INSTITUCIÓN UNIVERSITARIA POLITÉCNICO GRANCOLOMBIANO

Facultad de Ingeniería y Ciencias Básicas

Unidad 1 / Escenario 1

Lectura fundamental

Conjuntos y cardinalidad

Contenido

Palabras claves: conjunto, operaciones de conjuntos, cardinalidad

1. La noción de conjunto

Un *conjunto* corresponde a una colección (no ordenada) de objetos, por ejemplo, el conjunto de todos los habitantes de la ciudad de Barranquilla, el conjunto de mujeres que han sido presidente de Colombia, el conjunto de clientes de la empresa de acueducto de Bogotá, el conjunto de fotos de Georg Cantor o el conjunto de palabras reservadas en un lenguaje de programación. Los objetos que componen un conjunto son llamados *elementos* (o *miembros*) del conjunto y se dice que estos *pertenecen* al conjunto.

Existen dos formas básicas para describir un conjunto:

- Listar sus elementos: para esto se indican los mienbros del conjunto, separados con coma y encerrado con las llaves { y }. Por ejemplo, $\{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, A, B, C, D, E, F\}$ es la descripción del conjunto de símbolos del sistema númerico hexadecimal.
- Indicar una propiedad que satisfacen sus elementos: en este caso se señala una (o varias) característica que satisfacen **exclusivamente** todos los miembros de la colección, ejemplo de esto son los conjuntos dados al inicio de la sección. Más adelante, se presentará una forma de usar este esquema de representación.

Observación: para desarrollar la teoría de conjuntos es útil introducir notación que permita expresar, de manera comoda, los conceptos. Por ejemplo, para indicar que un objeto "w" es miembro de un conjunto B se usa la notación: $w \in B$ y se lee: "w pertenece a B" o para indicar que un objeto "w" *no pertenece* a un conjunto C se emplea la notación $w \notin C$. A lo largo de la lectura, el estudiante encontrará más ejemplos de este hecho.

Por l o general, a l os conjuntos se l es asigna un nombre (que no es único o permanente) y que en l a mayoría de casos corresponde a una letra en mayúscula del alfabeto. Una situación como esta, es nombrar el conjunto {0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, A, B, C, D, E, F } con el símbolo H, lo cual se logra escribiendo:

$$H = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, A, B, C, D, E, F\}$$

Y por lo tanto, $7 \in H$ expresa que 7 es un elemento del conjunto $\{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, A, B, C, D, E, F\}$

Existen conjuntos que por su importancia y uso tienen nombres reservados, algunos ejemplos son:

Nombre del conjunto	Descripción del conjunto
$\mathbb{N}$	El conjunto de los números naturales, es decir, $\{0, 1, 2, 3, \ldots\}$
$\mathbb{Z}$	El conjunto de los números enteros, es decir, $\{\ldots, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \ldots\}$
$\mathbb{Q}$	El conjunto de los números racionales.
$\mathbb{R}$	El conjunto de los números reales.

Con lo cual, sin importar el contexto, una expresión como $x \in \mathbb{Q}$ indica que x es un elemento de los números racionales.

1.1. Conceptos básicos

A continuación se desarrolla, a través de definiciones, los primeros conceptos de la teoría de conjuntos.

Definición 1. Dos conjuntos A y B se dicen **iguales** si tienen los mismos elementos y se denota por:

$$A = B$$

Ejemplo 1.

- Si $A = \{2, 4, 6, 8\}$ y $B = \{8, 6, 2, 4\}$, entonces $A = B$.
- Si $A = \{0, 1, -1, 2, -2, 3, -3, 4, -4, \ldots\}$, entonces $A = \mathbb{Z}$.
- Si H es el conjunto de los padres de Manuel, K es el conjunto de los padres de Sofía y se sabe que

  Manuel y Sofía son hermanos[1], entonces $H = K$

Definición 2. Si todos los elementos de un conjunto A pertenecen a un conjunto B, se dice que A es un **subconjunto** de B y se simboliza por:

$$A \subseteq B$$

Ejemplo 2.

- Si $A = \{2, 4, 6, 8\}$ y $B = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$ entonces $A \subseteq B$.
- $\mathbb{N} \subseteq \mathbb{Z}$
- $A \subseteq A$ para todo conjunto A.
- El conjunto de clientes de la empresa de acueducto de Bogotá es un subconjunto del conjunto de los habitantes de la ciudad de Bogotá.

Si $A \subseteq B$ pero existe un elemento del conjunto B que no pertenece al conjunto A, entonces se dice que A es un subconjunto *propio* de B y se denota por $A \subsetneq B$. Por ejemplo, $\mathbb{Q} \subsetneq \mathbb{R}$ dado que $\mathbb{Q} \subseteq \mathbb{R}$ pero el número $\pi \in \mathbb{R}$ y $\pi \notin \mathbb{Q}$.

Definición 3. **[El conjunto vacío]** Si A es un conjunto sin elementos, entonces se dice que A es un *conjunto vacío*. Hecho que se expresa indicando que:

$$A = \emptyset$$

Dado que todos los conjuntos vacíos son iguales, entonces el símbolo $\emptyset$ se emplea para representar a este conjunto.

Se debe resaltar que l os conjuntos $\emptyset$ y $\{\emptyset\}$ son diferentes, dado que el primer conjunto no tiene elementos y el segundo tiene un elemento (el conjunto vacío). Por otro l ado, se tiene que para todo conjunto A, $\emptyset \subseteq A$

[1] Se asume que son hermanos si tienen los mismos padres

1.2. Descripción por comprensión

Al inicio de esta sección se indicó dos formas para describir un conjunto, listando sus elementos o indicando una propiedad que satisfacen de forma exclusiva sus elementos. La primera opción es útil si son pocos los elementos del conjunto o los elementos no satisfacen una característica particular. Pero en la mayoría de casos se tiene que el conjunto es demasiado extenso o los miembros de la colección comparten alguna propiedad.

Para describir un conjunto a través de la característica que tienen en común sus elementos, se usa la siguiente estructura:

$$\{E : Q\}$$

Donde E es una expresión y Q es una condición que se debe satisfacer. Un ejemplo es:

$$\{x^2 : x \in \mathbb{Z}\}$$

Que describe un conjunto, cuyos elementos son el resultado de elevar al cuadrado (expresión E) un número entero (condición Q), por lo tanto:

$$\{x^2 : x \in \mathbb{Z}\} = \{0, 1, 4, 9, 16, 25, 36, 49, \ldots\}$$

Otro ejemplo es:

$$\{2k + 1 : k \in \mathbb{N}\}$$

En este caso, el conjunto que se describe tiene como elementos el resultado de la evaluación de la expresión $2k + 1$, en los valores k, que satisfacen la condición $k \in \mathbb{N}$. Con lo cual:

$$\{2k + 1 : k \in \mathbb{N}\} = \{1, 3, 5, 7, 9, 11, \ldots\}$$

Así que un conjunto descrito por la estructura $\{E : Q\}$, se interpreta como el conjunto cuyos elementos son el resultado de evaluar la expresión E con los elementos que satisfacen la condición Q. Esta forma de descripción de un conjunto se conoce como: **Descripción por comprensión**.

Ejemplo 3. A continuación se presentan diferentes conjuntos descritos por comprensión y se indica a qué conjuntos corresponden:

- $\{x^{-1} : x \in \mathbb{N} \wedge x \neq 0\} = \left\{1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \ldots\right\}$
- $\{x : x \text{ es nombre de un padre de Napoleón Bonaparte}\} = \{\text{María Letizia Ramolino}, \text{Carlo Bonaparte}\}$
- $\{x : x \in \mathbb{N}, x \text{ es un número primo }, x < 10\} = \{2, 3, 5, 7\}$
- $\{x : x^2 = -2 \wedge x \in \mathbb{R}\} = \emptyset$
- $\{x^2 : x \in \mathbb{Z} \wedge 0 \leq x \leq 2\} = \{0, 1, 4\}$
- $\{x^2 : x \in \mathbb{R} \wedge 0 \leq x \leq 2\} = [0, 4]$, aquí $[0, 4]$ denota el intervalo de números reales que son mayores o iguales a cero y menores o iguales a 4.

Los dos ltimos casos del ejemplo anterior, hace notar la importancia de la condicin en la descripcin por comprensión de un conjunto, dado que de esta dependen los elementos serán evaluados en la expresión E.

Es cierto que pueden existir múltiples formas de describir un mismo conjunto por comprensión, un ejemplo es:$\{x : x = 2y \text{ con } y \in \mathbb{N}\} = \{2y : y \in \mathbb{N}\} = \{z : z \textbf{ mod } 2 = 0 \wedge z \in \mathbb{N}\}$

La descripción de un conjunto por comprensión será la empleada a lo largo de las lecturas fundamentales.

2. Operaciones de conjuntos

Para construir "nuevos" conjuntos a partir de conjuntos dados, es útil establecer algunas "operaciones" entre conjuntos, como se muestra a continuación:

2.1. Unión de conjuntos

Suponga que usted tiene dos listas con los clientes de dos vendedores de su empresa y desea organizar una lista que contenga todos los clientes de los vendedores. ¿Cuál es la forma de construir esta nueva lista?

Definición 4. Dados dos conjuntos A y B, la **unión** de ellos corresponde al conjunto $\{x : x \in A \vee x \in B\}$ y se denota por $A \cup B$.

Es decir, los elementos de $A \cup B$ son aquellos que pertenecen al conjunto A o al conjunto B.

Ejemplo 4.

- Si $A = \{-1, 1, 2, -2, 3, -3\}$, $B = \{0, 2, 4, 6\}$, entonces $A \cup B = \{-1, 1, 0, 2, -2, 3, -3, 4, 6\}$
- Si $A = \{2x : x \in \mathbb{N}\}$ y $B = \{2k + 1 : k \in \mathbb{N}\}$, entonces $A \cup B = \mathbb{N}$ •

  Para cualquier conjunto A se tiene que $A \cup \emptyset = A$
- Si $A = \{x : x \in \mathbb{R} \wedge -1 \leq x < 0\}$ y $B = \{x : x \in \mathbb{R} \wedge 0 \leq x \leq 1\}$, entonces $A \cup B = [-1, 1]$
- Si A es el conjunto de clientes de mi empresa que viven en Chapinero y B es el conjunto de clientes que viven en Salitre, entonces $A \cup B$ corresponde al conjunto de clientes de mi empresa que viven en Chapinero o en Salitre.

2.2. Intersección de conjuntos

Retornando al ejemplo de la lista de clientes de los vendedores, ¿cómo conocer cuáles clientes son visitados por los dos vendedores?

Definición 5. Dados dos conjuntos A y B, la **intersección** de ellos corresponde al conjunto $\{x : x \in A \wedge x \in B\}$ y se denota por $A \cap B$.

Por lo tanto, los elementos de $A \cap B$ son aquellos que pertenecen al conjunto A y al conjunto B.

Ejemplo 5.

- Si $A = \{-1, 1, 2, -2, 3, -3\}$, $B = \{0, 2, 4, 6\}$, entonces $A \cap B = \{2\}$
- Si $A = \{2x : x \in \mathbb{N}\}$ y $B = \{2k + 1 : k \in \mathbb{N}\}$, entonces $A \cap B = \emptyset$
- Si $A = \{x : x \in \mathbb{R} \wedge -1 \leq x < 1\}$ y $B = \{x : x \in \mathbb{R} \wedge 0 \leq x \leq 2\}$, entonces $A \cap B = [0, 1)$
- Si A es el conjunto de clientes de mi empresa que compran entre noviembre y diciembre y B es el conjunto de clientes que compran entre diciembre y enero, entonces $A \cap B$ corresponde al conjunto de clientes de mi empresa que compran en diciembre.

2.3. Diferencia de conjuntos

Si se dispone de la lista de clientes que compran entre noviembre y diciembre en mi empresa y otra lista con los clientes que compran en diciembre y enero, ¿cómo establecer los clientes que compran solo en enero?

Definición 6. Dados dos conjuntos A y B, la **diferencia** de A y B es el conjunto $\{x : x \in A \wedge x \notin B\}$ y se denota por $A - B$.

Así que los elementos de $A - B$ son aquellos que pertenecen al conjunto A, pero no al conjunto B.

Ejemplo 6.

- Si $A = \{-1, 1, 2, -2, 3, -3\}$, $B = \{0, 2, 4, 6\}$, entonces $A - B = \{-1, 1, -2, 3, -3\}$
- Si $A = \{2x : x \in \mathbb{N}\}$ y $B = \{2k + 1 : k \in \mathbb{N}\}$, entonces $A - B = A$
- Si $A = \{x : x \in \mathbb{R} \wedge -1 \leq x < 1\}$ y $B = \{x : x \in \mathbb{R} \wedge 0 \leq x \leq 2\}$, entonces $A - B = [-1, 0)$ • Si $A = \mathbb{Z}$ y $B = \mathbb{Q}$, entonces $A - B = \emptyset$

Es importante destacar que esta “operación” depende del orden, es decir, el conjunto $A - B$ no es igual, en la mayoría de casos, al conjunto $B - A$. Tome por ejemplo, los conjuntos $A = \{x : x \text{ es un triángulo equilátero }\}$ y $B = \{x : x \text{ es un triángulo isósceles }\}$, entonces:

$$A - B = \emptyset$$

Mientras que:

$$B - A = \{x : x \text{ es un triángulo con dos lados de medida igual y el tercero con medida estrictamente diferente}\}$$

2.4. Complemento de un conjunto

Dado un conjunto A, se desea construir el conjunto de los elementos que *no pertenecen* al conjunto A. Para realizar esta construcción de forma correcta, es necesario considerar el conjunto A como un subconjunto de un conjunto U, para establecer qué elementos de U no pertenecen a A.

Definición 7. Si A es un subconjunto de un conjunto U, el complemento de A, relativo a U, corresponde al conjunto $\{x : x \in U \wedge x \notin A\}$ y se denota por A^c.

En necesario **mencionar** la importancia del conjunto U en la definición del complemento, dado que este conjunto es la referencia para establecer qué elementos *no pertenecen* al conjunto A.

Ejemplo 7.

- Si $A = \{2, 3, 4, 5, 6\}$, $U = \{2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$, entonces $A^c = \{7, 8, 9\}$
- Si $A = \{2, 3, 4, 5, 6\}$, $U = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$, entonces $A^c = \{0, 1, 7, 8, 9\}$
- Si $A = \mathbb{N}$ y $U = \mathbb{Z}$, entonces $A^c = \{-1, -2, -3, -4, -5, -6, -7, \ldots\}$
- Si $A = \mathbb{R}$ y $U = \mathbb{R}$, entonces $A^c = \emptyset$
- Si $A = \emptyset$ y $U = \mathbb{R}$, entonces $A^c = U$

En muchas situaciones el conjunto U no es descrito de forma explícita, pero se deduce del contexto en el que se está trabajando.

2.5. Producto cartesiano

Para definir el producto cartesiano de dos conjuntos A y B es necesario definir, en primera instancia, el concepto de *par ordenado*.

Definición 8. Dados dos objetos w y z, el **par ordenado** corresponde a la lista ordenada (w, z).

Ejemplos de pares ordenados son: $(2, 3)$, $(*, +)$, $(\delta, -6)$, etc. Es necesario indicar que:

1. Si a y b son objetos diferentes, entonces $(a, b) \neq (b, a)$, de ahí el adjetivo “ordenados”.
2. $(a, b) \neq \{a, b\}$, los pares ordenados se encierran con paréntesis y en ellos sí importa el orden.

Ya definido el concepto de par ordenado, se define el producto cartesiano de dos conjuntos.

Definición 9. Dados dos conjuntos A y B, el **producto cartesiano**, o simplemente, producto de A y B corresponde al conjunto $\{(x, y) : x \in A \wedge y \in B\}$ y se denota por $A \times B$, con lo cual:

$$A \times B = \{(x, y) : x \in A \wedge y \in B\}$$

Ejemplo 8.

- Si $A = \{1, 3, 5\}$ y $B = \{-2, -3\}$, entonces $A \times B = \{(1, -2), (1, -3), (3, -2), (3, -3), (5, -2), (5, -3)\}$
- Si $A = \{x : x^2 = 1 \wedge x \in \mathbb{R}\}$ y $B = \{2\}$, entonces $A \times B = \{(1, 2), (-1, 2)\}$
- Si $A = \mathbb{N}$ y $B = \mathbb{Q}$, entonces $A \times B = \{(n, r) : n \in \mathbb{N} \wedge r \in \mathbb{Q}\}$
- Para todo conjunto A se tiene que $A \times \emptyset = \emptyset$
- Si A es un conjunto, entonces $A \times A = \{(x, y) : x, y \in A\}$, este conjunto también se denota por A^2.

  Dada la definición de producto cartesiano A × B = B × A. Pero más adelante, se establecerá una relación entre estos dos conjuntos.

Por otro lado, el producto cartesiano se puede extender a más conjuntos, por ejemplo, $A \times B \times C = \{(x, y, z) : x \in A, y \in B, z \in C\}$, esta definición tiene sentido si se generaliza la noción de pareja ordenada.

2.6. Potencia de un conjunto

A partir del concepto de subconjunto, es posible definir la siguiente operación.

Definición 10. Dado un conjunto A, el **conjunto potencia** o *conjunto de partes* de A corresponde al $\{B : B \subseteq A\}$ y se denota por $\mathcal{P}(A)$, por lo tanto:

$$\mathcal{P}(A) = \{B : B \subseteq A\}$$

Es decir, el conjunto $\mathcal{P}(A)$ contiene como elementos a todos los subconjuntos del conjunto A.

Ejemplo 9.

- Si $A = \{1, 3, 5\}$, entonces $\mathcal{P}(A) = \{\{1\}, \{3\}, \{5\}, \{1, 3\}, \{1, 5\}, \{3, 5\}, \{1, 3, 5\}, \emptyset\}$
- Si $A = \{1\}$, entonces $\mathcal{P}(A) = \{\emptyset, \{1\}\}$.
- Si $A = \emptyset$, entonces $\mathcal{P}(A) = \{\emptyset\}$
- Si $A = \{x : x^2 = 1 \wedge x \in \mathbb{Z}\}$, entonces $\mathcal{P}(A) = \{\emptyset, \{1\}, \{-1\}, \{-1, 1\}\}$
- Si $A = \{x : x^2 = 1 \wedge x \in \mathbb{N}\}$, entonces $\mathcal{P}(A) = \{\emptyset, \{1\}\}$

Dado que para todo conjunto A se tiene que $\emptyset \subseteq A$ y $A \subseteq A$, entonces $\emptyset$ y A serán siempre elementos de $\mathcal{P}(A)$.

Esta es la última operación básica que se expondrá en esta lectura. El paso siguientes sería definir propiedades y relaciones entre estas, pero antes de ello es necesario presentar técnicas formales para justificar la contenencia entre dos conjuntos o la igualdad de dos mismos.

3. Demostraciones en teoría elemental de conjuntos

Suponga que tiene los conjuntos $A = \{2x : x \in \mathbb{N}\}$ y $B = \{y : y \textbf{ mod} 2 = 0 \wedge y \in \mathbb{N}\}$, ¿cómo justificar de manera formal que estos dos conjuntos son iguales? Y si $A = \{3x : x \in \mathbb{Z}\}$ y $B = \{6x : x \in \mathbb{Z}\}$, ¿cómo justificar que B es un subconjunto de A?

A continuación se expone la forma de argumentar cada uno de estos hechos.

3.1. Demostraciones de contenencia

Si se desea demostrar que un conjunto A está contenido en un conjunto B, es decir, si se desea demostrar que $A \subseteq B$, entonces se debe comprobar que todo elemento del conjunto A pertenece al conjunto B. Si el conjunto A está descrito como una lista de sus elementos, entonces la comprobación es bastante sencilla, es solo observar que cada elemento de A es un elemento de B, por ejemplo, si $A = \{2, 4, 6\}$ y $B = \{0, 2, 4, 6, 8\}$, entonces se puede comprobar que $A \subseteq B$ dado que al revisar los elementos de A se evidencia que todos pertenecen al conjunto B.

Si el conjunto $A = \{E_1 : Q_1\}$ y el conjunto $B = \{E_2 : Q_2\}$, es decir, están descritos por comprensión. Entonces, es necesario aplicar el siguiente esquema de argumentación:

Tomar un elemento arbitrario del conjunto A y demostrar que este elemento es el resultado de la evaluación de E_2 en algún objeto que satisface la condición Q_2. Para ello, debe utilizar que cada elemento de A es el resultado de evaluar la expresión E_1 en un objeto que cumple la condición Q_1.

A continuación se exponen algunos ejemplos de este método de demostración, se recomienda al lector realizar una revisión detallada de cada uno. En cada ejemplo la justificación de cada afirmación se encerrará entre los símbolos "[ ]", por lo tanto, no son parte de la demostración.

Ejemplo 10. Demostrar que el conjunto $A = \{6x : x \in \mathbb{Z}\}$ está contenido en el conjunto $B = \{3x : x \in \mathbb{Z}\}$, es decir, $A \subseteq B$.

Demostración: Si $w \in A$ entonces $w = 6x$ para algún $x \in \mathbb{Z}$ [esto se tiene dado que corresponde a la expresión y condición del conjunto A], luego $w = 3(2x)$ para algún $x \in \mathbb{Z}$ [aquí se usó que $6 = 3(2)$], por lo tanto $w = 3z$ para algún $z \in \mathbb{Z}$, [se definió $z = 2x$], con lo cual w es el resultado de evaluar la expresión del conjunto B en un elemento que satisface la condición de ese conjunto.

Si se eliminan las justificaciones, entonces una versión más limpia de la demostración es:

Si $w \in A$ entonces $w = 6x$ para algún $x \in \mathbb{Z}$, luego $w = 3(2x)$ para algún $x \in \mathbb{Z}$ y, por lo tanto, $w = 3z$ para algún $z \in \mathbb{Z}$, así que $w \in B$ $\diamondsuit$

Ejemplo 11. Si $A = \{2^n : n \geq 1 \wedge n \in \mathbb{N}\}$ y $B = \{x : x \bmod 2 = 0 \wedge x \in \mathbb{Z}\}$, demostrar que $A \subseteq B$

Demostración: si $w \in A$ entonces $w = 2^n$ para algún $n \geq 1$ y $n \in \mathbb{N}$ [esto se tiene dado que es la expresión y condición del conjunto A], luego $w = 2(2^{n-1})$ y $2^{n-1} \geq 1$, [por propiedades de la potenciación y el hecho que $n \geq 1$], por lo tanto $w \bmod 2 = 0$, [esto se debe a que w es un **múltiplo** de 2], con lo cual w es el resultado de evaluar la expresión del conjunto B en un elemento que satisface la condición de ese conjunto.

Si se eliminan las justificaciones entonces una versión más limpia de la demostración es:

Si $w \in A$ entonces $w = 2^n$ para algún $n \geq 1$ y $n \in \mathbb{N}$, luego $w = 2(2^{n-1})$ y $2^{n-1} \geq 1$, por lo tanto, $w \bmod 2 = 0$ así que w satisface la condición del conjunto B.

$\diamondsuit$

Ejemplo 12. Si $A = \{x^2 : 0 \leq x \wedge x \in \mathbb{R}\}$ y $B = \{x^3 : x \in \mathbb{R}\}$, demostrar que $A \subseteq B$

Demostración: si $w \in A$ entonces $w = x^2$ para algún x que satisface la condición: $0 \leq x$ y $x \in \mathbb{R}$. Por lo tanto, $x = \sqrt{w}$. Si se toma $z = x^{2/3}$ se cumple que $z^3 = x^2$, con lo cual $w = z^3$ para algún $z \in \mathbb{R}$, es decir $w \in B$. $\diamondsuit$

3.2. Demostraciones de igualdad

Presentada la forma de demostrar cuando un $A \subseteq B$, se puede describir la estrategia para demostrar cuando $A = B$:

Si se desea argumentar que los conjuntos A y B son iguales entonces es suficiente demostrar que $A \subseteq B$ y $B \subseteq A$.

El siguiente ejemplo, expone esta idea:

Ejemplo 13. Si $A = \{2x + 1 : x \in \mathbb{N}\}$ y $B = \{x : x \bmod 2 = 1 \wedge x \in \mathbb{N}\}$, demostrar que $A = B$.

Demostración: primero se demuestra que $A \subseteq B$:

Si $w \in A$ entonces $w = 2x + 1$ para algún $x \in \mathbb{N}$, por lo tanto $w \bmod 2 = 1$, lo que implica $w \in B$.

Ahora, se demuestra que $B \subseteq A$:

Si $w \in B$ entonces $w \bmod 2 = 1$ y $w \in \mathbb{N}$. Por lo tanto, $w = 2k + 1$ para algún $k \in \mathbb{N}$ lo que implica que $w \in A$.

Como $A \subseteq B$ y $B \subseteq A$ entonces se concluye que $A = B$ $\diamondsuit$

3.3. Propiedades de las operaciones entre conjuntos

A continuación se exponen propiedades de las operaciones entre los conjuntos, cada una de estas se puede demostrar empleando las técnicas descritas anteriormente.

Teorema 1 (Propiedad de las operaciones). Sean A, B, C y U conjuntos tales que $A, B, C \subseteq U$ entonces se cumplen las siguientes propiedades:

1. $(A^c)^c = A$
2. $(A \cup B)^c = A^c \cap B^c$
3. $(A \cap B)^c = A^c \cup B^c$
4. $A \cup B = B \cup A$
5. $A \cap B \subseteq A$ y $A \cap B \subseteq B$
6. $A \cup A^c = U$
7. $A \subseteq A \cup B$ y $B \subseteq A \cup B$
8. $A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C$
9. $A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C$
10. $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$
11. $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$
12. Si $A \subseteq B$ entonces $B^c \subseteq A^c$
13. $A \cup U = U$
14. $A \cap \emptyset = \emptyset$

Algunas de estas propiedades tienen nombres particulares:

- Propiedades (2) y (3) se conocen como leyes de DeMorgan.
- Propiedades (8) y (9) se conocen como leyes asociativas.
- Propiedad (10) y (11) se conocen como leyes distributivas.

Demostración: a modo de ejemplo de las técnicas de demostración, se probarán las propiedades 1 y 10, las demás se dejan como práctica al lector:

Propiedad (1): como es una propiedad que habla de la igualdad de conjuntos, entonces se probará primero que $(A^c)^c \subseteq A$: Si $x \in (A^c)^c$ entonces $x \in U$ y $x \notin A^c$ luego $x \in A$.

Ahora se prueba que $A \subseteq (A^c)^c$: si $x \in A$ entonces $x \notin A^c$ por lo tanto $x \in (A^c)^c$.

Con lo cual, se concluye que $(A^c)^c = A$.

Propiedad (10), de nuevo es una propiedad que habla de la igualdad de conjuntos, entonces primero se prueba que $A \cup (B \cap C) \subseteq (A \cup B) \cap (A \cup C)$:

Si $x \in A \cup (B \cap C)$ entonces $x \in A$ o $x \in (B \cap C)$. Si $x \in A$ entonces $x \in A \cup B$ y $x \in A \cup C$ por lo tanto $x \in (A \cup B) \cap (A \cup C)$. Pero si $x \in (B \cap C)$ entonces $x \in B$ y $x \in C$, luego $x \in (A \cup B)$ y $x \in (A \cup C)$ por lo tanto $x \in (A \cup B) \cap (A \cup C)$.

Ahora se demuestra que $(A \cup B) \cap (A \cup C) \subseteq A \cup (B \cap C)$:

Si $x \in (A \cup B) \cap (A \cup C)$ entonces $x \in (A \cup B)$ y $x \in (A \cup C)$ con lo cual $x \in A$ o $x \in B \cap C$, por lo tanto $x \in A \cup (B \cap C)$. ♢

4. Cardinalidad de conjuntos

Una inquietud bsica sobre un conjunto es: ¿cuntos elementos tiene? Para dar respuesta a este interrogante, de forma general, es necesario desarrollar el concepto de función, el cual se presenta en una próxima Lectura fundamental. Por ahora, se dan algunos conceptos que permiten dar solución al interrogante a una clase especial de conjuntos.

Cuando se analiza un conjunto, se puede establecer (de forma intuitiva) si contiene elementos **infinitos** o no. En el primer caso se dirá que el conjunto es **infinito** y en el segundo se dirá que el conjunto es **finito**. Ejemplos de esta clasificación son:

Ejemplo 14.

Conjunto	Infinito o Finito
$\{x^2 + x : 0 < x \leq 2 \wedge x \in \mathbb{N}\}$	Finito
$\{x^2 + x : 0 < x \leq 2 \wedge x \in \mathbb{R}\}$	Infinito
$\{2x : x \in \mathbb{N}\}$	Infinito
$\{x : x^2 - 3 = 0 \wedge x \in \mathbb{R}\}$	Finito
$\{x : x$ es un número primo $\wedge\, x + 2$ es un número primo$\}$	???

Cuando el conjunto es finito, se puede establecer de forma concreta cuántos elementos tiene. Por lo tanto, se tiene la siguiente definición:

Definición 11 (primera versión)**.** Dado un conjunto finito A, el **cardinal** del conjunto corresponde a la cantidad de elementos de A y se denota por $|A|$.

Ejemplo 15.

- Si $A = \{0, 1, 2, 5\}$ entonces $|A| = 4$
- Si $A = \emptyset$ entonces $|A| = 0$
- Si $A = \{x : x$ es un divisor de $12 \wedge x \in \mathbb{N}\}$ entonces $|A| = 6$
- Si $A = \{\emptyset\}$ entonces $|A| = 1$

Para terminar esta sección se presenta el siguiente teorema que indica cuántos elementos tiene el conjunto potencia de un conjunto finito.

Teorema 2. Si A es un conjunto finito, entonces $|\mathcal{P}(A)| = 2^{|A|}$.

Por ejemplo si $A = \{a, b, c\}$ entonces $|\mathcal{P}(A)| = 2^{|A|} = 2^3 = 8$

5. Ejercicios

Los siguientes ejercicios tienen como objetivo que el estudiante afiance l os conceptos presentados en l a l ectura. No se deben entregar al tutor del módulo.

1. Dados los conjuntos $A = \{-1, 1, 2, -2\}$ y $B = \{0, 2, 4, 6\}$ determine:

   a) $B - A$

   b) $(A^c \cap B^c)^c$, donde $U = \{-2, -1, 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6\}$

   c) $\mathcal{P}(B)$

   d) $A \times B$

2. Sea A un conjunto, se define la siguiente operación: $S(A) = A \cup \{A\}$. Para cada uno de los siguientes conjuntos determine $S(A)$

   a) $A = \{a, b, c, d\}$

   b) $A = \emptyset$

   c) $A = \{\emptyset\}$

3. Con relación al ejercicio anterior, si $A = \emptyset$ entonces ¿cuál es el conjunto $S(S(S(A)))$?

4. Dados dos conjuntos A y B se define la siguiente operación: $A \triangle B := \{x : (x \in A \vee x \in B) \wedge x \notin A \cap B\}$. Determine $A \triangle B$ si $A = \{a, b, c, d\}$ y $B = \{a, c, e, f, g\}$.

5. Demostrar que $A \subseteq A \cup B$

6. Demostrar que $A \triangle B = (A - B) \cup (B - A)$

7. Demostrar que $A \times \emptyset = \emptyset$

8. $A^c \cup A = U$, donde U es el conjunto universal sobre el que se está tomando complemento.

9. En los conjuntos finitos, se tiene el hecho que $|A \times B| = |A| \cdot |B|$. En cada caso determine $|A \times B|$:

   a) Si $A = \{a, b, c, d\}$ y $B = \{a, e, i, o, u\}$

   b) Si $A = \{x : x \text{ es divisior de } 12 \wedge x \in \mathbb{N}\}$ y $B = \{x : x \text{ es divisior de } 7 \wedge x \in \mathbb{N}\}$

   c) Si $A = \{\emptyset\}$ y $B = \{x : x^2 - 4 = 0 \wedge x \in \mathbb{R}\}$.

10. Pregunta de reflexión ¿existen más numéros naturales que números naturales pares? [Buscar en internet sobre el Hotel de Hilbert]

Referencias

[1] Grimaldi, R. (1998) *Matemáticas discreta y combinatoria.* México: Addison-Wesley Iberoamericana.

[2] Hammack, R. (2013) *Book of proof*, second edition, Editor: Richard Hammack.

[3] Rosen, K.H. y Pérez, J.M. (2004) *Matemática discreta y sus aplicaciones*, Madrid, España: McGraw-Hill Interamericana

INFORMACIÓN TÉCNICA

Módulo: Elementos en Teoría de la Computación
Unidad 1: Conjuntos, relaciones y funciones
Escenario 1: Conjuntos y cardinalidad

Autor: Diego Arévalo Ovalle

Asesor Pedagógico: Óscar Mauricio Salazar
Diseñador Gráfico: Diego Arévalo Ovalle
Asistente: Alejandra Morales