

Problema Restringido Circular de Tres Cuerpos

Diego Martirena
Instituto de Física
Facultad de Ciencias, UdelaR.
Montevideo, Uruguay
dmartirena77@gmail.com

Resumen—El problema restringido de tres cuerpos aborda la dinámica de dos partículas masivas que orbitan alrededor de su centro de masas, ejerciendo atracción sobre una tercera partícula de masa despreciable, los cuerpos masivos no son atraídos por esta última. El propósito de este informe es analizar cualitativamente algunas las posibles trayectorias de la partícula infinitesimal al interactuar con el Sol y un planeta hipotético de masa 30 veces la de Júpiter. Para lograr esto, se emplearán algoritmos numéricos, tales como el método de *Runge-Kutta* de orden 4 (RK4), el método de *Euler* y el método de *Verlet*. Las condiciones iniciales para este estudio se han establecido mediante algunos *Puntos de Lagrange* (L_i), marcando el inicio de las trayectorias de la partícula en cuestión.

I. INTRODUCCIÓN

El interés por resolver el Problema Restringido Circular de Tres Cuerpos (CR3BP, por sus siglas en inglés) surge con la motivación de comprender los diversos tipos de movimientos posibles bajo estas condiciones particulares. El pionero en el estudio de este problema fue el matemático francés Henri Poincaré a finales del siglo XIX, quien se enfrentó a la complejidad de las interacciones gravitacionales entre tres cuerpos masivos.

El Problema General de Tres Cuerpos originalmente se formula con nueve ecuaciones diferenciales de segundo orden, lo que lo convierte en un desafío analítico formidable. Sin embargo, para simplificar su estudio, se introdujo una restricción adicional: las trayectorias de las partículas estarán contenidas dentro del plano orbital de los cuerpos masivos. Esta restricción reduce significativamente la complejidad del problema, llevándolo de nuevo a tan solo tres ecuaciones diferenciales de segundo orden.

La necesidad de abordar el CR3BP computacionalmente surge debido a la falta de soluciones analíticas generales para este tipo de problemas. La complejidad intrínseca de las interacciones gravitacionales en sistemas de tres cuerpos hace que las soluciones analíticas sean escasas o incluso inexistentes en muchos casos. Por lo tanto, recurrir a métodos numéricos, como el método de Runge-Kutta de orden 4 (RK4), el método de Euler y el método de Verlet, se convierte en una herramienta esencial para explorar y comprender las trayectorias bajo estas condiciones específicas. Estos métodos proporcionan soluciones aproximadas que permiten visualizar y analizar el comportamiento del sistema en situaciones donde las soluciones analíticas son inalcanzables.

II. MODELO TEÓRICO.

II-A. Ecuaciones de Movimiento

Primeramente se define la unidad de masa tal que la suma de las masas de los cuerpos masivo sea la unidad, siendo $1 - m$ y m , donde $m \leq 0.5$. También definimos que la unidad de distancia sea su separación constante y la unidad de tiempo tal que la constante de gravitación universal sea la unidad.

En estas unidades, el periodo orbital será $P = 2\pi$ de esta manera la masa pequeña (m) se moverá con velocidad igual a la unidad.

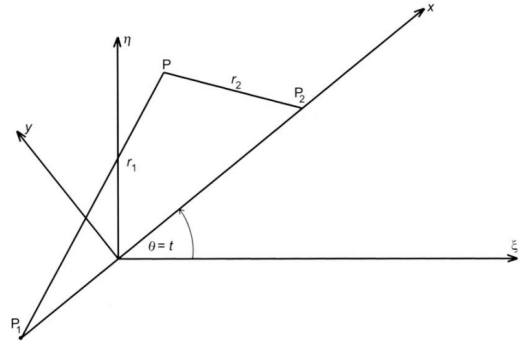


Figura 1: Diagrama de las posiciones, con el fin de resolver el problema en el plano la coordenada $\zeta = z$ se despreciará

De acuerdo con el esquema de la Figura 1 el origen de coordenadas estará en el baricentro de los dos cuerpos masivos. Dado que el interés de este trabajo es estudiar el movimiento de la partícula, se trabajará con el sistema rotante (centrado en el cuerpo de masa m), por lo tanto despreciaremos su velocidad v_{rel} . A su vez, si las coordenadas de las masas $(1 - m)$ y m son (ξ_1, η_1) y (ξ_2, η_2) respectivamente, las coordenadas de la partícula son (ξ, η) , entonces las ecuaciones de movimiento para la partícula son

$$\begin{cases} \ddot{\xi} = (1 - m) \frac{\xi_1 - \xi}{r_1^3} + m \frac{\xi_2 - \xi}{r_2^3} \\ \ddot{\eta} = (1 - m) \frac{\eta_1 - \eta}{r_1^3} + m \frac{\eta_2 - \eta}{r_2^3} \end{cases} \quad (II.1)$$

donde

$$r_1 = \sqrt{(\xi_1 - \xi)^2 + (\eta_1 - \eta)^2} \quad (II.2)$$

y

$$r_2 = \sqrt{(\xi_2 - \xi)^2 + (\eta_2 - \eta)^2} \quad (\text{II.3})$$

La dirección del eje x puede elegirse de tal manera que las dos partículas masivas P_1 y P_2 de la Figura 1 estén siempre en el, con coordenadas $(-x_1, 0)$ y $(x_2, 0)$ respectivamente, de tal manera que $x_2 - x_1 = 1$, esto sumado a la elección de unidad de distancia implica que

$$\begin{aligned} x_1 &= -m \\ x_2 &= 1 - m \end{aligned} \quad (\text{II.4})$$

Entonces

$$\begin{aligned} r_1 &= \sqrt{(x_1 - x)^2 + y^2} \\ r_2 &= \sqrt{(x_2 - x)^2 + y^2} \end{aligned} \quad (\text{II.5})$$

donde (x, y) son las coordenadas de la partícula en el sistema rotante, se relacionan con las coordenadas anteriores mediante

$$\begin{cases} \xi = x \cos t - y \sin t \\ \eta = x \sin t + y \cos t \end{cases} \quad (\text{II.6})$$

Derivando dos veces la Ecuación II.6, sustituyendo en Ecuación II.1 y reduciendo las expresiones, se logra obtener las ecuaciones de movimiento de la partícula en el sistema rotante.

$$\begin{cases} \ddot{x} - 2\dot{y} - x = -(1-m)\frac{x-x_1}{r_1^3} - m\frac{x-x_2}{r_2^3} \\ \ddot{y} + 2\dot{x} - y = -\left(\frac{1-m}{r_1^3} + \frac{m}{r_2^3}\right)y \end{cases} \quad (\text{II.7})$$

Es importante destacar la utilidad de la Ecuación II.7 a la hora de implementarla en un código, pues todas sus cantidades son adimensionadas.

II-B. Importancia de los puntos de Lagrange (\mathcal{L}_i)

En el sistema rotante, se obtienen puntos de equilibrio estables e inestables. Son los puntos de Lagrange \mathcal{L}_1 , \mathcal{L}_2 , \mathcal{L}_3 , \mathcal{L}_4 y \mathcal{L}_5 . La obtención de los mismos no es el objetivo de este trabajo, por ende omitiremos el desarrollo para encontrarlos. Se ilustran a continuación los puntos

Se encuentra que los únicos puntos estables son \mathcal{L}_4 y \mathcal{L}_5 , donde la partícula podrá orbitar por un periodo extenso de tiempo. Esto se verá en las siguientes secciones. Sin embargo, las órbitas de mayor interés serán las inestables \mathcal{L}_1 , \mathcal{L}_2 y \mathcal{L}_3 dado que permiten visualizar la interacción de la partícula con ambos cuerpos masivos.

Si $m \ll 1$ la posición de los puntos para la partícula m estarán dados por los siguientes desarrollos

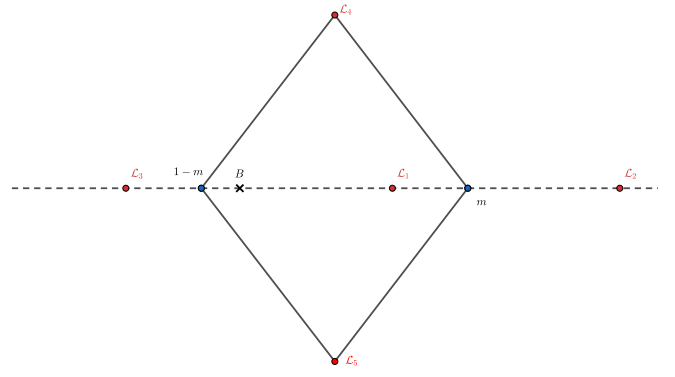


Figura 2: Esquema de los puntos de Lagrange para el sistema de tres cuerpos

$$x(\mathcal{L}_1) = x_2 - \left(\frac{m}{3}\right)^{1/3} + \dots \quad (\text{II.8})$$

$$x(\mathcal{L}_2) = x_2 + \left(\frac{m}{3}\right)^{1/3} + \dots \quad (\text{II.9})$$

$$x(\mathcal{L}_3) = x_1 - 1 + \frac{7}{12}m + \dots \quad (\text{II.10})$$

como se ve en Figura 2, debido a la selección de el eje x , solo dependen de la coordenada x . Para \mathcal{L}_4 y \mathcal{L}_5 es tiene

$$P(\mathcal{L}_4) = \left(\frac{1}{2}(1-2m), \frac{\sqrt{3}}{2}\right) \quad (\text{II.11})$$

$$P(\mathcal{L}_5) = \left(\frac{1}{2}(1-2m), -\frac{\sqrt{3}}{2}\right) \quad (\text{II.12})$$

Estos últimos tienen la característica de ser simétricos entre sí, pues se debe cumplir que $r_1 = r_2 = 1$

II-C. Resolución de las ecuaciones de movimiento

Para la integración numérica de las ecuaciones se utilizaron varios métodos con el objetivo de lograr una comparación entre los mismos. Se explican a continuación los métodos utilizados.

II-C1. Método de Euler: Sea una ecuación diferencial de la forma

$$\frac{dx}{dt} = f(x, t) \quad (\text{II.13})$$

y dadas condiciones iniciales para x en un cierto t . Se puede escribir el nuevo valor de x luego de un intervalo pequeño h usando el desarrollo de Taylor

$$x(t+h) = x(t) + h\frac{dx}{dt} + \frac{1}{2}h^2\frac{d^2x}{dt^2} + \dots \quad (\text{II.14})$$

con un error total acumulativo igual a la suma individual de los errores en cada paso N es lineal con h , el error de cada

paso es de orden $O(h^2)$. Esto implica que para tener una buena aproximación se deberá aumentar linealmente la cantidad de pasos.

II-C2. Método Runge-Kutta: En contraparte con el método de Euler, Runge-Kutta (RK) logra obtener una mejor precisión sin realizar el cálculo de las derivadas. RK es en realidad un conjunto de métodos que se pueden implementar a diferentes órdenes, dependiendo de la exactitud requerida. En este trabajo se implementará el uso del Runge-Kutta de orden 4 (RK4), dado su balance entre buena precisión y fácil implementación. Las ecuaciones del RK4 están dadas por

$$\begin{aligned} k_1 &= h\mathbf{f}(\mathbf{r}, t) \\ k_2 &= h\mathbf{f}\left(\mathbf{r} + \frac{1}{2}k_1, t + \frac{1}{2}h\right) \\ k_3 &= h\mathbf{f}\left(\mathbf{r} + \frac{1}{2}k_2, t + \frac{1}{2}h\right) \\ k_4 &= h\mathbf{f}(\mathbf{r} + k_3, t + h) \\ \mathbf{r}(t + h) &= \mathbf{r}(t) + \frac{1}{6}(k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4) \end{aligned} \quad (\text{II.15})$$

El error de RK4 es de orden $O(h^5)$, lo cual ya hace notar la buena precisión comparado con Euler.

II-C3. Método de Verlet: Para una ecuación diferencial de la forma

$$\frac{d^2\mathbf{r}}{dt^2} = \mathbf{f}(\mathbf{r}, t) \quad (\text{II.16})$$

realizando un cambio de variable

$$\frac{d\mathbf{r}}{dt} = \mathbf{v}, \quad \frac{d\mathbf{v}}{dt} = \mathbf{f}(\mathbf{r}, t) \quad (\text{II.17})$$

El método de Verlet consiste en, dadas condiciones iniciales para \mathbf{r} y \mathbf{v} se calcula mediante el método de Euler un paso medio para \mathbf{v} en $(t + \frac{h}{2})$ luego se resuelve aplicando de forma repetida las ecuaciones

$$\begin{aligned} \mathbf{v}\left(t + \frac{1}{2}h\right) &= \mathbf{v}(t) + \frac{1}{2}h\mathbf{f}(\mathbf{r}(t), t) \quad \longrightarrow \text{(Inicio)} \\ \mathbf{r}(t + h) &= \mathbf{r}(t) + h\mathbf{v}\left(t + \frac{1}{2}h\right) \\ \mathbf{k} &= h\mathbf{f}(\mathbf{r}(t + h), t + h) \\ \mathbf{v}(t + h) &= \mathbf{v}\left(t + \frac{1}{2}h\right) + \frac{1}{2}\mathbf{k} \end{aligned} \quad (\text{II.18})$$

Dado que el método de Verlet es una adaptación de Leap-frog, el error de este será de $O(h^3)$

III. METODOLOGÍA

Para una correcta implementación de los métodos numéricos se debe transformar la Ecuación II.7 en un sistema de primer orden. Mediante un cambio de variable como en la Ecuación II.17 se obtiene el siguiente sistema

$$\begin{cases} \dot{x} = v_x \\ \dot{y} = v_y \\ \dot{v}_x = 2v_y + x - (1 - m)\frac{x - x_1}{r_1^3} - m\frac{x - x_2}{r_2^3} \\ \dot{v}_y = y - \left(\frac{1 - m}{r_1^3} + \frac{m}{r_2^3}\right)y - 2v_x \end{cases} \quad (\text{III.1})$$

La integración numérica se realizó con $N \approx 3.14 \times 10^6$ y un paso $dt = 1 \times 10^{-5}$ por un tiempo de 5 períodos $P = 5 \cdot 2\pi$. La necesidad de un paso pequeño es producto de la sensibilidad del modelo.

Como condiciones iniciales para la posición se utilizaron los puntos de Lagrange \mathcal{L}_i mencionados en la Subsección II-B mientras que para la velocidad se utilizó $\mathbf{v} = (0, 0.01)$ la razón por la cual se determinó esta condición es debido a que si la partícula es lanzada con velocidad en el eje x resulta eyectada del sistema (o colisiona al cabo de muy poco tiempo) debido a que es atraída en mayor medida por uno de los cuerpos. Además se observó que un pequeño empuje en la dirección del eje y generaba trayectorias más estables.

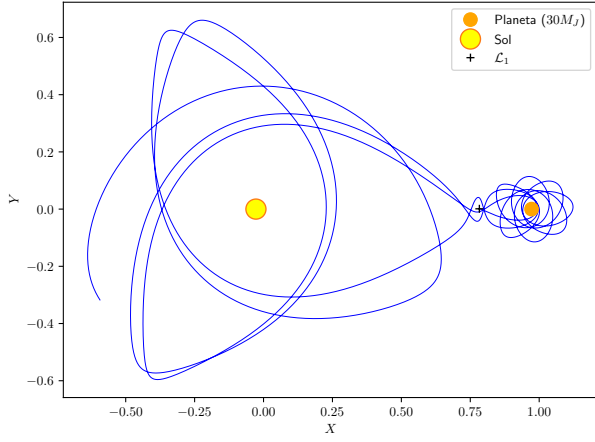
IV. RESULTADOS

A continuación se verán las trayectorias obtenidas para algunos de los puntos de Lagrange con los distintos métodos.

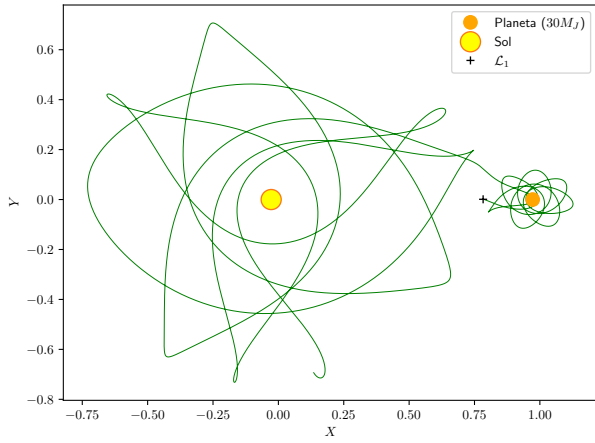
Los resultados de la integración numérica (véase 3b y 3a) en \mathcal{L}_1 tanto con RK4 como Euler muestran que la partícula una vez lanzada se convierte en satélite temporal del planeta y luego evoluciona a una órbita heliocéntrica alrededor del Sol. Si bien son trayectorias muy similares, la solución por Euler presenta una evolución más caótica que RK4, esto es debido a una menor precisión del método para un mismo tiempo de integración. La similitud entre ambos viene de que el método de Euler es simplemente Runge-Kutta de orden 1.

En el caso de Verlet (Figura 3c) es apreciable que para una misma condición inicial se obtienen trayectorias bastante distintas. A primera instancia, se observa que en el caso de Verlet no hay una evolución hacia una órbita heliocéntrica, sino que la partícula queda orbitando al planeta de manera prolongada, de manera similar a un quasisatélite. Tras una revisión del código para corroborar que no había errores, se volvió a integrar numéricamente esta vez por diez períodos para este caso y no se apreció ningún cambio significativo. La causa de tal diferencia entre ambos métodos proviene de que Verlet toma en consideración la conservación de la energía mientras que RK no, esto se refleja en trayectorias que evolucionan mucho más rápido de lo que deberían.

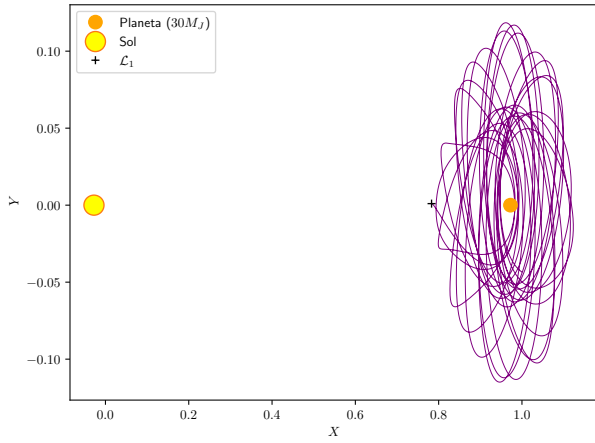
En contraposición con el punto anterior, las trayectorias con condición inicial en \mathcal{L}_4 y \mathcal{L}_5 no mostraron tales diferencias, sino que fueron similares entre sí. Pero lo que sí se debe de cumplir es que las trayectorias deben ser estables alrededor de este punto.



(a) RK4

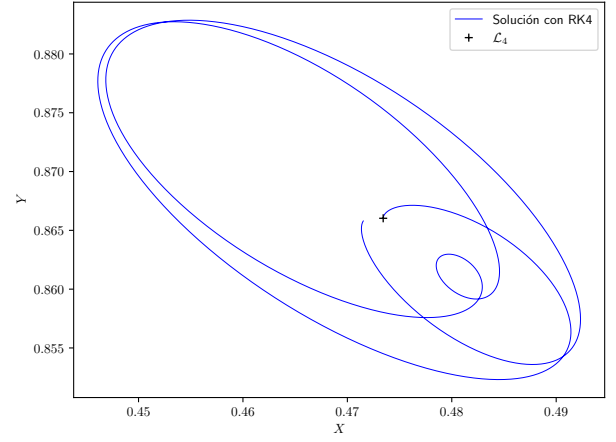


(b) Euler

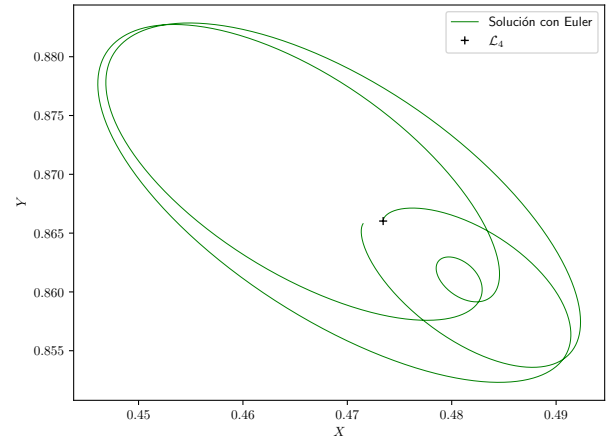


(c) Verlet

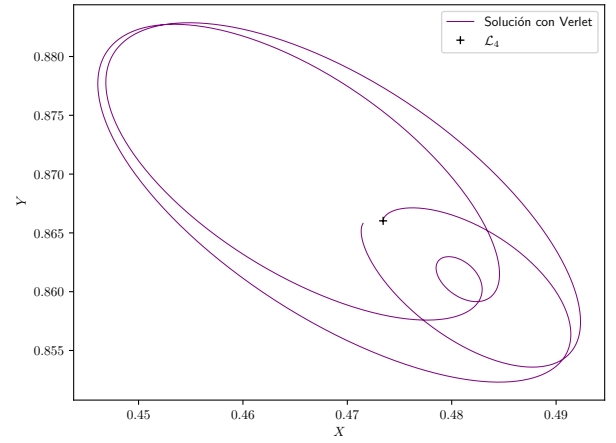
Figura 3: Comparación entre soluciones para la partícula lanzada desde \mathcal{L}_1 .



(a) RK4



(b) Euler



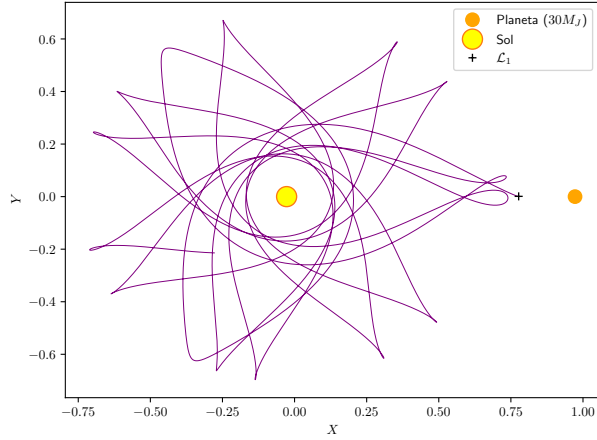
(c) Verlet

Figura 4: Trayectorias para \mathcal{L}_4 , para una mejor visualización de la imagen se enfocó exclusivamente al punto de equilibrio. La situación es idéntica para el caso con \mathcal{L}_5 .

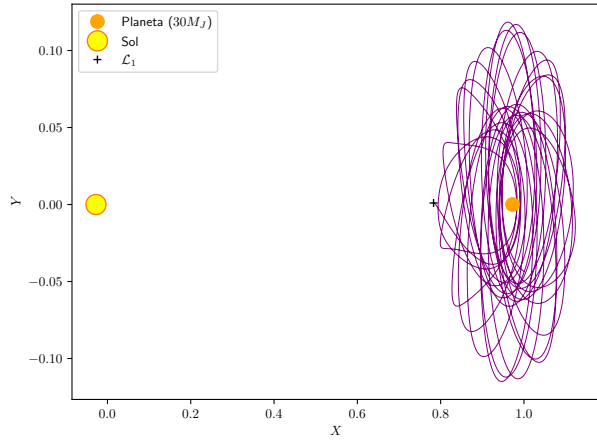
V. CONCLUSIÓN

Como se indicó al comienzo de este trabajo, el estudio de estas trayectorias ha sido puramente cualitativo. Con respecto

al modelo teórico, se puede apreciar que es susceptible a pequeñas variaciones de las condiciones iniciales, y esto evidentemente repercute en las simulaciones; como ejemplo se muestra a continuación una simulación usando Verlet con una perturbación en la condición inicial \mathcal{L}_1 de orden 10^{-3} en la dirección hacia el planeta.



(a) \mathcal{L}_1



(b) \mathcal{L}_1 con perturbación

Figura 5: Perturbación en la condición inicial \mathcal{L}_1 de orden 10^{-3}

Es apreciable en la Figura 5, una pequeña variación en la condición inicial supone una órbita totalmente diferente. Pero de igual manera, se logra obtener una trayectoria estable en ambos casos pero susceptible ante pequeñas perturbaciones.

REFERENCIAS

- [1] A. E. Roy, *Orbital Motion*. IOP Publishing Ltd., 2005.
- [2] M. E. J. M. E. J. Newman, *Computational physics*. University of Michigan, 2013.
- [3] J. Danby, *Fundamentals of Celestial Mechanics*. Willmann-Bell, Inc., 1988.
- [4] M. Schmidt, Wolfram. Völschow, *Numerical Python in Astronomy and Astrophysics*. Springer, 2021.