Diego Mauricio Chaux R 1003803628

Solucion

① El sistema masa, resorte, y amortiguador se puede modelar a partir de la conservación de fuerzas

$$F_S(t) + F_F(t) + F_I(t) = F_e(t)$$

Donde $F_S(t) = Ky(t)$, $F_S(t) = C\frac{dy(t)}{dt}$, $F_I = m\frac{d^2y(t)}{dt^2}$

Por consiguiente:

$$m\frac{d^2y(t)}{dt^2} + C\frac{dy(t)}{dt} + Ky(t) =$$

Aplicando la transformada de Laplace:

$$\mathcal{L}\left\{\frac{d^n x(t)}{dt}\right\} = S^n X(s)$$ tenemos que:

$$ms^2 y(s) + cs\,y(s) + Ky(s) = X(s)$$

Y

$$H(s) = \frac{Y(s)}{X(s)} = \frac{1}{ms^2+cs+k} \Longrightarrow$$ FUNCION DE TRANSFERENCIA, SISTEMA MASA Y RESORTE

Ahora para el circuito electrico presentado, hallamos la respectiva función de transferencia

$\angle VK$ malla int

$$-V_i(t) + L\frac{d}{dt}i_1(t) + \frac{1}{C}\int_0^t (i_1(t) - i_2(t))\,dt = 0$$

Cruzamos las impedancias transformadas, obtenemos

$$V_i(s) = LS\,I_1(s) + (I_1(s) - I_2(s))\frac{1}{CS} \quad (1)$$

Ahora hallamos $\angle VK$ malla $i_2(t)$

$$i_2(t)R + \frac{1}{C}\int_0^t (i_2(t) - i_1(t))\,dt = 0$$

Donde $V_o(t) = i_2(t)R$

Utilizando las impedancias transformadas, obtenemos

$$I^2(s)R + (I_2(s) - J_1(s))\frac{1}{CS} = 0$$

Despejando $I_1(s)$, se obtiene:

$$\frac{I_1(s)}{CS} + \frac{I_2(s)}{CS} + I_2(s)R$$

$$I_1(s) = \frac{I_2(s)}{CS} \cdot CS + I_2(s)\,RCS$$

$$I_1(s) = I_2(1 + RCs) \quad (2)$$

Reemplazando (2) en (1)

$$V_1(s) = LS\,I_2(s)(1+CRS) + \left(I_2(s)(1+CRS) - I_2(s)\right)\frac{1}{CS}$$

$$V_1(s) = LS\,I_2(s) + CRLS^2\,I_2(s) + \left(I_2(s) + CRS\,I_2(s) - I_2(s)\right)\,1/CS$$

$$V_1(s) = LS\,I_2(s) + \left(RLS^2\,I_2(s) + R\,I_2(s)\right)$$

$$V_1(s) = I_2(s)\left[CRLS^2 + LS + R\right]$$

$$\frac{I_2(s)}{V_1(s)} = \frac{1}{CRLS^2 + LS + R}$$

Reemplazando $I_2(s) = \frac{V_0(s)}{R}$ obtenemos:

$$\frac{V_0(s)}{RV_1(s)} = \frac{1}{CRLS^2 + LS + R}$$

$$\frac{V_0(s)}{V_1(s)} = \frac{R}{CRLS^2 + LS + R} \cdot \left(\frac{1/R}{1/R}\right)$$

$$\frac{V_0(s)}{V_1(s)} = \frac{1}{CLS^2 + \frac{LR}{S} + 1} \Longrightarrow \text{FUNCION TRANSFERENCIA CTO ELECTRICO}$$

Equivalencia del cto electrico en pendulo elastico

CTO ELECTRICO	PENDULO ELASTICO
CL	m
L/R	c
1	K

Entonces:

$$H(s) = \frac{1}{LCS^2 + \frac{LS}{R} + 1}$$

Su equivalente en pendulo es:

$$H(s) = \frac{1}{ms^2 + cs + R} = \frac{1/m}{\left(s^2 + \frac{cs}{m} + \frac{R}{m}\right)}$$

Hallando la forma canónica de segundo orden:

- Comparando:

$$s^2 + s\,\xi\,\omega n s + \omega n^2 = s^2 + \frac{Cs}{m} + \frac{K}{m}$$

- Igualando coeficientes

$1 = 1 \longrightarrow$ coef s^2

$2\,\xi\,\omega n = \frac{C}{m} \longrightarrow$ coe KS

$\omega n^2 = \frac{K}{m} \longrightarrow$ coef independiente

- Hallando frecuencia natural no amortiguado

$$\omega n = \sqrt{\frac{R}{m}}$$

- Hallando Factor de amortiguamiento

$$2\,\xi_j\sqrt{\frac{R}{m}} = \frac{C}{m} \Rightarrow \xi_j = \frac{C}{2m\sqrt{R/m}}$$

- Hallando la ganancia R

$$K\omega n^2 = \frac{1}{m} \Longrightarrow R = \frac{1}{m\omega n^2} \Longrightarrow R = \frac{1}{m\frac{R}{m}}$$

$$R = \frac{1}{R} \;//$$

Finalmente, la forma canónica de segundo orden es:

$$H(s) = R \cdot \frac{\omega n^2}{s^2 + 2\,\xi_j\,\omega n s + \omega n^2}$$

$$H(s) = \frac{1}{R} \cdot \frac{R/m}{s^2 + 2\left(\frac{C}{2m\sqrt{R/m}}\right)\sqrt{R/m}\;s + \frac{R}{m}}$$

$$H(s) = \frac{1/m}{s^2 + \frac{C}{m}s + \frac{R}{m}} \qquad H(s) = \frac{1}{m\left(s^2 + \frac{C}{m}s + \frac{R}{m}\right)} \;//$$

• Hallando la Frecuencia natural amortiguada:

$$\omega_d = \omega_n\sqrt{1-\xi^2} \Longrightarrow \omega_d = \left(\sqrt{\frac{R}{M}}\right)\left(\sqrt{1-\left(\frac{C}{2m\sqrt{R/m}}\right)^2}\right)$$

$$\omega_d = \frac{\sqrt{R/m}\,\sqrt{4Km-C^2}}{2\sqrt{Rm}}$$

El tiempo de levantamiento y tiempo pico se hace por simulación:

• Hallando el tiempo de establecimiento

$$t_s = \frac{3}{\xi\omega_n} \Longrightarrow t_s = \frac{3}{\left(\frac{C}{2m\sqrt{\frac{K}{m}}}\right)\sqrt{R/m}}, \quad t_s = \frac{6m}{C}$$

Funcion de transferencia para masa resorte amortiguador lazo cerrado

Podemos representar la función de transferencia de un sistema de lazo de la siguiente manera.

$$H_{LC} = \frac{H(s)}{1+A(s)H(s)}$$

En este caso:

$$H(s) = \frac{1}{ms^2+Cs+R} \longrightarrow$$ Función de transferencia lazo abierto

$$A(s) = 1$$

• Calculamos $H_{LC}(s)$:

$$H_{LC}(s) = \frac{\frac{1}{ms^2+Cs+R}}{1+\frac{1}{ms^2+Cs+R}} = \frac{\frac{1}{ms^2+Cs+R}}{\frac{ms^2+Cs+R+1}{ms^2+Cs+R}}$$

$$H_{LC}(s) = \frac{\cancel{ms^2+Cs+R}}{(\cancel{ms^2+Cs+R})(ms^2+Cs+R+1)}, \quad H_{LC}(s) = \frac{1}{ms^2+Cs+R+1}$$

Hallando la forma canónica de segundo orden o comparando.

$$S^2 + S\xi\omega_n S + \omega_n^2 = S^2 + \frac{c}{m}S + \left(\frac{k+1}{m}\right)$$

Comparando coeficientes.

$1 = 1 \longrightarrow$ coef S^2

$2\xi\omega_n = \frac{c}{m} \longrightarrow$ coef S

$\omega_n^2 = \frac{k+1}{m} \longrightarrow$ coef independiente

Hallando frecuencia natural no amortiguada

$$\omega_n = \sqrt{\frac{k+1}{m}}$$

Hallando factor de amortiguado $\Rightarrow \xi = \frac{c}{2m\omega_n} = \frac{c}{2m\sqrt{\frac{k+1}{m}}}$

Hallando la ganancia

$$K\omega_n^2 = \frac{1}{m} \Rightarrow K = \frac{1}{m\omega_n^2} = K = \frac{1}{m\left(\sqrt{\frac{k+1}{m}}\right)^2}$$

$$K = \frac{1}{k+1}$$

Entonces de la forma canónica de segundo orden es:

$$H_{LC}(s) = \frac{\omega_n^2}{s^2 + 2\xi\omega_n s + \omega_n^2}$$

$$H_{LC}(s) = \frac{(k+1)/m}{s^2 + 2\left(\frac{c}{2m\left(\sqrt{\frac{k+1}{m}}\right)}\right)\sqrt{(k+1)/m}\cdot s}$$

$$H_{LC}(s) = \frac{1}{m\left(s^2 + \frac{c}{m}s + \frac{k+1}{m}\right)}$$

Hallando frecuencia natural amortiguada

$$\omega d = \omega n \sqrt{1-\xi^2}$$

$$\omega d = \sqrt{\frac{K+1}{m}} \cdot \sqrt{1-\left(\frac{c}{2m\sqrt{(K+1)(m)}}\right)^2}$$

$$\omega d = \frac{\sqrt{\frac{K+1}{m}} \cdot \sqrt{4Km+4m-c^2}}{2\sqrt{m(K+1)}}$$

Hallando el tiempo de establecimiento

$$ts = \frac{3}{\xi \omega n} = \frac{3}{\frac{c}{2m\sqrt{\frac{K+1}{m}}} \cdot \sqrt{\frac{K+1}{m}}} = \frac{6m}{c}$$

Espectros de cada etapa

1) $A_1\, m(t) \cos(2\pi F_0 t + \theta_0)$

$$A_1 m(t)\left(\frac{e^{j2\pi f_0 t} + e^{-j2\pi f_0 t}}{2}\right) = A\left(\frac{m(t) e^{j2\pi f_0 t}}{2}\right) + \left(\frac{m(t) e^{-j2\pi f_0 t}}{2}\right)$$

Con $F\{x(t) e^{j\omega_0 t}\} = X(\omega \mp \omega_0)$

$$\frac{A}{2}\left[M(\omega - 2\pi f_0) + M(\omega + 2\pi f_0)\right]$$

2) $\cos(2\pi f_0 t + \theta_0)$ con $\theta_0 = 0$

$$\cos(2\pi f_0 t) = \left\{\frac{e^{j2\pi f_0 t} + e^{-j2\pi f_0 t}}{2}\right\} = F\left\{\frac{e^{j2\pi f_0 t}}{2}\right\} + F\left\{\frac{e^{-j2\pi f_0 t}}{2}\right\}$$

Con $F\{e^{\pm j\omega_0 t}\} = 2\pi\, \delta(\omega \mp \omega_0)$

$F(\omega) = \pi\, \delta(\omega - 2\pi f_0) + \pi\, \delta(\omega + 2\pi f_0) \longrightarrow$ Mixer (1x2)

$$A_1 m(t) \cos^2(2\pi f_0 t + \theta_0) = \frac{A_1 m(t)}{2} + \frac{A_1 m(t)}{2} \cos(4\pi f_0 t)$$

$$F(\omega) = \frac{A M(\omega)}{2} + \frac{A}{2} m(t) \cdot \left(\frac{e^{j4\pi f_0 t} + e^{-j4\pi f_0 t}}{2}\right)$$

$$F(\omega) = \frac{A M(\omega)}{2} + \frac{A}{2}\left[\left(\frac{m(t) e^{j4\pi f_0 t}}{2}\right) + \left(\frac{m(t) e^{-j4\pi f_0 t}}{2}\right)\right]$$

Con $F\{x(t) e^{\pm j\omega_0 t}\} = X(\omega \mp \omega_0)$

$F(\omega) = \dfrac{A M(\omega)}{2} + \dfrac{A}{4}\left[M(\omega - 4\pi f_0) + M(\omega + 4\pi f_0)\right] \longrightarrow$ Lowpass

$\dfrac{A_1}{2} m(t)$

$F(\omega) = \dfrac{A M(\omega)}{2} \longrightarrow$ scale amplitude by $\dfrac{2}{A_1}$

$$\frac{A_1}{2} m(t) \cdot \frac{2}{A_1} = m(t)$$

$$F(m(t)) = M(\omega)$$