UNIVERSIDAD DE ANTIOQUIA

Integrales de Trayectoria y Espacios Curvos

por

Diego Alberto Barón Moreno

Asesor:
Nelson Vanegas Arbeláez

Tesis para optar por el título de:
Físico

en la
Facultad de Ciencias Exactas y Naturales
Instituto de Física

Abril 2016

"Write a funny quote here."

If the quote is taken from someone, their name goes here

Resumen

The Thesis Abstract is written here (and usually kept to just this page). The page is kept centered vertically so can expand into the blank space above the title too...

Agradecimientos

The acknowledgements and the people to thank go here, don't forget to include your project advisor…

Tabla de Contenidos

Índice de figuras

Índice de tablas

Dedicado a mi madre. . .

Capítulo 1

Introducción

Capítulo 2

Integrales de trayectoria en espacio plano.

El formalismo mas común de la mecánica cuantica se deriva de cambiar las variables clasicas de posición y momentum (p y q) por operadores que obedecen el álgebra:

$$[\hat{q}, \hat{p}] = i\hbar \tag{2.1}$$

Esta relación se conoce como la condción de cuantización de Heisenberg, en general en la mecánica cuantica de operadores estos últimos viven en un espacio de Hilbert.

La formulación de integrales de camino se basa en la noción de **propagador**, esta función es tal que dada una funcion de onda en un instante de tiempo t_1, $\psi(x_1, t_1)$ da la evolucion hasta un instante de tiempo t_2, entregando $\psi(x_2, t_2)$. En cierta manera es parecido al principio de Huygens:

$$\psi(x_f, t_f) = \int K(q_f, t_f; q_i, t_i)\psi(q_i, t_i)dq_i \tag{2.2}$$

De acuerdo con la mecánica cuántica $\psi(q_f, t_f)$ representa la probabilidad de que una partícula se encuentre en un punto q_f en el instante de tiempo t_f, por tanto $K(q_f, t_f; q_i, t_i)$ representa la amplitud de probabilidad de transición entre un estado (q_i, t_i) y (q_f, t_f).

$$P(q_f, t_f; q_i, t_i) = \|K(q_f, t_f; q_i, t_i)\|^2 \tag{2.3}$$

Si dividimos el intervalo de tiempo en $t_i \to t \to t_f$, tenemos de la definición de K:

$$\begin{aligned} \psi(q_f, t_f) &= \int\int K(q_f, t_f; q, t) K(q, t; q_i, t_i) dq dq_i \\ \Rightarrow K(q_f, t_f; q_i, t_i) &= \int dq K(q_f, t_f; q, t) K(q, t; q_i, t_i) \end{aligned} \tag{2.4}$$

Como ejemplo de lo anterior podemos analizar el experimento de la doble rendija. En la Figura 1 encontramos un esquema de este: Si $K(2A, 1)$ es la probabilidad de que un

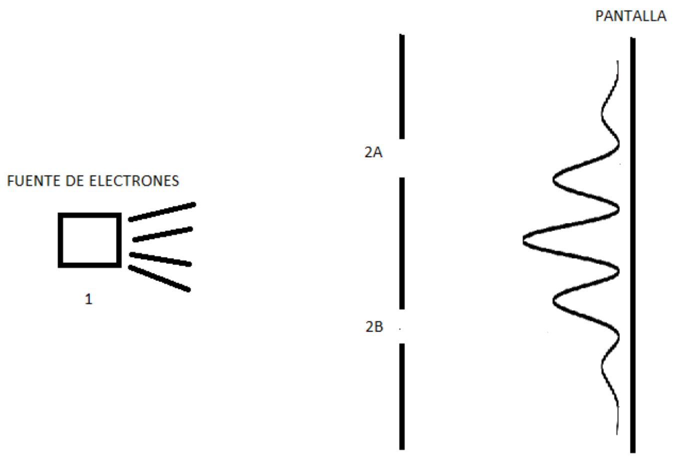


FIGURA 2.1: Experimento de la doble rendija.

electrón pase por la rendija 2A, entonces podemos escribir:

$$K(3, 1) = K(2A, 1)K(3, 2A) + K(2B, 1)K(3, 2B) \tag{2.5}$$

Al tomar el módulo cuadrado de la expresión (2.5) se generarán los términos de interferencia necesarios para describir el patrón de difracción. No podemos decir que el electrón tomó un camino u el otro, de una manera más simple: este siguió todos los caminos posibles!

2.1. La ecuación de Schrödinger.

En el cuadro de Schrodinger la evolución de un sistema cuántico afecta al ket que representa al estado del sistema, la ecuación que rige la dinámica del mismo es la **Ecuación de Schrödinger**

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t} |\psi\rangle_S = \hat{H} |\psi\rangle_S \tag{2.6}$$

Sabemos que $\psi(q, t) = \langle q|\psi\rangle_S$ donde $|q\rangle$ son autoestados de la posición, la relacion entre el cuadro de Heisenberg y el de Schrödinger es $|\psi\rangle_H = e^{iHt/\hbar}|\psi\rangle_S$. Si definimos $|qt\rangle \equiv e^{iHt/\hbar}|q\rangle$, entonces $\psi(q, t) = \langle qt|\psi\rangle_H$.

Vamos a mostrar que $K(q_f,t_f;q_i,t_i)=\langle q_ft_f|q_it_i\rangle$, la relación de completez nos permite escribir:

$$\begin{aligned}\langle q_ft_f|\psi\rangle &= \int\langle q_ft_f|q_it_i\rangle\langle q_it_i|\psi\rangle dq_i\\ &= \int\langle q_ft_f|q_it_i\rangle\psi(q_i,t_i)dq_i \qquad (2.7)\end{aligned}$$

Y comparando (2.7) y (2.2), vemos que:

$$K(q_f,t_f;q_i,t_i)=\langle q_ft_f|q_it_i\rangle \qquad (2.8)$$

Así, el propagador es proporcional a la amplitud de probabilidad de transición entre el estado inicial $|q_it_i\rangle$ y final $|q_ft_f\rangle$. La idea ahora es expresar el propagador como una integral de trayectoria. Partamos el intervalo temporal (t_i,t_f) en $n+1$ piezas de igual duración τ, así:

$$\langle q_ft_f|q_it_i\rangle\int dq_1dq_2...dq_n\langle q_ft_f|q_nt_n\rangle\langle q_nt_n|q_{n-1}t_{n-1}\rangle...\langle q_1t_1|q_it_i\rangle \qquad (2.9)$$

Calculemos uno de estos elementos:

$$\begin{aligned}\langle q_{j+1}t_{j+1}|q_jt_j\rangle &= \langle q_{j+1}|e^{-iHt_{j+1}/\hbar}e^{iHt_j/\hbar}|q_j=\langle q_{j+1}|e^{-i\tau H/\hbar}|q_j\rangle \quad \text{A primer orden,}\\ &= \langle q_{j+1}|1-i\tau H/\hbar|q_j\rangle=\delta(q_{j+1}-q_j)-i\tau\hbar\langle q_{j+1}|H|q_j\rangle\\ &= \frac{1}{2\pi\hbar}\int dp\ \mathrm{Exp}[\frac{ip}{\hbar}(q_{j+1}-q_j)]-\frac{i\tau}{\hbar}\langle q_{j+1}|H|q_j\rangle \qquad (2.10)\end{aligned}$$

Si asumimos que el Hamiltoniano es una función de p y $q$de la forma: $H=\frac{p^2}{2m}+V(q)$, entonces:

$$\begin{aligned}\langle q_{j+1}|\frac{p^2}{2m}|q_j\rangle &= \int dpdp\prime\langle q_{j+1}|p\prime\rangle\langle p\prime|\frac{p^2}{2m}|p\rangle\langle p|q_j\rangle\\ &= \int\frac{dpdp\prime}{2\pi\hbar}\ \mathrm{Exp}[\frac{i}{\hbar}(p\prime q_{j+1}-pq_j)]\frac{p^2}{2m}\delta(p-p\prime)\\ &= \int\frac{dp}{2\pi\hbar}\ \mathrm{Exp}[\frac{i}{\hbar}p(q_{j+1}-q_j)]\frac{p^2}{2m} \qquad (2.11)\end{aligned}$$

De una manera similar:

$$\begin{aligned}\langle q_{j+1}|V(q)|q_j\rangle &= V(\frac{q_{j+1}+q_j}{2})\langle q_{j+1}|q_j\rangle\\ &= V(\frac{q_{j+1}+q_j}{2})\delta(q_{j+1}-q_j)\\ \langle q_{j+1}|V(q)|q_j\rangle &= V(\frac{q_{j+1}+q_j}{2})\int\frac{dp}{2\pi\hbar}\ \mathrm{Exp}[\frac{i}{\hbar}p(q_{j+1}-q_j)] \qquad (2.12)\end{aligned}$$

Por tanto $\langle q_{j+1}|H|q_j\rangle = \int \frac{dp}{h}$ Exp$[\frac{i}{\hbar}p(q_{j+1}-q_j)]H(p,q)$ y:

$$\langle q_{j+1}t_{j+1}|q_jt_j\rangle = \frac{1}{h}\int dp_j \ \mathrm{Exp}[\frac{i}{\hbar}[p_j(q_{j+1}-q_j)-\tau H(p_j,q_j)]] \tag{2.13}$$

Finalmente:

$$\langle q_ft_f|q_it_i\rangle = \lim_{N\to\infty}\int\prod_{j=1}^{N}dq_j\prod_{j=0}^{N}\frac{dp_j}{h} \ \mathrm{Exp}\left\{\frac{i}{\hbar}\sum_{j=0}^{N}[p_j(q_{j+1}-q_j)-\tau H(p_j,q_j)]\right\} \tag{2.14}$$

En el continuo:

$$\langle q_ft_f|q_it_i\rangle = \int\frac{\mathcal{D}q\mathcal{D}p}{h}\mathrm{Exp}\bigg\{\frac{i}{\hbar}\int_{t_i}^{t_f}(p\dot{q}-H(p,q))dt\bigg\} \tag{2.15}$$

En el continuo q se vuelve una función de t y la integral anterior, es una integral funcional. La expresión (2.15) es la integral de trayectoria para la amplitud de transición entre (q_i,t_i) y (q_f,t_f). Esta integral se hace sobre todas las posibles trayectorias en el espacio de fase y $q(t),p(t)$ son funciones y no operadores, sin embargo es natural preguntarse por la convergencia de (2.15), esto es algo no trivial, sin embargo, de ahora en adelante asumiremos que esta integral existe y converge.
Si el Hamiltoniano es tal que $H=\frac{p^2}{2m}+V(q)$

$$\langle q_ft_f|q_it_i\rangle = \lim_{N\to\infty}\int\prod_{j=1}^{N}dq_j\prod_{j=0}^{N}\frac{dp_j}{h} \ \mathrm{Exp}\left\{\frac{i}{\hbar}\sum_{j=0}^{N}[p_j(q_{j+1}-q_j)-\tau\frac{p_j^2}{2m}-V(q)\tau]\right\} \tag{2.16}$$

Y sabiendo que: $\int_{-\infty}^{\infty}\mathrm{Exp}[-ax^2+bx+c]dx = \mathrm{Exp}[\frac{b^2}{4a}+c](\frac{\pi}{a})^{\frac{1}{2}}$, entonces:

$$\langle q_ft_f|q_it_i\rangle = \lim_{N\to\infty}[\frac{1}{h}(\frac{\pi\hbar 2\mathrm{m}}{i\tau})^{\frac{1}{2}}]^{N+1}\int\prod_{1}^{N}dq_j\mathrm{Exp}\left\{\frac{i}{\hbar}\sum_{0}^{N}\left((\frac{q_{j+1}-q_j}{\tau})^2\frac{m}{2}-V\right)\tau\right\} \tag{2.17}$$

En el continuo:

$$\langle q_ft_f|q_it_i\rangle = \mathcal{N}\int\mathcal{D}q\mathrm{Exp}\bigg\{\frac{i}{\hbar}\int_{t_i}^{t_f}\mathcal{L}(q,\dot{q})dt\bigg\} \tag{2.18}$$

Donde $\mathcal{L}(q,\dot{q})$ es el lagrangiano clásico, sin embargo esto solo pasa si asumimos una forma específica del Hamiltoniano, cuando esto no es asi se tiene una acción efectiva. En teorñia de campos por ejemplo esta descomposición solo se puede hacer en el caso de campos Abelianos.

2.1.1. Teoría de perturbaciones.

Vamos a ilustrar cómo usar el método de integrales de trayectoria en procesos de dispersión, este tipo de procesos involucran la interacción de una partícula con un potencial $V(x)$. Debido a que no siempre podemos calcular analíticamente la integral (2.18) entonces es necesario acudir a la teoría de perturbaciones, esta es aplicable en el regimen en que la energía de interacción $E_I < \hbar$. En este caso podemos escribir:

$$\mathrm{Exp}\left[\frac{-i}{\hbar}\int_{t_i}^{t_f} V(x,t)dt\right] = 1 - \frac{i}{\hbar}\int_{t_i}^{t_f} V(x,t)dt + \left(\frac{i}{\hbar}\right)^2 \frac{1}{2!}\left[\int_{t_i}^{t_f} V(x,t)dt\right]^2 + ... \quad (2.19)$$

Cuando reemplazamos esto en la expresión (2.18) obtenemos:

$$K = K_0 + K_1 + K_2 + ... \text{ donde } K_0 = \mathcal{N}\int \mathcal{D}x\mathrm{Exp}\left[\frac{i}{\hbar}\int \frac{1}{2}m\dot{x}^2 dt\right] \quad (2.20)$$

Para calcular K_0, escribamos la forma discretizada de (2.20)

$$\begin{aligned} K_0 &= \lim_{n\to\infty}\left(\frac{m}{i\hbar\tau}\right)^{\left(\frac{n+1}{2}\right)} \int_{-\infty}^{\infty}\prod_{j=1}^{n} dx_j \mathrm{Exp}\left[\frac{im}{2\hbar\tau}\sum_{j=0}^{n}(x_{j+1}-x_j)^2\right] \\ &= \lim_{n\to\infty}\left(\frac{m}{i\hbar\tau}\right)^{\left(\frac{n+1}{2}\right)} \frac{1}{(n+1)^{\frac{1}{2}}}\left(\frac{i\hbar\tau}{m}\right)^{\frac{n}{2}} \mathrm{Exp}\left[\frac{im}{2\hbar(n+1)\tau}(x_f-x_i)^2\right] \\ K_0(x_f t_f, x_i t_i) &= \Theta(t_f - t_i)\left(\frac{m}{i\hbar(t_f-t_i)}\right)^{1/2} \mathrm{Exp}\left[\frac{im}{2\hbar(t_f-t_i)}(x_f-x_i)^2\right] \end{aligned} \quad (2.21)$$

Calculemos ahora K_1:

$$K_1 = \lim_{n\to\infty}\frac{-i}{\hbar}N^{(n+1)/2}\sum_{i=1}^{n}\int \mathrm{Exp}\left[\frac{im}{2\hbar\tau}\sum_{j=0}^{n}(x_{j+1}-x_j)^2\right]V(x_i,t_i)dx_1...dx_n \quad (2.22)$$

Ahora como solo $V(x)$ depende de x_i, separamos (2.22) como:

$$\begin{aligned} K_1 &= \lim_{n\to\infty}\frac{-i}{\hbar}\sum_{i=1}^{n}\left\{\int N^{(n-i+1)/2}\mathrm{Exp}\left[\frac{im}{2\hbar\tau}\sum_{j=i}^{n}(x_{j+1}-x_j)^2\right]dx_i...dx_n\right\} \\ &\times\left\{\int N^{i/2}\mathrm{Exp}\left[\frac{im}{2\hbar\tau}\sum_{j=0}^{i-1}(x_{j+1}-x_j)^2\right]dx_1...dx_{i-1}\right\}V(x_i,t_i) \end{aligned} \quad (2.23)$$

Los dos términos en corchetes en (2.23) son $K_0(xt, x_f t_f)$ y $K_0(x_i t_i, xt)$, así:

$$K_1(x_f t_f, x_i t_i) = -\frac{i}{\hbar}\int_{t_i}^{t_f} dt \int_{-\infty}^{\infty} K_0(x_f t_f . xt)V(x,t)K_0(xt, x_i t_i)dx \quad (2.24)$$

Como $K_0(x_f t_f, xt) = 0$ si $t > t_f$ y $K_0(xt, x_i t_i) = 0$ si $t < t_i$, entonces podemos escribir:

$$K_1(x_f t_f, x_i t_i) = -\frac{i}{\hbar}\int_{-\infty}^{\infty} dt \int_{-\infty}^{\infty} K_0(x_f t_f.xt) V(x,t) K_0(xt, x_i t_i) dx \qquad (2.25)$$

De la misma manera se puede probar que:

$$K_2(x_f t_f, x_i t_i) = \left(\frac{-i}{\hbar}\right)^2 \int_{-\infty}^{\infty} dt_1 dt_2 dx_1 dx_2 K_0(x_f t_f.x_2 t_2) V_2 K_0(x_2 t_2, x_1 t_1) V_1 K_0(x_1 t_1, x_i t_i) \qquad (2.26)$$

Esta es una solución en series para K y recibe el nombre de Serie de Born, en la expresión general para K_n no se tiene el factor $n!$ ya que hay ese mismo numero de formas para ordenar los n potenciales $V(x)$ que entran en el propagador.

Por último mostraremos que **el propagador es la función de Green de la ecuación de Schrödinger.** Para esto sustituyamos la expresión para la serie de Born en la ecuación (2.2):

$$\begin{aligned} \psi(\vec{x}_f, t_f) &= \int K_0(\vec{x_f} t_f, \vec{x_i} t_i)\psi(\vec{x_i}, t_i) d\vec{x_i} \\ & \frac{-i}{\hbar}\int K_0(\vec{x_f} t_f, \vec{x}t) V(\vec{x},t) K_0(\vec{x}t, \vec{x_i} t_i)\psi(\vec{x_i}, t_i) d\vec{x} dt d\vec{x_i} + O(\hbar^2) \end{aligned} \qquad (2.27)$$

Hemos cambiado a tres dimensiones espaciales y los otros términos en la serie hacen converger el último K_0 a K, por tanto:

$$\psi(\vec{x}_f, t_f) = \int K_0(\vec{x_f} t_f, \vec{x_i} t_i)\psi(\vec{x_i}, t_i) d\vec{x_i} - \frac{i}{\hbar}\int K_0(\vec{x_f} t_f, \vec{x}t) V(\vec{x},t)\psi(\vec{x},t) d\vec{x} dt \qquad (2.28)$$

Cuando $t_i \to -\infty$,no hay presencia de potencial por tanto ψ se vuelve una onda plana. Así:

$$\psi(\vec{x}_f, t_f) = \phi(\vec{x}_f t_f) - \frac{i}{\hbar}\int K_0(\vec{x_f} t_f, \vec{x}t) V(\vec{x},t)\psi(\vec{x},t) d\vec{x} dt \qquad (2.29)$$

Aplicando el operador $\hat{H} = \frac{\hbar^2}{2m}\nabla_{\vec{x}_f t_f} + i\hbar\frac{\partial}{\partial t_f}$ en la ecuación (2.29) y usando $\hat{H}\psi(x,t) = V(x,t)\psi(x,t)$:

$$\begin{aligned} \hat{H}(\psi(\vec{x}_f, t_f)) &= \hat{H}(\phi(\vec{x}_f t_f)) - \frac{i}{\hbar}\int \hat{H}(K_0(\vec{x_f} t_f, \vec{x}t)) V(\vec{x},t)\psi(\vec{x},t) d\vec{x} dt \\ V(\vec{x}_f, t_t)\psi(\vec{x}_f, t_f) &= 0 - \frac{i}{\hbar}\int \hat{H}(K_0(\vec{x_f} t_f, \vec{x}t)) V(\vec{x},t)\psi(\vec{x},t) d\vec{x} dt \end{aligned}$$

Por tanto:

$$\left(\frac{\hbar^2}{2m}\nabla_{\vec{x}_f t_f} + i\hbar\frac{\partial}{\partial t_f}\right) K_0(\vec{x_f} t_f, \vec{x}t) = i\hbar\delta(\vec{x} - \vec{x}_f)\delta(t - t_f) \qquad (2.30)$$

Esto último era lo que queríamos probar.

2.1.2. Matriz $\mathcal{S}$.

En un experimento de dispersión es razonable suponer que las partículas al principio y al final del proceso son partículas libres, estas ondas planas están distribuidas en todo el espacio. Sin embargo esto último lleva a una contradicción ya que la presencia del centro dispersor no permite que en sus cercanias la solución sea una onda plana. Para resolver este inconveniente se puede proponer lo que se llama una fuente dinámica, que se "prenda y apague"lentamente tal que las partículas en los estados (final/incial) puedan ser libres y por tanto la aproximación de ondas planas sea válida en este regimen.

Para empezar definamos $\psi_{in}(\vec{x}_i, t_i)$, $\psi_{out}(\vec{x}_f, t_f)$ como ondas planas para $t \to -\infty$, $t \to \infty$ respectivamente, la amplitud de dispersión se define como:

$$\mathcal{S} = \int \psi^*_{out}(\vec{x}_f t_f)\psi^{(+)}(\vec{x}_f t_f)d\vec{x}_f \tag{2.31}$$

En (2.31) el superíndice $(+)$ denota que $\psi^{(+)}(\vec{x}t)$ era una onda libre en $t \to -\infty$, usando la serie de Born obtenemos:

$$\begin{aligned}
\mathcal{S} &= \int \psi^*_{out}(\vec{x}_f t_f)\psi^{(+)}(\vec{x}_f t_f)d\vec{x}_f = \int \psi^*_{out}(\vec{x}_f t_f)K_0(\vec{x}_f t_f, \vec{x}_i t_i)\psi_{in}(\vec{x}_i t_i)d\vec{x}_f d\vec{x}_i \\
&\quad -\frac{i}{\hbar}\int \psi^*_{out}(\vec{x}_f t_f)K_0(\vec{x}_f t_f, \vec{x}t)V(\vec{x}t)K_0(\vec{x}t, \vec{x}_i t_i)\psi_{in}(\vec{x}_i t_i)d\vec{x}_f d\vec{x}_i d\vec{x}dt \\
&= \int \psi^*_{out}(\vec{x}_f t_f)\phi(\vec{x}_f t_f)d\vec{x}_f \\
&\quad -\frac{i}{\hbar}\int \psi^*_{out}(\vec{x}_f t_f)K_0(\vec{x}_f t_f, \vec{x}t)V(\vec{x}t)K_0(\vec{x}t, \vec{x}_i t_i)\psi_{in}(\vec{x}_i t_i)d\vec{x}_f d\vec{x}_i d\vec{x}dt
\end{aligned} \tag{2.32}$$

Si los momentos iniciales y finales son $\vec{p}_i = \hbar\vec{k}_i$,$\vec{p}_f = \hbar\vec{k}_f$ respectivamente, entonces tenemos que:

$$\psi_{in}(\vec{x}t) = \frac{1}{\sqrt{\tau}}\text{Exp}\left(\frac{i}{\hbar}(\vec{p}_i \cdot \vec{x} - E_i t)\right) \tag{2.33}$$

$$\psi_{out}(\vec{x}t) = \frac{1}{\sqrt{\tau}}\text{Exp}\left(\frac{i}{\hbar}(\vec{p}_f \cdot \vec{x} - E_f t)\right) \tag{2.34}$$

Donde $E^2 = \frac{p^2}{2m}$ y τ es el volumen de integración, el cual es arbitrario. Si sustituimos las expresiones (2.33) y (2.34) en (2.32) obtenemos:

$$\mathcal{S}_{fi} = \delta(\vec{k}_f - \vec{k}_i) - \frac{i}{\hbar}\int \psi^*_{out}(\vec{x}_f t_f)K_0(\vec{x}_f t_f, \vec{x}t)V(\vec{x}t)K_0(\vec{x}t, \vec{x}_i t_i)\psi_{in}(\vec{x}_i t_i)d\vec{x}_f d\vec{x}_i d\vec{x}dt \tag{2.35}$$

Lo cual nos permite ver la amplitud de dispersion $\mathcal{S}_{fi}$ como el elemento de una matriz, la **matriz $\mathcal{S}$ de dispersión**. En (2.35) el primer término solo es representativo cuando no hay interacción y $\vec{k}_i = \vec{k}_f$. Las interacciones están representadas en el segundo término.

Es posible representar este segundo término mediante una serie de diagramas a los cuales se les asocian ciertas reglas, estos diagramas reciben el nombre de **Diagramas de Feynmann**. Si nombramos:

$$\mathcal{A} = -\frac{i}{\hbar}\int \psi^*_{out}(\vec{x}_f t_f)K_0(\vec{x}_f t_f, \vec{x}t)V(\vec{x}t)K_0(\vec{x}t, \vec{x}_i t_i)\psi_{in}(\vec{x}_i t_i)d\vec{x}_f d\vec{x}_i d\vec{x}dt \tag{2.36}$$

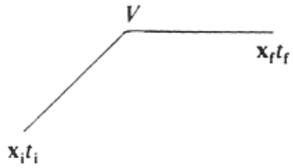


FIGURA 2.2: Representación de $\mathcal{A}$

Este diagrama lo podemos descomponer usando la siguiente convención:

FIGURA 2.3: Representación de $K_0(x_2t_2, x_1t_1)$

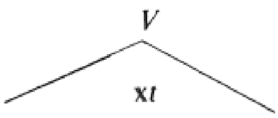


FIGURA 2.4: Representación de $\int -\frac{i}{\hbar}V(xt)dxdt$

Por ejemplo el diagrama correspondiente a término de segundo orden:

$$\begin{aligned}\mathcal{A}^{(2)} &= \left(-\frac{i}{\hbar}\right)^2 \int d\vec{x}_f d\vec{x}_i d\vec{x}' dt' d\vec{x}dt K_0(\vec{x}t, \vec{x}_i t_i)V(\vec{x}t)K_0(\vec{x}'t', \vec{x}t) \\ &\quad \times V(\vec{x}'t')K_0(\vec{x}_f t_f, \vec{x}'t')\psi^*_{out}(\vec{x}_f t_f)\psi_{in}(\vec{x}_i t_i)\end{aligned} \tag{2.37}$$

Es el siguiente: En algunos casos es útil conocer una expresión para el propagador K_0en

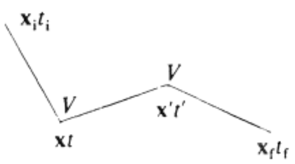


FIGURA 2.5: Representación de $\mathcal{A}^{(2)}$

el espacio de momentos, definimos $\mathcal{K}_0(\vec{p}_1 t_1, \vec{p}_2 t_2)$ como la amplitud de que una partícula con momento $\vec{p}_2$ en un instante t_2, sea observada un instante de tiempo después en t_1 con momento $\vec{p}_1$. Así:

$$\begin{aligned}\mathcal{K}_0(\vec{p}_1 t_1, \vec{p}_0 t_0) &= \int \mathrm{Exp}\left(\frac{-i}{\hbar}(\vec{p}_1\cdot\vec{x}_1)\right)K_0(\vec{x}_1 t_1, \vec{x}_0 t_0)\mathrm{Exp}\left(\frac{-i}{\hbar}(\vec{p}_0\cdot\vec{x}_0)\right)d\vec{x}_0 d\vec{x}_1 \\ &\quad \Theta(t_1-t_0)\left(\frac{m}{i\hbar(t_1-t_0)}\right)^{1/2}\int \mathrm{Exp}\left[\frac{i}{\hbar}(\vec{p}_0\cdot\vec{x}_0 - \vec{p}_1\cdot\vec{x}_1)\right] \\ &\quad \times \mathrm{Exp}\left[\frac{im(\vec{x}_0-\vec{x}_1)^2}{2\hbar(t_1-t_0)}\right]d\vec{x}_0 d\vec{x}_1\end{aligned} \tag{2.38}$$

Ahora si introducimos las siguientes variables:

$$\vec{x} = \vec{x}_0 - \vec{x}_1; \quad \vec{X} = \vec{x}_0 + \vec{x}_1; \quad \vec{p} = \vec{p}_0 - \vec{p}_1; \quad \vec{P} = \vec{p}_0 + \vec{p}_1 \tag{2.39}$$

Teniendo en cuenta que el Jacobiano de esta transformación es $J = \left(\frac{1}{2}\right)^3 = \frac{1}{8}$ y con $\alpha = \frac{m}{2\hbar(t_1 - t_0)}$ podemos escribir:

$$\mathcal{K}_0(\vec{p}_1 t_1, \vec{p}_0 t_0) = \Theta(t_1 - t_0)\left(\frac{\alpha}{i\pi}\right)^{3/2}\frac{1}{8}\int \text{Exp}\left[\frac{i\vec{p}\cdot\vec{X}}{2\hbar}\right] d\vec{X} \int \text{Exp}\left[\frac{i\vec{P}\cdot\vec{x}}{2\hbar)}\right] e^{i\alpha x^2} d\vec{x} \tag{2.40}$$

La primera integral es $I_1 = 8(2\pi\hbar)^3\delta(\vec{p}_0 - \vec{p}_1)$, la segunda la podemos calcular con la identidad $\int e^{-ax^2+bx+c} = e^{\frac{b^2}{4a}+c}\left(\frac{\pi}{a}\right)^(1/2)$, por tanto $I_2 = \left(\frac{i\pi}{\alpha}\right)^{3/2}\text{Exp}\left[\frac{-i\vec{P}^2}{8\hbar^3 4i\alpha}\right]$, por tanto:

$$\mathcal{K}_0(\vec{p}_1 t_1, \vec{p}_0 t_0) = (2\pi\hbar)^3\Theta(t_1 - t_0)\delta(\vec{p}_1 - \vec{p}_0)\text{Exp}\left[\frac{-i\vec{P}^2(t_1 - t_0)}{8m\hbar}\right] \tag{2.41}$$

Si también realizamos la transformada de Fourier en el tiempo, obtenemos:

$$\mathcal{K}_0(\vec{p}_1 E_1, \vec{p}_0 E_0) = (2\pi\hbar)^4\delta(\vec{p}_0 - \vec{p}_1)\delta(E_1 - E_0)\frac{i\hbar}{E - \frac{p_1^2}{2m} + i\epsilon} \tag{2.42}$$

De aquí las reglas de Feynmann en el espacio de momentos son:

FIGURA 2.6: Representación de $\frac{1}{(2\pi\hbar)^4}\frac{i\hbar}{E - \frac{p_1^2}{2m} + i\epsilon}$

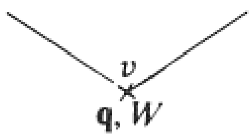


FIGURA 2.7: Representación de $\frac{-i}{\hbar}(2\pi\hbar)^4 v(\vec{q}, W)$

2.1.3. Propiedades adicionales de las integrales de trayectoria.

Ya hemos mostrado que la amplitud de transición entre un estado (q_i, t_i) a (q_f, t_f) está dada por:

$$\langle q_f t_f | q_i t_i \rangle = \mathcal{N}\int \mathcal{D}q\text{Exp}\left\{\frac{i}{\hbar}\int_{t_i}^{t_f}\mathcal{L}(q, \dot{q})dt\right\} \tag{2.43}$$

En un experimento real, las partículas creadas en algún instante en el pasado son destruidas al ser detectadas, esto lo podemos interpretar de la siguiente manera: El estado de vacío en $t = -\infty$ evoluciona al mismo vacío en $t = \infty$. En este proceso una partícula es creada para ser posteriormente destruida, todo esto en presencia de una fuente generadora de estos procesos. Así es razonable poner nuestro interés en calcular transiciones vacío-vacío en presencia de una fuente.

Podemos modificar el Lagrangiano de la de la siguiente manera: $\mathcal{L} \to \mathcal{L} + \hbar J(t)q(t)$. Si $|0,t\rangle^J$ es el estado fundamental en presencia de la fuente, entonces la amplitud de transición se define de la siguiente manera:

$$Z[J] \propto \langle 0, \infty | 0, -\infty \rangle^J \tag{2.44}$$

La fuente $J(t) = 0$ para $t > t\prime$, $t\prime\prime < t$. Instroduzcamos entonces T y $T\prime$ de tal manera que $T < t\prime\prime$, $T\prime > t\prime$ por tanto la amplitud (2.44) es:

$$\langle Q\prime T\prime | QT \rangle = \mathcal{N} \int \mathcal{D}q \mathrm{Exp} \left\{ \frac{i}{\hbar} \int_T^{T\prime} \mathcal{L}(q, \dot{q}) dt \right\} \tag{2.45}$$

Podemos escribir:

$$\langle Q\prime T\prime | QT \rangle^J = \int dq\prime dq \langle Q\prime T\prime | q\prime t\prime \rangle \langle q\prime t\prime | qt \rangle \langle qt | QT \rangle \tag{2.46}$$

Ahora si denotamos $|E_q\rangle$ como un autoestado del hamiltoniano podemos usar estos estados para expandir:

$$\begin{aligned} \langle Q\prime T\prime | q\prime t\prime \rangle &= \langle Q\prime | \mathrm{Exp} \left[\frac{-i}{\hbar} H T\prime \right] \mathrm{Exp} \left[\frac{i}{\hbar} H t\prime \right] | q\prime \rangle \\ &= \sum_{mn} \phi^*(q\prime) \phi(Q\prime) \langle E_{Q\prime} | \mathrm{Exp} \left[\frac{-i}{\hbar} H T\prime \right] \mathrm{Exp} \left[\frac{i}{\hbar} H t\prime \right] | E_{q\prime} \rangle \\ &= \sum_m \phi^*(q\prime) \phi(Q\prime) Exp \left[\frac{i}{\hbar} E_m (t\prime - T\prime) \right] \end{aligned} \tag{2.47}$$

De la misma manera:

$$\langle qt | QT \rangle = \sum_m \phi^*(Q) \phi(q) Exp \left[\frac{i}{\hbar} E_m (t - T) \right] \tag{2.48}$$

Introduciendo (2.47) y (2.48) en (2.46):

$$\begin{aligned} \langle Q\prime T\prime | QT \rangle &= \int dq\prime dq \sum_m \phi_m(Q\prime) \phi_m(q\prime, t) Exp \left[\frac{-i}{\hbar} E_m T\prime \right] \\ &\quad \times \sum_n \phi_n^*(Q) \phi_n^*(q, t) Exp \left[\frac{i}{\hbar} E_n T \right] \langle q\prime t\prime | qt \rangle^J \end{aligned} \tag{2.49}$$

Si hacemos una rotación de Wick de T y $T\prime$ nos damos cuenta que el el término que menos sufre de supresión en la integral (2.49) es el asociado a $m = n = 0$, por tanto:

$$\int dq\prime dq\phi_0^*(q\prime, t\prime)\langle q\prime t\prime|qt\rangle^J\phi_0(q,t) = \lim_{T\to-\infty e^{-i\delta}, T\prime\to\infty e^{-i\delta}} \frac{\langle Q\prime T\prime|QT\rangle^J}{\phi_0^*(Q)\phi_0(Q\prime)\text{Exp}\left[\frac{-i}{\hbar}E_0(T\prime - T)\right]} \tag{2.50}$$

El lado de (2.50) es simplemente el valor de expectación en el vacio de la amplitud de transcición, justo lo que buscabamos y el denominador de la parte derecha de la ecuación es simplemente una constante, así:

$$\langle 0, \infty|0, -\infty\rangle^J \propto \lim_{T\to-\infty e^{-i\delta}, T\prime\to\infty e^{-i\delta}} \langle Q\prime T\prime|QT\rangle^J \tag{2.51}$$

Otra forma equivalente de obtener este mismo resultado es: en vez de hacer una rotación de Wick, podemos agregar una pequeña cantidad imaginaria negativa al hamiltoniano $H + (-\frac{1}{2}i\epsilon q^2)$, lo cual es equivalente a restar esta misma cantidad a $\mathcal{L}$, de aquí que:

$$Z[J] = \int \mathcal{D}q\text{Exp}\left\{\frac{i}{\hbar}\int_{-\infty}^{\infty}(\mathcal{L}(q,\dot{q}) + \hbar Jq + \frac{1}{2}i\epsilon q^2)dt\right\} \tag{2.52}$$

En general se cumple que:

$$\langle q_f t_f|T[q(t_1)...q(t_n)]|q_i t_i\rangle = \mathcal{N}\int \mathcal{D}q q(t_1)...q(t_n)\text{Exp}\left[\frac{i}{\hbar}\int_{t_i}^{t_f}\mathcal{L}dt\right] \tag{2.53}$$

Donde T es el operador de ordenamiento temporal. Si derivamos funcionalmente la expresión para $Z[J]$ respecto a $J(t)$ obtenemos:

$$\frac{\delta Z[J]}{\delta J(t_1).}|_{J=0} = i\mathcal{N}\int \mathcal{D}q q(t_1)\text{Exp}\left[\frac{i}{\hbar}\int_{t_i}^{t_f}\mathcal{L}dt\right] \tag{2.54}$$

Haciendo esto n veces:

$$\frac{\delta^n Z[J]}{\delta J(t_1)...\delta J(t_n).}|_{J=0} = i^n\mathcal{N}\int \mathcal{D}q q(t_1)...q(t_n)\text{Exp}\left[\frac{i}{\hbar}\int_{t_i}^{t_f}\mathcal{L}dt\right] \tag{2.55}$$

De igualar las ecuaciones (2.53), (2.55) y al tener en cuenta agregar el factor $\frac{1}{2}i\epsilon q^2$ (el cual simplemente va a hacer converger los estados inicial y final en (2.53) a estados de vacío) obtenemos:

$$\frac{\delta^n Z[J]}{\delta J(t_1)...\delta J(t_n).}|_{J=0} \propto i^n\langle 0, \infty|T[q(t_1)...q(t_n)]|0, -\infty\rangle \tag{2.56}$$

Estas últimas expresiones que hemos derivado van a ser importantes como punto de partida a la hora de tratar de cuantizar una teoría de campos vía el formalismo de integrales de trayectoria.

2.2. El experimento de la doble rendija.

En esta sección aplicaremos lo aprendido en la §2.1 para resolver vía integrales de trayectoria el conocido problema de la difracción de electrones por una y dos rendijas.

2.2.1. El propagador de una partícula libre.

Con este objetivo en mente primero necesitamos conocer el propagador de una partícula libre, sabemos que en un espacio plano de una dimensión la integral de trayectoria está dada por la expresión (2.17),podemos hacer facilmente una analogía para un espacio euclídeo d-dimensional. En este caso el propagador es:

$$\begin{aligned} K(x_f t_f,, x_i,t_i) &= \lim_{n\to\infty} \frac{1}{(2\pi i\hbar\epsilon/m)^{d/2}} \prod_{k=1}^{n} \int \frac{d^d x_k}{(2\pi i\hbar\epsilon/m)^{d/2}} \\ &\quad \times \mathrm{Exp}\left\{ \frac{i}{\hbar} \sum_{k=1}^{n} \epsilon \left[\frac{m(x_k - x_{k-1})^2}{2\epsilon^2} - V(x_k) \right] \right\} \end{aligned} \tag{2.57}$$

donde $\epsilon = (t_i - t_f)/n$; para una partícula libre $V(x_k) = 0$, entonces:

$$K(x_f t_f,, x_i,t_i) = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{(2\pi i\hbar\epsilon/m)^{d/2}} \prod_{k=1}^{n} \int \frac{d^d x_k}{(2\pi i\hbar\epsilon/m)^{d/2}} \mathrm{Exp}\left\{ \frac{i}{\hbar} \sum_{k=1}^{n} \left[\frac{m(x_k - x_{k-1})^2}{2\epsilon} \right] \right\} \tag{2.58}$$

Para $d = 1$, integremos los términos que tienen que ver con x_1:

$$\begin{aligned} &\tfrac{1}{(2\pi i\hbar\epsilon/m)^{1/2}} \textstyle\prod_{k=1}^{n} \int \tfrac{dx_1}{(2\pi i\hbar\epsilon/m)^{1/2}} \mathrm{Exp}\left\{ \tfrac{im(x_1-x_0)^2}{2\hbar\epsilon} \right\} \mathrm{Exp}\left\{ \tfrac{im(x_2-x_1)^2}{2\hbar\epsilon} \right\} \\ &= \tfrac{1}{(2\pi i\hbar\epsilon/m)} \int dx_1 \mathrm{Exp}\left\{ \tfrac{-m}{2i\epsilon\hbar} \left(2x_1^2 - 2x_1(x_2 + x_0) + x_0^2 + x_2^2 \right) \right\} \\ &\text{Usando } \int e^{-ax^2+bx+c} dx = e^{\frac{b^2}{4a}+c} \left(\tfrac{\pi}{a}\right)^{1/2} \\ &= \tfrac{1}{\sqrt{2\pi i\hbar(2\epsilon)/m}} \mathrm{Exp}\left\{ \tfrac{im(x_2-x_0)^2}{2\hbar(2\epsilon)} \right\} \end{aligned}$$

Ahora al seguir con la integral de x_2 queda:

$$\begin{aligned} &\tfrac{1}{(2\pi i\hbar\epsilon/m)\sqrt{2}} \int dx_2 \mathrm{Exp}\left\{ \tfrac{im}{2\hbar(2\epsilon)} (x_2 - x_o)^2 \right\} \mathrm{Exp}\left\{ \tfrac{im}{2\hbar\epsilon} (x_3 - x_2)^2 \right\} \\ &= \tfrac{1}{\sqrt{2\pi i\hbar(3\epsilon)/m}} \mathrm{Exp}\left\{ \tfrac{im(x_3-x_0)^2}{2\hbar(3\epsilon)} \right\} \end{aligned} \tag{2.59}$$

Así por inducción:

$$\begin{aligned} K(x_f t_f, x_i t_i) &= \lim_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi i\hbar(n\epsilon)/m}} \mathrm{Exp}\left\{ \frac{im(x_f - x_i)^2}{2\hbar(n\epsilon)} \right\} \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi i\hbar(t_f - t_i)/m}} \mathrm{Exp}\left\{ \frac{im(x_f - x_i)^2}{2\hbar(t_f - t_i)} \right\} \end{aligned} \tag{2.60}$$

Por tanto en 3-D:

$$K^{3D}(x_f t_f, x_i t_i) \equiv K_0^{3D} = \left(\frac{m}{2\pi i\hbar(t_f - t_i)}\right)^{3/2} \text{Exp}\left\{\frac{im|\vec{x}_f - \vec{x}_i|^2}{2\hbar(t_f - t_i)}\right\} \tag{2.61}$$

2.2.2. El problema de difracción e interferencia.

Consideremos el siguiente experimento: una fuente de electrones en $(x, y, z) = (0, 0, 0)$ y dos rendijas en $Z = D$ con ancho $2a$ y centradas en $x = \pm b$, tal como se muestra en la figura 2.6. Adicionalmente consideramos que las barreras son lo suficientemente largas en y como para poder despreciar los efectos de difracción inducidos en el caso de que estas fueran finitas.

Así reducimos la dimensión del propagador en y:

$$\begin{aligned} K_0^{2D}(\vec{r}t, \vec{r}\prime t\prime) &= \int_{-\infty}^{\infty} dy K_0^{3D}(\vec{r}t, \vec{r}\prime t\prime) \\ &= \frac{m}{2\pi i\hbar(t - t\prime)} Exp\left\{\frac{im|\vec{x} - \vec{x}\prime|^2}{2\hbar(t - t\prime)}\right\} \end{aligned} \tag{2.62}$$

Donde $|\vec{x} - \vec{x}\prime|^2$ se define como el módulo cuadrádo de la distancia en el plano $z - x$. Para modelar las rendijas vamos a usar las siguientes funciones escalón:

$$\chi_{[b-a,b+a]}(\omega) = \begin{cases} 0 & \omega > b + a, \omega < b - a \\ 1 & b - a < \omega < b + a \end{cases}$$

La pregunta es. ¿cuál es la probabilidad de encontrar un electrón en $(z = L + D, x)$?, dado que haya salido de $(x = 0, z = 0)$. Asumiendo que la fuente libera electrones individualmente podemos despreciar la interacción entre ellos. Como sabemos la probabilidad

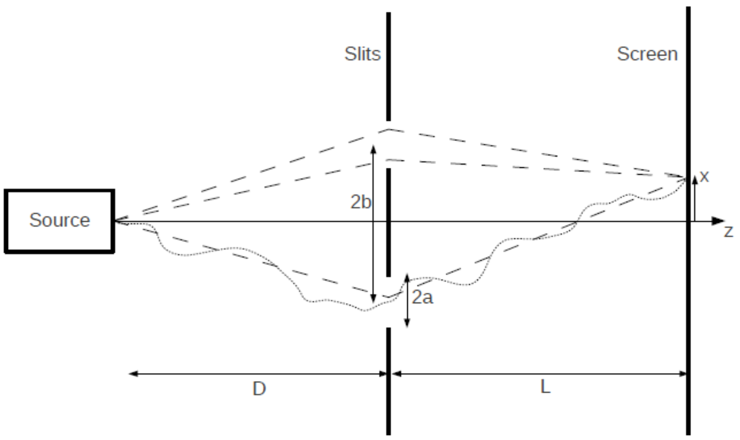


FIGURA 2.8: Experimento de la doble rendija.

está dada por el módulo al cuadrado de la amplitud , la cual calcularemos usando el propagador. Como explicamos anteriormente hemos tomado $d = 2$ en el propagador, sin embargo vamos a explicar por qué podemos reducir aún más la complejidad del problema: consideremos la difracción por una sola rendija y que el movimiento está dividido en dos regiones, uno empezando desde la fuente y llegando a las rendijas un tiempo T despues de la emisión y otro de la rendija a la pantalla, este último de duración τ.

Sin embargo no hay nada en las leyes de la mecánica cuántica que nos diga que podemos separar el movimiento en dos tramos, esto debido a que realmente no tenemos certeza de la posición de la partícula en un tiempo T. En pocas palabras no sabemos cuando el electrón ha cruzado la rendija.

No obstante podemos considerar esta imagen clásica para estudiar el problema, veamos por qué: el electrón tiene un momentum $p_z = \hbar k_z$, el cual esta relacionado con la velocidad clásica como $V_z = D/T = L/\tau$, aquí suponemos que D es suficientemente grande comparado con las dimensiones en x ($x, a, b \ll D, L$). Adicionalmente la longitud de onda λ de la partícula es aproximadamente igual a la contribucion en z (esto es como si tomaramos partículas que no se desvían demasiado de la trayectoria clásica). Si $\lambda \approx \lambda_z = 2\pi\hbar/(mv_z)$ entonces $\lambda \ll D, L$. Esto quiere decir que el movimiento en z es practicamente clásico. Note que cuánticamente es posible que el electrón pase a través de la rendija varias veces, sin embargo la probabilidad de este suceso ha de ser baja.

Teniendo en cuenta lo anterior:

$$\begin{aligned} K^{2D}_{a,b}((x, L+D), T+\tau; (0,0), 0) &= \int_{-\infty}^{\infty} d\omega \chi_{[b-a,b+a]}(\omega) K^{2D}_0((x, L+D), T+\tau; (\omega, D), T) \\ &\quad \times K^{2D}_0((\omega, D), T; (0,0), 0) \\ &= \frac{e^{\frac{imL^2}{2\hbar\tau}}}{\sqrt{2\pi i\hbar\tau/m}} \frac{e^{\frac{imD^2}{2\hbar T}}}{\sqrt{2\pi i\hbar T/m}} \int_{b-a}^{b+a} \frac{e^{\frac{im\omega^2}{2\hbar T}}}{\sqrt{2\pi i\hbar T/m}} \frac{e^{\frac{im(x-\omega)^2}{2\hbar\tau}}}{\sqrt{2\pi i\hbar\tau/m}} d\omega \end{aligned}$$

Por tanto el propagador es el producto de dos propagadores independientes:

$$K_z(L+D, T+\tau; 0, 0) = \frac{e^{\frac{imL^2}{2\hbar\tau}}}{\sqrt{2\pi i\hbar\tau/m}} \frac{e^{\frac{imD^2}{2\hbar T}}}{\sqrt{2\pi i\hbar T/m}} \tag{2.63}$$

$$K_x(x, T+\tau; 0, 0) = \int_{b-a}^{b+a} \frac{e^{\frac{im\omega^2}{2\hbar T}}}{\sqrt{2\pi i\hbar T/m}} \frac{e^{\frac{im(x-\omega)^2}{2\hbar\tau}}}{\sqrt{2\pi i\hbar\tau/m}} d\omega \tag{2.64}$$

Una forma de comprobar que las ecuaciones (2.63) y (2.64) son correctas es ver que si quitamos las rendijas ($a \to \infty$) e integramos en D en el intervalo $(-\infty, \infty)$ recuperamos el propagador de una particula libre.

En lo que sigue nos vamos a dar a la tarea de mostrar que podemos expresar la amplitud en términos de las conocidas integrales de Fressnel, sabemos que $P(x;a,b) = |A(x;a,b)|^2$ y de (2.64):

$$A_1(x;a,b) = \int_{b-a}^{b+a} \frac{e^{\frac{im\omega^2}{2\hbar T}}}{\sqrt{2\pi i\hbar T/m}} \frac{e^{\frac{im(x-\omega)^2}{2\hbar\tau}}}{\sqrt{2\pi i\hbar\tau/m}} d\omega \tag{2.65}$$

Organicemos de una manera diferente el exponencial de la ecuación (2.65):

$$\begin{aligned}
\frac{m}{2\hbar\tau}(x-\omega)^2 + \frac{m\omega^2}{2\hbar\tau} &= \frac{m}{2\hbar}\left[\frac{1}{T}+\frac{1}{\tau}\right]\left[\omega^2 - \frac{2x\omega}{\left(\frac{\tau}{T}+1\right)} + \left(\frac{x}{\frac{\tau}{T}+1}\right)^2 - \left(\frac{x}{\frac{\tau}{T}+1}\right)^2\right] + \frac{mx^2}{2\hbar\tau} \\
&= \frac{m}{2\hbar}\left[\frac{1}{T}+\frac{1}{\tau}\right]\left[\omega - \frac{x}{1+\tau/T}\right]^2 + \frac{mx^2}{2\hbar}\left[\frac{1}{\tau} - \frac{T}{(\tau+T)\tau}\right] \\
&= \left[\frac{m}{2\hbar T}+\frac{m}{2\hbar\tau}\right]\left[\omega - \frac{x}{1+\tau/T}\right]^2 + \frac{mx^2}{2\hbar(T+\tau)} \qquad (2.66)
\end{aligned}$$

Por tanto reemplazando (2.66) en (2.65)

$$A_1(x;a,b) = \frac{e^{\frac{imx^2}{2\hbar(T+\tau)}}}{\sqrt{2\pi i\hbar(T+\tau)/m}} \int_{b-a}^{b+a} d\omega \sqrt{\frac{T+\tau}{2\pi\hbar T\tau/m}} \mathrm{Exp}\left\{\frac{i(T+\tau)}{2\hbar T\tau/m}\left(\omega - \frac{x}{1+\tau/T}\right)^2\right\} \tag{2.67}$$

Ahora si $\omega\prime = \sqrt{\frac{T+\tau}{\pi\hbar T\tau/m}}\left(\omega - \frac{x}{1+\tau/T}\right)$:

$$\Rightarrow A_1(x;a,b) = \frac{e^{\frac{imx^2}{2\hbar(T+\tau)}}}{\sqrt{2\pi i\hbar(T+\tau)/m}} \int_{\alpha_-(x)}^{\alpha_+(x)} d\omega\prime \sqrt{\frac{T+\tau}{2\pi\hbar T\tau/m}} \mathrm{Exp}\left\{\frac{i\pi\omega\prime^2}{2}\right\} \tag{2.68}$$

Donde $\alpha_\pm(x) = \sqrt{\frac{T+\tau}{\pi\hbar T\tau/m}}(b \pm a) - \frac{x}{\sqrt{\pi\hbar\tau/m}}\sqrt{\frac{T}{T+\tau}}$. Si descomponemos el exponencial de la ecuación (2.68) en su parte imaginaria y real, obtenemos las famosas integrales de Fressnel, definidas como:

$$C[u] \equiv \int_0^u d\omega Cos\left(\frac{\pi\omega^2}{2}\right) \quad ; \quad S[u] \equiv \int_0^u d\omega Sin\left(\frac{\pi\omega^2}{2}\right) \tag{2.69}$$

Así:

$$\begin{aligned}
A_1(x;a,b) &= \frac{e^{\frac{imx^2}{2\hbar(T+\tau)}}}{\sqrt{(2i)^2\pi\hbar(T+\tau)/m}} \\
&\times [C[\alpha_+(x;a.b)] - C[\alpha_-(x;a.b)] + iS[\alpha_+(x;a.b)] - iS[\alpha_-(x;a.b)]] \qquad (2.70) \\
A_2(x;a,b) &= A_1(x;a,-b) \qquad (2.71)
\end{aligned}$$

Para dos rendijas podemos calcular la amplitud total simplemente sumando:

$$A(x;a,b) = A_1(x;a,b) + A_2(x;a,b) \tag{2.72}$$

2.2.3. Difracción por una rendija.

En el caso de una sola rendija tenemos que $b = 0$, además recordando que $\lambda \approx \lambda_z = h/mv_z$; $v_z = L/\tau = D/T$, podemos escribir:

$$\alpha(x,a) = \sqrt{N_F(a)}\sqrt{1+L/D}\left[1 - \frac{x}{a(1+L/D)}\right] \quad ; \quad N_F(a) = 2a^2/\lambda L \tag{2.73}$$

Las integrales de Fressnel tienen un comportamiento diferente dependiendo del valor de $N_F(a)$:

$$C(\pm u) = \pm\frac{1}{2} + \frac{1}{\pi u} Sin\left(\frac{\pi u^2}{2}\right), \quad u \geq 1 \tag{2.74}$$

$$S(\pm u) = \pm\frac{1}{2} - \frac{1}{\pi u} Sin\left(\frac{\pi u^2}{2}\right), \quad u \geq 1 \tag{2.75}$$

Definiendo $\eta \equiv 1 + L/D$ y $\gamma = \eta - 1$, en el caso $\frac{x}{a\eta} - 1 \gg \frac{1}{\sqrt{N_F(a)\eta}}$ encontramos que:

$$\alpha(x,a) \ll -1 \tag{2.76}$$

$$\alpha(x,-a) \gg 1 \tag{2.77}$$

Por tanto:

$$C[\alpha(x,\pm a)] = \pm\frac{1}{2} + \frac{1}{\pi\alpha(x,\pm a)} Sin\left(\frac{\pi\alpha(x,\pm a)^2}{2}\right) \tag{2.78}$$

$$S[\alpha(x,\pm a)] = \pm\frac{1}{2} - \frac{1}{\pi\alpha(x,\pm a)} Sin\left(\frac{\pi\alpha(x,\pm a)^2}{2}\right) \tag{2.79}$$

Es fácil mostar que $C[\alpha_-(x,a,o)] = -C[\alpha(x,-a)]$ y $S[\alpha_-(x,a,o)] = -S[\alpha(x,-a)]$, con esto, y usando la ecuación (2.70):

$$P^{(1\text{rendija})}(x;a,b) = |A(x;a,b)|^2 =$$
$$\tfrac{1}{2\lambda(L+D)}\left([C(\alpha(x,a)) + C(\alpha(x.-a))]^2 + [S(\alpha(x.a)) + S(\alpha(x.-a))]^2\right) \tag{2.80}$$

Usando las ecuaciones (2.78),(2.79) y (2.80) encontramos:

$$P^{(1\text{rendija})}(x,a) \simeq \frac{2\gamma}{\pi^2\eta^2}\left(\frac{a^2}{\left(\frac{x^2}{\eta^2} - a^2\right)^2} + \frac{1}{\left(\frac{x^2}{\eta^2} - a^2\right)}\text{Sin}^2\left(\pi N_F(a)\frac{x}{a}\right)\right) \tag{2.81}$$

En el límite $N_F(a) \ll 1 \Rightarrow \frac{x}{\eta} \gg a$,tenemos la siguiente aproximación:

$$P^{(1\text{rendija})}(x,a) \simeq \frac{2\gamma}{\pi^2 x^2}\text{Sin}^2\left(\pi N_F(a)\frac{x}{a}\right) \tag{2.82}$$

Este límite es conocido como el regimen de Fraunhofer (Pantalla lejana), Figura 2.9. Es importante recalcar que en el regimen intermedio ($N_F(a) \approx 1$), las aproximaciones (2.81) y (2.82) siguen siendo válidas. Sin embargo para $N_F(a) \ll 1$, obtenemos diferentes

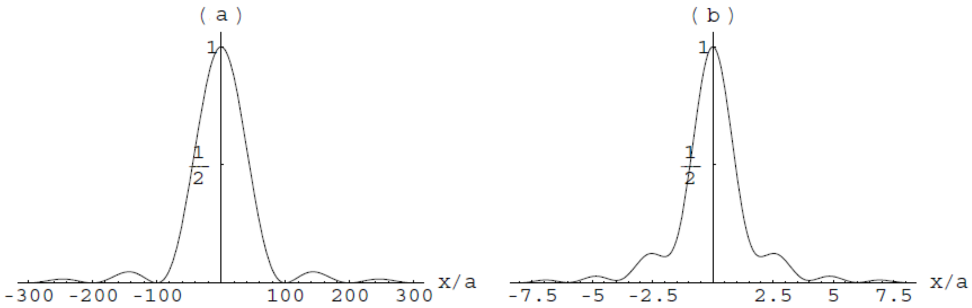


FIGURA 2.9: Curva de difracción para una sola rendija, en la figura (a) $N_F(a) = 0{,}01$, en (b) $N_F(a) = 0{,}5$. Tomado de [1]

aproximaciones asintóticas:

$$P^{(1\text{rendija})}(x) \simeq \frac{\gamma}{\eta}\left(\frac{\sqrt{N_F(a)}}{2a} + \frac{\text{Sin}\left(\frac{\pi}{2}N_F(a)\eta\left(1-\frac{x}{a\eta}\right)^2\right)}{2\pi\sqrt{\eta}\left(a-\frac{x}{\eta}\right)} + \frac{\text{Sin}\left(\frac{\pi}{2}N_F(a)\eta\left(1+\frac{x}{a\eta}\right)^2\right)}{2\pi\sqrt{\eta}\left(a+\frac{x}{\eta}\right)}\right)^2$$
$$+\frac{\gamma}{\eta}\left(\frac{\sqrt{N_F(a)}}{2a} - \frac{\text{Cos}\left(\frac{\pi}{2}N_F(a)\eta\left(1-\frac{x}{a\eta}\right)^2\right)}{2\pi\sqrt{\eta}\left(a-\frac{x}{\eta}\right)} - \frac{\text{Cos}\left(\frac{\pi}{2}N_F(a)\eta\left(1+\frac{x}{a\eta}\right)^2\right)}{2\pi\sqrt{\eta}\left(a+\frac{x}{\eta}\right)}\right)^2, \ |x| < a\eta \quad (2.83)$$

$$P^{(1\text{rendija})}(x,a) \simeq \frac{2\gamma}{\pi^2\eta^2}\left(\frac{a^2}{\left(\frac{x^2}{\eta^2}-a^2\right)^2} + \frac{1}{\left(\frac{x^2}{\eta^2}-a^2\right)}\text{Sin}^2\left(\pi N_F(a)\frac{x}{a}\right)\right), \ |x| > a\eta \quad (2.84)$$

Esto se debe a que las aproximaciones asintóticas tienen el siguiente comportamiento:

$$\alpha(x, \pm a) \gg 1, \ \text{ si } \ N_F(a) \gg 1 \ \text{ y } \ |x| < a\eta \quad (2.85)$$

$$\pm\alpha(x, \mp a) \gg 1, \ \text{ si } \ N_F(a) \gg 1 \ \text{ y } \ |x| > a\eta \quad (2.86)$$

La función (2.83) oscila rápidamente alrededor del valor constante $N_F(a)\gamma/2a^2\eta = 1/(\lambda_z(L+D))$ en $|x| < a\eta$ y la función (2.84) decrece rapidamente a 0 en $|x| > a\eta$. La curva de difracción se muestra en la figura 2.10.

2.2.4. Interferencia y difracción por dos rendijas.

Podemos calcular la curva de difracción para dos rendijas usando la siguiente expresión:

$$P^{(2\text{rendija})}(x; a, b) = P_1(x; a, b) + P_2(x; a, b) + I_{12}(x; a, b) \quad (2.87)$$

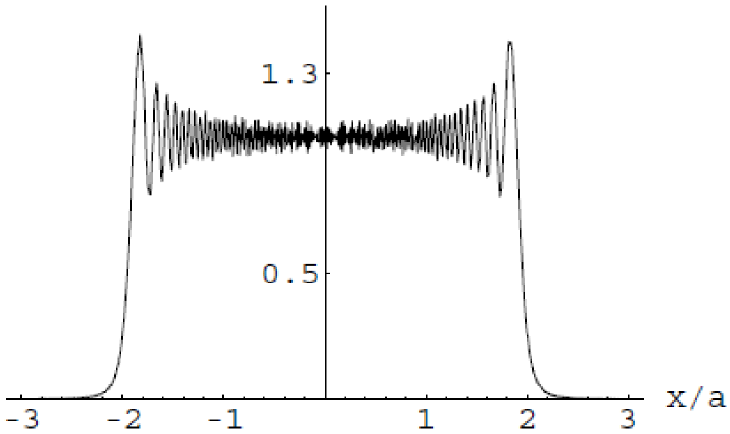


FIGURA 2.10: Curva de difracción para una sola rendija, en la figura $N_F(a) = 100$. Tomado de [1]

donde:

$$\begin{aligned} P_1(x;a,b) &= |A_1(x;a,b)|^2 \\ &= \frac{\gamma}{2\lambda L\eta}([C(\alpha_+(x;a,b) - C(\alpha(x;a,b))]^2 + [S(\alpha_+(x;a,b) - S(\alpha(x;a,b))]^2) \\ P_2(x;a,b) &= |A_2(x;a,b)|^2 = P_1(x;a,-b) \end{aligned} \tag{2.88}$$

Y el término de interferencia:

$$\begin{aligned} I_{12}(x;a,b) &= A_1(x;a,b)A_2(x;a,b)^* + A_2(x;a,b)A_1(x;a,b)^* \\ &= \frac{\gamma}{\lambda L\eta}([C(\alpha_+(x;a,b) - C(\alpha(x;a,b))][C(\alpha_+(x;a,-b) - C(\alpha(x;a,-b))] \\ &+ [S(\alpha_+(x;a,b) - S(\alpha(x;a,b))][S(\alpha_+(x;a,-b) - S(\alpha(x;a,-b))]) \end{aligned} \tag{2.89}$$

Hay que notar que en el caso de dos rendijas hay un término adicional, llamado el *término de interferencia*, este es similar al encontrado en óptica. Esto resulta en un efecto de modulación de la curva de difracción dada por la suma de los términos de la ecuación (2.88).

Definamos los numeros de Fressnel:

$$N_F(a) \equiv 2a^2/\lambda_z L; \quad N_F(b) \equiv 2b^2/\lambda_z L; \quad N_F \equiv 2ab/\lambda_z L = \sqrt{N_F(a)N_F(b)/2} \tag{2.90}$$

En el caso de dos rendijas de ancho $2a$ y separadas por una distancia $2b$, en el caso en que $b \gg a$ tenemos los siguientes comportamientos, que se dividen en dos fases:

- Si $N_F \ll 1$, estamos en la *fase mezclada*, es decir, encontramos una curva de interferencia modulada por la curva de difración de una rendija de tamaño a. En este caso estamos en el regimen de Fressnel, $N_F(a) \ll 1$. Este se muestra en la figura 2.11(a).

- Si $N_F \gg 1$, estamos en la *fase separada*,es decir, hay dos curvas de interferencia, moduladas por las curvas de difracción correspondientes a cada rendija, cada curva centrada en $\pm b\eta$. La forma de las curvas de difracción dependen de $N_F(a)$ y son similares al caso de una rendija (donde teniamos dos regímenes establecidos: Fressnel y Fraunhofer). En la figura 2.11(c), $N_F(a) \ll 1$ y en la figura 2.11(d) $N_F(a) \gg 1$.

- Si $N_F \sim 1$ observamos una separación entre dos curvas de interferencia, moduladas por una curva de difracción que corresponde al de una rendija en el caso de regimen intermedio, esto se muestra en la figura 2.11(b).

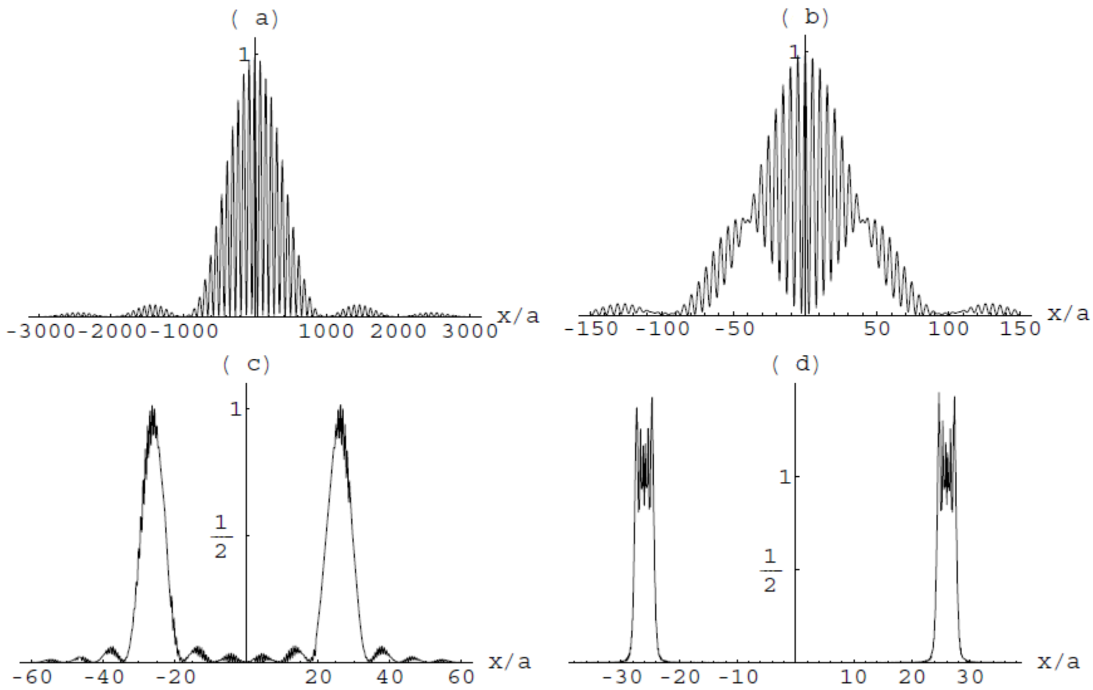


FIGURA 2.11: Curva de difracción para dos rendijas, en la figura $N_F(a) = 0{,}001$ para (a), 0.015 para (b), 0.12 para (c), 6 para (d) . Tomado de [1]

2.3. Campos escalares.

En analogía con lo estudiado en la sección anterior para una partícula, definimos la transición vacío-vacío en presencia de una fuente $J(x)$ para un campo $\phi(x)$ como:

$$Z[J] = \int \mathcal{D}\phi \text{Exp}\left\{ i \int d^4x \left[\mathcal{L}(\phi) + J(x)\phi(x) + \frac{i}{2}\epsilon\phi^2(x) \right] \right\} \tag{2.91}$$

En este caso en vez de dividir el espacio-tiempo en segmentos, dividimos el espacio 4 dimensional (4D) de Minkowski en hipervolúmenes (4D) asumiendo que en cada uno de estos volúmenes $\phi(x)$ es constante. Si $\mathcal{L} = \mathcal{L}(Klein - Gordon) = \frac{1}{2}(\partial_\mu\phi\partial^\mu\phi - m^2\phi^2)$, tenemos:

$$Z_0[J] = \int \mathcal{D}\phi \text{Exp}\left\{ i \int d^4x \left[\frac{1}{2}(\partial_\mu\phi\partial^\mu\phi - (m^2 - i\epsilon)\phi^2)) + J\phi \right] \right\} \tag{2.92}$$

Ahora como $\int \partial_\mu\phi\partial^\mu\phi = \int \partial_\mu(\phi\partial^\mu\phi) - \int \phi\Box\phi = 0 - \int \phi\Box\phi$, donde hemos usado que la primera integral es una cuadridivergencia y puede ser expresada como una integral de superficie, y poniendo la condición de frontera de que los campos se anulan en el borde, este término es cero. Por tanto (2.92) queda:

$$Z_0[J] = \int \mathcal{D}\phi \text{Exp}\left\{ -i \int d^4x \left[\frac{1}{2}(\phi\Box\phi + (m^2 - i\epsilon)\phi^2)) - J\phi \right] \right\} \tag{2.93}$$

El campo $\phi(x)$ no satisface la ecuacion de K-G. Para evaluar $Z_0[J]$ separemos $\phi(x)$:

$$\phi \to \phi(x) + \phi_0(x) \tag{2.94}$$

Se puede probar fácilmente que $\int \phi_0(\Box + m^2 - i\epsilon)\phi = \int \phi(\Box + m^2 - i\epsilon)\phi_0$, por tanto:

$$\begin{aligned} \int d^4x \left[\frac{1}{2}\phi(\Box + m^2 - i\epsilon)\phi - J\phi \right] &\to \int d^4x[\tfrac{1}{2}\phi(\Box + m^2 - i\epsilon)\phi + \phi(\Box + m^2 - i\epsilon)\phi_0 \\ &+ \tfrac{1}{2}\phi_0(\Box + m^2 - i\epsilon)\phi_0 - J\phi - J\phi_0] \end{aligned} \tag{2.95}$$

Si escogemos ahora ϕ_0 tal que satisfaga:

$$(\Box + m^2 - i\epsilon)\phi_0(x) = J(x) \tag{2.96}$$

Entonces (2.95) queda como:

$$\int d^4x \left[\frac{1}{2}\phi(\Box + m^2 - i\epsilon)\phi - \frac{1}{2}J\phi_0 \right] \tag{2.97}$$

La solución a (2.96) es:

$$\phi_0(x) = -\int \triangle_F(x-y)J(y)d^4y \tag{2.98}$$

Donde $\triangle_F(x-y)$, llamado el propagador de Feynmann, es la función de green del operador $(\Box + m^2 - i\epsilon)$ y cumple:

$$(\Box + m^2 - i\epsilon)\triangle_F(x) = -\delta^4(x) \tag{2.99}$$

Con todo lo anterior podemos escribir $Z_0[J]$ como:

$$Z_0[J] = \text{Exp}\left\{-\frac{i}{2}\int d^4xd^4yJ(x)\triangle_F(x-y)J(y)\right\}\int \mathcal{D}\phi\text{Exp}\left\{-\frac{i}{2}\int d^4x\left[\frac{1}{2}(\phi(\Box + m^2 - i\epsilon)\phi\right]\right\} \tag{2.100}$$

Por tanto hemos logrado separar el funcional generatriz en dos partes, una que depende unicamente de $J(x)$ y otra de $\phi(x)$, esta última de hecho es simplemente un número que llamaremos $\mathcal{N}$, así:

$$Z_0[J] = \mathcal{N}\text{Exp}\left\{-\frac{i}{2}\int d^4xd^4yJ(x)\triangle_F(x-y)J(y)\right\} \tag{2.101}$$

2.3.1. Integración funcional.

Vamos a generalizar la fórmula de integración Gaussiana a n variables discretas para luego analizar este tipo de fórmulas en el caso de cálculo funcional. Sabemos que

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{1}{2}ax^2}dx = \left(\frac{2\pi}{a}\right)^{1/2} \Rightarrow \int \text{Exp}\left(-\frac{1}{2}\sum a_n x_n^2\right)dx_1...dx_n = \frac{(2\pi)^{n/2}}{\prod_{i=1}^n a_i^{1/2}} \tag{2.102}$$

Sea A una matriz diagonal y x un vector, el producto escalar de Ax y x es $(x, Ax) = \sum_n a_n x_n^2$ y $det(A) = \prod_{i=1}^n a_i$. Por tanto podemos escribir (2.102) como:

$$\int \text{Exp}\left[-\frac{1}{2}(x, Ax)\right]d^nx = (2\pi)^{n/2}(detA)^{-1/2} \tag{2.103}$$

Si definimos la medida $dx = d^nx(2\pi)^{-n/2}$, tenemos:

$$\int \text{Exp}\left[-\frac{1}{2}(x, Ax)\right]dx = (detA)^{-1/2} \tag{2.104}$$

Esta ecuación puede ser extendida a formas cuadráticas $Q(x) = \frac{1}{2}(x, Ax) + (b, x) + c$.En este caso tenemos:

$$\int \text{Exp}\left[-\frac{1}{2}\left\{(x, Ax) + (b, x) + c\right\}\right]dx = \text{Exp}\left[\frac{1}{2}(b, A^{-1}b) - c\right]det(A)^{-1/2} \tag{2.105}$$

La generalización funcional de la ecuación (2.104) es:

$$\int \mathcal{D}\phi \text{Exp}\left[-\frac{1}{2}\int \phi(x)A\phi(x)dx\right] = (detA)^{-1/2} \tag{2.106}$$

Así si partimos de $Z_0[J] = \int \mathcal{D}\phi \text{Exp}\left\{-i\int\left[\frac{1}{2}\phi(\Box + m^2 - i\epsilon)\phi - J\phi\right]d^4x\right\}$ y aplicando (2.105),(2.106) con $A = i(\Box + m^2 - i\epsilon)$, $b = -iJ(x)$,$c = 0$. Tenemos:

$$Z_0[J] = \text{Exp}\left[\frac{i}{2}\int J(x)(\Box + m^2 - i\epsilon)^{-1}J(y)dxdy\right]det(i(\Box + m^2 - i\epsilon))^{-1/2} \tag{2.107}$$

Como sabemos $(\Box + m^2 - i\epsilon)^{-1} = -\triangle_F(x-y)$ y con la ecuación (2.106):

$$Z_0[J] = \text{Exp}\left\{-\frac{i}{2}\int d^4xd^4yJ(x)\triangle_F(x-y)J(y)\right\}\int \mathcal{D}\phi \text{Exp}\left\{-\frac{i}{2}\int d^4x\left[\frac{1}{2}(\phi(\Box + m^2 - i\epsilon)\phi\right]\right\} \tag{2.108}$$

Esta es la misma ecuación que (2.100)!

2.3.2. Funciones de Green de la partícula libre.

Expandamos la amplitud de transición en serie:

$$Z_0[J] = \mathcal{N}\left\{1 - \frac{i}{2}\int dxdyJ(x)\triangle_F(x-y)J(y) + \frac{1}{2!}\left(\frac{i}{2}\right)^2\left[\int d^4xd^4yJ(x)\triangle_F(x-y)J(y)\right]^2 + ...\right\} \tag{2.109}$$

Introduciendo la transformada de Fourier de $J(x)$ tenemos:

$$J(x) = \int J(p)e^{-ip\cdot x}d^4p \tag{2.110}$$

Entonces,teniendo en cuenta que para abreviar hemos escrito los diferenciales en el cuadrivolumen como $d^4h \equiv dh$, tenemos:

$$\begin{aligned}
-\frac{i}{2}\int J(x)\triangle_F(x-y)J(y)dxdy &= -\frac{i}{2(2\pi)^4}\int \frac{J(p_1)e^{-ip_1\cdot x}J(p_2)e^{-ip_2\cdot y}e^{-ik(x-y)}dxdydkdp_1dp_2}{k^2 - m^2 + i\epsilon} \\
&= -\frac{i}{2(2\pi)^4}\int \frac{J(p_1)J(p_2)e^{-ix(p_{1+k})}e^{-iy(p_2-k)}dxdydkdp_1dp_2}{k^2 - m^2 + i\epsilon} \\
\text{Integrando en x,y} & \\
&= -\frac{i(2\pi)^8}{2(2\pi)^4}\int \frac{J(p_1)J(p_2)\delta(p_1+k)\delta(p_2-k)dkdp_1dp_2}{k^2 - m^2 + i\epsilon} \\
&= -\frac{i(2\pi)^4}{2}\int \frac{J(k)J(-k)d^4k}{k^2 - m^2 + i\epsilon}
\end{aligned} \tag{2.111}$$

Si identificamos la expresión anterior mediante las reglas de la figura 2.12, entonces la integral (2.111) puede ser identificada con el diagrama que aparece en la figura 2.13:

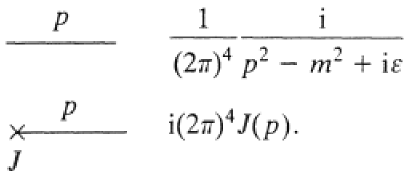
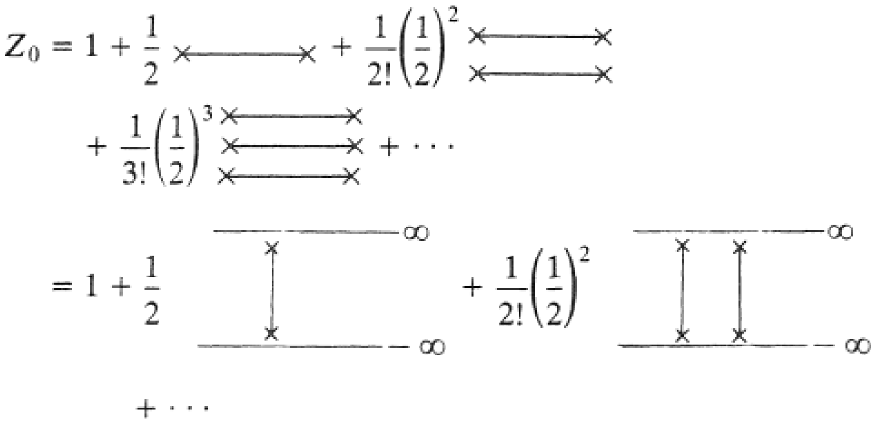


Figura 2.12: Diagrama de Feynmann segunda cuantización

Figura 2.13: Representación de (2.111)

Por tanto finalmente:



(2.112)

Podemos interpretar esta serie como la propagación y posterior aniquilación de una partícula entre fuentes, de dos partículas entre fuentes y así sucesivamente. Tenemos por tanto una teoría de muchos cuerpos, lo cual es consistente con nuestra idea inicial de utilizar un campo. Cada término en la serie es una función de Green por tanto $Z_0[J]$ es llamada un *funcional generatriz* para las funciones de Green de la teoría.

Para entender esto analicemos la expansión en series de un funcional, primero recordemos la expansion en series de una funcion de k variables $F(y_1, ..., y_k)$:

$$F\{y\} = F(y_1, .., y_k) = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{i_1}^{k} ... \sum_{i_n}^{k} \frac{1}{n!} T_n(i_1, ..., i_n) y_{i_1} ... y_{i_n} \tag{2.113}$$

Donde

$$T_n(i_1, ..., i_n) = \frac{\partial F\{y\}}{\partial y_1 ... \partial y_n}|_{y=0} \tag{2.114}$$

Yendo al caso de muchas variables continuas $i \to x_1, y_i \to y(x), \sum_i \to \int dx$, entonces obtenemos la serie de potencias de un funcional:

$$F[y] = \sum_{n=0}^{\infty} \int dx_1 ... dx_n \frac{1}{n!} T_n(x_1, ..., x_n) y(x_1) ... y(x_n) \tag{2.115}$$

Y en este caso:

$$T_n(x_1, ..., x_n) = \frac{\delta}{\delta y(x_1)} ... \frac{\delta}{\delta y(x_n)} F[y]|_{y=0} \tag{2.116}$$

Y $F[y]$ es llamado el *funcional generatriz* de las funciones $T_n(x_1, ..., x_n)$. Si escogemos una normalización tal que $Z_0[J]|_{J=0} = 1 \Rightarrow \mathcal{N} = 1$, por tanto:

$$Z_0[J] = \text{Exp}\left\{-\frac{i}{2}\int dxdy J(x) \triangle_F(x-y) J(y)\right\} \tag{2.117}$$

Asi $Z_0[J]$ es el funcional generatriz de:

$$\tau(x_1, ..., x_n) = \frac{1}{i^n} \frac{\delta^n Z_o[J]}{\delta J(x_1) ... \delta J(x_n)}|_{J=0} \tag{2.118}$$

En analogía con la ecuación (2.56) tenemos:

$$\frac{\delta^n Z_o[J]}{\delta J(x_1) ... \delta J(x_n)}|_{J=0} = i^n \langle 0 | T[\phi(x_1) ... \phi(x_n)] | 0 \rangle \tag{2.119}$$

Entonces:

$$\tau(x_1, ..., x_n) = \langle 0 | T[\phi(x_1) ... \phi(x_n)] | 0 \rangle \tag{2.120}$$

A las funciones $\tau(x_1, ..., x_n)$ se les llama funciones de Green o funciones de n-puntos, calculemos algunas, empecemos con la función de 2-puntos:

$$\tau(x, y) = -\frac{\delta^2 Z_0[J]}{\delta J(x) \delta J(y)}|_{J=0} \tag{2.121}$$

$$\begin{aligned}
\Rightarrow \frac{1}{i}\frac{\delta Z_0[J]}{\delta J(x)} &= -\int \triangle_F(x - x_1) J(x_1) \times \text{Exp}\left\{-\frac{i}{2}\int dxdy \triangle_F(x_1 - x_2) J(x_1) J(x_2)\right\} \\
&= -\int \triangle_F(x - x_1) J(x_1) \times \text{Exp}\left\{\frac{-i}{2}\int J \triangle_F J\right\} \\
\Rightarrow \frac{1}{i}\frac{\delta}{\delta J(y)}\frac{1}{i}\frac{\delta Z_0[J]}{\delta J(x)} &= \int \triangle_F(x - x_1) J(x_1) \int \triangle_F(y - x_1) J(x_1) \times \text{Exp}\left\{\frac{-i}{2}\int J \triangle_F J\right\} \\
&\quad + i \triangle_F(x - y) \times \text{Exp}\left\{\frac{-i}{2}\int J \triangle_F J\right\}
\end{aligned} \tag{2.122}$$

Evaluando en $J = 0$ la expresión (2.122) tenemos:

$$\tau(x, y) = i \triangle_F(x - y) \tag{2.123}$$

Pero, ¿cuál es el significado físico de esta expresión? Sabemos que:

$$\tau(x,y) = \langle 0|T[\phi(x)\phi(y)]|0\rangle = \Theta(x_0 - y_0)\langle 0|\phi(x)\phi(y)|0\rangle + \Theta(y_0 - x_0)\langle 0|\phi(y)\phi(x)|0\rangle \tag{2.124}$$

Si descomponemos el campo $\phi(x)$ como:

$$\phi^{(+)}(x) = \int \frac{d^3k}{[(2\pi)^3 2\omega_k]^{1/2}} f_k(x)a(k) \tag{2.125}$$

$$\phi^{(-)}(x) = \int \frac{d^3k}{[(2\pi)^3 2\omega_k]^{1/2}} f_k^*(x)a^\dagger(k) \tag{2.126}$$

Y reemplazamos en (2.125), la expresión que sobrevive es:

$$\tau(x,y) = \Theta(x_0 - y_0)\langle 0|\phi^{(+)}(x)\phi^{(-)}(y)|0\rangle + \Theta(y_0 - x_0)\langle 0|\phi^{(+)}(y)\phi^{(-)}(x)|0\rangle \tag{2.127}$$

Estas son las amplitudes para un partícula que es creada en el evento (y_0, y), se propaga y es posteriormente destruida en (x_0, x) o una partícula que es creada en el evento (x_0, x), se propaga y es posteriormente destruida en (y_o, y). Lo anterior se ve representado en la figura 2.14.

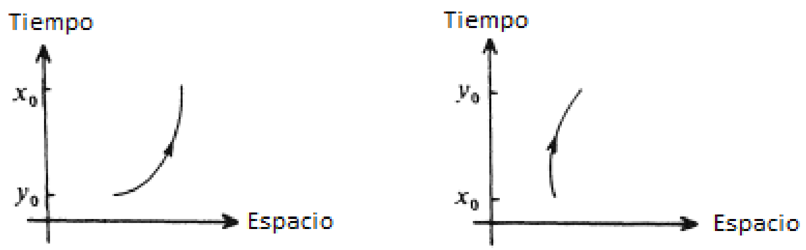


FIGURA 2.14: Representación gráfica de la ecuación 2.127

Es claro ahora que la función de 1-punto es:

$$\tau(x) = \langle 0|\phi(x)|0\rangle = 0 \tag{2.128}$$

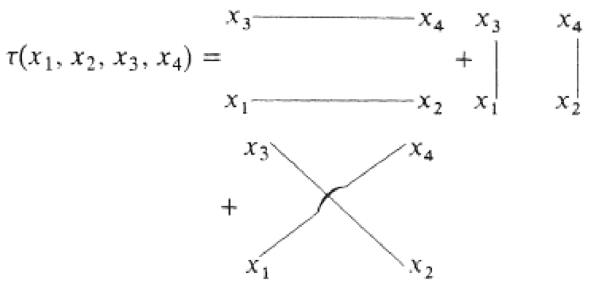
Calculemos entonces la función de 3-puntos, partiendo de (2.122):

$$\begin{aligned}
\left(\frac{1}{i}\right)^3 \frac{\delta}{\delta J_1}\frac{\delta}{\delta J_2}\frac{\delta}{\delta J_3} Z_0[J] &= -i\triangle_F(x_3-x_2)\int \triangle_F(x_1-x)J(x)dx \mathrm{Exp}\left\{\frac{-i}{2}\int J\triangle_F J\right\} \\
&\quad -i\triangle_F(x_2-x_1)\int \triangle_F(x_3-x)J(x)dx \mathrm{Exp}\left\{\frac{-i}{2}\int J\triangle_F J\right\} \\
&\quad -i\triangle_F(x_3-x_1)\int \triangle_F(x_2-x)J(x)dx \mathrm{Exp}\left\{\frac{-i}{2}\int J\triangle_F J\right\} \\
&\quad -\int \triangle_F(x_3-x)J(x)dx \int \triangle_F(x_2-x)J(x)dx \\
&\quad \times\int \triangle_F(x_1-x)J(x)dx \mathrm{Exp}\left\{\frac{-i}{2}\int J\triangle_F J\right\} \qquad (2.129)
\end{aligned}$$

Si evaluamos en $J=0$ la ecuación (2.129) vemos que $\tau(x_1,x_2,x_3)=0$. Para encontrar la función de 4-puntos derivamos de nuevo, los términos que sobreviven al hacer $J=0$ son:

$$\begin{aligned}
\tau(x_1,x_2,x_3,x_4) &= \langle 0|T[\phi(x_1)\phi(x_2)\phi(x_3)\phi(x_4)]|0\rangle \\
&\quad -[\triangle_F(x_3-x_2)\triangle_F(x_1-x_4) \\
&\quad +\triangle_F(x_2-x_1)\triangle_F(x_3-x_4) \\
&\quad +\triangle_F(x_3-x_1)\triangle_F(x_2-x_4)] \qquad (2.130)
\end{aligned}$$

Esto es el producto de funciones de 2-puntos:



(2.131)

Así uno puede darse cuenta que si n es impar la función de n-puntos se anula y si es par, es la suma de los productos de las diferentes permutaciones de funciones de 2-puntos.

2.3.3. Funcional generatriz para campos interactuantes.

Ahora debemos lidiar con el problema de encontrar el funcional generatriz para el caso de una teoría con términos de interacción en $\mathcal{L}$, en general para campos escalares $\mathcal{L} =$

$\frac{1}{2}\left[\partial_\mu\phi\partial^\mu\phi - m^2\phi^2\right] + \mathcal{L}_{int}$. El funcional generatriz normalizado, con $S = \int \mathcal{L}dx$ es:

$$\frac{\int \mathcal{D}\phi \text{Exp}\left(iS + \int J\phi dx\right)}{\int \mathcal{D}\phi \text{Exp}\left(iS\right)} \tag{2.132}$$

Por tanto queremos encontrar la ecuación diferencial que obedece $Z[J]$ y resolverla en términos de $Z_0[J]$. Para esto primero veamos la ecuación diferencial que satiscace $Z_0[J]$. Sabemos que:

$$\frac{1}{i}\frac{\delta Z_0[J]}{\delta J(x)} = -\int \triangle_F(x-y)J(y)dy\text{Exp}\left\{\frac{-i}{2}\int J\triangle_F J dxdy\right\} \tag{2.133}$$

Por tanto si aplicamos$(\Box + m^2)$ a izquierda y derecha de (2.133), tenemos:

$$(\Box + m^2)\frac{1}{i}\frac{\delta Z_0[J]}{\delta J(x)} = J(x)Z_0[J] \tag{2.134}$$

Esta es la ecuación diferencial que buscabamos, si definimos el funcional $\hat{Z}_0[\phi] = \frac{e^{iS}}{\int \mathcal{D}\phi e^{iS}}$, notamos que:

$$Z[J] = \int \mathcal{D}\phi\hat{Z}[\phi]\text{Exp}\left\{i\int J\phi dx\right\} \tag{2.135}$$

Esta última ecuación define el análogo funcional a la transformada de Fourier, si hacemos la derivada funcional de $\hat{Z}_0[\phi]$ obtenemos:

$$i\frac{\delta\hat{Z}[\phi]}{\delta\phi} = \left\{(\Box + m^2)\phi - \frac{\partial\mathcal{L}_{int}}{\partial\phi}\right\}\hat{Z}[\phi] \tag{2.136}$$

Si en el lado derecho de la ecuacion (2.135) multiplicamos por $\text{Exp}[i\int J\phi dx]$, integramos en $\phi(x)$ y cambiamos $\phi \to \frac{1}{i}\frac{\delta}{\delta J}$, conseguimos la siguiente ecuación:

$$RHS(1{,}135) = \left\{(\Box + m^2)\frac{1}{i}\frac{\delta}{\delta J} - \mathcal{L}_{int}\prime\left[\frac{1}{i}\frac{\delta}{\delta J}\right]\right\}Z[J] \tag{2.137}$$

Si hacemos lo mismo en el lado izquierdo nos queda:

$$\begin{aligned} LHS(2{,}135) = i\int \mathcal{D}\phi\frac{\delta\hat{Z}[\phi]}{\delta\phi}\text{Exp}\left(i\int J\phi dx\right) &= i\hat{Z}[\phi]\text{Exp}\left(i\int J\phi dx\right) \\ &+ \int \mathcal{D}\phi J(x)\hat{Z}[\phi]\text{Exp}\left(i\int J\phi dx\right) \end{aligned} \tag{2.138}$$

El primer término del lado derecho de la ecuación (2.138) es un término de superficio, por tanto se anula. Por tanto, la ecuación que cumple $Z[J]$ es:

$$\left\{(\Box + m^2)\frac{1}{i}\frac{\delta}{\delta J} - \mathcal{L}_{int}\prime\left[\frac{1}{i}\frac{\delta}{\delta J}\right]\right\} Z[J] = J(x)Z[J] \tag{2.139}$$

Vamos a probar que la solución de esta ecuación es:

$$Z[J] = \mathcal{N}\text{Exp}\left[i\int \mathcal{L}_{int}\left(\frac{1}{i}\frac{\delta}{\delta J(x)}\right)dx\right] Z_0[J] \tag{2.140}$$

Para esto primero obtengamos la siguiente identidad:

$$\text{Exp}\left[-i\int \mathcal{L}_{int}\left(\frac{1}{i}\frac{\delta}{\delta J(y)}\right)dy\right] J(x)\text{Exp}\left[i\int \mathcal{L}_{int}\left(\frac{1}{i}\frac{\delta}{\delta J(y)}\right)dy\right] = J(x) - \mathcal{L}_{int}\prime\left[\frac{1}{i}\frac{\delta}{\delta J(x)}\right] \tag{2.141}$$

Sabemos que el conmutador $\left[J(x), \frac{1}{i}\frac{\delta}{\delta J(y)}\right] = i\delta(x-y) \Rightarrow \left[J(x), \frac{1}{i}\frac{\delta^n}{\delta J^n(y)}\right] = i\delta(x-y)n\left(\frac{1}{i}\frac{\delta}{\delta J(y)}\right)^{n-1}$, con esto podemos calcular:

$$\begin{aligned}
\left[J(x), \int F\left(\frac{1}{i}\frac{\delta}{\delta J(y)}\right)dy\right] &= \left[J(x), \int\left\{F[0] + \frac{1}{i}\frac{\delta}{\delta J(y)}F\prime[0] + ... + \left(\frac{1}{i}\frac{\delta}{\delta J(y)}\right)^n \frac{F^n[0]}{n!}\right\}dy\right] \\
&= \left[J(x), \int\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}\left(\frac{1}{i}\frac{\delta}{\delta J(y)}\right)^n F^n[0]\right] \\
&= \sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}\int i\delta(x-y)n\left(\frac{1}{i}\frac{\delta}{\delta J(y)}\right)^{n-1}F^n[0]dy \\
&= i\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k!}\left(\frac{1}{i}\frac{\delta}{\delta J(y)}\right)^k F^{k+1}[0] = iF\prime\left(\frac{1}{i}\frac{\delta}{\delta J(y)}\right)
\end{aligned} \tag{2.142}$$

De la formula de Hausdorff tenemos que:

$$e^A B e^{-A} = B + [B, A] + \frac{1}{2!}[A, [A, B]] + ... \tag{2.143}$$

Si $A = -i\int \mathcal{L}_{int}\left(\frac{1}{i}\frac{\delta}{\delta J(y)}\right)dy$ y $B = J(x)$, tenemos que sólo los dos primeros términos de la ecuación (2.143) contribuyen y usando el resultado de (2.142) obtenemos:

$$\text{Exp}\left[-i\int \mathcal{L}_{int}\left(\frac{1}{i}\frac{\delta}{\delta J(y)}\right)dy\right] J(x)\text{Exp}\left[i\int \mathcal{L}_{int}\left(\frac{1}{i}\frac{\delta}{\delta J(y)}\right)dy\right] = J(x) - \mathcal{L}_{int}\prime\left[\frac{1}{i}\frac{\delta}{\delta J(x)}\right] \tag{2.144}$$

Ahora veamos lo siguiente:

$$J(x)Z[J] = \mathcal{N}J(x)\text{Exp}\left[i\int \mathcal{L}_{int}\left(\frac{1}{i}\frac{\delta}{\delta J(x)}\right)dx\right] Z_0[J] \tag{2.145}$$

Si hacemos el siguiente truco para introducir:

$$1 = \mathrm{Exp}\left[i\int \mathcal{L}_{int}\left(\frac{1}{i}\frac{\delta}{\delta J(x)}\right)dx\right] \times \mathrm{Exp}\left[-i\int \mathcal{L}_{int}\left(\frac{1}{i}\frac{\delta}{\delta J(x)}\right)dx\right] \tag{2.146}$$

$$\begin{aligned}\Rightarrow J(x)Z[J] &= \mathcal{N}\mathrm{Exp}\left[i\int \mathcal{L}_{int}\left(\frac{1}{i}\frac{\delta}{\delta J(x)}\right)dx\right] \times \left[J(x) - \mathcal{L}_{int'}\left[\frac{1}{i}\frac{\delta}{\delta J(x)}\right]\right] Z_0[J] \\ &= \mathcal{N}\mathrm{Exp}\left[i\int \mathcal{L}_{int}\left(\frac{1}{i}\frac{\delta}{\delta J(x)}\right)dx\right](\Box + m^2)\frac{1}{i}\frac{\delta Z_0[J]}{\delta J(x)} \\ &\quad -\mathcal{N}\mathrm{Exp}\left[i\int \mathcal{L}_{int}\left(\frac{1}{i}\frac{\delta}{\delta J(x)}\right)dx\right]\mathcal{L}_{int'}\left[\frac{1}{i}\frac{\delta}{\delta J(x)}\right] Z_0[J]\end{aligned} \tag{2.147}$$

Así:

$$\left\{(\Box + m^2)\frac{1}{i}\frac{\delta}{\delta J} - \mathcal{L}_{int'}\left[\frac{1}{i}\frac{\delta}{\delta J}\right]\right\} Z[J] = J(x)Z[J] \tag{2.148}$$

Esta es la ecuación diferencial que teníamos al principio (2.139), por tanto la propuesta (2.140) es correcta.

2.4. Campos fermiónicos.

En la aproximación de cuantización canónica el campo $\psi(x)$ es tratado como un operador que obedece relaciones de anticonmutación a tiempos iguales, $\psi(x), \bar{\psi}(y)|_{x0=y0} = i\delta(x-y)$. Por otro lado en la aproximación funcional, el funcional generatriz es una integral funcional sobre los campos, para el caso de campos escalares estos son tratados como funciones que llevan números complejos a números complejos y conmutan. En el caso de campos fermiónicos es necesario que los campos sean funciones de números complejos anticonmutantes, estos números se conocen como *variables de Grassmann.*

Los generadores C_i de un álgebra de Grassmann n-dimensional cumplen la relacion:

$$C_i, C_j = 0 \Rightarrow C_i^2 = 0 \tag{2.149}$$

En el caso 1-D la expansión en series de una función solo tiene dos términos $f(c) = a+bC$. La diferenciación es de dos tipos, izquierda y derecha:

$$\frac{\partial^L}{\partial C_i}(C_1C_2) = \delta_{i1}C_2 - \delta_{i2}C_1; \quad \frac{\partial^R}{\partial C_i}(C_1C_2) = C_1\delta_{i2} - C_2\delta_{i1} \tag{2.150}$$

También tenemos que:

$$\begin{aligned} \left\{\frac{\partial}{\partial C_i}, C_j\right\} C &= \frac{\partial}{\partial C_i}(C_jC) + C_j\frac{\partial C}{\partial C_i} = \delta_{ij}C \\ \Rightarrow \left\{\frac{\partial}{\partial C_i}, C_j\right\} &= \delta_{ij} \end{aligned} \tag{2.151}$$

De la relación (2.151) se desprende que en el caso 1-D $\left\{\frac{d}{dC}, C\right\} = 1$. También se tiene que:

$$\left\{\frac{\partial}{\partial C_i}, \frac{\partial}{\partial C_j}\right\} = 0 \Rightarrow \frac{\partial^2}{\partial C_i^2} = 0 \tag{2.152}$$

La ecuación (2.152) implica que no hay una operacion inversa a la diferenciación, por tanto debemos definir la integración de una manera razonable. Esto se consigue al pedir que la integración sea invariante bajo translaciones de la variable independiente, es decir que se cumpla:

$$\int_{-\infty}^{\infty} dx f(x) = \int_{-\infty}^{\infty} dx f(x+c) \tag{2.153}$$

De este requerimiento se concluye que debemos tener:

$$\int dC = 0 \quad ; \quad \int CdC = 1 \tag{2.154}$$

En el caso n-dimensional

$$\int dC_i = 0 \quad ; \quad \int C_idC_i = 1 \tag{2.155}$$

Por tanto la integración y la derivación son la misma operación. Exploremos ahora el comportamiento de las integrales gaussianas en variables de Grassmann. Sean $\eta, \bar{\eta}$ variables de Grassmann, tenemos:

$$\begin{aligned} e^{-\bar{\eta}\eta} &= 1 - \bar{\eta}\eta && (2.156)\\ \Rightarrow \int d\bar{\eta} d\eta e^{-\bar{\eta}\eta} &= \int d\bar{\eta} d\eta - \int d\bar{\eta} d\eta \bar{\eta}\eta = \int d\bar{\eta} d\eta \eta\bar{\eta} = 1 && (2.157)\end{aligned}$$

Ahora hagamos una generalización a más dimensiones, sea $\bar{\eta}=\begin{pmatrix} \bar{\eta}_1 \\ \bar{\eta}_2 \end{pmatrix}$;$\eta=\begin{pmatrix} \eta_1 \\ \eta_2 \end{pmatrix}$.

$$\bar{\eta}^T \eta \equiv \bar{\eta}\eta = \bar{\eta}_1\eta_1 + \bar{\eta}_2\eta_2 \Rightarrow (\bar{\eta}\eta)^2 = 2\bar{\eta}_1\eta_1\bar{\eta}_2\eta_2 \Rightarrow (\bar{\eta}\eta)^{3+n} = 0 \; n = 0, 1, ... \tag{2.158}$$

De la ecuación (2.158) podemos concluir que:

$$e^{-\bar{\eta}\eta} = 1 - (\bar{\eta}_1\eta_1 + \bar{\eta}_2\eta_2) + \bar{\eta}_1\eta_1\bar{\eta}_2\eta_2 \Rightarrow \int d\bar{\eta} d\eta e^{-\bar{\eta}\eta} = 1 \tag{2.159}$$

Ahora si hacemos el cambio de variables $\eta = M\alpha$ y $\bar{\eta} = N\bar{\alpha}$, donde (M, N) son matrices 2×2 y $(\bar{\alpha}, \alpha)$ son las nuevas variables de Grassman independientes tenemos:

$$\eta_1\eta_2 = (M_{11}\alpha_1 + M_{12}\alpha_2)(M_{21}\alpha_1 + M_{22}\alpha_2) = (M_{11}M_{22} - M_{12}M_{21})\alpha_1\alpha_2 = det(M)\alpha_1\alpha_2 \tag{2.160}$$

Para preservar la integración se debe mantener la condición:

$$\int d\eta_1 d\eta_2 \eta_1\eta_2 = \int d\alpha_1 d\alpha_2 \alpha_1\alpha_2 \Rightarrow d\eta_1 d\eta_2 = (detM)^{-1} d\alpha_1 d\alpha_2 \tag{2.161}$$

Sustituyendo (2.160) en (2.159):

$$\begin{aligned}(det(MN))^{-1}\int d\bar{\alpha} d\alpha e^{-\bar{\alpha}M^T N\alpha} = 1 \qquad \text{Pero como} \qquad [det(MN)]^{-1} = \left[det(M^T N)\right]^{-1}\\ \text{Si } A = M^T N \quad \Rightarrow \int d\bar{\alpha} d\alpha e^{-\bar{\alpha}A\alpha} = det(A)\end{aligned} \tag{2.162}$$

Para describir un campo, en el caso que nos interesa, el campo de Dirac debemos pasar a un álgebra infinito-dimensional, por tanto:

$$\{C(x), C(y)\} = 0; \; \frac{\partial^{LR} C(x)}{\partial C(y)} = \delta(x - y); \; \int dC(x) = 0; \; \int dC(x)C(x) = 1 \tag{2.163}$$

En analogía con la ecuación (2.91) construimos el funcional generatriz para el campo de Dirac usando en este caso $\mathcal{L} = i\bar{\psi}\gamma^\mu\partial_\mu\psi - m\bar{\psi}\psi$, así tenemos:

$$Z_0[\eta, \bar{\eta}] = \frac{1}{\mathcal{N}} \int \mathcal{D}\bar{\psi}\mathcal{D}\psi \text{Exp}\left\{ i \int \left[\bar{\psi}\gamma^\mu\partial_\mu\psi - m\bar{\psi}\psi + \bar{\eta}\psi + \bar{\psi}\eta\right] dx \right\} \tag{2.164}$$

Donde escogemos la normalización tal que:

$$Z_0[0,0] = 1 \Rightarrow \mathcal{N} = \int \mathcal{D}\bar{\psi}\mathcal{D}\psi \text{Exp}\left\{ i \int \left[\bar{\psi}\gamma^\mu \partial_\mu \psi - m\bar{\psi}\psi\right] dx \right\} \tag{2.165}$$

En este caso $\bar{\eta}$ es la fuente de $\bar{\psi}$ y η es la fuente de ψ. Con el objetivo de simplificar la notación definamos $S^{-1} \equiv i\gamma^\mu \partial_\mu - m$, entonces:

$$Z_0[\eta, \bar{\eta}] = \frac{1}{\mathcal{N}} \int \mathcal{D}\bar{\psi}\mathcal{D}\psi \text{Exp}\left\{ i \int \left[\bar{\psi}S^{-1}\psi + \bar{\eta}\psi + \bar{\psi}\eta\right] dx \right\} \tag{2.166}$$

Si $Q(\psi, \bar{\psi}) = \bar{\psi}S^{-1}\psi + \bar{\eta}\psi + \bar{\psi}\eta$, los valores de $\bar{\psi}, \psi$ que minimizan Q son $\psi_m = -S\eta$ y $\bar{\psi}_m = -\bar{\eta}S$, por tanto $Q_m = -\bar{\eta}S\eta$. Así $Q = Q_m + (\bar{\psi} - \bar{\psi}_m)S^{-1}(\psi - \psi_m)$. Con lo anterior podemos escribir la ecuación (2.166) como:

$$Z_0[\eta, \bar{\eta}] = \frac{1}{\mathcal{N}} \int \mathcal{D}\bar{\psi}\mathcal{D}\psi \text{Exp}\left\{ i \int \left[Q_m + (\bar{\psi} - \bar{\psi}_m)S^{-1}(\psi - \psi_m)\right] dx \right\} \tag{2.167}$$

Ahora, solo dos terminos del exponencial en (2.167) sobreviven: el que tiene que ver con Q_m ya que este es independiente de $(\psi, \bar{\psi})$ y:

$$\int \mathcal{D}\bar{\psi}\mathcal{D}\psi \text{Exp}\left\{ i \int \left[(\bar{\psi}S^{-1}\psi\right] dx \right\} = det(iS^{-1}) \tag{2.168}$$

Con lo anterior:

$$Z_0[\eta, \bar{\eta}] = \frac{1}{\mathcal{N}} \text{Exp}\left\{ -i \int \bar{\eta}(x)S(x-y)\eta(y)dxdy \right\} det(iS^{-1}) \tag{2.169}$$

Pero como de (2.165):

$$\mathcal{N} = \int \mathcal{D}\bar{\psi}\mathcal{D}\psi \text{Exp}\left\{ i \int \left[(\bar{\psi}S^{-1}\psi\right] dx \right\} = det(iS^{-1}) \tag{2.170}$$

Finalmente de (2.169) y (2.170):

$$Z_0[\eta, \bar{\eta}] = \text{Exp}\left\{ -i \int \bar{\eta}(x)S(x-y)\eta(y)dxdy \right\} \tag{2.171}$$

Sin embargo falta mostrar que S existe. Este está dado por:

$$S = (i\gamma^\mu \partial_\mu + m)\triangle_F(x) \tag{2.172}$$

Veamos:

$$S^{-1}S = (i\gamma^\mu \partial_\mu - m)(i\gamma^\mu \partial_\mu + m)\triangle_F(x) = (-\Box + m^2)\triangle_F(x) = \delta^4(x) \tag{2.173}$$

La función de 2-puntos (o propagador) es $\tau(x,y) = -\frac{\delta^2 Z_0[\eta,\bar{\eta}]}{\delta\eta(x)\delta\bar{\eta}(y)}|_{\eta=\bar{\eta}=0}$, el cálculo directo arroja:

$$\tau(x,y) = iS(x-y) \tag{2.174}$$

Como conclusión podemos decir que tanto en el caso del campo escalar como para el campo fermiónico el propagador es el funcional inverso al término cuadrático que aparece en la densidad lagrangiana. El funcional generatriz para campos interactuantes se puede generalizar para el caso fermiónico haciendo una analogía con la ecuación (2.140),así:

$$Z[\eta,\bar{\eta}] = \text{Exp}\left[i\int \mathcal{L}_{int}\left(\frac{1}{i}\frac{\delta}{\delta\eta},\frac{1}{i}\frac{\delta}{\delta\bar{\eta}}\right)dx\right]Z_0[\eta,\bar{\eta}] \tag{2.175}$$

2.4.1. La matriz S y la fórmula de reducción.

Ya hemos visto como calcular las funciones de Green para una teoría con interacciones. pero todavía nos falta calcular lo mas importante: las secciones eficaces de los procesos físicos reales, como los decaimientos y los procesos de dispersión. El cálculo de estas cantidades implica calcular la *amplitud mecánico cuántica*, la cual da cuenta de la probabilidad de que dicho proceso tome lugar. Una vez se tiene la amplitud, el resto del cálculo es directo. En lo que sigue se mostrará como calcular esta amplitud y como esta se relaciona con las funciones de Green que ya hemos encontrado.

Consideremos un proceso en el cual una configuración inicial de partículas, llamada α evoluciona hacia un estado final β. Denotaremos la amplitud correspondiente a dicho proceso como $S_{\alpha\beta}$ y lo llamaremos el elemento $\alpha\beta$ de la matriz S. Por tanto S es la matriz de todos los posibles procesos $(\beta\alpha)$. Estos estados son definidos asintóticamente en tiempos $t\to-\infty$ y $t\to\infty$, asi:

$$S_{\beta\alpha} = \langle\beta, t\to\infty|\alpha, t\to-\infty\rangle \tag{2.176}$$

En ausencia de interacciones de largo rango, estos estados asintóticos constituyen estados de partícula libre. Una notación alternativa es la de estados (in) y (out):

$$|\alpha\rangle_{in} = |\alpha, t\to-\infty\rangle;\ |\beta\rangle_{out} = |\beta, t\to\infty\rangle \tag{2.177}$$

Algunas relaciones importantes son:

$$S_{\beta\alpha} =_{out}\langle\beta|\alpha\rangle_{in};\ a_{out} = S^\dagger a_{in}S;\ a^\dagger_{out} = S^\dagger a^\dagger_{in}S;\ \phi_{out} = S^\dagger\phi_{in}S \tag{2.178}$$

Necesitamos calcular de fomra explícita una expresión S, para esto primero consideremos el campo ϕ en un tiempo intermedio entre $(-\infty,\infty)$, es decir cuando el campo está sujeto a interacciones. La densidad lagrangiana es $\mathcal{L} = \frac{1}{2}\left[\partial_\mu\phi\partial^\mu\phi - m^2\phi^2\right] + \mathcal{L}_{int}$, por tanto ϕ cumple:

$$(\Box_x + m^2)\phi = \frac{\partial\mathcal{L}_{int}}{\partial\phi};\; K_x\phi = \frac{\partial\mathcal{L}_{int}}{\partial\phi};\; K_x \equiv (\Box_x + m^2) \tag{2.179}$$

Resolvamos la ecuación (2.179), tenemos por definición que la funcion de Green cumple que:

$$K_yG(y-x) = \delta^4(y-x) \tag{2.180}$$

Si multiplicamos (2.179) por $G(x-y)$ y (2.180) por $\phi(y)$, integrando sobre y y restando ambas ecuaciones obtenemos:

$$\int d^4y\,[G(y-x)K_y\phi - \phi K_xG(y-x)] = \int d^4y\left[G(y-x)\frac{\partial\mathcal{L}_{int}}{\partial\phi} - \phi\delta(y-x)\right] \tag{2.181}$$

$$= \int d^4yG(y-x)\frac{\partial\mathcal{L}_{int}}{\partial\phi} - \phi(x) \tag{2.182}$$

Ahora:

$$LHS(2{,}181) = -\int d^3ydy_0\left[(G\nabla^2\phi - \phi\nabla^2G) - \left(G\frac{\partial^2\phi}{\partial y_0^2} - \phi\frac{\partial^2G}{\partial y_0^2}\right)\right] \tag{2.183}$$

La parte espacial de la ecuación (2.183) se anula debido al teorema de Green y la suposición de que el campo y las derivadas del mismo se anulan en el infinito, por tanto:

$$\int d^3ydy_0\left[(G\nabla^2\phi - \phi\nabla^2G)\right] = \int dSdy_0\cdot(G\nabla\phi - \phi\nabla G) = 0 \tag{2.184}$$

Para el segundo término de (2.183) que tiene que ver con las derivadas temporales tenemos:

$$G\frac{\partial^2\phi}{\partial y_0^2} - \phi\frac{\partial^2G}{\partial y_0^2} = \frac{\partial}{\partial y_o}\left(G\frac{\partial\phi}{\partial y_0} - \phi\frac{\partial G}{\partial y_0}\right) = \frac{\partial}{\partial y_o}\left(G\overleftrightarrow{\partial}_0\phi\right) \tag{2.185}$$

Combinando las ecuaciones (2.182),(2.183),(2.184) y (2.185) obtenemos:

$$\phi(x) = -\left(\int_{y_o^+} - \int_{y_0^-}\right)d^3yG(x-y)\overleftrightarrow{\partial}_0\phi(y) + \int_{y_o^-}^{y_o^+} d^4yG(x-y)\frac{\partial\mathcal{L}_{int}}{\partial\phi(y)} \tag{2.186}$$

En esta última expresión la integración ha sido ejecutada en tiempos (y_o^+, y_o^-), los cuales definen dos hipersuperficies espaciales σ^+ y σ^-.La ecuación (2.186) es la solución para ϕ aunque no en la forma que se desea. De la teoría de ecuaciones diferenciales sabemos que la solución para ϕ debe ser la suma de ϕ_0 (Libre), más la convolución del término inhomogeneo con la función de Green. Este último es fácil de reconocer en la ecuación (2.186), es el último término, pero el campo libre, es decir, el primer término depende de las condiciones de frontera. Para poder hacer un mejor análisis de este término definamos las funciones de Green avanzadas y ratardadas como:

$$K_x\triangle_{adv,ret}(x) = \delta^4(x)\ ;\ \begin{cases} \triangle_{ret}(x) = 0 \text{ para } x^2 > 0, x_0 < 0 \\ \triangle_{adv}(x) = 0 \text{ para } x^2 > 0, x_0 > 0 \end{cases}$$

Adicionalmente $\triangle_{ret}(x) = \triangle_{adv}(-x)$, ahora sustituyamos $G = \triangle_{adv}$ en (2.186), así obtenemos:

$$\phi(x) = \int_{y_0^-} d^3y\triangle_{ret}(x-y)\overleftrightarrow{\partial}_0\phi(y) + \int dy\triangle_{ret}(x-y)\frac{\partial\mathcal{L}_{int}}{\partial\phi(y)} \tag{2.187}$$

Analicemos el primer término, de (2.187), si hacemos $y_o \to -\infty$, tenemos:

$$\phi_{-\infty}(x) = \lim_{y_o\to-\infty}\int d^3y\triangle_{ret}(x-y)\overleftrightarrow{\partial}_0\phi(y) \tag{2.188}$$

Verifiquemos que este campo en efecto cumple la ecuación de Klein-Gordon, es decir es un campo libre,aplicando $(\Box_x + m^2)$ a cada lado de (2.188):

$$\begin{aligned}(\Box_x + m^2)\phi_{-\infty}(x) &= \lim_{y_o\to-\infty}(\Box_x + m^2)\int d^3y\triangle_{ret}(x-y)\overleftrightarrow{\partial}_0\phi(y) \\ &= \lim_{y_o\to-\infty}\int d^3y\delta^4(x-y)\overleftrightarrow{\partial}\phi(y) \\ &= \lim_{y_o\to-\infty}\delta(y_0)\overleftrightarrow{\partial_0}\phi(x) \text{ y como } \lim_{y_o\to-\infty}\delta(y_0) = 0 \\ &= 0\end{aligned} \tag{2.189}$$

Por tanto $\phi_{-\infty}(x)$ es un campo libre y podemos identificarlo con $\phi_{in}(x)$. Queda claro entonces que usando la ecuación (2.179) y utilizando el razonamiento anterior podemos escribir:

$$\begin{aligned}\phi(x) &= \phi_{out}(x) + \int dy\triangle_{adv}(x-y)K_y\phi(y) \\ \phi(x) &= \phi_{in}(x) + \int dy\triangle_{ret}(x-y)K_y\phi(y)\end{aligned} \tag{2.190}$$

De alguna manera se requiere que se cumpla la condición asintótica:

$$\phi(x) \underset{\substack{t\to+\infty \\ t\to-\infty}}{\longrightarrow} \phi_{\substack{out \\ in}}(x) \tag{2.191}$$

Sin embargo si la condición es tomada como el la ecuación (2.191), es decir, a nivel de operadores, obtenemos un valor nulo para los elementos de la matriz S. El formalismo LSZ(Lehmann, Zymanzik, Ziemmermann) (1955) establece la condición correcta [2], esta es:

$$\lim_{t\to\pm\infty}\langle a|\phi|b\rangle = \langle a|\phi_{out,in}|b\rangle \tag{2.192}$$

Donde $|a\rangle, |b\rangle$ son estados arbitrarios del espacio de Fock.

De ahora en adelante nuestro trabajo se centrará en encontrar una expresión para la matriz S, primero definimos el funcional:

$$I[J] = T\text{Exp}\left\{i\int J(x)\phi(x)dx\right\} \tag{2.193}$$

Donde T es el operador de ordenamiento temporal. Derivando:

$$\frac{1}{i}\frac{\delta I[J]}{\delta J(x)} = T(\phi(x)I[J]) \tag{2.194}$$

Comparando esta ecuación y las derivadas de orden superior con (2.119) vemos que:

$$\langle 0|I[J]|0\rangle = Z[J] \tag{2.195}$$

Si multiplicamos (2.190) por $I[J]$ y aplicamos T, obtenemos:

$$\begin{aligned}\frac{1}{i}\frac{\delta I[J]}{\delta J(x)} &= \phi_{out}(x)I[J] + \int dy\triangle_{adv}(x-y)K_y\frac{1}{i}\frac{\delta I[J]}{\delta J(Y)}\\ \frac{1}{i}\frac{\delta I[J]}{\delta J(x)} &= \phi_{in}(x)I[J] + \int dy\triangle_{ret}(x-y)K_y\frac{1}{i}\frac{\delta I[J]}{\delta J(y)}\end{aligned} \tag{2.196}$$

Restando estas últimas dos ecuaciones obtenmos:

$$\phi_{out}(x)I[J] - I[J]\phi_{in}(x) = i\int dy\triangle(x-y)K_y\frac{\delta I[J]}{\delta J(y)} \tag{2.197}$$

Donde $\triangle(x-y) = \triangle_{adv}(x-y) - \triangle_{ret}(x-y)$, reemplazando $\phi_{out} = S^\dagger\phi_{in}S$, tenemos que la ecuación (2.197) se puede escribir como:

$$[\phi_{in}, SI[J]] = i\int dy\triangle(x-y)K_y\frac{\delta(SI[J])}{\delta J(y)} \tag{2.198}$$

Por otro lado para dos operadores cuyo conmutador es no nulo,se cumple que debido a la identidad de Baker-Haussdorf-Campbell:

$$[A,B]e^B = [A,e^B] \tag{2.199}$$

Debido a que $[\phi_{in}(x), \phi_{in}(y)] = i\triangle(x-y)$, la solución para $SI[J]$ se "sugiere a sí misma":

$$SI[J] = \text{Exp}\left\{\int \phi_{in}(z)K_z \frac{\delta}{\delta J(z)}dz\right\} F[J] \tag{2.200}$$

Donde F[J] es un funcional arbitrario, veamos que en efecto la ecuación (2.200) soluciona (2.198), calculemos el LHS de (2.198) usando (2.199):

$$\begin{aligned}[\phi_{in}, SI[J]] &= i\int \triangle_F(x-y)K\frac{\delta}{\delta J(y)}dy\text{Exp}\left[\int \phi_{in}(z)K\frac{\delta}{\delta J(z)}dz\right] F[J] \\ &= \text{Exp}\left[\int \phi_{in}(z)K\frac{\delta}{\delta J(z)}dz\right] i\int \triangle_F(x-y)K\frac{\delta F[J]}{\delta J(y)}dy \end{aligned}\tag{2.201}$$

Y ahora el RHS de (2.198) es:

$$\begin{aligned}\frac{\delta(SI[J])}{\delta J(y)} &= \text{Exp}\left[\int \phi_{in}(z)K\frac{\delta}{\delta J(z)}dz\right] \frac{\delta F[J]}{\delta J(y)} \\ \Rightarrow \text{RHS}(2.198) &= \text{Exp}\left[\int \phi_{in}(z)K\frac{\delta}{\delta J(z)}dz\right] i\int \triangle_F(x-y)K\frac{\delta F[J]}{\delta J(y)}dy \end{aligned}\tag{2.202}$$

Como las ecuaciones (2.201) y (2.202) son iguales, entonces la propuessta para $SI[J]$ es correcta. Por último solo nos falta calcular qué es $F[J]$, sabemos que para cualquier operador normalmente ordenado (lo cual denotaremos como, si A está normalmente ordenado escribiremos $: A :$) se cumple que $\langle 0| : e^A : |0\rangle = 1$ por tanto si ordenamos normalmente el exponencial en (2.200) obtenemos:

$$\langle 0|SI[J]|0\rangle = F[J] \tag{2.203}$$

Por otro lado en ausencia de campos externos, el vacío evoluciona en el vacío por tanto podemos escribir $\langle 0|S = \langle 0|$, y con esto:

$$\langle 0|SI[J]|0\rangle = \langle 0|I[J]|0\rangle = Z[J] \tag{2.204}$$

Combinando la ecuación (2.203) y (2.204):

$$F[J] = Z[J] \Rightarrow SI[J] =: \text{Exp}\left[\int \phi_{in}(z)K\frac{\delta}{\delta J(z)}dz\right] : Z[J] \tag{2.205}$$

Y tomando el limite $J \to 0 \Rightarrow I[J] \to 1$ entonces de (2.205) obtenemos finalmente que:

$$S =: \text{Exp}\left[\int \phi_{in}(z)K\frac{\delta}{\delta J(z)}dz\right] : Z[J]|_{J=0} \tag{2.206}$$

La ecuación (2.206) se conoce como la *fórmula de la reducción* en forma funcional. La forma en que funciona como veremos más adelante es la siguiente: Un término típico en la expansión (2.206) contiene $\frac{\delta^n}{\delta J^N}Z[J]|_{J=0}$, esto no es más que la función de Green de n-puntos. Por cada partícula externa tenemos un operador $\vec{K}$ el cual reduce el propagador a una función delta, la cual finalmente es multiplicada por el campo $\phi_{in}(x)$ que es la función de la partícula libre entrante.

Sabemos que $\frac{1}{i}\frac{\delta}{\delta J(x_1)}\frac{1}{i}\frac{\delta}{\delta J(x_2)}...\frac{1}{i}\frac{\delta}{\delta J(x_n)}Z[J]|_{J=0} = G(x_1, x_2, ..., x_n)$ son las funciones de Green de n-puntos. Multiplicando por los operadores $\prod_i(\Box_{x_i} + m^2)$ y por los campos $\prod_i \phi_{in}(x_i)$, encontramos el elemento de matriz de S para n partículas:

$$S_n(x_1, x_2, ..., x_n) = \prod_i \phi_{in}(x_i)(\Box_{x_i} + m^2)G(x_1, x_2, ..., x_n) \tag{2.207}$$

La ecuación (2.207) se cumple para campos escalares, pero basta con reemplazar $\vec{K} = (\Box_{x_i} + m^2)$ por $\vec{D} = (i\gamma \cdot \partial - m)$ para incluir campos fermiónicos.

2.5. Teorías Gauge y campos de Yang-Mills

En esta sección pretendemos extender lo que hemos hecho en las dos secciones anteriores para hallar el propagador en el caso de campos Gauge no-Abelianos (Campos de Yang-Mills). Si consideramos el funcional generatriz:

$$Z = \int \mathcal{D}A_\mu e^{i\int \mathcal{L}dx} \tag{2.208}$$

Donde $\mathcal{L}$ es invariante bajo $A_\mu \to A_\mu + \partial_\mu \Lambda$ e intentamos hacer la integral (2.208) sobre todos los campos A_μ incluidos los que estan ralacionados simplemente por una transformacion Gauge, entonces esto obviamente traerá una contribución infinita a Z y por tanto a las funciones de Green, lo cual es catastrófico.

De una manera esquemática podemos escribir A_μ como:

$$A_\mu \sim \bar{A}_\mu, \Lambda \tag{2.209}$$

2.5.1. Un ejemplo: Integración en 2D.

2.5.2. El método de Faddevv-Popov.

2.6. La teoria de Yukawa

Capítulo 3

Integrales de trayectoria en espacios curvos.

FIGURA 3.1: Este es el caption que aparece debajo de la figura.

Lorem ipsum dolor sit amet, consectetur adipiscing elit. Vivamus at pulvinar nisi. Phasellus hendrerit, diam placerat interdum iaculis, mauris justo cursus risus, in viverra purus eros at ligula. Ut metus justo, consequat a tristique posuere, laoreet nec nibh. Etiam et scelerisque mauris. Phasellus vel massa magna. Ut non neque id tortor pharetra bibendum vitae sit amet nisi. Duis nec quam quam, sed euismod justo. Pellentesque eu tellus vitae ante tempus malesuada. Nunc accumsan, quam in congue consequat, lectus lectus dapibus erat, id aliquet urna neque at massa. Nulla facilisi. Morbi ullamcorper eleifend posuere. Donec libero leo, faucibus nec bibendum at, mattis et urna. Proin consectetur, nunc ut imperdiet lobortis, magna neque tincidunt lectus, id iaculis nisi justo id nibh. Pellentesque vel sem in erat vulputate faucibus molestie ut lorem.

3.1. Teoría clásica de campos en espacios curvos.

Quisque tristique urna in lorem laoreet at laoreet quam congue. Donec dolor turpis, blandit non imperdiet aliquet, blandit et felis. In lorem nisi, pretium sit amet vestibulum sed, tempus et sem. Proin non ante turpis. Nulla imperdiet fringilla convallis. Vivamus vel bibendum nisl. Pellentesque justo lectus, molestie vel luctus sed, lobortis in libero. Nulla facilisi. Aliquam erat volutpat. Suspendisse vitae nunc nunc. Sed aliquet est suscipit sapien rhoncus non adipiscing nibh consequat. Aliquam metus urna, faucibus eu vulputate non, luctus eu justo.

3.1.1. A Subsection

Donec urna leo, vulputate vitae porta eu, vehicula blandit libero. Phasellus eget massa et leo condimentum mollis. Nullam molestie, justo at pellentesque vulputate, sapien velit ornare diam, nec gravida lacus augue non diam. Integer mattis lacus id libero ultrices sit amet mollis neque molestie. Integer ut leo eget mi volutpat congue. Vivamus sodales, turpis id venenatis placerat, tellus purus adipiscing magna, eu aliquam nibh dolor id nibh. Pellentesque habitant morbi tristique senectus et netus et malesuada fames ac turpis egestas. Sed cursus convallis quam nec vehicula. Sed vulputate neque eget odio fringilla ac sodales urna feugiat.

3.2. La ecuación de Schrodinger en espacio curvo.

3.3. Cambios de coordenadas.

3.4. Campos fermiónicos.

3.5. El átomo de Hidrógeno.

Apéndice A

An Appendix

Lorem ipsum dolor sit amet, consectetur adipiscing elit. Vivamus at pulvinar nisi. Phasellus hendrerit, diam placerat interdum iaculis, mauris justo cursus risus, in viverra purus eros at ligula. Ut metus justo, consequat a tristique posuere, laoreet nec nibh. Etiam et scelerisque mauris. Phasellus vel massa magna. Ut non neque id tortor pharetra bibendum vitae sit amet nisi. Duis nec quam quam, sed euismod justo. Pellentesque eu tellus vitae ante tempus malesuada. Nunc accumsan, quam in congue consequat, lectus lectus dapibus erat, id aliquet urna neque at massa. Nulla facilisi. Morbi ullamcorper eleifend posuere. Donec libero leo, faucibus nec bibendum at, mattis et urna. Proin consectetur, nunc ut imperdiet lobortis, magna neque tincidunt lectus, id iaculis nisi justo id nibh. Pellentesque vel sem in erat vulputate faucibus molestie ut lorem.

Quisque tristique urna in lorem laoreet at laoreet quam congue. Donec dolor turpis, blandit non imperdiet aliquet, blandit et felis. In lorem nisi, pretium sit amet vestibulum sed, tempus et sem. Proin non ante turpis. Nulla imperdiet fringilla convallis. Vivamus vel bibendum nisl. Pellentesque justo lectus, molestie vel luctus sed, lobortis in libero. Nulla facilisi. Aliquam erat volutpat. Suspendisse vitae nunc nunc. Sed aliquet est suscipit sapien rhoncus non adipiscing nibh consequat. Aliquam metus urna, faucibus eu vulputate non, luctus eu justo.

Donec urna leo, vulputate vitae porta eu, vehicula blandit libero. Phasellus eget massa et leo condimentum mollis. Nullam molestie, justo at pellentesque vulputate, sapien velit ornare diam, nec gravida lacus augue non diam. Integer mattis lacus id libero ultrices sit amet mollis neque molestie. Integer ut leo eget mi volutpat congue. Vivamus sodales, turpis id venenatis placerat, tellus purus adipiscing magna, eu aliquam nibh dolor id nibh. Pellentesque habitant morbi tristique senectus et netus et malesuada fames ac turpis egestas. Sed cursus convallis quam nec vehicula. Sed vulputate neque eget odio fringilla ac sodales urna feugiat.

Phasellus nisi quam, volutpat non ullamcorper eget, congue fringilla leo. Cras et erat et nibh placerat commodo id ornare est. Nulla facilisi. Aenean pulvinar scelerisque eros eget interdum. Nunc pulvinar magna ut felis varius in hendrerit dolor accumsan. Nunc pellentesque magna quis magna bibendum non laoreet erat tincidunt. Nulla facilisi.

Duis eget massa sem, gravida interdum ipsum. Nulla nunc nisl, hendrerit sit amet commodo vel, varius id tellus. Lorem ipsum dolor sit amet, consectetur adipiscing elit. Nunc ac dolor est. Suspendisse ultrices tincidunt metus eget accumsan. Nullam facilisis, justo vitae convallis sollicitudin, eros augue malesuada metus, nec sagittis diam nibh ut sapien. Duis blandit lectus vitae lorem aliquam nec euismod nisi volutpat. Vestibulum ornare dictum tortor, at faucibus justo tempor non. Nulla facilisi. Cras non massa nunc, eget euismod purus. Nunc metus ipsum, euismod a consectetur vel, hendrerit nec nunc.