Práctico 5

Normas en vectores y matrices

Problemas del libro de Strang: secciones I.11

1. Mostrar directamente que para normas vectoriales ℓ^1, ℓ^2 y ℓ^∞ se cumple:
$$\|v\|_2^2 \leq \|v\|_1 \|v\|_\infty$$

2. Probar la desigualdad de Cauchy-Schwarz:
$$|v^\top w| \leq \|v\|_2 \|w\|_2$$
para vectores $v, w \in \mathbb{R}^n$. También verificar y usar esta identidad para la norma cuadrada de una proyección:
$$0 \leq \left(v - \frac{v^\top w}{w^\top w} w,\, v - \frac{v^\top w}{w^\top w} w\right) = v^\top v - \frac{(v^\top w)^2}{w^\top w}$$

3. Mostrar que siempre:
$$\|v\|_2 \leq \sqrt{n}\|v\|_\infty \quad \text{y también} \quad \|v\|_1 \leq \sqrt{n}\|v\|_2$$
El segundo resultado puede probarse eligiendo un vector w adecuado y aplicando Cauchy-Schwarz.

4. (Identidad de polarización)
Sea $\langle \cdot, \cdot \rangle$ un producto interno en $\mathbb{R}^n$ con norma inducida $\|v\| = \sqrt{\langle v, v\rangle}$. Probar que para todo par de vectores $v, w \in \mathbb{R}^n$ se cumple la siguiente identidad de polarización:
$$\langle v, w\rangle = \frac{1}{2}\left(\|v + w\|^2 - \|v\|^2 - \|w\|^2\right)$$
Opcional: Deducir la versión simétrica:
$$\langle v, w\rangle = \frac{1}{4}\left(\|v + w\|^2 - \|v - w\|^2\right)$$
y discutir en qué contexto estas expresiones permiten definir el producto interno a partir de una norma.

5. Dar una demostración corta de que:
$$\|AB\|_F \leq \|A\|_F \|B\|_F$$
partiendo de:
$$|(AB)_{ij}|^2 \leq \|\text{fila } i \text{ de } A\|^2 \cdot \|\text{columna } j \text{ de } B\|^2$$
y usar la desigualdad de Cauchy-Schwarz para esto. Sumar sobre i y j para concluir la desigualdad.

6. El espacio de matrices $m \times n$ con la norma de Frobenius es un espacio de Hilbert: tiene un producto interno
$$\langle A, B\rangle = \operatorname{trace}(A^\top B)$$
Mostrar que:
$$\|A\|_F^2 = \langle A, A\rangle$$

7. Sea $A = ab^\top$ con $a, b \in \mathbb{R}^n$. Demostrar que:
$$\|A\|_F = \|a\| \cdot \|b\|$$

8. Verificar que para matrices compatibles A y B se cumple:
$$\|AB\|_F \leq \|A\|_F \cdot \|B\|_F$$

9. Si Q es una matriz ortogonal, probar que:
$$\|QA\|_F = \|A\|_F = \|AQ\|_F$$
y explicar cómo se usa esta propiedad en el Teorema de Eckart-Young.

10. Normas inducidas

    a) Sea $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$. Escribir las expresiones de las siguientes normas inducidas:

        1) Norma inducida por ℓ^2:
        $$\|A\|_2 = \sigma_{\max}(A)$$
        2) Norma inducida por ℓ^1:
        $$\|A\|_1 = \max_{1\leq j\leq n} \sum_{i=1}^{m} |a_{ij}|$$
        3) Norma inducida por ℓ^∞:
        $$\|A\|_\infty = \max_{1\leq i\leq m} \sum_{j=1}^{n} |a_{ij}|$$

    b) Calcular $\|A\|_1$, $\|A\|_\infty$ y $\|A\|_2$ (o estimarlas) para:
    $$A = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}$$

    c) Verificar que se cumple la desigualdad de submultiplicatividad:
    $$\|AB\| \leq \|A\| \cdot \|B\|$$
    siendo $\|\cdot\|$ la norma de operador (con cualquier norma).

d) Mostrar que la norma inducida satisface:

$$\|Ax\| \leq \|A\| \cdot \|x\| \quad \text{para todo } x$$

e) Probar que:

$$\|A\| = \sup_{\|x\| \leq 1} \|Ax\|$$