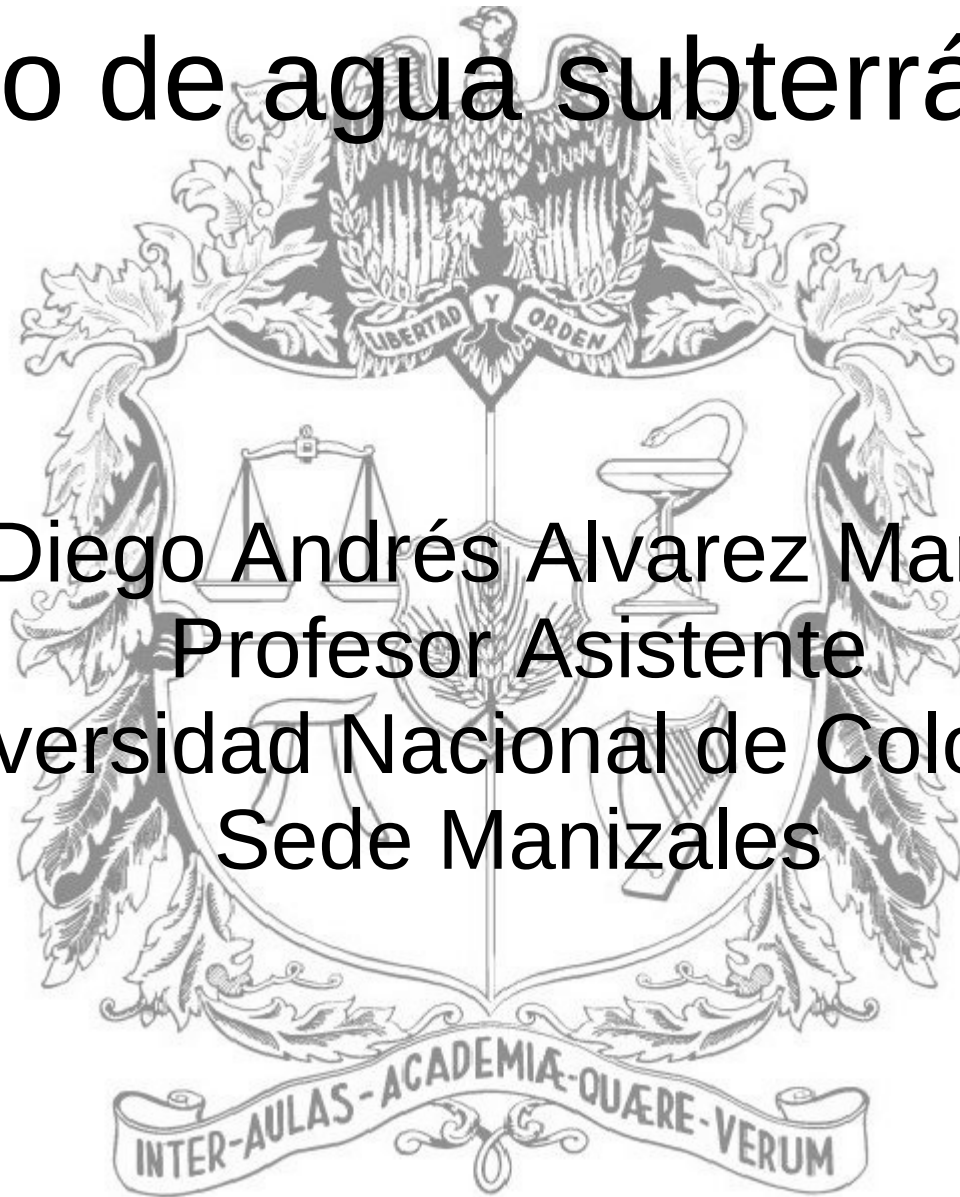


# Flujo de agua subterráneo

Diego Andrés Álvarez Marín  
Profesor Asistente  
Universidad Nacional de Colombia  
Sede Manizales



# Principio de Bernoulli

El principio de Bernoulli, establecido por Daniel Bernoulli en 1738, expresa que en un fluido ideal (sin viscosidad ni rozamiento) en régimen de circulación por un conducto cerrado, la energía que posee el fluido permanece constante a lo largo de su recorrido. La energía de un fluido en cualquier momento consta de tres componentes:

- Cinético: es la energía debida a la velocidad que posea el fluido.
- Potencial gravitacional: es la energía debido a la altitud que un fluido posea.
- Energía de flujo: es la energía que un fluido contiene debido a la presión que posee.

# Suposiciones del principio de Bernoulli

- Flujo por un conducto cerrado
- Flujo no viscoso
- Flujo incompresible (densidad constante):

$$\nabla \cdot \mathbf{v} = 0$$

$\mathbf{v} := [v_x, v_y]^T$  es el campo de velocidades del fluído

El principio de Bernoulli dice que la energía total presente en cualquier masa de fluido consiste en tres cabezas:

$$\begin{array}{ccccccc}
 \text{Cabeza} & & \text{Cabeza de} & & \text{Altura} & & \\
 \text{hidráulica} & & \text{velocidad} & & \text{piezométrica} & & \\
 \underbrace{\hspace{1.5cm}} & & \underbrace{\hspace{1.5cm}} & & \underbrace{\hspace{4cm}} & & \\
 H & = & \frac{V^2}{2g} & + & \frac{p}{\gamma} & + & z \\
 & & & & \underbrace{\hspace{1.5cm}} & & \underbrace{\hspace{1.5cm}} \\
 & & & & \text{Cabeza de} & & \text{Cabeza de} \\
 & & & & \text{presión} & & \text{elevación}
 \end{array}$$

Cada uno de los términos de esta ecuación tienen unidades de longitud, y a la vez representan formas distintas de energía; en hidráulica es común expresar la energía en términos de longitud, y se habla de **altura** o **cabeza**, esta última traducción del inglés **head**.

$$\begin{array}{ccccccc}
 \text{Cabeza} & & \text{Cabeza de} & & \text{Altura} & & \\
 \text{hidráulica} & & \text{velocidad} & & \text{piezométrica} & & \\
 \underbrace{\hspace{1.5cm}} & & \underbrace{\hspace{1.5cm}} & & \underbrace{\hspace{4cm}} & & \\
 H & = & \frac{V^2}{2g} & + & \frac{p}{\gamma} & + & z \\
 & & & & \underbrace{\hspace{1.5cm}} & & \underbrace{\hspace{1.5cm}} \\
 & & & & \text{Cabeza de} & & \text{Cabeza de} \\
 & & & & \text{presión} & & \text{elevación}
 \end{array}$$

- $V$  = velocidad del fluido en la sección considerada.
- $g$  = aceleración de la gravedad ( $g = 9,81 \text{ m/s}^2$ )
- $z$  = altura en la dirección de la gravedad desde una cota de referencia.
- $p$  = presión a lo largo de la línea de corriente.
- $\rho$  = densidad del fluido.
- $\gamma$  = peso específico ( $\gamma = \rho g$ ).

# Pérdidas de cabeza hidráulica

Cuando el agua se mueve de un sitio a otro, parte de la energía se pierde y puede ser expresada como:

$$\frac{V_1^2}{2g} + \frac{p_1}{\gamma} + z_1 = \frac{V_2^2}{2g} + \frac{p_2}{\gamma} + z_2 + h_L$$

donde  $h_L$  es la pérdida de cabeza causada por el movimiento del flujo de un sitio a otro.

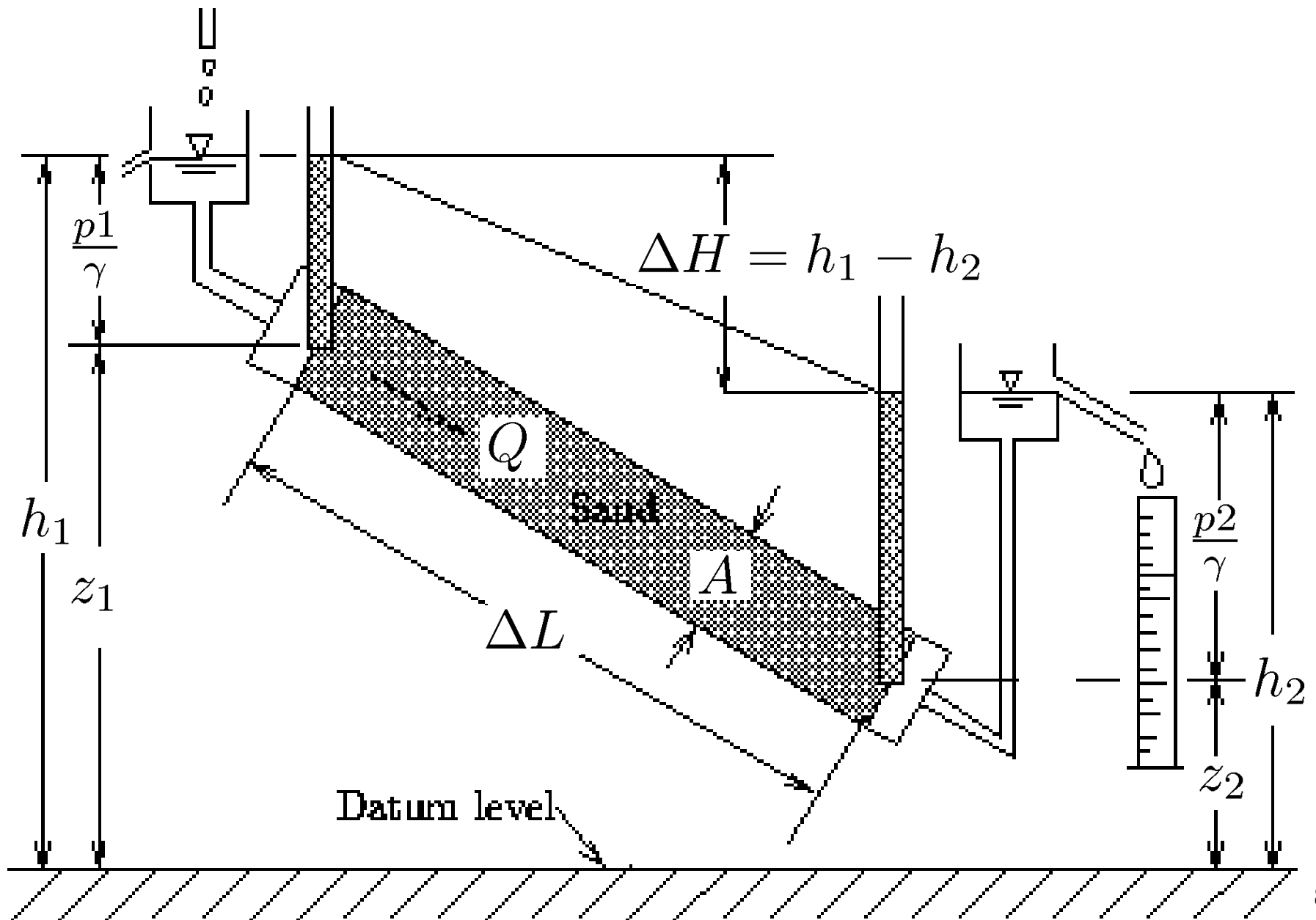
# Ley de Darcy

La ley de Darcy es una ecuación constitutiva que describe el flujo de fluido a través de un medio poroso. Fue formulada por el ingeniero francés Henry Darcy en 1856, basado en los resultados de experimentos sobre el flujo de agua en columnas de arena.



Henry Darcy (1803 - 1858)

# Experimento de Darcy





# La ley de Darcy

La cantidad de agua que se mueve a través de un medio poroso, es proporcional a la diferencia de cabeza hidráulica  $\Delta H$  y a la sección transversal del área  $A$  de la columna, pero es inversamente proporcional a la distancia  $\Delta L$  de la ruta del flujo:

$$v = \frac{Q}{A} = -K \frac{\Delta H}{\Delta L} \quad \text{y en el límite } v = -K \frac{\partial H}{\partial s}$$

donde la constante de proporcionalidad  $K$  es la permeabilidad del suelo (tiene unidades de velocidad) y  $s$  se refiere a la dirección del flujo

El signo negativo se debe a que el agua fluye de regiones de alto a regiones de bajo potencial a medida que recorre la distancia.

# La ley de Darcy

Según Swartzendruber (1961), la ley de Darcy solo es aplicable en el sentido estricto para suelos granulares y no es aplicable en suelos cohesivos, debido a que en estas el flujo no es newtoniano.

Swartzendruber (1961) propuso una nueva fórmula para suelos cohesivos, sin embargo en la práctica se sigue utilizando la fórmula propuesta por Darcy debido a su simplicidad, a pesar que el error en el cálculo no es siempre pequeño.

<b>Valores típicos de la permeabilidad K</b>	
Gravas	$> 10^{-1}$ m/s
Arenas	$10^{-1}$ a $10^{-5}$ m/s
Arenas finas, limos gruesos	$10^{-5}$ a $10^{-7}$ m/s
Limos	$10^{-7}$ a $10^{-9}$ m/s
Arcillas	$< 10^{-9}$ m/s

Recuerde que este debe medirse a una temperatura de 20 grados centígrados.

# K en suelos anisotrópicos

Los suelos son generalmente anisotrópicos, siendo las arcillas más anisotrópicas que en los suelos granulares. La permeabilidad depende de la dirección en la cual se mida esta, siendo mayor en el sentido horizontal y menor en el sentido vertical.

<i>Soil type</i>	$k_h/k_v$	<i>Reference</i>
Organic silt with peat	1.2–1.7	Tsien (1955)
Plastic marine clay	1.2	Lumb and Holt (1968)
Soft clay	1.5	Basett and Brodie (1961)
Soft marine clay	1.05	Subbaraju (1973)
Boston blue clay	0.7–3.3	Haley and Aldrich (1969)

# Movimiento del agua subterránea bajo flujo permanente para el caso bidimensional

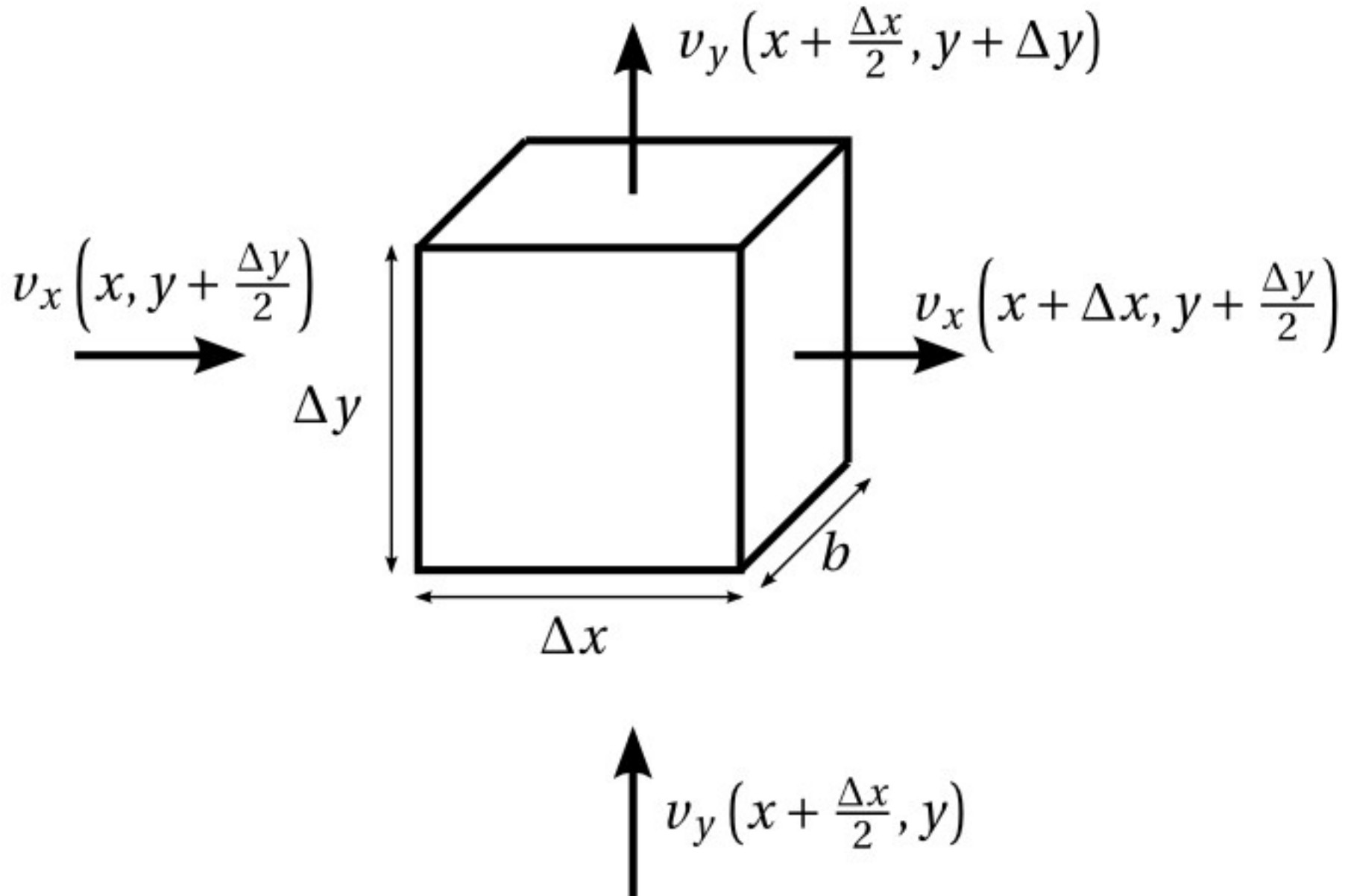
Bajo flujo permanente la cantidad de agua que entra al acuífero es igual a la cantidad de agua que sale de este, siendo esta cantidad constante en el tiempo.

Por la ley de conservación de masa:

$$MASA_{entra} + MASA_{generada} = MASA_{sale}$$

Suponiendo que el flujo de agua es bidimensional, que el acuífero tiene espesor  $b$ , y que a lo largo de las fronteras del elemento se conocen o su flujo  $v$  o su cabeza hidráulica  $H$ , entonces se tiene que en flujo permanente  $\frac{\partial \bullet}{\partial t} = 0$  la cantidad de agua que entra al elemento en un intervalo de tiempo  $\Delta t$  es igual a la cantidad de agua que sale por el.

# Elemento diferencial de medio poroso



# Movimiento del agua subterránea bajo flujo permanente para el caso bidimensional

$$MASA_{entra} + MASA_{generada} = MASA_{sale}$$

$$v_x(x, y)\Delta y b \Delta t \rho + v_y(x, y)\Delta x b \Delta t \rho = \\ v_x(x + \Delta x, y)\Delta y b \Delta t \rho + v_y(x, y + \Delta y)\Delta x b \Delta t \rho$$

donde  $v_x$  y  $v_y$  son los flujos en las direcciones  $x$  y  $y$  respectivamente reorganizando términos y dividiendo la expresión entre  $\Delta x \Delta y \Delta t b \rho$ , resulta:

$$-\frac{v_x(x + \Delta x, y) - v_x(x, y)}{\Delta x} - \frac{v_y(x, y + \Delta y) - v_y(x, y)}{\Delta y} = 0$$

tomando límites cuando el tamaño del elemento diferencial de suelo tiende a un punto, tenemos:

$$\begin{aligned} - \lim_{\substack{\Delta x \rightarrow 0 \\ \Delta y \rightarrow 0}} \frac{v_x(x + \Delta x, y) - v_x(x, y)}{\Delta x} \\ - \lim_{\substack{\Delta x \rightarrow 0 \\ \Delta y \rightarrow 0}} \frac{v_y(x, y + \Delta y) - v_y(x, y)}{\Delta y} = 0 \end{aligned}$$

resulta:

$$- \frac{\partial v_x(x, y)}{\partial x} - \frac{\partial v_y(x, y)}{\partial y} = 0$$

y reemplazando la ley de Darcy en la anterior ecuación resulta:

$$\frac{\partial}{\partial x} \left( K_x(x, y) \frac{\partial H}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left( K_y(x, y) \frac{\partial H}{\partial y} \right) = 0$$



$$\frac{\partial}{\partial x} \left( K_x(x, y) \frac{\partial H}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left( K_y(x, y) \frac{\partial H}{\partial y} \right) = 0$$

cuando la permeabilidad en las direcciones  $x$  e  $y$ ,  $K_x$  y  $K_y$  son constantes (es homogénea), entonces:

$$K_x \frac{\partial^2 H}{\partial x^2} + K_y \frac{\partial^2 H}{\partial y^2} = 0$$

y cuando la permeabilidad es isotrópica,

$$\frac{\partial^2 H}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 H}{\partial y^2} = 0$$

obtenemos la ecuación de Laplace.

# Validez de las ecuaciones

- Estas ecuaciones son válidas para flujo laminar, incompresible
- Sólo son válidas para suelos saturados

# Ecuación generalizada del flujo del agua subterránea

$$S_s \frac{\partial h}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x} \left[ K_{xx} \frac{\partial h}{\partial x} \right] + \frac{\partial}{\partial y} \left[ K_{yy} \frac{\partial h}{\partial y} \right] + \frac{\partial}{\partial z} \left[ K_{zz} \frac{\partial h}{\partial z} \right] + W$$

donde:

- $K_x, K_y, K_z$  son las permeabilidades del suelo
- $S_s$  es el **almacenamiento o capacidad específica**: es una propiedad del suelo que caracteriza su capacidad de liberar el agua freática que tiene almacenada en respuesta a una disminución de la cabeza hidráulica.
- $W$  términos para incluir las fuentes(+)/sumideros(-) de agua

# Condiciones de frontera

- **Dirichlet**: se conoce la cabeza hidráulica  $H$  en toda la frontera  $S_1$
- **Neumann**: se conoce el flujo de Darcy normal a la frontera  $S_2$ :

$$\begin{pmatrix} v_x \\ v_y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -K_x \frac{\partial H}{\partial x} \\ -K_y \frac{\partial H}{\partial y} \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} \frac{\partial H}{\partial x} \\ \frac{\partial H}{\partial y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{v_x}{K_x} \\ -\frac{v_y}{K_y} \end{pmatrix}$$

# Líneas equipotenciales y de flujo

- Las **líneas equipotenciales** son básicamente las curvas de nivel de la función  $H$
- Las **líneas de flujo** son una familia de curvas que son en cada instante de tiempo tangentes al campo de velocidades del flujo. Estas muestran la dirección que seguiría una partícula de fluido en un instante de tiempo dado.

# MODFLOW

MODFLOW is the U.S. Geological Survey modular finite-difference flow model, which is a computer code that solves the groundwater flow equation.

```
C:\WINDOWS\system32\cmd.exe
C:\WRDAPP\mf2k.1_17\test-win>..\bin\mf2k.exe ..\data\tc1

MODFLOW-2000
U.S. GEOLOGICAL SURVEY MODULAR FINITE-DIFFERENCE GROUND-WATER FLOW MODEL
Version 1.17.01 09/22/2006

Using NAME file: ..\data\tc1.nam

Run start date and time (yyyy/mm/dd hh:mm:ss): 2007/01/25 13:58:01

STARTING VALUES OF REGRESSION PARAMETERS :

WELLS_TR    RCH_ZONE_1    RCH_ZONE_2    RIVERS    SS_1    HK_1
VERT_K_CB    SS_2    HK_2

-1.100      63.07      31.54      1.2000E-03  1.3000E-03  3.0000E-04
1.0000E-07  2.0000E-04  4.0000E-05

TOTAL SUM OF SQUARED, WEIGHTED RESIDUALS: 0.268E+06

MODIFIED GAUSS-NEWTON PROCEDURE FOR PARAMETER-ESTIMATION ITERATION NO. = 1

VALUES FROM SOLVING THE NORMAL EQUATION :
MARQUARDT PARAMETER ----- = 0.0000
MAX. FRAC. PAR. CHANGE (TOL= 0.100E-01) = 0.86566
OCCURRED FOR PARAMETER "VERT_K_CB " TYPE P

CALCULATION OF DAMPING PARAMETER
MAX-CHANGE SPECIFIED: 2.0 USED: 2.0
OSCILL. CONTROL FACTOR (1, NO EFFECT)-- = 1.0000
DAMPING PARAMETER (RANGE 0 TO 1) ----- = 1.0000
CONTROLLED BY PARAMETER "VERT_K_CB " TYPE P

UPDATED ESTIMATES OF REGRESSION PARAMETERS :

WELLS_TR    RCH_ZONE_1    RCH_ZONE_2    RIVERS    SS_1    HK_1
VERT_K_CB    SS_2    HK_2

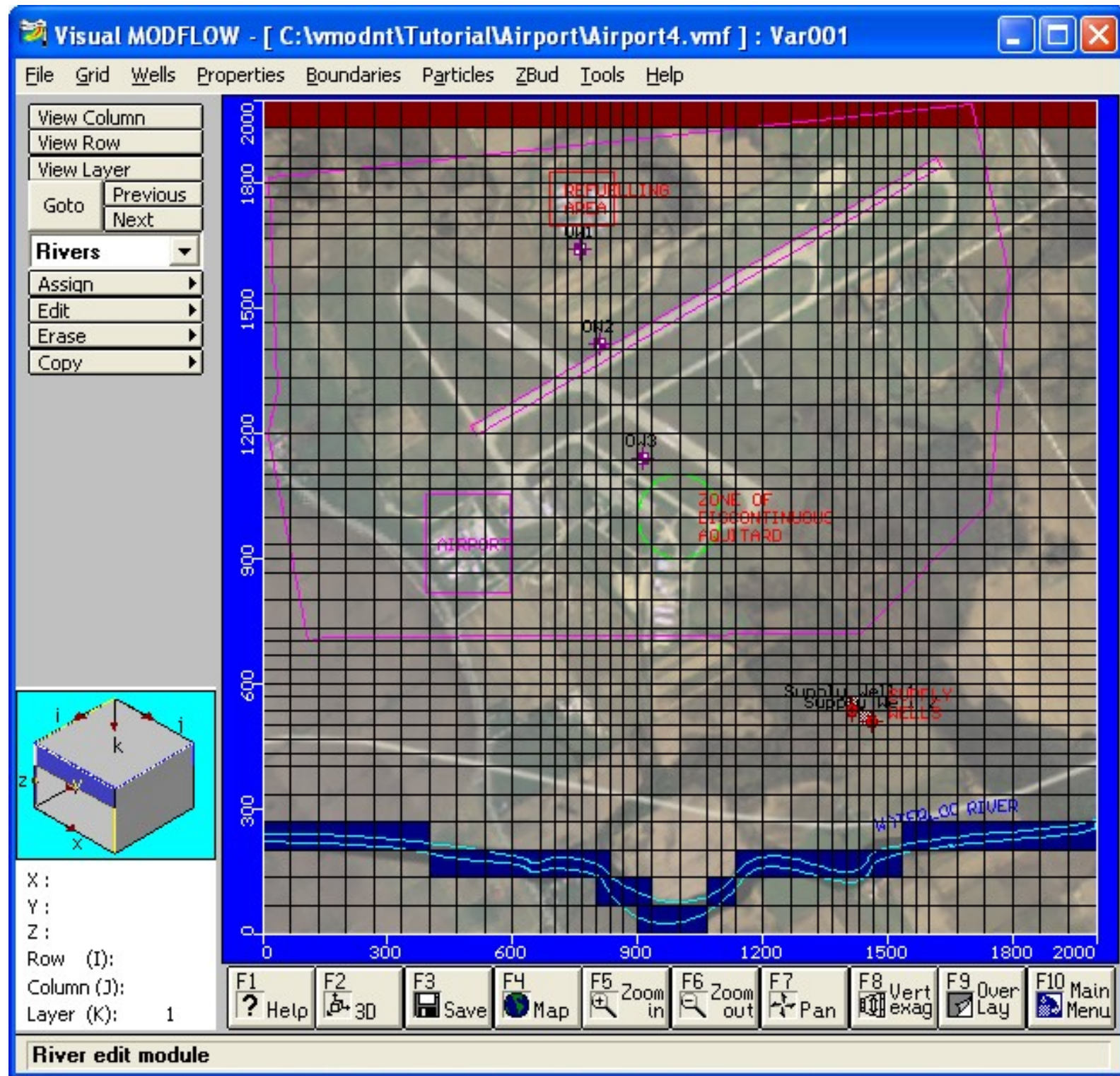
-1.001      39.23      43.71      2.1128E-04  1.2206E-03  3.9334E-04
1.8657E-07  8.7307E-05  4.2769E-05

TOTAL SUM OF SQUARED, WEIGHTED RESIDUALS: 0.112E+04
```

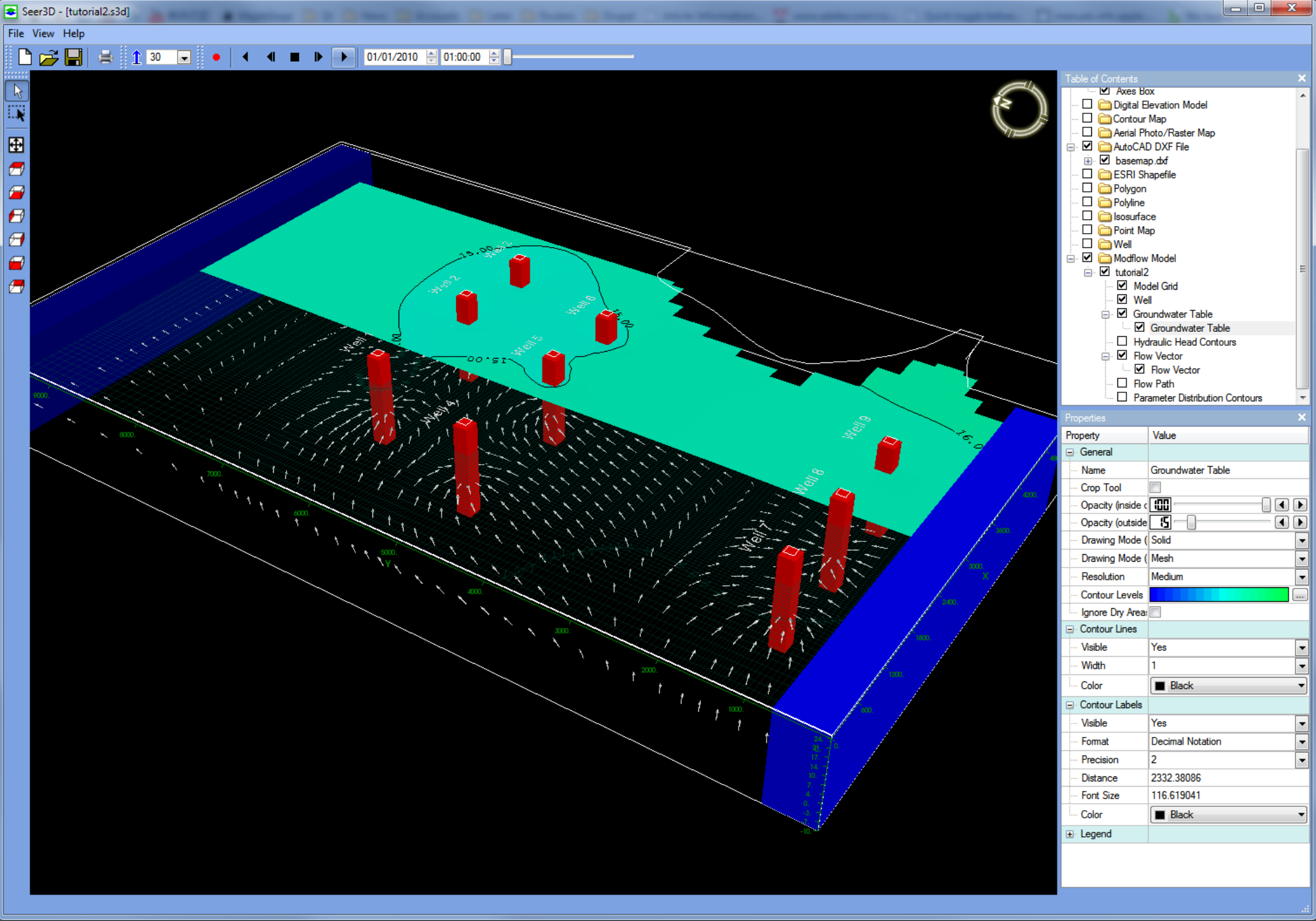
<http://en.wikipedia.org/wiki/Modflow>

<http://water.usgs.gov/nrp/gwsoftware/modflow.html>

# Una interfaz gráfica del MODFLOW



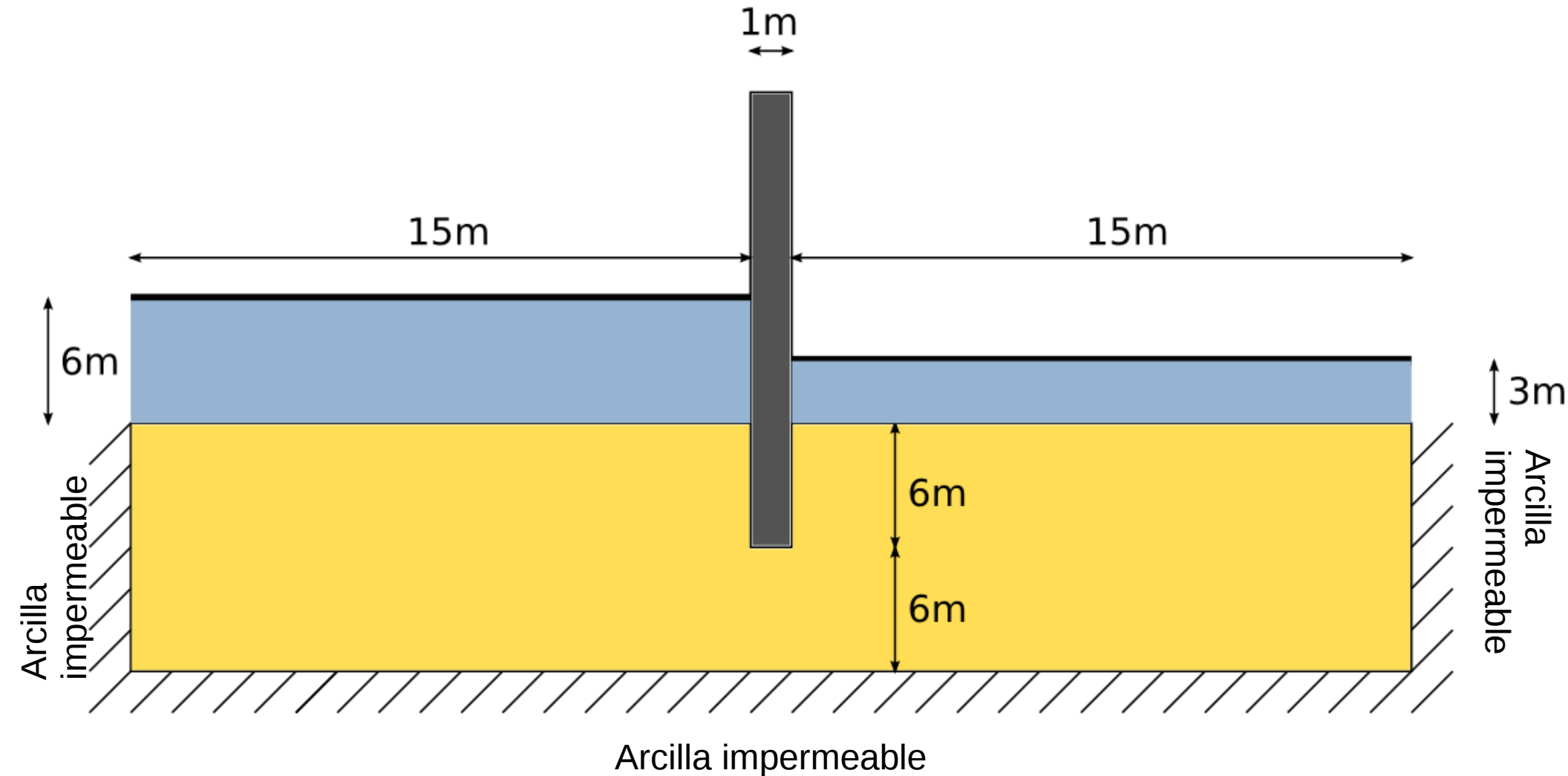




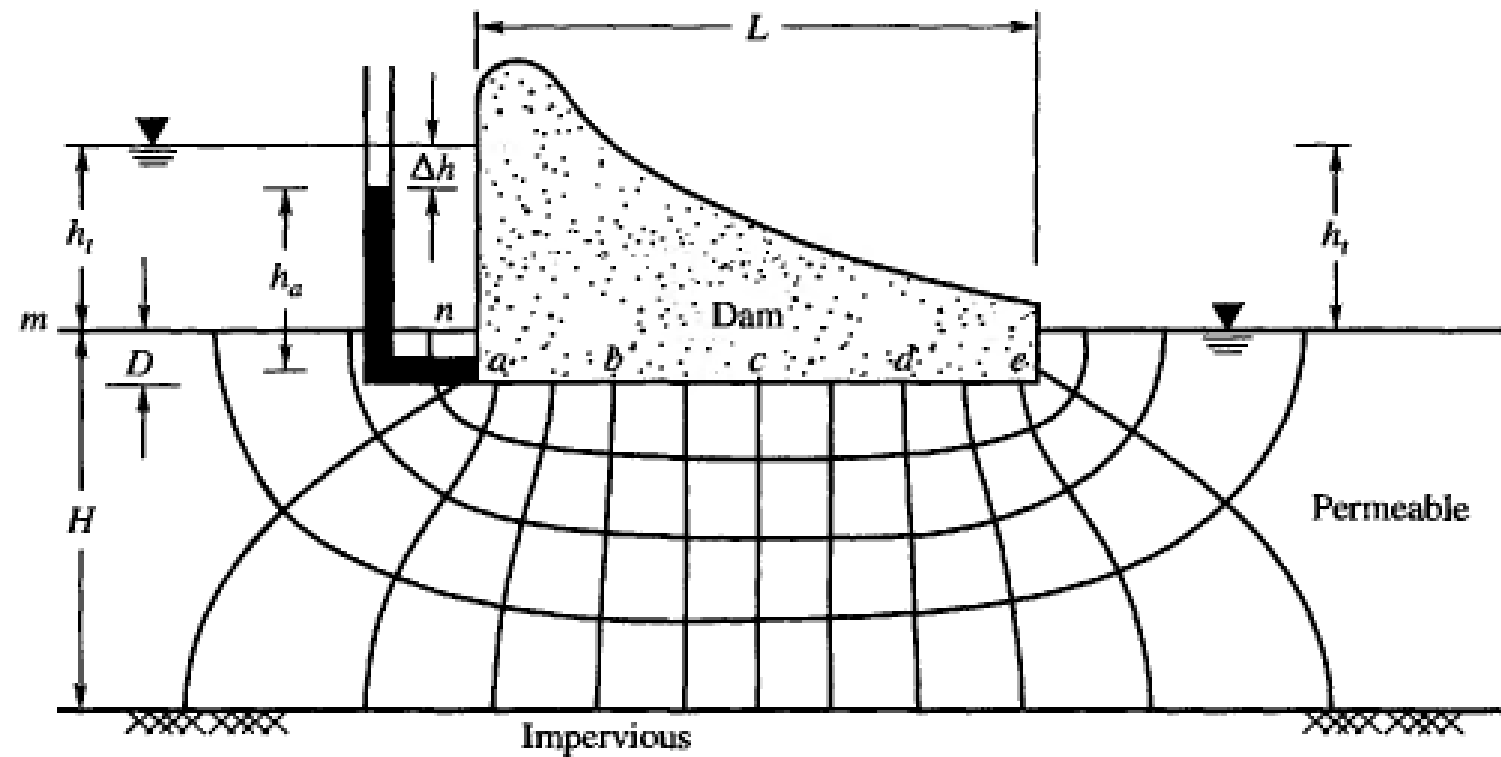


- El nivel de agua se asume que se mantiene constante a través del tiempo (flujo permanente), es decir la posición del agua se mantiene constante en el tiempo.
- Los bordes laterales del acuífero así como la tablestaca se asumen impermeables, por lo tanto estas fronteras son de Neumann (flujo especificado).

# Ejemplo:

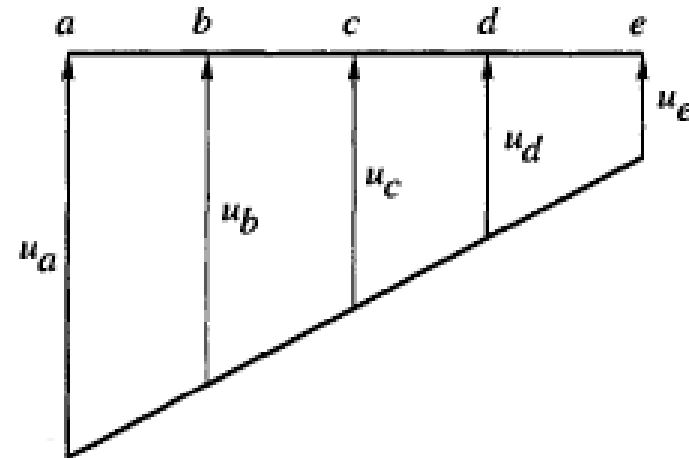


Suponga que el medio es isotrópico y homogéneo y que la permeabilidad del suelo es  $K = 2.5 \times 10^{-6} \text{ cm/s}$



(a) Concrete dam

Presiones de  
levantamiento  
en la base de  
una presa



(b) Uplift-pressure distribution

Figure 4.19 Uplift pressure on the base of a concrete dam

# Tubificación

La tubificación es un problema de erosión retrograda. Quiere decir que empieza erosionando los primeros granitos de suelo que no están confinados (en el caso de una tablestaca, los del nivel de terreno natural del lado aguas abajo y pegados a la tablestaca). Cuando el agua se lleva esos granos, le es más fácil llevarse los siguientes y de esa manera se va generando un “tubo” en el suelo desde la superficie hacia el interior. Por lo tanto lo que hay que ver es la seguridad que tenemos en el lugar dónde empezaría la tubificación. Entonces lo que hay que comparar es el gradiente hidráulico crítico con el gradiente del lugar en el que la tubificación tendería a iniciarse (en la superficie pegado a la tablestaca en el mismo ejemplo).