Conversión del principio de los trabajos virtuales de 3D a 1D

El principio del trabajo virtual en 3D es:

$$\underbrace{\iiint_{\Omega} \delta\boldsymbol{\varepsilon}^T(\boldsymbol{x})\boldsymbol{\sigma}(\boldsymbol{x})\mathrm{d}\Omega}_{\substack{\text{trabajo realizado por los}\\ \text{esfuerzos sobre las defor-}\\ \text{maciones virtuales}}} = \underbrace{\iiint_{\Omega} \delta\boldsymbol{u}^T(\boldsymbol{x})\boldsymbol{b}(\boldsymbol{x})\mathrm{d}\Omega}_{\substack{\text{trabajo realizado por las}\\ \text{fuerzas másicas sobre los}\\ \text{desplazamientos virtua-}\\ \text{les}}} + \underbrace{\oiint_{\partial\Omega} \delta\boldsymbol{u}^T\big(\boldsymbol{x}(s)\big)\boldsymbol{t}\big(\boldsymbol{x}(s)\big)\mathrm{d}S}_{\substack{\text{trabajo realizado por las fuer-}\\ \text{zas superficiales (que actúan}\\ \text{en el contorno del sólido) so-}\\ \text{bre los desplazamientos vir-}\\ \text{tuales}}} + \underbrace{\sum_{i=1}^{n} \delta\boldsymbol{u}^T(\boldsymbol{x}_i)\boldsymbol{q}_i}_{\substack{\text{trabajo reali-}\\ \text{zado por las}\\ \text{fuerzas pun-}\\ \text{tuales sobre los}\\ \text{desplazamien-}\\ \text{tos virtuales}}}. \tag{1}$$

donde:

Ω	tiene dos connotaciones: 1) sólido a analizar; 2) región del espacio donde está definido el sólido Ω y sobre la cual se realiza la integración.
$\boldsymbol{x} := [x,\ y,\ z]^T$	punto del espacio que pertenece a Ω.
$\boldsymbol{\sigma}(\boldsymbol{x})$	campo vectorial de esfuerzos.
$\boldsymbol{b}(\boldsymbol{x})$	vector de fuerzas másicas.
$\boldsymbol{t}(\boldsymbol{x})$	vector de fuerzas superficiales que actúan en el contorno del sólido Ω; aquí $\boldsymbol{x} \in \partial\Omega$.
$\delta\boldsymbol{u}(\boldsymbol{x})$	campo vectorial de desplazamientos virtuales.
$\delta\boldsymbol{\varepsilon}(\boldsymbol{x})$	campo vectorial de deformaciones virtuales.
$\boldsymbol{q}_i$	vector de fuerzas puntuales aplicadas sobre el punto i.
$\delta\boldsymbol{u}\,(\boldsymbol{x}_i)$	vector de desplazamiento virtual asociado al punto de coordenadas $\boldsymbol{x}_i$.

En nuestro caso, el sólido Ω a analizar es una barra que en su caso más general tiene área A y módulo de elasticidad E variable, tal y como se ilustra en la Figura 1.

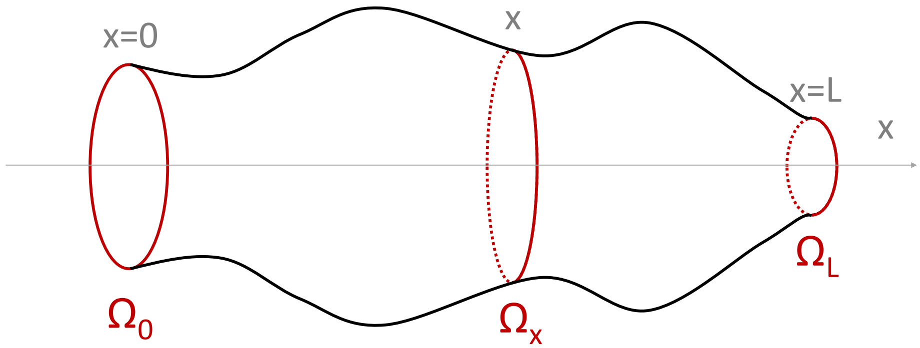

Figura 1: Aquí Ω_0, Ω_x y Ω_L representan la sección transversal de la barra en $x = 0$, $x = x$ y $x = L$, respectivamente. En la Figura se están representando las secciones transversales como si fueran circulares por conveniencia en la graficación y no porque en verdad lo sean.

1. Trabajo realizado por los esfuerzos sobre las deformaciones virtuales

Determinemos los términos de la integral $\iiint_\Omega \delta\boldsymbol{\varepsilon}^T(\boldsymbol{x})\boldsymbol{\sigma}(\boldsymbol{x})\mathrm{d}\Omega$. En el caso 1D se tiene que los campos vectoriales de esfuerzos y de deformaciones son, respectivamente:

$$\boldsymbol{\sigma}(\boldsymbol{x}) = [\sigma_x,\ \sigma_y,\ \sigma_z,\ \tau_{xy},\ \tau_{xz},\ \tau_{yz}]^T = [\sigma_x(x),\ 0,\ 0,\ 0,\ 0,\ 0]^T$$
$$\boldsymbol{\varepsilon}(\boldsymbol{x}) = [\varepsilon_x,\ \varepsilon_y,\ \varepsilon_z,\ \gamma_{xy},\ \gamma_{xz},\ \gamma_{yz}]^T = [\varepsilon_x(x),\ 0,\ 0,\ 0,\ 0,\ 0]^T$$

Recuerde que la deformación longitudinal $\varepsilon_x(x) = \frac{\mathrm{d}u(x)}{\mathrm{d}x}$ y al aplicar el operador variacional primero δ obtenemos:

$$\delta\varepsilon_x = \delta\left(\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}\right) = \frac{\mathrm{d}(\delta u)}{\mathrm{d}x},$$

lo cual nos dice que las deformaciones virtuales que son aquellas producidas por los desplazamientos virtuales.

Observe que en el caso 1D, $\delta\boldsymbol{\varepsilon}^T(\boldsymbol{x})\boldsymbol{\sigma}(\boldsymbol{x}) = \sigma_x(x)\delta\varepsilon_x(x)$; note que tanto $\sigma_x(x)$ como $\delta\varepsilon_x(x)$ dependen solo de x y no dependen de y ni de z. En consecuencia:

$$\begin{aligned}\iiint_\Omega \delta\boldsymbol{\varepsilon}^T(\boldsymbol{x})\boldsymbol{\sigma}(\boldsymbol{x})\mathrm{d}\Omega &= \iiint_\Omega \sigma_x(x)\delta\varepsilon_x(x)\underbrace{\mathrm{d}\Omega}_{\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z}\\ &= \int_0^L \iint_{\Omega_x} \sigma_x(x)\delta\varepsilon_x(x)\underbrace{\mathrm{d}A}_{\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z}\,\mathrm{d}x\\ &= \int_0^L \sigma_x(x)\delta\varepsilon_x(x)\underbrace{\iint_{\Omega_x}\mathrm{d}A}_{A(x)}\,\mathrm{d}x\end{aligned}$$

donde $A(x)$ es el área de la sección transversal Ω_x.

En conclusión,

$$\iiint_\Omega \delta\boldsymbol{\varepsilon}^T(\boldsymbol{x})\boldsymbol{\sigma}(\boldsymbol{x})\mathrm{d}\Omega = \int_0^L \sigma_x(x)A(x)\delta\varepsilon_x(x)\mathrm{d}x \tag{2}$$

2. Trabajo realizado por las fuerzas másicas sobre los desplazamientos virtuales

Determinemos los términos de la integral $\iiint_\Omega \delta\boldsymbol{u}^T(\boldsymbol{x})\boldsymbol{b}(\boldsymbol{x})\mathrm{d}\Omega$.

Recordemos que $\boldsymbol{b}(\boldsymbol{x}) = [X(\boldsymbol{x}),\ Y(\boldsymbol{x}),\ Z(\boldsymbol{x})]^T$ es el vector de fuerzas másicas por unidad de volumen ([N]/[m^3]). En el caso de la barra 1D tenemos que $\boldsymbol{b}(\boldsymbol{x}) = [X(x),\ 0,\ 0]^T$, ya que solo existen componentes de las fuerzas másicas en la dirección x. Adicionalmente, el campo vectorial de desplazamientos virtuales $\delta\boldsymbol{u}(\boldsymbol{x}) = [\delta u(\boldsymbol{x}),\ \delta v(\boldsymbol{x}),\ \delta w(\boldsymbol{x})]^T$ se simplifica a: $\delta\boldsymbol{u}(\boldsymbol{x}) = [\delta u(x),\ 0,\ 0]^T$. Tenemos por lo tanto que:

$$\delta\boldsymbol{u}^T(\boldsymbol{x})\boldsymbol{b}(\boldsymbol{x}) = \delta u(x)X(x)$$

y en consecuencia,

$$\begin{aligned}
\iiint_\Omega \delta\boldsymbol{u}^T(\boldsymbol{x})\boldsymbol{b}(\boldsymbol{x})\mathrm{d}\Omega &= \iiint_\Omega \delta u(x)X(x)\underbrace{\mathrm{d}\Omega}_{\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z} \\
&= \int_0^L \iint_{\Omega_x} \delta u(x)X(x)\underbrace{\mathrm{d}A}_{\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z}\,\mathrm{d}x \\
&= \int_0^L \delta u(x)X(x)\underbrace{\iint_{\Omega_x}\mathrm{d}A}_{A(x)}\,\mathrm{d}x;
\end{aligned}$$

observe que $b_m(x) := X(x)A(x)$ denota la fuerza másica por unidad de longitud que actúa en la dirección x, por lo que:

$$\iiint_\Omega \delta\boldsymbol{u}^T(\boldsymbol{x})\boldsymbol{b}(\boldsymbol{x})\mathrm{d}\Omega = \int_0^L \delta u(x)b_m(x)\mathrm{d}x. \tag{3}$$

3. Trabajo realizado por las fuerzas superficiales sobre los desplazamientos virtuales

Determinemos los términos de la integral $\oiint_{\partial\Omega} \delta\boldsymbol{u}^T\big(\boldsymbol{x}(s)\big)\boldsymbol{t}\big(\boldsymbol{x}(s)\big)\mathrm{d}S$. Observe que la superficie $\partial\Omega$ se descompone en las superficies Ω_0, Γ y Ω_L, tal y como se ilustra en la Figura 2.

Por lo tanto, es posible descomponer la integral de contorno $\oiint_{\partial\Omega} \delta\boldsymbol{u}^T\big(\boldsymbol{x}(s)\big)\boldsymbol{t}\big(\boldsymbol{x}(s)\big)\mathrm{d}S$ en varias integrales de superficie:

$$\begin{aligned}
\oiint_{\partial\Omega} \delta\boldsymbol{u}^T\big(\boldsymbol{x}(s)\big)\boldsymbol{t}\big(\boldsymbol{x}(s)\big)\mathrm{d}S &= \cancelto{0}{\iint_{\Omega_0} \delta\boldsymbol{u}^T\big(\boldsymbol{x}(s)\big)\boldsymbol{t}\big(\boldsymbol{x}(s)\big)\mathrm{d}S} \\
&\quad + \iint_\Gamma \delta\boldsymbol{u}^T\big(\boldsymbol{x}(s)\big)\boldsymbol{t}\big(\boldsymbol{x}(s)\big)\mathrm{d}S + \cancelto{0}{\iint_{\Omega_L} \delta\boldsymbol{u}^T\big(\boldsymbol{x}(s)\big)\boldsymbol{t}\big(\boldsymbol{x}(s)\big)\mathrm{d}S}
\end{aligned} \tag{4}$$

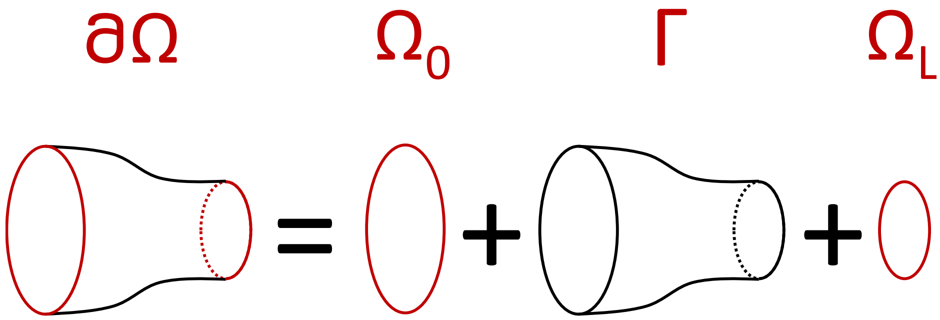

Figura 2: Aquí Ω_0 y Ω_L representan la sección transversal de la barra en $x = 0$ y $x = L$, respectivamente; de otro lado, Γ representa la superficie de la barra en el intervalo $(0, L)$ (observe que el intervalo es abierto). En la Figura se están representando las secciones transversales como si fueran circulares por conveniencia en la graficación y no porque en verdad lo sean.

Observe que las tres integrales del lado derecho ya no se escriben con el círculo, porque estas son unas integrales de superficie que han dejado de ser integrales de contorno.

Como se observa dos de las integrales se anulan, ya que las cargas aplicadas en Ω_0 y en Ω_L se condensarán posteriormente en unas fuerzas puntuales aplicadas en los extremos de la barra.

Recordemos que $\boldsymbol{t}(\boldsymbol{x}) = [\bar{X}(\boldsymbol{x}),\ \bar{Y}(\boldsymbol{x}),\ \bar{Z}(\boldsymbol{x})]^T$ es el vector de fuerzas superficiales por unidad de área ([N]/[m^2]). En el caso de la barra 1D tenemos que $\boldsymbol{t}(\boldsymbol{x}) = [\bar{X}(x),\ 0,\ 0]^T$, ya que solo existen componentes de las fuerzas superficiales en la dirección x. Adicionalmente, el campo vectorial de desplazamientos virtuales $\delta\boldsymbol{u}(\boldsymbol{x}) = [\delta u(\boldsymbol{x}),\ \delta v(\boldsymbol{x}),\ \delta w(\boldsymbol{x})]^T$ se simplifica a: $\delta\boldsymbol{u}(\boldsymbol{x}) = [\delta u(x),\ 0,\ 0]^T$. Tenemos por lo tanto que:

$$\delta\boldsymbol{u}^T(\boldsymbol{x})\boldsymbol{t}(\boldsymbol{x}) = \delta u(x)\bar{X}(x)$$

y así, la ecuación (4) se reduce a:

$$\oiint_{\partial\Omega} \delta\boldsymbol{u}^T\big(\boldsymbol{x}(s)\big)\boldsymbol{t}\big(\boldsymbol{x}(s)\big)\mathrm{d}S = \iint_{\Gamma} \delta\boldsymbol{u}^T\big(\boldsymbol{x}(s)\big)\boldsymbol{t}\big(\boldsymbol{x}(s)\big)\mathrm{d}S = \iint_{\Gamma} \delta u(x)\bar{X}(x)\mathrm{d}S$$

pero,

$$\iint_{\Gamma} \delta u(x)\bar{X}(x)\mathrm{d}S = \int_0^L \oint_{\partial\Omega_x} \delta u(x)\bar{X}(x)\ \mathrm{d}s\ \mathrm{d}x = \int_0^L \delta u(x)\bar{X}(x) \underbrace{\oint_{\partial\Omega_x} \mathrm{d}s}_{p(\Omega_x)} \mathrm{d}x$$

donde $p(\Omega_x)$ denota el perímetro de la región Ω_x. Observe que aquí dS y ds representan diferenciales de superficie y de arco, respectivamente.

Denotemos $b_s(x) := \bar{X}(x)p(\Omega_x)$. Observe que $\bar{X}(x)$ tiene unidades de fuerza sobre área [N]/[m^2] y $p(\Omega_x)$ tiene unidades de longitud [m]; en consecuencia, $b_s(x)$ representa la fuerza equivalente superficial que actúa sobre la barra; esta tiene unidades fuerza de sobre unidad de longitud [N]/[m].

Hemos deducido entonces que:

$$\oiint_{\partial\Omega} \delta \boldsymbol{u}^T\big(\boldsymbol{x}(s)\big)\boldsymbol{t}\big(\boldsymbol{x}(s)\big)\mathrm{d}S = \int_0^L \delta u(x) b_s(x)\mathrm{d}x. \tag{5}$$

4. Trabajo realizado por las fuerzas puntuales sobre los desplazamientos virtuales

Determinemos los términos de la sumatoria $\sum_{i=1}^n \delta \boldsymbol{u}^T(\boldsymbol{x}_i)\boldsymbol{q}_i$.

Consideremos el punto i-ésimo, el cual está ubicado en la coordenada $\boldsymbol{x}_i := [x_i,\ y_i,\ z_i]^T$. En el caso 1D, se tiene que el vector de fuerza puntual $\boldsymbol{q}_i := [q_{xi},\ q_{yi},\ q_{zi}]^T$ se reduce a: $\boldsymbol{q}_i := [q_{xi},\ 0,\ 0]^T$; de otro lado, el vector de desplazamientos virtuales en el punto i-ésimo, $\boldsymbol{u}^T(\boldsymbol{x}_i) := [u_i,\ v_i,\ w_i]^T := [u(\boldsymbol{x}_i),\ v(\boldsymbol{x}_i),\ q(\boldsymbol{x}_i)]^T$ se reduce a $\boldsymbol{u}^T(\boldsymbol{x}_i) = [u_i,\ 0,\ 0]^T$. Por lo tanto,

$$\sum_{i=1}^n \delta \boldsymbol{u}^T(\boldsymbol{x}_i)\boldsymbol{q}_i = \sum_{i=1}^n \delta u_i q_{xi}. \tag{6}$$

5. El PTV en 1D

Reemplazando en (1) las ecuaciones (2), (3), (5) y (6), resulta:

$$\int_0^L \sigma_x(x)A(x)\delta\varepsilon_x(x)\mathrm{d}x = \int_0^L \delta u(x) b_m(x)\mathrm{d}x + \int_0^L \delta u(x) b_s(x)\mathrm{d}x + \sum_{i=1}^n \delta u_i q_{xi};$$

como la segunda y tercera integral tienen el mismo dominio de integración, se pueden reunir estos terminos para obtener:

$$\int_0^L \sigma_x(x)A(x)\delta\varepsilon_x(x)\mathrm{d}x = \int_0^L \delta u(x) \underbrace{[b_m(x) + b_s(x)]}_{b(x)}\mathrm{d}x + \sum_{i=1}^n \delta u_i q_{xi}$$

donde $b(x)$ es la fuerza aplicada a la barra en la dirección x por unidad de longitud.

Finalmente, podemos escribir el principio de los trabajos virtuales en 1D como:

$$\int_0^L \sigma_x(x)A(x)\delta\varepsilon_x(x)\mathrm{d}x = \int_0^L \delta u(x) b(x)\mathrm{d}x + \sum_{i=1}^n \delta u_i q_{xi}.$$