Unidad 1 / Escenario 2

Lectura fundamental

Relaciones y funciones

Contenido

Palabras claves:
Relación de equivalencia, relación de orden, función.

Introducción

Establecer conexiones entre un conjunto de datos es una tarea común en áreas como *data science*, IA o minería de datos. Existen diversas formas de crear una relación entre los datos, en esta lectura se presentan las de mayor uso.

1. Relación (binaria)

En muchas situaciones cotidianas se establecen relaciones entre diferentes objetos, por ejemplo, cuando se asocia cada persona con su número de identificación, se asocia un estudiante con los módulos que cursa o los aspirantes a un cargo con el puntaje obtenido durante la entrevista. Cada una de estas relaciones puede ser modelada matemáticamente a través de parejas ordenadas (o n-tuplas) tomadas del producto cartesiano entre conjuntos.

En esta sección se desarrolla el concepto de *relación* y se establecen sus principales características.

Definición 1 (**Relación).** Dados dos conjuntos A y B, una *relación* de A a B es un **subconjunto** R de $A \times B$. Si B es igual al conjunto A, se dice que R es una relación en A.

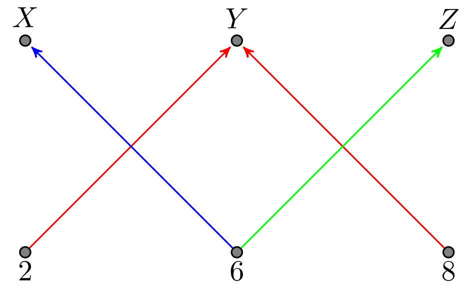
Ejemplo 1.

- Si $A = \{2, 4, 6, 8\}$ y $B = \{X, Y, Z, W\}$ entonces una relación de A a B es el conjunto $R = \{(2, Y), (6, X), (8, Y), (6, Z)\}$
- Si $A = \{\textbf{False}, \textbf{True}\}$ entonces una relación sobre A es $R = \{(\textbf{False}, \textbf{True}), (\textbf{True}, \textbf{False}), (\textbf{True}, \textbf{True})\}$
- Si $A = \mathbb{Q}$ y $B = \mathbb{R}$ entonces una relación R de A a B es el conjunto $\{(x, y) : x = y^2\}$
- Si $A = \mathbb{Z}$ entonces una relación en A es $R = \{(x, y) : x + y = 1\}$
- Si $A = \mathbb{R}$ entonces una relación en A es $R = \{(x, y) : x \leq y\}$
- Si A corresponde al conjunto de personas en el mundo, B el conjunto de ciudades en el planeta tierra, entonces una relación R sería el conjunto de parejas ordenadas (x, y) donde x es una persona y y es la ciudad donde reside la persona, actualmente.

En los ejemplos anteriores, el lector debe verificar que el conjunto R efectivamente es un subconjunto de $A \times B$ (o A $\times$ A, si es el caso). Note que si los conjuntos A y B son finitos, entonces existen $2^{|A|\cdot|B|}$ relaciones de A a B.

Aunque la definición de relación presentada anteriormente parece distante de la idea intuitiva que se puede tener, se evidenciará a través de esta lectura la pertinencia de la interpretación matemática del concepto.

Cuando la relación R está conformada por una lista "pequeña" de parejas ordenadas es posible construir una descripción visual de esta a través de un diagrama. Por ejemplo, como la relación $R=\{(2,Y),(6,X),(8,Y),(6,Z)\}$ se puede representar así:



Donde cada nodo es un elemento de las parejas ordenadas en R y cada arista dirigida "$\longrightarrow$" indica la relación. Por ejemplo, como la pareja $(2,Y) \in R$, entonces existe una arista desde el nodo 2 al nodo Y.

Notación: dada una relación R, si (x,z) pertenece a R, entonces se dice que x está relacionado con z, a través de R, y se denota por:

$$x\,R\,z$$

En caso contrario, se dice que x **no** está relacionado con z, a través de R y se denota por:

$$x \not{R}\, z$$

Ejemplo 2. Si $R=\{(2,4),(3,6),(5,10),(7,14)\}$ entonces es correcto afirmar que: $2\,R\,4$, $5\,R\,10$, $3 \not{R}\, 8$ y $14 \not{R}\, 7$.

Observación: dadas dos relaciones R_1 y R_2 del conjunto A al conjunto B, también son relaciones entre A y B los conjuntos: $R_1 \cup R_2$, $R_1 \cap R_2$, $R_1 - R_2$, ${R^c}_1$.

1.1. Propiedades de una relación

Existen características deseables en una relación R, dado que expresan la forma en que se asocian los elementos. Reconocer si se tiene o incumple alguna de estas propiedades, permite identificar la conexión entre los datos.

Las propiedades se describen a través de la siguiente definición:

Definición 2 (Propiedades de una relación). Si R es una relación binaria, sobre A entonces se dice que:

- R es una relación **transitiva** si siempre que $x\,R\,z$ y $z\,R\,w$ entonces $x\,R\,w$.
- R es una relación **reflexiva** si para todo $a \in A$ se tiene que $a\,R\,a$
- R es una relación **simétrica** si siempre que $x\,R\,z$ entonces $z\,R\,x$
- R es una relación **antisimétrica** si para todo $x,z \in A$ se tiene que $x\,R\,z$ y $z\,R\,x$ implica que $x=z$

El siguiente ejemplo ilustra cada tipo de características.

Ejemplo 3.

- Si $R = \{(1, b), (b, 2), (1, 2), (2, 1), (1, 1)\}$, entonces R es una relación transitiva, dado que si $x\,R\,z$ y $z\,R\,w$, entonces $x\,R\,w$. Por ejemplo, $1\,R\,b$ y $b\,R\,2$, con lo cual se debe tener que $1\,R\,2$, lo que efectivamente ocurre.
- Si $R = \{(1, b), (b, 2), (1, 2), (2, 1), (1, 1)\}$ sobre $A = \{1, 2, b\}$, entonces R no es una relación reflexiva, dado que $(2, 2)$ o (b, b) no están en la relación.
- Si $R = \{(a, a), (a, b), (b, a), (b, b)\}$, entonces R es una relación simétrica, dado que si una pareja (x, z) está en R, entonces el par (z, x) también lo está.
- Si $R = \{(1, 1), (2, 4), (3, 6), (4, 8), (2, 8)\}$ es una relación antisimétrica, dado que la única forma para que un par ordenado (x, z) y (z, x) estén simultanemente en R es cuando $x = z$.

Revisar si una relación satisface alguna de las propiedades, requiere tener claridad sobre los elementos de la relación, por ejemplo, si $R = \{(x, y) : x < y\}$ es una relación definida sobre $\mathbb{Z}$, entonces es correcto afirmar que R es transitiva, no es reflexiva, no es simétrica, pero si antisimétrica.

Si $R=\{(x, y) : x \text{ divide a } y\}$ es una relación sobre $\mathbb{Z}$, entonces Res una relación que es transitiva y reflexiva, pero no es simétrica (por ejemplo: $4\,R 8$ pero $8 \not R 4$), ni antisimétrica (por ejemplo: $1\,R -1$ y $-1\,R 1$ pero $-1 \neq 1$).

Dependiendo de las propiedades que satisfacen una relación, se puede establecer una clasificación de la misma. A continuación se exponen las principales categorías.

1.2. Relación de equivalencia

Definición 3 (Relación de equivalencia). Sea R una relación sobre un conjunto A, si Res una relación transitiva, reflexiva y simétrica, entonces se dice que Res una relación de **equivalencia**

Ejemplo 4. Sea $R = \{(x, z) : x^2 = z^2\}$ una relación sobre $\mathbb{R}$, entonces R es una relación de equivalencia.

Justificación:

- R es transitiva: si $x\,R\,z$ y $z\,R\,w$, entonces $x^2 = z^2$ y $z^2 = w^2$, luego $x^2 = w^2$, con lo cual $x\,R\,w$.
- R es reflexiva: si $x \in \mathbb{R}$ entonces, $x^2 = x^2$, por lo tanto, $x\,R\,x$ para todo $x \in \mathbb{R}$.
- R es simétrica: si $x\,R\,z$ entonces, $x^2 = z^2$, por lo tanto, $z^2 = x^2$, así que $z\,R\,x$.

Ejemplo 5. Si $R = \{(x, z) : x \text{ es hermano de } z\}$ es la relación definida sobre el conjunto de personas, entonces R es una relación de equivalencia.

Justificación: antes de comprobar que R es una relación de equivalencia, se aclara que el concepto de hermano hace referencia a ser hijos de los mismos padres.

- R es transitiva: si $x\,R\,z$ y $z\,R\,w$, entonces x es hermano de z y z es hermano de w, luego x es hermano de w, con lo cual $x\,R\,w$.
- R es simétrica: si $x\,R\,z$, entonces x es hermano de z, por lo tanto, z es hermano de x, con lo cual $z\,R\,x$.
- R es reflexiva: si x es una persona, entonces x es hermano de sí mismo, por lo tanto, $x\,Rx$ para toda persona x.

Ejemplo 6. Si $R = \{(x, z) : x \equiv z(\textbf{mod } 2)\}$ es una relación definida sobre $\mathbb{Z}$, entonces R es una relación de equivalencia.

Justificación:

- R es transitiva: si $x\,R\,z$ y $z\,R\,w$ entonces $x \equiv z(\textbf{mod } 2)$ y $z \equiv w(\textbf{mod } 2)$, es decir 2 divide a $(x - z)$ y 2 divide a $(z - w)$, por lo tanto 2 divide a $(x - z) + (z - w) = (x - w)$ con lo cual $x\,R\,w$.
- R es simétrica: si $x\,R\,z$ entonces $x \equiv z(\textbf{mod } 2)$, con lo cual 2 divide a $(x - z)$. Por lo tanto, 2 divide a $z - x$, es decir $z\,R\,x$
- R es reflexiva: si $x \in \mathbb{Z}$ entonces $x - x = 0$, luego 2 divide a $x - x$. Por lo tanto, $x\,R\,x$.

Una relación de equivalencia R "divide" al conjunto sobre el cual está dada la relación, en subconjuntos denominados clases de equivalencia. Estos subconjuntos satisfacen propiedades interesantes.

Definición 4. Sea R una relación de equivalencia sobre A, $z \in A$. Entonces, la *clase de equivalencia* del elemento z corresponde al conjunto:

$$\{x : x\,R\,z, x \in A\}$$

El cual se denota por $[z]_R$ (o simplemente $[z]$).

Es decir, la clase de equivalencia de z corresponde al conjunto de elementos de A que están relacionados con él.

Ejemplo 7. Si $R = \{(1, 1), (2, 2), (3, 3), (2, 3), (3, 2)\}$ es una relación sobre $A = \{1, 2, 3\}$ entonces:

- $[1]_R = \{1\}$
- $[2]_R = \{2, 3\} = [3]_R$

Ejemplo 8. Si $R = \{(x, z) : x \equiv z(\textbf{mod } 2)\}$ es una relación definida sobre $\mathbb{Z}$, entonces:

- $[1]_R = \{\ldots, -3, -1, 1, 3, 5, \ldots\} = [-1]_R = [3]_R = \cdots$
- $[0]_R = \{\ldots, -4, -2, 0, 2, 4, 6, \ldots\} = [2]_R = [4]_R = \cdots$

Por lo tanto, en este caso solo existen solo dos clases de equivalencia distintas: $[0]_R$ y $[1]_R$

Las clases de equivalencia satisfacen lo siguiente. La demostración se propone como ejercicio.

Teorema 1. Si R es una relación de equivalencia sobre un conjunto A; $a, b \in A$. Entonces:

1. $a \in [a]$
2. Si $a\,R\,b$ entonces $[a] = [b]$.
3. Si $a \not R\, b$ entonces $[a] \cap [b] = \emptyset$.

Las relaciones de equivalencia son escenciales cuando se desea construir conexiones de similitud entre un conjunto de datos. Cada clase de equivalencia representa un grupo de datos que son "equivalentes" entre sí y que cualquier hecho[1] sobre alguno de sus elementos es válido en cualquier otro de la clase.

Ahora, se presenta otro tipo de relación que es útil en procesos de clasificación de datos:

1.3. Relaciones de orden

Definición 5 (Relación de Orden). Una relación R sobre un conjunto A se denomian *relación de orden parcial* si cumple lo siguiente:

- R es una relación transitiva.
- R es una relación reflexiva.
- R es una relación antisimétrica.

Si una relación R es transitiva y reflexiva se denomina un preorden.

Como lo indica su nombre, las relaciones de orden establecen una organización sobre los elementos de A. Por tal raz ón, si R es un orden parcial, entonces el hecho que $x\ R\ y$ se interpreta como "x es menor o igual a y" y se denota por $x \leq_R y$.

Ejemplo 9.

- Si $R = \{(1, 1), (2, 2), (3, 3), (3, 2), (1, 3), (1, 2)\}$, entonces R es una relación de orden parcial sobre $A = \{1, 2, 3\}$ y se tiene que $3\ R\ 2$ (o $3 \leq_R 2$).
- Si $R = \{(x, y) : x$ divide a $y\}$, entonces R es una relación de orden sobre $\mathbb{Z}$ y se tiene que $3 \leq_R 15$, $10 \leq_R 0$ pero $2 \not\leq_R 3$.
- $R = \{(x, y) : x \leq y\}$ es una relación de orden parcial sobre $\mathbb{R}$.
- Si $A = \mathcal{P}(C)$ para algún conjunto C, entonces $R = \{(x, y) : x \supseteq y\}$ es una relación de orden sobre A y $C \leq_R \emptyset$

[1] Que sea preservado por la relación de equivalencia

Si R es una relación de orden parcial sobre un conjunto A, se dice que dos elementos x, $z \in A$ son *compa-rables* si $x \ R \ z$ o $z \ R \ x$, en caso contrario, se dice que son incomparables. Por ejemplo, para la relación $R = \{(1, 1), (2, 2), (3, 3), (3, 2)\}$ sobre $\{1, 2, 3\}$ se tiene que los elementos 2 y 3 son comparables, pero los elementos 1 y 2 son incomparables.

Cuando se tiene un orden sobre un conjunto, es posible que se necesite establecer si existe un elemento que sea mayor a todos los demás, si existe un elemento menor a todos, o si no existe un elemento menor a un elemento dado. Estas ideas se vinculan con la siguiente definición.

Definición 6. Sea R una relación de orden parcial sobre un conjunto A y $B \subseteq A$:

- $b \in B$ se denomina el *mínimo* de B si para todo elemento $z \in B$ se tiene que $b \leq_R z$
- $b \in B$ se denomina elemento *mínimal* de B si no existe $z \in B$ tal que $z \neq b$ y $z \leq_R b$.
- $b \in B$ se denomina el *máximo* de B si para todo elemento $z \in B$ se tiene que $z \leq_R b$
- $b \in B$ se denomina elemento *máximal* de B si no existe $z \in B$ tal que $z \neq b$ y $b \leq_R z$.

Es decir, $b \in B$ es un elemento mínimo si b es comparable con todo elemento $z \in B$ y él es el menor de todos. Mientras que $b \in B$ es mínimal si no existe $z \in B$, distinto a b, que sea menor a él.

En la definición de elemento minimal, no es necesario que el elemento se pueda comparar con los demás miembros del conjunto B, solo se necesita que no haya otro elemento en B que sea menor a él.

Ejemplo 10.

- Sea $R = \{(1, 1), (2, 2), (3, 3), (3, 2), (1, 3), (1, 2)\}$ una relación de orden parcial sobre $A = \{1, 2, 3\}$; $B = \{2, 3\}$, entonces 3 es el elemento mínimo de B.
- Sea $R = \{(1, 1), (2, 2), (3, 3), (3, 2)\}$ una relación de orden parcial sobre $A = \{1, 2, 3\}$; $B = \{1, 2, 3\}$, entonces 1 es el elemento mínimal de B al igual que 3. Note que 1 y 3 no son comparables.
- Sea $R = \{(x, y) : x \text{ divide a } y\}$ la relación de orden sobre $\mathbb{Z}$, entonces para $B = \{1, 2, 3, 4, 6\}$ se tiene que 1 es el elemento mínimo. Pero si $B = \{2, 3, 4, 6\}$, entonces no existe elemento mínimo (dado que no hay nadie que se pueda comparar con todos), pero 2 y 3 son elementos mínimales.
- Sea $R = \{(x, y) : x \text{ divide a } y\}$ la relación de orden sobre $\mathbb{Z}$, entonces para $B = \{2, 3, 4, 12\}$ se tiene que 12 es el máximo de B. Pero si $B = \{2, 3, 4, 12, 15\}$, entonces 15 es un elemento máximal de B y no es máximo.

Si $A = \mathbb{R}$ ordenado de la forma usual, y $B = \{x : x \in \mathbb{R}, 0 < x < 2\}$, entonces B no tiene elementos máximales, mínimales, ni máximo, ni mínimo. Pero sí existe un elemento en A que es mayor a todos los elementos de B, por ejemplo 3, lo que brinda una cota del conjunto.

Definición 7. Sea R una relación de orden parcial sobre un conjunto A y $B \subseteq A$:

- $z \in A$ se denomina *cota superior* de B si para todo elemento $b \in B$ se tiene que $b \leq_R z$
- $z \in A$ se denomina el *supremo* de B si es el mínimo de las cotas superiores de B.
- $z \in A$ se denomina *cota inferior* de B si para todo elemento $b \in B$ se tiene que $z \leq_R b$
- $z \in A$ se denomina el *ínfimo* de B si es el máximo de las cotas inferiores de B.

Se recomienda revisar con detalle los siguientes ejemplos, para comprender la definición anterior.

Ejemplo 11.

- Si $A = \mathbb{R}$, ordenado de la forma usual, y $B = \{x : x \in \mathbb{R}, 0 < x < 2\}$, entonces son ejemplo de *cotas superiores* de B: $2, 2.001, 2.01, 2.1, 3, 4, \ldots$ dado que cualquiera de estos elementos es mayor a todo elemento de B.
- Si $A = \mathbb{R}$, ordenado de la forma usual, y $B = \{x : x \in \mathbb{R}, 0 < x < 2\}$, entonces el supremo de B es 2, dado que es el mínimo de la cotas superiores.

Observación: para ser cota superior (o inferior) es necesario ser comparable con todos los elementos del conjunto B.

Ejemplo 12.

- Sea $R = \{(x, y) : x \text{ divide a } y\}$ la relación de orden sobre $\mathbb{Z}$, entonces para $B = \{2, 3, 4, 15\}$ se tiene que $60, 120, 180, \ldots$ son cotas superiores de B y que el supremo de B es 60.
- $R = \{(x, y) : x \text{ divide a } y\}$ la relación de orden sobre $\mathbb{Z}$, entonces para $B = \{4, 14, 24\}$ el ínfimo es 2.
- $R = \{(x, y) : x \text{ divide a } y\}$ la relación de orden sobre $\mathbb{Z}$, entonces para $B = \{x : x \in \mathbb{Z},\ x \text{ es un número primo}\}$ el supremo es 0 y el ínfimo es 1.

En los ejercicios podrá explorar las nociones hasta aquí construidas y observar lo ideales que son para resolver ciertos interrogantes.

Para finalizar esta lectura, se presentará una noción que aparece en diferentes áreas de conocimiento.

2. Funciones

Una función es de aquellos conceptos que principalmente se estudia en los cursos de matemámticas, pero que aparecen con frecuencia en programación. Es el recurso ideal para representar la transformación de un objeto en otro, o para describir la dependencia entre dos variables. En esta sección revisamos esta noción desde un punto más amplio.

Definición 8. Sea f una relación de un conjunto A a un conjunto B, es decir, $f \subseteq A \times B$, se dice que f es una *función* de A a B si:

- Para todo $a \in A$ existe un $b \in B$ tal que $(a, b) \in f$.
- Si $(a, b) \in f$ y $(a, c) \in f$, entonces $b = c$.

Y se denota por:

$$f : A \longrightarrow B$$

Es decir, una relación es una función $f \subseteq A \times B$ si todo elemento de A está relacionado con un elemento de B de forma única.

Un ejemplo de una relación entre dos conjuntos que es una función, es la relación entre las personas de aula de clase y las edades de cada individuo. En este caso, cada persona se relaciona con un número natural (su edad) de forma única.

Un ejemplo de una relación que no es función, es la relación entre las personas de un aula de clase y los cursos que se encuentran tomando. En esta situación, puede existir que una persona esté desarrollando dos asignaturas diferentes, por lo tanto estará relacionado con dos elementos distintos del conjunto de asignaturas.

Notación: si f es una función de A en B, entonces el hecho que $(a, b) \in f$ se simboliza como $f(a) = b$ y se lee "f de a es igual a b".

Ejemplo 13.

- Si $A = \{-1, 1, -2, 3\}$ y $B = \{1, 4, 9\}$, entonces $f = \{(-1, 1), (1, 1), (-2, 4), (3, 9)\}$ es una función de A en B y se tiene que $f(-2) = 4$, por ejemplo.
- Si $A = \{1, 4, 9\}$ y $B = \{-1, 1, 2, 3\}$, entonces $f = \{(1, 1), (1, -1), (4, 2), (9, 3)\}$ no es una función de A en B, por ejemplo, 1 está relacionado con 1 y -1.
- Si $A = \mathbb{R}$ y $B = \mathbb{Z}$, entonces $f = \{(x, \lfloor x \rfloor) : x \in A\}$[2] es una función y $f(-3.5) = -4$, $f(5.7) = 5$ por ejemplo.
- Si $A = \mathbb{R}$ y $B = \mathbb{R}$, entonces f $\left\{\left(x, \sqrt{x^2+1}\right) : x \in A\right\}$ es una función y $f(1) = \sqrt{2}$, $f\left(-\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\frac{5}{4}}$, $= f(0) = 1$, por ejemplo.

A la noción de función se tienen asociados los siguientes conceptos:

Definición 9. Sea $f : A \longrightarrow B$ una función, entonces:

- El *dominio* de f es el conjunto A, que se denota por $\mathrm{dom}(f)$.
- El *codominio* de f es el conjunto B, que se denota por $\mathrm{codom}(f)$.
- El *rango* de f es el conjunto $\{y : y \in B \land \exists x \in A[f(x) = y]\}$, que se denota por $\mathrm{rang}(f)$.

[2] $\lfloor x \rfloor$ es el mayor entero, que es menor o igual a x.

Ejemplo 14.

- Si $f = \{(-1,1),(1,1),(-2,4),(3,9)\}$ es una función de A en $B = \mathbb{Z}$, entonces $\mathrm{dom}(f) = \{-1,1,-2,4\}$, es decir, el conjunto de las primeras coordenadas de f.
- Si $f = \{(-1,1),(1,1),(-2,4),(3,9)\}$ es una función de A en $B = \mathbb{Z}$, entonces $\mathrm{codom}(f) = \mathbb{Z}$.
- Si $f = \{(-1,1),(1,1),(-2,4),(3,9)\}$ es una función de A en $B = \mathbb{Z}$, entonces $\mathrm{rang}(f) = \{1,4,9\}$.
- Sea $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ la función que corresponde al conjunto $f = \left\{\left(x, \sqrt{x^2+1}\right) : x \in \mathbb{R}\right\}$ entonces, $\mathrm{dom}(f) = \mathbb{R}$, $\mathrm{codom}(f) = \mathbb{R}$ y $\mathrm{rang}(f) = \{y : y \in \mathbb{R} \wedge y \geq 1\} = [1,\infty)$.

Debe notar que $\mathrm{rang}(f) \subseteq \mathrm{codom}(f)$. Si se piensa que una función es un intrumento que transforma objetos, entonces el dominio de f corresponde al conjunto de los objetos que se desean transformar, el codominio de f es el conjunto que describe a qué *tipo de objeto se desea convertir* a través de f, y el rango corresponde a los objetos que *se obtienen* al aplicar la función.

Definición 10. Sean $f : A \longrightarrow B$, $g :\longrightarrow D$ dos funciones. Entonces, se dice que f es igual a g y se denota por $f = g$ si se cumple que:

$$f(x) = g(x) \quad \forall x \in A$$

Ejemplo 15. Si $f : \mathbb{Z} \longrightarrow \mathbb{Z}$ es la función dada por la relación $\{(x, x^2) : x \in \mathbb{Z}\}$ y $g : \mathbb{Z} \longrightarrow \mathbb{Q}$ dada por la relación $\{(x, x^2) : x \in \mathbb{Z}\}$, entonces $f = g$, debido a que para todo elemento del dominio de f y g se tiene que $f(x) = g(x)$.

2.1. Función inyectiva y sobreyectiva

Con el objetivo de caracterizar diferentes tipos de función, se presenta la siguiente definición:

Definición 11. Sea $f : A \longrightarrow B$ una función, entonces:

- Se dice que f es *inyectiva* si elementos distintos del dominio de f se relacionan con elementos distintos de B. De manera formal:
$$\forall x, y \in A(x \neq y \Rightarrow f(x) \neq f(y))$$
- Se dice que f es *sobreyectiva* si todo elemento del codominio de f está relacionado con algún elemento de A. De manera formal:
$$\forall b \in B \exists x \in A(f(x) = b)$$
- Se dice que f es *biyectiva* si f es *inyectiva* y *sobreyectiva*.

Ejemplo 16.

- Sea $f : \mathbb{Z} \to \mathbb{R}$ la función que corresponde a la relación $\{(x, x+1) : x \in \mathbb{Z}\}$, entonces, f es una función *inyectiva*, dado que para dos elementos x, y distintos del dominio de f se tiene que $f(x) = x+1 \neq f(y) = y+1$.

- Sea $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ la función que corresponde a la relación $\{(x, x^3 - x) : x \in \mathbb{R}\}$, entonces f es una función *sobreyectiva*, dado que para todo elemento z del codominio existe un elemento x del dominio de f, tal que $(x, z) \in f$.
- Sea $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ la función que corresponde a la relación $\{(x, 3x - 1) : x \in \mathbb{R}\}$ es una función *biyectiva*.

Note además que:

Ejemplo 17.

- Si $f : \mathbb{Z} \to \mathbb{R}$ es la función que corresponde a la relación $\{(x, x + 1) : x \in \mathbb{Z}\}$, entonces, f **no** es una función *sobreyectiva*, dado que para $z = \sqrt{2}$ no existe un elemento del dominio de f, tal que $f(x) = \sqrt{2}$
- Si $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ es la función que corresponde a la relación $\{(x, x^3 - x) : x \in \mathbb{R}\}$, entonces f **no** es una función *inyectiva*, dado que para $x = 1$ y $w = -1$, se tiene que $f(x) = 0 = f(w)$ y $x \neq w$.

En otras palabras, una función es inyectiva si al aplicar la función f a dos objetos diferentes el resultado será siempre diferente. Una función es sobreyectiva si para todo objeto del codominio de f existe al menos un elemento que al aplicar la función su resultado será el objeto deseado.

2.2. Composición de funciones

Una forma de establecer nuevas funciones es a través del concepto de composición de funciones.

Definición 12. Sean $f : A \longrightarrow B$, $g : B \longrightarrow C$ funciones, entonces la composición de f y g es la función $h : A \longrightarrow C$, dada por la relación $\{(a, c) : a \in A, c \in C \wedge \exists b \in B[f(a) = b \text{ y } g(b) = c]\}$, la función h también se denota por $g \circ f$.

Ejemplo 18.

- Si $f = \{(a, 1), (b, 1), (c, 2)\}$ y $g = \{(1, z), (2, w), (3, a)\}$ son funciones, entonces $g \circ f$ es la función dada por la relación $\{(a, z), (b, z), (c, w)\}$
- Si $f = \{(x, x^2) : x \in \mathbb{R}\}$, $g = \{(x, x + 1) : x \in \mathbb{R}\}$ son funciones, entonces $g \circ f$ es la función dada por la relación $\{(x, x^2 + 1) : x \in \mathbb{R}\}$

La composición de funciones se puede pensar intuitivamente como el resultado de colocar dos procesos en secuencia, $A \xrightarrow{f} B \xrightarrow{g} C$, donde el resultado del primer proceso es el insumo del segundo. Por lo tanto, si lo que se obtiene en el primer proceso no está en el dominio de la segunda función, entonces no se puede establecer la composición.

Ejemplo 19. Si $f = \{(x, x + 1) : x \in \mathbb{Z}\}$ y $g = \{(x, \sqrt{x}) : x \in \mathbb{R} \wedge x \geq 0\}$ son funciones, note que $g \circ f$ no es posible, dado que al aplicar f al valor -5 se obtiene $f(-5) = -4$, pero -4 no está en el dominio de g.

2.3. Inversa de una función

Cuando se piensa en una función como un elemento que transforma objetos, es natural pensar en qué situaciones existe otra función que "devuelva" el objeto transformado a su estado inicial. En esta última sección de la lectura se abordará esta cuestión.

Antes de establecer las condiciones para que exista una función que realice la operación "contraria" a una función dada, es necesario introducir unas definiciones.

Definición 13 (Función identidad). Si A es un conjunto, entonces la función $i_A = \{(x, x) : x \in A\}$ se denomina la función identidad del conjunto A.

Ejemplo 20. Si $A = \{a, b, c, d\}$, entonces i_A corresponde a la función $\{(a, a), (b, b), (c, c), (d, d)\}$

Definición 14 (Relación inversa). Si R es una relación sobre un conjunto A, entonces la relación inversa R^{-1} corresponde al conjunto $\{(y, x) : (x, y) \in R\}$

Es decir, la relación inversa contiene las parejas de la relación R al "revés".

Ejemplo 21. Si $R = \{(x, x+1) : x \in \mathbb{R}\}$, entonces R^{-1} corresponde a $\{(x+1, x) : x \in \mathbb{R}\}$

Note que si f es una función, entonces no necesariamente se tiene que la relación f^{-1} sea una función, por ejemplo, analice la situación $f = \{(x, x^2) : x \in \mathbb{R}\}$. Por lo tanto, se tiene la siguiente definición:

Definición 15 (Función inversa). Si $f : A \to B$ es una función, entonces se dice que f es *invertible* si la relaci ón f^{-1} es una función de B a A.

Note las dos condiciones que son necesarias para que una función sea invertible:

- f^{-1} debe ser una función.
- El dominio de f^{-1} debe ser B.

El siguiente teorema estable condiciones necesarias y suficientes para que una función sea invertible, sin necesidad de construir la relación f^{-1} y verificar si esta es una función.

Teorema 2. $f : A \to B$ es una función *invertible* sí y solo sí f es una función biyectiva.

A continuación se expone la relación entre la función identidad y la función inversa.

Teorema 3. $f : A \to B$ es una función *invertible*, entonces $f^{-1} \circ f = i_A$ y $f \circ f^{-1} = i_B$.

Ejemplo 22. Si $f : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$ es la función definida por la relación $\{(x, x + 1) : x \in \mathbb{Z}\}$, entonces $f^{-1} = \{(y, y - 1) : y \in \mathbb{Z}\}$ es la función inversa y $f^{-1} \circ f = i_{\mathbb{Z}}$.

3. Ejercicios

Los siguientes ejercicios tienen como objetivo que afiance los conceptos presentados en la lectura. No se deben entregar al tutor del módulo.

1. Si $A = \{1, 2\}$ y $B = \{X, Y\}$ liste todas las relaciones (binarias) posibles de A a B.

2. Si $R = \{(x, y) : x \text{ divide a } y\}$ la relación sobre $A = \{1, 2, 3, 4, 9, 6\}$. Construya la representación gráfica de la relación.

3. Sea R la siguiente relación de equivalencia en el conjunto $A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$:

$$R = \{(1, 1), (1, 5), (2, 2), (2, 3), (2, 6), (3, 2), (3, 3), (3, 6), (4, 4), (5, 1), (5, 5), (6, 2), (6, 3), (6, 6)\}$$

la cantidad de clases de equivalencia distintas en A/R es:

a) 6
b) 14
c) 3
d) 7
e) 2

4. Construya una relación R tal que sea transitiva pero no reflexiva.

5. Determine qué propiedades (transitiva, reflexiva, simétrica o antisimétrica o ninguna) satisface cada una de las siguientes relaciones sobre $\mathbb{Q}$

a) xRy si $x * y = 1$
b) xRy si $x - y = z^2$ para algún $z \in \mathbb{Q}$
c) xRy si $x * \frac{1}{y} = 1$
d) xRy si $x + y = 1$

6. Dado el conjunto $A = \{a, b, c, d\}$ y $R = \{(a, a), (b, b), (c, c), (d, d), (a, b), (a, c), (a, d), (c, d)\}$ una relación de orden sobre A. Entonces, determine:

a) El elemento mínimo de $B = \{c, d\}$.
b) El elemento máximo de $B = \{a, c, d\}$.
c) Un elemento mínimal de $B = \{b, c, d\}$
d) Un elemento máximal de $B = \{b, c, d\}$
e) El ínfimo de $B = \{b, d\}$

7. Dada la relación $R = \{(x^3, x^2) : x \in \mathbb{R}\}$, determine si esta es una función de $\mathbb{R}$ a $\mathbb{R}$.

8. Si $f : A \to B$ es una función dada por la relación $\{(x, \frac{1}{x^2+1}) : x \in \mathbb{R}\}$, determine el dominio, codominio y rango de f.

9. Verifique que la función $f = \{(x, \sin(x)) : x \in [-\pi/2, \pi/2]\}$ es una función biyectiva.

10. Determine la función inversa de $f = \{(x, 3x + 1) : x \in \mathbb{R}\}$

Referencias

[1] Grimaldi, R. (1998) *Matemáticas discreta y combinatoria.* México: Addison-Wesley Iberoamericana.

[2] Hammack, R. (2013) *Book of proof*, second edition, Editor: Richard Hammack.

[3] Rosen, K.H. and Pérez, J.M. (2004) *Matemática discreta y sus aplicaciones*, Madrid: McGraw-Hill.

INFORMACIÓN TÉCNICA

Módulo: Elementos en Teoría de la Computación
Unidad 1: Conjuntos, relaciones y funciones
Escenario 2: Relaciones y funciones

Autor: Diego Arévalo Ovalle

Asesor Pedagógico: Óscar Mauricio Salazar
Diseñador Gráfico: Diego Arévalo Ovalle
Asistente: Alejandra Morales