

PRÁCTICO 2

Espacios columna y fila de matrices

Problemas del libro Strang: secciones I.1 y I.2

1. Dé un ejemplo en el que una combinación de tres vectores no nulos en \mathbb{R}^4 sea el vector cero. Luego, escriba su ejemplo en la forma $Ax = 0$. ¿Cuáles son las dimensiones de A , x y 0 ?
2. Suponga que una combinación de las columnas de A es igual a una combinación diferente de esas mismas columnas. Escríbalo como $Ax = Ay$. Encuentre dos combinaciones de las columnas de A que sean iguales al vector cero (en lenguaje matricial, encuentre dos soluciones a $Az = 0$).
3. Cree una matriz 4×4 de rango 2. ¿Cuáles son las dimensiones de C y R ?
4. Suponga que A es la matriz 3×3 de todos unos. Encuentre dos vectores independientes x y y que resuelvan $Ax = 0$ y $Ay = 0$. Escriba la primera ecuación Ax (con números) como una combinación de las columnas de A . ¿Por qué no se puede encontrar un tercer vector independiente con $Az = 0$?
5. Las combinaciones lineales de $v = (1, 1, 0)$ y $w = (0, 1, 1)$ llenan un plano en \mathbb{R}^3 .
 - a) Encuentre un vector z que sea perpendicular a v y w . Luego, demuestre que z es perpendicular a cada vector $cv + dw$ en el plano, es decir, $(cv + dw)^T z = 0$.
 - b) Encuentre un vector u que no esté en el plano. Verifique que $u^T z \neq 0$.
6. Describa el espacio columna de $A = [v, w, v + 2w]$. Describa el espacio nulo de A : todos los vectores $x = (x_1, x_2, x_3)$ que resuelven $Ax = 0$. Observe que
$$\dim C(A) + \dim N(A) = \text{número de columnas},$$
siendo $C(A)$ y $N(A)$ el espacios columna y núcleo de A .
7. Suponga que el espacio columna de una matriz $m \times n$ es todo \mathbb{R}^3 . ¿Qué puede decir sobre m ? ¿Qué puede decir sobre n ? ¿Qué puede decir sobre el rango?
8. Suponga que dos matrices A y B tienen el mismo espacio columna.
 - a) Muestre que sus espacios fila pueden ser diferentes.
 - b) Muestre que las matrices C (columnas básicas) pueden ser diferentes.
 - c) ¿Qué número será el mismo para A y B ?

9. Si $A = CR$, la primera fila de A es una combinación de las filas de R . ¿Qué parte de qué matriz contiene los coeficientes en esa combinación, es decir, los números que multiplican las filas de R para producir la fila 1 de A ?
10. Supongamos que a y b son vectores columna con componentes a_1, \dots, a_m y b_1, \dots, b_p . ¿Se puede multiplicar a por la transpuesta de b (b^T)? (¿Sí o no?) ¿Cuál es la forma de la matriz resultante ab^T ? ¿Qué elemento se encuentra en la fila i , columna j de ab^T ? ¿Qué puedes decir acerca de $a^T a$?
11. Si A tiene columnas a_1, a_2, a_3 y $B = I$ es la matriz identidad, ¿cuáles son los rangos de las matrices $a_1 b_1^*$, $a_2 b_2^*$ y $a_3 b_3^*$? Deberían sumar a $AI = A$.
12. Probar que el espacio columna de AB está contenido en el espacio columna de A . Dar un ejemplo de A y B para los cuales AB tiene el mismo espacio columna que A .