Práctica 3: Complejos

Referencias:

• • y • *indican dificultad baja, media o de mayor dificultad respectivamente.*

D : *Indica que es un ejercicio para aplicar directamente la definición del concepto aprendido, o para entenderla mejor.*

Pr : *Ejercicios más "mecánicos", "prácticos", para incorporar un tipo de cuenta utilizada normalmente.*

E : *¡¡Pensados en base a los errores más frecuentes!!*

R : *Más "teóricos", importantes para profundizar en conceptos de fondo y reforzar la capacidad de razonamiento abstracto. ¡¡pensar antes de responder!!*

I : *Pensado para desarrollar intuición geométrica.*

(*) : *Es **opcional**, y el ej. puede tener mayor o menor dificultad.*

Nota: *A partir de esta práctica, es útil utilizar herramientas como* Geogebra 6 *(que tiene versión* online *)* *o* Wolfram Alpha para hacer cálculos y graficar.

Nota 2: *Se asumen conocidos los conceptos básicos de trigonometría (concepto de seno, coseno, tangente; su definición como funcion; su relación con un triángulo rectángulo; su representación gráfica en un círculo de radio 1.*
Para repaso de estos conceptos, consultar los archivos de repaso en el campus, y los siguientes archivos de Geogebra: Definición de seno y coseno en la circunferencia *y* Graficación de trigonométricas .

Repaso Trigonometría

Observación: *Considerar los ejercicios de esta sección como opcionales en la medida que se manejen estos conceptos **con soltura**.*

Ejercicio -2 (• , Pr , I , (*))**.** Anticipar el cuadrante al que pertenecen los siguientes ángulos, y convertirlos, según corresponda, al sistema sexagesimal o radianes (bajo la forma $a.\pi$)*.

a) $\alpha = \pi/2$
b) $\alpha = \pi/4$
c) $\alpha = \pi/6$
d) $\alpha = \pi$
e) $\alpha = 150°$
f) $\alpha = -45°$
g) $\alpha = 302°$

Ejercicio -1 (• , D , I , (*))**.** Anticipar aproximadamente cuánto debería dar el seno y coseno de los siguientes ángulos, calcularlos, y verificar gráficamente los resultados con este programa de Geogebra.

a) $\alpha = \pi/2$
b) $\alpha = \pi/3$
c) $\alpha = \pi/4$
d) $\alpha = \pi/6$
e) $\alpha = 0$
f) $\alpha = \pi$
g) $\alpha = 2\pi$
h) $\alpha = \frac{3}{2}\pi$
i) $\alpha = \frac{7}{3}\pi$
j) $\alpha = 54°$
k) $\alpha = 200°$
l) $\alpha = 170°$

*Por ejemplo, $1,57$ radianes es $\frac{1}{2}.\pi$

Ejercicio 0 (• , Pr , D , I , (*)). Dados los siguientes puntos, calcular el ángulo entre el eje x positivo y el segmento que une el origen con cada punto.

a) $A = (1, 2)$ b) $B = (2, 2)$ c) $C = (-1, \sqrt{3})$

Complejos: elementos básicos. Forma binómica

Ejercicio 1 (• , D , Pr , I). Efectuar las siguientes operaciones, expresar en forma binómica el complejo z resultante y graficar en el plano. Luego calcular $|z|$ y $\overline{z}$.

a) $(2 - i)(1 + i)$

b) $\frac{2-i}{1+3i}$

c) $(3 - 2i)(3 + 2i)$

d) $-1 + (\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{3}) + (\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{3})^2$

e) $(1 + i)^2$

f) $(1 + i)^{-1}$

Ejercicio 2 (• , D , **E** !!). Señalar los 3 errores en:

Sea $z = 2 - 3i$. Entonces $Re(z) = 2$, $Im(z) = -3i$, $\overline{z} = -2 + 3i$, $|z| = \sqrt{2^2 - (3i)^2}$ y z está en el 4to cuadrante.

Ejercicio 3 (• , D , R). Expresar en lenguaje simbólico cuando corresponda y demostrar las siguientes proposiciones:

a) p : *La suma de un número complejo con su conjugado es igual al doble de la parte real de dicho número complejo*

b) q : *El producto de un número complejo y su conjugado es igual al cuadrado de su módulo*

c) (R !) $r : \forall z \in \mathbb{C} - \{0\}\,;\ \ z^{-1} = \frac{\overline{z}}{|z|^2}$ *(Obs:* ***una*** *forma de resolverlo es con el ítem anterior)*

Sugerencia: expresar el complejo z en su forma binómica.

Ejercicio 4 (• , Pr , I). Hallar, en cada caso, todos los complejos z que verifican la condición, y representarlos en el plano (se puede utilizar Geogebra):

a) $z = \overline{z}$

b) (R !) $|z| \leqslant 2$

c) (R !) $|Re(z)| \leqslant 1 \ \wedge |Im(z)| \leqslant \frac{1}{2}$

d) (R !) $z^{-1} = z$

e) (R !) $z^7 = 3z^6$

f) (R !) $z^2 \in \mathbb{R}$

g) (R !) $Re(z).z = Im(z).z$

h) $Im[i.z + (1 + i).\overline{z}] = 0$

i) $Re[2 + (1 - i).\overline{z}] = 0$

j) (R !) $z^2 = \overline{z}^2$

k) (•) $z^2 + \overline{z}^2 = i.\overline{z}$

l) (•) $z + Re(\overline{z}).z = i$

Sugerencias: A veces se puede y sirve simplificar (cuidado!!); y muchas veces (pero no todas!!) sirve escribir la forma binómica.

Forma trigonométrica. Forma de Euler

Ejercicio 5 (• , D , Pr). Expresar los siguientes complejos z en su forma trigonométrica y en su forma de Euler. Dibujarlos en el plano.

a) $z = 3$

b) $z = -\sqrt{2}i$

c) $z = 1 - \sqrt{3}i$

d) $z = 2(1 - \sqrt{3}i)$

e) $z = i.(1 - \sqrt{3}i)$

f) $z = 1 + \sqrt{3}i$

g) (•) $z = \frac{1+i}{1-i}$

h) (•) $z = (2 - 2i)(-3 + \sqrt{3}i)$

i) (•) $z = -3.(1 - \sqrt{3}i)^2$

j) (•) $z = \frac{(1+i)^6(\sqrt{3}+i)}{(2-2i)}$

k) (•) $z = (1 - i)^3(\sqrt{2} + \sqrt{2}i)^4$

l) (•) $z = \frac{(\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i)^9}{(1-i)^6}.(2i)^3$

m) (**E** !) $z = -3.\left(cos\left(\frac{\pi}{6}\right) + i.sen\left(\frac{\pi}{6}\right)\right)$

n) (**E** !) $z = \quad 2.\left(cos(\frac{\pi}{3}) - i.sen(\frac{\pi}{3})\right)$

ñ) (*) $z = (a - ai).(b - b\sqrt{3}i); \quad a, b > 0$

Sugerencia: Se pueden efectuar las operaciones y luego calcular la forma trigonométrica, ***pero en general, conviene aplicar las propiedades de módulo y argumento***

Ejercicio 6 (• , Pr). Pasar a forma trigonométrica los complejos del ejercicio 4 items a), b),e) y f).
Obs: se puede aproximar para el argumento.

Ejercicio 7 (• , D , I , Pr , R). Dibujar en el plano y/o describir coloquialmente los siguientes conjuntos de números complejos:

a) $\{z \in \mathbb{C} : \ arg(z) = 0\}$

b) $\{z \in \mathbb{C} : \ arg(z) = \pi\}$

c) $\{z \in \mathbb{C} : \ \frac{\pi}{4} \leqslant arg(z) \leqslant \frac{3\pi}{4}\}$

d) $\{z \in \mathbb{C} : \ 0 \leqslant arg(z) \leqslant \frac{11\pi}{6} \wedge |z| \leqslant 1\}$

e) $\{z \in \mathbb{C} : \ arg(z) = \frac{2\pi}{3} \wedge \frac{1}{2} \leqslant |z| \leqslant 1\}$

f) (• ,R) $\{z \in \mathbb{C} : \ Re(z) \geqslant 0 \wedge Im(z) \leqslant 1 \wedge |z| \geqslant \frac{1}{2}\}$

Ejercicio 8 (• , Pr , I). Resolver en $\mathbb{C}$ las siguientes ecuaciones y graficar en el plano:

a) (**E**) $z^3 = 1$

b) (**E**) $z^4 = 1$

c) $z^3 = -8$

d) $z^4 = 16i$

e) $z^5 = \frac{1}{4} + \frac{\sqrt{3}}{4}.i$

f) $z^6 = -\sqrt{2} - \sqrt{6}.i$

g) $z^3 = \frac{(1+i)^2}{\sqrt{2}} - |1 - i|.i + \overline{1 - i}$

h) $z^4 = 16i \ \wedge \ Re(z) \leqslant 0$

i) $z^5 = (1 + i)^{10} \ \wedge \ z$ *pertenece al 4to cuadrante*

j) (• ,**E** !) $z^2 = \frac{-1}{16}(cos(\frac{\pi}{6}) - i.sen(\frac{\pi}{6})) \wedge arg(z) \in [0, \pi]$

(R) Teniendo en cuenta la cantidad de soluciones obtenidas en cada caso (hasta g)), ¿qué conclusión podés sacar?

Ejercicio 9 (• , Pr , I). Resolver en $\mathbb{C}$ las siguientes ecuaciones y graficar en el plano:
Obs: No olvidar que al simplificar o usar forma trigonométrica, se excluye al $z = 0$, que podría ser solución.

a) $z^4 + i = 0$

b) $27z^3 - (1-i) = 0$

c) $(1+i)z^3 = 1-i$

d) $z^3 = -16i.\overline{z}$

e) $z^4 + \overline{iz} = 0$

f) $z^3 - i|z|^2 = 0$

g) $z^4 = \left(-\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i\right)(\overline{z})^4$

h) $z(z^2-i)(z^2+i) = 0$

i) $(z^2-1)(z^4+i) = 0$

j) (!!) $(2z-1)^2 = -3$

k) (!!) $(z+1)^4 = z^4$

(R) Teniendo en cuenta la cantidad de soluciones obtenidas en cada caso, ¿se contradice con la conclusión sacada en el ejercicio anterior?¿qué conclusión podés sacar?

Ejercicio 10 (• , Pr). Las siguientes ecuaciones no pueden resolverse por forma trigonométrica. Resolver las siguientes ecuaciones utilizando alguna aplicación como *Wolfram Alpha* o a través de la resolvente general.

a) $z^2 - z + 1 = 0$

b) $z^2 + i.z + 1 + 3.i = 0$

c) $z^2 + (2-3i)z - (10+6i) = 0$

En base a lo respondido, decidir si las siguientes proposisiones son verdaderas o falsas, argumentando:

a) $p : \exists z$ *solución de c tal que* $Re(z^3) > 0$

b) $q :$ *La ecuación b tiene al menos una solución en el 1er cuadrante.*

c) $r :$ *Si* z *es una solución de b con* $Re(z) > 0 \Longrightarrow Im(z)$ *es un número par*

Ejercicio 11 (• , R). Se sabe que z está en el segundo cuadrante y que $Re(w), Im(w) > 0$. Justificar si $z.w$ puede o no estar en el cuarto cuadrante.
Sugerencia: Pensar qué dicen del argumento de z y w los datos proporcionados.

Ejercicio 12 (• , R , D). Teniendo en cuenta la definición de $|z|$, demostrar:

a) $\forall z, w \in \mathbb{C};\ |z.w| = |z|.|w|$

b) Dado $z \in \mathbb{C}$, $\forall n \geqslant 2$; $|z^n| = |z|^n$ *(usar item anterior).*

Ejercicio 13 (• , (*) , R , D). Teniendo en cuenta la definición de $Arg(z)$, demostrar:

a) $\forall z, w \in \mathbb{C};\ Arg(z.w) \approx Arg(z) + Arg(w)$

b) Dado $z \in \mathbb{C}$, $\forall n \geqslant 2$; $Arg(z^n) \approx n.Arg(z)$ *(usar item anterior).*