Unidad 2 / Escenario 3

Lectura fundamental

La integral y antiderivadas

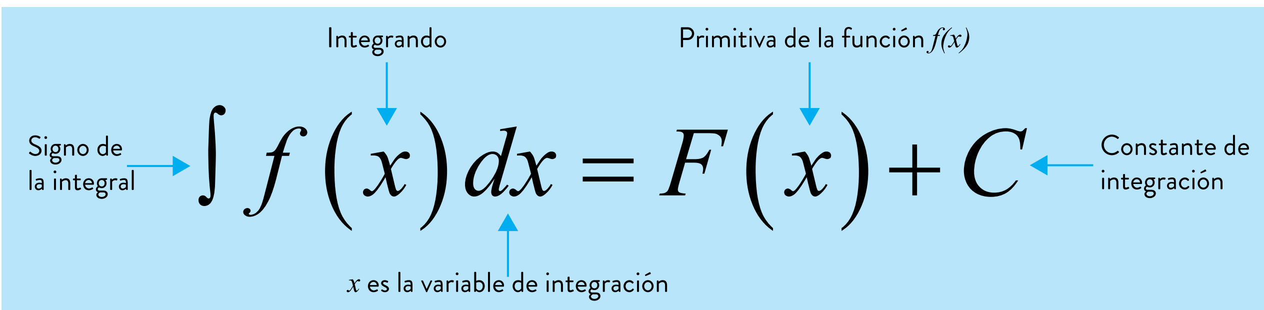
Contenido

Palabras clave: antiderivada, integral, definida, sustitución, partes

La integración y la derivación son procesos inversos, por lo que antes de abordar el estudio de las integrales es importante analizar el concepto de ANTIDERIVADA; posteriormente, se presenta el teorema fundamental del cálculo con el cual se solidifica la relación entre derivada e integral y, finalmente, se abordan los métodos de integración que permiten evaluar integrales de funciones que necesitan algún proceso algebraico para lograrlo.

1. Antiderivadas

Antiderivar consiste en encontrar una función $F'(x)=f(x)$, $F(x)$. $F(x)$ recibe el nombre de primitiva de $f(x)$. Usualmente se busca determinar la antiderivada en general, que para una función $f(x)$ se escribe como $F(x)+C$, donde C una constante. Para denotar la antiderivada de una función, se suele emplear la integral indefinida bajo la escritura de Leibniz, que es:



Esta se lee: "La integral indefinida de la función f de x de x es igual a la función F de x más C".

Figura 1. Integral indefinida
Fuente: elaboración propia

Para entender este concepto, si se recuerdan las derivadas de algunas funciones, se pueden determinar sus integrales o antiderivadas. Revise cuidadosamente los siguientes ejemplos.

Ejemplo 1.

Si se considera la función $f(x)=\frac{1}{x}$, que es la derivada de la función primitiva $F(x)=ln|x|$, se tendría que:

Ejemplo 2. $\int \frac{1}{x}dx = ln|x|+C$

Si se considera que la función primitiva $F(x)=\frac{x^2}{2}+3$ satisface que $F'(x)=x=f(x)$, se tiene:

$$\int x\,dx=\frac{x^2}{2}+3$$

En este ejemplo, si no se recordara una función particular que cumpliera la condición de la antiderivada, sería posible encontrar el valor de $\int x\,dx$, si se tiene presente que integrar es el proceso inverso de derivar. Observe el siguiente cuadro:

Tabla 1. Derivación e integración

FUNCIÓN	PROCESO DE DERIVACIÓN	PROCESO DE INTEGRACIÓN
x^n, con $n\neq -1$	Sustraer $\rightarrow x^{n-1}$	Adicionar $\rightarrow x^{n+1}$
	Multiplicar $\rightarrow n\bullet x^{n-1}$	Dividir $\rightarrow \frac{x^{n+1}}{n+1}$

Fuente: elaboración propia

Al aplicar este proceso, se tiene:

$$\int x\,dx=\frac{x^{1+1}}{1+1}+C=\frac{x^2}{2}+C$$

Así como los casos expuestos, existen otras integrales que se pueden establecer directamente, recordando la derivada de ciertas funciones.

Cómo mejorar...

En el material de apoyo se exponen dichas integrales, por lo que es importante revisarlo para apropiarlas y utilizarlas siempre que sea necesario.

Otro aspecto que facilita la determinación de integrales indefinidas es el uso de las siguientes propiedades:

1. La integral de una constante por una función es igual a la constante por la integral de la función, es decir, $\int k f(x)\,dx = k\int f(x)\,dx$, con k como una constante. Un ejemplo de este caso es:

$$\int \frac{3}{\cos^2(x)}dx = 3\int \frac{1}{\cos^2(x)}dx = 3\int \sec^2(x)\,dx = 3\tan(x) + C$$

   Tenga en cuenta que se hizo uso de una identidad trigonométrica para encontrar la integral.

2. La integral de una suma o resta de funciones es igual a la suma o resta de las integrales de las funciones, es decir, $\int\left(f(x) \pm g(x)\right)dx = \int f(x)\,dx \pm \int g(x)\,dx.$ Un ejemplo que ilustra este caso es:

$$\int\left(e^x - \sin(x) + \frac{1}{1+x^2}\right)dx$$

$$= \int e^x dx - \int \sin(x)dx + \int \frac{1}{1+x^2}dx$$

$$= e^x - (-\cos(x)) + \arctan(x) + C$$

$$= e^x + \cos(x) + \arctan(x) + C$$

Analice lo realizado en las siguientes integrales e identifique tanto las reglas básicas de derivación como las propiedades aplicadas. Tenga en cuenta que en la determinación de las integrales se usan las propiedades de las operaciones básicas aprendidas en la época escolar, así como conocimientos de trigonometría y simplificación de expresiones algebraicas. Recuérdelos para que identifique los procesos expuestos.

Ejemplo 1.

Determine $\int\left(3x^4 - \frac{1}{x^2} + 5x - 3\right)dx$

Solución

$$\int\left(3x^4 - \frac{1}{x^2} + 5x - 3\right)dx = \int 3x^4 dx - \int \frac{1}{x^2}dx + \int 5x dx - \int 3 dx$$

$$= 3\int x^4 dx - \int x^{-2} dx + 5\int x dx - 3\int dx$$

$$= 3\left(\frac{x^5}{5}\right) - \left(\frac{x^{-1}}{-1}\right) + 5\left(\frac{x^2}{2}\right) - 3(x) + C$$

$$= \frac{3}{5}x^5 + \frac{1}{x} + \frac{5}{2}x^2 - 3x + C$$

Ejemplo 2.

Determine $\int \left(\frac{1}{\sqrt{1-w^2}} + sec(w)tan(w) - 2^w\right) dw$

Solución

$$\int \left(\frac{1}{\sqrt{1-w^2}} + \ sec(w)tan(w) \ -2^w\right) dw = \int \frac{1}{\sqrt{1-w^2}}dw + \int sec(w)tan(w)dw \ - \int 2^w dw$$

$$= sin^{-1}(w) + sec(w) - \frac{2^w}{ln2} + C$$

1.1. Ejercicios propuestos para practicar

Determine las siguientes integrales:

1. $\int \left(\frac{5}{x^3} - \frac{7}{x} + \frac{3}{x\sqrt{x^{2-1}}} - 2\right) dx$
2. $\int \left(\frac{2}{x^4} + 5x^4 - 3x + \sqrt{x} - 1\right) dx$
3. $\int \frac{1 - cos2t}{2} dt$
4. $\int \frac{1}{1+t^2} dt$

2. El teorema fundamental del cálculo y la integral definida

Fueron varios siglos los que llevaron a los matemáticos a plantear el llamado **Teorema fundamental del cálculo**, que evidencia la fuerte conexión entre derivación e integración. Este teorema se divide en dos, el primer teorema garantiza que si una función es continua en un intervalo y es derivable, la derivada de su integral es igual a ella misma, en tanto que, el segundo teorema permite encontrar la integral definida de una función utilizando la integral indefinida (para profundizar sobre este tema ingrese al libro de Purcell, Varberg y Rigdon (2007), que aparece como material complementario, páginas 232 a 246).

2.1. Primer teorema fundamental del cálculo

Si se tiene una función $\boldsymbol{f}$ real, integrable sobre un intervalo $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}$ se define la función F sobre ese mismo intervalo como $F(x)=\int_a^x f(t)dt$. Si además, $\boldsymbol{f}$ es continua en un punto $c\in(a,b)$, entonces F es derivable en c y $F'(c)=f(c)$. Dos ejemplos que ilustran este primer teorema son:

1. Si $F(x)=\int_0^x t^2 dt$ entonces $F'(x)=x^2$
2. Si $F(x)=\int_0^{e^{3x}} sin(t)dt$ entonces $F'(x)=sin\left(e^{3x}\right)\bullet e^{3x}\bullet\ 3=3e^{3x}sin\left(e^{3x}\right)$

2.2. Segundo teorema fundamental del cálculo

Si se tiene una función $\boldsymbol{f}$ real, integrable sobre un intervalo a,b, y F una función primitiva de $\boldsymbol{f}$,es decir, cumplen que $F'(x)=f(x)$, entonces, se tiene que: $\int_a^b f(x)dx=F(b)-F(a)$.

Un ejemplo que ilustra este segundo teorema y la forma como se escribe su solución es:

$\int_1^8 \sqrt[3]{x}dx$	Se plantea la integral que se va a determinar
$=\int_1^8 x^{1/3}dx$	Se escribe la raíz como una potencia; recuerde que $\sqrt[n]{x^m}=x^{m/n}$
$=\left(\dfrac{x^{4/3}}{4/3}\right)\Bigg\|_1^8$	Se encuentra la integral indefinida; recuerde que se suma 1 al exponente y se divide por este resultado. Observe la escritura de los límites de integración

$$=\left(\frac{3x^{4/3}}{4}\right)\Bigg|_1^8$$ Al dividir, el denominador de la fracción queda en el numerador

$$=\left(\frac{3(8)^{4/3}}{4}\right)-\left(\frac{3(1)^{4/3}}{4}\right)$$ Se aplica el segundo teorema fundamental del cálculo, $F(8)-F(1)$

$$=12-\frac{3}{4}=\frac{45}{4}$$ Se realizan las operaciones. Recuerde que $(8)^{4/3}=\sqrt[3]{8^4}=\sqrt[3]{8^3\bullet 8}=8\sqrt[3]{8}=16$

Esta parte del teorema corresponde a la integral definida, llamada así por estar definida en un intervalo $[a,b;]$; se denota por $\int_a^b f(x)\,dx$ y representa el área encerrada bajo la curva $f(x)$ entre los puntos a y b; se lee "la integral entre ***a*** y ***b*** de ***f*** de ***x***".

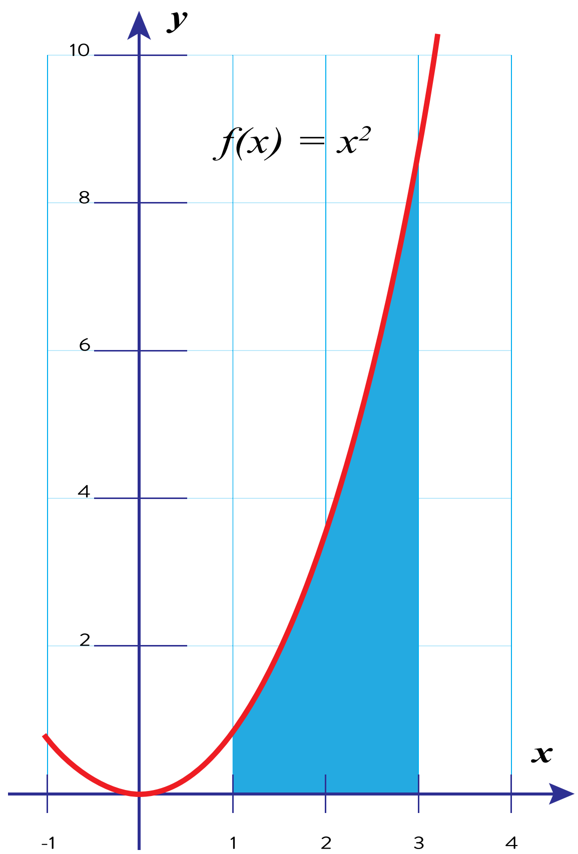


Figura 1. Área bajo la curva $f(x)=x^2$ en el intervalo $[1,3]$

Fuente: elaboración propia

Ejemplo

Determine la integral definida para la curva $f(x)=x^2$ en el intervalo $[1,\ 3]$. Analice ese resultado como el área bajo la curva establecida.

Solución:

$\int_1^3 x^2 dx$	Se escribe como notación de integral, dada la información
$=\left(\frac{x^3}{3}\right)\Big\|_1^3$	Se encuentra la integral indefinida; recuerde que se suma 1 al exponente y se divide por este resultado. Observe la escritura de los límites de integración
$=\left(\frac{3^3}{3}\right)-\left(\frac{1^3}{3}\right)$	Se aplica el segundo teorema fundamental del cálculo, $F(3)-F(1)$
$=\frac{27}{3}-\frac{1}{3}=\frac{26}{3}$	Se realizan las operaciones. En resumen:

$$\int_1^3 x^2 dx=\frac{26}{3}$$

Al analizar los datos dados en la gráfica de la función (figura 1), la parte sombreada de azul representa el área bajo la curva en ese intervalo.

Lo que significa que el área encerrada bajo la curva $f(x)=x^2$ en el intervalo $[1,3]$ es $\frac{26}{3}$ unidades cuadradas (aproximadamente 8,67 unidades cuadradas).

Observe los siguientes ejemplos, identifique la notación de integral definida y la aplicación del segundo teorema fundamental del cálculo.

Ejemplo 1. $\int_2^4 \frac{1}{1+x^2}dx,$ donde x está dado en radianes.

Solución

$\int_2^4 \frac{1}{1+x^2}dx$	Ejercicio propuesto
$=Arctan(x)\Big\|_2^4$	Se encuentra la integral indefinida, recuerde revisar el material de apoyo

$= Arctan(2) - Arctan(4)$ Se aplica el segundo teorema fundamental del cálculo, $F(4) - F(2)$

$= 1,3258 - 1,1071$ Se encuentran los valores de las funciones, recuerde que son radianes

$= 0,2187$ Se realiza la operación correspondiente. En resumen:

$$\int_2^4 \frac{1}{1+x^2}\,dx = 0,2187 \text{ radianes}$$

Ejemplo 2. $\int_0^{\pi/4} cosxdx,$ donde x está dado en radianes

Solución

$\int_0^{\pi/4} cos(x)dx$ Se plantea el ejercicio

$= sin(x)\Big|_0^{\pi/4}$ Se encuentra la integral indefinida, recuerde revisar el material de apoyo

$= sin\,\pi/4 - sin0$ Se aplica el segundo teorema fundamental del cálculo, $F(\pi/4) - F(0)$

$= \frac{\sqrt{2}}{2} - 0$ Se encuentran los valores de las funciones, recuerde que está en radianes

$= \frac{\sqrt{2}}{2}$ Se realiza la operación correspondiente. En resumen:

$$\int_0^{\pi/4} cos(x)dx = \frac{\sqrt{2}}{2} \text{ radianes}$$

Ejemplo 3. $\int_1^4 \left(\frac{3}{\sqrt{x}} + \frac{1}{x} - \frac{7}{x^2} + 2\right)dx$

Solución

$\int_1^4 \left(\frac{3}{\sqrt{x}} + \frac{1}{x} - \frac{7}{x^2} + 2\right)dx$ Se plantea el ejercicio

$= \int_1^4 \frac{3}{\sqrt{x}}\,dx + \int_1^4 \frac{1}{x}\,dx - \int_1^4 \frac{7}{x^2} + \int_1^4 2dx$ Se aplica la propiedad de integral de una suma

$= 3\int_1^4 x^{-1/2}dx + \int_1^4 \frac{1}{x}\,dx - 7\int_1^4 x^{-2}dx + 2\int_1^4 dx$ Se extraen las constantes de cada integral

$$=3\left(2x^{1/2}\right)\Big|_1^4+ln|x|\Big|_1^4-7\left(\frac{x^{-1}}{-1}\right)\Big|_1^4+2x\Big|_1^4$$ Se encuentra la integral indefinida en cada caso

$$=3\left(2\sqrt{4}-2\sqrt{1}\right)+ln|4|-ln|1|+7\left(\frac{1}{4}-\frac{1}{1}\right)+2(4)-2(1)$$ Se aplica el teorema fundamental

$$=3(2)+ln|4|+7\left(-\frac{3}{4}\right)+8-2\,.$$ Se realizan las operaciones correspondientes

$$=12-\frac{21}{4}+ln|4|$$ Se opera y simplifica. En resumen:

$$\int_1^4\left(\frac{3}{\sqrt{x}}+\frac{1}{x}-\frac{7}{x^2}+2\right)dx=\frac{27}{4}+ln|4|$$

2.3. Ejercicios propuestos para practicar

2.3.1. Evalúe las siguientes integrales:

1. $\int_1^4\left(3x+\frac{5}{\sqrt{x}}-\sqrt{2}\right)dx$
2. $\int_{-3}^3\frac{1}{1+x^2}dx$
3. $\int_0^{\pi/2}\left(sinx-cosx+\frac{1}{cos^2x}\right)dx$

2.3.2. Encuentre el área bajo la curva $f(x)=\sqrt{x}$ en el intervalo $[1,4]$

Para resolver integrales que no son directas existen métodos que permiten determinarlas, en el caso de ser integrales indefinidas, o calcularlas o evaluarlas, en caso de ser integrales definidas. Nuevamente la invitación es que hagan uso del material complementario, el libro *Cálculo* (Purcell, Varberg y Rigdon, 2007), capítulo 7, p. 183.

3. Métodos de integración

3.1. Método de integración por sustitución

El método de sustitución consiste en identificar la función, integrando para reemplazarla o sustituirla por una variable cuya derivada sea el diferencial de la integral dada. Con la sustitución que se establezca se calcula la nueva integral, que, por lo general, es más sencilla de determinar. A continuación se expondrán cinco ejemplos para aclarar la idea.

Ejemplo 1. $\int x\left(3x^2+1\right)dx$

Antes de dar solución, observe la siguiente tabla en donde se analizan las posibles opciones de sustitución:

Tabla 2. Opciones de sustitución

Integral	Opciones de función integrando	Opciones correspondientes de diferencial	Sustitución de la función en una nueva variable	Diferencial de una variable u	Comparación de los diferenciales correspondientes y el diferencial de la variable u		Identificación de la alta similitud o coincidencia entre los diferenciales
$\int x(3x^2+1)dx$	$x(3x^2+1)$	dx	$u=x(3x^2+1)$	$du=[(3x^2+1)+x(6x)]dx$ $du=[3x^2+1+6x^2]dx$ $du=[9x^2+1]dx$	dx	$du=[9x^2+1]dx$	*Solo el dx - Poca similitud*
	x	$(3x^2+1)dx$	$u=x$	$du=dx$	$(3x^2+1)\ dx$	$du=dx$	*Solo el dx - Poca similitud*
	$(3x^2+1)$	xdx	$u=(3x^2+1)$	$du=6xdx$	xdx	$du=6xdx$	*En ambos diferenciales el xdx - Alta similitud*

Fuente: elaboración propia

Lo anterior indica que la sustitución con mayor similitud es la última, es decir, si se hace $u=3x^2+1$, entonces, $\frac{du}{dx}=6x,$ lo que significa que $du=6xdx$, pero al intentar sustituir en la integral al diferencial le hace falta un 6, por lo que es necesario multiplicar y dividir por ese 6 antes de sustituir, es decir:

$\int x\left(3x^2+1\right)dx=\int\frac{1}{6}\bullet 6\bullet x\left(3x^2+1\right)dx$ Recuerde que $\frac{1}{6}\bullet 6=1$ por lo que no afecta el enunciado

$=\frac{1}{6}\int 6x\left(3x^2+1\right)dx$ Se extrae la constante de la integral

$=\frac{1}{6}\int\left(3x^2+1\right)6xdx$ Se asocian el integrando y el diferencial, según el esquema

$=\frac{1}{6}\int udu$	Se hace la sustitución correspondiente
$=\frac{1}{6}\left(\frac{u^2}{2}\right)+C=\frac{1}{12}u^2+C$	Se integra con respecto a u
$=\frac{1}{12}\left(3x^2+1\right)^2+C$	Se sustituye el valor de u por $3x^2+1$. En resumen:

$$\int x\left(3x^2+1\right)dx=\frac{1}{12}\left(3x^2+1\right)^2+C$$

Muchas veces es un poco difícil visualizar que una parte del integrando corresponde a la diferencial de la función, por lo que este método se puede aplicar despejando de la derivada la diferencial conocida, sustituyendo y luego simplificando, hasta obtener una función con la nueva variable; es decir, si se hace $u=3x^2+1$, entonces, $\frac{du}{dx}=6x$, al despejar dx, se tiene que, $\frac{du}{6x}=dx$, por lo que:

$\int x\left(3x^2+1\right)dx=\int x\left(u\right)\frac{du}{6x}$	Se sustituyó el valor de $3x^2+1$ por u y dx por $\frac{du}{6x}$.
$=\int \frac{u}{6}du$	Se simplificó la x
$=\frac{1}{6}\int udu$	y Se extrae la constante de la integral

Observe que se llegó a la misma integral que se obtuvo anteriormente usando otro proceso. De aquí en adelante, se va a realizar el proceso de sustitución mediante el último procedimiento.

Ejemplo 2. $\int \frac{2x+1}{x^2+x-3}dx$

Se sugiere que elabore un esquema como el que se presentó en el ejemplo 1, que le permita determinar la sustitución con más alta similitud. En este caso, se debe llegar a que:

Sea $u=x^2+x-3,$	Se propone ese cambio de variable
$\frac{du}{dx}=2x+1,$	Se deriva la función u con respecto a x

$dx = \frac{du}{2x+1}$ Se despeja dx

$\int \frac{2x+1}{x^2+x-3} dx = \int \frac{2x+1}{u}\left(\frac{du}{2x+1}\right)$ Se sustituyen u y dx en la integral dada

$= \int \frac{du}{u}$ Se simplifica $2x+1$

$= ln|u| + C$ Se integra con respecto a u

$= ln|x^2+x-3| + C$ Se sustituye el valor de u por x^2+x-3. En resumen:

$$\int \frac{2x+1}{x^2+x-3} dx = ln|x^2+x-3| + C$$

Ejemplo 3. $\int \frac{lnx}{x} dx$

Se sugiere que elabore un esquema como el que se presentó en el ejemplo 1, que le permita determinar la sustitución con más alta similitud. En este caso, se debe llegar a:

Sea $u = lnx$ Se propone ese cambio de variable

$\frac{du}{dx} = \frac{1}{x}$ Se deriva la función u con respecto a x

$dx = xdu$ Se despeja dx

$\int \frac{lnx}{x} dx = \int \frac{u}{x} xdu$ Se sustituyen u y dx en la integral dada

$= \int udu$ Se simplifica x

$= \frac{u^2}{2} + C$ Se integra con respecto a u

$= \frac{(lnx)^2}{2} + C$ Se sustituye el valor de u por lnx. En resumen:

$$\int \frac{lnx}{x} dx = \frac{(lnx)^2}{2} + C$$

Ejemplo 4. $\int \frac{x^3 dx}{\sqrt{1-x^4}}$

Sea $u = 1 - x^4$	Se propone ese cambio de variable
$\frac{du}{dx} = -4x^3$	Se deriva la función u con respecto a x
$dx = \frac{du}{-4x^3}$	Se despeja dx
$\int \frac{x^3 dx}{\sqrt{1-x^4}} = \int \frac{x^3}{\sqrt{u}} \left(\frac{du}{-4x^3} \right)$	Se sustituyen u y dx en la integral dada
$= -\frac{1}{4} \int \frac{du}{u^{1/2}}$	Se simplifica x^3 y se extrae la constante de la integral
$= -\frac{1}{4} \int u^{-1/2}\, du$	Se escribe la raíz como una potencia y se deja en el numerador
$= -\frac{1}{4} \left(\frac{2u^{1/2}}{1} \right) + C$	Se integra con respecto a u y se hace la división resultante
$= -\frac{1}{2} \sqrt{u} + C$	Se escribe la potencia como raíz
$= -\frac{1}{2} \sqrt{1-x^4} + C$	Se sustituye el valor de u por $1 - x^4$. En resumen:

$$\int \frac{x^3 dx}{\sqrt{1-x^4}} = -\frac{1}{2} \sqrt{1-x^4} + C$$

Ejemplo 5. $\int \frac{x}{\sqrt[3]{1-3x}} dx$

Sea $u^3 = 1 - 3x$	Se propone ese cambio de variable, donde $x = \frac{1-u^3}{3}$
$3u^2 \frac{du}{dx} = -3$	Se deriva la función u con respecto a x
$dx = -u^2 du$	Se despeja dx
$\int \frac{x}{\sqrt[3]{1-3x}} dx = \int \frac{\frac{1-u^3}{3}}{\sqrt[3]{u^3}} \left(-u^2 du \right)$	Se sustituyen u, x y dx en la integral

$=\int \frac{1-u^3}{3u}\left(-u^2du\right)$ Se realiza la división indicada

$=-\frac{1}{3}\int\left(u-u^4\right)du$ Se realiza la multiplicación

$=-\frac{1}{3}\left(\frac{u^2}{2}-\frac{u^5}{5}\right)+C$ Se integra con respecto a u

$=-\frac{1}{6}\sqrt[3]{\left(1-3x\right)^2}+\frac{1}{15}\sqrt[3]{\left(1-3x\right)^5}+C$ Se sustituye el valor de u por $\sqrt[3]{1-3x}$. En resumen:

$$\int\frac{x}{\sqrt[3]{1-3x}}dx=-\frac{1}{6}\sqrt[3]{\left(1-3x\right)^2}+\frac{1}{15}\sqrt[3]{\left(1-3x\right)^5}+C$$

Ejemplo 6. $\int_0^{\pi/6}\left(1-cos3t\right)sin3tdt$

Cuando la integral es definida y se hace cambio de variable, los límites de integración también cambian. Es posible evaluar la integral sin alterar los límites. A continuación, se evalúa la integral por ambos métodos:

MÉTODO 1. Sin cambiar los límites de integración

Sea $u=1-cos(3t)$ Se propone ese cambio de variable

$\frac{du}{dt}=3sin(3t)$ Se deriva la función u con respecto a t

$dt=\frac{du}{3sin(3t)}$ Se despeja dt

$(1 - cos(3t))\ sin(3t)dt=\int(u)sin(3t)\ \frac{du}{3sin(3t)}$ Se sustituyen u y dt en la integral indefinida, no hay límites de integración

$=\frac{1}{3}\int udu$ Se simplifica $sin(3t)$

$=\frac{1}{3}\left(\frac{u^2}{2}\right)$ Se integra con respecto a u

$$=\frac{1}{6}(1-cos(3t))^2\Big|_0^{\pi/6}$$ Se sustituye el valor de u por $1-cos3t$. Se colocan los límites de integración porque están dados en función de t

$$=\frac{1}{6}\left(1-cos3\left(\pi/6\right)\right)^2-\frac{1}{6}\left(1-cos3\left(0\right)\right)^2$$ Se aplica el teorema fundamental del cálculo

$$=\frac{1}{6}\left(1-cos\left(\pi/2\right)\right)^2-\frac{1}{6}\left(1-cos\left(0\right)\right)^2$$ Se realizan operaciones

$$=\frac{1}{6}(1)^2=\frac{1}{6}$$ Se halla el valor de las funciones trigonométricas. En resumen:

$$\int_0^{\pi/6}(1-cos(3t))\ sin(3t)dt=\frac{1}{6}$$

MÉTODO 2. Cambiando los límites de integración

Sea $u=1-cos(3t)$ Se propone ese cambio de variable

$$\frac{du}{dt}=3sin(3t)$$ Se deriva la función u con respecto a t

$$dt=\frac{du}{3sin(3t)}$$ Se despeja dt

$$u=1-cos3\left(0\right)=0$$ En la sustitución se encuentra el valor de u cuando $t=0$

$$u=1-cos3\left(\pi/6\right)=1-cos\left(\pi/2\right)=1$$ En la sustitución se encuentra el valor de u cuando $t=\pi/6$

$$\int_0^{\pi/6}(1-cos(3t))\ sin(3t)dt=\int_0^1(u)\ sin(3t)\ \frac{du}{3sin(3t)}$$ Se sustituyen u,dt y los límites de integración

$$=\int_0^1\left(u\right)du$$ Se simplifica $sin(3t)$

$$=\frac{1}{3}\left(\frac{u^2}{2}\right)\Big|_0^1$$ Se integra con respecto a u

$$=\frac{1}{3}\left(\frac{1^2}{2}\right)-\frac{1}{3}\left(\frac{0^2}{2}\right)=\frac{1}{6}$$ Se aplica el teorema fundamental con respecto a u

Observe que llegamos al mismo resultado.

3.1.1. Ejercicios propuestos para practicar

Evalúe las siguientes integrales:

1. $\int \sin(3x)dx$
2. $\int \frac{4}{3x+2}dx$
3. $\int e^{5x}dx$
4. $\int \frac{1}{1-3x^2}dx$
5. $\int \sqrt{3x+2}dx$
6. $\int_{\pi}^{3\pi/2} cot^5\left(\frac{\theta}{6}\right)sec^2\left(\frac{\theta}{6}\right)d\theta$

3.2. Método de integración por partes

En el proceso de derivación existen las derivadas de los productos de funciones; usualmente, las integrales que provienen de un producto se determinan o calculan por medio del método de integración por partes.

Si se tienen dos funciones u y v derivables, la fórmula de integración por partes es:

$$\int u \bullet dv = u \bullet v - \int v \bullet du$$

Se aclara que la elección de las funciones u y v debe ser tal, que la nueva integral sea más sencilla de determinar o calcular que la original.

A continuación, se resuelven cinco ejemplos que permiten hacer uso de esa fórmula:

Ejemplo 1. $\int ln(x)dx$

Como la idea es escribir toda la integral de la forma $\int u \bullet dv$, entonces:

Sea $u = lnx$, por lo que $du = \frac{1}{x}dx$

Sea $dv = dx,$ por lo que $v = \int dx = x$

Se sustituye según la fórmula de integración por partes:

$\int ln(x)dx = xln(x) - \int x\left(\frac{1}{x}dx\right)$

$= xln(x) - \int dx$ Se simplifica la x

$= xln(x) - x + C$ Se evalúa la nueva integral. En resumen:

$$\int ln(x)dx = xln(x) - x + C$$

Ejemplo 2. $\int x^2 e^x dx$

Como la idea es escribir toda la integral de la forma $\int u \bullet dv$, entonces:

Sea $u = x^2$ por lo que $du = 2xdx$

Sea $dv = e^x dx$ por lo que $v = \int e^x dx = e^x$

Se sustituye según la fórmula de la integración por partes:

$\int x^2 e^x dx = x^2 e^x - \int e^x (2xdx)$

$= x^2 e^x - 2\int xe^x dx$ Se realizan las operaciones y se extrae la constante

Se va a encontrar la nueva integral $\int xe^x dx,$ que es más sencilla que la original. Nuevamente se aplicará el método de integración por partes, así:

Sea $u = x,$ por lo que $du = dx$

Sea $dv = e^x dx$, por lo que $v = \int e^x dx = e^x$

Se sustituye según la fórmula de integración por partes:

$\int xe^x dx = xe^x - \int e^x dx$

$= xe^x - e^x$ Se evalúa la nueva integral

Finalmente, al sustituir este resultado en la integral propuesta, se tiene:

$\int x^2 e^x dx = x^2 e^x - 2(xe^x - e^x) + C$ Se sustituyó la integral por su valor. En resumen:

$$\int x^2 e^x dx = x^2 e^x - 2xe^x + 2e^x + C$$

Ejemplo 3. $\int \frac{ln(x)}{x^3}dx$

Sea $u = lnx$ por lo que $du = \frac{1}{x}dx$

Sea $dv = \frac{1}{x^3}dx$, por lo que $v = \int \frac{1}{x^3}dx = \int (x)^{-3}dx = \frac{x^{-2}}{-2} = -\frac{1}{2x^2}$

Se sustituye según la fórmula de integración por partes:

$$\int \frac{ln(x)}{x^3}dx = -\frac{1}{2x^2}ln(x) - \int -\frac{1}{2x^2} \bullet \frac{1}{x}\ dx$$

$= -\frac{1}{2x^2}\ ln(x) + \frac{1}{2}\int \frac{1}{x^3}dx$ Se realizan las operaciones indicadas y se extrae la constante

$= -\frac{1}{2x^2}\ ln(x) + \frac{1}{2}\left(-\frac{1}{2x^2}\right) + C$ Se evalúa la nueva integral. En resumen:

$$\int \frac{ln(x)}{x^3}dx = -\frac{1}{2x^2}ln(x) - \frac{1}{4x^2} + C$$

Ejemplo 4. $\int ln^2 xd(x)$

Sea $u = ln^2(x)$ por lo que $du = 2ln(x) \bullet \frac{1}{x}dx = \frac{2ln(x)}{x}\ dx$

Sea $dv = dx$ por lo que $v = x$

Se sustituye según la fórmula de integración por partes:

$$\int ln^2 xdx = xln^2 x - \int x \bullet \frac{2lnx}{x}dx$$

$= xln^2(x) - 2\int ln(x)dx$ Se simplifica la x y se extrae la constante

$= xln^2(x) - 2\left(xln(x) - x\right) + C$ Se hace uso del resultado obtenido en el ejemplo 1. En resumen:

$$\int ln^2(x)dx = xln^2(x) - 2xln(x) + 2x + C$$

Ejemplo 5. $\int \frac{z^7}{\left(4 - z^4\right)^2}dz$

En este caso se va a reescribir la integral, así: $\int \frac{z^3 \bullet z^4}{\left(4 - z^4\right)^2}dz$

Sea $u = z^4$ por lo que $du = 4z^3dz$

Sea $dv = \frac{z^3}{\left(4-z^4\right)^2}dz$ por lo que $v = \int \frac{z^3}{\left(4-z^4\right)^2}dz$

Para encontrar el valor de v se debe encontrar el valor de $\int \frac{z^3}{\left(4-z^4\right)^2}dz.$ Para establecer esta integral se va a usar el método de sustitución.

Sea $t = 4 - z^4$ entonces $dt = -4z^3dz,$ luego, $dz = \frac{dt}{-4z^3}$, por lo que la integral, al sustituir, queda:

$$v = \int \frac{z^3}{\left(4-z^4\right)^2}dz = \int \frac{z^3}{t^2} \bullet \frac{dt}{-4z^3} = -\frac{1}{4}\int \frac{dt}{t^2} = -\frac{1}{4}\int t^{-2}dt = -\frac{1}{4}\left(\frac{t^{-1}}{-1}\right) = \frac{1}{4t}$$

Al reemplazar el valor de t, se tiene que:

$$v = \frac{1}{4\left(4-z^4\right)}$$

Como ya se tienen los valores de u, v, du y dv, entonces se va a utilizar el método de integración por partes para encontrar la integral propuesta en el ejercicio, así:

$$\int \frac{z^7}{\left(4-z^4\right)^2}dz = z^4 \bullet \frac{1}{4\left(4-z^4\right)} - \int \frac{1}{4\left(4-z^4\right)} \bullet 4z^3dz$$

$$\int \frac{z^7}{\left(4-z^4\right)^2}dz = \frac{z^4}{4\left(4-z^4\right)} - \int \frac{z^3}{\left(4-z^4\right)}dz$$ Se opera y simplifica

Para encontrar el valor de esa nueva integral, nuevamente se va a utilizar el método de sustitución, así:

Sea $r = 4 - z^4$ por lo que $dr = -4z^3dz$, es decir, $dz = \frac{dr}{-4z^3}$, al sustituir, queda:

$$\int \frac{z^3}{\left(4-z^4\right)}dz = \int \frac{z^3}{r}\left(\frac{dr}{-4z^3}\right) = -\frac{1}{4}\int \frac{dr}{r} = -\frac{1}{4}lnr = -\frac{1}{4}ln\left(4-z^4\right)$$

Por lo que al reemplazar, se concluye que:

$$\int \frac{z^7}{\left(4-z^4\right)^2}dz = \frac{z^4}{4\left(4-z^4\right)} + \frac{1}{4}ln\left(4-z^4\right) + C$$

3.2.1. Ejercicios propuestos para practicar

Determine las siguientes integrales:

1. $\int \sqrt{x} lnx dx$
2. $\int \frac{ln(lnx)}{x} dx$
3. $\int (7 + x - 3x^2) e^{-x} dx$
4. $\int e^{\sqrt{x}} dx$
5. $\int x^7 lnx dx$

3.3. Integrales de funciones trigonométricas, hiperbólicas e inversas

En esta sección se abordarán integrales que involucran las funciones trigonométricas, hiperbólicas e inversas y los métodos de sustitución y partes.

> **Cómo mejorar...**
>
> En el material de apoyo encuentra las antiderivadas de las funciones trigonométricas e hiperbólicas, resultado de lo obtenido en el proceso de derivación, es decir, allí tienen las integrales básicas de este tipo de funciones.

Nuevamente, se realizarán siete ejemplos en donde se explica paso a paso su solución.

Ejemplo 1. $\int secx dx$

Recuerde que si una expresión se multiplica y divide por un mismo número esa fracción no se altera; siguiendo ese principio, se tiene que:

$$\int secxdx = \int secxdx\left(\frac{secx+tanx}{secx+tanx}\right)dx$$ Se multiplica y divide por $secx+tanx$, no se altera la fracción

$$= \int \frac{sec^2x + secxtanx}{secx+tanx}dx$$ Se realizan las operaciones indicadas

Por el método de sustitución:

Sea $u = secx + tanx$ Se propone ese cambio de variable

$$\frac{du}{dx} = secxtanx + sec^2x$$ Se deriva u con respecto a x

$$dx = \frac{du}{secxtanx + sec^2x}$$ Se despeja dx

Al sustituir u y dx en la integral, se tiene:

$$\int \frac{sec^2x + secxtanx}{secx+tanx}dx = \int \frac{sec^2x+secxtanx}{u} \bullet \frac{du}{secxtanx+sec^2x}$$ Se sustituyen u y dx en la integral

$$= \int \frac{du}{u}$$ Se simplifica $sec^2x + secxtanx$

$$= lnu + C$$ Se integra con respecto a u

$$= ln|secx+tanx| + C$$ Se sustituye u por $secx + tanx$. En resumen:

$$\int secxdx = ln|secx+tanx| + C$$

Ejemplo 2. $\int cos^2xdx$

$$\int cos^2xdx = \int \frac{cos2x+1}{2}dx$$ Se usa la identidad trigonométrica $cos^2x = \frac{cos2x+1}{2}$

$$= \int \left(\frac{cos2x}{2} + \frac{1}{2}\right)dx$$ Se separa el común denominador

$$= \int \frac{cos2x}{2}dx + \int \frac{1}{2}dx$$ Se aplica la propiedad de adición en una integral

La primera integral $\int \frac{cos2x}{2}dx$ se halla por sustitución así:

Sea $u = 2x$ lo que implica que $du = 2dx$, luego $dx = \frac{du}{2}$, al sustituir se tiene:

$$\int \frac{cos2x}{2}dx = \frac{1}{2}\int cosu \bullet \frac{du}{2} = \frac{1}{4}\int cosudu = \frac{1}{4}sinu + C$$

Al sustituir el valor de u se tiene que:

$$\int \frac{cos2x}{2}dx = \frac{1}{4}sin2x + C$$

La segunda integral $\int \frac{1}{2}dx$ se halla directamente, así:

$$\int \frac{1}{2}dx = \frac{1}{2}\int dx = \frac{1}{2}x$$

Por lo que la integral propuesta tiene como solución:

$$\int cos^2 xdx = \int \frac{cos2x}{2}dx + \int \frac{1}{2}dx$$

$$\int cos^2 xdx = \frac{1}{4}sin2x + \frac{1}{2}x + C$$

Ejemplo 3. $\int arctan\left(\frac{1}{t}\right)dt$

Para encontrar esta integral se va a utilizar el método de integración por partes.

Sea $u = arctan\left(\frac{1}{t}\right)$ por lo que $du = \frac{1}{1+\left(\frac{1}{t}\right)^2} \bullet \left(-\frac{1}{t^2}\right)dt$

$$du = \frac{1}{1+\frac{1}{t^2}} \bullet \left(-\frac{1}{t^2}\right)dt$$ Se resuelve el cuadrado

$$du = \frac{1}{\frac{t^2+1}{t^2}} \bullet \left(-\frac{1}{t^2}\right)dt$$ Se realiza la suma del denominador

$$du = \frac{t^2}{t^2+1} \bullet \left(-\frac{1}{t^2}\right)dt$$ Se realiza la división

$$du = \frac{-1}{t^2+1}dt$$ Se simplifica t^2

Sea $dv = dt$ por lo que $v = t$.

Al aplicar la fórmula de integración por partes se tiene que:

$$\int arctan\left(\frac{1}{t}\right)dt = t \bullet arctan\left(\frac{1}{t}\right) - \int t \bullet \frac{-1}{t^2+1}dt$$

$$= t \bullet arctan\left(\frac{1}{t}\right) + \int \frac{t}{t^2+1}dt$$ Se realizan las operaciones indicadas

La nueva integral $\int \frac{t}{t^2+1}dt$ se encuentra utilizando el método de sustitución, así:

Sea $u = t^2 + 1$ Se propone ese cambio de variable

$du = 2tdt$ Se deriva u con respecto a t

$\frac{du}{2t} = dt$ Se despeja dt

$\int \frac{t}{t^2+1}dt = \int \frac{t}{u} \bullet \frac{du}{2t}$ Se sustituye u y dt en la integral

$= \frac{1}{2}\int \frac{du}{u}$ Se simplifica t y se extrae la constante

$= \frac{1}{2}lnu + C$ Se integra con respecto a u

$= \frac{1}{2}ln\left(t^2+1\right) + C$ Se sustituye u por t^2+1. En resumen:

$$\int arctan\left(\frac{1}{t}\right)dt = t \bullet arctan\left(\frac{1}{t}\right) + \frac{1}{2}ln\left(t^2+1\right) + C$$

Ejemplo 4. $\int e^x sinxdx$

Sea $u = e^x$, por lo que $du = e^x dx$

Sea $dv = sinxdx$ por lo que $v = \int sinxdx = -cosx$ (ver MATERIAL DE APOYO)

Aplicando el método de integración por partes se tiene:

$$\int e^x sinxdx = -e^x cosx - \int -cosxe^x dx$$

$$= -e^x cosx + \int cosxe^x dx$$ Se realizan multiplicación de signos

La nueva integral $\int cosxe^x dx$ se va a encontrar aplicando otra vez el método de integración por partes:

Sea $u = e^x$ por lo que $du = e^x dx$

Sea $dv = cosxdx,$ por lo que $v = \int cosxdx = sinx$ (ver MATERIAL DE APOYO)

Aplicando el método de integración por partes se obtiene:

$$\int cosxe^x dx = e^x sinx - \int e^x sinxdx$$

Al sustituir este resultado en la integral original queda:

$$\int e^x sinxdx = -e^x cosx + e^x sinx - \int e^x sinxdx$$

Observe que la nueva integral es la misma que se quiere solucionar; luego se va a pasar la integral del lado derecho al lado izquierdo:

$$\int e^x sinxdx + \int e^x sinxdx = -e^x cosx + e^x sinx$$

Es decir:

$$2\int e^x sinxdx = -e^x cosx + e^x sinx$$

Luego:

$$\int e^x sinxdx = \frac{1}{2}\left(-e^x cosx + e^x sinx\right) + C$$

Estas integrales se hallan por repetición de la integral que se quiere hallar.

Ejemplo 5. $\int sec^3 xdx$

$\int sec^3 xdx = \int sec^2 xsecxdx$	Se reescribe $sec^3 x \text{ como } sec^2 xsecx$
$= \int \left(tan^2 x + 1\right) secxdx$	Se hace uso de la identidad $tan^2 x + 1 = sec^2 x$
$= \int secxtan^2 xdx + \int secxdx$	Se destruyen paréntesis y se separan las integrales
$= \int secxtan^2 xdx + ln\lvert secx + tanx\rvert$	Se toma la solución del ejemplo 1

La integral $\int secxtan^2xdx = \int secxtanxtanxdx$ se halla por partes, así:

Sea $u = tanx$ por lo que $du = sec^2xdx$

Sea $dv = secxtanxdx$ por lo que $v = \int secxtanxdx = secx$

Al aplicar la fórmula de integración por partes:

$$\int secxtan^2xdx = secxtanx - \int secx \bullet sec^2xdx = secxtanx - \int sec^3xdx$$

Al sustituir en la integral dada en el ejercicio, se tiene que:

$$\int sec^3xdx = secxtanx - \int sec^3xdx + ln|secx + tanx|$$

Como la integral se repite, al igual que el ejemplo anterior, se deja la integral al mismo lado, es decir:

$$2\int sec^3xdx = secxtanx + ln|secx + tanx|$$

Luego, la solución es:

$$\int sec^3xdx = \frac{1}{2}\left(secxtanx + ln|secx + tanx|\right) + C$$

Ejemplo 6. $\int \frac{a^{tanx}}{cos^2x}dx$

Sea $u = tanx$	Se propone ese cambio de variable
$du = sec^2xdx$	Se deriva u con respecto a x
$du = \frac{1}{cos^2x}dx$	Se hace uso de la identidad $sec^2x = \frac{1}{cos^2x}$
$dx = cos^2xdu$	Se despeja el diferencial dx
$\int \frac{a^{tanx}}{cos^2x}dx = \int \frac{a^u}{cos^2x} \bullet cos^2xdu$	Se sustituye u y dx en la integral
$= \int a^u du$	Se simplifica cos^2x
$= \frac{a^u}{lna} + C$	Se integra con respecto a u
$= \frac{a^{tanx}}{lna} + C$	Se sustituye u por $tanx$. En resumen:

$$\int \frac{a^{tanx}}{cos^2 x}dx = \frac{a^{tanx}}{lna} + C$$

Ejemplo 7. $\int xcothx^2 ln\left(senhx^2\right)dx$

Sea $u = ln\left(sinhx^2\right)$	Se propone ese cambio de variable
$du = \frac{1}{sinhx^2} \bullet coshx^2 \quad 2x \quad dx$	Se deriva u con respecto a x
$du = \frac{coshx^2}{sinhx^2}2xdx$	Se realiza la multiplicación indicada
$du = cothx^2 \bullet 2xdx$	Se hace uso de la identidad $\frac{coshx^2}{sinhx^2} = cothx^2$
$dx = \frac{du}{2xcothx^2}$	Se despeja el diferencial dx
$\int xcothx^2 ln\left(senhx^2\right)dx = \int xcothx^2 \bullet u \bullet \frac{du}{2xcothx^2}$	Se sustituye u y dx en la integral
$= \frac{1}{2}\int udu$	Se simplifica $xcothx^2$ y se extrae la constante
$= \frac{1}{2}\left(\frac{u^2}{2}\right) + C$	Se integra con respecto a u
$= \frac{1}{4}u^2 + C$	Se realiza la multiplicación indicada
$= \frac{1}{4}ln^2\left(sinhx^2\right) + C$	Se sustituye u por $ln\left(sinhx^2\right)$. En resumen:

$$\int xcothx^2 ln\left(senhx^2\right)dx = \frac{1}{4}ln^2\left(sinhx^2\right) + C$$

3.3.1. Ejercicios propuestos para practicar

Encuentre las siguientes integrales:

1. $\int x\cosh\left(\pi x^2 + 5\right)dx$
2. $\int sin^2 xdx$
3. $\int e^{5x} cosxdx$
4. $\int arcsinxdx$
5. $\int 2^x sinxdx$

Referencias

Purcell, E. J., Varberg, D. y Rigdon, S. (2007). Cálculo. México: Pearson Educación.

INFORMACIÓN TÉCNICA

FACULTAD DE
INGENIERÍA, DISEÑO
E INNOVACIÓN

Módulo: Cálculo II

Unidad 2: La integral definida y método de integración

Escenario 3: Concepto de la integral y algunos métodos de integración

Autor: Martha Helena Zambrano Valentín

Asesor Pedagógico: Jeiner Velandia

Diseñador Gráfico: Carlos Montoya

Asistente: Ginna Paola Quiroga