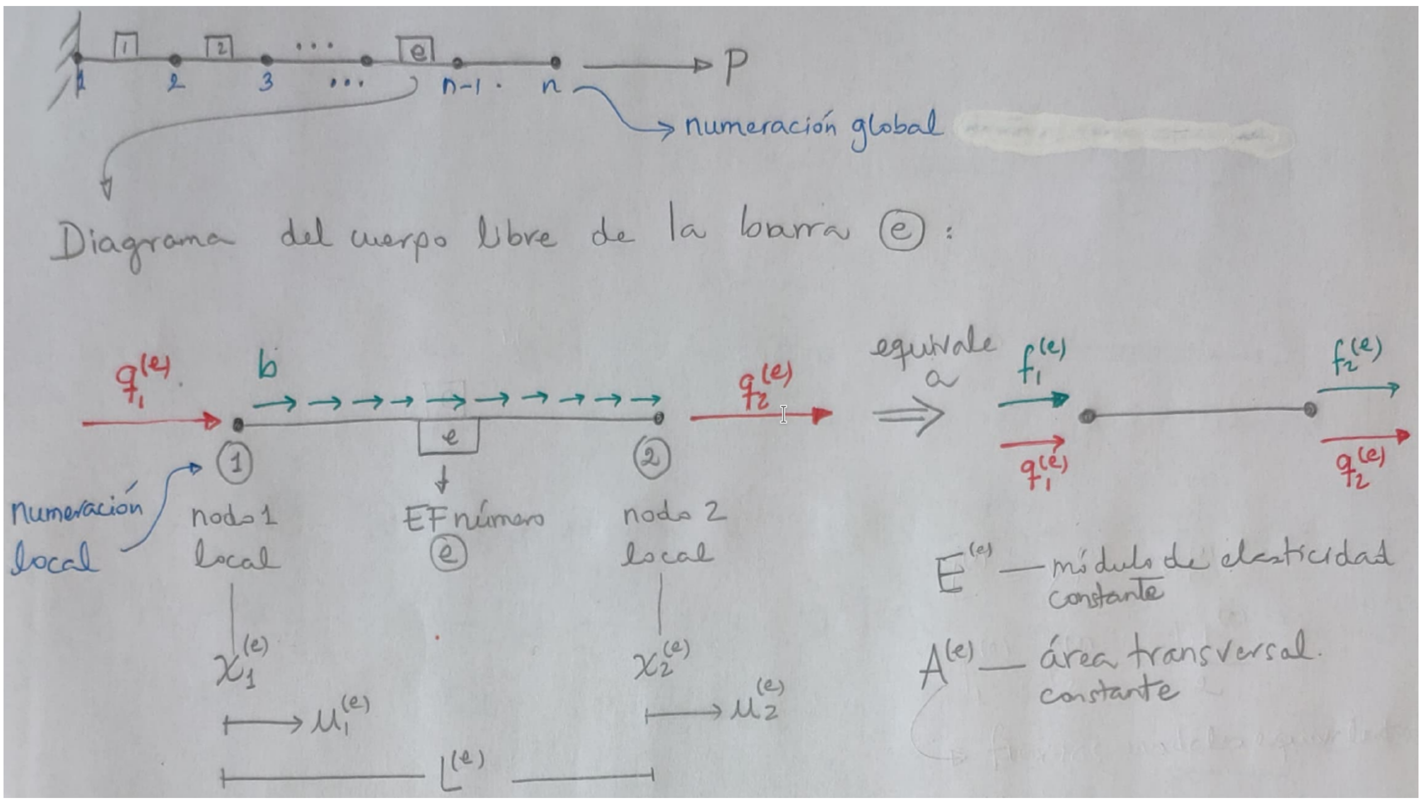
Deducción de la ecuación $\boldsymbol{q}^{(e)} = \boldsymbol{K}^{(e)}\boldsymbol{a}^{(e)} - \boldsymbol{f}^{(e)}$ para el EF de barra de dos nodos



$u_1^{(e)}$, $u_2^{(e)}$	desplazamientos nodales
$x_1^{(e)}$, $x_2^{(e)}$	coordenadas globales
$L^{(e)} = x_2^{(e)} - x_1^{(e)}$	longitud de la barra
$f_1^{(e)} = f_2^{(e)} = \frac{b^{(e)}L^{(e)}}{2}$	fuerzas nodales equivalentes
$q_1^{(e)}$, $q_2^{(e)}$	fuerzas nodales de equilibrio
$A^{(e)}$	área transversal constante
$E^{(e)}$	módulo de elasticidad constante

Figura 1: Diagrama de cuerpo libre de la barra e

1. Cálculo de la deformación longitudinal

$$\varepsilon_x = \frac{\Delta L^{(e)}}{L^{(e)}} = \frac{u_2^{(e)} - u_1^{(e)}}{L^{(e)}}$$

2. Cálculo de los esfuerzos normales

Para relacionar los esfuerzos y las deformaciones se utiliza la ley de Hooke en 1D:

$$\sigma_x^{(e)} = E^{(e)} \varepsilon_x^{(e)} = E^{(e)} \frac{u_2^{(e)} - u_1^{(e)}}{L^{(e)}}$$

3. Cálculo de la fuerza axial

$$f_{ax}^{(e)} = A^{(e)} \sigma_x^{(e)} = \underbrace{\frac{E^{(e)} A^{(e)}}{L^{(e)}}}_{k^{(e)}} \left[u_2^{(e)} - u_1^{(e)} \right] \tag{1}$$

Aquí el término $k^{(e)} = \frac{E^{(e)} A^{(e)}}{L^{(e)}}$ se conoce como la *rigidez axial de la barra.*

4. Equilibrio de fuerzas

Consideremos una barra sometida a una tracción de intensidad F:

$$F \leftarrow \rule{2cm}{2mm} \rightarrow F$$

Para esta barra se tiene que:

Lado izquierdo (nodo 1):

$$\left(f_1^{(e)} + q_1^{(e)} \right) = -F = -f_{ax}^{(e)} = k^{(e)} \left[u_1^{(e)} - u_2^{(e)} \right] \quad \Longrightarrow \quad q_1^{(e)} = k^{(e)} u_1^{(e)} - k^{(e)} u_2^{(e)} - f_1^{(e)} \tag{2}$$

Lado derecho (nodo 2):

$$\left(f_2^{(e)} + q_2^{(e)} \right) = +F = +f_{ax}^{(e)} = k^{(e)} \left[u_2^{(e)} - u_1^{(e)} \right] \quad \Longrightarrow \quad q_2^{(e)} = -k^{(e)} u_1^{(e)} + k^{(e)} u_2^{(e)} - f_2^{(e)} \tag{3}$$

De las ecuaciones (2) y (3) se obtiene la llamada *ecuación de equilibrilio para la barra*:

$$\underbrace{\begin{bmatrix} q_1^{(e)} \\ q_2^{(e)} \end{bmatrix}}_{\boldsymbol{q}^{(e)}} = \underbrace{\begin{bmatrix} +k^{(e)} & -k^{(e)} \\ -k^{(e)} & +k^{(e)} \end{bmatrix}}_{\boldsymbol{K}^{(e)}} \underbrace{\begin{bmatrix} u_1^{(e)} \\ u_2^{(e)} \end{bmatrix}}_{\boldsymbol{a}^{(e)}} - \underbrace{\begin{bmatrix} f_1^{(e)} \\ f_2^{(e)} \end{bmatrix}}_{\boldsymbol{f}^{(e)}}.$$

Aquí:

$\boldsymbol{q}^{(e)}$	vector de fuerzas nodales de equilibrio (reacciones) de la barra e
$\boldsymbol{K}^{(e)}$	matriz de rigidez de la barra e; esta es función únicamente de la geometría de la barra ($A^{(e)}$ y $L^{(e)}$) y de sus propiedades mecánicas ($E^{(e)}$)
$\boldsymbol{a}^{(e)}$	vector de desplazamientos nodales de la barra e
$\boldsymbol{f}^{(e)}$	vector de fuerzas nodales equivalentes de la barra e

5. Ejemplo

Considere la estructura de barras analizada en la Figura 2.

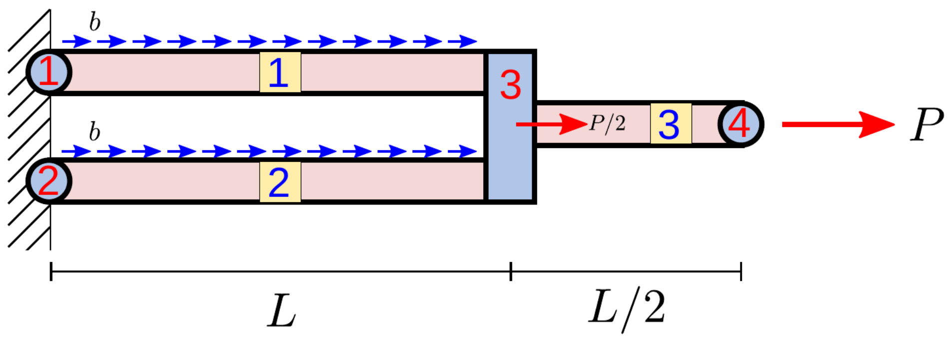


Figura 2: Estructura analizada en el ejemplo.

Todas las barras de dicha estructura tienen la misma área transversal A y el mismo módulo de elasticidad E.

En la Figura 3 se muestra su correspondiente diagrama de cuerpo libre.

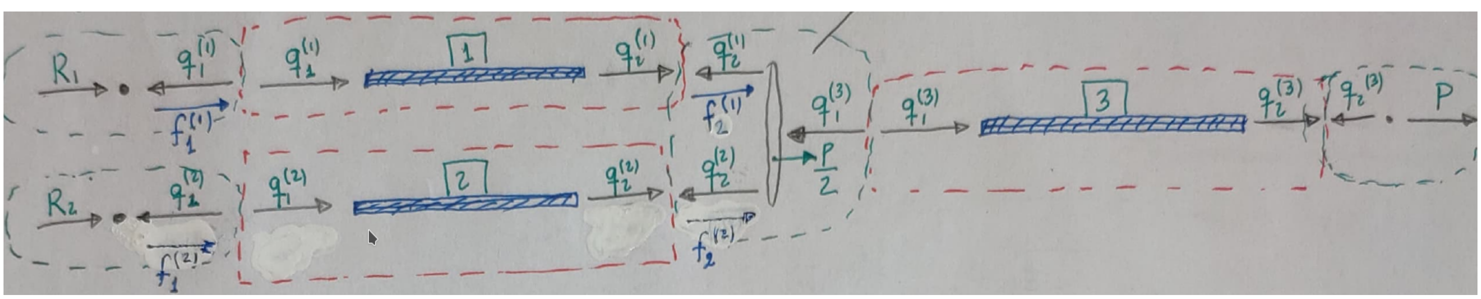


Figura 3: Diagrama de cuerpo libre de las barras y de los nodos de la estructura a analizar. Observe que las fuerzas nodales equivalentes se trasladan a los nodos.

5.1. Ecuación de equilibrio para cada barra

La ecuación de equilibrio para cada barra es

$$\begin{bmatrix} q_1^{(e)} \\ q_2^{(e)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} k^{(e)} & -k^{(e)} \\ -k^{(e)} & k^{(e)} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1^{(e)} \\ u_2^{(e)} \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} f_1^{(e)} \\ f_2^{(e)} \end{bmatrix} \tag{4}$$

donde $e = 1,\ 2,\ 3$ y

$$k^{(1)} = k^{(2)} = \frac{EA}{L} \qquad\qquad k^{(3)} = \frac{EA}{\frac{L}{2}} = \frac{2EA}{L}.$$

5.2. Ecuación de equilibrio para cada nodo

Establecemos el equilibrio de fuerzas en cada nodo, haciendo $\sum f = 0$:

$$\begin{aligned}
&\text{Nodo 1 :} & R_1 - q_1^{(1)} + f_1^{(1)} &= 0 \\
&\text{Nodo 2 :} & R_2 - q_1^{(2)} + f_1^{(2)} &= 0 \\
&\text{Nodo 3 :} & \frac{P}{2} + f_2^{(1)} + f_2^{(2)} - q_2^{(1)} - q_2^{(2)} - q_1^{(3)} &= 0 \\
&\text{Nodo 4 :} & P - q_2^{(3)} &= 0
\end{aligned}$$

lo cual es equivalente a:

$$\begin{aligned}
&\text{Nodo 1 :} & R_1 + f_1^{(1)} &= q_1^{(1)} \\
&\text{Nodo 2 :} & R_2 + f_1^{(2)} &= q_1^{(2)} \\
&\text{Nodo 3 :} & \frac{P}{2} + f_2^{(1)} + f_2^{(2)} &= q_2^{(1)} + q_2^{(2)} + q_1^{(3)} \\
&\text{Nodo 4 :} & \underbrace{\qquad\qquad P}_{\text{sumatoria de las fuerzas aplicadas (fuerzas exteriores)}} &= \underbrace{q_2^{(3)} \qquad\qquad}_{\text{sumatoria de las fuerzas nodales de equilibrio provenientes de las barras que llegan al nodo (fuerzas interiores)}}
\end{aligned}$$

A continuación, se reorganizan términos y se emplea la ecuación (4) sin incluir los términos asociados al vector de fuerzas nodales equivalentes $\boldsymbol{f}^{(e)}$, ya que dichas fuerzas ya se tuvieron en cuenta al efectuar el equilibrio de fuerzas en cada nodo. De este modo, se obtiene:

$$
\begin{aligned}
R_1 &= k^{(1)}u_1^{(1)} - k^{(1)}u_2^{(1)} - \frac{bL}{2} \\
R_2 &= k^{(2)}u_1^{(2)} - k^{(2)}u_2^{(2)} - \frac{bL}{2} \\
0 &= \left(-k^{(1)}u_1^{(1)} + k^{(1)}u_2^{(1)}\right) + \left(-k^{(2)}u_1^{(2)} + k^{(2)}u_2^{(2)}\right) + \left(k^{(3)}u_1^{(3)} - k^{(3)}u_2^{(3)}\right) \\
&\qquad - \left(\frac{P}{2} + \frac{bL}{2} + \frac{bL}{2}\right) \\
0 &= -k^{(3)}u_1^{(3)} + k^{(3)}u_2^{(3)} - P
\end{aligned}
\tag{5}
$$

5.3. Se relacionan los grados de libertad locales y globales

Para poder hacer la compatibilidad entre los desplazamientos y fuerzas locales y globales en cada nodo se deben crear dos matrices LaG y GaL, las cuales se muestran en la Figura 4.

barra (e)	# nodo local 1	# nodo local 2
1	1	3
2	2	3
3	3	4

barra (e)	# nodo global 1	# nodo global 2	# nodo global 3	# nodo global 4
1	1	x	2	x
2	x	1	2	x
3	x	x	1	2

Figura 4: Relación entre los grados de libertad locales y globales para cada barra e.

De acuerdo con la matriz GaL, se tiene que:

$$
\begin{aligned}
u_1^{(1)} &= u_1 & \qquad u_1^{(2)} &= u_2 & \qquad u_1^{(3)} &= u_3 \\
u_2^{(1)} &= u_3 & \qquad u_2^{(2)} &= u_3 & \qquad u_2^{(3)} &= u_4
\end{aligned}
$$

y al reemplazar estas equivalencias en las ecuaciones (5) resulta:

$$
\begin{aligned}
R_1 &= k^{(1)}u_1 - k^{(1)}u_3 - \frac{bL}{2} \\
R_2 &= k^{(2)}u_2 - k^{(2)}u_3 - \frac{bL}{2} \\
0 &= -k^{(1)}u_1 + k^{(1)}u_3 - k^{(2)}u_2 + k^{(2)}u_3 + k^{(3)}u_3 - k^{(3)}u_4 - \left(\frac{P}{2} + bL\right) \\
0 &= -k^{(3)}u_3 + k^{(3)}u_4 - P.
\end{aligned}
$$

6. Ensamblaje matricial

Las ecuaciones anteriores se pueden escribir en forma matricial como:

$$\underbrace{\begin{bmatrix} R_1 \\ R_2 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}}_{\boldsymbol{q}} = \underbrace{\begin{bmatrix} k^{(1)} & 0 & -k^{(1)} & 0 \\ 0 & k^{(2)} & -k^{(2)} & 0 \\ -k^{(1)} & -k^{(2)} & k^{(1)}+k^{(2)}+k^{(3)} & -k^{(1)} \\ 0 & 0 & -k^{(3)} & k^{(3)} \end{bmatrix}}_{\boldsymbol{K}} \underbrace{\begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \\ u_4 \end{bmatrix}}_{\boldsymbol{a}} - \underbrace{\begin{bmatrix} \frac{bL}{2} \\ \frac{bL}{2} \\ \frac{P}{2}+bL \\ P \end{bmatrix}}_{\boldsymbol{f}}$$

Los términos de la ecuación anterior son:

- $\boldsymbol{q}$ vector de fuerzas nodales de equilibrio global (*reaction matrix*)
- $\boldsymbol{K}$ matriz de rigidez global (*stiffness matrix*)
- $\boldsymbol{a}$ vector de desplazamientos nodales global (*displacement matrix*)
- $\boldsymbol{f}$ vector de fuerzas nodales equivalentes global (*load matrix*)

La ecuación de equilibrio $\boldsymbol{q} = \boldsymbol{K}\boldsymbol{a} - \boldsymbol{f}$ de una estructura compuesta de barras se obtiene a partir de la regla sencilla que expresa la suma de las fuerzas nodales de equilibrio en un nodo global j (debidas a las diferentes barras que concurren en el mismo) es igual a la sumatoria de las fuerzas exteriores (reacciones + fuerzas puntuales exteriores + fuerzas nodales equivalentes) que actúa en dicho nodo global j. Por lo tanto, para el nodo global j se tiene que:

$$\sum_{e \in E_j} \boldsymbol{q}_{GaL(e,j)}^{(e)} = \sum_i \boldsymbol{f}_i^{exterior}(j) \tag{6}$$

Aquí E_j representa el conjunto de barras que concurren en el nodo global j, $\boldsymbol{q}_i^{(e)}$ son las fuerzas nodales de equilibrio para el nodo i local del elemento e y $\sum_i \boldsymbol{f}_i^{exterior}(j)$ representa la suma de las fuerzas exteriores que concurren en el nodo global j .

Observe que cada fila de $\boldsymbol{q} = \boldsymbol{K}\boldsymbol{a} - \boldsymbol{f}$ corresponde a una ecuación (6) desarrollada para un grado de libertad.

El proceso de obtención de $\boldsymbol{q} = \boldsymbol{K}\boldsymbol{a} - \boldsymbol{f}$ recibe el nombre de *ensamblaje matricial*.

La solución de $\boldsymbol{q} = \boldsymbol{K}\boldsymbol{a} - \boldsymbol{f}$ proporciona los valores de los desplazamientos y las reacciones en todos los nodos de la estructura.

7. Forma alterna de hacer el ensamblaje matricial

El ensamblaje matricial puede realizarse también de la siguiente forma:

$$\boldsymbol{K} = \underbrace{\begin{bmatrix} \times & \cdot & \times & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \times & \cdot & \times & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \end{bmatrix}}_{\boldsymbol{K}^{(1)}} + \underbrace{\begin{bmatrix} \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \times & \times & \cdot \\ \cdot & \times & \times & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \end{bmatrix}}_{\boldsymbol{K}^{(2)}} + \underbrace{\begin{bmatrix} \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \times & \times \\ \cdot & \cdot & \times & \times \end{bmatrix}}_{\boldsymbol{K}^{(3)}}$$

$$
\boldsymbol{f} = \underbrace{\begin{bmatrix} \frac{bL}{2} \\ 0 \\ \frac{bL}{2} \\ 0 \end{bmatrix}}_{\boldsymbol{f}^{(1)}} + \underbrace{\begin{bmatrix} 0 \\ \frac{bL}{2} \\ \frac{bL}{2} \\ 0 \end{bmatrix}}_{\boldsymbol{f}^{(2)}} + \underbrace{\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}}_{\boldsymbol{f}^{(3)}} + \underbrace{\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \frac{P}{2} \\ P \end{bmatrix}}_{\substack{\text{cargas} \\ \text{puntuales}}}
$$

8. Cálculo de las fuerzas axiales

Finalmente, se calculan las fuerzas axiales utilizando la ecuación (1):

$$
f_{\text{ax}}^{(e)} = k^{(e)} \left(u_2^{(e)} - u_1^{(e)} \right) \qquad \text{para } e = 1, 2, 3
$$