



UNIVERSIDAD DE ANTIOQUIA

# Integrales de Trayectoria y Espacios Curvos

por

Diego Alberto Barón Moreno

**Asesor:**

Nelson Vanegas Arbeláez

Tesis para optar por el título de:

Físico

en la

Facultad de Ciencias Exactas y Naturales

Instituto de Física

Abril 2016

*“Write a funny quote here.”*

If the quote is taken from someone, their name goes here

## *Resumen*

The Thesis Abstract is written here (and usually kept to just this page). The page is kept centered vertically so can expand into the blank space above the title too...

## *Agradecimientos*

The acknowledgements and the people to thank go here, don't forget to include your project advisor...

# Tabla de Contenidos

<b>Resumen</b>	<b>II</b>
<b>Agradecimientos</b>	<b>III</b>
<b>Índice de Figuras</b>	<b>VI</b>
<b>Índice of Tablas</b>	<b>VII</b>
<b>1. Introducción</b>	<b>1</b>
<b>2. Integrales de trayectoria en espacio plano.</b>	<b>2</b>
2.1. La ecuación de Schrödinger. . . . .	3
2.1.1. Teoría de perturbaciones. . . . .	6
2.1.2. Matriz $\mathcal{S}$ . . . . .	8
2.1.3. Propiedades adicionales de las integrales de trayectoria. . . . .	10
2.2. El experimento de la doble rendija. . . . .	13
2.2.1. El propagador de una partícula libre. . . . .	13
2.2.2. El problema de difracción e interferencia. . . . .	14
2.2.3. Difracción por una rendija. . . . .	17
2.2.4. Interferencia y difracción por dos rendijas. . . . .	18
2.3. Campos escalares. . . . .	21
2.3.1. Integración funcional. . . . .	22
2.3.2. Funciones de Green de la partícula libre. . . . .	23
2.4. Campos fermiónicos. . . . .	23
2.5. Teorías Gauge y campos de Yang-Mills . . . . .	23
2.6. La teoria de Yukawa . . . . .	23
<b>3. Integrales de trayectoria en espacios curvos.</b>	<b>24</b>
3.1. Teoría clásica de campos en espacios curvos. . . . .	25
3.1.1. A Subsection . . . . .	25
3.2. La ecuación de Schrodinger en espacio curvo. . . . .	25
3.3. Cambios de coordenadas. . . . .	25
3.4. Campos fermiónicos. . . . .	25
3.5. El átomo de Hidrógeno. . . . .	25

**A. An Appendix****26**

# Índice de figuras

2.1. Esquema del experimento de la doble rendija . . . . .	3
2.2. Diagrama de Feynmann primera cuantización . . . . .	9
2.3. Diagrama de Feynmann primera cuantización . . . . .	9
2.4. Diagrama de Feynmann primera cuantización . . . . .	9
2.5. Diagrama de Feynmann primera cuantización . . . . .	9
2.6. Diagrama de Feynmann primera cuantización . . . . .	10
2.7. Diagrama de Feynmann primera cuantización . . . . .	10
2.8. Esquema del experimento de la doble rendija en 2D . . . . .	14
2.9. Patrón de interferencia, 1 rendija, regimen de Fraunhofer . . . . .	18
2.10. Patrón de interferencia, 1 rendija, regimen de Fresnel . . . . .	19
2.11. Patrón de interferencia, 2 rendijas . . . . .	20
3.1. Esto es lo que aparece en la tabla de figuras . . . . .	24

# Índice de tablas



*Dedicado a mi madre. . .*

# Capítulo 1

## Introducción

## Capítulo 2

# Integrales de trayectoria en espacio plano.

El formalismo mas común de la mecánica cuantica se deriva de cambiar las variables clasicas de posición y momentum ( $p$  y  $q$ ) por operadores que obedecen el álgebra:

$$[\hat{q}, \hat{p}] = i\hbar \quad (2.1)$$

Esta relación se conoce como la condción de cuantización de Heisenberg, en general en la mecánica cuantica de operadores estos últimos viven en un espacio de Hilbert.

La formulación de integrales de camino se basa en la noción de **propagador**, esta función es tal que dada una funcion de onda en un instante de tiempo  $t_1$ ,  $\psi(x_1, t_1)$  da la evolucion hasta un instante de tiempo  $t_2$ , entregando  $\psi(x_2, t_2)$ . En cierta manera es parecido al principio de Huygens:

$$\psi(x_f, t_f) = \int K(q_f, t_f; q_i, t_i) \psi(q_i, t_i) dq_i \quad (2.2)$$

De acuerdo con la mecánica cuántica  $\psi(q_f, t_f)$  representa la probabilidad de que una partícula se encuentre en un punto  $q_f$  en el instante de tiempo  $t_f$ , por tanto  $K(q_f, t_f; q_i, t_i)$  representa la amplitud de probabilidad de transición entre un estado  $(q_i, t_i)$  y  $(q_f, t_f)$ .

$$P(q_f, t_f; q_i, t_i) = \|K(q_f, t_f; q_i, t_i)\|^2 \quad (2.3)$$

Si dividimos el intervalo de tiempo en  $t_i \rightarrow t \rightarrow t_f$ , tenemos de la definición de  $K$ :

$$\begin{aligned}\psi(q_f, t_f) &= \int \int K(q_f, t_f; q, t) K(q, t; q_i, t_i) dq dq_i \\ \Rightarrow K(q_f, t_f; q_i, t_i) &= \int dq K(q_f, t_f; q, t) K(q, t; q_i, t_i)\end{aligned}\quad (2.4)$$

Como ejemplo de lo anterior podemos analizar el experimento de la doble rendija. En la Figura 1 encontramos un esquema de este: Si  $K(2A, 1)$  es la probabilidad de que un

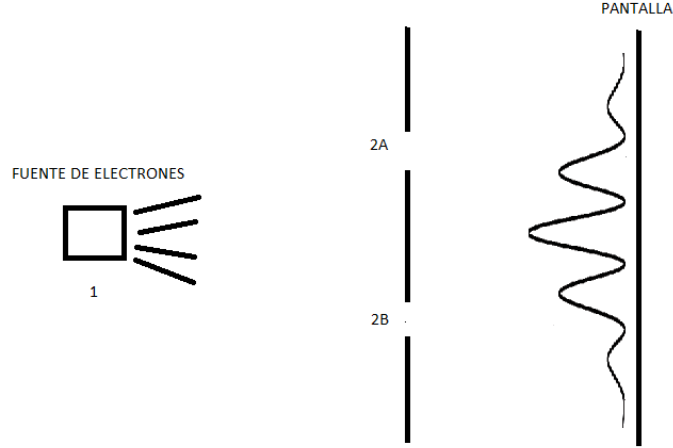


FIGURA 2.1: Experimento de la doble rendija.

electrón pase por la rendija 2A, entonces podemos escribir:

$$K(3, 1) = K(2A, 1)K(3, 2A) + K(2B, 1)K(3, 2B) \quad (2.5)$$

Al tomar el módulo cuadrado de la expresión (2.5) se generarán los términos de interferencia necesarios para describir el patrón de difracción. No podemos decir que el electrón tomó un camino u el otro, de una manera más simple: este siguió todos los caminos posibles!

## 2.1. La ecuación de Schrödinger.

En el cuadro de Schrodinger la evolución de un sistema cuántico afecta al ket que representa al estado del sistema, la ecuación que rige la dinámica del mismo es la **Ecuación de Schrödinger**

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t} |\psi\rangle_S = \hat{H} |\psi\rangle_S \quad (2.6)$$

Sabemos que  $\psi(q, t) = \langle q | \psi \rangle_S$  donde  $|q\rangle$  son autoestados de la posición, la relacion entre el cuadro de Heisenberg y el de Schrödinger es  $|\psi\rangle_H = e^{iHt/\hbar} |\psi\rangle_S$ . Si definimos  $|qt\rangle \equiv e^{iHt/\hbar} |q\rangle$ , entonces  $\psi(q, t) = \langle qt | \psi \rangle_H$ .

Vamos a mostrar que  $K(q_f, t_f; q_i, t_i) = \langle q_f t_f | q_i t_i \rangle$ , la relación de completez nos permite escribir:

$$\begin{aligned} \langle q_f t_f | \psi \rangle &= \int \langle q_f t_f | q_i t_i \rangle \langle q_i t_i | \psi \rangle dq_i \\ &= \int \langle q_f t_f | q_i t_i \rangle \psi(q_i, t_i) dq_i \end{aligned} \quad (2.7)$$

Y comparando (2.7) y (2.2), vemos que:

$$K(q_f, t_f; q_i, t_i) = \langle q_f t_f | q_i t_i \rangle \quad (2.8)$$

Así, el propagador es proporcional a la amplitud de probabilidad de transición entre el estado inicial  $|q_i t_i\rangle$  y final  $|q_f t_f\rangle$ . La idea ahora es expresar el propagador como una integral de trayectoria. Partamos el intervalo temporal  $(t_i, t_f)$  en  $n + 1$  piezas de igual duración  $\tau$ , así:

$$\langle q_f t_f | q_i t_i \rangle \int dq_1 dq_2 \dots dq_n \langle q_f t_f | q_n t_n \rangle \langle q_n t_n | q_{n-1} t_{n-1} \rangle \dots \langle q_1 t_1 | q_i t_i \rangle \quad (2.9)$$

Calculemos uno de estos elementos:

$$\begin{aligned} \langle q_{j+1} t_{j+1} | q_j t_j \rangle &= \langle q_{j+1} | e^{-iHt_{j+1}/\hbar} e^{iHt_j/\hbar} | q_j \rangle = \langle q_{j+1} | e^{-i\tau H/\hbar} | q_j \rangle \quad \text{A primer orden,} \\ &= \langle q_{j+1} | 1 - i\tau H/\hbar | q_j \rangle = \delta(q_{j+1} - q_j) - i\tau \hbar \langle q_{j+1} | H | q_j \rangle \\ &= \frac{1}{2\pi\hbar} \int dp \exp\left[\frac{ip}{\hbar}(q_{j+1} - q_j)\right] - \frac{i\tau}{\hbar} \langle q_{j+1} | H | q_j \rangle \end{aligned} \quad (2.10)$$

Si asumimos que el Hamiltoniano es una función de  $p$  y  $q$  de la forma:  $H = \frac{p^2}{2m} + V(q)$ , entonces:

$$\begin{aligned} \langle q_{j+1} | \frac{p^2}{2m} | q_j \rangle &= \int dp dp' \langle q_{j+1} | p' \rangle \langle p' | \frac{p^2}{2m} | p \rangle \langle p | q_j \rangle \\ &= \int \frac{dp dp'}{2\pi\hbar} \exp\left[\frac{i}{\hbar}(p' q_{j+1} - p q_j)\right] \frac{p^2}{2m} \delta(p - p') \\ &= \int \frac{dp}{2\pi\hbar} \exp\left[\frac{i}{\hbar} p (q_{j+1} - q_j)\right] \frac{p^2}{2m} \end{aligned} \quad (2.11)$$

De una manera similar:

$$\begin{aligned} \langle q_{j+1} | V(q) | q_j \rangle &= V\left(\frac{q_{j+1} + q_j}{2}\right) \langle q_{j+1} | q_j \rangle \\ &= V\left(\frac{q_{j+1} + q_j}{2}\right) \delta(q_{j+1} - q_j) \\ \langle q_{j+1} | V(q) | q_j \rangle &= V\left(\frac{q_{j+1} + q_j}{2}\right) \int \frac{dp}{2\pi\hbar} \exp\left[\frac{i}{\hbar} p (q_{j+1} - q_j)\right] \end{aligned} \quad (2.12)$$

Por tanto  $\langle q_{j+1}|H|q_j\rangle = \int \frac{dp}{h} \text{Exp}[\frac{i}{h}p(q_{j+1} - q_j)]H(p, q)$  y:

$$\langle q_{j+1}t_{j+1}|q_j t_j\rangle = \frac{1}{h} \int dp_j \text{Exp}[\frac{i}{h}[p_j(q_{j+1} - q_j) - \tau H(p_j, q_j)]] \quad (2.13)$$

Finalmente:

$$\langle q_f t_f | q_i t_i \rangle = \lim_{N \rightarrow \infty} \int \prod_{j=1}^N dq_j \prod_{j=0}^N \frac{dp_j}{h} \text{Exp} \left\{ \frac{i}{h} \sum_{j=0}^N [p_j(q_{j+1} - q_j) - \tau H(p_j, q_j)] \right\} \quad (2.14)$$

En el continuo:

$$\langle q_f t_f | q_i t_i \rangle = \int \frac{\mathcal{D}q \mathcal{D}p}{h} \text{Exp} \left\{ \frac{i}{h} \int_{t_i}^{t_f} (p\dot{q} - H(p, q)) dt \right\} \quad (2.15)$$

En el continuo  $q$  se vuelve una función de  $t$  y la integral anterior, es una integral funcional. La expresión (2.15) es la integral de trayectoria para la amplitud de transición entre  $(q_i, t_i)$  y  $(q_f, t_f)$ . Esta integral se hace sobre todas las posibles trayectorias en el espacio de fase y  $q(t), p(t)$  son funciones y no operadores, sin embargo es natural preguntarse por la convergencia de (2.15), esto es algo no trivial, sin embargo, de ahora en adelante asumiremos que esta integral existe y converge.

Si el Hamiltoniano es tal que  $H = \frac{p^2}{2m} + V(q)$

$$\langle q_f t_f | q_i t_i \rangle = \lim_{N \rightarrow \infty} \int \prod_{j=1}^N dq_j \prod_{j=0}^N \frac{dp_j}{h} \text{Exp} \left\{ \frac{i}{h} \sum_{j=0}^N [p_j(q_{j+1} - q_j) - \tau \frac{p_j^2}{2m} - V(q)\tau] \right\} \quad (2.16)$$

Y sabiendo que:  $\int_{-\infty}^{\infty} \text{Exp}[-ax^2 + bx + c]dx = \text{Exp}[\frac{b^2}{4a} + c](\frac{\pi}{a})^{\frac{1}{2}}$ , entonces:

$$\langle q_f t_f | q_i t_i \rangle = \lim_{N \rightarrow \infty} \left[ \frac{1}{h} \left( \frac{\pi \hbar 2m}{i\tau} \right)^{\frac{1}{2}} \right]^{N+1} \int \prod_1^N dq_j \text{Exp} \left\{ \frac{i}{h} \sum_0^N \left( \left( \frac{q_{j+1} - q_j}{\tau} \right)^2 \frac{m}{2} - V \right) \tau \right\} \quad (2.17)$$

En el continuo:

$$\langle q_f t_f | q_i t_i \rangle = \mathcal{N} \int \mathcal{D}q \text{Exp} \left\{ \frac{i}{h} \int_{t_i}^{t_f} \mathcal{L}(q, \dot{q}) dt \right\} \quad (2.18)$$

Donde  $\mathcal{L}(q, \dot{q})$  es el lagrangiano clásico, sin embargo esto solo pasa si asumimos una forma específica del Hamiltoniano, cuando esto no es así se tiene una acción efectiva. En teoría de campos por ejemplo esta descomposición solo se puede hacer en el caso de campos Abelianos.

### 2.1.1. Teoría de perturbaciones.

Vamos a ilustrar cómo usar el método de integrales de trayectoria en procesos de dispersión, este tipo de procesos involucran la interacción de una partícula con un potencial  $V(x)$ . Debido a que no siempre podemos calcular analíticamente la integral (2.18) entonces es necesario acudir a la teoría de perturbaciones, esta es aplicable en el régimen en que la energía de interacción  $E_I < \hbar$ . En este caso podemos escribir:

$$\text{Exp} \left[ \frac{-i}{\hbar} \int_{t_i}^{t_f} V(x, t) dt \right] = 1 - \frac{i}{\hbar} \int_{t_i}^{t_f} V(x, t) dt + \left( \frac{i}{\hbar} \right)^2 \frac{1}{2!} \left[ \int_{t_i}^{t_f} V(x, t) dt \right]^2 + \dots \quad (2.19)$$

Cuando reemplazamos esto en la expresión (2.18) obtenemos:

$$K = K_0 + K_1 + K_2 + \dots \text{ donde } K_0 = \mathcal{N} \int \mathcal{D}x \text{Exp} \left[ \frac{i}{\hbar} \int \frac{1}{2} m \dot{x}^2 dt \right] \quad (2.20)$$

Para calcular  $K_0$ , escribamos la forma discretizada de (2.20)

$$\begin{aligned} K_0 &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left( \frac{m}{i\hbar\tau} \right)^{\left(\frac{n+1}{2}\right)} \int_{-\infty}^{\infty} \prod_{j=1}^n dx_j \text{Exp} \left[ \frac{im}{2\hbar\tau} \sum_{j=0}^n (x_{j+1} - x_j)^2 \right] \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left( \frac{m}{i\hbar\tau} \right)^{\left(\frac{n+1}{2}\right)} \frac{1}{(n+1)^{\frac{1}{2}}} \left( \frac{i\hbar\tau}{m} \right)^{\frac{n}{2}} \text{Exp} \left[ \frac{im}{2\hbar(n+1)\tau} (x_f - x_i)^2 \right] \\ K_0(x_f t_f, x_i t_i) &= \Theta(t_f - t_i) \left( \frac{m}{i\hbar(t_f - t_i)} \right)^{1/2} \text{Exp} \left[ \frac{im}{2\hbar(t_f - t_i)} (x_f - x_i)^2 \right] \end{aligned} \quad (2.21)$$

Calculemos ahora  $K_1$ :

$$K_1 = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{-i}{\hbar} N^{(n+1)/2} \sum_{i=1}^n \int \text{Exp} \left[ \frac{im}{2\hbar\tau} \sum_{j=0}^n (x_{j+1} - x_j)^2 \right] V(x_i, t_i) dx_1 \dots dx_n \quad (2.22)$$

Ahora como solo  $V(x)$  depende de  $x_i$ , separamos (2.22) como:

$$\begin{aligned} K_1 &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{-i}{\hbar} \sum_{i=1}^n \left\{ \int N^{(n-i+1)/2} \text{Exp} \left[ \frac{im}{2\hbar\tau} \sum_{j=i}^n (x_{j+1} - x_j)^2 \right] dx_i \dots dx_n \right\} \\ &\quad \times \left\{ \int N^{i/2} \text{Exp} \left[ \frac{im}{2\hbar\tau} \sum_{j=0}^{i-1} (x_{j+1} - x_j)^2 \right] dx_1 \dots dx_{i-1} \right\} V(x_i, t_i) \end{aligned} \quad (2.23)$$

Los dos términos en corchetes en (2.23) son  $K_0(xt, x_f t_f)$  y  $K_0(x_i t_i, xt)$ , así:

$$K_1(x_f t_f, x_i t_i) = -\frac{i}{\hbar} \int_{t_i}^{t_f} dt \int_{-\infty}^{\infty} K_0(x_f t_f, xt) V(x, t) K_0(xt, x_i t_i) dx \quad (2.24)$$

Como  $K_0(x_f t_f, x t) = 0$  si  $t > t_f$  y  $K_0(x t, x_i t_i) = 0$  si  $t < t_i$ , entonces podemos escribir:

$$K_1(x_f t_f, x_i t_i) = -\frac{i}{\hbar} \int_{-\infty}^{\infty} dt \int_{-\infty}^{\infty} K_0(x_f t_f, x t) V(x, t) K_0(x t, x_i t_i) dx \quad (2.25)$$

De la misma manera se puede probar que:

$$K_2(x_f t_f, x_i t_i) = \left(\frac{-i}{\hbar}\right)^2 \int_{-\infty}^{\infty} dt_1 dt_2 dx_1 dx_2 K_0(x_f t_f, x_2 t_2) V_2 K_0(x_2 t_2, x_1 t_1) V_1 K_0(x_1 t_1, x_i t_i) \quad (2.26)$$

Esta es una solución en series para  $K$  y recibe el nombre de Serie de Born, en la expresión general para  $K_n$  no se tiene el factor  $n!$  ya que hay ese mismo numero de formas para ordenar los  $n$  potenciales  $V(x)$  que entran en el propagador.

Por último mostraremos que **el propagador es la función de Green de la ecuación de Schrödinger**. Para esto sustituyamos la expresión para la serie de Born en la ecuación (2.2):

$$\begin{aligned} \psi(\vec{x}_f, t_f) &= \int K_0(\vec{x}_f t_f, \vec{x}_i t_i) \psi(\vec{x}_i, t_i) d\vec{x}_i \\ &\quad - \frac{i}{\hbar} \int K_0(\vec{x}_f t_f, \vec{x} t) V(\vec{x}, t) K_0(\vec{x} t, \vec{x}_i t_i) \psi(\vec{x}_i, t_i) d\vec{x} dt d\vec{x}_i + O(\hbar^2) \end{aligned} \quad (2.27)$$

Hemos cambiado a tres dimensiones espaciales y los otros términos en la serie hacen converger el último  $K_0$  a  $K$ , por tanto:

$$\psi(\vec{x}_f, t_f) = \int K_0(\vec{x}_f t_f, \vec{x}_i t_i) \psi(\vec{x}_i, t_i) d\vec{x}_i - \frac{i}{\hbar} \int K_0(\vec{x}_f t_f, \vec{x} t) V(\vec{x}, t) \psi(\vec{x}, t) d\vec{x} dt \quad (2.28)$$

Cuando  $t_i \rightarrow -\infty$ , no hay presencia de potencial por tanto  $\psi$  se vuelve una onda plana. Así:

$$\psi(\vec{x}_f, t_f) = \phi(\vec{x}_f t_f) - \frac{i}{\hbar} \int K_0(\vec{x}_f t_f, \vec{x} t) V(\vec{x}, t) \psi(\vec{x}, t) d\vec{x} dt \quad (2.29)$$

Aplicando el operador  $\hat{H} = \frac{\hbar^2}{2m} \nabla_{\vec{x}_f t_f} + i\hbar \frac{\partial}{\partial t_f}$  en la ecuación (2.29) y usando  $\hat{H}\psi(x, t) = V(x, t)\psi(x, t)$ :

$$\begin{aligned} \hat{H}(\psi(\vec{x}_f, t_f)) &= \hat{H}(\phi(\vec{x}_f t_f)) - \frac{i}{\hbar} \int \hat{H}(K_0(\vec{x}_f t_f, \vec{x} t)) V(\vec{x}, t) \psi(\vec{x}, t) d\vec{x} dt \\ V(\vec{x}_f, t_f) \psi(\vec{x}_f, t_f) &= 0 - \frac{i}{\hbar} \int \hat{H}(K_0(\vec{x}_f t_f, \vec{x} t)) V(\vec{x}, t) \psi(\vec{x}, t) d\vec{x} dt \end{aligned}$$

Por tanto:

$$\left( \frac{\hbar^2}{2m} \nabla_{\vec{x}_f t_f} + i\hbar \frac{\partial}{\partial t_f} \right) K_0(\vec{x}_f t_f, \vec{x} t) = i\hbar \delta(\vec{x} - \vec{x}_f) \delta(t - t_f) \quad (2.30)$$

Esto último era lo que queríamos probar.



### 2.1.2. Matriz $\mathcal{S}$ .

En un experimento de dispersión es razonable suponer que las partículas al principio y al final del proceso son partículas libres, estas ondas planas están distribuidas en todo el espacio. Sin embargo esto último lleva a una contradicción ya que la presencia del centro dispersor no permite que en sus cercanías la solución sea una onda plana. Para resolver este inconveniente se puede proponer lo que se llama una fuente dinámica, que se "prenda y apague" lentamente tal que las partículas en los estados (final/inicial) puedan ser libres y por tanto la aproximación de ondas planas sea válida en este regimen.

Para empezar definamos  $\psi_{in}(\vec{x}_i, t_i)$ ,  $\psi_{out}(\vec{x}_f, t_f)$  como ondas planas para  $t \rightarrow -\infty$ ,  $t \rightarrow \infty$  respectivamente, la amplitud de dispersión se define como:

$$\mathcal{S} = \int \psi_{out}^*(\vec{x}_f t_f) \psi^{(+)}(\vec{x}_f t_f) d\vec{x}_f \quad (2.31)$$

En (2.31) el superíndice (+) denota que  $\psi^{(+)}(\vec{x}t)$  era una onda libre en  $t \rightarrow -\infty$ , usando la serie de Born obtenemos:

$$\begin{aligned} \mathcal{S} &= \int \psi_{out}^*(\vec{x}_f t_f) \psi^{(+)}(\vec{x}_f t_f) d\vec{x}_f = \int \psi_{out}^*(\vec{x}_f t_f) K_0(\vec{x}_f t_f, \vec{x}_i t_i) \psi_{in}(\vec{x}_i t_i) d\vec{x}_f d\vec{x}_i \\ &\quad - \frac{i}{\hbar} \int \psi_{out}^*(\vec{x}_f t_f) K_0(\vec{x}_f t_f, \vec{x}t) V(\vec{x}t) K_0(\vec{x}t, \vec{x}_i t_i) \psi_{in}(\vec{x}_i t_i) d\vec{x}_f d\vec{x}_i d\vec{x} dt \\ &= \int \psi_{out}^*(\vec{x}_f t_f) \phi(\vec{x}_f t_f) d\vec{x}_f \\ &\quad - \frac{i}{\hbar} \int \psi_{out}^*(\vec{x}_f t_f) K_0(\vec{x}_f t_f, \vec{x}t) V(\vec{x}t) K_0(\vec{x}t, \vec{x}_i t_i) \psi_{in}(\vec{x}_i t_i) d\vec{x}_f d\vec{x}_i d\vec{x} dt \end{aligned} \quad (2.32)$$

Si los momentos iniciales y finales son  $\vec{p}_i = \hbar \vec{k}_i$ ,  $\vec{p}_f = \hbar \vec{k}_f$  respectivamente, entonces tenemos que:

$$\psi_{in}(\vec{x}t) = \frac{1}{\sqrt{\tau}} \text{Exp} \left( \frac{i}{\hbar} (\vec{p}_i \cdot \vec{x} - E_i t) \right) \quad (2.33)$$

$$\psi_{out}(\vec{x}t) = \frac{1}{\sqrt{\tau}} \text{Exp} \left( \frac{i}{\hbar} (\vec{p}_f \cdot \vec{x} - E_f t) \right) \quad (2.34)$$

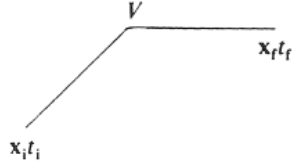
Donde  $E^2 = \frac{p^2}{2m}$  y  $\tau$  es el volumen de integración, el cual es arbitrario. Si sustituimos las expresiones (2.33) y (2.34) en (2.32) obtenemos:

$$\mathcal{S}_{fi} = \delta(\vec{k}_f - \vec{k}_i) - \frac{i}{\hbar} \int \psi_{out}^*(\vec{x}_f t_f) K_0(\vec{x}_f t_f, \vec{x}t) V(\vec{x}t) K_0(\vec{x}t, \vec{x}_i t_i) \psi_{in}(\vec{x}_i t_i) d\vec{x}_f d\vec{x}_i d\vec{x} dt \quad (2.35)$$

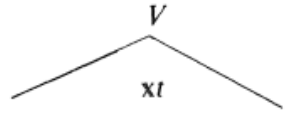
Lo cual nos permite ver la amplitud de dispersion  $\mathcal{S}_{fi}$  como el elemento de una matriz, la **matriz  $\mathcal{S}$  de dispersión**. En (2.35) el primer término solo es representativo cuando no hay interacción y  $\vec{k}_i = \vec{k}_f$ . Las interacciones están representadas en el segundo término.

Es posible representar este segundo término mediante una serie de diagramas a los cuales se les asocian ciertas reglas, estos diagramas reciben el nombre de **Diagramas de Feynmann**. Si nombramos:

$$\mathcal{A} = -\frac{i}{\hbar} \int \psi_{out}^*(\vec{x}_f t_f) K_0(\vec{x}_f t_f, \vec{x} t) V(\vec{x} t) K_0(\vec{x} t, \vec{x}_i t_i) \psi_{in}(\vec{x}_i t_i) d\vec{x}_f d\vec{x}_i d\vec{x} dt \quad (2.36)$$

FIGURA 2.2: Representación de  $\mathcal{A}$ 

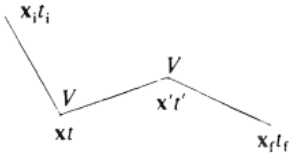
Este diagrama lo podemos descomponer usando la siguiente convención:

FIGURA 2.3: Representación de  $K_0(x_2 t_2, x_1 t_1)$ FIGURA 2.4: Representación de  $\int -\frac{i}{\hbar} V(x t) d\vec{x} dt$ 

Por ejemplo el diagrama correspondiente a término de segundo orden:

$$\begin{aligned} \mathcal{A}^{(2)} = & \left(-\frac{i}{\hbar}\right)^2 \int d\vec{x}_f d\vec{x}_i d\vec{x}' dt' d\vec{x} dt K_0(\vec{x} t, \vec{x}_i t_i) V(\vec{x} t) K_0(\vec{x}' t', \vec{x} t) \\ & \times V(\vec{x}' t') K_0(\vec{x}_f t_f, \vec{x}' t') \psi_{out}^*(\vec{x}_f t_f) \psi_{in}(\vec{x}_i t_i) \end{aligned} \quad (2.37)$$

Es el siguiente: En algunos casos es útil conocer una expresión para el propagador  $K_0$  en

FIGURA 2.5: Representación de  $\mathcal{A}^{(2)}$ 

el espacio de momentos, definimos  $\mathcal{K}_0(\vec{p}_1 t_1, \vec{p}_2 t_2)$  como la amplitud de que una partícula con momento  $\vec{p}_2$  en un instante  $t_2$ , sea observada un instante de tiempo después en  $t_1$  con momento  $\vec{p}_1$ . Así:

$$\begin{aligned} \mathcal{K}_0(\vec{p}_1 t_1, \vec{p}_0 t_0) = & \int \text{Exp} \left( \frac{-i}{\hbar} (\vec{p}_1 \cdot \vec{x}_1) \right) K_0(\vec{x}_1 t_1, \vec{x}_0 t_0) \text{Exp} \left( \frac{-i}{\hbar} (\vec{p}_0 \cdot \vec{x}_0) \right) d\vec{x}_0 d\vec{x}_1 \\ & \Theta(t_1 - t_0) \left( \frac{m}{i\hbar(t_1 - t_0)} \right)^{1/2} \int \text{Exp} \left[ \frac{i}{\hbar} (\vec{p}_0 \cdot \vec{x}_0 - \vec{p}_1 \cdot \vec{x}_1) \right] \\ & \times \text{Exp} \left[ \frac{im(\vec{x}_0 - \vec{x}_1)^2}{2\hbar(t_1 - t_0)} \right] d\vec{x}_0 d\vec{x}_1 \end{aligned} \quad (2.38)$$

Ahora si introducimos las siguientes variables:

$$\vec{x} = \vec{x}_0 - \vec{x}_1; \quad \vec{X} = \vec{x}_0 + \vec{x}_1; \quad \vec{p} = \vec{p}_0 - \vec{p}_1; \quad \vec{P} = \vec{p}_0 + \vec{p}_1 \quad (2.39)$$

Teniendo en cuenta que el Jacobiano de esta transformación es  $J = \left(\frac{1}{2}\right)^3 = \frac{1}{8}$  y con  $\alpha = \frac{m}{2\hbar(t_1 - t_0)}$  podemos escribir:

$$\mathcal{K}_0(\vec{p}_1 t_1, \vec{p}_0 t_0) = \Theta(t_1 - t_0) \left(\frac{\alpha}{i\pi}\right)^{3/2} \frac{1}{8} \int \text{Exp} \left[ \frac{i\vec{p} \cdot \vec{X}}{2\hbar} \right] d\vec{X} \int \text{Exp} \left[ \frac{i\vec{P} \cdot \vec{x}}{2\hbar} \right] e^{i\alpha x^2} d\vec{x} \quad (2.40)$$

La primera integral es  $I_1 = 8(2\pi\hbar)^3 \delta(\vec{p}_0 - \vec{p}_1)$ , la segunda la podemos calcular con la identidad  $\int e^{-ax^2+bx+c} = e^{\frac{b^2}{4a}+c} \left(\frac{\pi}{a}\right)^{1/2}$ , por tanto  $I_2 = \left(\frac{i\pi}{\alpha}\right)^{3/2} \text{Exp} \left[ \frac{-i\vec{P}^2}{8\hbar^3 4i\alpha} \right]$ , por tanto:

$$\mathcal{K}_0(\vec{p}_1 t_1, \vec{p}_0 t_0) = (2\pi\hbar)^3 \Theta(t_1 - t_0) \delta(\vec{p}_1 - \vec{p}_0) \text{Exp} \left[ \frac{-i\vec{P}^2(t_1 - t_0)}{8m\hbar} \right] \quad (2.41)$$

Si también realizamos la transformada de Fourier en el tiempo, obtenemos:

$$\mathcal{K}_0(\vec{p}_1 E_1, \vec{p}_0 E_0) = (2\pi\hbar)^4 \delta(\vec{p}_0 - \vec{p}_1) \delta(E_1 - E_0) \frac{i\hbar}{E - \frac{p_1^2}{2m} + i\epsilon} \quad (2.42)$$

De aquí las reglas de Feynmann en el espacio de momentos son:

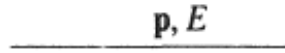


FIGURA 2.6: Representación de  $\frac{1}{(2\pi\hbar)^4} \frac{i\hbar}{E - \frac{p_1^2}{2m} + i\epsilon}$

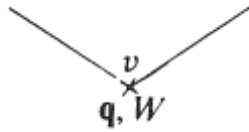


FIGURA 2.7: Representación de  $\frac{-i}{\hbar} (2\pi\hbar)^4 v(\vec{q}, W)$

### 2.1.3. Propiedades adicionales de las integrales de trayectoria.

Ya hemos mostrado que la amplitud de transición entre un estado  $(q_i, t_i)$  a  $(q_f, t_f)$  está dada por:

$$\langle q_f t_f | q_i t_i \rangle = \mathcal{N} \int \mathcal{D}q \text{Exp} \left\{ \frac{i}{\hbar} \int_{t_i}^{t_f} \mathcal{L}(q, \dot{q}) dt \right\} \quad (2.43)$$

En un experimento real, las partículas creadas en algún instante en el pasado son destruidas al ser detectadas, esto lo podemos interpretar de la siguiente manera: El estado de vacío en  $t = -\infty$  evoluciona al mismo vacío en  $t = \infty$ . En este proceso una partícula

es creada para ser posteriormente destruida, todo esto en presencia de una fuente generadora de estos procesos. Así es razonable poner nuestro interés en calcular transiciones vacío-vacío en presencia de una fuente.

Podemos modificar el Lagrangiano de la de la siguiente manera:  $\mathcal{L} \rightarrow \mathcal{L} + \hbar J(t)q(t)$ . Si  $|0, t\rangle^J$  es el estado fundamental en presencia de la fuente, entonces la amplitud de transición se define de la siguiente manera:

$$Z[J] \propto \langle 0, \infty | 0, -\infty \rangle^J \quad (2.44)$$

La fuente  $J(t) = 0$  para  $t > t'$ ,  $t'' < t$ . Introduzcamos entonces  $T$  y  $T'$  de tal manera que  $T < t''$ ,  $T' > t'$  por tanto la amplitud (2.44) es:

$$\langle Q'T'|QT \rangle = \mathcal{N} \int \mathcal{D}q \text{Exp} \left\{ \frac{i}{\hbar} \int_T^{T'} \mathcal{L}(q, \dot{q}) dt \right\} \quad (2.45)$$

Podemos escribir:

$$\langle Q'T'|QT \rangle^J = \int dq' dq \langle Q'T'|qt't' \rangle \langle qt't'|qt \rangle \langle qt|QT \rangle \quad (2.46)$$

Ahora si denotamos  $|E_q\rangle$  como un autoestado del hamiltoniano podemos usar estos estados para expandir:

$$\begin{aligned} \langle Q'T'|qt't' \rangle &= \langle Q' | \text{Exp} \left[ \frac{-i}{\hbar} HT' \right] \text{Exp} \left[ \frac{i}{\hbar} Ht' \right] | q' \rangle \\ &= \sum_{mn} \phi^*(q') \phi(Q') \langle E_{Q'} | \text{Exp} \left[ \frac{-i}{\hbar} HT' \right] \text{Exp} \left[ \frac{i}{\hbar} Ht' \right] | E_{q'} \rangle \\ &= \sum_m \phi^*(q') \phi(Q') \text{Exp} \left[ \frac{i}{\hbar} E_m(t' - T') \right] \end{aligned} \quad (2.47)$$

De la misma manera:

$$\langle qt|QT \rangle = \sum_m \phi^*(Q) \phi(q) \text{Exp} \left[ \frac{i}{\hbar} E_m(t - T) \right] \quad (2.48)$$

Introduciendo (2.47) y (2.48) en (2.46):

$$\begin{aligned} \langle Q'T'|QT \rangle &= \int dq' dq \sum_m \phi_m(Q') \phi_m(q', t) \text{Exp} \left[ \frac{-i}{\hbar} E_m T' \right] \\ &\quad \times \sum_n \phi_n^*(Q) \phi_n^*(q, t) \text{Exp} \left[ \frac{i}{\hbar} E_n T \right] \langle qt't'|qt \rangle^J \end{aligned} \quad (2.49)$$

Si hacemos una rotación de Wick de  $T$  y  $T'$  nos damos cuenta que el término que menos sufre de supresión en la integral (2.49) es el asociado a  $m = n = 0$ , por tanto:

$$\int dq' dq \phi_0^*(q', t') \langle q' t' | q t \rangle^J \phi_0(q, t) = \lim_{T \rightarrow -\infty e^{-i\delta}, T' \rightarrow \infty e^{-i\delta}} \frac{\langle Q' T' | Q T \rangle^J}{\phi_0^*(Q) \phi_0(Q') \text{Exp} \left[ \frac{-i}{\hbar} E_0 (T' - T) \right]} \quad (2.50)$$

El lado de (2.50) es simplemente el valor de expectación en el vacío de la amplitud de transición, justo lo que buscábamos y el denominador de la parte derecha de la ecuación es simplemente una constante, así:

$$\langle 0, \infty | 0, -\infty \rangle^J \propto \lim_{T \rightarrow -\infty e^{-i\delta}, T' \rightarrow \infty e^{-i\delta}} \langle Q' T' | Q T \rangle^J \quad (2.51)$$

Otra forma equivalente de obtener este mismo resultado es: en vez de hacer una rotación de Wick, podemos agregar una pequeña cantidad imaginaria negativa al hamiltoniano  $H + (-\frac{1}{2}i\epsilon q^2)$ , lo cual es equivalente a restar esta misma cantidad a  $\mathcal{L}$ , de aquí que:

$$Z[J] = \int \mathcal{D}q \text{Exp} \left\{ \frac{i}{\hbar} \int_{-\infty}^{\infty} (\mathcal{L}(q, \dot{q}) + \hbar J q + \frac{1}{2}i\epsilon q^2) dt \right\} \quad (2.52)$$

En general se cumple que:

$$\langle q_f t_f | T[q(t_1) \dots q(t_n)] | q_i t_i \rangle = \mathcal{N} \int \mathcal{D}q q(t_1) \dots q(t_n) \text{Exp} \left[ \frac{i}{\hbar} \int_{t_i}^{t_f} \mathcal{L} dt \right] \quad (2.53)$$

Donde  $T$  es el operador de ordenamiento temporal. Si derivamos funcionalmente la expresión para  $Z[J]$  respecto a  $J(t)$  obtenemos:

$$\frac{\delta Z[J]}{\delta J(t_1)} \Big|_{J=0} = i\mathcal{N} \int \mathcal{D}q q(t_1) \text{Exp} \left[ \frac{i}{\hbar} \int_{t_i}^{t_f} \mathcal{L} dt \right] \quad (2.54)$$

Haciendo esto  $n$  veces:

$$\frac{\delta^n Z[J]}{\delta J(t_1) \dots \delta J(t_n)} \Big|_{J=0} = i^n \mathcal{N} \int \mathcal{D}q q(t_1) \dots q(t_n) \text{Exp} \left[ \frac{i}{\hbar} \int_{t_i}^{t_f} \mathcal{L} dt \right] \quad (2.55)$$

De igualar las ecuaciones (2.53), (2.55) y al tener en cuenta agregar el factor  $\frac{1}{2}i\epsilon q^2$  (el cual simplemente va a hacer converger los estados inicial y final en (2.53) a estados de vacío) obtenemos:

$$\frac{\delta^n Z[J]}{\delta J(t_1) \dots \delta J(t_n)} \Big|_{J=0} \propto i^n \langle 0, \infty | T[q(t_1) \dots q(t_n)] | 0, -\infty \rangle \quad (2.56)$$

Estas últimas expresiones que hemos derivado van a ser importantes como punto de partida a la hora de tratar de cuantizar una teoría de campos vía el formalismo de integrales de trayectoria.

## 2.2. El experimento de la doble rendija.

En esta sección aplicaremos lo aprendido en la §2.1 para resolver vía integrales de trayectoria el conocido problema de la difracción de electrones por una y dos rendijas.

### 2.2.1. El propagador de una partícula libre.

Con este objetivo en mente primero necesitamos conocer el propagador de una partícula libre, sabemos que en un espacio plano de una dimensión la integral de trayectoria está dada por la expresión (2.17), podemos hacer facilmente una analogía para un espacio euclídeo d-dimensional. En este caso el propagador es:

$$K(x_f t_f, x_i t_i) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{(2\pi i \hbar \epsilon / m)^{d/2}} \prod_{k=1}^n \int \frac{d^d x_k}{(2\pi i \hbar \epsilon / m)^{d/2}} \times \text{Exp} \left\{ \frac{i}{\hbar} \sum_{k=1}^n \epsilon \left[ \frac{m(x_k - x_{k-1})^2}{2\epsilon^2} - V(x_k) \right] \right\} \quad (2.57)$$

donde  $\epsilon = (t_i - t_f)/n$ ; para una partícula libre  $V(x_k) = 0$ , entonces:

$$K(x_f t_f, x_i t_i) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{(2\pi i \hbar \epsilon / m)^{d/2}} \prod_{k=1}^n \int \frac{d^d x_k}{(2\pi i \hbar \epsilon / m)^{d/2}} \text{Exp} \left\{ \frac{i}{\hbar} \sum_{k=1}^n \left[ \frac{m(x_k - x_{k-1})^2}{2\epsilon} \right] \right\} \quad (2.58)$$

Para  $d = 1$ , integremos los términos que tienen que ver con  $x_1$ :

$$\begin{aligned} & \frac{1}{(2\pi i \hbar \epsilon / m)^{1/2}} \prod_{k=1}^n \int \frac{dx_1}{(2\pi i \hbar \epsilon / m)^{1/2}} \text{Exp} \left\{ \frac{im(x_1 - x_0)^2}{2\hbar \epsilon} \right\} \text{Exp} \left\{ \frac{im(x_2 - x_1)^2}{2\hbar \epsilon} \right\} \\ &= \frac{1}{(2\pi i \hbar \epsilon / m)} \int dx_1 \text{Exp} \left\{ \frac{-m}{2i\hbar} (2x_1^2 - 2x_1(x_2 + x_0) + x_0^2 + x_2^2) \right\} \\ & \text{Usando } \int e^{-ax^2+bx+c} dx = e^{\frac{b^2}{4a}+c} \left( \frac{\pi}{a} \right)^{1/2} \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi i \hbar (2\epsilon)/m}} \text{Exp} \left\{ \frac{im(x_2 - x_0)^2}{2\hbar (2\epsilon)} \right\} \end{aligned}$$

Ahora al seguir con la integral de  $x_2$  queda:

$$\begin{aligned} & \frac{1}{(2\pi i \hbar \epsilon / m)\sqrt{2}} \int dx_2 \text{Exp} \left\{ \frac{im}{2\hbar (2\epsilon)} (x_2 - x_0)^2 \right\} \text{Exp} \left\{ \frac{im}{2\hbar \epsilon} (x_3 - x_2)^2 \right\} \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi i \hbar (3\epsilon)/m}} \text{Exp} \left\{ \frac{im(x_3 - x_0)^2}{2\hbar (3\epsilon)} \right\} \end{aligned} \quad (2.59)$$

Así por inducción:

$$\begin{aligned} K(x_f t_f, x_i t_i) &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi i \hbar (n\epsilon)/m}} \text{Exp} \left\{ \frac{im(x_f - x_i)^2}{2\hbar (n\epsilon)} \right\} \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi i \hbar (t_f - t_i)/m}} \text{Exp} \left\{ \frac{im(x_f - x_i)^2}{2\hbar (t_f - t_i)} \right\} \end{aligned} \quad (2.60)$$

Por tanto en 3-D:

$$K^{3D}(x_f t_f, x_i t_i) \equiv K_0^{3D} = \left( \frac{m}{2\pi i \hbar (t_f - t_i)} \right)^{3/2} \text{Exp} \left\{ \frac{im |\vec{x}_f - \vec{x}_i|^2}{2\hbar (t_f - t_i)} \right\} \quad (2.61)$$

### 2.2.2. El problema de difracción e interferencia.

Consideremos el siguiente experimento: una fuente de electrones en  $(x, y, z) = (0, 0, 0)$  y dos rendijas en  $Z = D$  con ancho  $2a$  y centradas en  $x = \pm b$ , tal como se muestra en la figura 2.6. Adicionalmente consideramos que las barreras son lo suficientemente largas en  $y$  como para poder despreciar los efectos de difracción inducidos en el caso de que estas fueran finitas.

Así reducimos la dimensión del propagador en  $y$ :

$$\begin{aligned} K_0^{2D}(\vec{r}t, \vec{r}'t') &= \int_{-\infty}^{\infty} dy K_0^{3D}(\vec{r}t, \vec{r}'t') \\ &= \frac{m}{2\pi i \hbar (t - t')} \text{Exp} \left\{ \frac{im |\vec{x} - \vec{x}'|^2}{2\hbar (t - t')} \right\} \end{aligned} \quad (2.62)$$

Donde  $|\vec{x} - \vec{x}'|^2$  se define como el módulo cuadrado de la distancia en el plano  $z - x$ . Para modelar las rendijas vamos a usar las siguientes funciones escalón:

$$\chi_{[b-a, b+a]}(\omega) = \begin{cases} 0 & \omega > b + a, \omega < b - a \\ 1 & b - a < \omega < b + a \end{cases}$$

La pregunta es. ¿cuál es la probabilidad de encontrar un electrón en  $(z = L + D, x)$ ?, dado que haya salido de  $(x = 0, z = 0)$ . Asumiendo que la fuente libera electrones individualmente podemos despreciar la interacción entre ellos. Como sabemos la probabilidad

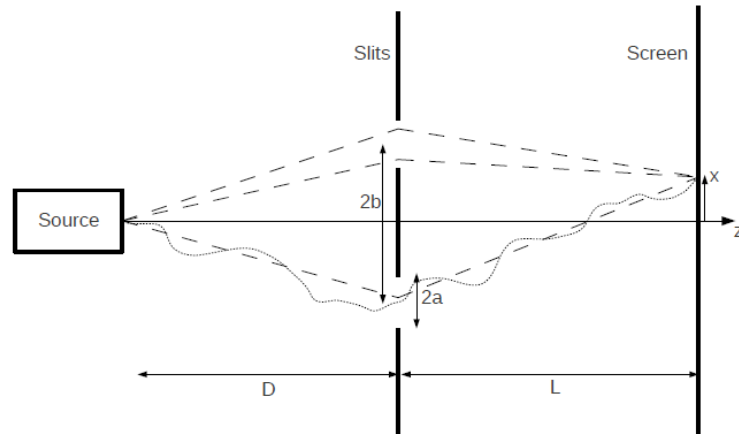


FIGURA 2.8: Experimento de la doble rendija.

está dada por el módulo al cuadrado de la amplitud, la cual calcularemos usando el propagador. Como explicamos anteriormente hemos tomado  $d = 2$  en el propagador, sin embargo vamos a explicar por qué podemos reducir aún más la complejidad del problema: consideremos la difracción por una sola rendija y que el movimiento está dividido en dos regiones, uno empezando desde la fuente y llegando a las rendijas un tiempo  $T$  después de la emisión y otro de la rendija a la pantalla, este último de duración  $\tau$ .

Sin embargo no hay nada en las leyes de la mecánica cuántica que nos diga que podemos separar el movimiento en dos tramos, esto debido a que realmente no tenemos certeza de la posición de la partícula en un tiempo  $T$ . En pocas palabras no sabemos cuando el electrón ha cruzado la rendija.

No obstante podemos considerar esta imagen clásica para estudiar el problema, veamos por qué: el electrón tiene un momentum  $p_z = \hbar k_z$ , el cual está relacionado con la velocidad clásica como  $V_z = D/T = L/\tau$ , aquí suponemos que  $D$  es suficientemente grande comparado con las dimensiones en  $x$  ( $x, a, b \ll D, L$ ). Adicionalmente la longitud de onda  $\lambda$  de la partícula es aproximadamente igual a la contribución en  $z$  (esto es como si tomáramos partículas que no se desvían demasiado de la trayectoria clásica). Si  $\lambda \approx \lambda_z = 2\pi\hbar/(mv_z)$  entonces  $\lambda \ll D, L$ . Esto quiere decir que el movimiento en  $z$  es prácticamente clásico. Note que cuánticamente es posible que el electrón pase a través de la rendija varias veces, sin embargo la probabilidad de este suceso ha de ser baja.

Teniendo en cuenta lo anterior:

$$\begin{aligned} K_{a,b}^{2D}((x, L+D), T+\tau; (0,0), 0) &= \int_{-\infty}^{\infty} d\omega \chi_{[b-a, b+a]}(\omega) K_0^{2D}((x, L+D), T+\tau; (\omega, D), T) \\ &\quad \times K_0^{2D}((\omega, D), T; (0,0), 0) \\ &= \frac{e^{\frac{imL^2}{2\hbar\tau}}}{\sqrt{2\pi i\hbar\tau/m}} \frac{e^{\frac{imD^2}{2\hbar T}}}{\sqrt{2\pi i\hbar T/m}} \int_{b-a}^{b+a} \frac{e^{\frac{im\omega^2}{2\hbar T}}}{\sqrt{2\pi i\hbar T/m}} \frac{e^{\frac{im(x-\omega)^2}{2\hbar\tau}}}{\sqrt{2\pi i\hbar\tau/m}} d\omega \end{aligned}$$

Por tanto el propagador es el producto de dos propagadores independientes:

$$K_z(L+D, T+\tau; 0, 0) = \frac{e^{\frac{imL^2}{2\hbar\tau}}}{\sqrt{2\pi i\hbar\tau/m}} \frac{e^{\frac{imD^2}{2\hbar T}}}{\sqrt{2\pi i\hbar T/m}} \quad (2.63)$$

$$K_x(x, T+\tau; 0, 0) = \int_{b-a}^{b+a} \frac{e^{\frac{im\omega^2}{2\hbar T}}}{\sqrt{2\pi i\hbar T/m}} \frac{e^{\frac{im(x-\omega)^2}{2\hbar\tau}}}{\sqrt{2\pi i\hbar\tau/m}} d\omega \quad (2.64)$$

Una forma de comprobar que las ecuaciones (2.63) y (2.64) son correctas es ver que si quitamos las rendijas ( $a \rightarrow \infty$ ) e integramos en  $D$  en el intervalo  $(-\infty, \infty)$  recuperamos el propagador de una partícula libre.



En lo que sigue nos vamos a dar a la tarea de mostrar que podemos expresar la amplitud en términos de las conocidas integrales de Fresnel, sabemos que  $P(x; a, b) = |A(x; a, b)|^2$  y de (2.64):

$$A_1(x; a, b) = \int_{b-a}^{b+a} \frac{e^{\frac{im\omega^2}{2\hbar T}}}{\sqrt{2\pi i\hbar T/m}} \frac{e^{\frac{im(x-\omega)^2}{2\hbar \tau}}}{\sqrt{2\pi i\hbar \tau/m}} d\omega \quad (2.65)$$

Organicemos de una manera diferente el exponencial de la ecuación (2.65):

$$\begin{aligned} \frac{m}{2\hbar\tau}(x-\omega)^2 + \frac{m\omega^2}{2\hbar T} &= \frac{m}{2\hbar} \left[ \frac{1}{T} + \frac{1}{\tau} \right] \left[ \omega^2 - \frac{2x\omega}{\left(\frac{\tau}{T} + 1\right)} + \left(\frac{x}{\frac{\tau}{T} + 1}\right)^2 - \left(\frac{x}{\frac{\tau}{T} + 1}\right)^2 \right] + \frac{mx^2}{2\hbar\tau} \\ &= \frac{m}{2\hbar} \left[ \frac{1}{T} + \frac{1}{\tau} \right] \left[ \omega - \frac{x}{1 + \tau/T} \right]^2 + \frac{mx^2}{2\hbar} \left[ \frac{1}{\tau} - \frac{T}{(\tau + T)\tau} \right] \\ &= \left[ \frac{m}{2\hbar T} + \frac{m}{2\hbar \tau} \right] \left[ \omega - \frac{x}{1 + \tau/T} \right]^2 + \frac{mx^2}{2\hbar(T + \tau)} \end{aligned} \quad (2.66)$$

Por tanto reemplazando (2.66) en (2.65)

$$A_1(x; a, b) = \frac{e^{\frac{imx^2}{2\hbar(T+\tau)}}}{\sqrt{2\pi i\hbar(T+\tau)/m}} \int_{b-a}^{b+a} d\omega \sqrt{\frac{T+\tau}{2\pi\hbar T\tau/m}} \text{Exp} \left\{ \frac{i(T+\tau)}{2\hbar T\tau/m} \left( \omega - \frac{x}{1 + \tau/T} \right)^2 \right\} \quad (2.67)$$

Ahora si  $\omega' = \sqrt{\frac{T+\tau}{\pi\hbar T\tau/m}} \left( \omega - \frac{x}{1 + \tau/T} \right)$ :

$$\Rightarrow A_1(x; a, b) = \frac{e^{\frac{imx^2}{2\hbar(T+\tau)}}}{\sqrt{2\pi i\hbar(T+\tau)/m}} \int_{\alpha_-(x)}^{\alpha_+(x)} d\omega' \sqrt{\frac{T+\tau}{2\pi\hbar T\tau/m}} \text{Exp} \left\{ \frac{i\pi\omega'^2}{2} \right\} \quad (2.68)$$

Donde  $\alpha_{\pm}(x) = \sqrt{\frac{T+\tau}{\pi\hbar T\tau/m}}(b \pm a) - \frac{x}{\sqrt{\pi\hbar T\tau/m}} \sqrt{\frac{T}{T+\tau}}$ . Si descomponemos el exponencial de la ecuación (2.68) en su parte imaginaria y real, obtenemos las famosas integrales de Fresnel, definidas como:

$$C[u] \equiv \int_0^u d\omega \cos\left(\frac{\pi\omega^2}{2}\right) \quad ; \quad S[u] \equiv \int_0^u d\omega \sin\left(\frac{\pi\omega^2}{2}\right) \quad (2.69)$$

Así:

$$\begin{aligned} A_1(x; a, b) &= \frac{e^{\frac{imx^2}{2\hbar(T+\tau)}}}{\sqrt{(2i)^2\pi\hbar(T+\tau)/m}} \\ &\times [C[\alpha_+(x; a, b)] - C[\alpha_-(x; a, b)] + iS[\alpha_+(x; a, b)] - iS[\alpha_-(x; a, b)]] \end{aligned} \quad (2.70)$$

$$A_2(x; a, b) = A_1(x; a, -b) \quad (2.71)$$

Para dos rendijas podemos calcular la amplitud total simplemente sumando:

$$A(x; a, b) = A_1(x; a, b) + A_2(x; a, b) \quad (2.72)$$

### 2.2.3. Difracción por una rendija.

En el caso de una sola rendija tenemos que  $b = 0$ , además recordando que  $\lambda \approx \lambda_z = h/mv_z$ ;  $v_z = L/\tau = D/T$ , podemos escribir:

$$\alpha(x, a) = \sqrt{N_F(a)}\sqrt{1 + L/D} \left[ 1 - \frac{x}{a(1 + L/D)} \right] \quad ; \quad N_F(a) = 2a^2/\lambda L \quad (2.73)$$

Las integrales de Fressnel tienen un comportamiento diferente dependiendo del valor de  $N_F(a)$ :

$$C(\pm u) = \pm \frac{1}{2} + \frac{1}{\pi u} \text{Sin} \left( \frac{\pi u^2}{2} \right), \quad u \geq 1 \quad (2.74)$$

$$S(\pm u) = \pm \frac{1}{2} - \frac{1}{\pi u} \text{Sin} \left( \frac{\pi u^2}{2} \right), \quad u \geq 1 \quad (2.75)$$

Definiendo  $\eta \equiv 1 + L/D$  y  $\gamma = \eta - 1$ , en el caso  $\frac{x}{a\eta} - 1 \gg \frac{1}{\sqrt{N_F(a)\eta}}$  encontramos que:

$$\alpha(x, a) \ll -1 \quad (2.76)$$

$$\alpha(x, -a) \gg 1 \quad (2.77)$$

Por tanto:

$$C[\alpha(x, \pm a)] = \pm \frac{1}{2} + \frac{1}{\pi \alpha(x, \pm a)} \text{Sin} \left( \frac{\pi \alpha(x, \pm a)^2}{2} \right) \quad (2.78)$$

$$S[\alpha(x, \pm a)] = \pm \frac{1}{2} - \frac{1}{\pi \alpha(x, \pm a)} \text{Sin} \left( \frac{\pi \alpha(x, \pm a)^2}{2} \right) \quad (2.79)$$

Es fácil mostrar que  $C[\alpha_-(x, a, o)] = -C[\alpha(x, -a)]$  y  $S[\alpha_-(x, a, o)] = -S[\alpha(x, -a)]$ , con esto, y usando la ecuación (2.70):

$$P^{(1\text{rendija})}(x; a, b) = |A(x; a, b)|^2 = \frac{1}{2\lambda(L+D)} ([C(\alpha(x, a)) + C(\alpha(x, -a))]^2 + [S(\alpha(x, a)) + S(\alpha(x, -a))]^2) \quad (2.80)$$

Usando las ecuaciones (2.78), (2.79) y (2.80) encontramos:

$$P^{(1\text{rendija})}(x, a) \simeq \frac{2\gamma}{\pi^2 \eta^2} \left( \frac{a^2}{\left(\frac{x^2}{\eta^2} - a^2\right)^2} + \frac{1}{\left(\frac{x^2}{\eta^2} - a^2\right)} \text{Sin}^2 \left( \pi N_F(a) \frac{x}{a} \right) \right) \quad (2.81)$$

En el límite  $N_F(a) \ll 1 \Rightarrow \frac{x}{\eta} \gg a$ , tenemos la siguiente aproximación:

$$P^{(1\text{rendija})}(x, a) \simeq \frac{2\gamma}{\pi^2 x^2} \text{Sin}^2 \left( \pi N_F(a) \frac{x}{a} \right) \quad (2.82)$$

Este límite es conocido como el regimen de Fraunhofer (Pantalla lejana), Figura 2.9. Es importante recalcar que en el regimen intermedio ( $N_F(a) \approx 1$ ), las aproximaciones (2.81) y (2.82) siguen siendo válidas. Sin embargo para  $N_F(a) \ll 1$ , obtenemos diferentes

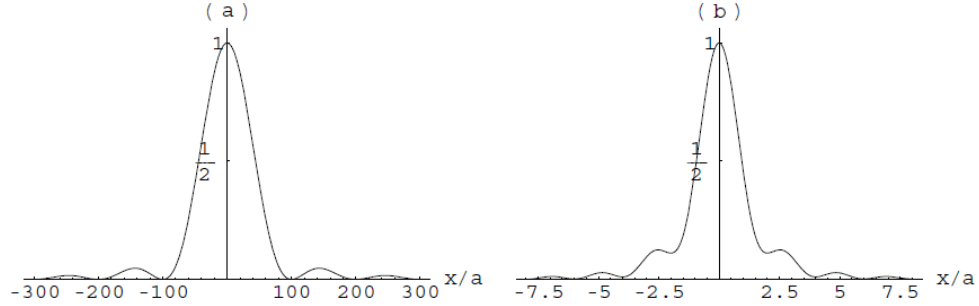


FIGURA 2.9: Curva de difracción para una sola rendija, en la figura (a)  $N_F(a) = 0,01$ , en (b)  $N_F(a) = 0,5$ . Tomado de [1]

aproximaciones asintóticas:

$$P^{(1\text{rendija})}(x) \simeq \frac{\gamma}{\eta} \left( \frac{\sqrt{N_F(a)}}{2a} + \frac{\sin\left(\frac{\pi}{2} N_F(a) \eta \left(1 - \frac{x}{a\eta}\right)^2\right)}{2\pi\sqrt{\eta}\left(a - \frac{x}{\eta}\right)} + \frac{\sin\left(\frac{\pi}{2} N_F(a) \eta \left(1 + \frac{x}{a\eta}\right)^2\right)}{2\pi\sqrt{\eta}\left(a + \frac{x}{\eta}\right)} \right)^2 + \frac{\gamma}{\eta} \left( \frac{\sqrt{N_F(a)}}{2a} - \frac{\cos\left(\frac{\pi}{2} N_F(a) \eta \left(1 - \frac{x}{a\eta}\right)^2\right)}{2\pi\sqrt{\eta}\left(a - \frac{x}{\eta}\right)} - \frac{\cos\left(\frac{\pi}{2} N_F(a) \eta \left(1 + \frac{x}{a\eta}\right)^2\right)}{2\pi\sqrt{\eta}\left(a + \frac{x}{\eta}\right)} \right)^2, |x| < a\eta \quad (2.83)$$

$$P^{(1\text{rendija})}(x, a) \simeq \frac{2\gamma}{\pi^2 \eta^2} \left( \frac{a^2}{\left(\frac{x^2}{\eta^2} - a^2\right)^2} + \frac{1}{\left(\frac{x^2}{\eta^2} - a^2\right)} \sin^2\left(\pi N_F(a) \frac{x}{a}\right) \right), |x| > a\eta \quad (2.84)$$

Esto se debe a que las aproximaciones asintóticas tienen el siguiente comportamiento:

$$\alpha(x, \pm a) \gg 1, \text{ si } N_F(a) \gg 1 \text{ y } |x| < a\eta \quad (2.85)$$

$$\pm \alpha(x, \mp a) \gg 1, \text{ si } N_F(a) \gg 1 \text{ y } |x| > a\eta \quad (2.86)$$

La función (2.83) oscila rápidamente alrededor del valor constante  $N_F(a)\gamma/2a^2\eta = 1/(\lambda_z(L + D))$  en  $|x| < a\eta$  y la función (2.84) decrece rápidamente a 0 en  $|x| > a\eta$ . La curva de difracción se muestra en la figura 2.10.

#### 2.2.4. Interferencia y difracción por dos rendijas.

Podemos calcular la curva de difracción para dos rendijas usando la siguiente expresión:

$$P^{(2\text{rendija})}(x; a, b) = P_1(x; a, b) + P_2(x; a, b) + I_{12}(x; a, b) \quad (2.87)$$

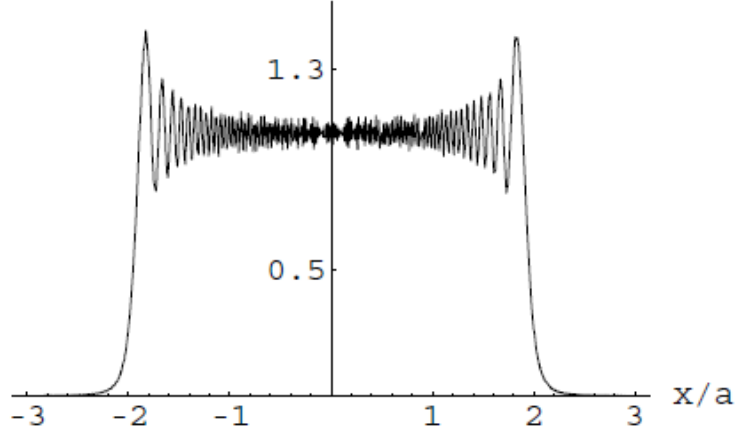


FIGURA 2.10: Curva de difracción para una sola rendija, en la figura  $N_F(a) = 100$ . Tomado de [1]

donde:

$$\begin{aligned}
 P_1(x; a, b) &= |A_1(x; a, b)|^2 \\
 &= \frac{\gamma}{2\lambda L \eta} ([C(\alpha_+(x; a, b) - C(\alpha(x; a, b))]^2 + [S(\alpha_+(x; a, b) - S(\alpha(x; a, b))]^2) \\
 P_2(x; a, b) &= |A_2(x; a, b)|^2 = P_1(x; a, -b)
 \end{aligned} \tag{2.88}$$

Y el término de interferencia:

$$\begin{aligned}
 I_{12}(x; a, b) &= A_1(x; a, b)A_2(x; a, b)^* + A_2(x; a, b)A_1(x; a, b)^* \\
 &= \frac{\gamma}{\lambda L \eta} ([C(\alpha_+(x; a, b) - C(\alpha(x; a, b))][C(\alpha_+(x; a, -b) - C(\alpha(x; a, -b))] \\
 &\quad + [S(\alpha_+(x; a, b) - S(\alpha(x; a, b))][S(\alpha_+(x; a, -b) - S(\alpha(x; a, -b))] \tag{2.89}
 \end{aligned}$$

Hay que notar que en el caso de dos rendijas hay un término adicional, llamado el *término de interferencia*, este es similar al encontrado en óptica. Esto resulta en un efecto de modulación de la curva de difracción dada por la suma de los términos de la ecuación (2.88).

Definamos los numeros de Fressnel:

$$N_F(a) \equiv 2a^2/\lambda_z L; \quad N_F(b) \equiv 2b^2/\lambda_z L; \quad N_F \equiv 2ab/\lambda_z L = \sqrt{N_F(a)N_F(b)}/2 \tag{2.90}$$

En el caso de dos rendijas de ancho  $2a$  y separadas por una distancia  $2b$ , en el caso en que  $b \gg a$  tenemos los siguientes comportamientos, que se dividen en dos fases:

- Si  $N_F \ll 1$ , estamos en la *fase mezclada*, es decir, encontramos una curva de interferencia modulada por la curva de difracción de una rendija de tamaño  $a$ . En

este caso estamos en el regimen de Fressnel,  $N_F(a) \ll 1$ . Este se muestra en la figura 2.11(a).

- Si  $N_F \gg 1$ , estamos en la *fase separada*, es decir, hay dos curvas de interferencia, moduladas por las curvas de difracción correspondientes a cada rendija, cada curva centrada en  $\pm b\eta$ . La forma de las curvas de difracción dependen de  $N_F(a)$  y son similares al caso de una rendija (donde teniamos dos regímenes establecidos: Fressnel y Fraunhofer). En la figura 2.11(c),  $N_F(a) \ll 1$  y en la figura 2.11(d)  $N_F(a) \gg 1$ .
- Si  $N_F \sim 1$  observamos una separación entre dos curvas de interferencia, moduladas por una curva de difracción que corresponde al de una rendija en el caso de regimen intermedio, esto se muestra en la figura 2.11(b).

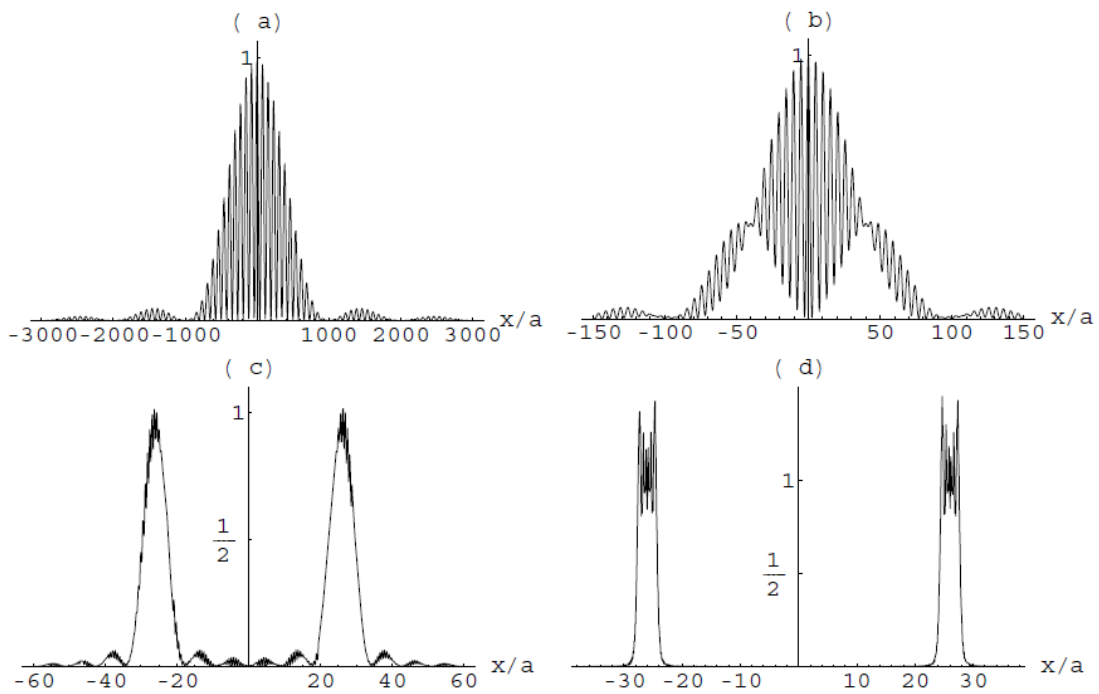


FIGURA 2.11: Curva de difracción para dos rendijas, en la figura  $N_F(a) = 0,001$  para (a), 0.015 para (b), 0.12 para (c), 6 para (d) . Tomado de [1]

### 2.3. Campos escalares.

En analogía con lo estudiado en la sección anterior para una partícula, definimos la transición vacío-vacío en presencia de una fuente  $J(x)$  para un campo  $\phi(x)$  como:

$$Z[J] = \int \mathcal{D}\phi \text{Exp} \left\{ i \int d^4x \left[ \mathcal{L}(\phi) + J(x)\phi(x) + \frac{i}{2}\epsilon\phi^2(x) \right] \right\} \quad (2.91)$$

En este caso en vez de dividir el espacio-tiempo en segmentos, dividimos el espacio 4 dimensional (4D) de Minkowski en hipervolúmenes (4D) asumiendo que en cada uno de estos volúmenes  $\phi(x)$  es constante. Si  $\mathcal{L} = \mathcal{L}(Klein - Gordon) = \frac{1}{2}(\partial_\mu\phi\partial^\mu\phi - m^2\phi^2)$ , tenemos:

$$Z_0[J] = \int \mathcal{D}\phi \text{Exp} \left\{ i \int d^4x \left[ \frac{1}{2}(\partial_\mu\phi\partial^\mu\phi - (m^2 - i\epsilon)\phi^2) + J\phi \right] \right\} \quad (2.92)$$

Ahora como  $\int \partial_\mu\phi\partial^\mu\phi = \int \partial_\mu(\phi\partial^\mu\phi) - \int \phi\Box\phi = 0 - \int \phi\Box\phi$ , donde hemos usado que la primera integral es una cuatridivergencia y puede ser expresada como una integral de superficie, y poniendo la condición de frontera de que los campos se anulan en el borde, este término es cero. Por tanto (2.92) queda:

$$Z_0[J] = \int \mathcal{D}\phi \text{Exp} \left\{ -i \int d^4x \left[ \frac{1}{2}(\phi\Box\phi + (m^2 - i\epsilon)\phi^2) - J\phi \right] \right\} \quad (2.93)$$

El campo  $\phi(x)$  no satisface la ecuación de K-G. Para evaluar  $Z_0[J]$  separemos  $\phi(x)$ :

$$\phi \rightarrow \phi(x) + \phi_0(x) \quad (2.94)$$

Se puede probar fácilmente que  $\int \phi_0(\Box + m^2 - i\epsilon)\phi = \int \phi(\Box + m^2 - i\epsilon)\phi_0$ , por tanto:

$$\begin{aligned} \int d^4x \left[ \frac{1}{2}\phi(\Box + m^2 - i\epsilon)\phi - J\phi \right] &\rightarrow \int d^4x \left[ \frac{1}{2}\phi(\Box + m^2 - i\epsilon)\phi + \phi(\Box + m^2 - i\epsilon)\phi_0 \right. \\ &\quad \left. + \frac{1}{2}\phi_0(\Box + m^2 - i\epsilon)\phi_0 - J\phi - J\phi_0 \right] \end{aligned} \quad (2.95)$$

Si escogemos ahora  $\phi_0$  tal que satisfaga:

$$(\Box + m^2 - i\epsilon)\phi_0(x) = J(x) \quad (2.96)$$

Entonces (2.95) queda como:

$$\int d^4x \left[ \frac{1}{2}\phi(\Box + m^2 - i\epsilon)\phi - \frac{1}{2}J\phi_0 \right] \quad (2.97)$$

La solución a (2.96) es:

$$\phi_0(x) = - \int \Delta_F(x-y) J(y) d^4y \quad (2.98)$$

Donde  $\Delta_F(x-y)$ , llamado el propagador de Feynmann, es la función de green del operador  $(\square + m^2 - i\epsilon)$  y cumple:

$$(\square + m^2 - i\epsilon)\Delta_F(x) = -\delta^4(x) \quad (2.99)$$

Con todo lo anterior podemos escribir  $Z_0[J]$  como:

$$Z_0[J] = \text{Exp} \left\{ -\frac{i}{2} \int d^4x d^4y J(x) \Delta_F(x-y) J(y) \right\} \int \mathcal{D}\phi \text{Exp} \left\{ -\frac{i}{2} \int d^4x \left[ \frac{1}{2} (\phi(\square + m^2 - i\epsilon)\phi) \right] \right\} \quad (2.100)$$

Por tanto hemos logrado separar el funcional generatriz en dos partes, una que depende unicamente de  $J(x)$  y otra de  $\phi(x)$ , esta última de hecho es simplemente un número que llamaremos  $\mathcal{N}$ , así:

$$Z_0[J] = \mathcal{N} \text{Exp} \left\{ -\frac{i}{2} \int d^4x d^4y J(x) \Delta_F(x-y) J(y) \right\} \quad (2.101)$$

### 2.3.1. Integración funcional.

Vamos a generalizar la fórmula de integración Gaussiana a  $n$  variables discretas para luego analizar este tipo de fórmulas en el caso de cálculo funcional. Sabemos que

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{1}{2}ax^2} dx = \left( \frac{2\pi}{a} \right)^{1/2} \Rightarrow \int \text{Exp} \left( -\frac{1}{2} \sum a_n x_n^2 \right) dx_1 \dots dx_n = \frac{(2\pi)^{n/2}}{\prod_{i=1}^n a_i^{1/2}} \quad (2.102)$$

Sea  $A$  una matriz diagonal y  $x$  un vector, el producto escalar de  $Ax$  y  $x$  es  $(x, Ax) = \sum_n a_n x_n^2$  y  $\det(A) = \prod_{i=1}^n a_i$ . Por tanto podemos escribir (2.102) como:

$$\int \text{Exp} \left[ -\frac{1}{2} (x, Ax) \right] d^n x = (2\pi)^{n/2} (\det A)^{-1/2} \quad (2.103)$$

Si definimos la medida  $dx = d^n x (2\pi)^{-n/2}$ , tenemos:

$$\int \text{Exp} \left[ -\frac{1}{2} (x, Ax) \right] dx = (\det A)^{-1/2} \quad (2.104)$$

Esta ecuación puede ser extendida a formas cuadráticas  $Q(x) = \frac{1}{2}(x, Ax) + (b, x) + c$ . En este caso tenemos:

$$\int \text{Exp} \left[ -\frac{1}{2} \{ (x, Ax) + (b, x) + c \} \right] dx = \text{Exp} \left[ \frac{1}{2} (b, A^{-1}b) - c \right] \det(A)^{-1/2} \quad (2.105)$$

La generalización funcional de la ecuación (2.104) es:

$$\int \mathcal{D}\phi \text{Exp} \left[ -\frac{1}{2} \int \phi(x) A \phi(x) dx \right] = (\det A)^{-1/2} \quad (2.106)$$

Así si partimos de  $Z_0[J] = \int \mathcal{D}\phi \text{Exp} \left\{ -i \int \left[ \frac{1}{2} \phi(\square + m^2 - i\epsilon) \phi - J\phi \right] d^4x \right\}$  y aplicando (2.105), (2.106) con  $A = i(\square + m^2 - i\epsilon)$ ,  $b = -iJ(x)$ ,  $c = 0$ . Tenemos:

$$Z_0[J] = \text{Exp} \left[ \frac{i}{2} \int J(x) (\square + m^2 - i\epsilon)^{-1} J(y) dx dy \right] \det(i(\square + m^2 - i\epsilon))^{-1/2} \quad (2.107)$$

Como sabemos  $(\square + m^2 - i\epsilon)^{-1} = -\Delta_F(x - y)$  y con la ecuación (2.106):

$$Z_0[J] = \text{Exp} \left\{ -\frac{i}{2} \int d^4x d^4y J(x) \Delta_F(x - y) J(y) \right\} \int \mathcal{D}\phi \text{Exp} \left\{ -\frac{i}{2} \int d^4x \left[ \frac{1}{2} (\phi(\square + m^2 - i\epsilon) \phi) \right] \right\} \quad (2.108)$$

Esta es la misma ecuación que (2.100)!

### 2.3.2. Funciones de Green de la partícula libre.

## 2.4. Campos fermiónicos.

## 2.5. Teorías Gauge y campos de Yang-Mills

## 2.6. La teoria de Yukawa



## Capítulo 3

# Integrales de trayectoria en espacios curvos.



FIGURA 3.1: Este es el caption que aparece debajo de la figura.

Lorem ipsum dolor sit amet, consectetur adipiscing elit. Vivamus at pulvinar nisi. Phasellus hendrerit, diam placerat interdum iaculis, mauris justo cursus risus, in viverra purus eros at ligula. Ut metus justo, consequat a tristique posuere, laoreet nec nibh. Etiam et scelerisque mauris. Phasellus vel massa magna. Ut non neque id tortor pharetra bibendum vitae sit amet nisi. Duis nec quam quam, sed euismod justo. Pellentesque eu tellus

vitae ante tempus malesuada. Nunc accumsan, quam in congue consequat, lectus lectus dapibus erat, id aliquet urna neque at massa. Nulla facilisi. Morbi ullamcorper eleifend posuere. Donec libero leo, faucibus nec bibendum at, mattis et urna. Proin consectetur, nunc ut imperdiet lobortis, magna neque tincidunt lectus, id iaculis nisi justo id nibh. Pellentesque vel sem in erat vulputate faucibus molestie ut lorem.

### **3.1. Teoría clásica de campos en espacios curvos.**

Quisque tristique urna in lorem laoreet at laoreet quam congue. Donec dolor turpis, blandit non imperdiet aliquet, blandit et felis. In lorem nisi, pretium sit amet vestibulum sed, tempus et sem. Proin non ante turpis. Nulla imperdiet fringilla convallis. Vivamus vel bibendum nisl. Pellentesque justo lectus, molestie vel luctus sed, lobortis in libero. Nulla facilisi. Aliquam erat volutpat. Suspendisse vitae nunc nunc. Sed aliquet est suscipit sapien rhoncus non adipiscing nibh consequat. Aliquam metus urna, faucibus eu vulputate non, luctus eu justo.

#### **3.1.1. A Subsection**

Donec urna leo, vulputate vitae porta eu, vehicula blandit libero. Phasellus eget massa et leo condimentum mollis. Nullam molestie, justo at pellentesque vulputate, sapien velit ornare diam, nec gravida lacus augue non diam. Integer mattis lacus id libero ultrices sit amet mollis neque molestie. Integer ut leo eget mi volutpat congue. Vivamus sodales, turpis id venenatis placerat, tellus purus adipiscing magna, eu aliquam nibh dolor id nibh. Pellentesque habitant morbi tristique senectus et netus et malesuada fames ac turpis egestas. Sed cursus convallis quam nec vehicula. Sed vulputate neque eget odio fringilla ac sodales urna feugiat.

### **3.2. La ecuación de Schrodinger en espacio curvo.**

### **3.3. Cambios de coordenadas.**

### **3.4. Campos fermiónicos.**

### **3.5. El átomo de Hidrógeno.**

## Apéndice A

# An Appendix

Lorem ipsum dolor sit amet, consectetur adipiscing elit. Vivamus at pulvinar nisi. Phasellus hendrerit, diam placerat interdum iaculis, mauris justo cursus risus, in viverra purus eros at ligula. Ut metus justo, consequat a tristique posuere, laoreet nec nibh. Etiam et scelerisque mauris. Phasellus vel massa magna. Ut non neque id tortor pharetra bibendum vitae sit amet nisi. Duis nec quam quam, sed euismod justo. Pellentesque eu tellus vitae ante tempus malesuada. Nunc accumsan, quam in congue consequat, lectus lectus dapibus erat, id aliquet urna neque at massa. Nulla facilisi. Morbi ullamcorper eleifend posuere. Donec libero leo, faucibus nec bibendum at, mattis et urna. Proin consectetur, nunc ut imperdiet lobortis, magna neque tincidunt lectus, id iaculis nisi justo id nibh. Pellentesque vel sem in erat vulputate faucibus molestie ut lorem.

Quisque tristique urna in lorem laoreet at laoreet quam congue. Donec dolor turpis, blandit non imperdiet aliquet, blandit et felis. In lorem nisi, pretium sit amet vestibulum sed, tempus et sem. Proin non ante turpis. Nulla imperdiet fringilla convallis. Vivamus vel bibendum nisl. Pellentesque justo lectus, molestie vel luctus sed, lobortis in libero. Nulla facilisi. Aliquam erat volutpat. Suspendisse vitae nunc nunc. Sed aliquet est suscipit sapien rhoncus non adipiscing nibh consequat. Aliquam metus urna, faucibus eu vulputate non, luctus eu justo.

Donec urna leo, vulputate vitae porta eu, vehicula blandit libero. Phasellus eget massa et leo condimentum mollis. Nullam molestie, justo at pellentesque vulputate, sapien velit ornare diam, nec gravida lacus augue non diam. Integer mattis lacus id libero ultrices sit amet mollis neque molestie. Integer ut leo eget mi volutpat congue. Vivamus sodales, turpis id venenatis placerat, tellus purus adipiscing magna, eu aliquam nibh dolor id nibh. Pellentesque habitant morbi tristique senectus et netus et malesuada fames ac turpis egestas. Sed cursus convallis quam nec vehicula. Sed vulputate neque eget odio fringilla ac sodales urna feugiat.

Phasellus nisi quam, volutpat non ullamcorper eget, congue fringilla leo. Cras et erat et nibh placerat commodo id ornare est. Nulla facilisi. Aenean pulvinar scelerisque eros eget interdum. Nunc pulvinar magna ut felis varius in hendrerit dolor accumsan. Nunc pellentesque magna quis magna bibendum non laoreet erat tincidunt. Nulla facilisi.

Duis eget massa sem, gravida interdum ipsum. Nulla nunc nisl, hendrerit sit amet commodo vel, varius id tellus. Lorem ipsum dolor sit amet, consectetur adipiscing elit. Nunc ac dolor est. Suspendisse ultrices tincidunt metus eget accumsan. Nullam facilisis, justo vitae convallis sollicitudin, eros augue malesuada metus, nec sagittis diam nibh ut sapien. Duis blandit lectus vitae lorem aliquam nec euismod nisi volutpat. Vestibulum ornare dictum tortor, at faucibus justo tempor non. Nulla facilisi. Cras non massa nunc, eget euismod purus. Nunc metus ipsum, euismod a consectetur vel, hendrerit nec nunc.