Ayudantía 04: Resolución de problemas

Nota: Este documento es una adaptación del documento "Problem Solving" escrito por el profesor Timothy Peil de la Universidad Estatal de Minnesota. El documento original está disponible en http://web.mnstate.edu/peil/M110/Worksheet/PolyaProblemSolve.pdf. En 1945 el matemático George Polya publicó el libro **Cómo resolverlo**, que en corto tiempo se convirtió en éxito de ventas, traduciéndose a 17 idiomas. En este libro, Polya identifica cuatro principios básicos para resolver problemas. Estos principios son los que usaremos el resto del semestre para resolver problemas.

Una de las principales razones por las que la gente tiene dificultades para resolver problemas es que no hay una única estrategia que funcione todo el tiempo, cada problema es diferente. Además, la resolución de problemas requiere un conocimiento práctico sobre la situación específica que se desea resolver. Si no se entiende bien el problema o la situación subyacente se pueden cometer errores o suposiciones incorrectas. Uno de nuestros principales objetivos para este semestre es convertirnos en mejores solucionadoras/es de problemas que se pueden resolver usando algoritmos. Para comenzar esta tarea, discutimos un marco de trabajo para pensar en la resolución de problemas: el enfoque de cuatro pasos de George Polya para la resolución de problemas.

Estrategia de cuatro pasos de Polya

1. Preparación: Comprender el problema

- Aprender los conceptos matemáticos y lógicos subyacentes
- Considerar la terminología y la notación utilizadas en el problema:
    1. ¿Qué tipo de problema es?
    2. ¿Qué se está preguntando?
    3. ¿Qué significan los términos?
    4. ¿Hay suficiente información o se necesita más información?
    5. ¿Qué se sabe o no se sabe?
- Reformule el problema con sus propias palabras
- Escriba ejemplos concretos de las condiciones que se dan en el problema.

2. Tiempo de pensar: Idear un plan

- Debes empezar en algún lugar, así que intenta algo. ¿Cómo vas a comenzar la resolución del problema?
- Posibles estrategias:
    1. Haz un dibujo
    2. Usa una variable y elige nombres útiles para las variables o incógnitas.
    3. Sé sistemática/o.
    4. Resuelve una versión más simple del problema.
    5. Adivina y comprueba. Prueba y error. Adivina y comprueba. (Adivinar está bien en esta etapa.)

6. Busca un patrón o patrones.
7. Haz una lista.

- Una vez que entiendas cuál es el problema, si estás atascada/o, deja el problema a un lado por un tiempo. Tu inconsciente puede seguir trabajando en él.
- Pasar a pensar en otras cosas puede ayudarte a mantenerte relajado, flexible y creativa/o en lugar de estar tensa/o, frustrada/o y forzada/o en los intentos por resolver el problema.

3. Perspectiva: Ejecutar el plan

- Una vez que tengas una idea para un nuevo enfoque, escríbela inmediatamente. Cuando tengas tiempo, pruébalo y mira si te lleva a una solución.
- Si el plan no parece funcionar, entonces comienza de nuevo y prueba otro enfoque. **A menudo el primer enfoque no funciona**. No te preocupes, sólo porque **un** enfoque no funcione, no significa que lo hayas hecho mal. En realidad has logrado algo, saber que un camino no funciona es parte del proceso de eliminación.
- Una vez que has pensado en un problema o has vuelto a él suficientes veces, a menudo tendrás un destello de perspicacia: una nueva idea para probar o una nueva perspectiva sobre cómo enfocar la solución del problema. **La clave es seguir intentándolo hasta que algo funcione**.

4. Verificación: Mirar hacia atrás.

- Una vez que tengas una solución potencial, comprueba si funciona.
  1. ¿Respondió a la pregunta?
  2. ¿Es razonable el resultado?
  3. Comprueba que se cumplen todas las condiciones relacionadas con el problema.
  4. Comprueba los cálculos que se han realizado para encontrar la solución.
- Si descubres que su solución no funciona, puede que sólo sea un simple error.
- Intenta arreglar o modificar tu intento de solución antes de desecharla. Recuerde lo que intentaste, es probable que al menos parte de ello termine siendo útil.
- ¿Hay otra forma de hacer el problema que pueda ser más sencilla? (intenta ser paciente y flexible, por lo general no hay una sola manera correcta.)
- ¿Puede generalizarse el problema o el método para que sea útil para futuros problemas?

Recuerda, la resolución de problemas es tanto un arte como ciencia!

Recuerda algunas estrategias entregadas anteriormente:

1. Haz dibujos o diagramas.
2. Usa variables y asígnales nombres útiles.
3. Se sistemática/o.
4. Resuelve una versión más simple del problema.
5. Adivina y comprueba. Ensayo y error (Adivinar está bien).
6. Busca un patrón o patrones.
7. Haz una lista.

Principios matemáticos para la resolución de problemas

Ten en cuenta estos principios al momento de resolver problemas.

1. **El principio de siempre:** A diferencia de muchas otras materias, cuando decimos que una afirmación matemática es verdadera, queremos decir que es verdadera el 100 por ciento de las veces. No estamos tratando con la incertidumbre de las afirmaciones que son "generalmente verdaderas" o "a veces verdaderas".
2. **El Principio del contra-ejemplo**: Puesto que una afirmación matemática es verdadera sólo cuando es verdadera el 100% de las veces, podemos probar que es falsa encontrando un solo ejemplo donde no lo es. Por supuesto, cuando decimos que una afirmación matemática es falsa, no significa que nunca sea verdadera, sino que no siempre lo es. Puede ser cierto algunas veces.
3. **El principio del orden**: En matemáticas, el orden suele importar. En un proceso matemático de varios pasos, si llevamos a cabo los pasos en un orden diferente, a menudo obtenemos un resultado diferente. Por ejemplo, ponerse primero los calcetines y luego los zapatos es muy diferente a ponerse primero los zapatos y luego los calcetines.
4. **El principio de los detalles**: En matemáticas, los detalles importan. Dos términos o símbolos que parecen y suenan similares pueden tener significados matemáticos significativamente diferentes. Por ejemplo, en español, usamos el término igual y equivalente indistintamente, pero en matemáticas, estos términos no significan lo mismo. Por esta razón, es esencial aprender y recordar el significado preciso de los términos matemáticos.
5. **El principio de las analogías**:A menudo la terminología formal utilizada en matemáticas se ha extraído de palabras y conceptos utilizados en la vida cotidiana. Esto no es una coincidencia. Asociar un concepto matemático con su contraparte en el mundo real puede ayudar a recordar tanto los significados formales (precisos) como intuitivos de un concepto matemático.
6. **El principio de los tres caminos**: Cuando se aborda un concepto matemático, a menudo es útil utilizar enfoques tricomplementarios: **Verbal** hacer analogías, poner el problema en sus propias palabras, comparar la situación con cosas que puede haber visto en otras áreas de las matemáticas. **Gráfico -**dibujar un gráfico o un diagrama. **Ejemplos -**utilizar ejemplos específicos para ilustrar la situación. Combinando uno o más de estos enfoques, a menudo se puede tener una mejor idea de cómo pensar y cómo resolver un problema determinado.

Ejercicios

Instrucciones: Resuelva en equipos de 4 personas los siguientes problemas utilizando las estrategia de cuatro pasos de George Polya. Asegúrate que al menos una persona del equipo registre el razonamiento que utilizaron para llegar a la solución. No es necesario que trabajes en estos problemas en orden secuencial. Una vez que hayan encontrado la solución a uno de los problemas, verifiquen que esté correcta.

1. Cada persona en una fiesta de veintiocho personas dijo hola a cada una de las otras personas en la fiesta exactamente una vez. ¿Cuántos "hola" se dijeron en la fiesta?
2. Un cazador dejó el campamento y caminó cinco kilómetros al sur y dos kilómetros al este. Disparó a un oso y caminó cinco kilómetros al norte de vuelta al campamento. ¿De qué color era el oso?

3. Supongamos que Diego tiene ocho camisas y cuatro pares de pantalones. ¿Cuántos trajes diferentes puede hacer Diego combinando una camisa con un par de pantalones?
4. Para cada una de las siguientes afirmaciones, determine si la afirmación es verdadera o falsa. Si la afirmación es verdadera, dé dos ejemplos concretos que ilustren la afirmación. Si es falsa, dé un contraejemplo específico.

   a) Si $a < b$, entonces $a + c < b + c$.

   b) Si $a < b$, entonces $ac < bc$.

   c) Si la persona X conoce a la persona Y y la persona Y conoce a la persona Z, entonces la persona X conoce a la persona Z.
5. Los años bisiestos se definen como: "Cada año que es exactamente divisible por cuatro es bisiesto, excepto por los años que son exactamente divisibles por 100, pero estos siglos son años bisiestos si son exactamente divisibles por 400. Por ejemplo: los años 1700, 1800, y 1900 no son año bisiesto, pero los años 1600 y 2000 lo son". Indique en sus propias palabras en que casos un año es biciesto. Luego escriba una función en pseudo-código que determine si un año es biciesto o no. Asuma que la entrada de la función es un numero representando un año.
6. Una multiplicación se puede definir como la suma de un número a una b cantidad de veces, es decir, $a * b = a + a + a + a + a + a + \ldots + a + a + a$. Es así que se pide realizar un pseudo-código, tanto de manera iterativa como recursiva, indicando el caso base y el caso recursivo. **Nota:** Una multiplicación puede ser definida como $a * b = a + (a * (b - 1))$.
7. Transforme el algoritmo de búsqueda binaria visto en clases a un algoritmo recursivo. Recuerde que debe definir cuáles son los casos recursivos y cuáles son los casos base.