

Cálculo 1.

Lectura No. 14. Límites infinitos y al infinito. Límites trigonométricos.

Hugo E. Zamora C.



Sección 1: Introducción

Se propone el estudio de límites de funciones, los cuales se analizan o calculan con base en las propiedades de números reales, de los límites o en propiedades de la continuidad de funciones. Este estudio amplía el campo de utilización de los límites y permite que se verifique el dominio de las nociones básicas de límites.

Sección 2: Límites infinitos y al infinito

Las propiedades que permiten calcular límites de funciones y los procedimientos que se han empleado para salvar obstáculos que impiden el uso directo de tales propiedades, deben ser complementados con el desarrollo de habilidad en el análisis del comportamiento de las imágenes de funciones, cuando los valores de la variable independiente se acercan suficientemente a un número real o se alejan hacia números reales grandes tanto como se quiera pensar.

Con base en la gráfica de la función $f(x) = \frac{1}{x}$, que se muestra en la figura 1, en forma intuitiva se puede asegurar que $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \infty$ o que $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = 0$

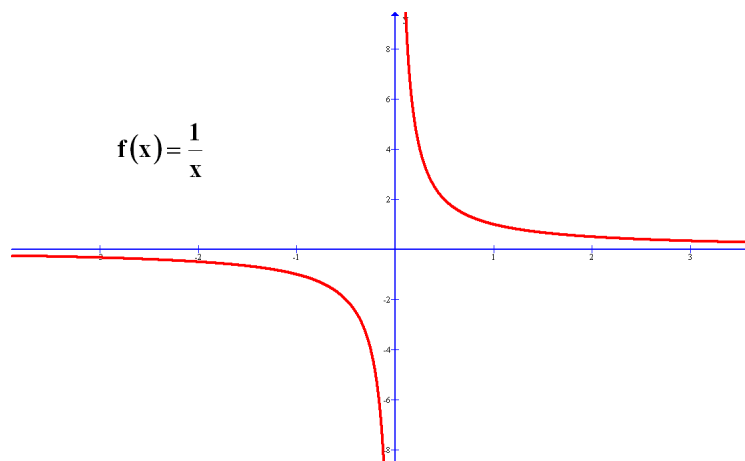


Figura 1: Límite infinito y al infinito de una función f

Con objeto de superar las limitaciones de la gráfica de una función, se requiere de procedimientos que permitan cálculos efectivos de este tipo de límites. Es así que calcular $\lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{x^2 + 5}{x^2(x - 2)}$ se plantea en estos términos: La función

$f(x) = \frac{x^2 + 5}{x^2(x - 2)}$ es racional, pero para $x = 2$ no existe la imagen, así que no es posible realizar el límite por cálculo directo. El intento de aplicar propiedades de números reales y sus operaciones, que permitan simplificar la expresión $(x - 2)$ es infructuoso. Así que se apela al siguiente razonamiento:

- Si $x \rightarrow 2^+$ entonces la expresión $x^2 + 5 \rightarrow 9$
- Si $x \rightarrow 2^+$ entonces $x^2 \rightarrow 4$
- Si $x \rightarrow 2^+$ entonces $(x - 2) \rightarrow 0^+$. Esta afirmación es importante en la medida que se logra identificar que cuando una expresión tiende a 0, significa que los valores cercanos a 0 pueden ser positivos o negativos. En

este caso, estos valores son negativos y se han caracterizado afirmando que la expresión $(x - 2)$ se acerca a 0 por la izquierda $(-)$.

Una vez realizados estos análisis se puede concluir que si $x \rightarrow 2^+$ entonces se tiene que $\frac{x^2 + 5}{x^2(x - 2)} \rightarrow \frac{9}{4(0^-)}$. Nótese que se sigue que $x^2(x - 2) \rightarrow 0^-$. Entonces, se tiene que el numerador de la fracción que se analiza se acerca suficientemente a 9, mientras que el denominador se acerca suficientemente a 0 mediante valores negativos. Esto significa que $\frac{x^2 + 5}{x^2(x - 2)}$ será un valor negativo muy pequeño, hecho que se señala mediante la afirmación $\frac{x^2 + 5}{x^2(x - 2)} \rightarrow -\infty$. Y así se asegura que $\lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{x^2 + 5}{x^2(x - 2)} = -\infty$. Este tipo de límites se denominan límites infinitos.

Un límite al infinito es un límite donde la variable independiente de una función toma valores suficientemente grandes y se desea analizar el comportamiento de sus imágenes. Para calcular estos límites se hace uso del resultado: Si r es un número racional positivo y x^r existe, entonces $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{x^r} = 0$ y $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{x^r} = 0$.

Las propiedades de los límites que se declararon cuando la variable independiente de la función tiende a un número real a , son válidas para los límites infinitos. En este sentido, por ejemplo si $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = L$ y $\lim_{x \rightarrow \infty} g(x) = M$, entonces $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) + g(x) = L + M$

2.1: Ejemplos

- La determinación de $\lim_{x \rightarrow -4^+} \frac{3}{x + 4}$ se basa en el análisis de la expresión $x + 4$. Se observa que a medida que $x \rightarrow -4^+$ entonces $x + 4 \rightarrow 0^+$. Así que $\frac{3}{x + 4} \rightarrow \frac{3}{0^+}$, o sea que $\lim_{x \rightarrow -4^+} \frac{3}{x + 4} = \infty$
- Para calcular $\lim_{x \rightarrow 0^+} \ln\left(\frac{1}{x}\right)$ se procede así:

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0^+} \ln\left(\frac{1}{x}\right) &= \lim_{x \rightarrow 0^+} (\ln 1 - \ln x) && \text{Propiedad de logaritmos.} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0^+} (0 - \ln x) && \text{Cálculo del logaritmo} \\ &= - \lim_{x \rightarrow 0^+} \ln x && \text{Propiedad de los límites} \end{aligned}$$

Si $x \rightarrow 0^+$, entonces $\ln x \rightarrow -\infty$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \ln\left(\frac{1}{x}\right) = -(-\infty) = \infty$$

- El cálculo de $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3x^2 - x}{x - x^3}$ se realiza teniendo en cuenta los resultados de $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{x^r} = 0$ y $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{x^r} = 0$. Para ello se divide cada término de la fracción entre la **mayor potencia** de la variable en el denominador. Es



decir:

$$\begin{aligned}
 \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3x^2 - x}{x - x^3} &= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\frac{3x^2 - x}{x^3}}{\frac{x - x^3}{x^3}} && \text{Se divide entre } x^3 \\
 &= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\frac{3x^2}{x^3} - \frac{x}{x^3}}{\frac{x}{x^3} - \frac{x^3}{x^3}} && \text{Propiedad de la suma de fracciones} \\
 &= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\frac{3}{x} - \frac{1}{x^2}}{\frac{1}{x^2} - 1} && \text{Simplificación} \\
 &= \frac{\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3}{x} - \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{x^2}}{\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{x^2} - \lim_{x \rightarrow \infty} 1} && \text{Propiedades de límites} \\
 &= \frac{3 \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{x} - \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{x^2}}{\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{x^2} - \lim_{x \rightarrow \infty} 1} && \text{Propiedades de límites} \\
 \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3x^2 - x}{x - x^3} &= \frac{3(0) - 0}{0 - 1} = 0
 \end{aligned}$$

4. Calcular $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{x^2 - 1}}{x}$ se hace en forma similar al anterior límite. es decir:

$$\begin{aligned}
 \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{x^2 - 1}}{x} &= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\frac{\sqrt{x^2 - 1}}{x}}{\frac{x}{x}} && \text{Dividir entre } x \\
 &= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\frac{\sqrt{x^2 - 1}}{x}}{\frac{x}{x}} && \text{Propiedad: } x = \sqrt{x^2} \\
 &= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{\frac{x^2 - 1}{x^2}}}{\frac{x}{x}} && \text{Propiedad de radicales} \\
 &= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{1 - \frac{1}{x^2}}}{1} && \text{Simplificación} \\
 \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{x^2 - 1}}{x} &= 1 && \text{Cálculo de límites}
 \end{aligned}$$

5. Los límites infinitos y al infinito son herramientas útiles en la determinación precisa de las asíntotas de la gráfica de una función. Al efecto se asumen los siguientes resultados:

- f una función. Si se da una de las siguientes posibilidades: $\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = \infty$; $\lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = \infty$; $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \infty$; $\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = -\infty$; $\lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = -\infty$; $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = -\infty$, entonces se afirma que f tiene una asíntota vertical en $x = a$.



- f una función tiene una asíntota horizontal en $y = k$ con k una constante, si $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = k$, o $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = k$

Así que para determinar las asíntotas de $f(x) = \frac{3-x}{x-2}$ se procede así:

- Las posibles asíntotas verticales se localizan en los valores reales para los cuales no está definida la función. en este caso en $x = 2$. Para corroborar la suposición se calcula $\lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{3-x}{x-2}$. Al recurrir al análisis de la expresión que define la función se afirma que $\lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{3-x}{x-2} = \infty$. Por lo tanto, f tiene asíntota vertical en $x = 2$.

Observación: Nótese que se planteó uno de los límites señalados en el resultado para determinar asíntotas verticales de una función.

- El cálculo de $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x)$ permite identificar (si existen) las asíntotas horizontales. Se tiene entonces que

$$\begin{aligned}
 \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3-x}{x-2} &= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\frac{3}{x} - \frac{x}{x}}{\frac{x}{x} - \frac{2}{x}} && \text{Dividir entre } x \\
 &= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\frac{3}{x} - 1}{1 - \frac{2}{x}} && \text{Simplificación} \\
 &= \frac{\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3}{x} - \lim_{x \rightarrow \infty} 1}{\lim_{x \rightarrow \infty} 1 - \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2}{x}} && \text{Propiedades de límites} \\
 \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3-x}{x-2} &= -1 && \text{Cálculo de límites}
 \end{aligned}$$

En consecuencia, $f(x) = \frac{3-x}{x-2}$ tiene una asíntota horizontal en $y = -1$. Con la ayuda de los elementos fundamentales de f y el trazo de su gráfica se pueden verificar los resultados obtenidos. La figura 2 muestra dicha gráfica.

2.2: Ejercicios

1. Calcular los límites indicados.

- $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{2-x}{x^2(3-x)}$
- $\lim_{x \rightarrow -1^+} \frac{x+3}{x(1+x)}$
- $\lim_{x \rightarrow -1^-} \frac{\sqrt{-3x}}{x+1}$
- $\lim_{x \rightarrow \pi} \sec\left(\frac{x}{2} - \pi\right)$
- $\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{\llbracket x \rrbracket}{x}$

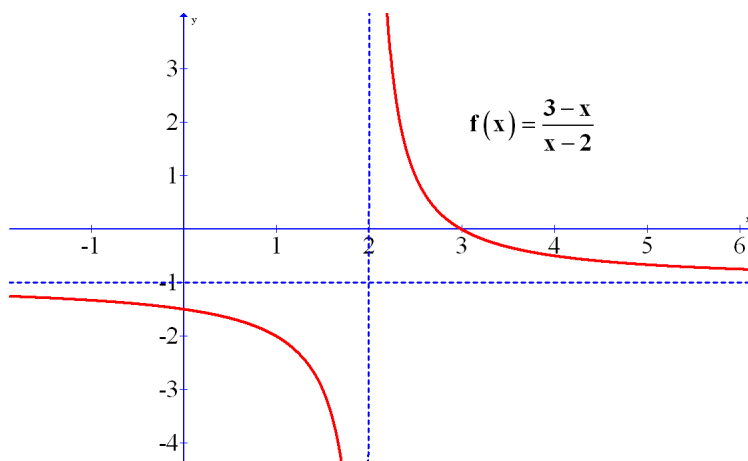


Figura 2: Asíntotas horizontales y verticales de una función

$$f) \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x^3 - x + 1}{\sqrt{3x^3 + x^2} - 1}$$

$$g) \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3 - x}{\sqrt{1 + x^2}}$$

$$h) \lim_{x \rightarrow \infty} (\sqrt{4x + x^2} - x)$$

$$i) \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2 + x}{\sqrt{x^2 - 1}}$$

$$j) \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^3 - x}{1 - x^2}$$

2. Para cada una de las funciones dadas, determine si existen las asíntotas horizontales y verticales y esboce la gráfica de la función.

$$a) y = \frac{3 - x^2}{x^2 - 4}$$

$$b) g(x) = \frac{-2x}{1 - x^2}$$

$$c) y = \frac{4}{x^2 + 2}$$

3. La recta $y = mx + b$ se llama asíntota oblicua de la gráfica de una función f si $\lim_{x \rightarrow \infty} [f(x) - (mx + b)] = 0$,
o $\lim_{x \rightarrow -\infty} [f(x) - (mx + b)] = 0$.

Determine la asíntota oblicua de $y = \frac{x^2 - x + 1}{x - 1}$ y elabore su gráfica de f

Sección 3: Límites trigonométricos

Los límites que contienen funciones trigonométricas se puede intentar calcularlos usando la continuidad de estas funciones y las propiedades de límites y continuidad. Por ejemplo $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \sin\left(x - \frac{\pi}{4}\right) = \sin \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \left(x - \frac{\pi}{4}\right) =$

$$\sin\left(\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{4}\right) = \sin\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

Se expone a continuación la demostración de $\lim_{t \rightarrow 0} \frac{\sin t}{t} = 1$, límite útil para calcular límites trigonométricos. Para ello se hace uso del resultado: Si t es la medida en radianes de un ángulo central \hat{t} de una circunferencia de radio r , entonces el área del sector circular determinada por \hat{t} , está dada por $\frac{tr^2}{2}$. Se asume que la circunferencia dada en la figura 3 es de radio 1. Además, como t es un ángulo en posición estándar, las coordenadas del punto C sobre el lado final de t son $(\cos t, \sin t)$. Así que de acuerdo con el gráfico se tiene:

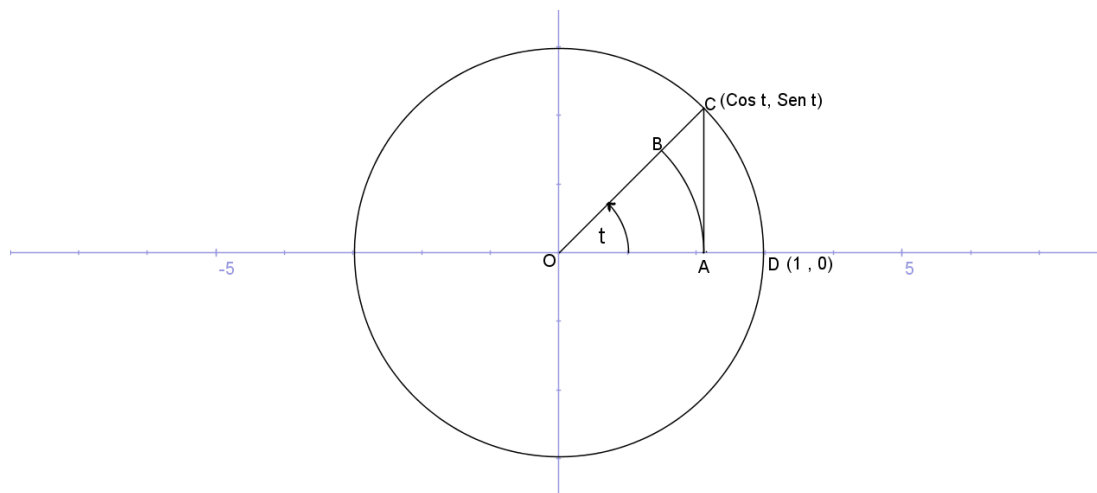


Figura 3: Demostración de $\lim_{t \rightarrow 0} \frac{\sin t}{t} = 1$

$$Area(SectorOAB) \leq Area(\triangle OAC) \leq Area(SectorODC)$$

$$\frac{t \cos^2 t}{2} \leq \frac{\sin t \cos t}{2} \leq \frac{t}{2}$$

Cálculo de áreas

$$t \cos^2 t \leq \sin t \cos t \leq t$$

Dividir entre 2

$$\cos t \leq \frac{\sin t}{t} \leq \frac{1}{\cos t}$$

Dividir entre $t \cos t$

Como $\lim_{x \rightarrow 0} \cos t = 0$ y $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{\cos t} = 0$, entonces de acuerdo al teorema de intercalación se afirma que $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin t}{t} = 1$



3.1: Ejemplos

1. El resultado que se ha obtenido útil para demostrar que $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos x - 1}{x} = 0$, pues:

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos x - 1}{x} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos x - 1}{x} \times \frac{\cos x + 1}{\cos x + 1} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos^2 x - 1}{x(\cos x + 1)} = \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(1 - \sin^2 x) - 1}{x(\cos x + 1)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-\sin^2 x}{x(\cos x + 1)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-\sin x}{\cos x + 1} \times \frac{\sin x}{x} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-\sin x}{\cos x + 1} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = \left(\frac{0}{1 + 1} \right) 1 = 0 \end{aligned}$$

2. El cálculo de $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 2x}{\sin 5x}$ se realiza con base en el resultado $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin t}{t} = 1$, pues se intenta obtener una expresión equivalente a la dada que contenga este límite. Esta acción se desarrolla así:

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 2x}{\sin 5x} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\left(\frac{\sin 2x}{2x} \right) 2x}{\left(\frac{\sin 5x}{5x} \right) 5x} && \text{Expresar 1 como } \frac{2x}{2x} \text{ y } \frac{5x}{5x} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\left(\frac{\sin 2x}{2x} \right)}{\left(\frac{\sin 5x}{5x} \right)} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2x}{5x} && \text{Propiedad de límites} \\ &= \frac{\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{\sin 2x}{2x} \right)}{\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{\sin 5x}{5x} \right)} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2}{5} && \text{Propiedades de límites} \\ \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 2x}{\sin 5x} &= \left(\frac{1}{1} \right) \left(\frac{2}{5} \right) = \frac{2}{5} && \text{Cálculo de límites} \end{aligned}$$

3.2: Ejercicios

Utilizar propiedades de límites y de continuidad para calcular los límites señalados.

- $\lim_{x \rightarrow 2} \sin \left(\frac{x^2 - 5x + 6}{2 - x} \right)$
- $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{3}} e^{\cos(\frac{\pi}{6} - x)}$
- $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 3x}{5x}$
- $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \ln \left(\tan \left(x - \frac{\pi}{4} \right) \right)$
- $\lim_{x \rightarrow 0} \sec \left(1 - \frac{\sin x}{x} \right)$

6. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x + x \cos x}{\sin x \cos x}$
7. $\lim_{x \rightarrow (\frac{\pi}{3})^+} \cot \left(x - \frac{\pi}{3} \right)$
8. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 2x}{\tan 3x}$
9. $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{6}} \csc \frac{3x - \frac{\pi}{2}}{x - \frac{\pi}{6}}$
10. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{2x^3 - \sin \left(\frac{x}{2} \right)}{5x}$

