Unidad 2 / Escenario 4

Lectura Fundamental

Reconociendo estructuras algebraicas fundamentales parte 1

Contenido

1. Palabras claves

Espacios vectoriales,subespacios, dependencia lineal.

2. Preguntas introductorias

Hasta el momento se han presentado algunos conjuntos con objetos del álgebra lineal y sobre ellos se han definido operaciones binarias como la adición, el producto punto y la multiplicación por escalar, entre otras. Sin embargo, como se evidenció en el anterior escenario hay dos operaciones mínimas y básicas (la adición y la multiplicación por escalar) que con sus propiedades constituyen una estructura algebraica, que posibilita la representación de información en contextos de la vida real. Es por esto que en esta unidad se revisará con profundidad el tema y para ello se abordarán interrogantes como:

- ¿Cómo y por qué es importante identificar las características de un conjunto de objetos?
- ¿Cómo verificar si un conjunto posee o no la estructura algebraica básica y fundamental para su aplicabilidad en cualquier contexto?
- ¿Si se construyen conjuntos particulares de un conjunto con la estructura básica y fundamental, ellos heredan dicha estructura?
- ¿Qué otros elementos teóricos se pueden establecer en dichos conjuntos?

Estos interrogantes se responderán a lo largo de la lectura y para ello se deben tener presentes tres aspectos importantes en el proceso:

a) El lector debe volverse hábil en los procedimientos que se expondrán.

b) En la lectura se verá un cambio significativo en cuanto al lenguaje, puesto que ya no se trabajarán casos concretos sino que se hará una generalización de ellos a través de un lenguaje puramente matemático.

c) El lector debe comenzar a apropiarse de los objetos presentados para buscar su aplicabilidad en la vida cotidiana de forma autónoma.

3. Reconociendo conjuntos

Antes de identificar si un conjunto de objetos posee o no la estructura algebraica básica y fundamental para ser aplicado en la representación de información, es necesario reconocer muy bien al conjunto, la condición que deben cumplir sus elementos y la forma de expresarlo matemáticamente. Observe el siguiente ejemplo.

Considere el caso de la empresa XMW, para la cual desea organizar los resultados de las pruebas que presentaron sus empleados en las sucursales que posee, en los países donde tiene una sede, con la condición de que solo se considerarían aquellas que tuvieran más de 50 empleados, si se sabe que la clasificación de la prueba se hizo por

el número de personas que aprobaron y reprobaron según el género.
La información que arrojan las pruebas se puede representar por medio de matrices de tamaño 2×2 de la siguiente manera:

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \text{ donde,}$$

a_{11}: es el número de mujeres que aprobaron la prueba.
a_{12}: es el número de hombres que aprobaron la prueba.
a_{21}: es el número de mujeres que reprobaron la prueba.
a_{22}: es el número de hombres que reprobaron la prueba.

Note cómo esta matriz cambiará de sede a sede y habrá que darle un nombre diferente para diferenciarlas, para esto se pueden usar las letras mayúsculas del abecedario, por ser la notación para matrices, pero si éstas no alcanzan, ya que no se dice cuántas sucursales tiene la empresa, se puede usar un subíndice numérico para identificarlas, esto es $A_1 = \begin{pmatrix} a_{1.11} & a_{1.12} \\ a_{1.21} & a_{1.22} \end{pmatrix}$ donde el subíndice 1 de la A indica la sucursal 1 y para diferenciar sus elementos de las otras sucursales se usa ese mismo número precedido de un punto en el subíndice de cada elemento o componente $(a_{1.ij})$. Para una segunda sucursal por ejemplo, la información se identificaría como se muestra a continuación:

$$A_2 = \begin{pmatrix} a_{2.11} & a_{2.12} \\ a_{2.21} & a_{2.22} \end{pmatrix}$$

De forma análoga se construirían las demás matrices con la información de las otras sucursales y todas esas matrices conforman un conjunto que se puede denotar matemáticamente así:
$M = \{A_{2\times 2} : A$ es la matriz que contiene en número de mujeres y hombres que aprobaron o reprobaron la prueba en las sucursales de la empresa XMW, siempre que éstas tuviesen más de 50 empleados$\}$

Este conjunto se lee matemáticamente como el conjunto de todas las matrices de tamaño 2×2 tales que sus elementos sean los números de mujeres y hombres que aprobaron o reprobaron la prueba aplicada en las sucursales de la empresa XMW, siempre que éstas tuvieran más de 50 empleados.

Note cómo aunque la empresa tenga sucursales con menos de 50 empleados, el conjunto no contendrá esa información porque se ha dado una condición para recoger la información. Situaciones como ésta existen en diferentes campos o disciplinas del ámbito laboral, por lo que es muy importante saber categorizar la información con objetos matemáticos que resuman la misma y faciliten su procesamiento y análisis. Debido a esto, es necesario desarrollar la habilidad de reconocer un conjunto, sus elementos y la característica que estos poseen, y es algo que se logra con la práctica pero no de casos concretos sino con la ausencia de un significado particular asociado a un contexto.

A continuación se expondrán algunos ejemplos para que con ellos el lector se familiarice con la lectura y el establecimiento de conjuntos, de modo que con la práctica desarrolle una habilidad innata y autónoma para aplicarlos a situaciones de la vida real de forma coherente. Para esto se sugiere que cada vez que se tenga un conjunto se sigan estos pasos: 1) identifique los elementos, use representaciones gráficas o algebraicas para ayudarse, 2) comprenda la condición del conjunto, esto es, lo que caracteriza a cada elemento y 3) extraiga uno, dos, tres o tantos elementos generales como considere para constatar que entiende el conjunto. A continuación se exponen algunos ejemplos del proceso mencionado.

Ejemplo 1. *Sea* $V = \{(x, y) : y = mx,$ *donde* m *es un número real fijo y* x *es un número real arbitrario*$\}$, *reconozca el conjunto.*

I **Identificar los elementos**: en este caso son parejas ordenadas en el plano cartesiano, dichas parejas son de la forma (x,y), recuerde este concepto.

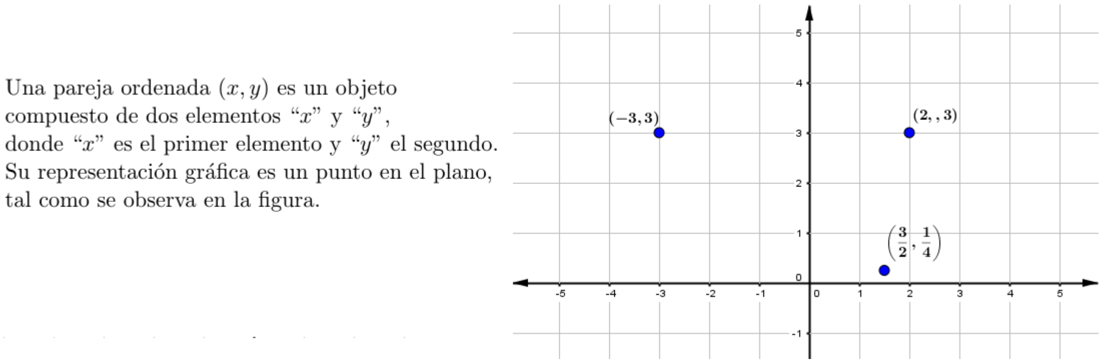

Figura 1: **Definición y representación gráfica de pareja ordenada**.
*Fuente:*Elaboración propia

II **Comprender la condición del conjunto**: para este caso se afirma que cada pareja debe cumplir que $y = mx$, por lo que las parejas se podrían reescribir como (x,mx); se puede apoyar con una representación gráfica a partir de algunos ejemplos, obsérvelos pero tenga presente que en el conjunto hay tantos como valores de m se puedan definir y como éste es un valor real, según lo que indica el conjunto, habrá infinitas parejas que cumplan la condición.

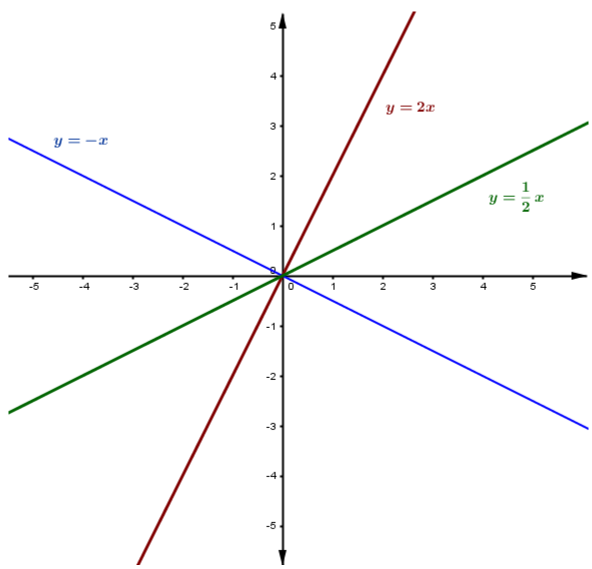

Figura 2: **Representación de la condición** $y = mx$ **para** $m = -1, m = \frac{1}{2}, m = 2$.
*Fuente:*Elaboración propia

III **Extraer algunos ejemplos generales**: esto consiste en no usar por ningún motivo valores numéricos, la idea es que siempre sea general y represente cualquier posibilidad dentro del conjunto.
(x, m_1x): esta pareja representa un elemento del conjunto para el cual se tiene un valor de m particular que se denota con el subíndice 1 e indica un primer caso.
(x, m_2x): esta pareja representa otro elemento del conjunto para el cual el valor de m es diferente a la pareja anterior y por ello se usa el subíndice 2.

(x, m_3x): del mismo modo que en la pareja anterior, esta pareja es otro elemento diferente al expuesto con los subíndices 1 y 2, por lo que se usa el 3 para indicarlo.

Ejemplo 2. *Sea V el conjunto de funciones continuas f de valores reales definidas en el intervalo $[0, 1]$ con $f(0) = 0$ y $f(1) = 0$. Reconozca el conjunto.*

I **Identificar los elementos**: son funciones continuas en el intervalo $[0, 1]$.

II **Comprender la condición del conjunto**: para este caso se afirma que cada función debe cumplir la condición que la imagen de 0 y 1 deben ser iguales a cero ($f(0) = 0$ y $f(1) = 0$, respectivamente); esto significa que son todas las funciones en las que al reemplazar la variable independiente por 0 y 1 y operar, de como resultado cero. Por ejemplo, todas las funciones de la forma $f(x) = ax(bx - b)$ con a, b reales pertenecen al conjunto V, lo que indica que habrán infinitas funciones que cumplan la condición.

III **Extraer algunos ejemplos generales**: dado que el propósito en este paso es no usar por ningún motivo valores numéricos, una manera de nombrar en general cualquier diferentes funciones es con letras minúscualas haciendo referencia a la condición del conjunto, por ejemplo, $g(0) = g(1) = 0$, $h(0) = h(1) = 1$.

Para mejorar...

En la sección de refuerzo encontrará el recurso "Reconociendo conjuntos" el cual contiene otros ejemplos de caracterización de conjuntos y así podrá poner en práctica esta habilidad.

Ahora que se tiene una idea de cómo identificar conjuntos y su importancia, se tienen bases para analizar la estructura algebraica de estos bajo las operaciones de adición y multiplicación escalar junto con los axiomas que hacen que estos conjuntos se vuelvan un espacio vectorial aplicable a diversas situaciones de la vida real.

4. Espacios vectoriales

En el momento en el que se abordaron las operaciones de suma y multiplicación por escalar se hizo referencia a propiedades de las operaciones, algunas de ellas fueron:

- $u + v = v + u$
- $(u + v) + w = u + (v + w)$
- $a(bu) = (a * b)u$
- $a(u + v) = au + av$

donde u, v, w pueden ser una matriz, una n-upla, una función, un polinimio, entre otros y las constantes son números reales. Nótese que en estas propiedades hay dos tipos de conjuntos: uno, un conjunto de objetos que se suelen denominar "vectores" y otro, el conjunto de los de los números reales. La operación de suma se define sobre el conjunto de vectores y el de la multiplicación por un escalar entre el conjunto de vectores y el conjunto de los números reales. Las operaciones de suma y multiplicación definidas entre dichos conjuntos junto con ciertas propiedades, determinan una estructura de **espacio vectorial**.

Definición 4.1. *Sea un conjunto V de objetos llamados vectores y el conjunto de los números reales, junto con dos operaciones llamadas suma y multiplicación por un escalar. Se dice que V es un* ***espacio vectorial*** *si para todo $u, v, w \in V$ y todo $k, j \in V$ $\mathbb{R}$ satisfacen los siguientes axiomas:*

- *Axioma 1. Cerradura bajo la adición.*
  $u + v \in V$
- *Axioma 2. Conmutativa sobre la adición.*
  $u + v = v + u$
- *Axioma 3. Asociativa sobre la adición de vectores.*
  $(u + v) + w = u + (v + w)$
- *Axioma 4. Vector Cero*
  Existe el vector $0 \in V$ y v un vector de V,tal que $v + 0 = v = 0 + v$
- *Axioma 5. Vector inverso.*
  Para cada $v \in V$ existe un único elemento $(-v) \in V$ tal que $v + (-v) = 0$.
- *Axioma 6. Cerradura sobre la multiplicación por un escalar.*
  $kv \in V$
- *Axioma 7. Asociativa sobre la multiplicación de escalares.*
  $(kj)v = k(jv)$
- *Axioma 8. Distributiva respecto a la suma de vectores.*
  $k(u + v) = ku + kv$
- *Axioma 9. Distributiva respecto a la suma de escalares.*
  $(j + k)v = jv + kv$
- *Axioma 10. Elemento idéntico.*
  Para todo $v \in V$ y $1 \in \mathbb{R}$ se cumple que , $1v = v$.

A continuación se describen los espacios vectoriales más usuales:

Ejemplo 3. ***Espacio vectorial*** $\mathbb{R}^n$.

Recuerde que en la lectura del escenario anterior se definió a $\mathbb{R}^n$ como el conjunto de las n-uplas $\big(a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n\big)$. Sobre este conjunto se definió la suma y la mutiplicación por un escalar. Este conjunto junto con las operaciones mencionadas es uno de los espacios vectoriales básicos y usted podrá probar con facilidad el cumplimiento de los diez axiomas.

Ejemplo 4. ***Espacio vectorial*** $V = P_n$.

$P_n = a_nx^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_1x + a_0$ es el conjunto de todos los polinomios de grado menor o igual a n cuyos coeficientes a_i, $0 \leq i \leq n$ son números reales. Sean Q_n y R_n dos polinomios que pertencen a V y $j, k \in \mathbb{R}$, probar que V es un espacio vectorial con la suma entre polinomios y el producto escalar usuales.

- Cerradura de la suma. Se debe comprobar que al sumar dos polinomios de grado n se obtiene otro vector que pertenece al mismo conjunto, esto es:
  Sea $Q_n = b_nx^n + b_{n-1}x^{n-1} + \ldots + b_1x + b_0$ y $R_n = c_nx^n + c_{n-1}x^{n-1} + \ldots + c_1x + b_0$.

Recuerde que para sumar dos polinomios se debe sumar los coeficientes de los términos semejantes, por lo cual, se obtendrá como resultado otro polinomio de grado n. Es decir, la suma cumple la propiedad de la cerradura.

$$\begin{aligned} Q_n + R_n &= b_n x^n + b_{n-1}x^{n-1} + \ldots + b_1 x + b_0 + c_n x^n + c_{n-1}x^{n-1} + \ldots + c_1 x + c_0 \\ &= (b_n + c_n)x^n + (b_{n-1} + c_{n-1})x^{n-1} + \ldots + (b_1 + c_1)x + (b_0 + b_0) \end{aligned}$$

- Conmutativa sobre la suma. Para esta propiedad se debe probar que $Q_n + R_n = R_n + Q_n$.

  $$Q_n + R_n = (b_n + c_n)x^n + (b_{n-1} + c_{n-1})x^{n-1} + \ldots + (b_0 + c_0)$$

  Teniendo en cuenta que los coeficientes de los polinomios son números reales y que sobre estos está definida la propiedad conmutativa, se concluye que:

  $$\begin{gathered} (b_n + c_n)x^n + (b_{n-1} + c_{n-1})x^{n-1} + \ldots + (b_0 + c_0) = (c_n + b_n)x^n + (c_{n-1} + b_{n-1})x^{n-1} + \ldots + (c_0 + b_0) \\ Q_n + R_n = R_n + Q_n \end{gathered}$$

- Asociativa. Sean P_n, R_n y Q_n, probar que $(P_n + R_n) + Q_n = P_n + (R_n + Q_n)$. Al desarrollar la suma de los tres polinomios se obtiene lo siguiente:

  $$[(a_n + b_n) + c_n]x^n + [(a_{n-1} + b_{n-1}) + c_{n-1}]x^{n-1} + \ldots + [(a_0 + b_0) + c_0]$$

  Teniendo en cuenta que en los números reales se cumple la propiedad asociativa, se aplica esta propiedad a los coeficientes de la suma de los polinomios para obtener lo siguiente:
  $[(a_n + b_n) + c_n]x^n + [(a_{n-1} + b_{n-1}) + c_{n-1}]x^{n-1} + \ldots + [(a_0 + b_0) + c_0] = [a_n + (b_n + c_n)]x^n + [a_{n-1} + (b_{n-1} + c_{n-1})]x^{n-1} + \ldots + [a_0 + (b_0 + c_0)]$

- Vector cero. Para probar esta propiedad se debe buscar un polinomio Q_n tal que $P_n + Q_n = P_n$.
  $(a_n + b_n)x^n + (a_{n-1} + b_{n-1})x^{n-1} + \ldots + (a_0 + b_0) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_0$
  Para que dos polinomios sean iguales se debe cumplir que los coeficientes de los términos semejantes sean iguales, por tanto de la igualdad anterior se obtiene:
  $a_n + b_n = a_n$,
  $a_{n-1} + b_{n-1} = a_{n-1}$,
  $\vdots$
  $a_0 + b_0 = a_0$.

  Al resolver dichas ecuaciones se obtiene que $b_n = 0$, $b_{n-1} = 0$, …, $b_0 = 0$; por tanto el polinomio cero es $Q_n = \mathbf{0} = 0x^n + 0x^{n-1} + \ldots + 0$

- Vector inverso. Se debe buscar un vector R_n, tal que $P_n + R_n = \mathbf{0}$. Es fácil comprobar que el polinomio inverso es $R_n = -P_n = -a_n x^n - a_{n-1}x^{n-1} - \ldots - a_1 x - a_0$, pues al sumar $P_n + (-P_n) = 0$

- Cerradura sobre la multplicación por un escalar. Sea $P_n = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0$ y $k \in \mathbb{R}$, se comprueba que al operar $kP_n = ka_n x^n + ka_{n-1}x^{n-1} + \ldots + ka_1 x + ka_0$ se obtiene un polinomio de grado n. Por tanto, la propiedad se cumple.

- Asociativa. Sean $j, k \in \mathbb{R}$, se cumple que $(jk)P_n = j(kP_n)$. A continuación se comprueba esta propiedad.

$$(jk)P_n = j(kP_n)$$
$$(jk)a_nx^n + (jk)a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + (jk)a_1x + (jk)a_0 = j(ka_n)x^n + j(ka_{n-1})x^{n-1} + \ldots + j(ka_1)x + j(ka_0)$$

  Teniendo en cuenta que la multiplicación entre escalares en $\mathbb{R}$ es asociativa, se concluye que la igualdad anterior se cumple.

- Distributiva respecto a la suma de vectores. Sea $k \in \mathbb{R}$, se debe probar que $k(P_n + Q_n) = kP_n + kQ_n$. Si se desarrollan los dos lados de la igualdad y se aplica la propiedad distributiva respecto a la suma en los números reales, se comprueba dicha propiedad.

- Distributiva respecto a la suma de escalares. Sean $j, k \in \mathbb{R}$ se debe probar que $(j + k)P_n = jP_n + kP_n$. Si se realiza un proceso similar al realizado para el axioma anterior, se comprueba dicha propiedad.

- Elemento idéntico. Existe el elemento $1 \in \mathbb{R}$ tal que para cada polinomio P_n se cumple que $1P_n = P_n$, lo cual es sencillo de comprobar.

Nótese que para probar los axiomas de espacio vectorial se uso en varias ocasiones las propiedades definidas en los números reales. Por tanto, es importante tenerlas presentes pues aquí son una herramienta fundamental.

¿Sabías qué...?

El vector cero no siempre es un objeto cuyos elementos son todos cero, por tanto, el elemento inverso tampoco es el usual $-u$?. En el recurso que hay luego de esta lectura econtrará un ejemplo de un espacio vectorial con estas particularidades.

Ejemplo 5. ***Espacio vectorial de las matrices*** $M_{m\times n}$.

El conjunto de matrices con las operaciones de suma y multiplicación por un escalar definidos en la lectura fundamental del escenario 1 satisfacen los axiomas de espacio vectorial.

Ejemplo 6. ***Un conjunto que no constituye un espacio vectorial***.

Sea S el conjunto de puntos en $\mathbb{R}^3$ que están sobre la recta $x = t + 1$, $y = 2t$, $z = t - 1$ (Grossman, 2008, p.298). A continuación se muestra los axiomas que no cumple este conjunto. Aunque se describen los axiomas que no se cumplen, con sólo probar que un axioma no se cumple, se concluye que no es un espacio vectorial.

- Cerradura de la suma. Sean (a, b, c) y (p, q, r) dos puntos en $\mathbb{R}^3$ que pertenecen a la recta cuyas ecuaciones paramétricas son $x = t + 1$, $y = 2t$, $z = t - 1$, lo cual significa que existe t_1 y t_2 tal que:
  $a = t_1 + 1$, $b = 2t_1$, $c = t_1 - 1$ y $p = t_2 + 1$, $q = 2t_2$, $r = t_2 - 1$.
  Al sumar los puntos dados:

$$(a, b, c) + (p, q, r) = (a + p, b + q, c + r)$$

se espera que el punto resultante satisfaga las ecuaciones de la recta, esto es:

$$\begin{aligned} a+p &= t_3+1 \\ b+q &= 2t_3 \\ c+r &= t_3-1 \end{aligned}$$

Ahora, si se suman las ecuaciones paramétricas correspondientes se obtiene

$$\begin{aligned} a+p &= t_1+1+t_2+1 = (t_1+t_2)+2 \\ b+q &= 2t_1+2t_2 = 2(t_1+t_2) \\ c+r &= (t_1+t_2)-2 \end{aligned}$$

Si se establece que $t_1+t_2=t_3$, se obtiene que las ecuaciones paramétricas correspondientes no son iguales a las ecuaciones de la recta dada; por tanto, se concluye que la suma no pertenece al conjunto.

- Vector cero. Se debe buscar un punto (p,q,r) tal que $(a,b,c)+(p,q,r)=(a,b,c)$. De esta igualdad se obtiene,

$$\begin{aligned} a+p=a &\rightarrow p=0 \\ b+q=b &\rightarrow q=0 \\ c+r=c &\rightarrow r=0 \end{aligned}$$

  Es decir, el punto 0 en S es $(0,0,0)$; no obstante este punto no satisface la ecuación de la recta pues no existe un valor para t que satisfaga las siguientes ecuaciones:
  $0=t+1$, $0=2t$, $0=t-1$ Por tanto, no se cumple este axioma.

- Elemento inverso. Dado que no existe el punto 0, no es posible determinar el punto inverso.

- Cerradura de la multplicación por un escalar. Observe que al multiplicar las ecuaciones paramétricas de cada coordenada por un escalar k, se modifican dichas ecuaciones:

$$\begin{aligned} kx &= k(t+1) = kt+k \\ ky &= 2kt \\ kz &= k(t-1) = kt-k \end{aligned}$$

¿Cómo mejorar. . . ?

Los ejemplos anteriores son sólo unos pocos ejemplos de espacios vectoriales, en los cuales habrá podido identificar que la palabra "vector" hace referencia a cualquier objeto matemático. En la lectura complementaria 1 encontrará más ejemplos de espacios vectoriales, revíselos e identifique en ellos cómo se justifican los axiomas, pues se asume que algunos se cumplen al atender las propiedades de los números reales.

4.1. Subespacios vectoriales

En ocasiones algunos espacios vectoriales son un subcojunto de otros espacios vectoriales; por ejemplo,en el espacio vectorial de las matrices $M_{m\times n}$ existen subconjuntos que son espacios vectoriales y existen otros que no lo son (en la sección de ejercicios se encuentran estos casos). Para estos casos, solo basta con probar los axiomas de cerradura de un espacio vectorial para determinar si un subconjunto es un subespacio vectorial; si estos dos axiomas se cumplen se asumen que los demás se satisfacen automáticamente.

Definición 4.2. *Sea S un subconjunto no vacío de un espacio vectorial V. S* ***es un subespacio vectorial*** *si satisface los siguientes axiomas:*

a) S es cerrado bajo la suma de vectores. Es decir, para todo $u, v \in S$ se cumple que $(u+v) \in S$

b) S es cerrado bajo la multiplicación por un escalar. Esto es: sea $k \in \mathbb{R}$, para todo $u \in S$ se cumple que $ku \in S$

A continuación se presentan algunos ejemplos.

Ejemplo 7. *Sea V el espacio vectorial de las matrices $M_{2\times 2}$ y H un subconjunto de V determinado por* $H = \left\{ A \in M_{22} : A = \begin{pmatrix} a & 1+a \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \right\}$ *(Tomado de Grossman, 2008, p. 304)*

Antes de proceder a verificar si se satisfacen los axiomas de subespacio, es pertinente caracterizar el conjunto H. Los elementos de este conjunto son matrices de tamaño 2×2 en las que los elementos de la segunda fila son todos cero y el elemento a_{12} $(1+a)$ es el elemento de la posición a_{11} (a) aumentado en uno. Por tanto, se debe probar si al sumar dos matrices cualesquiera de H se obtiene como resultado una matriz con las mismas características.
Observe:
Sea $u = \begin{pmatrix} a & 1+a \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ y $v = \begin{pmatrix} b & 1+b \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

$$u + v = \begin{pmatrix} a & 1+a \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b & 1+b \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a+b & 1+a+1+b \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a+b & a+b+2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Ahora se debe verificar si la matriz resultante cumple con las características de las matrices del conjunto H: los elementos de la segunda fila de la matriz resultante son todos cero, pero el elemento de la posición $a_{21}(a+b+2)$ no es igual al elemento de la posición $a_{11}(a+b)$ aumentado en 1. Por tanto, se conluye que el subconjunto H no es un subespacio.

Ejemplo 8. *Sea V el espacio vectorial de todas las funciones continuas en el intervalo $[0, 1]$ y Hun subconjunto tal que $H = \{f \in V : f(0) = f(1) = 0\}$ (Grossman, 2008, p.304)*

El subconjunto H es el conjunto que se caracterizó en el ejemplo 2; es decir el conjunto de funciones continuas en $[0, 1]$ tales que $f(0) = f(1) = 0$.
Ahora se procede a comprobar los dos axiomas de cerradura para determinar si es un subespacio vectorial:

- Cerradura bajo la suma. La suma de funciones está definida como $(f+g)(x) = f(x) + g(x)$. Ahora se debe comprobar que si $f, g \in H$, entonces $(f+g)(x)$ también pertenece a este conjunto.

$$
\begin{aligned}
(f+g)(x) &= f(x)+g(x)\\
(f+g)(0) &= f(0)+g(0)\\
&= 0+0\\
&= 0\\
(f+g)(1) &= f(1)+g(1)\\
&= 0+0\\
&= 0\\
(f+g)(0) &= (f+g)(1) = 0
\end{aligned}
$$

Por tanto, se concluye que la función suma $f+g$ cumple las características de los elementos de H; es decir, se cumple la cerradura bajo la suma.

- Cerradura bajo la multiplicación por un escalar. La multiplicacion por un escalar en funciones está definida como $(kf)(x) = k[f(x)]$.

$$
\begin{aligned}
(kf)(x) &= k[f(x)]\\
k[f(0)] &= k(0)\\
&= 0\\
k[f(1)] &= k(0)\\
&= 0
\end{aligned}
$$

Por lo cual se concluye que $k[f(0)] = k[f(1)] = 0$. Es decir la función que se obtiene al realizar la multiplicación por un escalar pertenece al conjunto H.
Como se satisfacen los dos axiomas, se puede afirmar que H es un subespacio vectorial.

¿Cómo mejorar. . . ?

En la lectura complementaria 1 encontrará más ejemplos de subespacios vectoriales. ¡Revíselos!.

5. Conjunto generador y espacios generados

En la lectura del escenario anterior se estableció que todo vector es posible expresarlo mediante una combinación lineal de vectores que pertencen al mismo conjunto. Esto es $u = a_1v_1 + a_2v_2 + \ldots a_nv_n$, donde $a_1, a_2, \ldots, a_n$ son escalares y $v_1, v_2, \ldots, v_n$ son elementos de un espacio vectorial.

No obstante, en ocasiones no siempre un conjunto de vectores genera todos los elementos de un espacio vectorial. Al conjunto de vectores de un espacio vectorial que genera todos los elementos de dicho espacio, a partir de una combinación lineal, se le denomina **conjunto generador**. Algunos ejemplos son los siguientes:

Ejemplo 9. *En el espacio vectorial* M_{22}, el conjunto de matrices

$$\left\{\begin{pmatrix}1&0\\0&0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0&1\\0&0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0&0\\1&0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0&0\\0&1\end{pmatrix}\right\}$$

generan a $M_{22}=\begin{pmatrix}a&b\\c&d\end{pmatrix}$, pues es posible escribirlas como la siguiente combinación lineal.

$$\begin{pmatrix}a&b\\c&d\end{pmatrix}=a\begin{pmatrix}1&0\\0&0\end{pmatrix}+b\begin{pmatrix}0&1\\0&0\end{pmatrix}+c\begin{pmatrix}0&0\\1&0\end{pmatrix}+d\begin{pmatrix}0&0\\0&1\end{pmatrix}$$

En el caso anterior, el espacio y subespacio vectorial está definido, pero en ocasiones se da un conjunto de elementos y se debe determinar qué subespacio vectorial genera.

Definición 5.1. ***El espacio generado por un conjunto de vectores***. *Gen* $\{v_1,v_2,\ldots,v_n\}$ *denota el conjunto de combinaciones lineales de* $v_1,v_2,\ldots,v_n$ *que genera un espacio vectorial. Es decir,*

$$Gen\,\{v_1,v_2,\ldots,v_n\}=\{v:v=a_1v_1+a_2v_2+\ldots a_nv_n\}$$

donde $a_1,a_2,\ldots,a_n$ *son escalares.*

Si $\{v_1,v_2,\ldots,v_n\}$ pertenecen a un espacio vectorial V entonces $Gen\,\{v_1,v_2,\ldots,v_n\}$ es un subespacio vectorial de V.

Ejemplo 10. *Determinar si el conjunto de vectores* $\left\{1-x,5-x^2,x\right\}$ *genera el espacio vectorial* P_2

La forma general de todos los polinomios de grado $2(P_2)$ es $P_2(x)=ax^2+bx+c$, por tanto se debe comprobar si existen escalares a_1,a_2,a_3 de manera que todo polinomio se pueda expresar como una combinación lineal de $\left\{1-x,5-x^2,x\right\}$. Observe:

$$\begin{aligned}ax^2+bx+c&=a_1(1-x)+a_2(5-x^2)+a_3x && \text{Combinación lineal.}\\ ax^2+bx+c&=a_1-a_1x+5a_2-a_2x^2+a_3x && \text{Resolviendo paréntesis.}\\ a&=-a_2\end{aligned}$$

Igualando los coeficientes correspondientes a términos semejantes.

$$a=-a_2 \text{ Coeficinetes de } x^2$$
$$b=-a_1+a_3 \text{ Coeficinetes de } x$$
$$c=a_1+5a_2$$

De lo anterior se obtiene un sistema de ecuaciones lineales donde a_1,a_2,a_3 son las incógnitas y a,b,c son constantes. Por tanto, si el sistema,

$$\begin{cases}-a_2=a\\-a_1+a_3=b\\5a_2+a_1=c\end{cases}$$

tiene solución, se concluiría que el conjunto de polinomios dados sí genera el espacio vectorial P_2. Al resolver el sistema por el método de Gauss-Jordan,

$$\left(\begin{array}{ccc|c}0&-1&0&a\\-1&0&1&b\\1&5&0&c\end{array}\right)\Longrightarrow\left(\begin{array}{ccc|c}1&0&0&5a+c\\0&1&0&-a\\0&0&1&5a+b+c\end{array}\right)$$

se obtiene que el sistema tiene única solución $a_1 = 5a + c, a_2 = -a, a_3 = 5a + b + c$; por tanto, se concluiría que, $\{1 - x, 5 - x^2, x\}$ genera el espacio vectorial P_2.

Ejemplo 11. *Sea M el conjunto de todos los vectores de la forma* $\begin{pmatrix} 3a+4b \\ 0 \\ a+3b-c \\ 3b-5c \end{pmatrix}$*, donde a, b, c son números reales.*

Encontrar un conjunto de vectores que genere a M.

En este caso, el espacio vectorial M está compuesto por todas las matrices columna de tamaño cuatro. Por tanto, se debe buscar un conjunto de matrices columna del mismo tamaño tal que al construir una combinación lineal entre ellos se genere el espacio vectorial dado. Para ello, una posible estrategia es identificar el número de variables que componen la matriz, en este caso serían tres a, b y c, por tanto, es posible determinar tres matrices de la siguiente manera:

$$\begin{pmatrix} 3a+4b \\ 0 \\ a+3b-c \\ 3b-5c \end{pmatrix} = a\begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + b\begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ 3 \\ 3 \end{pmatrix} + c\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \\ -5 \end{pmatrix}$$

Por tanto, el conjunto $\left\{\begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ 3 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \\ -5 \end{pmatrix}\right\}$genera el espacio vectorial M.

En sístensis

En esta sección se han empleado dos términos: "genera" y "espacio generado", por lo que resulta necesario aclarar la diferencia entre ellos.
El término "***genera***" se usa para indicar que todo vector de un espacio vectorial se puede escribir como una combinación lineal de un conjunto de vectores dado.
El término "***espacio generado***" hace referencia al conjunto de combinaciones lineales de un conjunto de vectores.

Cabe mencionar que un espacio vectorial puede tener más de un conjunto generador. Estos conjuntos generadores son útiles para el análisis de diversas situaciones, dado que en ocasiones es más práctico analizar los vectores de dichos conjuntos y luego generalizar los resultados hacia el espacio vectorial. Por tal razón, es necesario determinar un conjunto generador que tenga la menor cantidad de elementos, esto depende de las relaciones existentes entre los elementos de dicho conjunto. Dicha característica será estudiada a continuación.

6. Dependencia e independecia lineal

Definición 6.1. *Dado un subconjunto $S = \{v_1, v_2, v_3, \ldots, v_n\}$ de un espacio vectorial V, se dice que los vectores de S son **linealmente dependientes** si existen constantes $c_1, c_2, c_3, \ldots, c_n$ no todos cero tales que*

$$c_1v_1 + c_2v_2 + c_3v_3 + \ldots + c_nv_n = 0$$

Si los vectores no son linealmente dependientes, se dice que son linealmente independientes (Grossman, 2008, p.318).

Las siguientes son algunas maneras de interpretar la definición anterior:

- $v_1, v_2, v_3, \ldots, v_n$ son linealmente independientes si la combinación lineal $c_1v_1 + c_2v_2 + c_3v_3 + \ldots + c_nv_n = 0$ sólo es cierta cuando todos los coeficientes $c_1, c_2, c_3, \ldots, c_n$ son cero.
- $v_1, v_2, v_3, \ldots, v_n$ son linealmente dependientes si alguno de los vectores de S se puede expresar como combinación lineal de los demás.
- $v_1, v_2, v_3, \ldots, v_n$ son linealmente dependientes si alguno de los vectores de S es un múltiplo escalar de otro vector del conjunto.

¿Sabías que...?

En el contexto geométrico dos vectores en $\mathbb{R}^2$ son linealmente dependientes cuando son paralelos, dado que uno es multiplo escalar del otro. En la siguiente gráfica se observa que los dos vectores son paralelos pues tienen la misma dirección, además $(1.5, 2.5) = \frac{1}{2}(3, 5)$

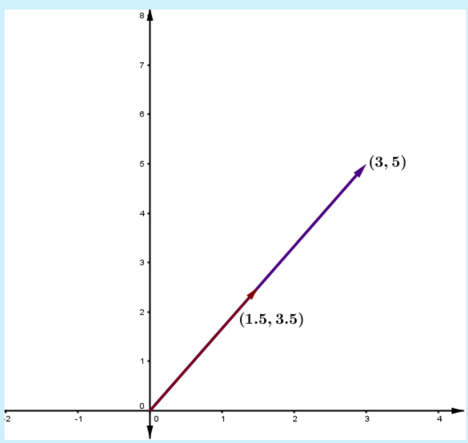

Figura 3: **Representación gráfica de vectores linealmente dependientes en** $\mathbb{R}^2$.
*Fuente:*Elaboración propia

Ejemplo 12. *Determinar si* $\{2x, x^3 - 3, 1 + x - 4x^3, x^3 + 18x - 9\}$ *son linealmente dependientes.*

Para determinar si los vectores dados son linealmente dependientes se debe realizar el siguiente proceso:

- Paso 1. Escribir la combinación lineal de los vectores dados e igualar al vector cero, en este caso, al polinomio 0 en P_3

$$c_1(2x) + c_2(x^3 - 3) + c_3(1 + x - 4x^3) + c_4(x^3 + 18x - 9) = 0$$

- Paso 2. Resolver paréntesis, simplificar y expresar un sistema de ecuaciones lineales homogéneo como resultado de igualar los coeficientes de los términos semejantes.

$$c_1(2x) + c_2(x^3 - 3) + c_3(1 + x - 4x^3) + c_4(x^3 + 18x - 9) = 0$$
$$(c_2 - 4c_3 + c_4)x^3 + (2c_1 + c_3 + 18c_4)x + (-3c_2 + c_3 - 9c_4) = 0$$

Debido a que para que haya independencia lineal todos los coeficientes de los términos semejantes deben ser cero se tiene qué:

$$c_2 - 4c_3 + c_4 = 0$$
$$2c_1 + c_3 + 18c_4 = 0$$
$$-3c_2 + c_3 - 9c_4 = 0$$

- Paso 3. Resolver el sistema homogéneo obtenido.
La matriz aumentada del sistema homogéneo es

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 2 & 0 & 1 & 18 & 0 \\ 0 & 1 & -4 & 1 & 0 \\ 0 & -3 & 1 & -9 & 0 \end{array}\right)$$

Al resolver el sistema se obtiene la matriz escalonada reducida, $\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & \frac{96}{11} & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \frac{35}{11} & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{6}{11} & 0 \end{array}\right)$

De la matriz anterior, se obtiene el sisguiente sistema equivalente al inicial

$$\begin{cases} c_1 + \frac{96}{11}c_4 = 0 \\ c_2 + \frac{35}{11}c_4 = 0 \\ c_3 + \frac{6}{11}c_4 = 0 \end{cases}$$

A partir del cual se concluye que el sistema tiene infnitas soluciones, y en consecuencia, los polnomios $2x, x^3 - 3, 1 + x - 4x^3, x^3 + 18x - 9$ son linealmente dependientes.

El siguiente teorema brinda algunas herramientas para determinar si un conjunto de vectores es linealmente independiente.

Teorema 6.1. *Si un conjunto de vectores $\{v_1, v_2, v_3, \ldots, v_n\}$ en $\mathbb{R}^n$ es linealmente independiente, entonces las siguientes afirmaciones son equivalentes:*

a) La matriz $A_{n\times n}$ cuyas columnas son los vectores $v_1, v_2, v_3, \ldots, v_n$ es invertible.

b) El determiante de la matriz $A_{n\times n}$ es diferente de 0.

c) La matriz $A_{n\times n}$ es equivalente por filas a la matriz identidad I_n.

d) La solución del sistema $AX = 0$ es la solución únical $X = 0$

e) El sistema de ecuaciones $AX = B$ tiene solución única.

La utilidad de este teorema se verá en el siguiente ejemplo:

Ejemplo 13. *¿Para qué valores de α, los vectores $(-1, 0, -1), (1, 1, \alpha), (2, 1, 2)$ son linealmente independientes?*

Si se realiza el proceso descrito en el ejemplo anterior, lo primero sería construir la combinación lineal e igualarla al vector 0.

$$a(-1, 0, -1) + b(1, 1, \alpha) + c(2, 1, 2) = (0, 0, 0)$$

Se resuelven operaciones y se establece un sistema de ecuaciones lineales homogéneo a partir de la igualdad de vectores. Observe:

$$\begin{aligned} a(-1, 0, -1) + b(1, 1, \alpha) + c(2, 1, 2) &= (0, 0, 0) \\ (-a, 0, -a) + (b, b, \alpha b) + (2c, c, 2c) &= (0, 0, 0) \\ (-a + b + 2c, b + c, -a + \alpha b + 2c) &= (0, 0, 0) \\ -a + b + 2c &= 0 \\ b + c &= 0 \\ -a + \alpha b + 2c &= 0 \end{aligned}$$

Para resolver el sistema se elabora la matriz aumentada del sistema.

$$\left(\begin{array}{ccc|c} -1 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ -1 & \alpha & 2 & 0 \end{array}\right)$$

Aquí se puede observar que las columnas de la matriz de coeficientes son los vectores dados, por tanto, hacer uso del teorema anterior hubiera ayudado a evitar realizar todo el proceso anterior. Además, este teorema sirve para determinar el valor de α de manera que los vectores dados sean linealmente independientes, sin necesidad de resolver el sistema de ecuaciones. Para ello, se hará uso del literal a). Esto es:

Calcular el determinante de la matriz $\begin{pmatrix} -1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \\ -1 & \alpha & 2 \end{pmatrix}$, el cual debe ser diferente de 0 para que los vectores sean linealmente independientes.

$\begin{vmatrix} -1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \\ -1 & \alpha & 2 \end{vmatrix} = \alpha - 1$ Por tanto, los vectores dados son linealmente independientes cuando $\alpha - 1 \neq 0$ es decir $\alpha \neq 1$.

En síntesis...

Para averiguar si un conjunto de vectores son linealmente independientes o dependientes se realiza una combinación lineal igualada al elemento neutro para la suma del espacio vectorial al cual pertenecen. Luego, realice lo siguiente:

- **Paso 1**. A partir de la combinación lineal planteada, resuelva operaciones y determine un sistema de ecuaciones homogéneo.
- **Paso 2**. Si el sistema homogéneo tiene sólo tiene la solución trivial, entonces el conjunto de vectores dados son linealmente independientes; en caso contrario, el conjunto de vectores es linealmente dependientes.
- Si la matriz de coeficientes del sistema homogéneo es cuadrada, aplique el Teorema 5.1 para determinar la dependencia o independecia lineal del conjunto dado.

Como habrá observado en esta lectura, reconocer un conjunto, la condición que se establece entre sus elementos y la forma de expresarlo matemáticamente, constituye una habilidad esecial para determinar si dicho conjunto con las operaciones de suma y multiplicación escalar definidos en ellos posee la estructura de espacio vectorial. Por otra parte, establecer ciertas relaciones entre los objetos de un espacio o subespacio vectorial permite hacer generalizaciones sobre el conjunto al cual pertenecen; en este sentido, es conveniente trabajar con conjuntos generadores cuya cantidad de elementos sea mínima y a partir de los cuales es posible caracterizar el espacio vectorial que los genera. En el siguiente escenario se estudiará este tipo de conjuntos generadores.

7. Ejercicios

1. Sea $V = \left\{(a,b,c) \in \mathbb{R}^3 : x, y, z > 0\right\}$ en el cual se definen las siguientes operaciones suma $(\oplus)$ y multiplicación por un escalar $\otimes$ de la siguiente manera:
   Sea $u = (a,b,c)$ y (p,q,r) en V, $u \oplus v = (ap, bq, cr)$
   Sea $k \in \mathbb{R}$, $k \otimes u = (ka, kb, -kc)$
   Realice lo siguiente:

   a) Calcule:
      - $(1,3,4) \oplus (0,-2,5)$
      - $-3 \otimes (0,-2,5)$
      - $-\frac{1}{3} \otimes [(0,-2,5) \oplus (0,-1,5)]$

   b) Determine si Ves un subespacio vectorial.

2. Determine cuáles de los siguientes subconjuntos de $\mathbb{R}^3$ son un subespacio vectorial, con la suma y multiplicación por escalar usual.
   - $S = \left\{(a,b,c) \in \mathbb{R}^3 : a = 2b\right\}$
   - $S = \left\{(a,b,c) \in \mathbb{R}^3 : b = a + c\right\}$

3. Determine si el subconjunto $H = \{f \in V : f(0) = 3\}$ de las funciones continuas en $[0,1]$ es un subespacio vectorial, con la suma y multiplicación por escalar usual.

4. Determine si el subconjunto $H = \left\{ A \in M_{2\times 2} : A = \begin{pmatrix} 1 & a \\ 0 & a \end{pmatrix} \right\}$ es un subespacio vectorial, con la suma y multiplicación por escalar usual.

5. Determine si el conjunto dado de vectores genera el espacio vectorial dado.

   a) En $M_{2\times 2}$; $\left\{ \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} \right\}$ (Grossman, 2008,p.311).

   b) En P_3; $\left\{ x^3 + 2x + 1, x^2 - x + 2, x^3 + 2, -x^3 + x^2 - x + 1 \right\}$

6. Los siguientes son ejercicios tomados de Grossman (2008,p.329).
   Determine si el conjunto de vectores dado son linealmente independientes.

   a) $En \mathbb{R}^n : (-3, 4, 2), (7, -1, 3), (1, 2, 8)$

   b) En $P_3 : -x, x^2 - x, x^3 - x$

   c) En $M_{22} : \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 4 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & -3 \\ 1 & 5 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 7 & 5 \end{pmatrix}$

Referencias

[1] Grossman,S. (2012). *Álgebra lineal*. (7a. ed.) McGraw-Hill Interamericana. Tomado de http://www.ebooks7-24.com

INFORMACIÓN TÉCNICA

Módulo: Álgebra Lineal
Unidad 2: Objetos del álgebra lineal y sus relaciones
Escenario 4: Reconociendo estructuras algebraicas fundamentales

Autor: Sandra Milena Rojas Tolosa

Asesor Pedagógico: Diana Marcela Diaz Salcedo
Diseñador Gráfico: Kevin Mauricio Ramírez Corredor
Corrector de estilo: Angélica del Pilar Parra
Asistente: Leidy Alejandra Morales