Polinomios Aleatorios

Álgebra Lineal Numérica para el Aprendizaje Estadístico

Mario Sierra

¿Qué es un polinomio aleatorio?

Un **polinomio aleatorio** es una expresión del tipo

$$\boxed{P_n(x) = \sum_{i=0}^{n} a_i x^i}$$

donde a_i son variables aleatorias, $a_i \sim F_i$.

En esta presentación, usaremos: $a_0, a_1, \ldots, a_n$ i.i.d. con $a_i \sim \mathcal{N}(0, 1)$.

Motivación

Dado un $n \in \mathbb{N}$, sea

$$A_n = \#\{\alpha \in \mathbb{R} : P_n(\alpha) = 0\}$$

donde A_n es una variable aleatoria con dominio en $\mathbb{R}^{n+1}$.

Nos interesa conjeturar acerca de su esperanza $E(A_n)$.

Caso $n = 2$

$$P_2(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2, \quad a_i \sim \mathcal{N}(0,1)$$

$$\Delta = a_1^2 - 4a_0a_2$$

$$\mathrm{Rec}(A_2) = \{0, 1, 2\}$$

$$E(A_2) = \underbrace{0.P(\Delta < 0)}_{=0} + 1 \cdot \underbrace{P(\Delta = 0)}_{=0} + 2 \cdot \underbrace{P(\Delta > 0)}_{\approx 0{,}648} \approx \boxed{1{,}296}$$

Acceso a app de simulación en Shiny

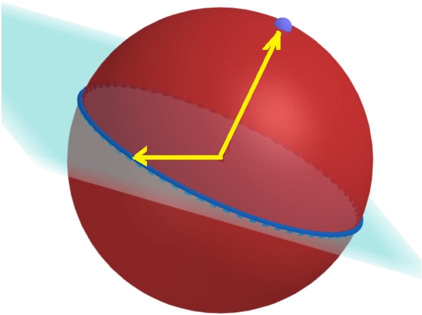
Un poco de geometría..

$$S^n = \left\{ x \in \mathbb{R}^{n+1} : \|x\| = 1 \right\} \quad \text{(superficie de la esfera unitaria)}$$

Ecuador asociado a un punto P

$P \in S^n$

$P^\perp := \left\{ Q \in S^n : \langle \vec{OQ}, \vec{OP} \rangle = 0 \right\}$



Un poco de geometría..

Sea $\gamma : [a, b] \to S^n \subset \mathbb{R}^{n+1}$ una curva rectificable[1].

$$\gamma^{\perp} := \bigcup_{t \in [a,b]} \left\{ Q \in S^n : \langle \overrightarrow{OQ}, \overrightarrow{O\gamma(t)} \rangle = 0 \right\}$$

▸ Área barrida sin solapamiento   ▸ Área barrida con solapamiento

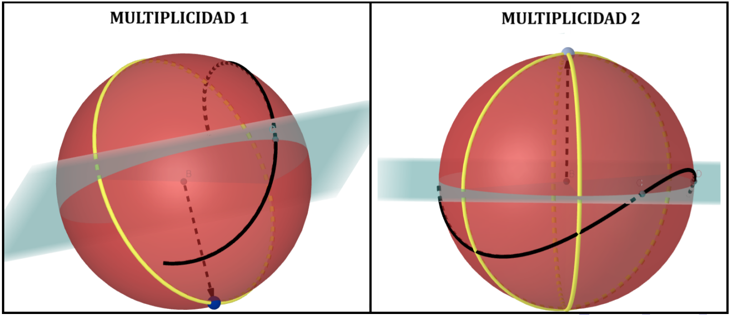
[1] $\gamma : [a, b] \to \mathbb{R}^n$ continua es rectificable, si para toda partición $P = \{x_0, x_1, \ldots, x_n\}$ de $[a, b]$, la longitud de la poligonal $\Delta(P, \gamma) = \sum_{i=1}^{n} [\gamma(x_i) - \gamma(x_{i-1})]$ es finita. Su longitud es $L(\gamma) = \sup \Delta(P, \gamma)$.

Un poco de geometría..

Multiplicidad de un punto

$$Q \in S^n, \quad m(Q) := \# \left\{ t \in [a,b] : Q \in \gamma(t)^{\perp} \right\}$$

▸ Multiplicidad



Un poco de geometría..

- **Longitud de la curva:**

$$|\gamma| = \int_a^b \|\gamma'(t)\| \, dt$$

- **Área de la unión de ecuadores (contando multiplicidad):**

$$|\gamma^\perp| = \int_{S^n} m(Q)\, dA(Q)$$

- **Relación fundamental:**

$$\boxed{\frac{|\gamma^\perp|}{\mathrm{area}(S^n)} = \frac{|\gamma|}{\pi}}$$

Raíces y representación de polinomios

$$P = \begin{pmatrix} a_0 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{n+1} \text{ representa el polinomio } P(x) = \sum_{i=0}^{n} a_i x^i.$$

$$v(t) = \begin{pmatrix} 1 \\ t \\ \vdots \\ t^n \end{pmatrix} \quad \text{(curva de momentos)}, \quad \gamma(t) = \frac{v(t)}{\|v(t)\|}$$

$$\alpha \in \mathbb{R} \text{ raíz de } P(x) \iff \langle \overrightarrow{OP}, \overrightarrow{Ov(\alpha)} \rangle = 0 \iff \left\langle \frac{\overrightarrow{OP}}{\|\overrightarrow{OP}\|}, \frac{\overrightarrow{Ov(\alpha)}}{\|\overrightarrow{Ov(\alpha)}\|} \right\rangle = 0$$

Raíces y representación de polinomios

Coloquialmente

- P es un punto de $\mathbb{R}^{n+1}$ y $\alpha \in \mathbb{R}$.
- $v(\alpha)$ es un punto en $\mathbb{R}^{n+1}$ y $\gamma(\alpha)$ está en la esfera S^n.
- $\gamma(\alpha)^\perp$ es el ecuador asociado a $\gamma(\alpha)$.
- Todo polinomio $P \in \mathbb{R}^{n+1}$ cuya proyección sobre la esfera pertenece a $\gamma(\alpha)^\perp$, admite a α como raíz.

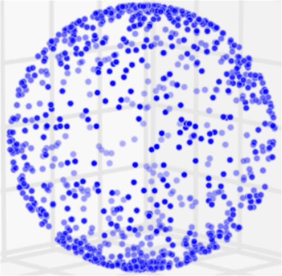
▸ Visualizando con polinomios de grado 2

Proyección de un gaussiano sobre la esfera

- $\vec{X} = (X_0, \dots, X_n) \sim \mathcal{N}_{n+1}(\mathbf{0}, \Sigma)$
- $\Sigma = k \cdot I$
- R_{n+1} matriz de rotación.

- $R\vec{X} \sim \mathcal{N}_{n+1}(\mathbf{0}, R\Sigma R^T) = \mathcal{N}_{n+1}(\mathbf{0}, \Sigma)$.
- $\vec{X}$ es invariante por rotaciones.
- $U = \vec{X}/\|\vec{X}\|$ también es invariante.

- Concluimos que la distribución de U es uniforme sobre la esfera.



Esperanza para un polinomio gaussiano de grado 2

- $P(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2, \quad a_i \sim \mathcal{N}(0,1)$
- $v(t) = \{(1, \quad t, \quad t^2), \quad t \in \mathbb{R}\}$
- $\gamma(t) = \left\{ \left(\frac{1}{\sqrt{1+t^2+t^4}}, \quad \frac{t}{\sqrt{1+t^2+t^4}}, \quad \frac{t^2}{\sqrt{1+t^2+t^4}} \right), \quad t \in \mathbb{R} \right\}$

Para cada $\alpha \in \mathbb{R}$ queda definido un ecuador $\gamma(\alpha)^{\perp} \subseteq S^2$.

$\gamma^{\perp}$ es la unión de todos esos ecuadores.

¿Cuántas raíces tiene P? Tantas como la cantidad de ecuadores que contienen al punto $\frac{a}{\|a\|}$. $Rec(A_2) = \{0, 1, 2\}$

Obteniendo la esperanza para n=2

$R_i :=$ región de puntos de la esfera con multiplicidad i, $\quad i \in \{0, 1, 2\}$

$$E(A_2) = 0 \cdot P\left(\frac{a}{\|a\|} \in R_0\right) + 1 \cdot P\left(\frac{a}{\|a\|} \in R_1\right) + 2 \cdot P\left(\frac{a}{\|a\|} \in R_2\right)$$

$$= 0 \cdot \left(\frac{\text{Area}(R_0)}{\text{Area}(S^2)}\right) + 1 \cdot \left(\frac{\text{Area}(R_1)}{\text{Area}(S^2)}\right) + 2 \cdot \left(\frac{\text{Area}(R_2)}{\text{Area}(S^2)}\right)$$

$$= \frac{0 \cdot \text{Area}(R_0) + 1 \cdot \text{Area}(R_1) + 2 \cdot \text{Area}(R_2)}{\text{Area}(S^2)} = \frac{|\gamma^{\perp}|}{\text{Area}(S^2)}$$

$$= \boxed{\frac{|\gamma|}{\pi}}$$

Este resultado es válido para cualquier grado n.

Longitud de γ

Fórmula de Kac[1]

$$E(A_n) = \frac{1}{\pi}|\gamma| = \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \|\gamma'(t)\|\, dt = \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \sqrt{\frac{1}{(t^2-1)^2} - \frac{(n+1)^2\, t^{2n}}{(t^{2n+2}-1)^2}}\, dt$$

Cómputo de la esperanza para $n = 2$

$$E(A_2) = \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \sqrt{\frac{(t^2-1)^2 + 9\, t^4}{(t^6-1)^2}}\, dt = \mathbf{1.293}$$

** Integral aproximada por simulación Monte Carlo.*

[1] Mark Kac (1914 - 1984), matemático Polaco - Estadounidense.

Desarrollo asintótico de $E(A_n)$

Fórmula asintótica de Kac

$$E(A_n) \sim \frac{2}{\pi} \log n \quad \text{cuando } n \to \infty$$

Refinamiento de la estimación de Kac

- Investigadores como **Christensen, Sambandham, Stevens y Wilkins** afinaron la estimación original.
- $E(A_n) \sim \dfrac{2}{\pi} \log n + C_1 + \dfrac{2}{n\pi} + O\left(\dfrac{1}{n^2}\right)$
- $C_1 = \frac{2}{\pi}\left(\log(2) + \int_0^\infty \left\{\sqrt{\frac{1}{x^2} - \frac{4e^{-2x}}{(1-e^{-2x})^2}} - \frac{1}{x+1}\right\} dx\right) \approx 0{,}626\ldots$

Polinomios de Shub - Smale

Polinomios de Shub - Smale

$$P_n(t) = \sum_{i=0}^{n} a_i \sqrt{\binom{n}{i}}\, t^i = \sum_{i=0}^{n} a_i^* t^i$$

Donde:

$$a_i \sim \mathcal{N}(0,1), \quad a_i^* \sim \mathcal{N}\Big(0, \sqrt{\binom{n}{i}}\Big).$$

Ahora:

$$v(t) = \Big(1, \sqrt{\binom{n}{1}}\, t, \sqrt{\binom{n}{2}}\, t^2, \ldots, \sqrt{\binom{n}{n}}\, t^n\Big).$$

Norma de $v(t)$:

$$\|v(t)\| = \sqrt{\sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} t^{2i}} = (1+t^2)^{n/2}.$$

Polinomios de Shub - Smale

$$\gamma(t) = \frac{v(t)}{\|v(t)\|} = \frac{1}{(1+t^2)^{n/2}}\left(1, \sqrt{\binom{n}{1}}\, t, \sqrt{\binom{n}{2}}\, t^2, \ldots, \sqrt{\binom{n}{n}}\, t^n\right).$$

Una forma innovadora de calcular $\|\gamma'(t)\|^2$ consiste en usar la derivada mixta del logaritmo del producto escalar entre dos puntos de la curva $v(t)$:

$$\|\gamma'(t)\|^2 = \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} \log\left(\langle v(x), v(y)\rangle\right)\Big|_{x=y=t}.$$

$$\|\gamma'(t)\| = \frac{\sqrt{n}}{1+t^2} \quad \Rightarrow \quad L = \sqrt{n}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dt}{1+t^2} = \sqrt{n}\pi \quad \Rightarrow \quad \boxed{\mathbb{E}(A_n) = \sqrt{n}}.$$

Bibliografía I

Alan Edelman and Eric Kostlan, *How Many Zeros of a Random Polynomial Are Real?*, Bulletin of the American Mathematical Society, Vol. 32, No. 1, January 1995, pp. 1–37.

Walter Rudin, *Principles of Mathematical Analysis*, 3rd Edition, McGraw-Hill, 1976.