

Flujo de agua subterráneo



Diego Andrés Álvarez Marín
Profesor Asociado
Universidad Nacional de Colombia
Sede Manizales

<https://github.com/diegoandresalvarez/solidos>

Principio de Bernoulli

El principio de Bernoulli, establecido por Daniel Bernoulli en 1738, expresa que en un fluido sin viscosidad ni rozamiento, circulando en régimen permanente, la energía que posee el fluido, a lo largo de una línea de corriente, permanece constante a lo largo de su recorrido. La energía de un fluido en cualquier momento consta de tres componentes:

- Cinético: es la energía debida a la velocidad que posea el fluido.
- Potencial gravitacional: es la energía debido a la altitud que un fluido posea.
- Energía de flujo: es la energía que un fluido contiene debido a la presión que posee.

Suposiciones del principio de Bernoulli

- Flujo en régimen permanente (densidad, velocidad, etc, no cambia en el tiempo)
- Flujo no viscoso
- Flujo incompresible (densidad constante a lo largo de la línea de corriente)

$$\nabla \cdot \mathbf{v} = 0$$

$\mathbf{v} := [v_x, v_y]^T$ es el campo de velocidades del fluido

El principio de Bernoulli dice que la energía total presente en cualquier masa de fluido consiste en tres cabezas:

$$\begin{array}{ccccccc}
 \text{Cabeza} & & \text{Cabeza de} & & \text{Altura} & & \\
 \text{hidráulica} & & \text{velocidad} & & \text{piezométrica} & & \\
 \underbrace{\hspace{1.5cm}} & & \underbrace{\hspace{1.5cm}} & & \underbrace{\hspace{4cm}} & & \\
 H & = & \frac{V^2}{2g} & + & \frac{p}{\gamma} & + & z \\
 & & & & \underbrace{\hspace{1.5cm}} & & \underbrace{\hspace{1.5cm}} \\
 & & & & \text{Cabeza de} & & \text{Cabeza de} \\
 & & & & \text{presión} & & \text{elevación}
 \end{array}$$

Cada uno de los términos de esta ecuación tienen unidades de longitud, y a la vez representan formas distintas de energía; en hidráulica es común expresar la energía en términos de longitud, y se habla de **altura** o **cabeza**, esta última traducción del inglés **head**.

$$\begin{array}{ccccccc}
 \text{Cabeza} & & \text{Cabeza de} & & \text{Altura} & & \\
 \text{hidráulica} & & \text{velocidad} & & \text{piezométrica} & & \\
 \underbrace{\hspace{1.5cm}} & & \underbrace{\hspace{1.5cm}} & & \underbrace{\hspace{4cm}} & & \\
 H & = & \frac{V^2}{2g} & + & \frac{p}{\gamma} & + & z \\
 & & & & \underbrace{\hspace{1.5cm}} & & \underbrace{\hspace{1.5cm}} \\
 & & & & \text{Cabeza de} & & \text{Cabeza de} \\
 & & & & \text{presión} & & \text{elevación}
 \end{array}$$

- V = velocidad del fluido en la sección considerada.
- g = aceleración de la gravedad ($g = 9,81 \text{ m/s}^2$)
- z = altura en la dirección de la gravedad desde una cota de referencia.
- p = presión a lo largo de la línea de corriente.
- ρ = densidad del fluido.
- γ = peso específico ($\gamma = \rho g$).

Pérdidas de cabeza hidráulica

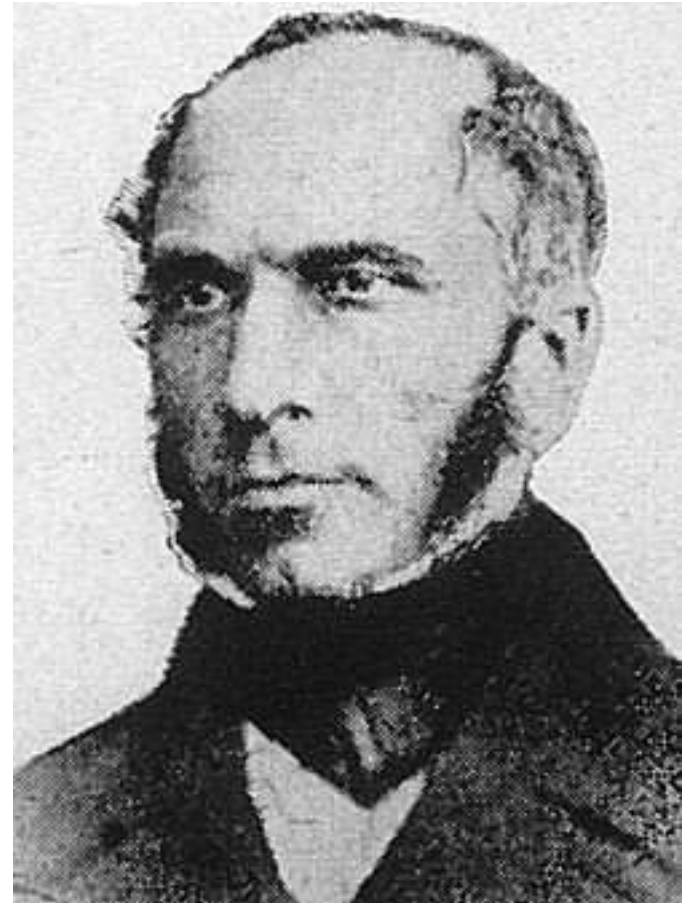
Cuando el agua se mueve de un sitio a otro, parte de la energía se pierde y puede ser expresada como:

$$\frac{V_1^2}{2g} + \frac{p_1}{\gamma} + z_1 = \frac{V_2^2}{2g} + \frac{p_2}{\gamma} + z_2 + \Delta H$$

donde ΔH es la pérdida de cabeza causada por el movimiento del flujo de un sitio a otro.

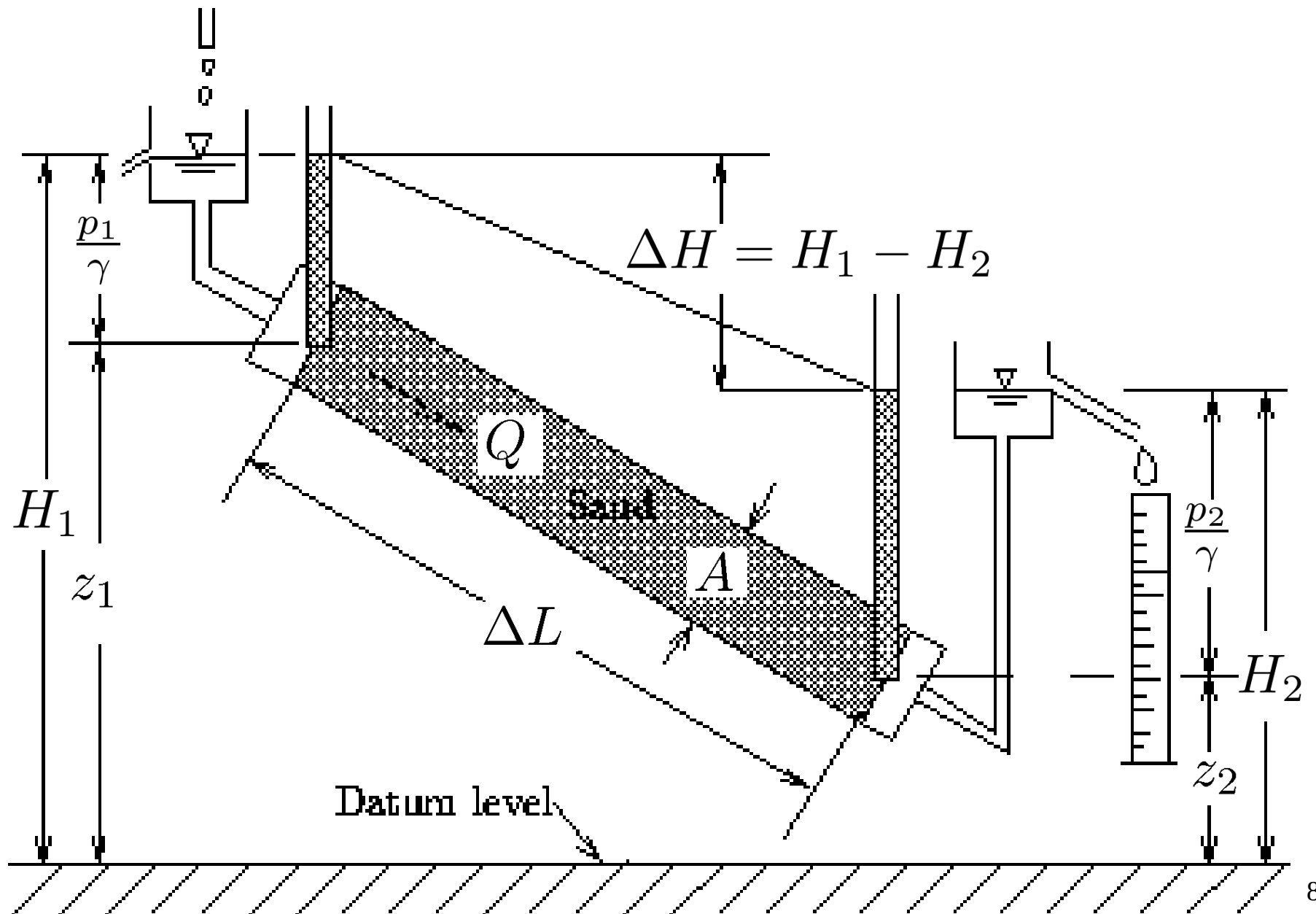
Ley de Darcy

La ley de Darcy es una ecuación constitutiva que describe el flujo de fluido a través de un medio poroso. Fue formulada por el ingeniero francés Henry Darcy en 1856, basado en los resultados de experimentos sobre el flujo de agua en columnas de arena.



Henry Darcy (1803 - 1858)

Experimento de Darcy



La ley de Darcy

La cantidad de agua que se mueve a través de un medio poroso, es proporcional a la diferencia de cabeza hidráulica ΔH y a la sección transversal del área A de la columna, pero es inversamente proporcional a la distancia ΔL de la ruta del flujo:

$$v = \frac{Q}{A} = -K \frac{\Delta H}{\Delta L} \quad \text{y en el límite } v_{\hat{s}}(\mathbf{x}) = -K_{\hat{s}}(\mathbf{x}) \frac{\partial H(\mathbf{x})}{\partial \hat{s}}$$

donde la constante de proporcionalidad K es la permeabilidad del suelo (tiene unidades de velocidad) y s se refiere a la dirección del flujo

El signo negativo se debe a que el agua fluye de regiones de alto a regiones de bajo potencial a medida que recorre la distancia.

Suposiciones de la ley de Darcy

La ley de Darcy es válida en un medio saturado, continuo, homogéneo e isótropo y cuando las fuerzas inerciales son despreciables ($Re < 1$).

La ley de Darcy

Según Swartzendruber (1961), la ley de Darcy solo es aplicable en el sentido estricto para suelos granulares y no es aplicable en suelos cohesivos, debido a que en estas el flujo no es newtoniano.

Swartzendruber (1961) propuso una nueva fórmula para suelos cohesivos, sin embargo en la práctica se sigue utilizando la fórmula propuesta por Darcy debido a su simplicidad, a pesar que el error en el cálculo no es siempre pequeño.

Valores típicos de la permeabilidad K	
Gravas	$> 10^{-1}$ m/s
Arenas	10^{-1} a 10^{-5} m/s
Arenas finas, limos gruesos	10^{-5} a 10^{-7} m/s
Limos	10^{-7} a 10^{-9} m/s
Arcillas	$< 10^{-9}$ m/s

Recuerde que este debe medirse a una temperatura de 20 grados centígrados.

K en suelos anisotrópicos

Los suelos son generalmente anisotrópicos, siendo las arcillas más anisotrópicas que en los suelos granulares. La permeabilidad depende de la dirección en la cual se mida esta, siendo mayor en el sentido horizontal y menor en el sentido vertical.

<i>Soil type</i>	k_h/k_v	<i>Reference</i>
Organic silt with peat	1.2–1.7	Tsien (1955)
Plastic marine clay	1.2	Lumb and Holt (1968)
Soft clay	1.5	Basett and Brodie (1961)
Soft marine clay	1.05	Subbaraju (1973)
Boston blue clay	0.7–3.3	Haley and Aldrich (1969)

Movimiento del agua subterránea bajo flujo permanente para el caso bidimensional

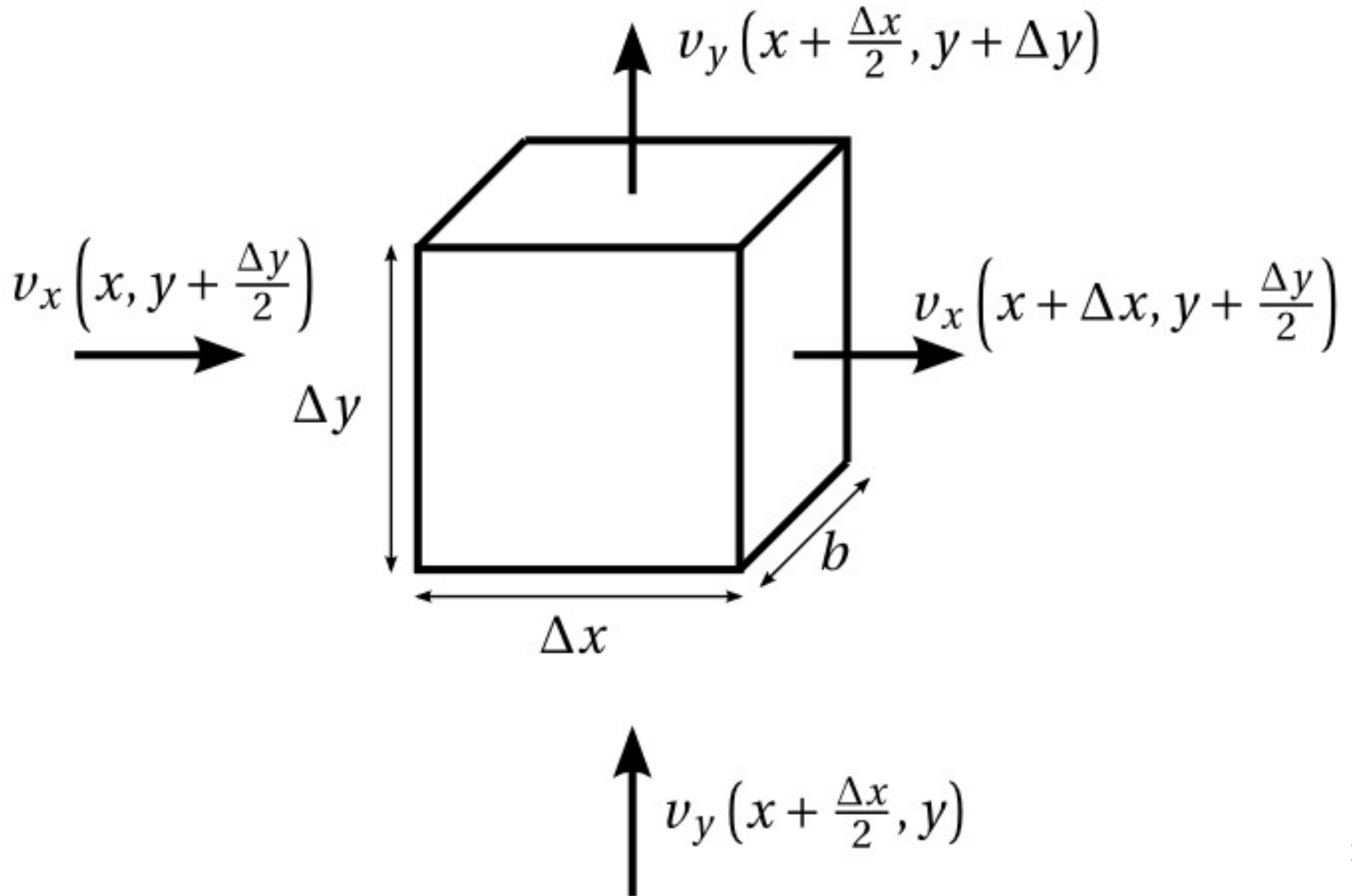
Bajo flujo permanente la cantidad de agua que entra al acuífero es igual a la cantidad de agua que sale de este, siendo esta cantidad constante en el tiempo.

Por la ley de conservación de masa:

$$MASA_{entra} + MASA_{generada} = MASA_{sale}$$

Suponiendo que el flujo de agua es bidimensional, que el acuífero tiene espesor b , y que a lo largo de las fronteras del elemento se conocen o su flujo v o su cabeza hidráulica H , entonces se tiene que en flujo permanente $\frac{\partial \bullet}{\partial t} = 0$ la cantidad de agua que entra al elemento en un intervalo de tiempo Δt es igual a la cantidad de agua que sale por el.

Elemento diferencial de medio poroso



Movimiento del agua subterránea bajo flujo permanente para el caso bidimensional

$$MASA_{entra} + MASA_{generada} = MASA_{sale}$$

$$v_x(x, y)\Delta y b \Delta t \rho + v_y(x, y)\Delta x b \Delta t \rho = \\ v_x(x + \Delta x, y)\Delta y b \Delta t \rho + v_y(x, y + \Delta y)\Delta x b \Delta t \rho$$

donde v_x y v_y son los flujos en las direcciones x y y respectivamente reorganizando términos y dividiendo la expresión entre $\Delta x \Delta y \Delta t b \rho$, resulta:

$$-\frac{v_x(x + \Delta x, y) - v_x(x, y)}{\Delta x} - \frac{v_y(x, y + \Delta y) - v_y(x, y)}{\Delta y} = 0$$

tomando límites cuando el tamaño del elemento diferencial de suelo tiende a un punto, tenemos:

$$\begin{aligned}
 - \lim_{\substack{\Delta x \rightarrow 0 \\ \Delta y \rightarrow 0}} \frac{v_x(x + \Delta x, y) - v_x(x, y)}{\Delta x} \\
 - \lim_{\substack{\Delta x \rightarrow 0 \\ \Delta y \rightarrow 0}} \frac{v_y(x, y + \Delta y) - v_y(x, y)}{\Delta y} = 0
 \end{aligned}$$

resulta:

$$- \frac{\partial v_x(x, y)}{\partial x} - \frac{\partial v_y(x, y)}{\partial y} = 0$$

y reemplazando la ley de Darcy en la anterior ecuación resulta:

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(K_x(x, y) \frac{\partial H}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(K_y(x, y) \frac{\partial H}{\partial y} \right) = 0$$

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(K_x(x, y) \frac{\partial H}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(K_y(x, y) \frac{\partial H}{\partial y} \right) = 0$$

cuando la permeabilidad en las direcciones x e y , K_x y K_y son constantes (es homogénea), entonces:

$$K_x \frac{\partial^2 H}{\partial x^2} + K_y \frac{\partial^2 H}{\partial y^2} = 0$$

y cuando la permeabilidad es isotrópica,

$$\frac{\partial^2 H}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 H}{\partial y^2} = 0$$

obtenemos la ecuación de Laplace.

Validez de las ecuaciones

Estas ecuaciones son válidas para flujo laminar, incompresible

Sólo son válidas para suelos saturados

Ecuación generalizada del flujo del agua subterránea

$$S_s \frac{\partial H}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x} \left[K_{xx} \frac{\partial H}{\partial x} \right] + \frac{\partial}{\partial y} \left[K_{yy} \frac{\partial H}{\partial y} \right] + \frac{\partial}{\partial z} \left[K_{zz} \frac{\partial H}{\partial z} \right] + W$$

donde:

- K_x , K_y , K_z son las permeabilidades del suelo
- S_s es el **almacenamiento o capacidad específica**: es una propiedad del suelo que caracteriza su capacidad de liberar el agua freática que tiene almacenada en respuesta a una disminución de la cabeza hidráulica.
- W términos para incluir las fuentes(+)/sumideros(-) de agua

Condiciones de frontera

Dirichlet: se conoce la cabeza hidráulica H en toda la frontera S_1

Neumann: se conoce el flujo de Darcy normal a la frontera S_2 :

$$\begin{pmatrix} v_x \\ v_y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -K_x \frac{\partial H}{\partial x} \\ -K_y \frac{\partial H}{\partial y} \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} \frac{\partial H}{\partial x} \\ \frac{\partial H}{\partial y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{v_x}{K_x} \\ -\frac{v_y}{K_y} \end{pmatrix}$$

Líneas equipotenciales y de flujo

Las **líneas equipotenciales** son básicamente las curvas de nivel de la función H

Las **líneas de flujo** son una familia de curvas que son en cada instante de tiempo tangentes al campo de velocidades del flujo. Estas muestran la dirección que seguiría una partícula de fluido en un instante de tiempo dado.

MODFLOW

MODFLOW is the U.S. Geological Survey modular finite-difference flow model, which is a computer code that solves the groundwater flow equation.

```
C:\WINDOWS\system32\cmd.exe
C:\WRDAPP\mf2k.1_17\test-win>..\bin\mf2k.exe ..\data\tc1

MODFLOW-2000
U.S. GEOLOGICAL SURVEY MODULAR FINITE-DIFFERENCE GROUND-WATER FLOW MODEL
Version 1.17.01 09/22/2006

Using NAME file: ..\data\tc1.nam

Run start date and time (yyyy/mm/dd hh:mm:ss): 2007/01/25 13:58:01

STARTING VALUES OF REGRESSION PARAMETERS :

WELLS_TR    RCH_ZONE_1    RCH_ZONE_2    RIVERS    SS_1    HK_1
VERT_K_CB    SS_2    HK_2

-1.100      63.07      31.54      1.2000E-03  1.3000E-03  3.0000E-04
1.0000E-07  2.0000E-04  4.0000E-05

TOTAL SUM OF SQUARED, WEIGHTED RESIDUALS: 0.268E+06

MODIFIED GAUSS-NEWTON PROCEDURE FOR PARAMETER-ESTIMATION ITERATION NO. = 1

VALUES FROM SOLVING THE NORMAL EQUATION :
MARQUARDT PARAMETER ----- = 0.0000
MAX. FRAC. PAR. CHANGE (TOL= 0.100E-01) = 0.86566
OCCURRED FOR PARAMETER "VERT_K_CB " TYPE P

CALCULATION OF DAMPING PARAMETER
MAX-CHANGE SPECIFIED: 2.0 USED: 2.0
OSCILL. CONTROL FACTOR (1, NO EFFECT)-- = 1.0000
DAMPING PARAMETER (RANGE 0 TO 1) ----- = 1.0000
CONTROLLED BY PARAMETER "VERT_K_CB " TYPE P

UPDATED ESTIMATES OF REGRESSION PARAMETERS :

WELLS_TR    RCH_ZONE_1    RCH_ZONE_2    RIVERS    SS_1    HK_1
VERT_K_CB    SS_2    HK_2

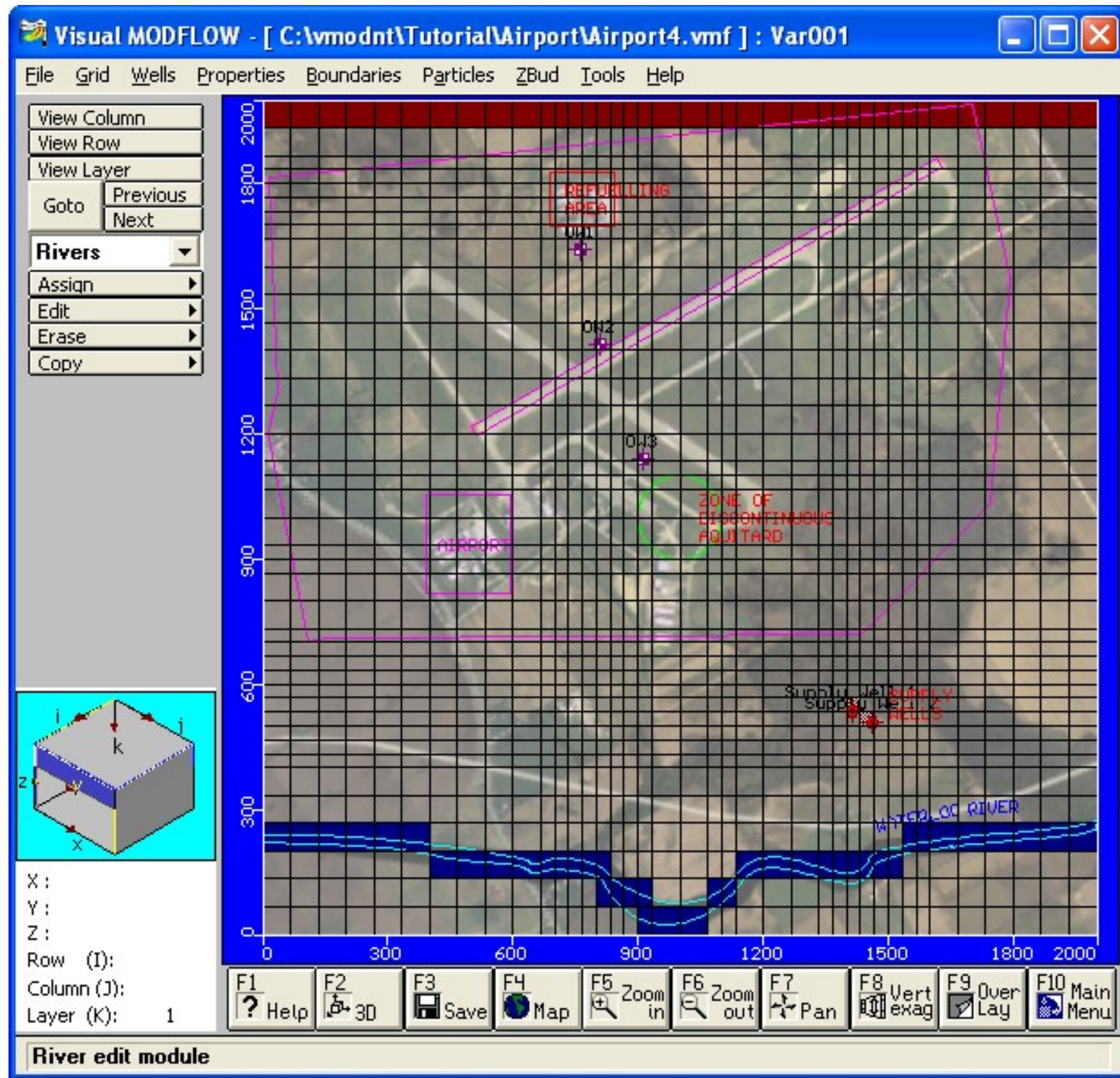
-1.001      39.23      43.71      2.1128E-04  1.2206E-03  3.9334E-04
1.8657E-07  8.7307E-05  4.2769E-05

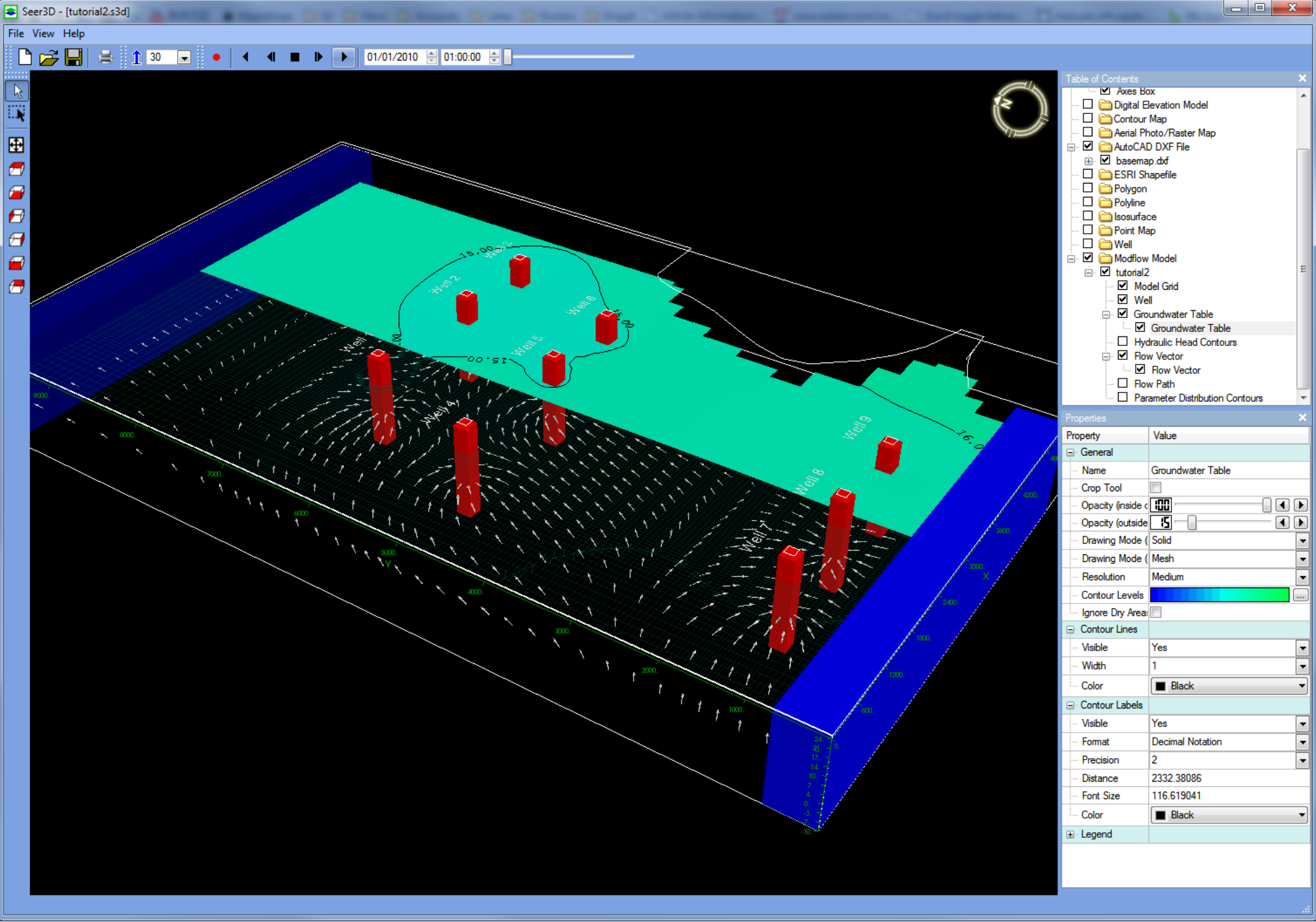
TOTAL SUM OF SQUARED, WEIGHTED RESIDUALS: 0.112E+04
```

<http://en.wikipedia.org/wiki/Modflow>

<http://water.usgs.gov/nrp/gwsoftware/modflow.html>

Una interfaz gráfica del MODFLOW

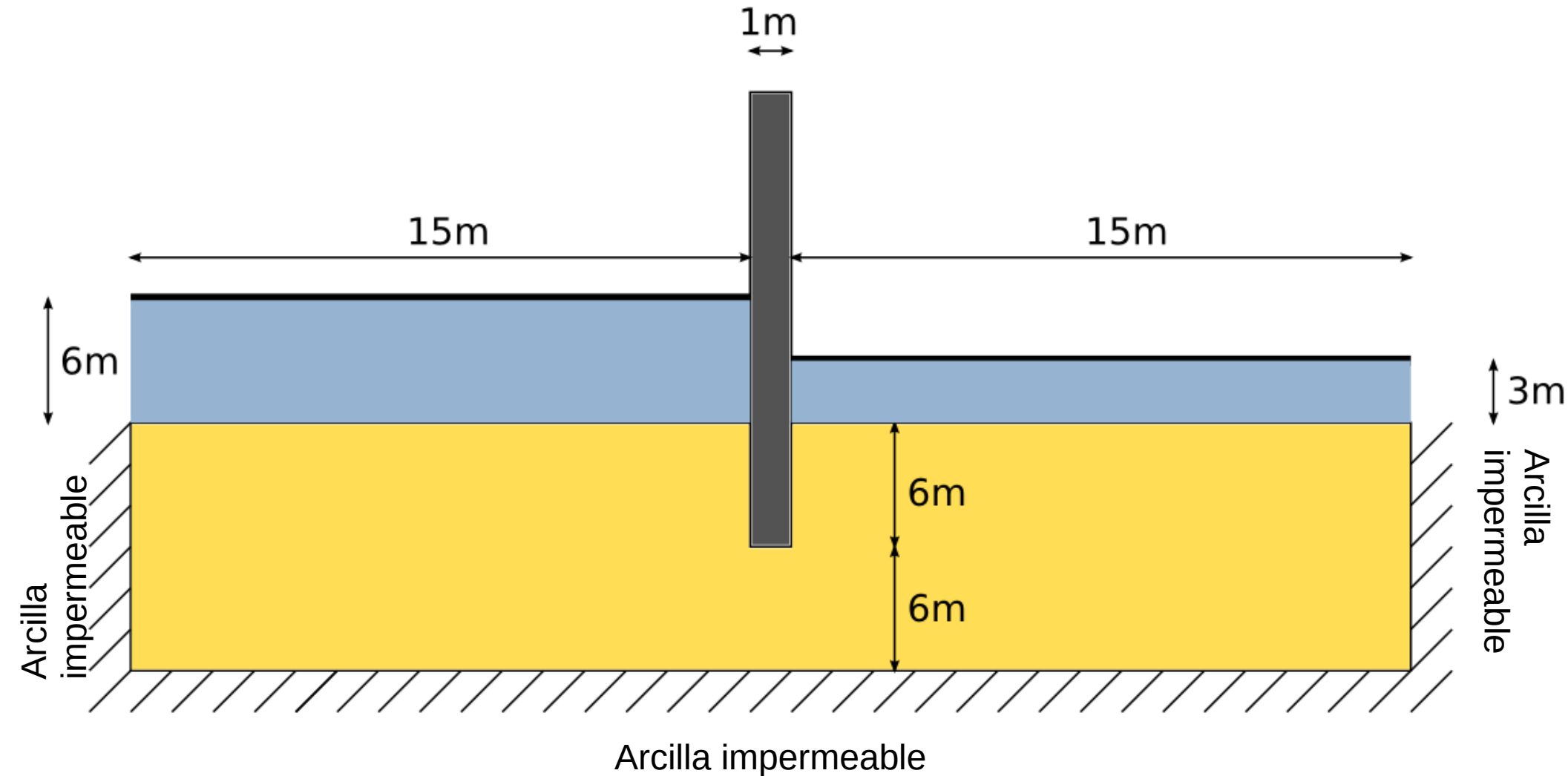




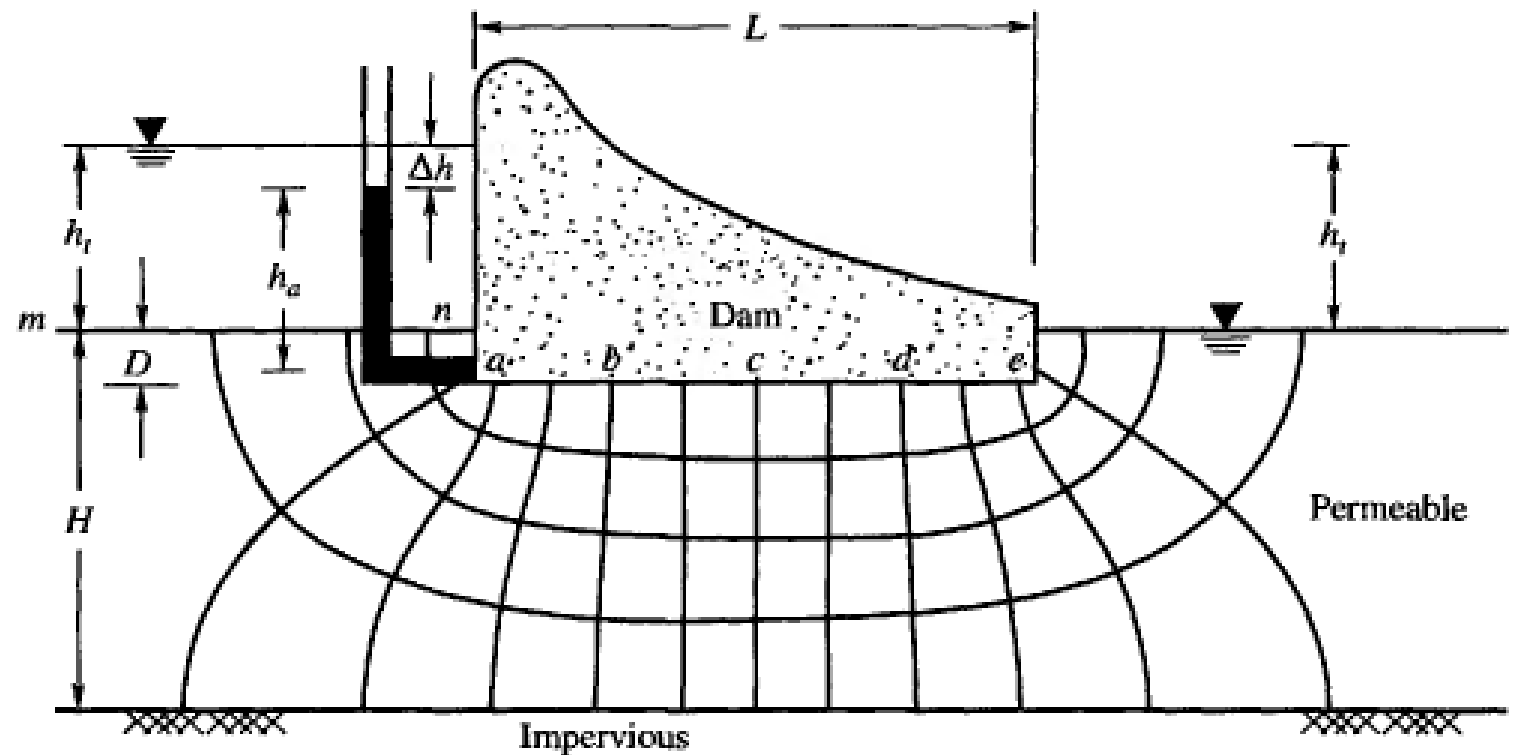
El nivel de agua se asume que se mantiene constante a través del tiempo (flujo permanente), es decir la posición del agua se mantiene constante en el tiempo.

Los bordes laterales del acuífero así como la tablestaca se asumen impermeables, por lo tanto estas fronteras son de Neumann (flujo especificado).

Ejemplo:

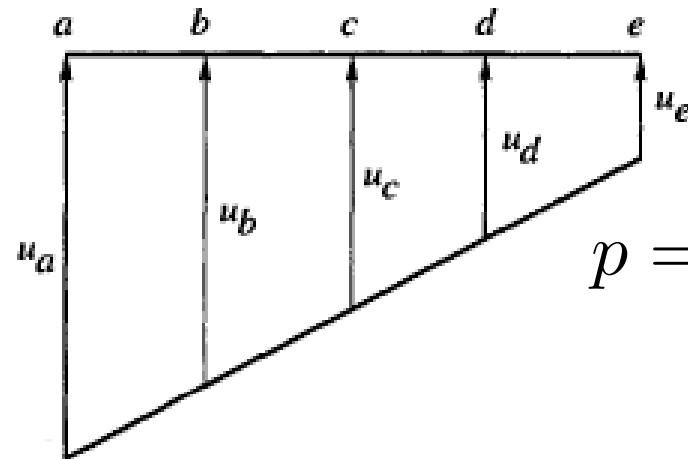


Suponga que el medio es isotrópico y homogéneo y que la permeabilidad del suelo es $K = 2.5 \times 10^{-6} \text{ cm/s}$



(a) Concrete dam

Presiones de
levantamiento
en la base de
una presa



(b) Uplift-pressure distribution

$$p = \gamma(H - z)$$

Figure 4.19 Uplift pressure on the base of a concrete dam

Tubificación (piping)

La tubificación es un problema de erosión retrograda. Quiere decir que empieza erosionando los primeros granitos de suelo que no están confinados (en el caso de una tablestaca, los del nivel de terreno natural del lado aguas abajo y pegados a la tablestaca). Cuando el agua se lleva esos granos, le es más fácil llevarse los siguientes y de esa manera se va generando un “tubo” en el suelo desde la superficie hacia el interior. Por lo tanto lo que hay que ver es la seguridad que tenemos en el lugar dónde empezaría la tubificación. Entonces lo que hay que comparar es el gradiente hidráulico crítico con el gradiente del lugar en el que la tubificación tendería a iniciarse (en la superficie pegado a la tablestaca en el mismo ejemplo).

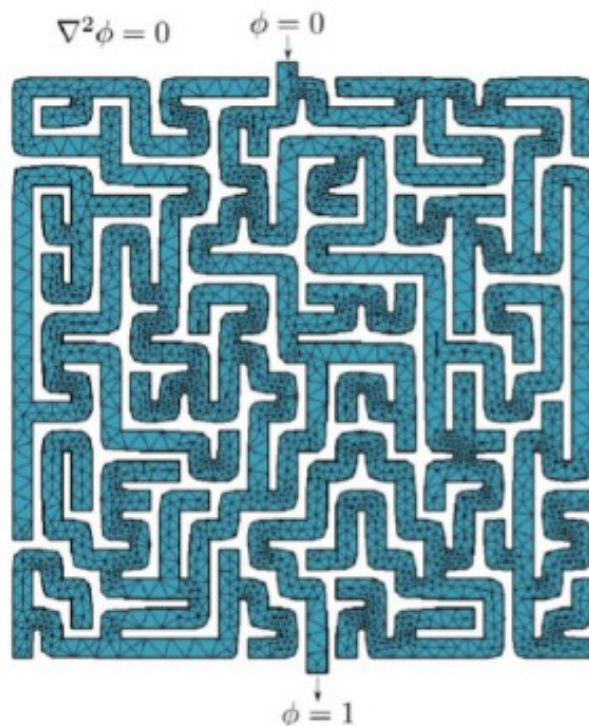


Jeremy Theler • 3.+
Solver Developer at OnScale
1 Woche •



How to solve a maze without AI? Use Laplace's equation:

1. Mesh the maze
2. Set Dirichlet BCs $\phi = 0$ at start and $\phi = 1$ at end
3. Set homogeneous Neumann BCs everywhere else
4. Solve $\nabla^2 \phi = 0$
5. Go to the start and follow the gradient



Mesh it, set $\phi = 0$ at start, $\phi = 1$ at end,
 $\nabla \phi \cdot \hat{n} = 0$ otherwise and solve $\nabla^2 \phi = 0$



Go to start and follow the gradient $\nabla \phi$!

Seepage flow. The total quantity q of flow per unit of time may be calculated from the discrete values of total head, without drawing a flow net. q is obtained for any area A that cuts the flow completely:

$$q = \int_A (v_x n_x + v_y n_y) dA \quad (19)$$

where n_x and $n_y = x$ and y components of a unit vector normal to surface A , and v_x and $v_y = x$ and y components of seepage velocity (Fig. 7). If the surface A is vertical, then

$$q = \int_A v_x dA = \int_A k_x \frac{\partial h}{\partial x} dA$$

The area A of Eq. 20 may be selected arbitrarily, provided that it blocks completely. In the case of the vertical section shown in Fig. 7 ($m < n$) may be integrated by using a trapezoidal rule:

$$q = \frac{\Delta x}{2} v_{i,m} + \Delta x \sum_{j=m+1}^{n-1} v_{i,j} + \frac{\Delta x}{2} v_{i,n}$$

where

$$v_{i,j} = \frac{k_x}{2\Delta x} (h_{i+1,j} - h_{i-1,j})$$

Finally, the total quantity of seepage is

$$q = \frac{k_x}{4} \left[h_{i+1,m} - h_{i-1,m} + 2 \sum_{j=m+1}^{n-1} (h_{i+1,j} - h_{i-1,j}) + h_{i+1,n} - h_{i-1,n} \right] \quad (23)$$

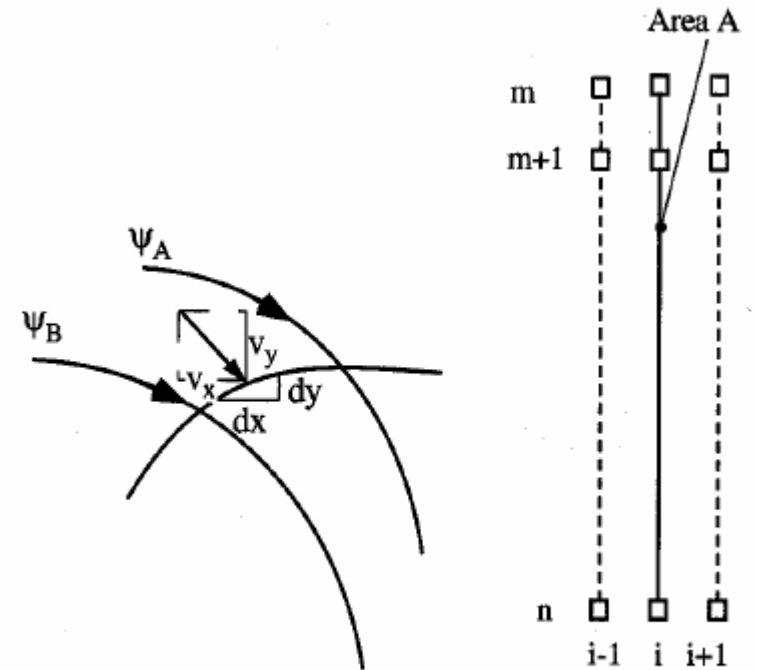


Figure 7 Flow lines and calculation of total quantity of seepage from discrete values of total head.

Stream function and flow lines. By definition, the stream function $\psi(x, y)$ is

$$v_x = \frac{\partial \psi}{\partial y} \quad \text{and} \quad v_y = -\frac{\partial \psi}{\partial x} \quad (24)$$

The quantity of seepage dq through the small element with sides dx and dy in Fig. 7 is

$$dq = v_x dy - v_y dx = \frac{\partial \psi}{\partial y} dy + \frac{\partial \psi}{\partial x} dx = d\psi \quad (25)$$

Using Eq. 23, the quantity of seepage Δq between two nodes (i, j) and $(i, j + 1)$ is

$$\begin{aligned} \Delta q &= \int_{i,j+1}^{i,j} v_x dy = \frac{k_x}{4} (h_{i+1,j} - h_{i-1,j} + h_{i+1,j+1} - h_{i-1,j+1}) \\ &= \Delta \psi = \psi_{i,j} - \psi_{i,j+1} \end{aligned} \quad (26)$$

The values of $\psi_{i,j}$ are usually set equal to zero along one of the flow lines on the external boundary. After the calculation of total head $h_{i,j}$, the values of $\psi_{i,j}$ in the interior are calculated with Eq. 26 by moving away from the flow line where $\psi_{i,j} = 0$. The stream function is constant on flow lines. To draw a flow net with equipotential and flow lines, it is useful to introduce the modified stream function $\psi'_{i,j} = \psi_{i,j}/k$. The flow net can be obtained by superimposing the contour lines of $h_{i,j}$ and $\psi'_{i,j}$ for identical value of contour interval.

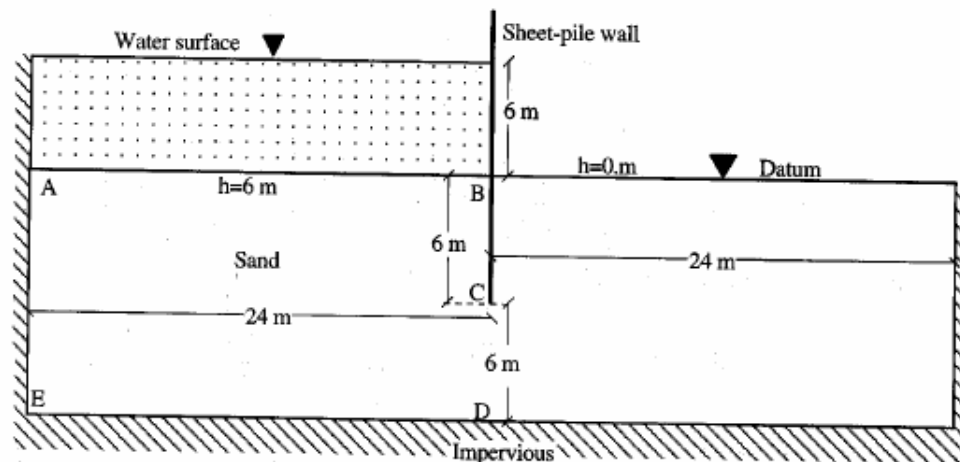


Figure 11 Definition of seepage problem with a sheet-pile wall.

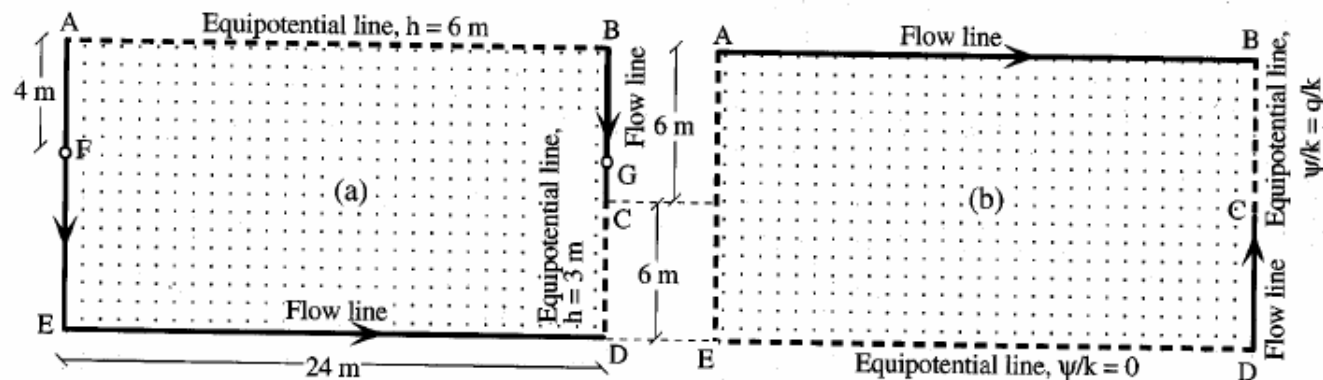


Figure 12 Boundary conditions for (a) original seepage problem and (b) complementary seepage problem.

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M
1	Total head (m)			Upstream head (m) = 6			Downstream head (m) = 3						
2	6.00	6.00	6.00	6.00	6.00	6.00	6.00	6.00	6.00	6.00	6.00	6.00	6.00
3	5.92	5.92	5.91	5.90	5.88	5.85	5.81	5.75	5.68	5.59	5.48	5.36	5.28
4	5.85	5.85	5.83	5.80	5.76	5.71	5.63	5.53	5.39	5.21	4.97	4.68	4.41
5	5.79	5.78	5.76	5.72	5.67	5.59	5.48	5.33	5.14	4.88	4.52	3.97	3.00
6	5.74	5.74	5.71	5.66	5.59	5.49	5.36	5.19	4.95	4.65	4.24	3.70	3.00
7	5.71	5.70	5.68	5.62	5.55	5.44	5.29	5.10	4.84	4.52	4.10	3.59	3.00
8	5.70	5.69	5.66	5.61	5.53	5.42	5.27	5.07	4.81	4.48	4.06	3.56	3.00
9	Quantity of flow per unit of time and unit of permeability = 3.2543												

Figure 13 Value of total head after 100 iterations.

	A	B	C	D	J	K	L	M
1	Total head (m)				3			
2	=\$F\$1	=\$F\$1	=\$F\$1	=\$F\$1	=\$F\$1	=\$F\$1	=\$F\$1	=\$F\$1
3	=(A2+A4+2*B3)/4	=(B2+A3+B4+C3)/4	=(C2+B3+C4+D3)/4	=(D2+C3+D4+E3)/4	=(J2+I3+J4+K3)/4	=(K2+J3+K4+L3)/4	=(L2+K3+L4+M3)/4	=(M2+M4+2*L3)/4
4	=(A3+A5+2*B4)/4	=(B3+A4+B5+C4)/4	=(C3+B4+C5+D4)/4	=(D3+C4+D5+E4)/4	=(J3+I4+J5+K4)/4	=(K3+J4+K5+L4)/4	=(L3+K4+L5+M4)/4	=(M3+M5+2*L4)/4
5	=(A4+A6+2*B5)/4	=(B4+A5+B6+C5)/4	=(C4+B5+C6+D5)/4	=(D4+C5+D6+E5)/4	=(J4+I5+J6+K5)/4	=(K4+J5+K6+L5)/4	=(L4+K5+L6+M5)/4	=\$J\$1
6	=(A5+A7+2*B6)/4	=(B5+A6+B7+C6)/4	=(C5+B6+C7+D6)/4	=(D5+C6+D7+E6)/4	=(J5+I6+J7+K6)/4	=(K5+J6+K7+L6)/4	=(L5+K6+L7+M6)/4	=\$J\$1
7	=(A6+A8+2*B7)/4	=(B6+A7+B8+C7)/4	=(C6+B7+C8+D7)/4	=(D6+C7+D8+E7)/4	=(J6+I7+J8+K7)/4	=(K6+J7+K8+L7)/4	=(L6+K7+L8+M7)/4	=\$J\$1
8	=(A7+B8)/2	=(A8+C8+2*B7)/4	=(B8+D8+2*C7)/4	=(C8+E8+2*D7)/4	=(I8+K8+2*J7)/4	=(J8+L8+2*K7)/4	=(K8+M8+2*L7)/4	=\$J\$1

	H	I
9	Quantity of flow per unit of time and unit of permeability = =(A3-A5+M3-M5+2*SUM(B3:L3)-2*SUM(B5:L5))/4	

Figure 14 Formulas used in Fig. 13.