

PRÁCTICO 6

Pseudo-inversa, mínimos cuadrados, número de condición

Problemas del libro de Strang: secciones II.2 y II.3

1. Probar que $\mathcal{N}(A^T A) = \mathcal{N}(A)$.
2. ¿Por qué A y A^+ tienen el mismo rango? Si A es cuadrada, ¿tienen A y A^+ los mismos vectores propios? ¿Cuáles son los valores propios de A^+ ?
3. A partir de A y A^+ mostrar que $A^+ A$ es correcto y que $(A^+ A)^2 = A^+ A$, es decir, que es una proyección. Sugerencia: si $A = \sum \sigma_i u_i v_i^T$, entonces se tiene

$$A^+ = \sum \frac{v_i u_i^T}{\sigma_i}, \quad A^+ A = \sum v_i v_i^T, \quad A A^+ = \sum u_i u_i^T$$

4. ¿Qué matrices cumplen que $A^+ = A$? ¿Por qué son cuadradas? Analizar $A^+ A$.
5. Supongamos que A tiene columnas independientes (rango $r = n$, núcleo trivial).
 - a) Describir la matriz Σ de tamaño $m \times n$ en $A = U \Sigma V^T$. ¿Cuántos elementos distintos de cero tiene Σ ?
 - b) Mostrar que $\Sigma^T \Sigma$ es invertible encontrando su inversa.
 - c) Escribir la matriz $n \times m$ dada por $(\Sigma^T \Sigma)^{-1} \Sigma^T$ e identificarla con Σ^+ .
 - d) Sustituir $A = U \Sigma V^T$ en $(A^T A)^{-1} A^T$ e identificar esa matriz como A^+ .
Mostrar que $A^T A \hat{x} = A^T b$ lleva a $A^+ = (A^T A)^{-1} A^T$, pero sólo si A tiene rango n .
6. Recordar que el número de condición de una matriz A se define por $\|A\| \|A^{-1}\|$. Mostrar por qué ese número se eleva al cuadrado si se trabaja con $A^T A$ en lugar de A .
7. Escribir una matriz 2×2 con número de condición > 1000 . ¿Cuál es A^{-1} ? ¿Por qué A^{-1} también tiene número de condición > 1000 ?
8. La razón por la que aparecen tanto $\|A\|$ como $\|A^{-1}\|$ es porque trabajamos con error relativo. Si $Ax = b$ y $A(x + \Delta x) = b + \Delta b$ entonces $A \Delta x = \Delta b$. Mostrar que

$$\frac{\|\Delta x\|}{\|x\|} \leq \|A\| \|A^{-1}\| \frac{\|\Delta b\|}{\|b\|}.$$

9. ¿Por qué el cociente $\lambda_{\max}/\lambda_{\min}$ es igual al número de condición cuando A es definida positiva?
10. **Importante:** ¿Cuál es el número de condición de una matriz ortogonal Q ?