Unidad 2 / Escenario 3

Lectura Fundamental

Razones trigonométricas

Contenido

Palabras y frases claves: Razones, trigonometría, ángulos, gráficas, medición.

1. Introducción

Estimado Estudiante

A continuación se estudiarán aspectos importantes de la trigonometría, que es una rama importante de las matemáticas que significa "la medición de triángulos" y estudia las relaciones que existen entre los lados y los ángulos de un triángulo. Especificamente se estudiarán las razones trigonométricas (seno, coseno, tangente, cotangente, secante, cosecante) y las diferentes aplicaciones de esta rama.

La trigonometría tiene diferentes aplicaciones: en la construcción de edificaciones, para calcular distancias con precisión, en el cálculo de ángulos de inclinación en la construcción de carreteras, en sistemas de navegación por satélite, entre otras; por tanto para las ingenierías y las telecomunicaciones es una herramienta valiosa.

2. Ángulos y triángulos

Se iniciará el estudio de la trigonometría reconociendo dos elementos importantes los ángulos y los triángulos, por lo tanto, se recordarán estos conceptos y los diferentes sistemas de medición y tipos, tanto de ángulos como para los triángulos; puesto que nos serán de utilidad para resolver diferentes ejercicios.

2.1. Ángulos

Un ángulo es una sección del plano que está comprendida por dos semirectas, denominadas **lados del ángulo** y que se originan en un mismo punto llamado **vértice del ángulo**.

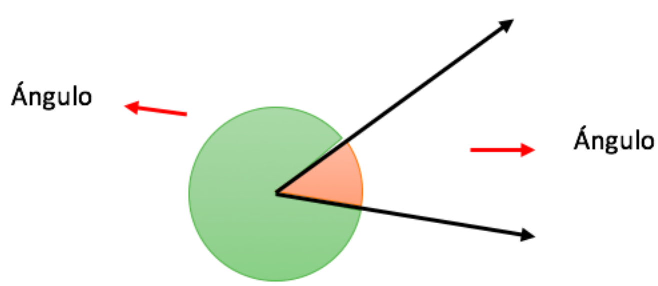

Figura 1: Ángulos
Fuente: elaboración propia

Se dice que un ángulo es positivo cuando se mide en el sentido contrario a las manecillas del reloj (sentido antihorario); en el plano cartesiano, se asume que los ángulos se miden desde el eje positivo de las x, ver gráfica.

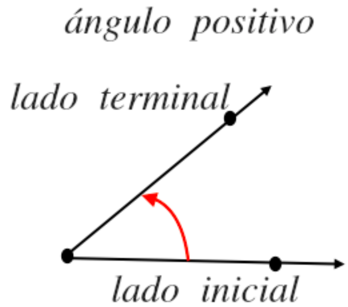

Figura 2: Sentido positivo
Fuente: elaboración propia

Y el ángulo es negativo si se mide en sentido horario.

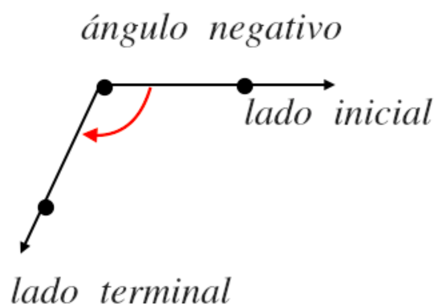

Figura 3: Sentido negativo
Fuente: elaboración propia

2.1.1. Tipos de ángulos

Los ángulos se clasifican de acuerdo con su medida; por lo tanto se tiene la siguiente clasificación:

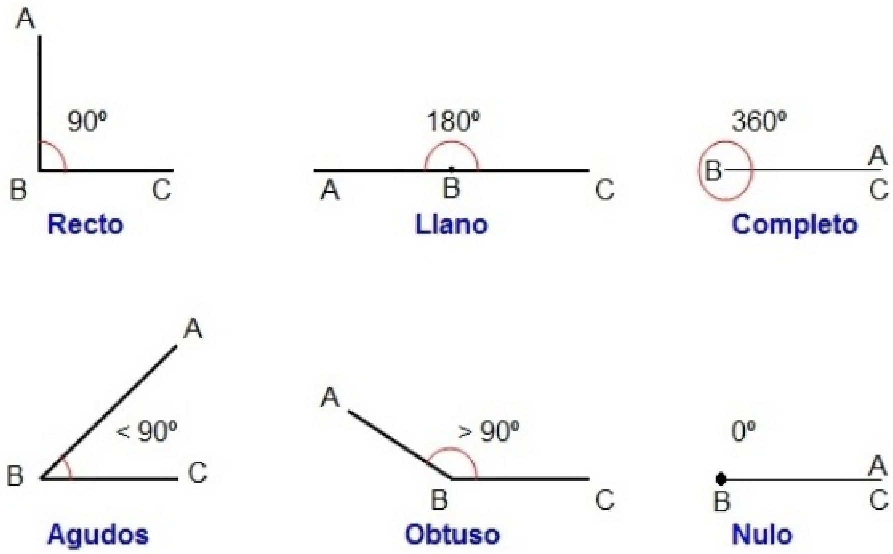

Figura 4: Tipos de ángulos
Fuente: http://mirincondelasmatematicas.blogspot.com.co/2016/09/angulos-introduccion-1.html

2.2. Sistemas de medición y conversión de unidades

Para nombrar un ángulo generalmente se usan letras griegas pero también puede nombrarse mediante tres letras mayúsculas, una de ellas el lado inicial, otra el vértice y la última el lado final.También se hace necesario conocer su medida; esta es la cantidad de rotación respecto al vértice requerida para mover el lado inicial del ángulo sobre el lado terminal; es decir, conocer **cuánto abre el ángulo**, y para esto se tienen dos sistemas de medición que son:

- **Sistema circular-Radianes**
  En este sistema una vuelta completa equivale a $2\pi r$ radianes; pero si tomamos como referencia la circunferencia de radio uno; la medida de toda la circunferencia será 2π

> **Recuerda que**: cuando se está trabajando en estas unidades la calculadora debe estar en la función rad (radianes)

- **Grados sexagesimales-grados**
  En este sistema se divide la circunferencia en 360 partes iguales; y así obtenemos un grado, a su vez cada grado se compone de 60 minutos y cada minuto de 60 segundos; por lo tanto, un ángulo se mide en

$$grados^{\circ} minutos' segundos''$$

> **Recuerda que:** cuando se está trabajando en estas unidades la calculadora debe estar en la función deg (*degree*, es decir grado en inglés)

2.2.1. Conversión entre sistemas de medición

Como una vuelta completa si se mide en grados es 360^{o} y medida en radianes es 2π, también se tiene que $\pi\ radianes = 180\ grados$; se puede relacionar estos dos sistemas de medición así:

1. Para convertir grados en radianes, multiplique por $\dfrac{\pi}{180^{\text{o}}}$.
2. Para convertir radianes en grados, multiplique por $\dfrac{180^{\text{o}}}{\pi}$

Ejemplo 1. ***Conversión de unidades***

1. *Exprese* 30^{o} *en radianes.*
2. *Exprese* $\dfrac{\pi}{3}$ *en grados*

Solución

Realizando las operaciones se tiene:

1. $30^{o} = 30^{o}\left(\dfrac{\pi}{180^{o}}\right) rad = \dfrac{\pi}{6} rad$
2. $\dfrac{\pi}{3} = \dfrac{\pi}{3}\left(\dfrac{180^{o}}{\pi}\right) = 60^{o}$

2.3. Triángulos y su clasificación

Recuerda que: un triángulo es una superficie plana limitada por tres segmentos o lados que se cortan dos a dos en tres vértices; generalmente los vértices se nombran con letras mayúsculas y los lados con letras minúsculas empleando la misma letra que el vértice opuesto.

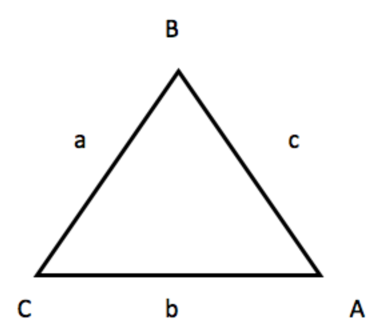

Figura 5: Notación de un triángulo
Fuente: elaboración propia

Los triángulos se clasifcan según sus lados y según sus ángulos.

1. Según sus lados pueden ser: equiláteros, isósceles o escalenos.

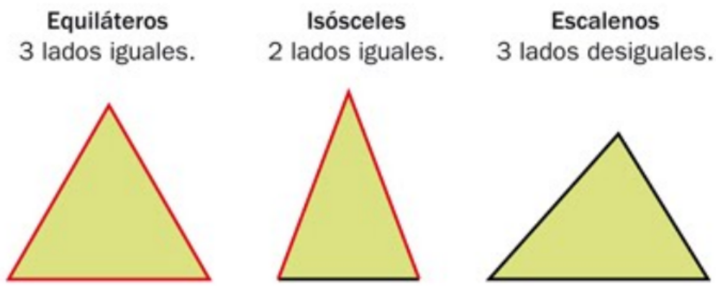

Figura 6: Clasificación según sus lados

2. Según sus ángulos pueden ser: rectángulos, acutángulos u obtusángulos.

Figura 7: Clasificación según sus ángulos

Sabías que: la suma de los ángulos interiores de un triángulo es igual a 180º.

2.4. Teorema de Pitágoras

El teorema de Pitágoras establece que en un **triángulo rectángulo** el cuadrado de la longitud de la hipotenusa (lado mayor del triángulo) es igual a la suma de los cuadrados de las longitudes de los dos catetos (los lados menores del triángulo); símbolicamente, el teorema establece:

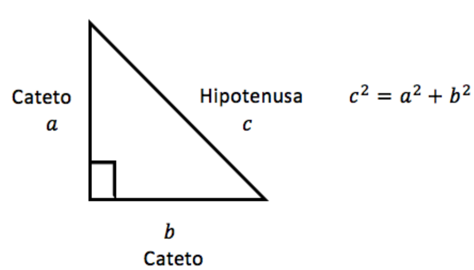

Figura 8: Teorema de Pitágoras
Fuente: elaboración propia

Sabías que: Pitágoras fue un filósofo, místico religioso y un gran matemático que vivió sobre el siglo VI antes de Cristo.

2.5. La circunferencia

La circunferencia es el lugar geométrico de los puntos del plano que equidistan de otro llamado centro; la distancia del centro $C(h, k)$ a cualquier punto $P(x, y)$ es siempre la misma; esa distancia se llama radio de la cirfunferencia y lo notamos r.

La ecuación general de la circunferencia con centro en el punto (h, k) y radio r es:

$$(x-h)^2 + (y-k)^2 = r^2$$

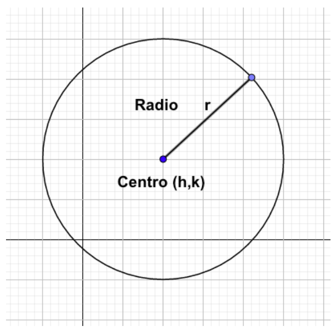

Figura 9: Elementos de la circunferencia
Fuente: elaboración propia

Sabías que: la ecuación general de una circunferencia con centro en $(0, 0)$ y radio r es

$$x^2 + y^2 = r^2$$

3. Razones trigonométricas

Una razón es el cociente entre dos cantidades y una razón trigonométrica es el cociente entre las medidas de dos lados de un triángulo rectángulo; y las razones trigonométricas se asignan a los ángulos agudos de un triángulo rectángulo. Por lo tanto, se nombrarn los catetos de acuerdo con el ángulo agudo al cual se refiere una razón trigonométrica; es decir, se identifican los catetos opuesto y adyancente al ángulo para definir cada razón trigonométrica (Zamora, 2010).

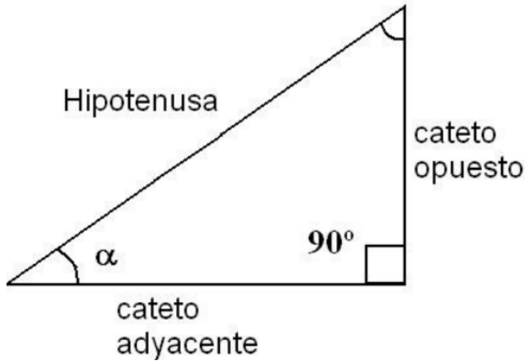

Figura 10: Triángulo rectángulo
Fuente: elaboración propia

Considerando el triángulo rectángulo anterior con ángulo α, las razones trigonométricas se definen así:

Definición razón trigonométrica	**Abreviatura**
$seno\ \alpha = \dfrac{Cateto\ Opuesto}{Hipotenusa}$	$\sin\alpha = \dfrac{C.O.}{H}$
$coseno\ \alpha = \dfrac{Cateto\ Adyacente}{Hipotenusa}$	$\cos\alpha = \dfrac{C.A.}{H}$
$tangente\ \alpha = \dfrac{Cateto\ Opuesto}{Cateto\ Adyacente}$	$\tan\alpha = \dfrac{C.O.}{C.A.}$
$cosecante\ \alpha = \dfrac{Hipotenusa}{Cateto\ Opuesto}$	$\csc\alpha = \dfrac{H}{C.O.}$
$secante\ \alpha = \dfrac{Hipotenusa}{Cateto\ Adyacente}$	$\sec\alpha = \dfrac{H}{C.A.}$
$cotangente\ \alpha = \dfrac{Cateto\ Adyacente}{Cateto\ Opuesto}$	$\cot\alpha = \dfrac{C.A.}{C.O.}$

Tabla 1: Razones trigonométricas
Fuente: elaboración propia

Sabías que: no importa el tamaño del triángulo, las razones trigonométricas dependen solo del ángulo θ.

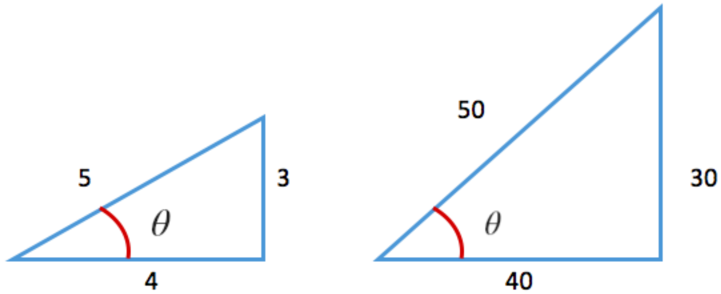

Figura 11: Ejemplo razones trigonométricas
Fuente: elaboración propia

$$\sin(\theta) = \frac{3}{5} \qquad \sin(\theta) = \frac{30}{50} = \frac{3}{5}$$

$$\cos(\theta) = \frac{4}{5} \qquad \cos(\theta) = \frac{40}{50} = \frac{4}{5}$$

Ejemplo 2. *Encuentre las razones trigonométricas del ángulo θ*

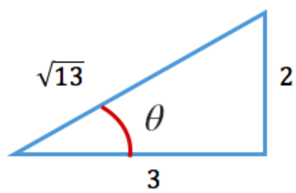

Figura 12: Ejemplo

Solución

$$\sin(\theta) = \frac{2}{\sqrt{13}} \qquad \cos(\theta) = \frac{3}{\sqrt{13}} \qquad \tan(\theta) = \frac{2}{3}$$

$$\csc(\theta) = \frac{\sqrt{13}}{2} \qquad \sec(\theta) = \frac{\sqrt{13}}{3} \qquad \cot(\theta) = \frac{3}{2}$$

4. Funciones trigonométricas de ángulos

En la sección anterior se estudiaron las razones trigonométricas para triángulos rectángulos, por lo tanto, en la presente sección se resolverán ejercicios donde el ángulo no necesariamente es agudo; para esto se partirá de un triángulo ractángulo ubicado en el plano cartesiano en posición estándar, es decir que su vértice coincida con el origen y su lado inicial se encuentre sobre la parte positiva del eje x.

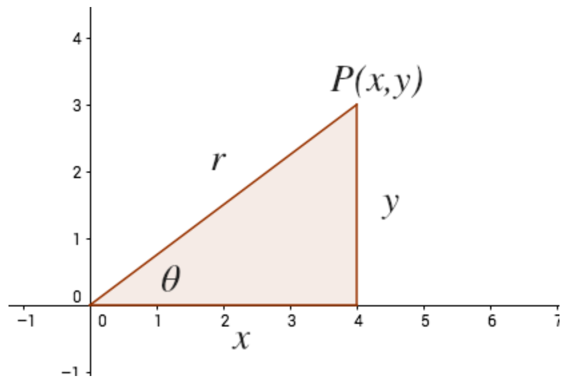

Figura 13: Ángulo en posición estándar
Fuente: elaboración propia

Como puede observar $P = P(x, y)$ es un punto sobre el lado terminal del ángulo θ y además está ubicado en el plano cartesiano, por lo tanto las coordenadas del punto P son (x, y) y usando el teorema de Pitágoras, la hipotenusa será $r = \sqrt{x^2 + y^2}$ y se tiene:

$$\sin(\theta) = \frac{y}{r} \qquad \cos(\theta) = \frac{x}{r} \qquad \tan(\theta) = \frac{y}{x}$$

Por lo tanto, se pueden ampliar las razones trigonométricas a cualquier ángulo; sólo debe tener en cuenta que:

Sea θ un ángulo en posición estándar y sea $P(x, y)$ un punto sobre el lado terminal. Si $r = \sqrt{x^2 + y^2}$ es la distancia del origen al punto $P(x, y)$, entonces:

$$\sin(\theta) = \frac{y}{r} \qquad \cos(\theta) = \frac{x}{r} \qquad \tan(\theta) = \frac{y}{x}$$

$$\csc(\theta) = \frac{r}{y} \quad (y \neq 0) \qquad \sec(\theta) = \frac{r}{x} \quad (x \neq 0) \qquad \cot(\theta) = \frac{x}{y} \quad (y \neq 0)$$

Sabías que: el signo de una función trigonométrica de un ángulo depende de las coordenadas del punto sobre el lado final del ángulo.

Observa el siguiente ejemplo:

Ejemplo 3. *Si $P(-6, 5)$ es un punto en el lado final del ángulo β, determine*

1. $\sin\beta$
2. $\cos\beta$
3. $\tan\beta$

Solución
Para dar solución al ejercicio, se graficará este punto en el plano cartesiano; y se observa que este punto está en el segundo cuadrante, ahora usando el teorema de Pitágoras, se hallará la hipotenusa así:

$$h = \sqrt{(-6)^2 + (5)^2} = \sqrt{61}$$

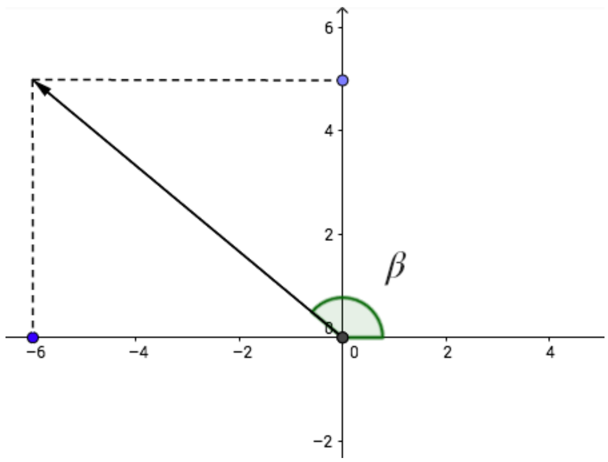

Figura 14: Ejemplo
Fuente: elaboración propia

1. $\sin\beta = \dfrac{5}{\sqrt{61}}$

2. $\cos\beta = \dfrac{-6}{\sqrt{61}}$

3. $\tan\beta = \dfrac{5}{-6}$

5. Ejercicios

Para afianzar y verificar la comprensión y adecuado trabajo con los elementos de las razones trigonométricas y sus propiedades, realice lo siguiente:

1. Pasar a grados

   a. $\frac{5\pi}{6}$
   b. $\frac{3\pi}{2}$
   c. $\frac{7\pi}{6}$
   d. $\frac{\pi}{3}$

2. Pasar a radianes

   a. 330º
   b. 225º
   c. 45º
   d. 120º

3. Evalúe las seis razones trigonométricas (si es posible) del ángulo cuyo lado terminal pasa por los puntos cuyas coordenadas se indican. Exprese su respuesta lo más simplificada posible.

a. $P(12,5)$

b. $P(-2,-2)$

c. $P(-4,3)$

d. $P(\sqrt{3},1)$

e. $P(0,-1)$

f. $P(-1,\sqrt{3})$

4. Determine el valor de las otras cinco razones trigonométricas de un ángulo θ, de acuerdo con la información dada. **Sugerencia:**Dibujar el triángulo de referencia.

a. $\sin\theta = \frac{3}{5}$ y $\cot\theta < 0$

b. $\cot\theta = -\frac{4}{3}$ y $\sin\theta < 0$

c. $\tan\theta = -\sqrt{2}$ y $\cos\theta > 0$

d. $\csc\theta = -\frac{9}{2}$ y $\tan\theta > 0$

5. Encuentre la medida faltante de cada triángulo dado y evalúe las seis razones trigonométricas del ángulo θ.

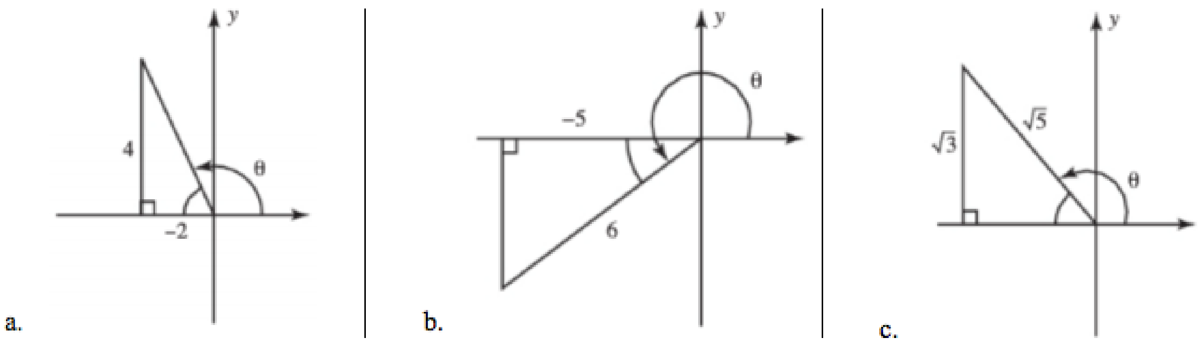

Figura 15: Ejercicios
Fuente: Grupo de Modelamiento Matemático. (2017).Facultad de Ingeniería y Ciencias básicas Institución Universitaria Politécnico Grancolombiano.

6. Encuentre el valor de $\sec\theta$, del ángulo con lado terminal sobre la recta $2y+3x=0$, en el segundo cuadrante.

7. Complete la siguiente tabla.

Radianes	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	π
Grados						
$\sin(\theta)$						
$\cos(\theta)$						
$\tan(\theta)$						
$\cot(\theta)$						
$\sec(\theta)$						
$\csc(\theta)$						

8. Calcule el valor exacto de las funciones dadas sin usar calculadora, si es posible, en caso de no ser posible explique ¿por qué? y use la calculadora para aproximar su valor.

a. $\cot(45^o)$

b. $\sin(0^o)$

c. $\sec(0^o)$

d. $\cot(-60^o)$

e. $\cos(\frac{3\pi}{2})$

f. $\csc(60^o)$

9. Use las identidades convenientes para hallar el valor de la función trigonométrica dada

a. Encuentre $\sin(-x)$ si se sabe que $\sin(x) = \frac{1}{2}$.

b. Encuentre $\tan(-x)$ si se sabe que $\tan(x) = -\sqrt{3}$

c. Encuentre $\cos(-x)$ si se sabe que $\cos(x) = \frac{1}{2}$

Referencias

[1] Zamora, H. (2010). *Modelos funcionales: Las funciones trigonométricas-Cartilla.* Bogotá, Colombia: Institución universitaria politécnico grancolombiano- Educación Virtual.

[2] Stewart, J; Redlin, L & Watson, S. (2001).*Precalculo.* México. Thomson Learning.

[3] Grupo de Modelamiento Matemático. (2017).Facultad de Ingeniería y Ciencias básicas Institución Universitaria Politécnico Grancolombiano.

Índice de figuras

Índice de tablas

INFORMACIÓN TÉCNICA

Ingeniería y Ciencias Básicas

Módulo: Cálculo I
Unidad 2: Trigonometría
Escenario 3: Razones trigonométricas

Autor: Luisa Fernanda Martínez Rojas

Asesor Pedagógico: Diana Marcela Díaz Salcedo
Diseñador Gráfico: Kevin Mauricio Ramírez Correa
Corrector de estilo:
Asistente: Leidy Alejandra Morales