquellos desplazamientos \mathbf{u} que satisfacen las condiciones de equilibrio son las que hacen que la energía potencial total Π del sistema asuma un valor estacionario (máximo, mínimo o punto silla) que será $\Pi(\mathbf{u})$. El equilibrio estable se produce cuando $\Pi(\mathbf{u})$ es un mínimo absoluto.

$$\Pi(\mathbf{u}) = \frac{1}{2} \iiint_{\Omega} \boldsymbol{\sigma} \cdot \boldsymbol{\epsilon} \, dV - \iiint_{\Omega} \mathbf{b} \cdot \mathbf{u} \, dV - \oint_{\partial\Omega} \mathbf{f} \cdot \mathbf{u} \, dS - \sum_{i=1}^n \mathbf{q}_i \cdot \mathbf{u}_i$$

$$\delta\Pi(\mathbf{u}) = 0$$

$$\Pi(\mathbf{u}) \leq \Pi(\mathbf{u} + \delta\mathbf{u})$$