Departamento de Métodos Cuantitativos
FCEA
Universidad de la República

Práctico 1

Espacios Vectoriales y Transformaciones Lineales

1. Demuestra que los requisitos de que un espacio vectorial es "cerrado" bajo la suma de vectores, y la multiplicación por un escalar, son genuinamente independientes construyendo lo siguiente.
   (a) Un subconjunto del espacio bidimensional cerrado bajo la suma y resta de vectores, pero no bajo la multiplicación escalar.
   (b) Un subconjunto del espacio bidimensional cerrado bajo la multiplicación por un escalar pero no bajo la suma de vectores.

2. ¿Cuáles de los siguientes subconjuntos de $\mathbb{R}^3$ son subespacios vectoriales?
   (a) El plano de vectores con primer componente $b_1 = 0$.
   (b) El plano de vectores con $b_1 = 1$.
   (c) Los vectores b con $b_1 b_2 = 0$ (esto es la unión de dos subespacios, el plano $b_1 = 0$ y el plano $b_2 = 0$).
   (d) El vector solitario $b = (0, 0, 0)$.
   (e) Todas las combinaciones de dos vectores dados $x = (1, 1, 0)$ y $y = (2, 0, 1)$.
   (f) Los vectores (b_1, b_2, b_3) que satisfacen $b_1 - b_2 + 3b_3 = 0$.

3. Describe el espacio columna y el ńucleo de las matrices

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

4. ¿Cuál es el subespacio más pequeño del espacio de matrices 3×3 que contiene a todas las matrices simétricas y a todas las matrices triangulares inferiores? ¿Cuál es el subespacio más grande contenido en ambos?

5. En la definición de un espacio vectorial, la suma y la multiplicación escalar deben satisfacer las siguientes reglas:
   a) $x + y = y + x$
   b) $(x + y) + z = x + (y + z)$
   c) Existe un "vector cero" único tal que $x + 0 = x$ para todo x.
   d) Para cada x existe un único vector $-x$ tal que $x + (-x) = 0$.
   e) $1 \cdot x = x$.
   f) $(c_1 c_2)x = c_1(c_2 x)$.

g) $(c_1 + c_2)x = c_1x + c_2x$.

h) $c(x + y) = cx + cy$.

(a) Suponete que la suma en $\mathbb{R}^2$ añade un uno extra a cada componente, de modo que $(3,1)+(5,0)$ es igual a $(9,2)$ en lugar de $(8,1)$. Con la multiplicación escalar habitual, ¿qué reglas se rompen?

(b) Demuestra que el conjunto de todos los números reales positivos, con la suma usual $x + y$ y la multiplicación escalar cx definida como el producto usual cx, no es un espacio vectorial. ¿Cuál es el "vector cero"?

6. Sea P el plano en $\mathbb{R}^3$ definido por la ecuación $x + 2y + z = 6$. ¿Qué se requiere para que el plano P_0 que pasa por el origen sea paralelo a P? ¿Son P y P_0 subespacios de $\mathbb{R}^3$?

7. ¿Cuáles de los siguientes conjuntos, son subespacios?

   a) Todas las sucesiones como $(1, 0, 1, 0, \ldots)$ que contienen infinitos ceros.

   b) Todas las sucesiones $(x_1, x_2, \ldots)$ con $x_j = 0$ desde algún índice en adelante.

   c) Todas las sucesiones decrecientes: $x_{j+1} \leq x_j$ para cada j.

   d) Todas las sucesiones convergentes: x_j tiene un límite cuando $j \to \infty$.

   e) Todas las progresiones aritméticas: $x_{j+1} - x_j$ es constante para todo j.

   f) Todas las progresiones geométricas $(x_1, kx_1, k^2x_1, \ldots)$ permitiendo todo k y x_1.

8. Determine cuáles de las siguientes descripciones son correctas. Las soluciones x de la ecuación

$$Ax = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

   forman:

   a) Un plano.

   b) Una recta.

   c) Un punto.

   d) Un subespacio.

   e) El núcleo de A.

9. Demuestre que el conjunto de matrices 2×2 no singulares no es un espacio vectorial. Demuestre también que el conjunto de matrices 2×2 singulares no es un espacio vectorial.

10. Sea $T : P_2(\mathbb{R}) \to P_2(\mathbb{R})$ la transformación lineal definida en el espacio de polinomios de grados 2, dada por

$$T(p(x)) = xp'(x) + p(x).$$

Determine la matriz asociada a T en la base $\{1, x, x^2\}$ y verifique si T es invertible.

* * *

Nota: Los siguientes ejercicios son sobre transformaciones lineales en espacios de "dimensión infinita", que usualmente se denominan "operadores lineales" o "funcionales lineales". Este tipo de ejercicios serán revisitados más adelante, pero es un lindo desafío intentar pensar en ellos ahora.

* * *

11. **Operador de Shift:** El operador shift en $\mathbb{R}^\infty$ definido por:

$$S(x_1, x_2, x_3, \dots) = (x_2, x_3, x_4, \dots),$$

¿tiene valores propios?

12. Considere el operador integral definido en el espacio de funciones continuas $\mathcal{A} : C([0,1]) \to C([0,1])$, dado por:

$$\mathcal{A}[f](x) = \int_0^x f(t)\,dt.$$

Pruebe que $\mathcal{A}$ es una transformación lineal. Determine su núcleo e imagen.

13. Sea $\mathcal{D}$ el funcional derivada definido sobre las funciones con infinitas derivadas en $\mathbb{R}$, i.e. $\mathcal{D} : C^\infty(\mathbb{R}) \to C^\infty(\mathbb{R})$ dado por $D(f) = f'$.
Probar que $\mathcal{D}$ es lineal, y encontrar núcleo, y valores propios y los "vectores" propios asociados (comunmente llamadas funciones propias de $\mathcal{D}$).

14. Supongamos que consideramos los operadores derivada e integral sobre $C^\infty(\mathbb{R})$. Probar que $\mathcal{D} \circ \mathcal{A} = Id_{C^\infty(\mathbb{R})}$ es la identidad, pero $\mathcal{A} \circ \mathcal{D} \neq Id$ dado que por ejemplo tiene núcleo.