Unidad 3 / Escenario 6

Lectura fundamental

Aplicaciones de la integral

Contenido

Palabras clave: diferencial, área, curva, volumen.

Dentro de los usos o aplicaciones de la integral se encuentra la determinación de funciones a partir de su derivada, aspecto que se aborda en el tema de ecuaciones diferenciales, y el cálculo de áreas y volúmenes, que se trata en las secciones de área de regiones planas y volúmenes de sólidos. Estos tópicos se analizarán en esta lectura.

1. Ecuaciones diferenciales

En algunas situaciones es indispensable solucionar ecuaciones en donde se conocen la primera o segunda derivada de una función continua y se necesita establecer cuál era la función general original. Un ejemplo de esto ocurre cuando se plantean relaciones de igualdad entre los datos conocidos y desconocidos que son constantes y variables en un contexto particular, pero que tiene un comportamiento de crecimiento o decaimiento de tipo exponencial. En esta sección se analizarán algunos tipos de ecuaciones diferenciales.

1.1. Ecuaciones diferenciales de primer orden con variables separables

Una ecuación diferencial de primer orden con variables separables es aquella en la que aparece la primera derivada de la función y es posible separar la variable dependiente de la independiente dejando una a un lado del símbolo = y la otra al otro lado. Debido a esto, la solución se halla integrando a ambos lados de la igualdad. Observe los siguientes ejemplos.

Ejemplo 1. Encuentre la solución general de la ecuación diferencial $\frac{dy}{dx}=(2x+1)^4$

Solución

$dy=(2x+1)^4\,dx$	Se separan las variables, las y al lado izquierdo y las x al derecho
$\int dy=\int(2x+1)^4\,dx$	Se integra a cada lado de la ecuación
$y=\frac{1}{10}(2x+1)^5+C$	Solución general de la ecuación diferencial

Recuerde aquí aplicar las diferentes técnicas de integración vistas hasta este momento en el módulo.

Ejemplo 2. Resuelva la ecuación diferencial $\frac{dy}{dx} = -y^2 x\left(x^2+2\right)^4$. Después, encuentre aquella solución para la cual $y=1$ cuando $x=0$.

Solución

$\frac{dy}{y^2} = -x\left(x^2+2\right)^4 dx$	Se separan las variables, las y al lado izquierdo y las x al derecho
$\int \frac{dy}{y^2} = \int -x\left(x^2+2\right)^4 dx$	Se integra a cada lado de la ecuación
$-\frac{1}{y} = -\frac{1}{10}\left(x^2+2\right)^5 + C$	Se usan las técnicas de integración
$-\frac{1}{1} = -\frac{1}{10}\left(0^2+2\right)^5 + C$	Se sustituyen y por 1 y x por 0
$\frac{11}{5} = C$	Se despeja C de la ecuación anterior
$-\frac{1}{y} = -\frac{1}{10}\left(x^2+2\right)^5 + \frac{11}{5}$	Se sustituye el valor de C en la ecuación general
$y = \frac{-10}{22-\left(x^2+2\right)^5}$.	Solución particular al despejar y

Si se desea verificar que la función obtenida satisface la ecuación, esta se debe derivar y sustituir en la ecuación diferencial dada. Se deja como actividad para el lector.

Ejemplo 3. Se lanza una pelota hacia arriba desde la superficie de la tierra con una velocidad inicial de 96 pies por segundo. ¿Cuál es la altura máxima que alcanza?

Solución

Para dar solución es necesario saber lo siguiente:

¿Sabía que...?

Al definir las funciones:

$s(t)$: función de desplazamiento o distancia recorrida en un tiempo t

$v(t)$: función de velocidad de un objeto en un tiempo t

$a(t)$: función de aceleración de un objeto en un tiempo t

Algunas relaciones que existen entre ellas son:

$v(t) = s'(t) = \frac{ds}{dt}$ es decir, la velocidad es la derivada de la función desplazamiento

$a(t) = v'(t) = \frac{dv}{dt}$ es decir, la aceleración es la derivada de la función velocidad

Además, la aceleración con que cae un objeto, debido a la gravedad, es de $32\ {}^{pies}\!/\!_{s^2}$ y se toma negativa si es lanzado hacia arriba.

Con base en lo anterior, como la pelota se lanza hacia arriba, $a(t) = -32\ {}^{pies}\!/\!_{s^2}$, luego:

$\frac{dv}{dt} = -32, \text{ con } v(0) = 96$	Se plantea la ecuación diferencial con condiciones iniciales
$dv = -32dt$	Se separan las variables, las v al lado izquierdo y las t al derecho
$\int dv = \int -32dt$	Se plantea la integral a ambos lados de la igualdad
$v = -32t + C$	Se encuentra la solución general de velocidad
$96 = -32(0) + C$	Se sustituye en la ecuación las condiciones dadas: $t = 0, v = 96$
$96 = C$	Se despeja el valor de C

$$v(t) = -32t + 96$$

Dado que el ejercicio solicita hallar la altura máxima, esta se obtiene cuando la velocidad es cero; de esta manera, es posible saber el tiempo que duró el objeto en alcanzar la máxima altura, observe:

$0=-32t+96$	Se sustituye v por 0
$t=\frac{96}{32}=3\,\text{segundos}$	Se despeja el tiempo transcurrido de desplazamiento

Con esta información ahora se plantea una ecuación diferencial que permita encontrar el desplazamiento usando la información que se dio en el recuadro:

$v=\frac{ds}{dt}=-32t+96$	Se plantea ecuación diferencial
$ds=(-32t+96)\,dt$	Se separan las variables, las s al lado izquierdo y las t al derecho
$\int ds=\int(-32t+96)\,dt$	Se plantea la integral a ambos lados de la igualdad
$s=-16t^2+96t+C$	Se determina la solución general que corresponde a la función de desplazamiento
$s(t)=-16t^2+96t$	Se sustituye C por cero, ya que el cuerpo es lanzado (esto indica que no hay un recorrido inicial) y se obtiene la función de desplazamiento.

Dado que se tiene el tiempo transcurrido para alcanzar la altura máxima (3 segundos) y la función de desplazamiento, se halla:

$$s(3)=-16(3)^2+96(3)=-144+288=144\,\text{pies}$$

1.2. Ecuaciones diferenciales lineales ordinarias de primer orden

Una ecuación diferencial lineal de primer orden tiene la forma:

$$\frac{dy}{dx}+P(x)y=Q(x)$$

Donde $P(x)$ y $Q(x)$ son polinomios cuya variable es x.

Para dar solución a este tipo de ecuación diferencial es necesario multiplicar cada miembro de la igualdad por una expresión algebraica llamada **FACTOR INTEGRANTE**.

El factor integrante se obtiene hallando el valor de $e^{\int P(x)dx}$ y al multiplicarlo por cada término de la ecuación diferencial se encuentra:

$$e^{\int P(x)dx}\frac{dy}{dx}+e^{\int P(x)dx}P(x)y=e^{\int P(x)dx}Q(x)$$

Observe que la expresión del lado izquierdo de la igualdad corresponde a la derivada implícita con respecto a x de $ye^{\int P(x)dx}$, es decir:

$$\frac{d}{dx}\left(ye^{\int P(x)dx}\right)=e^{\int P(x)dx}Q(x)$$

Si se integra a ambos lados de la igualdad, se tiene:

$$ye^{\int P(x)dx}=\int e^{\int P(x)dx}Q(x)\,dx$$

Por lo que la solución de la ecuación diferencial es:

$$y=e^{-\int P(x)dx}\int e^{\int P(x)dx}Q(x)\,dx$$

A continuación, se exponen tres ejemplos en donde se aplican los conceptos mencionados anteriormente.

Ejemplo 1. Encuentre la solución de la ecuación diferencial <<Eqn067.eps>>

Solución

Como la ecuación diferencial lineal ordinaria de primer orden tiene la forma:

$$\frac{dy}{dx}+P(x)y=Q(x)$$

Es necesario reescribir la ecuación diferencial, así:

$$\frac{dy}{dx}+3y=2x$$

Por lo que $P(x)=3$, $Q(x)=2x$ y el factor integrante es $e^{\int P(x)dx}=e^{\int 3dx}=e^{3\int dx}=e^{3x}$

Al multiplicar ambos lados de la igualdad por el factor integrante, se tiene:

$$e^{3x}\frac{dy}{dx}+3e^{3x}y=2xe^{3x}$$

Si observa, al lado izquierdo se tiene la derivación implícita de la función ye^{3x} con respecto a x, por lo que, para mantener la igualdad, al integrar a ambos lados se tiene:

$$ye^{3x}=\int 2xe^{3x}dx=2\int xe^{3x}dx$$

Para encontrar la integral se va a utilizar el método de partes, así:

Si $u=x$ y $dv=e^{3x}dx$, entonces $du=dx$ y $v=\int e^{3x}dx=\frac{1}{3}e^{3x}$, por lo que:

$$\int xe^{3x}dx=\frac{x}{3}e^{3x}-\int\frac{1}{3}e^{3x}dx$$

Al encontrar esta nueva integral, $\int\frac{1}{3}e^{3x}dx=\frac{1}{3}\int e^{3x}dx=\frac{1}{9}e^{3x}$ se obtiene finalmente:

$$ye^{3x}=2\int xe^{3x}dx=2\left[\frac{x}{3}e^{3x}-\frac{1}{9}e^{3x}\right]$$

Es decir:

$$ye^{3x}=\frac{2}{3}xe^{3x}-\frac{2}{9}e^{3x}+C$$

Al despejar a y, se halla que la solución de la ecuación diferencial es:

$$y=\frac{2}{3}x-\frac{2}{9}+Ce^{-3x}$$

Ejemplo 2. Encuentre la solución de la ecuación diferencial $\frac{dy}{dx}+y=e^{-x}$

Solución

En la ecuación diferencial $P(x)=1, Q(x)=e^{-x}$ y el factor integrante es $e^{\int 1dx}=e^{x}$.

Al multiplicar la ecuación diferencial por el factor integrante se obtiene:

$$e^{x}\frac{dy}{dx}+ye^{x}=e^{-x}e^{x}$$

Al realizar operaciones, queda:

$$e^{x}\frac{dy}{dx}+ye^{x}=e^{0}$$

Es decir:

$$e^{x}\frac{dy}{dx}+ye^{x}=1$$

Como el lado izquierdo corresponde a la derivada implícita con respecto a x de la función ye^{x}, al integrar a ambos lados de la igualdad resulta:

$$ye^{x}=\int 1dx$$

Es decir:

$$ye^{x}=x+C$$

Por lo que la solución de la ecuación diferencial dada es:

$$y=xe^{-x}+Ce^{-x}$$

Ejemplo 3. Encuentre la solución de la ecuación diferencial $\left(1-x^{2}\right)\frac{dy}{dx}+xy=ax$

Solución

$$\left(1-x^2\right)\frac{dy}{dx}+xy=ax$$

Al dividir toda la ecuación por $1-x^2$ se halla:

$$\frac{dy}{dx}+\left(\frac{x}{1-x^2}\right)y=\frac{ax}{1-x^2}$$

Como $P(x)=\dfrac{x}{1-x^2}$, el factor integrante es:

$$e^{\int \frac{x}{1-x^2}dx}$$

Para encontrar la integral del exponente, el método que se va a usar es sustitución, donde:

$$u=1-x^2$$
$$du=-2xdx$$
$$-\frac{du}{2x}=dx$$

Sustituyendo en la integral:

$$e^{\int \frac{x}{1-x^2}dx}=e^{-\int \frac{x}{u}\bullet\frac{du}{2x}}=e^{-\frac{1}{2}\int\frac{du}{u}}=e^{-\frac{1}{2}lnu}$$

Es decir:

$$e^{-\frac{1}{2}\ln\left(1-x^2\right)}$$

Aplicando propiedades de logaritmos se establece que:

$$e^{-\frac{1}{2}\ln\left(1-x^2\right)}=e^{\ln\left(1-x^2\right)^{-\frac{1}{2}}}=\left(1-x^2\right)^{-\frac{1}{2}}$$

Multiplicando todos los términos de la ecuación por el factor integrante se tiene:

$$\left(1-x^2\right)^{-\frac{1}{2}}\frac{dy}{dx}+\left(1-x^2\right)^{-\frac{1}{2}}\left(\frac{x}{1-x^2}\right)y=\left(1-x^2\right)^{-\frac{1}{2}}\frac{ax}{1-x^2}$$

Realizando operaciones se llega a:

$$\left(1-x^2\right)^{-\frac{1}{2}}\frac{dy}{dx}+\frac{x}{\left(1-x^2\right)^{\frac{3}{2}}}y=\frac{ax}{\left(1-x^2\right)^{\frac{3}{2}}}$$

Si se observa, al lado izquierdo se tiene una derivación implícita de la función $\left(1-x^2\right)^{-\frac{1}{2}}y$ con respecto a x, por lo que para mantener la igualdad, al integrar a ambos lados:

$$\left(1-x^2\right)^{-\frac{1}{2}}y=\int\frac{ax}{\left(1-x^2\right)^{\frac{3}{2}}}dx=a\int\frac{x}{\left(1-x^2\right)^{\frac{3}{2}}}dx$$

Para encontrar la integral, se sustituye $u=1-x^2$, por lo que queda:

$$\left(1-x^2\right)^{-\frac{1}{2}}y=-a\int\frac{x}{\left(u\right)^{\frac{3}{2}}}\bullet\frac{du}{2x}=-\frac{a}{2}\int\frac{du}{\left(u\right)^{\frac{3}{2}}}=-\frac{a}{2}\int\left(u\right)^{-\frac{3}{2}}du=-\frac{a}{2}\bullet\frac{2u^{-\frac{1}{2}}}{-1}=a\left(1-x^2\right)^{-\frac{1}{2}}+C$$

Por lo que:

$$\left(1-x^2\right)^{-\frac{1}{2}}y=a\left(1-x^2\right)^{-\frac{1}{2}}+C$$

Al despejar y se obtiene:

$$y=\left(a\left(1-x^2\right)^{-\frac{1}{2}}+C\right)\left(1-x^2\right)^{\frac{1}{2}}$$

Es decir, la solución de la ecuación diferencial es:

$$y=a+C\left(1-x^2\right)^{\frac{1}{2}}=a+C\sqrt{1-x^2}$$

1.3. Ejercicios propuestos para practicar

Encuentre la solución a cada una de las siguientes ecuaciones diferenciales:

1. $\frac{dy}{dx}=-y^2x\left(x^2+2\right)^4$
2. $\frac{dy}{dx}+\frac{2}{x}y=\frac{sin3x}{x^2}$
3. $\left(x+1\right)\frac{dy}{dx}+y=x^2-1$
4. $y'+ytanx=secx$

2. Área de una región plana

El segundo teorema fundamental del cálculo da herramientas para encontrar el área bajo la curva de funciones continuas en un intervalo cerrado. En la lectura anterior se tomaron funciones que no eran continuas en un punto frontera del intervalo o en un punto interior a él, por lo que solo se van a realizar ejemplos en donde estas están definidas y son continuas en todo el intervalo. Recuerde que el área A, por arriba del eje x,en el intervalo $[a, b]$ de la función $f(x)$ está dada por:

$$A = \int_a^b f(x)\,dx$$

Ejemplo 1. Encuentre el área bajo la curva $y = 3 - \frac{1}{3}x^2$ entre $x = 0$ y $x = 3$.

Solución

La figura 1 muestra la región pedida. En este caso, el área está definida por:

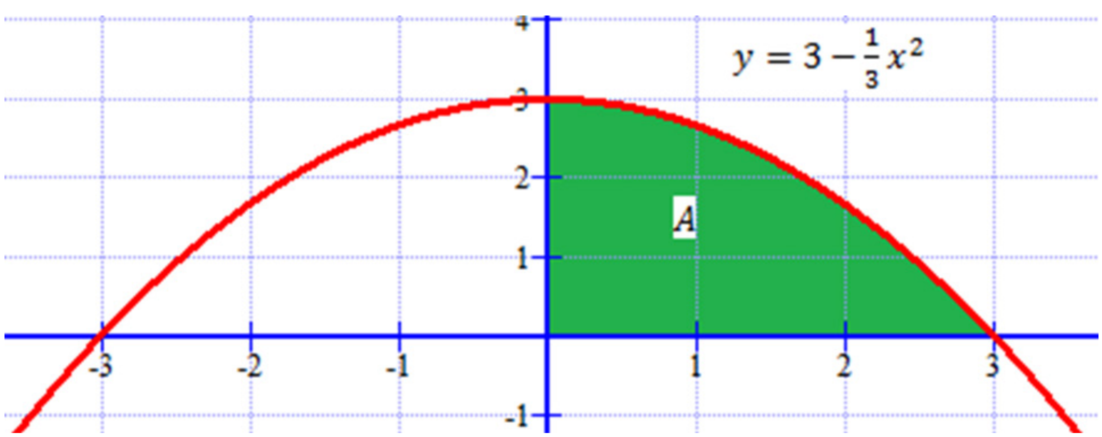

Figura 1. Función $y = 3 - \frac{1}{3}x^2$

Fuente: elaboración propia

$A = \int_0^3 \left(3 - \frac{1}{3}x^2\right)dx$	Se plantea la integral
$A = \left(3x - \frac{1}{9}x^3\right)\Big\|_0^3$	Se halla la integral indefinida
$A = 3(3) - \frac{1}{9}(3)^3 - 3(0) + \frac{1}{9}(0)^3$	Se calcula la integral definida
$A = 9 - 3 = 6$ unidades cuadradas.	

Ejemplo 2. Encuentre el área de la región acotada por las gráficas de las ecuaciones $y=0, x=0,\ x=3$ y la función $y=(x-4)(x+2)$.

Solución

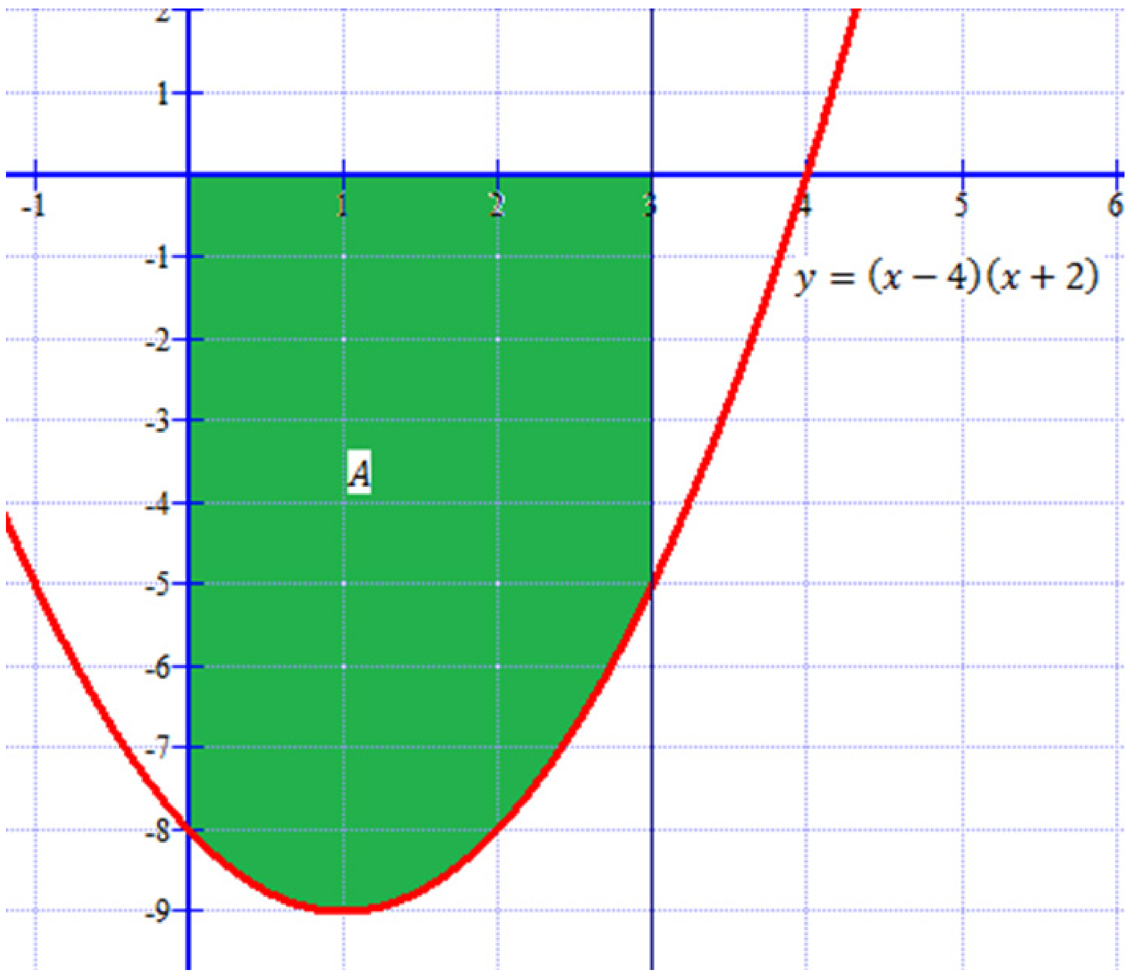

Figura 2. Función $y=(x-4)(x+2)$

Fuente: elaboración propia

La figura 2 muestra la región pedida. En este caso, como la región está por debajo del eje x, la integral definida es un número negativo y por esa razón no es su área; sin embargo, se puede pensar que esta es el contrario de su reflejo sobre el eje x de esa región, en otras palabras, su valor absoluto, es decir, se cambia el signo. En este ejemplo, el área está dada por:

$A=-\int_0^3 (x-4)(x+2)\,dx$	Se plantea la integral

$$A = -\int_0^3 \left(x^2 - 2x - 8\right) dx$$ Se realiza el producto señalado

$$A = -\left(\frac{x^3}{3} - x^2 - 8x\right)\Big|_0^3$$ Se halla la integral indefinida

$$A = -\left(\frac{(3)^3}{3} - (3)^2 - 8(3)\right)$$ Se calcula la integral definida

$A = -(-24) = 24$ unidades cuadradas.

Ejemplo 3. Encuentre el área de la región acotada por las gráficas de las ecuaciones $y = 0, x = -2,\ x = 2$ y la función $y = \sqrt[3]{x}$

SOLUCIÓN

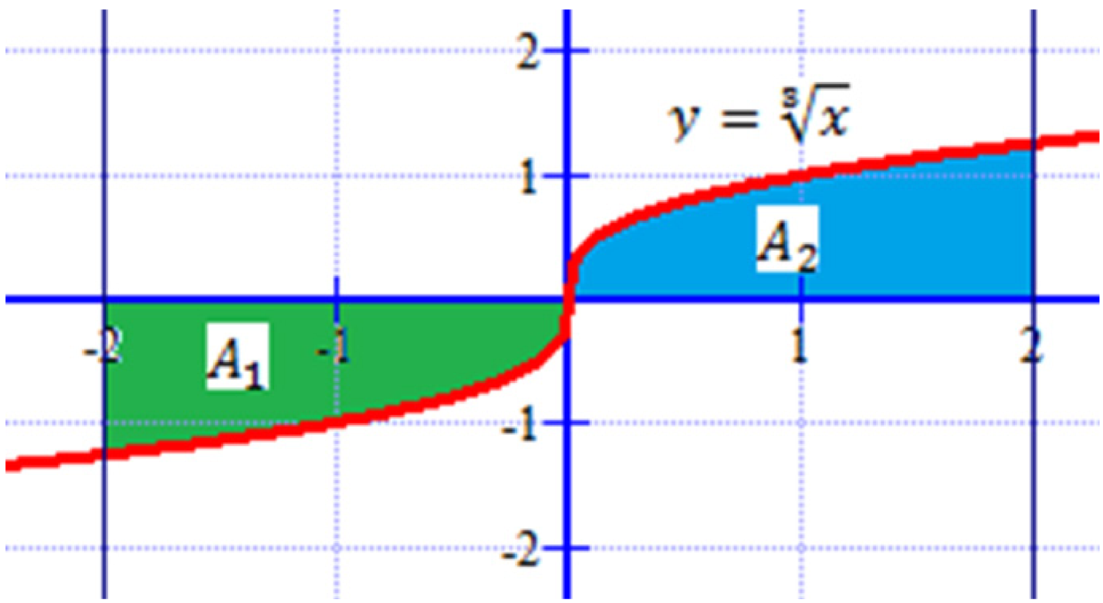

Figura 3. Función $y = \sqrt[3]{x}$

Fuente: elaboración propia

La figura 3 muestra la región pedida. En este caso, como la región tiene una parte por debajo del eje x y otra por encima, para hallar su área se va a dividir en dos regiones, así:

$A = A_1 + A_2$	Según se señala en la figura
$A = -\int_{-2}^{0} \sqrt[3]{x}dx + \int_{0}^{2} \sqrt[3]{x}dx$	Se plantean las integrales
$A = -\frac{3}{4}x^{4/3}\Big\vert_{-2}^{0} + \frac{3}{4}x^{4/3}\Big\vert_{0}^{2}$	Se hallan las integrales indefinidas
$A = \frac{3}{4}(-2)^{4/3} + \frac{3}{4}(2)^{4/3}$	Se calculan las integrales definidas
$A = \frac{3}{4}(2)^{4/3} + \frac{3}{4}(2)^{4/3}$	Se aplica la propiedad de signos para potencias par al número -2

$A = 2\left[\frac{3}{4}\sqrt[3]{2^3 \cdot 2}\right] = 3\sqrt[3]{2}$ unidades cuadradas.

2.1. Ejercicios propuestos para practicar

Encuentre el área de la región acotada por las curvas dadas en cada caso:

1. $4y^2 - 2x = 0; x = 2; y = 0$
2. $x^2 - 4x - 5 = 0; y = 0;$ entre $x = -1$ y $x = 4$
3. $y = x^3, y = 0;$ entre $x = -3$ y $x = 3$

3. Área entre curvas

Los ejemplos trabajados anteriormente son muy sencillos, ya que permitieron aplicar la integral definida sin problema; no obstante, hay regiones más complejas para las que encontrar su área no es tan fácil. Se sugieren tres pasos para plantear correctamente la integral con la cual se encontrará el área: rebane, aproxime e integre. Bosqueje la región pedida, rebane (lo cual significa cortar en tiras delgadas la región) y marque una pieza representativa; luego, aproxime el área de esta pieza como si fuera un rectángulo y, finalmente, integre esta aproximación. A continuación se solucionan algunos ejemplos que ilustran cómo aplicar estos pasos.

Ejemplo 1. Encuentre el área de la región acotada por las curvas $f(x) = x^2 - 2x$, y, $g(x) = -x^2$

Solución

En la figura 4 está sombreada la región entre dos curvas que definen las funciones $f(x)$ y $g(x)$. Es importante que lo primero que se haga sea bosquejar las funciones para visualizar la región y luego se deben encontrar los puntos de corte o intersección de las curvas, así:

$x^2 - 2x = -x^2$	Se igualan las dos funciones
$2x^2 - 2x = 0$	Se iguala a cero
$2x(x-1) = 0$	Se factoriza el polinomio del lado izquierdo
$x = 0 \quad \text{y} \quad x = 1$	Son las soluciones de la ecuación, lo que significa que estos son los puntos de corte de las dos gráficas, lo cual se puede corroborar en la figura 4.

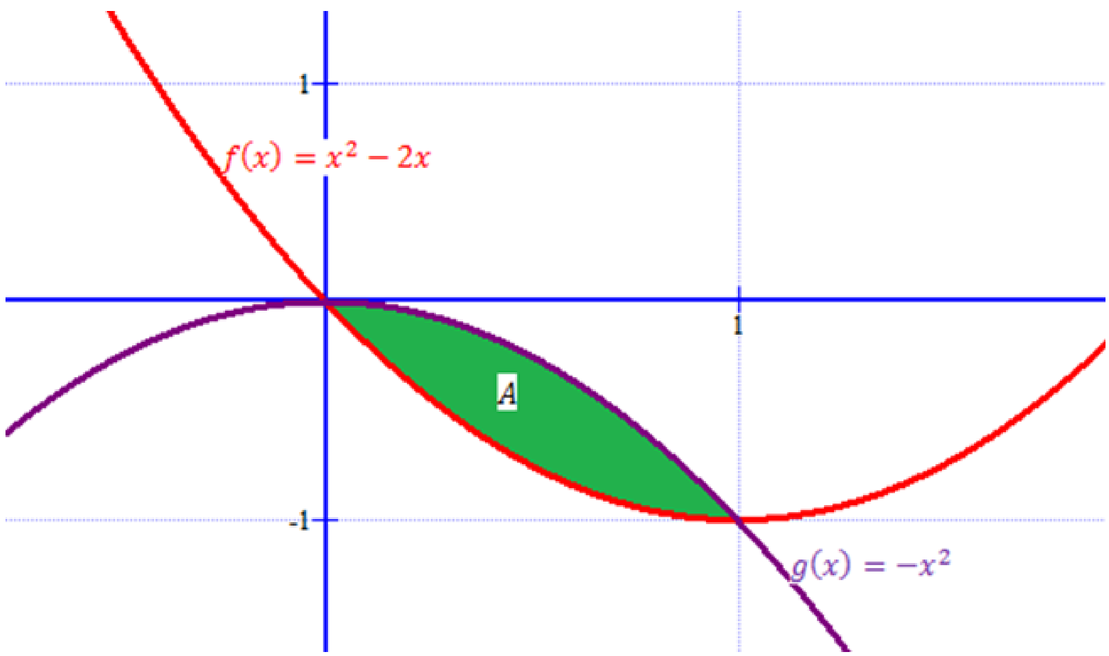

Figura 4. Funciones $f(x)$ y $g(x)$

Fuente: elaboración propia

Una vez se tengan estos puntos de corte, se procede a seguir los tres pasos mencionados:

- **Rebanar:** consiste en hacer cortes, que pueden ser horizontales o verticales, de tal manera que se garantice que se corta en todo momento las dos funciones, tal y como aparece en la figura 5:

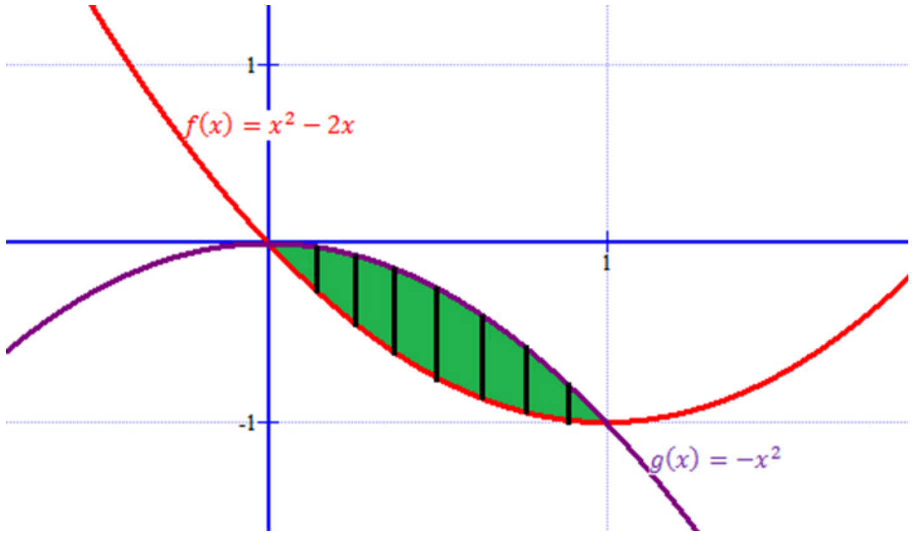

Figura 5. Rebanar
Fuente: elaboración propia

- **Aproximar:** se toma una rebanada representativa y se aproxima su área como si fuese un rectángulo, tal y como aparece en la figura 6; la parte sombreada de negro es la rebanada que se eligió y al tomar el rectángulo se marcaron las dimensiones:

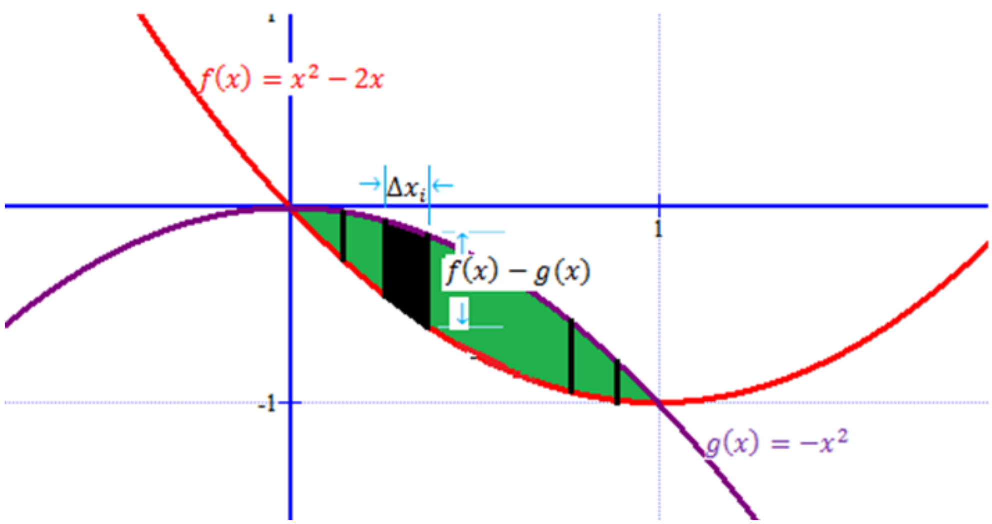

Figura 6. Aproximar
Fuente: elaboración propia

El área aproximada, llamada ΔA, es el producto de la base por la altura, es decir:

$$\Delta A = \left(f(x) - g(x)\right)\Delta x = \left(x^2 - 2x - \left(-x^2\right)\right)\Delta x = \left(2x^2 - 2x\right)\Delta x$$

- **Integrar:** en este caso se tiene en cuenta que el área está por debajo del eje x, por lo que al plantear y hallar la integral se tiene:

$$A = -\int_0^1 \left(2x^2 - 2x\right)dx = -\left(\frac{2}{3}x^3 - x^2\right)\Bigg|_0^1 = -\left(\frac{2}{3} - 1\right) = \frac{1}{3} \text{ unidades cuadradas}$$

Ejemplo 2. Encuentre el área de la región acotada por las curvas $x = 8y - y^2$, y, $x = 0$

Solución

Al seguir el mismo proceso del ejemplo anterior, en la figura 7 aparece el bosquejo de la región, así como las rebanadas y las longitudes del área a aproximar:

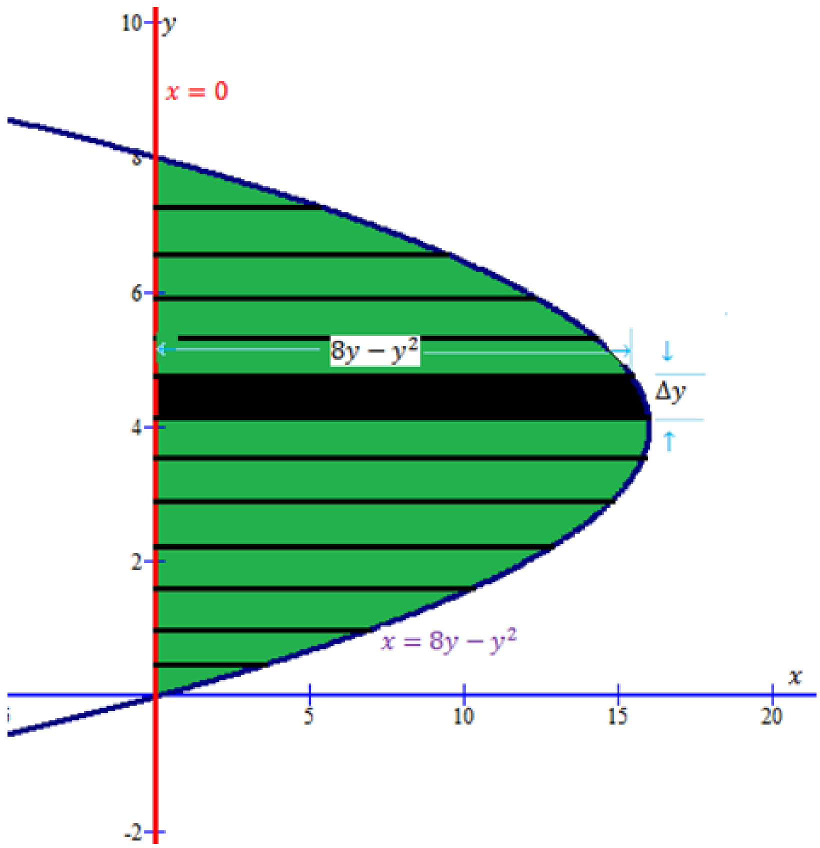

Figura 7. Rebanar y aproximar

Fuente: elaboración propia

Observe que en este caso las rebanadas de la región se hicieron en forma horizontal, ya que involucra las dos ecuaciones dadas. En el sentido vertical se tomaría de la rama superior de la parábola a la inferior y, además, la variación sería en x, por lo que se haría necesario reescribir la ecuación de la forma $y(x)$, bastante complicado en este caso.

Como es necesario establecer los puntos de corte para así mismo tomar los límites de integración, se igualan las dos funciones así:

$8y-y^2=0$	Se plantea la ecuación
$y(8-y)=0$	Se factoriza
$y=0 \quad \text{y} \quad y=8$	Se halla la solución de la ecuación. Estos son los límites de integración.

Según la figura 7, la aproximación del área del rectángulo es $\Delta A=\left(8y-y^2\right)\Delta y$, por lo que la integral que va a dar el área encerrada es:

$$A=\int_0^8\left(8y-y^2\right)dy=\left(4y^2-\frac{y^3}{3}\right)\Bigg|_0^8=256-\frac{512}{3}=\frac{256}{3}$$ unidades cuadradas.

Ejemplo 3. Encuentre el área de la región acotada por las curvas:

$$x=-3, \quad y=x^2-4, \quad \text{y}, \quad y=-x^2-2x.$$

Solución

Como la idea es agilizar el proceso, tenga en cuenta que el procedimiento de rebanar y aproximar se puede ir simplificando; así, en este ejercicio, se van a omitir estos detalles.

Lo primero que se van a encontrar son los puntos de intersección de las dos curvas:

$x^2-4=-x^2-2x$	Se igualan las dos ecuaciones
$2x^2+2x-4=0$	Se iguala a cero
$x^2+x-2=0$	Se simplifica el trinomio
$(x+2)(x-1)=0$	Se factoriza el trinomio
$x=-2 \quad \text{y} \quad x=1$	Son las soluciones de la ecuación; son los puntos de corte.

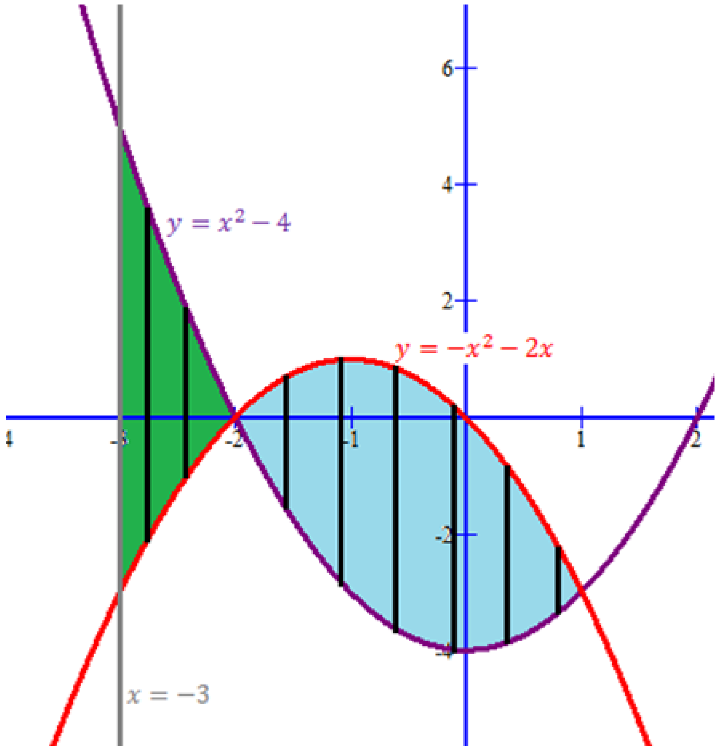

Figura 8. Gráfica de las funciones y rebanada

Fuente: elaboración propia

En la figura 8 aparece sombreada el área que se solicita; por su forma, se va a dividir esa área en dos, A_1 y A_2. De esta manera, la suma de estas constituye el área de la región. De otra parte, las rebanadas son verticales, así que el área total es igual a:

$$A = A_1 + A_2$$

$$A = \int_{-3}^{-2} \left(\left(x^2 - 4\right) - \left(-x^2 - 2x\right)\right) dx + \int_{-2}^{1} \left(\left(-x^2 - 2x\right) - \left(x^2 - 4\right)\right) dx$$

$$A = \int_{-3}^{-2} \left(2x^2 + 2x - 4\right) dx + \int_{-2}^{1} \left(-2x^2 - 2x + 4\right) dx$$

$$A = \left(\frac{2}{3}x^3 + x^2 - 4x\right)\Bigg|_{-3}^{-2} + \left(-\frac{2}{3}x^3 - x^2 + 4x\right)\Bigg|_{-2}^{1}$$

$$A = \left[\left(\frac{2}{3}(-2)^3 + (-2)^2 - 4(-2)\right) - \left(\frac{2}{3}(-3)^3 + (-3)^2 - 4(-3)\right)\right]$$

$$+\left[\left(-\frac{2}{3}(1)^3 - (1)^2 + 4(1)\right) - \left(-\frac{2}{3}(-2)^3 - (-2)^2 + 4(-2)\right)\right]$$

$$A=-\frac{16}{3}+4+8+18-9-12-\frac{2}{3}-1+4-\frac{16}{3}+4+8$$

$$A=24-\frac{34}{3}=\frac{38}{3}\text{unidades cuadradas.}$$

3.1. Ejercicios propuestos para practicar

Encuentre el área de la región que queda encerrada dentro de las curvas dadas:

1. $x=y^2-2y;\ x-y-4=0$
2. $y=\sqrt{x};\ y=x-4; x=0$
3. $x=-6y^2+4y;\ x+3y-2=0$

4. Volumen de sólidos

El uso de la integral definida se puede ampliar en la determinación de volúmenes de sólidos. Para abordar este tema se sugiere revisar los ejemplos resueltos que están en el texto que sirve como material complementario (Purcell, E. J., Varberg, D. y Rigdon, S., 2007), en el capítulo 5.2, página 281, con el fin de aprovechar este espacio para presentar la solución, paso a paso, de otros ejercicios.

Cuando se habló de áreas entre curvas se identificaron tres procesos a seguir: rebanar, aproximar e integrar. Se hace énfasis en ellos porque si se tiene un sólido y se rebana de tal manera que los pedazos tengan formas circulares, cilíndricas, cuadradas o rectangulares, entre otras, permiten calcular fácilmente su volumen (el producto del área de la base por su altura) mediante la suma de todas esas aproximaciones y el cálculo del límite al infinito; en otras palabras, su integral, que se denota y calcula así:

$$V=\int_a^b A(x)\,dx$$

Donde V es el volumen del sólido y $A(x)$ es el área de la base y los límites de la integral que corresponden al intervalo en el que se considera la base del sólido.

Para hablar del intervalo de integración $[a,b]$ es necesario definir la **sección transversal** del sólido como aquella región plana que se obtiene al intersectar el sólido con el plano XY; esta representación permite encontrar el intervalo de integración. Para obtener esas secciones transversales de forma adecuada, existen tres métodos que favorecen la determinación del volumen de un sólido en particular: el de rebanadas o placas delgadas, el de discos y el de arandelas. Mediante ejemplos se explicará cada uno de los métodos y, para tener éxito en el proceso, se invita a seguir estos pasos:

- Bosqueje el sólido en el plano cartesiano y una sección transversal representativa
- Determine una fórmula para hallar el área de la región representativa, $A(x)$
- Determine los límites de integración
- Halle el volumen mediante la aplicación de la integral.

Ejemplo 1. Método de las rebanadas o placas delgadas

Una cuña curvada se corta a partir de un cilindro, de radio 3, por medio de dos planos. Uno de ellos es perpendicular al eje del cilindro y el otro cruza el primer plano y forma un ángulo de 45° en el centro del cilindro. Determine el volumen de la cuña.

Solución

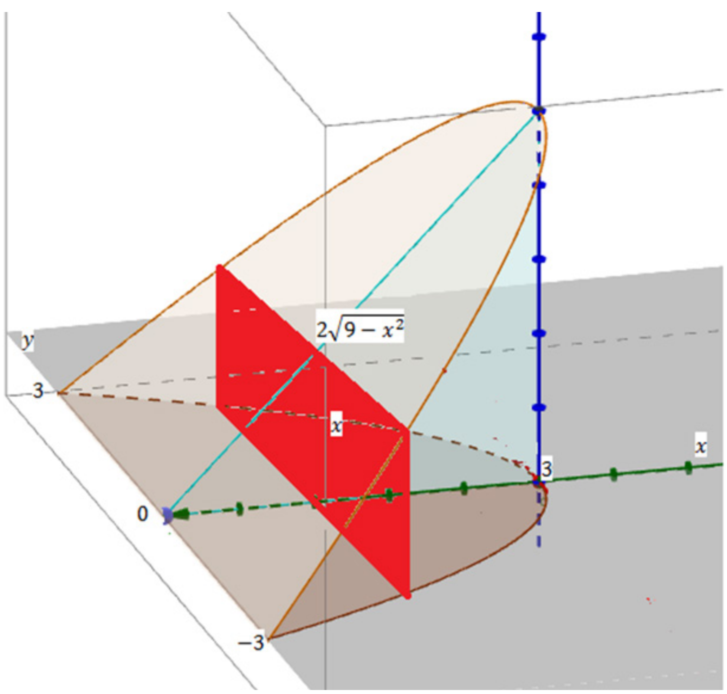

Figura 9. Cuña con sección transversal perpendicular al eje x

Fuente: elaboración propia

En la figura 9 aparece el dibujo de la cuña y su sección transversal obtenida al rebanar en forma perpendicular al eje x; de igual manera, está el nombre de las funciones involucradas, que se obtienen usando elementos geométricos conocidos. Observe:

- La base de la cuña es un semicírculo con $x \geq 0,$ que se obtiene al cortar el círculo de radio 3, $x^2 + y^2 = 9,$ con el segundo plano, que lo atraviesa a 45°. Al despejar y en esta ecuación se sabe que los valores de y van a variar de $y = -\sqrt{9-x^2}$ hasta $y = \sqrt{9-x^2}$ en el intervalo $[0,\ 3]$.
- Al rebanar la cuña en forma perpendicular al eje x, la sección transversal es un rectángulo que tiene altura x y su ancho cruza la base semicircular, es decir, toma los dos puntos extremos de y, lo que hace que el ancho sea igual a $2\sqrt{9-x^2}$, por lo que el área de la sección transversal es la altura por el ancho:

$$A(x) = x\left(2\sqrt{9-x^2}\right) = 2x\sqrt{9-x^2}$$

Como los rectángulos están en el intervalo $[0,\ 3]$, el volumen se obtiene así:

$V = \int_0^3 A(x)\,dx = \int_0^3 2x\sqrt{9-x^2}\,dx$	Se sustituye en la fórmula dada para el volumen
$V = -\frac{2}{3}\left(9-x^2\right)^{3/2}\Big\vert_0^3$	Se integra por sustitución, con $u = 9-x^2$
$V = 0 + \frac{2}{3}(9)^{3/2}$	Se evalúa la integral
$V = 18$ unidades cúbicas.	

Ejemplo 2. Método de discos

En muchas ocasiones la sección transversal es un disco de radio $R(x)$, por lo que la fórmula para encontrar el volumen se transforma, teniendo en cuenta el área del círculo, en:

$$V = \int_a^b \pi\left(R(x)\right)^2\,dx$$

Como ejemplo, se va a encontrar el volumen de la esfera de radio a.

SOLUCIÓN

Imagine que corta la esfera en rebanadas delgadas por medio de planos perpendiculares al eje x, tal y como aparece en la figura 9. Puede observar que el radio es $R(x)=\sqrt{a^2-x^2}$ para la rotación alrededor del eje x, por lo que el volumen es:

$V=\int_{-a}^{a}\pi\left(\sqrt{a^2-x^2}\right)^2dx$	Se sustituye en la fórmula dada para el volumen
$V=\pi\int_{-a}^{a}\left(a^2-x^2\right)dx$	Se realizan operaciones básicas
$V=\pi\left(a^2x-\frac{x^3}{3}\right)\Big\vert_{-a}^{a}$	Se integra la función con respecto a x
$V=\pi\left(a^2(a)-\frac{(a)^3}{3}\right)-\pi\left(a^2(-a)-\frac{(-a)^3}{3}\right)$	Se evalúa la integral
$V=\pi\left(a^3-\frac{a^3}{3}\right)-\pi\left(-a^3+\frac{a^3}{3}\right)$	Se realizan operaciones básicas
$V=\frac{2}{3}\pi a^3+\frac{2}{3}\pi a^3$	Se realizan operaciones
$V=\frac{4}{3}\pi a^3$ unidades cúbicas	

Ejemplo 3. Método de arandelas

En otras oportunidades, la sección transversal tiene la forma de una arandela, la cual tiene dos radios: uno exterior $R(x)$ y uno interior $r(x)$; luego, su área está dada por:

$$A(x)=\pi\left(\left(R(x)\right)^2-\left(r(x)\right)^2\right)$$

Con esos datos, la fórmula del volumen se transforma en:

$$V=\int_{a}^{b}\pi\left(\left(R(x)\right)^2-\left(r(x)\right)^2\right)dx$$

Para aplicar este método es necesario saber cuál es la función que define cada uno de los radios. Para ello es necesario obtener estos sólidos mediante la rotación de una región plana alrededor de un eje, llamado sólido de revolución. En la siguiente lectura se va a hablar de áreas y volúmenes de sólidos de revolución, donde se harán las observaciones y aplicaciones necesarias.

4.1. Ejercicios propuestos para practicar

Encuentre el volumen del sólido generado al hacer girar la región acotada por las curvas dadas en torno al eje señalado.

1. $y = \frac{x^2}{\pi}; x = 4; y = 0;$ en torno al eje x

2. $x = 2\sqrt{y}; y = 4; x = 0;$ en torno al eje y

3. $y = 4x;\ y = 4x^2;$ en torno al eje y

Referencias

Purcell, E. J., Varberg, D. y Rigdon, S. (2007). *Cálculo.* México: Pearson Educación.

Stewart, J. (2001). *Cálculo de una variable.* México: Thomson Learning.

INFORMACIÓN TÉCNICA

FACULTAD DE
INGENIERÍA, DISEÑO
E INNOVACIÓN

Módulo: Cálculo II

Unidad 3: Formas indeterminadas, integrales impropias y algunas aplicaciones de la integral

Escenario 6: Aplicaciones de la integral

Autor: Martha Helena Zambrano Valentín

Asesor Pedagógico: Jeiner Velandia

Diseñador Gráfico: Carlos Montoya

Asistente: Ginna Paola Quiroga