Flujo de agua subterráneo

Diego Andrés Alvarez Marín Profesor Asociado Universidad Nacional de Colombia Sede Manizales

https://github.com/diegoandresalvarez/solidos

Principio de Bernoulli

El principio de Bernoulli, establecido por Daniel Bernoulli en 1738, expresa que en un fluido sin viscosidad ni rozamiento, circulando en régimen permanente, la energía que posee el fluido, a lo largo de una línea de corriente, permanece constante a lo largo de su recorrido. La energía de un fluido en cualquier momento consta de tres componentes:

- Cinético: es la energía debida a la velocidad que posea el fluido.
- Potencial gravitacional: es la energía debido a la altitud que un fluído posea.
- Energía de flujo: es la energía que un fluido contiene debido a la presión que posee.

Suposiciones del principio de Bernoulli

- Flujo en régimen permanente (densidad, velocidad, etc, no cambia en el tiempo)
- Flujo no viscoso
- Flujo incompresible (densidad constante a lo largo de la línea de corriente)

$$\nabla \cdot \boldsymbol{v} = 0$$

 $\boldsymbol{v} := [v_x, v_y]^T$ es el campo de velocidades del fluído

El principio de Bernoulli dice que la energía total presente en cualquier masa de fluído consiste en tres cabezas:

Cabeza de hidráulica Cabeza de velocidad piezométrica
$$H = \frac{V^2}{2g} + \frac{p}{\gamma} + z$$
Cabeza de Cabeza de Cabeza de presión Cabeza de elevación

Cada uno de los términos de esta ecuación tienen unidades de longitud, y a la vez representan formas distintas de energía; en hidráulica es común expresar la energía en términos de longitud, y se habla de **altura** o **cabeza**, esta última traducción del inglés **head**.

Cabeza de hidráulica Cabeza de velocidad Piezométrica
$$H = \frac{V^2}{2g} + \frac{p}{\gamma} + z$$
Cabeza de Cabeza de Cabeza de presión Cabeza de elevación

- V = velocidad del fluído en la sección considerada.
- $g = \text{aceleración de la gravedad } (g = 9.81 \text{ m/s}^2)$
- z = altura en la dirección de la gravedad desde una cota de referencia.
- p = presión a lo largo de la línea de corriente.
- $\rho = \text{densidad del fluído}$.
- $\gamma = \text{peso específico } (\gamma = \rho g).$

Pérdidas de cabeza hidráulica

Cuando el agua se mueve de un sitio a otro, parte de la energía se pierde y puede ser expresada como:

$$\frac{V_1^2}{2g} + \frac{p_1}{\gamma} + z_1 = \frac{V_2^2}{2g} + \frac{p_2}{\gamma} + z_2 + \Delta H$$

donde ΔH es la pérdida de cabeza causada por el movimiento del flujo de un sitio a otro.

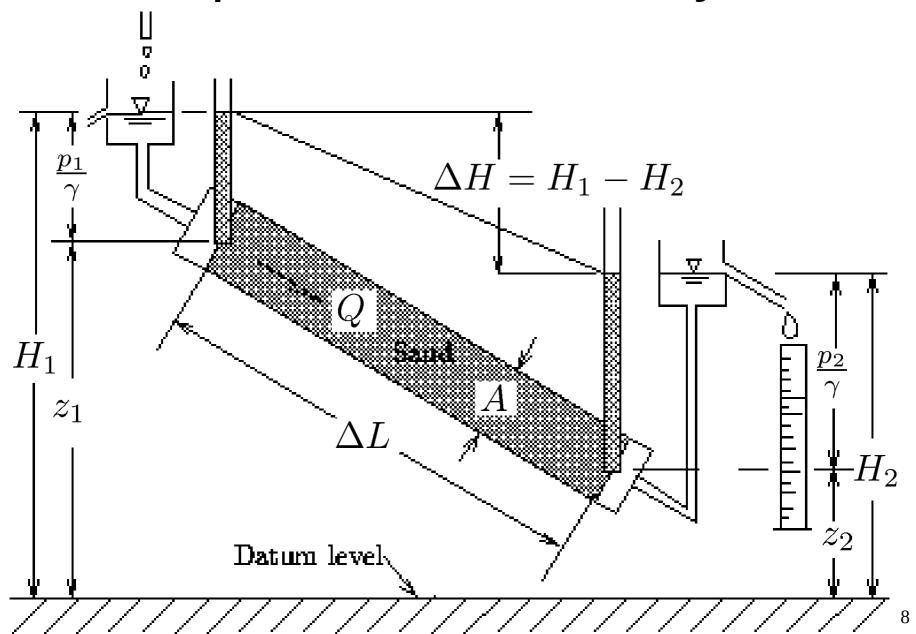
Ley de Darcy

La ley de Darcy es una ecuación constitutiva que describe el flujo de fluído a través de un medio poroso. Fue formulada por el ingeniero francés Henry Darcy en 1856, basado en los resultados de experimentos sobre el flujo de agua en columnas de arena.



Henry Darcy (1803 - 1858)

Experimento de Darcy



La ley de Darcy

La cantidad de agua que se mueve a través de un medio poroso, es proporcional a la diferencia de cabeza hidráulica ΔH y a la sección transversal del área A de la columna, pero es inversamente proporcional a la distancia ΔL de la ruta del flujo:

$$v = \frac{Q}{A} = -K \frac{\Delta H}{\Delta L}$$
 y en el límite $v_s(\boldsymbol{x}) = -K_s(\boldsymbol{x}) \frac{\partial H(\boldsymbol{x})}{\partial s}$

donde la constante de proporcionalidad K es la permeabilidad del suelo (tiene unidades de velocidad) y s se refiere a la dirección del flujo

El signo negativo se debe a que el agua fluje de regiones de alto a regiones de bajo potencial a mediga que recorre la distancia.

Suposiciones de la ley de Darcy

La ley de Darcy es válida en un medio saturado, continuo, homogéneo e isótropo y cuando las fuerzas inerciales son despreciables (Re<1).

La ley de Darcy

Según Swartzendruber (1961), la ley de Darcy solo es aplicable en el sentido estricto para suelos granulares y no es aplicable en suelos cohesivos, debido a que en estas el flujo no es newtoniano.

Swartzendruber (1961) propuso una nueva fórmula para suelos cohesivos, sin embargo en la práctica se sigue utilizando la fórmula propuesta por Darcy debido a su simplicidad, a pesar que el error en el cálculo no es siempre pequeño.

Valores típicos de la permeabilidad K		
Gravas	> 10 ⁻¹ m/s	
Arenas	10 ⁻¹ a 10 ⁻⁵ m/s	
Arenas finas, limos gruesos	10 ⁻⁵ a 10 ⁻⁷ m/s	
Limos	10 ⁻⁷ a 10 ⁻⁹ m/s	
Arcillas	< 10 ⁻⁹ m/s	

Recuerde que este debe medirse a una temperatura de 20 grados centígrados.

K en suelos anisotrópicos

Los suelos son generalmente anisotrópicos, siendo las arcillas más anisotrópicas que en los suelos granulares. La permeabilidad depende de la dirección en la cual se mida esta, siendo mayor en el sentido horizontal y menor en el sentido vertical.

Soil type	$k_{\rm h}/k_{\rm v}$	Reference
Organic silt with peat Plastic marine clay Soft clay Soft marine clay Boston blue clay	1.2–1.7 1.2 1.5 1.05 0.7–3.3	Tsien (1955) Lumb and Holt (1968) Basett and Brodie (1961) Subbaraju (1973) Haley and Aldrich (1969)

Movimiento del agua subterránea bajo flujo permanente para el caso bidimensional

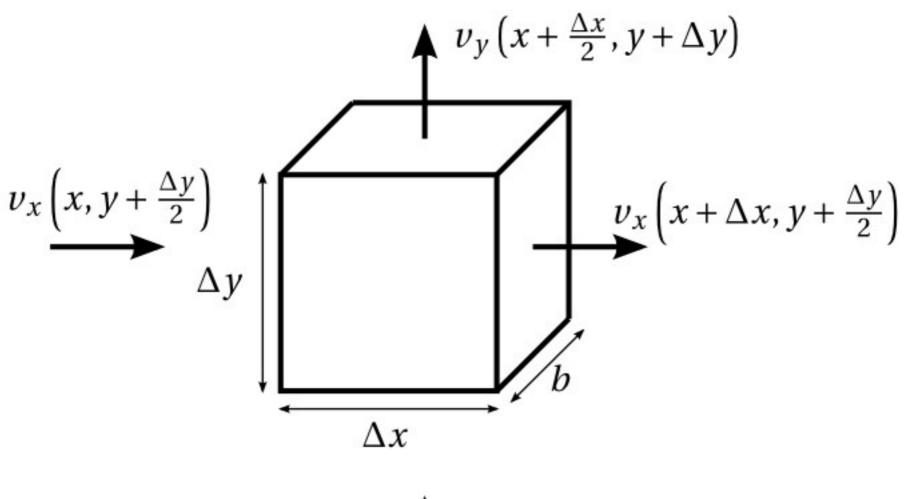
Bajo flujo permanente la cantidad de agua que entra al acuífero es igual a la cantidad de agua que sale de este, siendo esta cantidad constante en el tiempo.

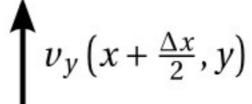
Por la ley de conservación de masa:

$$MASA_{entra} + MASA_{generada} = MASA_{sale}$$

Suponiendo que el flujo de agua es bidimensional, que el acuífero tiene espesor b, y que a lo largo de las fronteras del elemento se conocen o su flujo v o su cabeza hidráulica H, entonces se tiene que en flujo permanente $\frac{\partial \bullet}{\partial t} = 0$ la cantidad de agua que entra al elemento en un intervalo de tiempo Δt es igual a la cantidad de agua que sale por el.

Elemento diferencial de medio poroso





Movimiento del agua subterránea bajo flujo permanente para el caso bidimensional

$$MASA_{entra} + MASA_{generada} = MASA_{sale}$$

$$v_x(x,y)\Delta yb\Delta t\rho + v_y(x,y)\Delta xb\Delta t\rho =$$
$$v_x(x+\Delta x,y)\Delta yb\Delta t\rho + v_y(x,y+\Delta y)\Delta xb\Delta t\rho$$

donde v_x y v_y son los flujos en las direcciones x y y respectivamente reorganizando términos y dividiendo la expresión entre $\Delta x \Delta y \Delta t b \rho$, resulta:

$$-\frac{v_x(x+\Delta x,y)-v_x(x,y)}{\Delta x} - \frac{v_y(x,y+\Delta y)-v_y(x,y)}{\Delta y} = 0$$

tomando límites cuando el tamaño del elemento diferencial de suelo tiende a un punto, tenemos:

$$-\lim_{\substack{\Delta x \to 0 \\ \Delta y \to 0}} \frac{v_x(x + \Delta x, y) - v_x(x, y)}{\Delta x}$$
$$-\lim_{\substack{\Delta x \to 0 \\ \Delta y \to 0}} \frac{v_y(x, y + \Delta y) - v_y(x, y)}{\Delta y} = 0$$

resulta:

$$-\frac{\partial v_x(x,y)}{\partial x} - \frac{\partial v_y(x,y)}{\partial y} = 0$$

y reemplazando la ley de Darcy en la anterior ecuación resulta:

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(K_x(x, y) \frac{\partial H}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(K_y(x, y) \frac{\partial H}{\partial y} \right) = 0$$

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(K_x(x, y) \frac{\partial H}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(K_y(x, y) \frac{\partial H}{\partial y} \right) = 0$$

cuando la permeabilidad en las direcciones $x \in y$, $K_x \in K_y \in X_y$ son constantes (es homogénea), entonces:

$$K_x \frac{\partial^2 H}{\partial x^2} + K_y \frac{\partial^2 H}{\partial y^2} = 0$$

y cuando la permeabilidad es isotrópica,

$$\frac{\partial^2 H}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 H}{\partial y^2} = 0$$

obtenemos la ecuación de Laplace.

Validez de las ecuaciones

Estas ecuaciones son válidas para flujo laminar, incompresible

Sólo son válidas para suelos saturados

Ecuación generalizada del flujo del agua subterránea

$$S_{s} \frac{\partial H}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x} \left[K_{xx} \frac{\partial H}{\partial x} \right] + \frac{\partial}{\partial y} \left[K_{yy} \frac{\partial H}{\partial y} \right] + \frac{\partial}{\partial z} \left[K_{zz} \frac{\partial H}{\partial z} \right] + W$$

donde:

- K_x , K_y , K_z son las permeabilidades del suelo
- S_s es el almacenamiento o capacidad específica: es una propiedad del suelo que caracteriza su capacidad de liberar el agua freática que tiene almacenada en respuesta a una disminuición de la cabeza hidráulica.
- W términos para incluir las fuentes(+)/sumideros(-) de agua

Condiciones de frontera

<u>Dirichlet</u>: se conoce la cabeza hidráulica H en toda la frontera S_1

Neumann: se conoce el flujo de Darcy normal a la frontera S_2 :

$$\begin{pmatrix} v_x \\ v_y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -K_x \frac{\partial H}{\partial x} \\ -K_y \frac{\partial H}{\partial y} \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} \frac{\partial H}{\partial x} \\ \frac{\partial H}{\partial y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{v_x}{K_x} \\ -\frac{v_y}{K_y} \end{pmatrix}$$

Líneas equipotenciales y de flujo

Las **líneas equipotenciales** son básicamente las curvas de nivel de la función H

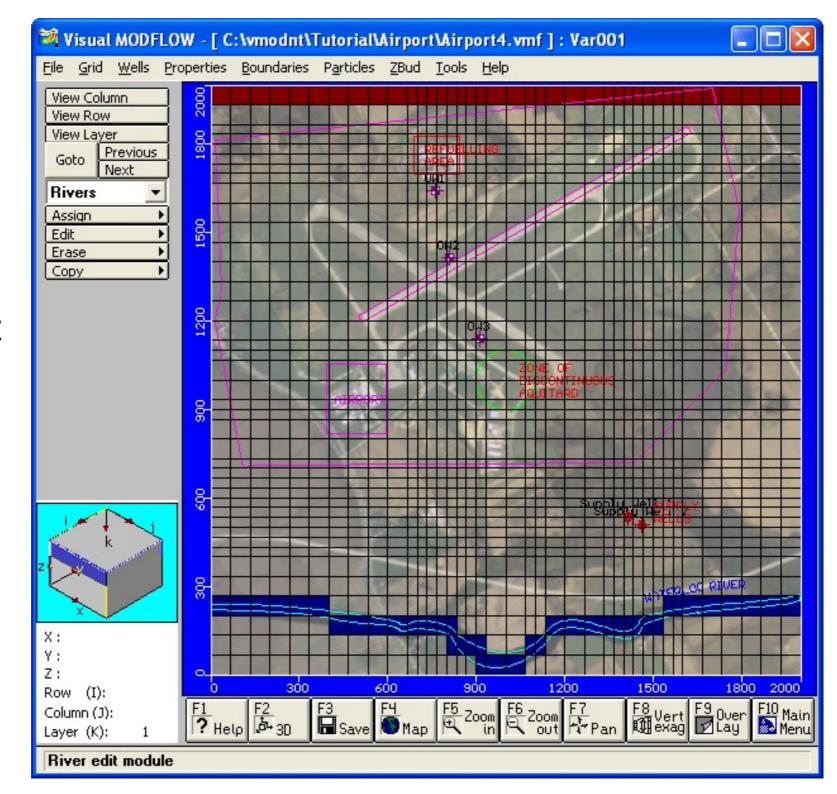
Las **líneas de flujo** son una familia de curvas que son en cada instante de tiempo tangentes al campo de velocidades del flujo. Estas muestran la dirección que seguiría una partícula de fluído en un instante de tiempo dado.

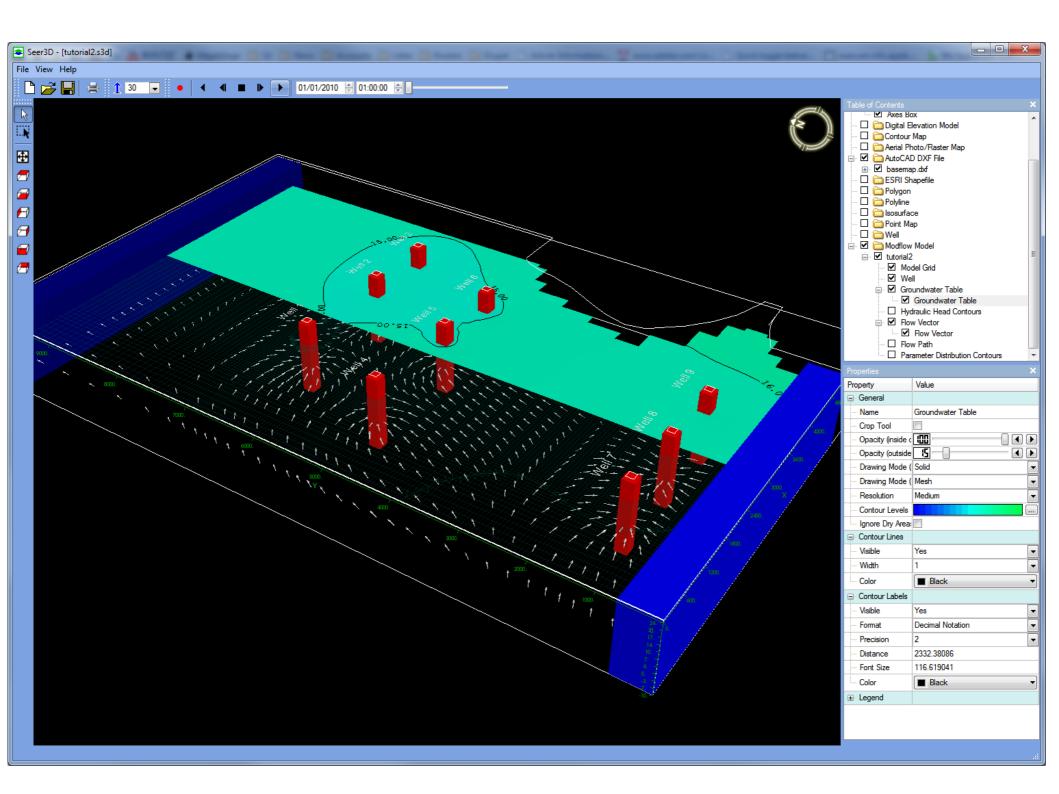
MODFLOW

MODFLOW is the U.S. Geological Survey modular finite-difference flow model, which is a computer code that solves the groundwater flow equation.

```
C:\WINDOWS\system32\cmd.exe
C:\WRDAPP\mf2k.1_17\test-win>..\bin\mf2k.exe ..\data\tc1
                                 MODFLOW-2000
  U.S. GEOLOGICAL SURVEY MODULAR FINITE-DIFFERENCE GROUND-WATER FLOW MODEL
                            Version 1.17.01 09/22/2006
Using NAME file: ..\data\tc1.nam
Run start date and time (yyyy/mm/dd hh:mm:ss): 2007/01/25 13:58:01
STARTING VALUES OF REGRESSION PARAMETERS :
               RCH_ZONE_1
  WELLS_TR
                            RCH_ZONE_2
                                          RIVERS
                                                       SS_1
                                                                    HK_1
  VERT_K_CB
               SS Z
                            HK 2
  -1.100
               63.07
                             31.54
                                          1.2000E-03
                                                       1.3000E-03
                                                                    3.0000E-04
  1.0000E-07
               2.0000E-04
                            4.0000E-05
  TOTAL SUM OF SQUARED, WEIGHTED RESIDUALS: 0.268E+06
MODIFIED GAUSS-NEWTON PROCEDURE FOR PARAMETER-ESTIMATION ITERATION NO. =
VALUES FROM SOLVING THE NORMAL EQUATION :
  MARQUARDT PARAMETER -
  MAX. FRAC. PAR. CHANGE (TOL= 0.100E-01) = 0.86566
       OCCURRED FOR PARAMETER "VERT K CB" TYPE P
CALCULATION OF DAMPING PARAMETER
  MAX-CHANGE SPECIFIED: 2.0
                                    USED:
  OSCILL. CONTROL FACTOR (1, NO EFFECT)-- = 1.0000
  DAMPING PARAMETER (RANGE Ø TO 1) ---- = 1.0000
       CONTROLLED BY PARAMETER "UERT_K_CB" TYPE P
UPDATED ESTIMATES OF REGRESSION PARAMETERS :
  WELLS_TR
               RCH_ZONE_1
                            RCH_ZONE_2
                                          RIVERS
                                                       SS_1
                                                                    HK_{1}
               SS_{\overline{2}}
  VERT_K_CB
  -1.001
                                          2.1128E-04
                                                       1.2206E-03
                                                                    3.9334E-04
  1.8657E-07
  TOTAL SUM OF SQUARED. WEIGHTED RESIDUALS: 0.112E+04
```

Una interfaz gráfica del MODFLOW

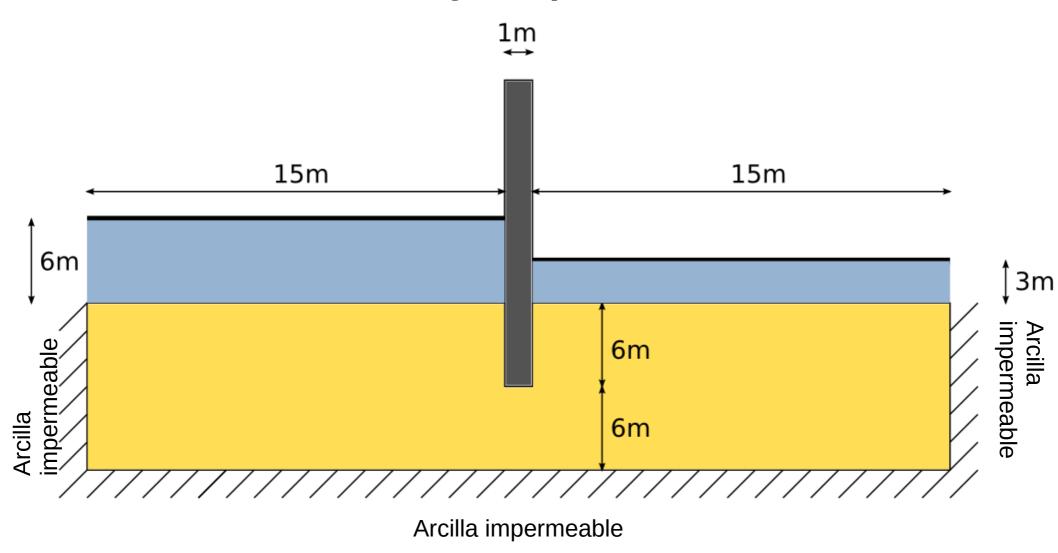




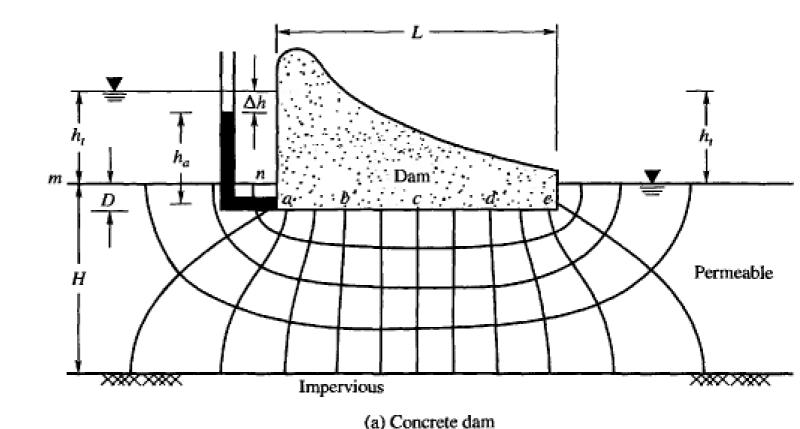
El nivel de agua se asume que se mantiene constante a través del tiempo (flujo permanente), es decir la posición del agua se mantiene constante en el tiempo.

Los bordes laterales del acuífero así como la tablestaca se asumen impermeables, por lo tanto estas fronteras son de Neumann (flujo especificado).

Ejemplo:



Suponga que el medio es isotrópico y homogéneo y que la permeabilidad del suelo es $K = 2.5 \times 10^{-6}$ cm/s



Presiones de levantamiento en la base de una presa

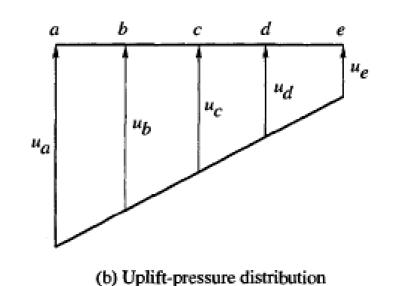


Figure 4.19 Uplift pressure on the base of a concrete dam

Tubificación

La tubificación es un problema de erosión retrograda. Quiere decir que empieza erosionando los primeros granitos de suelo que no están confinados (en el caso de una tablestaca, los del nivel de terreno natural del lado aguas abajo y pegados a la tablestaca). Cuando el agua se lleva esos granos, le es más fácil llevarse los siguientes y de esa manera se va generando un "tubo" en el suelo desde la superficie hacia el interior. Por lo tanto lo que hay que ver es la seguridad que tenemos en el lugar dónde empezaría la tubificación. Entonces lo que hay que comparar es el gradiente hidráulico crítico con el gradiente del lugar en el que la tubificación tendería a iniciarse (en la superficie pegado a la tablestaca en el mismo ejemplo).