PRÁCTICO 4

Matrices Definidas Positivas y Descomposición en Valores Singulares

Problemas del libro de Strang: secciones I.7 y I.8

1. Suponga que $S^T = S$ y que $Sx = \lambda x$ y $Sy = \alpha y$ son reales. Mostrar que

$$y^T Sx = \lambda y^T x, \quad x^T Sy = \alpha x^T y, \quad \text{y} \quad y^T Sx = x^T Sy.$$

   Mostrar que $y^T x$ debe ser cero si $\lambda \neq \alpha$: **vectores propios ortogonales**.

2. (Recomendado) Esta matriz M es antisimétrica y también ______. Entonces todos sus valores propios son puramente imaginarios y también se cumple que $|\lambda| = 1$. ($\|Mx\| = \|x\|$ para todo x tal que $\|x\| = 1$ para vectores propios.) Encontrar los cuatro valores propios a partir de la traza de M:

$$M = \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 0 & -1 \\ -1 & -1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

   (*Solo puede tener valores propios i o $-i$*).

3. Mostrar que esta A (simétrica pero compleja) tiene solo una línea de vectores propios:

$$A = \begin{bmatrix} i & 1 \\ 1 & -i \end{bmatrix}$$

   No es diagonalizable: los valores propios son $\lambda = 0$ y 0. La propiedad

$$A^T = A,$$

   no es una propiedad tan especial para matrices complejas. La buena propiedad es que $A = A^T$. Entonces todos los valores propios son reales y A tiene n vectores propios ortogonales.

4. Esta A es casi simétrica. Pero sus vectores propios están lejos de ser ortogonales:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 10^{-15} \\ 0 & 1 + 10^{-15} \end{bmatrix}$$

   tiene vectores propios

$$\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \quad \text{y} \quad [\,?\,]$$

   ¿Cuál es el ángulo entre los vectores propios?

5. *¿Qué matrices simétricas S son también ortogonales?* Entonces $S^T = S$ y $S^T = S^{-1}$.

   (a) Mostrar cómo la simetría y la ortogonalidad llevan a $S^2 = I$.

   (b) ¿Cuáles son los posibles valores propios de S? Describir todas las posibles matrices Λ.

   Entonces $S = Q\Lambda Q^T$ para alguna de esas matrices de valores propios Λ y una matriz ortogonal Q.

6. Si S es simétrica, mostrar que A^TSA también es simétrica (tomar la traspuesta de A^TSA). Aquí A es $m \times n$ y S es $m \times m$. ¿Los valores propios de S son iguales a los valores propios de A^TSA?

   En caso de que A sea cuadrada e invertible, A^TSA se llama **congruente** a S. Tienen el mismo número de valores propios positivos, negativos y nulos (misma **signatura**): **Ley de Inercia**.

7. A partir de $S = Q\Lambda Q^T$, calcular la raíz cuadrada simétrica definida positiva $Q\sqrt{\Lambda}Q^T$ de cada matriz. Verificar que esta raíz cuadrada satisface que $A^TA = S$:

$$S = \begin{bmatrix} 5 & 4 \\ 4 & 5 \end{bmatrix} \quad \text{y} \quad S = \begin{bmatrix} 10 & 6 \\ 6 & 10 \end{bmatrix}.$$

8. Suponga que C es definida positiva y que A tiene columnas independientes (es decir, $Ax \neq 0$ siempre que $x \neq 0$). Aplicar el test de energía a x^TA^TCAx para demostrar que $S = A^TCA$ es **definida positiva**.

9. Sin multiplicar, dado

$$S = \begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix},$$

   encontrar:

   (a) el determinante de S,

   (b) los valores propios de S,

   (c) los vectores propios de S,

   (d) una razón por la cual S es simétrica definida positiva.

10. Consideremos una matriz simétrica $S = S^T$, con vectores propios (ortonormales) v_1 a v_n. Sean $\lambda_1 \geq \cdots \geq \lambda_n$ sus valores propios.

    Cualquier vector x se puede escribir como una combinación $x = c_1v_1 + \cdots + c_nv_n$.

    a) Explicar entonces estas dos fórmulas:

$$x^Tx = c_1^2 + \cdots + c_n^2,$$

$$x^TSx = \lambda_1c_1^2 + \cdots + \lambda_nc_n^2.$$

b) El problema anterior da una forma clara para el cociente de Rayleigh $x^T Sx/x^T x$:

$$R(x) = \frac{x^T Sx}{x^T x} = \frac{\lambda_1 c_1^2 + \cdots + \lambda_n c_n^2}{c_1^2 + \cdots + c_n^2}.$$

¿Por qué el valor máximo de ese cociente es igual al mayor valor propio λ_1? Esto puede ser la forma más simple de entender la "segunda construcción" de la SVD. Se puede ver que el cociente $R(x)$ es máximo cuando $c_1 = 1$ y $c_2 = c_3 = \cdots = c_n = 0$.

c) Ahora aparece λ_2 cuando $x = v_2$. Maximizamos $R(x) = x^T Sx/x^T x$ bajo la condición $x^T v_1 = 0$. *¿Qué implica esta condición sobre c_1?* ¿Por qué ahora el cociente en el Problema 11 se maximiza cuando $c_2 = 1$ y $c_1 = c_3 = \cdots = c_n = 0$?

d) Siguiendo el anterior, ¿qué problema de maximización se resuelve con $x = v_3$? La mejor elección es $c_3 = 1$ y $c_1 = c_2 = c_4 = \cdots = 0$.

El máximo de

$$R(x) = \frac{x^T Sx}{x^T x}$$

es λ_3 bajo qué dos condiciones sobre x?

11. Mostrar que A^T tiene los mismos (no nulos) valores singulares que A. Entonces $\|A\| = \|A^T\|$ para todas las matrices. Pero no es cierto que $\|Ax\| = \|A^T x\|$ para todos los vectores; para eso se necesita que $A^T A = AA^T$. ¿ Por qué?

12. ¿Cuál es la norma $\|A - \sigma_1 u_1 v_1^T\|$ cuando se elimina la pieza más grande de A? ¿Cuáles son todos los valores singulares de esta matriz reducida, y su rango?

13. Para maximizar $\frac{1}{2}x^T Sx$ con $x^T x = 1$, Lagrange trabajaría con

$$L = \frac{1}{2}x^T Sx + \lambda(x^T x - 1).$$

Mostrar que

$$\nabla L = \left(\frac{\partial L}{\partial x_1}, \ldots, \frac{\partial L}{\partial x_n}\right) = 0$$

es exactamente $Sx = \lambda x$.

Una vez más, el máximo de $R(x)$ es λ_1.

14. Si v es un vector propio de $A^T A$ con $\lambda \neq 0$, entonces ____ es un vector propio de AA^T.

15. Si $A = U\Sigma V^T$ es cuadrada e invertible, entonces $A^{-1} =$ ____. Encontrar todos los valores singulares de $A^T A$ (no de A).