Unidad 3 / Escenario 5

Lectura fundamental

Formas indeterminadas e integrales impropias

Contenido

Palabras clave: convergencia, divergencia, integración, infinito, integral impropia.

El francés Guillaume François Antoine de L'Hôpital, hacia el año 1696, publicó el primer libro de cálculo diferencial en el que incluyó reglas de derivación que aprendió de su maestro Johann Bernoulli. Dentro de esas reglas aparece una, llamada Regla de L'Hôpital, relacionada con el cálculo de límites de funciones racionales utilizando derivadas cuando esos límites cumplen ciertas condiciones de indeterminación. En esta lectura se aborda el estudio de esta regla y la identificación de cuándo y cómo se aplica.

1. Regla de L'Hôpital y formas indeterminadas

1.1. Regla de L'Hôpital para límites con indeterminaciones de la forma $\frac{0}{0}$ $\frac{\infty}{\infty}$

¿Sabía que...?

EL ENUNCIADO DE LA REGLA DE L'HÔPITAL

Se pide determinar el $\lim_{x \to u} \frac{f(x)}{g(x)}$ cuando u puede ser un número finito o infinito, es decir, u puede ser a, a^-, a^+, ∞ ó $-\infty$; $f(x)$ y $g(x)$ sean funciones continuas y derivables en $x = u$ y además, $f(u) = g(u) = 0$ o $f(u) = g(u) = \pm\infty$, es decir:

$$\lim_{x \to u} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{0}{0}, \qquad o \qquad \lim_{x \to u} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\infty}{\infty}$$

Se dice que los límites son indeterminados. Solo con estas dos indeterminaciones es posible aplicar la regla de L'Hôpital, que permite encontrar el valor del límite, sustituyéndolo por otro más sencillo, así:

$$\lim_{x \to u} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \to u} \frac{f'(x)}{g'(x)}$$

En otras palabras, si al evaluar el límite, el resultado es una indeterminación de la forma $\frac{0}{0}$ ó $\frac{\infty}{\infty}$, se aplica la regla de L'Hôpital que consiste en encontrar el límite de las derivadas del numerador y del denominador. Si con este nuevo límite continúa la indeterminación, se vuelve a aplicar L'Hôpital hasta que el numerador o el denominador tengan un límite diferente a 0 o ∞, según sea el caso.

A continuación se resolverán algunos ejemplos en los que se aplicará la regla de L'Hopital. Siga cuidadosamente el proceso.

Ejemplo 1. Determine $\lim_{x\to -2} \frac{x^2+6x+8}{x^2-3x-10}$

Solución

$\lim_{x\to -2} \frac{x^2+6x+8}{x^2-3x-10} = \frac{(-2)^2+6(-2)+8}{(-2)^2-3(-2)-10} = \frac{4-12+8}{4+6-10} = \frac{0}{0}$ Se evalúa el límite y se identifica la indeterminación Como es de la forma $\frac{0}{0}$, el límite es indeterminado y se puede aplicar la regla de L'Hopital así:

$\lim_{x\to -2} \frac{x^2+6x+8}{x^2-3x-10} = \lim_{x\to -2} \frac{2x+6}{2x-3}$ Se deriva el numerador y el denominador

$\lim_{x\to -2} \frac{2x+6}{2x-3} = \frac{2(-2)+6}{2(-2)-3} = \frac{-4+6}{-4-3} = -\frac{2}{7}$ Se evalúa el límite cuando $x=-2$, es decir:

$$\lim_{x\to -2} \frac{x^2+6x+8}{x^2-3x-10} = -\frac{2}{7}$$

Otra forma de hallar el límite anterior es factorizando y simplificando factores comunes; se deja como actividad para el lector usar este método y comprobar que el resultado es el mismo.

Ejemplo 2. Determine $\lim_{x\to 0^+} \frac{2x}{sinx-x}$

Solución

$\lim_{x\to 0^+} \frac{2x}{sinx-x} = \frac{2(0)}{\sin(0)-0} = \frac{0}{0}$ Se evalúa el límite y se identifica el tipo de indeterminación

$\lim_{x\to 0^+} \frac{2x}{sinx-x} = \lim_{x\to 0^+} \frac{2}{cosx-1}$ Se deriva el numerador y el denominador

$\lim_{x\to 0^+} \frac{2}{cosx-1} = -\infty$ Se evalúa el límite cuando $x=0;$ el denominador tiende a cero, por lo que el límite no existe. Además, como se analiza el valor del límite cuando $x \to 0^+$, el denominador, además de tender a 0 ,es un número negativo, ya que a la derecha de cero se tiene que $cosx < 1,$ por lo que se deduce que si el numerador es positivo, en este caso es el número 2, y el denominador es negativo, la fracción es negativa, por lo que el límite es $-\infty.$ Por todo lo anterior, se obtiene:

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{2x}{sinx - x} = -\infty$$

Ejemplo 3. Determine $\lim_{x\to 0^-} \frac{3sinx}{\sqrt{-x}}$.

Solución

$\lim_{x\to 0^-} \frac{3sinx}{\sqrt{-x}} = \frac{3\sin(0)}{\sqrt{-0}} = \frac{3(0)}{0} = \frac{0}{0}$ Se evalúa el límite y se identifica el tipo de indeterminación

$\lim_{x\to 0^-} \frac{3sinx}{\sqrt{-x}} = \lim_{x\to 0^-} \frac{3cosx}{\frac{-1}{2\sqrt{-x}}}$ Se deriva el numerador y el denominador

$\lim_{x\to 0^-} \frac{3cosx}{\frac{-1}{2\sqrt{-x}}} = \lim_{x\to 0^-} \frac{6\sqrt{-x}cosx}{-1} = \frac{0}{-1} = 0$ Se evalúa el límite cuando $x=0,$ es decir:

$$\lim_{x\to 0^-} \frac{3sinx}{\sqrt{-x}} = 0$$

Ejemplo 4. Determine $\lim_{x\to 0^+} \frac{lnx}{cotx}$

Solución

$\lim_{x\to 0^+} \frac{lnx}{cotx} = \frac{\ln(0)}{\cot(0)} = \frac{-\infty}{+\infty}$ Se evalúa el límite y se identifica el tipo de indeterminación

$\lim_{x\to 0^+} \frac{lnx}{cotx} = \lim_{x\to 0^+} \frac{\frac{1}{x}}{-csc^2x}$ Se deriva el numerador y el denominador

$\lim_{x\to 0^+} \frac{\frac{1}{x}}{-csc^2x} = -\lim_{x\to 0^+} \frac{\frac{1}{x}}{\frac{1}{sin^2x}}$ Se utiliza la identidad trigonométrica de la cosecante

$$-\lim_{x\to 0^+}\frac{\frac{1}{x}}{\frac{1}{sin^2x}} = -\lim_{x\to 0^+}\frac{sin^2x}{x}$$ Se realiza la operación de división indicada

$$-\lim_{x\to 0^+}\frac{sin^2x}{x} = -\lim_{x\to 0^+} sinx \bullet \lim_{x\to 0^+}\frac{sinx}{x}$$ Se escribe la potencia como un producto y se aplica el límite

$$-\lim_{x\to 0^+} sinx \bullet \lim_{x\to 0^+}\frac{sinx}{x} = -0 \bullet 1 = 0$$ Se evalúa el límite cuando $x \to 0^+$, es decir:

$$\lim_{x\to 0^+}\frac{lnx}{cotx} = 0$$

Ejemplo 5. Determine $\lim_{x\to\infty}\frac{lnx}{x}$

Solución

$$\lim_{x\to\infty}\frac{lnx}{x} = \frac{\infty}{\infty}$$ Se evalúa el límite y se identifica el tipo de indeterminación

$$\lim_{x\to\infty}\frac{lnx}{x} = \lim_{x\to\infty}\frac{\frac{1}{x}}{1} = \lim_{x\to\infty}\frac{1}{x}$$ Se deriva el numerador y el denominador y se opera

$$\lim_{x\to\infty}\frac{1}{x} = 0$$ Se aplica el concepto de límites al infinito, es decir:

$$\lim_{x\to\infty}\frac{lnx}{x} = 0$$

Generalizando, según este resultado, se tiene que:

$$\lim_{x\to\infty}\frac{lnx}{x^a} = 0, \quad con\ a > 0$$

Ejemplo 6. Determine $\lim_{x\to\infty}\frac{x}{e^x}$

Solución

$$\lim_{x\to\infty}\frac{x}{e^x} = \frac{\infty}{\infty}$$ Indeterminado, al evaluar el límite cuando $x \to \infty$

$$\lim_{x\to\infty}\frac{x}{e^x} = \lim_{x\to\infty}\frac{1}{e^x}$$ Se deriva el numerador y el denominador

$$\lim_{x\to\infty}\frac{1}{e^x} = 0$$ Se evalúa el límite, es decir:

$$\lim_{x \to \infty} \frac{x}{e^x} = 0$$

Generalizando, según este resultado, se tiene que:

$$\lim_{x \to \infty} \frac{x^a}{e^x} = 0, \quad con \;\; a > 0$$

Ejemplo 7. Determine $\lim\limits_{x \to \pi/2} \dfrac{3secx + 5}{tanx}$

Solución

$$\lim_{x \to \pi/2} \frac{3secx + 5}{tanx} = \frac{3sec\left(\pi/2\right)}{tan\left(\pi/2\right)} = \frac{\infty}{\infty}$$ Indeterminado, al evaluar el límite cuando $x \to \pi/2$

$$\lim_{x \to \pi/2} \frac{3secx + 5}{tanx} = \lim_{x \to \pi/2} \frac{3secxtanx}{sec^2 x}$$ Se deriva el numerador y el denominador

$$\lim_{x \to \pi/2} \frac{3secxtanx}{sec^2 x} = \lim_{x \to \pi/2} \frac{3tanx}{secx}$$ Se simplifica el factor común

$$\lim_{x \to \pi/2} \frac{3tanx}{secx} = 3 \lim_{x \to \pi/2} \frac{\frac{sinx}{cosx}}{\frac{1}{cosx}} = 3 \lim_{x \to \pi/2} sinx$$ Se utilizan identidades trigonométricas y se opera

$$3 \lim_{x \to \pi/2} sinx = 3(1) = 3$$ Se evalúa el límite, es decir:

$$\lim_{x \to \pi/2} \frac{3secx + 5}{tanx} = 3$$

Ejemplo 8. Determine $\lim\limits_{x \to \infty} \dfrac{\ln\left(lnx^{1000}\right)}{lnx}$

Solución

$$\lim_{x \to \infty} \frac{\ln\left(lnx^{1000}\right)}{lnx} = \frac{\infty}{\infty}$$ Indeterminado, al evaluar el límite cuando $x \to \infty$

$$\lim_{x \to \infty} \frac{\ln\left(lnx^{1000}\right)}{lnx} = \lim_{x \to \infty} \frac{\frac{1}{lnx^{1000}} \bullet \frac{1}{x^{1000}} \bullet 1000x^{999}}{\frac{1}{x}}$$ Se deriva el numerador y el denominador

$$\lim_{x\to\infty}\frac{\frac{1}{lnx^{1000}}\bullet\frac{1}{x^{1000}}\bullet 1000x^{999}}{\frac{1}{x}}=\lim_{x\to\infty}\frac{\frac{1000x^{999}}{x^{1000}lnx^{1000}}}{\frac{1}{x}}$$ Se realizan operaciones indicadas

$$\lim_{x\to\infty}\frac{\frac{1000x^{999}}{x^{1000}lnx^{1000}}}{\frac{1}{x}}=\lim_{x\to\infty}\frac{1000x^{1000}}{x^{1000}lnx^{1000}}=\lim_{x\to\infty}\frac{1000}{lnx^{1000}}$$ Se opera y simplifica

$$\lim_{x\to\infty}\frac{1000}{lnx^{1000}}=0$$ Se evalúa el límite, es decir:

$$\lim_{x\to\infty}\frac{\ln\left(lnx^{1000}\right)}{lnx}=0$$

Ejemplo 9. Determine $\lim_{x\to 0}\frac{ln\left(cos2x\right)}{7x^2}$

Solución

$$\lim_{x\to 0}\frac{ln\left(cos2x\right)}{7x^2}=\frac{ln\left(cos2\left(0\right)\right)}{7\left(0\right)^2}=\frac{ln\left(cos\left(0\right)\right)}{7\left(0\right)}=\frac{ln1}{0}=\frac{0}{0}$$ Indeterminado, al evaluar el límite

$$\lim_{x\to 0}\frac{ln\left(cos2x\right)}{7x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{1}{cos2x}\bullet\left(-sin2x\right)\bullet 2}{14x}$$ Se deriva el numerador y el denominador

$$\lim_{x\to 0}\frac{\frac{1}{cos2x}\bullet\left(-sin2x\right)\bullet 2}{14x}=\lim_{x\to 0}\frac{-\frac{2sin2x}{cos2x}}{14x}=-\lim_{x\to 0}\frac{sin2x}{7xcos2x}$$ Se opera y simplifica

Observe que cuando se evalúa este nuevo límite cuando $x\to 0,$ otra vez se tiene una indeterminación de la forma $\frac{0}{0},$ luego se aplica nuevamente L´Hôpital, así:

$$-\lim_{x\to 0}\frac{sin2x}{7xcos2x}=-\lim_{x\to 0}\frac{cos2x\bullet 2}{7x\left(-sin2x\bullet 2\right)+cos2x\bullet 7}$$ Se deriva el numerador y el denominador

$$-\lim_{x\to 0}\frac{cos2x\bullet 2}{7x\left(-sin2x\bullet 2\right)+cos2x\bullet 7}=-\lim_{x\to 0}\frac{2cos2x}{-14xsin2x+7cos2x}$$ Se realizan operaciones indicadas

$$-\lim_{x\to 0}\frac{2cos2x}{-14xsin2x+7cos2x}=-\frac{2}{7}$$ Se evalúa el límite, es decir:

$$\lim_{x\to 0}\frac{ln\left(cos2x\right)}{7x^2}=-\frac{2}{7}$$

En conclusión, la regla de L'Hôpital se puede aplicar más de una vez en un mismo ejercicio, siempre que al evaluar el nuevo límite se mantenga la indeterminación $\frac{0}{0}$ o $\frac{\infty}{\infty}$.

1.2. Regla de L'Hôpital para límites con indeterminaciones de la forma $\infty \bullet 0$ o $\infty - \infty$

Si al evaluar un límite se encuentra que tiene como solución $\infty \bullet 0$ o $\infty - \infty$, estas expresiones también se asumen como indeterminaciones matemáticas; sin embargo, para aplicar la regla de L'Hôpital es necesario hacer procedimientos o trucos matemáticos de tal manera que se convierta esa indeterminación en una de la forma $\frac{0}{0}$ o $\frac{\infty}{\infty}$.

A continuación se exponen algunos ejemplos donde es posible observar cómo se hacen dichas transformaciones.

Ejemplo 1. Determine $\lim\limits_{x\to \pi/2} tanx \bullet ln(sinx)$

Solución

$\lim\limits_{x\to \pi/2} tanx \bullet ln(sinx) = \lim\limits_{x\to \pi/2} tan\frac{\pi}{2} \bullet ln\left(sin\frac{\pi}{2}\right) = \infty \bullet 0$ Se evalúa el límite y se identifica el tipo de indeterminación

$\lim\limits_{x\to \pi/2} tanx \bullet ln(sinx) = \lim\limits_{x\to \pi/2} \frac{ln(sinx)}{cotx}$ Se aplica la identidad $tanx = \frac{1}{cotx}$

$\lim\limits_{x\to \pi/2} \frac{ln(sinx)}{cotx} = \frac{0}{0}$ Se evalúa el límite

$\lim\limits_{x\to \pi/2} \frac{ln(sinx)}{cotx} = \lim\limits_{x\to \pi/2} \frac{\frac{1}{sinx} \bullet cosx}{-csc^2x}$ Se aplica regla de L'Hôpital

$\lim\limits_{x\to \pi/2} \frac{\frac{1}{sinx} \bullet cosx}{-csc^2x} = -\lim\limits_{x\to \pi/2} \frac{\frac{cosx}{sinx}}{\frac{1}{sin^2x}} = -\lim\limits_{x\to \pi/2} \frac{sin^2xcosx}{sinx}$ Se aplica identidad trigonométrica y se opera

$-\lim\limits_{x\to \pi/2} \frac{sin^2xcosx}{sinx} = -\lim\limits_{x\to \pi/2} sinxcosx$ Se realizan operaciones indicadas

$-\lim\limits_{x\to \pi/2} sinxcosx = -sin\frac{\pi}{2} cos\frac{\pi}{2} = -1 \bullet 0 = 0$ Se evalúa el límite, es decir:

$$\lim_{x\to \pi/2} tanx \bullet ln(sinx) = 0$$

Ejemplo 2. Determine $\lim_{x\to 0}\left(csc^2x - cot^2x\right)$

Solución

$\lim_{x\to 0}\left(csc^2x - cot^2x\right) = csc^2 0 - cot^2 0 = \infty - \infty$ Se evalúa el límite

Existen dos formas de encontrar el valor de este límite, observe:

FORMA 1. Mediante identidades trigonométricas

$\lim_{x\to 0}\left(csc^2x - cot^2x\right) = \lim_{x\to 0}\left(1 + cot^2x - cot^2x\right)$ Se sustituye por la identidad trigonométrica

$\lim_{x\to 0}\left(1 + cot^2x - cot^2x\right) = \lim_{x\to 0}(1) = 1$ Se opera y evalúa el límite resultante

FORMA 2. Utilizando L'Hôpital

$\lim_{x\to 0}\left(csc^2x - cot^2x\right) = \lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{sin^2x} - \frac{cos^2x}{sin^2x}\right)$ Se sustituye por identidades trigonométricas

$\lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{sin^2x} - \frac{cos^2x}{sin^2x}\right) = \lim_{x\to 0}\frac{1 - cos^2x}{sin^2x}$ Se realiza la suma de fracciones homogéneas

$\lim_{x\to 0}\frac{1 - cos^2x}{sin^2x} = \frac{0}{0}$ Se evalúa el límite y se identifica el tipo de indeterminación

$\lim_{x\to 0}\frac{2cosxsinx}{2sinxcosx} = \lim_{x\to 0}(1)$ Se aplica la regla de L'Hôpital y se simplifica el resultado

$\lim_{x\to 0}(1) = 1$ Se evalúa el límite, es decir:

$$\lim_{x\to 0}\left(csc^2x - cot^2x\right) = 1$$

Ejemplo 3. Determine $\lim_{x\to 0} x \bullet ln\left(x^{1000}\right)$

Solución

$\lim_{x\to 0} x \bullet ln\left(x^{1000}\right) = 0 \bullet \infty$ Se evalúa el límite

$\lim_{x\to 0} x \bullet ln\left(x^{1000}\right) = \lim_{x\to 0}\frac{ln\left(x^{1000}\right)}{x^{-1}} = \frac{\infty}{\infty}$ Se aplican propiedades de exponentes y se evalúa

$$\lim_{x\to 0}\frac{ln\left(x^{1000}\right)}{x^{-1}}=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{1}{x^{1000}}\bullet 1000x^{999}}{-1x^{-2}}$$ Se aplica la regla de L'Hôpital

$$\lim_{x\to 0}\frac{\frac{1}{x^{1000}}\bullet 1000x^{999}}{-1x^{-2}}=-1000\lim_{x\to 0}\frac{x^{-1}}{x^{-2}}$$ Se aplican propiedades de exponentes

$$=-1000\lim_{x\to 0}\frac{x^{-1}}{x^{-2}}=-1000\lim_{x\to 0}x=0$$ Se aplican propiedades de exponentes y se evalúa el límite, es decir:

$$\lim_{x\to 0}x\bullet ln\left(x^{1000}\right)=0$$

Ejemplo 4. Determine $\lim_{x\to 1^+}\left(\frac{x}{x-1}-\frac{1}{lnx}\right)$

Solución

$$\lim_{x\to 1^+}\left(\frac{x}{x-1}-\frac{1}{lnx}\right)=\infty-\infty$$ Se evalúa el límite

$$\lim_{x\to 1^+}\left(\frac{x}{x-1}-\frac{1}{lnx}\right)=\lim_{x\to 1^+}\left(\frac{xlnx-x+1}{(x-1)lnx}\right)=\frac{0}{0}$$ Se opera y evalúa el límite

$$\lim_{x\to 1^+}\left(\frac{xlnx-x+1}{(x-1)lnx}\right)=\lim_{x\to 1^+}\left(\frac{x\bullet\frac{1}{x}+1\bullet lnx-1}{(x-1)\bullet\frac{1}{x}+1\bullet lnx}\right)$$ Se aplica la regla de L'Hôpital

$$\lim_{x\to 1^+}\left(\frac{x\bullet\frac{1}{x}+1\bullet lnx-1}{(x-1)\bullet\frac{1}{x}+1\bullet lnx}\right)=\lim_{x\to 1^+}\frac{1+lnx-1}{\frac{x-1+xlnx}{x}}$$ Se simplifica y opera el denominador

$$\lim_{x\to 1^+}\frac{1+lnx-1}{\frac{x-1+xlnx}{x}}=\lim_{x\to 1^+}\frac{xlnx}{x-1+xlnx}=\frac{0}{0}$$ Se realizan operaciones y evalúa el límite

$$\lim_{x\to 1^+}\frac{xlnx}{x-1+xlnx}=\lim_{x\to 1^+}\frac{x\bullet\frac{1}{x}+1\bullet lnx}{1+x\bullet\frac{1}{x}+1\bullet lnx}$$ Se aplica la regla de L´Hôpital

$$\lim_{x\to 1^+}\frac{x\bullet\frac{1}{x}+1\bullet lnx}{1+x\bullet\frac{1}{x}+1\bullet lnx}=\lim_{x\to 1^+}\frac{1+lnx}{2+lnx}=\frac{1}{2}$$ Se realizan operaciones y se evalúa el límite, es decir:

$$\lim_{x\to 1^+}\left(\frac{x}{x-1}-\frac{1}{lnx}\right)=\frac{1}{2}$$

1.3. Regla de L'Hôpital para límites con indeterminaciones de la forma ∞^0, 0^0 o 1^∞

Tal y como ocurre en la parte anterior, si al evaluar el límite se obtiene como resultado alguna de las expresiones $\infty^0, 0^0$ o 1^∞, estas son consideradas formas indeterminadas en las que se puede aplicar L'Hôpital después de convertirlas en indeterminaciones de la forma $\frac{0}{0}$ o $\frac{\infty}{\infty}$. Para lograr esa transformación se hace uso, primero, de los logaritmos y sus propiedades y, luego, de la función exponencial, que al ser continua permite aplicar la propiedad de los límites, que dice:

$$\lim_{x\to a} e^{f(x)} = e^{\lim_{x\to a} f(x)}$$

Observe cómo se aplica esta idea.

Ejemplo 1. Determine $\lim_{x\to 0^+}(3x)^{x^2}$

Solución

$\lim_{x\to 0^+}(3x)^{x^2}=(3\bullet 0)^{0^2}=0^0$ Se evalúa el límite

Para poder generar un límite indeterminado de la forma $\frac{0}{0}$ o $\frac{\infty}{\infty}$, de tal manera que sea posible aplicar la regla de L'Hôpital, se seguirá el siguiente proceso, en donde se nombrará a y como la función a la cual se le va a calcular el límite:

Sea $y=(3x)^{x^2}$, se tiene que $lny=ln(3x)^{x^2}$	Se saca logaritmo natural a ambos lados
$lny=x^2ln(3x)$	Se aplican propiedades de logaritmos
$lny=\frac{ln(3x)}{x^{-2}}$	Se reescribe la expresión anterior
$\lim_{x\to 0^+} lny=\lim_{x\to 0^+}\frac{ln(3x)}{x^{-2}}=\frac{-\infty}{+\infty}$	Se calcula el límite del logaritmo natural de y
$\lim_{x\to 0^+} lny=\lim_{x\to 0^+}\frac{\frac{1}{3x}\bullet 3}{-2x^{-3}}$	Se aplica la regla de L´Hôpital
$\lim_{x\to 0^+} lny=-\frac{1}{2}\lim_{x\to 0^+}\frac{x^{-1}}{x^{-3}}=-\frac{1}{2}\lim_{x\to 0^+}x^2$	Se opera y aplican propiedades de potenciación

$$\lim_{x\to 0^+} lny = -\frac{1}{2}\lim_{x\to 0^+} 0^2 = -\frac{1}{2}\bullet 0 = 0$$

Se evalúa el límite, es decir:

$$\lim_{x\to 0^+} lny = 0$$

Ahora, usando la definición del logaritmo natural, se tiene que $y = e^{lny}$, por lo que:

$$\lim_{x\to 0^+} y = \lim_{x\to 0^+} e^{lny}$$

Se aplica la igualdad anterior

$$\lim_{x\to 0^+} y = e^{\lim\limits_{x\to 0^+} lny} = e^0 = 1$$

Por la continuidad de la función exponencial, es decir:

$$\lim_{x\to 0^+} (3x)^{x^2} = 1$$

Ejemplo 2. Determine $\lim\limits_{x\to 0}\left(x + e^{x/3}\right)^{3/x}$

Solución

$\lim\limits_{x\to 0}\left(x + e^{x/3}\right)^{3/x} = \left(0 + e^{0/3}\right)^{3/0} = 1^{\infty}$ Se evalúa el límite, por lo que es una indeterminación que se debe transformar a otra indeterminación de la forma $\frac{0}{0}$ o $\frac{\infty}{\infty}$, para poder aplicar la regla de L'Hôpital.

Si $y = \left(x + e^{x/3}\right)^{3/x}$ entonces $lny = \ln\left(x + e^{x/3}\right)^{3/x}$ Se halla logaritmo a ambos lados, por lo que

$$\lim_{x\to 0} lny = \lim_{x\to 0}\frac{3}{x}\ln\left(x + e^{x/3}\right) = \lim_{x\to 0}\frac{3\ln\left(x + e^{x/3}\right)}{x}$$

Se aplica propiedad de logaritmos y se opera

$$\lim_{x\to 0} lny = \lim_{x\to 0}\frac{3\ln\left(x + e^{x/3}\right)}{x} = \frac{3\ln\left(0 + e^{0/3}\right)}{0} = \frac{0}{0}$$

Indeterminado al evaluar el límite

$$\lim_{x\to 0} lny = \lim_{x\to 0}\frac{3\bullet\frac{1}{x + e^{x/3}}\bullet\left(1 + \frac{1}{3}e^{x/3}\right)}{1}$$

Se aplica regla de L'Hôpital

$$\lim_{x\to 0} lny = \lim_{x\to 0}\frac{3 + e^{x/3}}{x + e^{x/3}} = \frac{3 + e^{0/3}}{0 + e^{0/3}} = \frac{4}{1} = 4$$

Se opera y evalúa el límite

Por lo que:

$$\lim_{x\to 0} y = e^{\lim\limits_{x\to 0} lny} = e^4$$

Se aplica la definición del logaritmo y la continuidad de la función exponencial, por lo que:

$$\lim_{x\to 0}\left(x + e^{x/3}\right)^{3/x} = e^4$$

Ejemplo 3. Determine $\lim\limits_{x\to\infty}(x)^{1/x}$

Solución

$\lim\limits_{x\to\infty}(x)^{1/x}=\infty^0$	Se evalúa el límite
Si $y=(x)^{1/x}$ entonces $lny=ln(x)^{1/x}=\frac{1}{x}lnx$	Se halla el logaritmo y aplican propiedades
$\lim\limits_{x\to\infty}lny=\lim\limits_{x\to\infty}\frac{lnx}{x}=\frac{\infty}{\infty}$	Se evalúa el límite del logaritmo
$\lim\limits_{x\to\infty}lny=\lim\limits_{x\to\infty}\frac{\frac{1}{x}}{1}=\lim\limits_{x\to\infty}\frac{1}{x}=0$	Se aplica L'Hôpital; simplifica y evalúa el límite, es decir: $\lim\limits_{x\to\infty}lny=0$
$\lim\limits_{x\to\infty}y=e^{\lim\limits_{x\to\infty}lny}=e^0=1$	Se aplica la definición del logaritmo y la continuidad de la función exponencial, por lo que: $\lim\limits_{x\to\infty}(x)^{1/x}=1$

1.4. Formas matemáticas no indeterminadas en las que no es posible aplicar L'Hôpital

Es muy fácil cometer errores en el uso de la regla de L'Hôpital si no se tiene en cuenta que solo las indeterminaciones consideradas en las secciones 1.1, 1.2 y 1.3 son las que permiten aplicarla.

En otras palabras, si al evaluar el límite se obtienen expresiones como $\frac{0}{\infty}$, $\frac{\infty}{0}$, $\infty+\infty$, $\infty\bullet\infty$, $1^{0,}$ 0^{∞} o ∞^{∞}, estas no son indeterminaciones matemáticas, por lo que no es posible aplicar L'Hopital para encontrar su valor. Se dice que en estos casos las fuerzas que ejercen el cálculo del límite no son contrarias, sino que trabajan juntas.

A continuación aparecen algunos ejemplos en los que se obtienen dichas expresiones.

Ejemplo 1. Determine $\lim_{x \to \pi/2^-} (5cotx)^{tanx}$

Solución

$\lim_{x \to \pi/2^-} (5cotx)^{tanx} = \left(5cot\,\pi/2\right)^{tan\pi/2} = 0^{\infty}$ Se evalúa el límite. Observe que no es una indeterminación de las mencionadas anteriormente; en este caso, la función cotangente tiende a cero en tanto que la tangente tiende a infinito, por lo que hace que con mayor rapidez se tienda aún más a cero, es decir, son valores que no compiten o son opuestos, por lo que:

$$\lim_{x \to \pi/2^-} (5cotx)^{tanx} = 0$$

Ejemplo 2. Determine $\lim_{x \to \pi/2} (sinx)^{cosx}$

Solución

$\lim_{x \to \pi/2} (sinx)^{cosx} = \left(sin\,\frac{\pi}{2}\right)^{cos\frac{\pi}{2}} = 1^0$ Se evalúa el límite. Observe que no hay indeterminación; recuerde que $1^0 = 1$, por lo que:

$$\lim_{x \to \pi/2} (sinx)^{cosx} = 1$$

Ejemplo 3. Determine $\lim_{x \to 0^+} lnx \bullet cotx$

Solución

$$\lim_{x \to 0^+} lnx \bullet cotx = ln0 \bullet cot0 = -\infty \bullet \infty = -\infty$$

Al evaluar el límite puede observarse que ambos tienden al infinito, uno en sentido positivo y el otro en sentido negativo, por lo que el resultado tiende al infinito negativo.

1.5. Ejercicios propuestos para reforzar

Determine los siguientes límites:

1. $\lim_{x \to 0} \frac{e^x - e^{-x}}{2sinx}$

2. $\lim_{x\to 0} \frac{e^x - \ln(1+x) - 1}{x^2}$

3. $\lim_{x\to \pi/2} \frac{\ln(sinx)^3}{\frac{1}{2}\pi - x}$

4. $\lim_{x\to -\infty} \left(e^{-x} - x\right)$

5. $\lim_{x\to \infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x$

2. Integrales impropias

Algunas áreas del conocimiento como la física y la probabilidad, en ocasiones, requieren en los procesos de cálculo de integrales en donde alguno o ambos límites de integración son ∞ o $-\infty$. Es por esto que es importante trabajar integrales de este tipo. Las mencionadas reciben el nombre de integrales impropias, cuya determinación se analizará en esta sección.

2.1. Límites de integración infinito

En este apartado se van a revisar integrales donde uno o ambos límites de integración son infinitos, siendo $f(x)$ una función continua en ese intervalo de integración.

Para comprender la idea, considere la función continua $f(x) = e^{-x}$ que aparece en la figura 1:

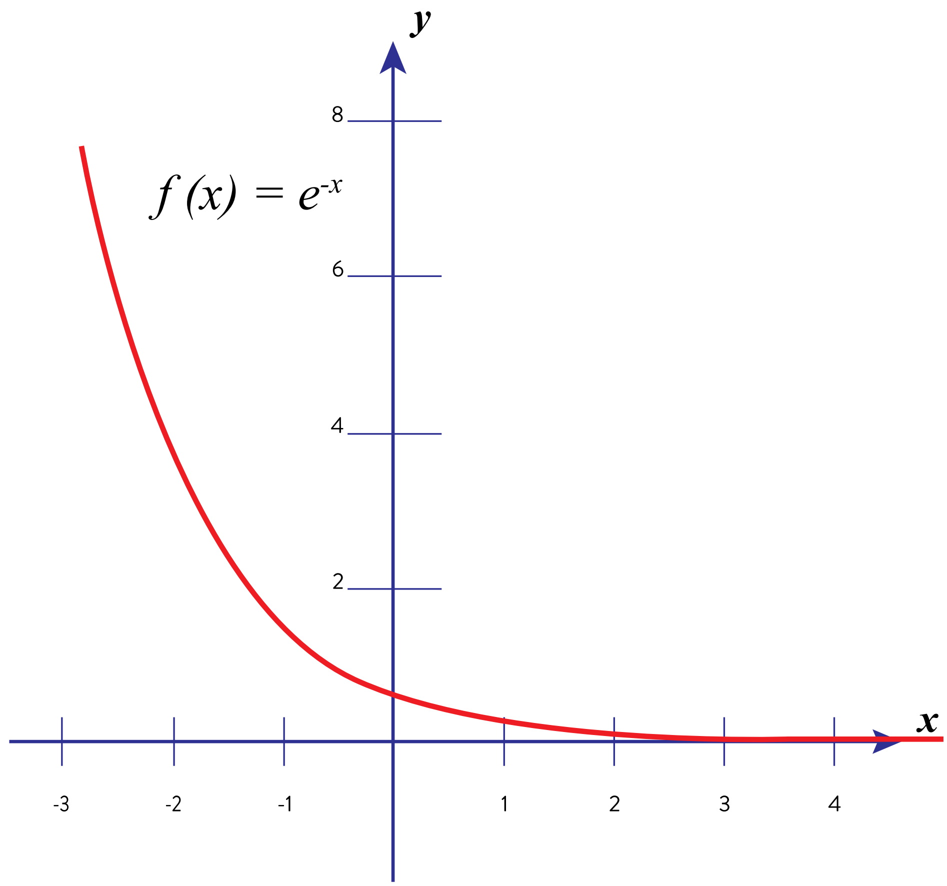

Figura 1. Gráfica de la función $f(x) = e^{-x}$

Fuente: elaboración propia

Si se quisiera calcular el área bajo la curva en el primer cuadrante, se podría pensar que esa área es infinita, ya que la curva lo es; sin embargo, el proceso que la determina demuestra lo contrario. Observe:

$$\int_0^b e^{-x}dx = -e^{-x}\Big|_0^b = -e^{-b} + e^{-0} = -e^{-b} + 1$$

Esta integral indica que el área bajo la curva $y = e^{-x}$ en el intervalo $[0,\ b]$ es $-e^{-b} + 1$ unidades cuadradas, donde b es un punto arbitrario que se encuentra a la derecha de 0, tal y como aparece en la figura 2:

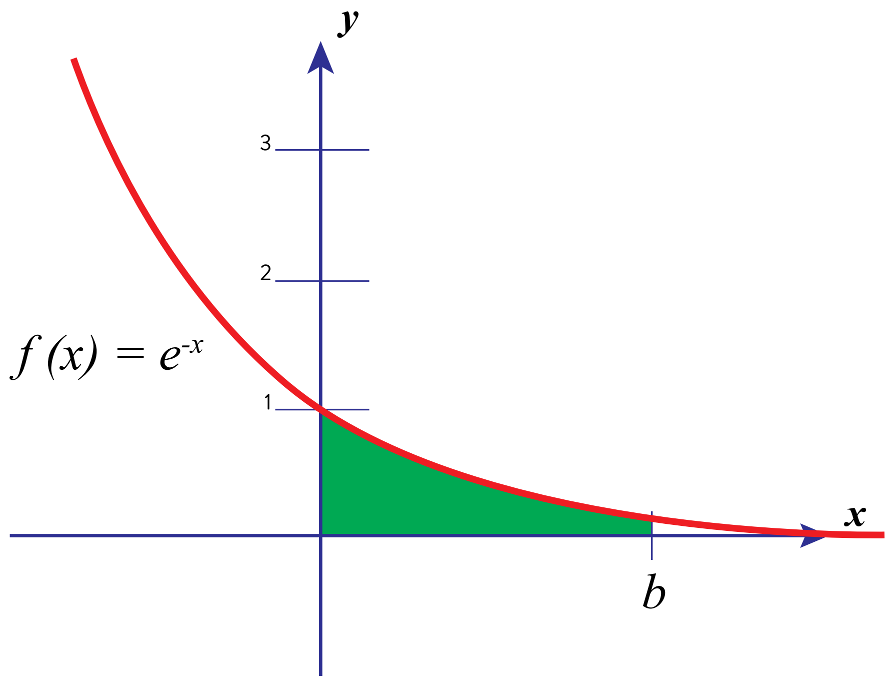

Figura 2. Área de la función $f(x)=e^{-x}$ en el primer cuadrante

Fuente: elaboración propia

Pero ¿qué ocurre si se hace que b sea un valor que tienda hacia el infinito? En este caso, con el valor obtenido de la integral se debe calcular el límite que se expone a continuación.

$$\lim_{b\to\infty}\left(-e^{-b}+1\right)=\lim_{b\to\infty}\left(-\frac{1}{e^{b}}+1\right)=0+1=1$$

Lo que significa que el área bajo la curva $y=e^{-x}$ en el intervalo $[0,\infty)$ es igual a 1 unidad cuadrada. Como el límite dio un valor finito se dice que la integral converge, en este caso a 1, y se escribe:

$$\int_0^\infty e^{-x}dx=1$$

Puede ocurrir que lo que se quiera calcular sea el área bajo la curva en el intervalo $(-\infty,b]$ donde b pertenece al dominio de la función o en el intervalo $(-\infty,\infty)$; en estos casos se hace uso del límite y se **definen** como:

1. Si $f(x)$ es continua en $[a,\infty)$, entonces:

$$\int_a^\infty f(x)\,dx=\lim_{b\to\infty}\int_a^b f(x)\,dx$$

2. Si $f(x)$ es continua en $(-\infty, b]$, entonces:

$$\int_{-\infty}^{b} f(x)\,dx = \lim_{a\to-\infty} \int_{a}^{b} f(x)\,dx$$

3. Si $f(x)$ es continua en $(-\infty, \infty)$ y c es un número real, entonces:

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx = \int_{-\infty}^{c} f(x)\,dx + \int_{c}^{\infty} f(x)\,dx$$

En cada caso, si el límite existe y es un número real se dice que la integral impropia **converge** a ese valor; en caso contrario, se dice que la integral **diverge**.

Observe los siguientes ejemplos:

Ejemplo 1. Determine $\int_{100}^{\infty} e^x\,dx$

Solución

$\int_{100}^{\infty} e^x\,dx = \lim_{b\to\infty} \int_{100}^{b} e^x\,dx$	Se aplica la definición de integral impropia
$\int_{100}^{\infty} e^x\,dx = \lim_{b\to\infty} e^x \Big\vert_{100}^{b}$	Recuerde que $\int e^x\,dx = e^x$
$\int_{100}^{\infty} e^x\,dx = \lim_{b\to\infty} \left[e^b - e^{100}\right]$	Se evalúa la integral definida
$\int_{100}^{\infty} e^x\,dx = \infty$	Recuerde que si $b \to \infty$ entonces $e^b \to \infty$, es decir: $\int_{100}^{\infty} e^x\,dx$ **diverge**

Esto significa que el área bajo la curva $y = e^x$ en el intervalo $[100,\ \infty)$ es **infinita**.

Ejemplo 2. Determine $\int_{1}^{\infty} 2xe^{-x^2}\,dx$

Solución

$$\int_1^{\infty} 2xe^{-x^2}\,dx = \lim_{b\to\infty}\int_1^{b} 2xe^{-x^2}\,dx$$ Se aplica la definición de integral impropia

$$\int_1^{\infty} 2xe^{-x^2}\,dx = \lim_{b\to\infty}\left(-e^{-x^2}\Big|_1^b\right)$$ Se determina la integral, donde $u=-x^2$, por sustitución

$$\int_1^{\infty} 2xe^{-x^2}\,dx = \lim_{b\to\infty}\left(-e^{-b^2}+e^{-1^2}\right)$$ Se evalúa la integral definida

$$\int_1^{\infty} 2xe^{-x^2}\,dx = \lim_{b\to\infty}\left(-\frac{1}{e^{b^2}}+\frac{1}{e}\right)$$ Se realizan operaciones de potenciación

$$\int_1^{\infty} 2xe^{-x^2}\,dx = \frac{1}{e}$$ Recuerde que si $b\to\infty$ entonces $\frac{1}{e^{b^2}}\to 0$, es decir:

$$\int_1^{\infty} 2xe^{-x^2}\,dx = \frac{1}{e}$$

Esto significa que la integral impropia **converge** y el área vale $\frac{1}{e}$.

Ejemplo 3. Determine $\int_{-\infty}^{1}\frac{dx}{(2x-3)^3}$

Solución

$$\int_{-\infty}^{1}\frac{dx}{(2x-3)^3} = \lim_{a\to-\infty}\int_a^1\frac{dx}{(2x-3)^3}dx$$ Se aplica la definición de integral impropia

$$\int_{-\infty}^{1}\frac{dx}{(2x-3)^3} = \lim_{a\to-\infty}\left[-\frac{1}{4(2x-3)^2}\Big|_a^1\right]$$ Se determina la integral, donde $u=2x-3$, por sustitución

$$\int_{-\infty}^{1}\frac{dx}{(2x-3)^3} = \lim_{a\to-\infty}\left[-\frac{1}{4(2(1)-3)^2}+\frac{1}{4(2a-3)^2}\right]$$ Se evalúa la integral definida

$$\int_{-\infty}^{1}\frac{dx}{(2x-3)^3} = \lim_{a\to-\infty}\left[-\frac{1}{4}+\frac{1}{4(2a-3)^2}\right]$$ Se realizan operaciones indicadas

$$\int_{-\infty}^{1}\frac{dx}{(2x-3)^3} = -\frac{1}{4}$$ Recuerde que si $a\to-\infty$ entonces $\frac{1}{4(2a-3)^2}\to 0$, es decir:

$$\int_{-\infty}^{1}\frac{dx}{(2x-3)^3} = -\frac{1}{4}$$

En este caso se dice que la integral impropia converge; sin embargo, para hablar del área es necesario tomar el valor absoluto del valor de la integral, ya que la función $\frac{1}{(2x-3)^3}$ en el intervalo $\left(-\infty,\, 1\right]$ no es positiva.

Ejemplo 4. Determine $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{x^2+2x+10}$

Solución

Antes de dar solución se va a recordar cómo se determina la integral indefinida, observe:

$$\int \frac{dx}{x^2+2x+10} = \int \frac{dx}{\left(x^2+2x+1\right)+9} = \int \frac{dx}{(x+1)^2+9}$$ Se construye el trinomio cuadrado perfecto

$$\int \frac{dx}{(x+1)^2+9} = \int \frac{\frac{1}{9}}{\frac{(x+1)^2+9}{9}} dx = \frac{1}{9} \int \frac{dx}{\left(\frac{x+1}{3}\right)^2+1}$$ Se transforma la integral

$$\frac{1}{9} \int \frac{dx}{\left(\frac{x+1}{3}\right)^2+1} = \frac{1}{9} \bullet \frac{1}{\frac{1}{3}} tan^{-1}\left(\frac{x+1}{3}\right) = \frac{1}{3} tan^{-1}\left(\frac{x+1}{3}\right)$$ Se determina la integral indefinida

Teniendo en cuenta este resultado, se va a dar solución al ejemplo planteado:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{x^2+2x+10} = \int_{-\infty}^{0} \frac{dx}{x^2+2x+10} + \int_{0}^{\infty} \frac{dx}{x^2+2x+10}$$ Se aplica la definición, tomando $c=0$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{x^2+2x+10} = \lim_{a\to-\infty} \int_{a}^{0} \frac{dx}{x^2+2x+10} + \lim_{b\to\infty} \int_{0}^{b} \frac{dx}{x^2+2x+10}$$ Se aplica la definición

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{x^2+2x+10} = \lim_{a\to-\infty} \left[\frac{1}{3} tan^{-1}\left(\frac{x+1}{3}\right) \Bigg|_{a}^{0} \right] + \lim_{b\to\infty} \left[\frac{1}{3} tan^{-1}\left(\frac{x+1}{3}\right) \Bigg|_{0}^{b} \right]$$ Se sustituye la integral

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{x^2+2x+10} = \frac{1}{3} \lim_{a\to-\infty} \left[tan^{-1}\left(\frac{1}{3}\right) - tan^{-1}\left(\frac{a+1}{3}\right) \right] + \frac{1}{3} \lim_{b\to\infty} \left[tan^{-1}\left(\frac{b+1}{3}\right) - tan^{-1}\left(\frac{1}{3}\right) \right]$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{x^2+2x+10} = \frac{1}{3} tan^{-1}\left(\frac{1}{3}\right) - \frac{1}{3}\left(-\frac{\pi}{2}\right) + \frac{1}{3}\left(\frac{\pi}{2}\right) - \frac{1}{3} tan^{-1}\left(\frac{1}{3}\right)$$ Se calcula cada límite.

En resumen:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{x^2+2x+10} = \frac{\pi}{6} + \frac{\pi}{6} = \frac{2\pi}{6} = \frac{\pi}{3}$$ luego, la integral **converge**.

Ejemplo 5. Determine $\int_e^{\infty} \frac{dx}{xlnx}$

Solución

$\int_e^{\infty} \frac{dx}{xlnx} = \lim_{b\to\infty} \int_e^{b} \frac{dx}{xlnx}$	Se aplica la definición de integral impropia
$\int_e^{\infty} \frac{dx}{xlnx} = \lim_{b\to\infty} ln(lnx)\Big\|_e^b$	Se determina la integral, donde $u = lnx$, por sustitución
$\int_e^{\infty} \frac{dx}{xlnx} = \lim_{b\to\infty} ln(lnb) - ln(lne)$	Se evalúa la integral definida
$\int_e^{\infty} \frac{dx}{xlnx} = \lim_{b\to\infty} ln(lnb)$	Recuerde que $lne = 1$ y que $ln1 = 0$, luego $ln(lne) = 0$
$\int_e^{\infty} \frac{dx}{xlnx} = \infty$	Recuerde que si $b \to \infty$ entonces $lnb \to \infty$, es decir: $\int_e^{\infty} \frac{dx}{xlnx}$ **diverge**

Esto significa que el área bajo la curva $y = \frac{dx}{xlnx}$ en el intervalo $[e, \infty)$ es **infinita**.

2.2. Integrandos infinitos

Existen otras integrales que se vuelven infinitas en un punto dentro del intervalo de integración. A continuación se definen cada uno de estos casos:

1. Si f es una función continua en $[a, b)$ y cumple que $\lim_{x\to b^-} |f(x)| = \infty$, entonces:

$$\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{t\to b^-} \int_a^t f(x)\,dx$$

Si este límite es igual a L, siendo L un número real, se dice que la integral converge a ese valor; si el límite no existe, la integral diverge.

2. Si f es una función continua en $(a, b]$ y cumple que $\lim_{x\to a^+} |f(x)| = \infty$, entonces:

$$\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{t\to a^+} \int_t^b f(x)\,dx$$

Si este límite es igual a L, se dice que la integral converge a ese valor; si el límite no existe, la integral diverge.

3. Si f es una función continua en $[a, b]$ excepto en un punto c, donde $a < c < b$, y cumple que $\lim_{x \to c} |f(x)| = \infty$, entonces:

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^c f(x)\,dx + \int_c^b f(x)\,dx$$

Si este límite existe, es decir, da un número real, se dice que la integral converge a ese valor; si el límite no existe, la integral diverge.

A continuación, se presentan algunos ejemplos que ilustran cada uno de estos casos.

Ejemplo 1. Determine la convergencia de $\int_1^3 \frac{dx}{(x-1)^{1/3}}$

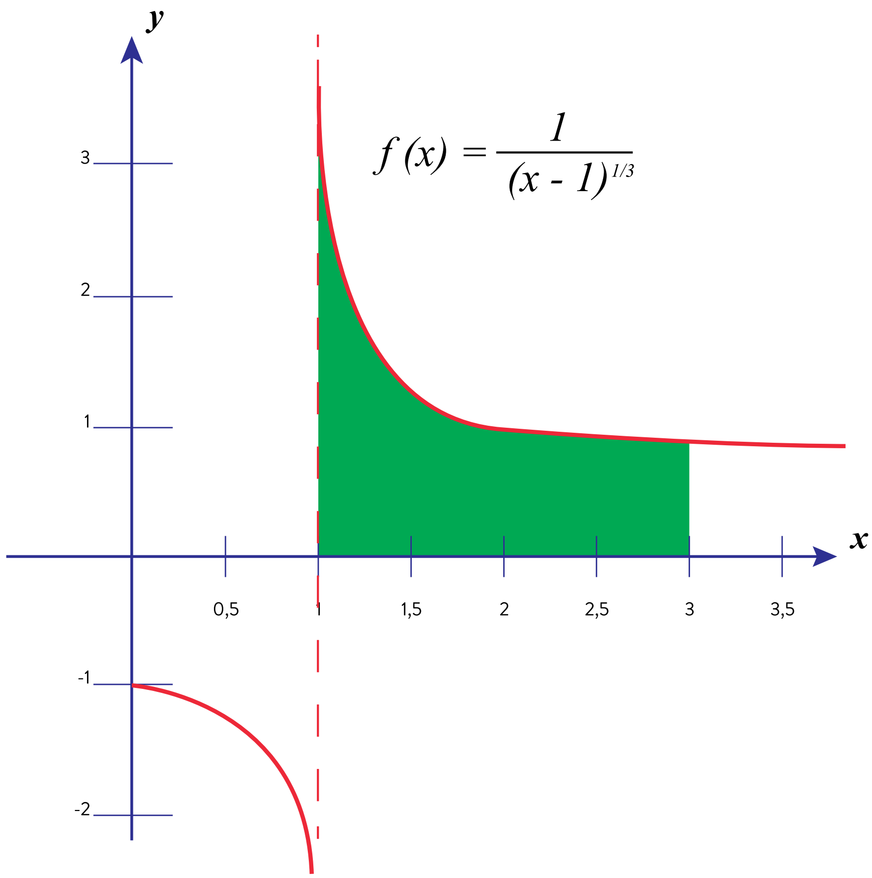

Figura 3. Función $f(x) = \frac{1}{(x-1)^{1/3}}$ **en el intervalo** $(1, 3]$

Fuente: elaboración propia

Para determinar la convergencia, primero se debe encontrar la integral indefinida de la función, así:

$$\int \frac{dx}{(x-1)^{1/3}} = \int (x-1)^{-1/3}\, dx = \frac{3(x-1)^{2/3}}{2}$$

Dado que la función tiene como dominio al conjunto de los números reales diferentes a 1, es posible analizar la integral en el intervalo solicitado, esto es en $(1,\ 3]$. Adicional a esto, debido a que se cumple que $\lim_{x\to 1^+} \frac{1}{(x-1)^{1/3}} = \infty,$ es posible aplicar el numeral 2 de la definición.

$$\int_1^3 \frac{dx}{(x-1)^{1/3}} = \lim_{t\to 1^+} \int_t^3 \frac{dx}{(x-1)^{1/3}} = \lim_{t\to 1^+} \left. \frac{3(x-1)^{2/3}}{2} \right|_t^3$$

Se sustituye el valor de la integral

$$\int_1^3 \frac{dx}{(x-1)^{1/3}} = \lim_{t\to 1^+} \left[\frac{3(2)^{2/3}}{2} - \frac{3(t-1)^{2/3}}{2} \right] = \frac{3}{\sqrt[3]{2}}$$

Se calcula el valor del límite, es decir:

$$\int_1^3 \frac{dx}{(x-1)^{1/3}} = \frac{3}{\sqrt[3]{2}}$$

converge

Ejemplo 2. Determine la convergencia de $\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$

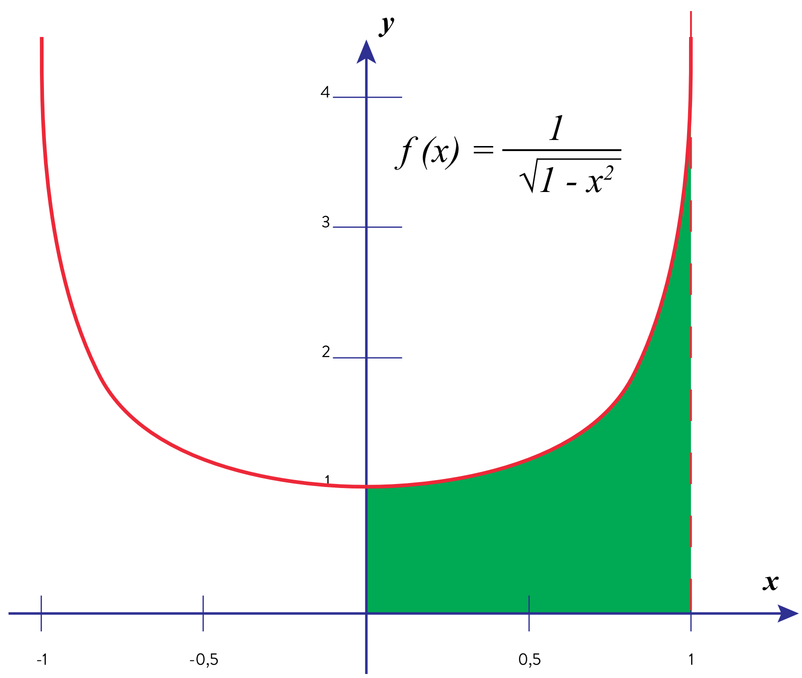

Figura 4. Función $f(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ **en el intervalo** $[0,\ 1)$

Fuente: elaboración propia

Recuerde que $\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = sin^{-1}x$; por otra parte, el dominio de la función es el intervalo $(-1,1)$, por lo que el intervalo en el que se pide analizar la integral es $[0, 1)$. Además, se cumple que $\lim_{x\to 1^-} \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} = \infty$, por lo que se aplica la definición:

$$\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \lim_{t\to 1^-} \int_0^t \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \lim_{t\to 1^-} \left[sin^{-1}x \right]\Big|_0^t$$

Se sustituye el valor de la integral

$$\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \lim_{t\to 1^-} \left[sin^{-1}t - sin^{-1}0 \right] = \frac{\pi}{2}$$

Se calcula el valor del límite, es decir:

$$\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \frac{\pi}{2}$$

converge

Ejemplo 3. Determine la convergencia de $\int_{-1}^{3} \frac{dx}{x^3}$

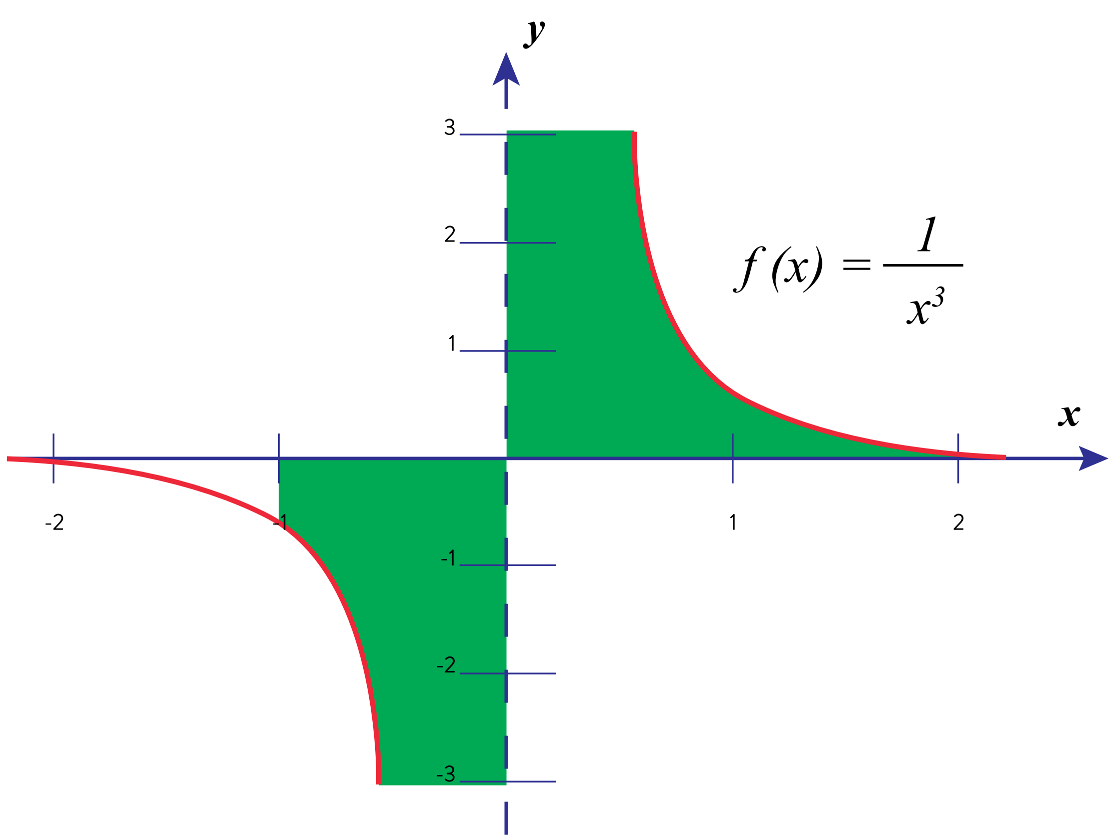

Figura 5. Función $f(x) = \frac{1}{x^3}$ **en el intervalo** $[-1, 0) \cup (0, 3]$

Fuente: elaboración propia

Lo primero que se va a encontrar es la integral indefinida de la función, así:

$$\int \frac{dx}{x^3} = \int x^{-3}dx = \frac{x^{-2}}{-2} = -\frac{1}{2x^2}$$

Por otra parte, el dominio de la función es el conjunto de todos los números reales diferentes a 0, por lo que el intervalo en el que se pide analizar la integral es $[-1, 0) \cup (0, 3]$; además, se cumple que $\lim_{x \to 0} \frac{1}{x^3} = \infty$, por lo que se aplica la definición:

$$\int_{-1}^{3} \frac{dx}{x^3} = \int_{-1}^{0} \frac{dx}{x^3} + \int_{0}^{3} \frac{dx}{x^3} = \lim_{t \to 0^-} \int_{-1}^{t} \frac{dx}{x^3} + \lim_{t \to 0^+} \int_{t}^{3} \frac{dx}{x^3}$$ Se aplica la definición a cada integral

$$\int_{-1}^{3} \frac{dx}{x^3} = \lim_{t \to 0^-} \left[-\frac{1}{2x^2} \right]\Bigg|_{-1}^{t} + \lim_{t \to 0^+} \left[-\frac{1}{2x^2} \right]\Bigg|_{t}^{3}$$ Se sustituye el valor de la integral

Como $\lim_{t \to 0^-} \left[-\frac{1}{2x^2} \right]\Big|_{-1}^{t} = \lim_{t \to 0^-} \left[-\frac{1}{2t^2} + \frac{1}{2} \right] = -\infty$ y, $\lim_{t \to 0^+} \left[-\frac{1}{2x^2} \right]\Big|_{t}^{3} = \lim_{t \to 0^+} \left[-\frac{1}{18} + \frac{1}{2t^2} \right] = \infty$, entonces:

$$\int_{-1}^{3} \frac{dx}{x^3} \quad \textbf{diverge}$$

2.3. Ejercicios propuestos para reforzar

Determine la convergencia o divergencia de las siguientes integrales:

1. $\int_{0}^{2} \frac{dx}{1 - x^2}$

2. $\int_{-2}^{-1} (x+1)^{-4/3}\, dx$

3. $\int_{0}^{\pi/2} \frac{sinx}{1 - cosx} dx$

4. $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{x^2 + 2x + 10} dx$

Referencias

Purcell, E. J., Varberg, D. y Rigdon, S. (2007). *Cálculo.* México: Pearson Educación.

Stewart, J. (2001). *Cálculo de una variable.* México: Thomson Learning.

INFORMACIÓN TÉCNICA

FACULTAD DE
INGENIERÍA, DISEÑO
E INNOVACIÓN

Módulo: Cálculo II

Unidad 3: Formas indeterminadas, integrales impropias y algunas aplicaciones de la integral

Escenario 5: Formas indeterminadas e integrales impropias

Autor: Martha Helena Zambrano Valentín

Asesor Pedagógico: Jeiner Velandia

Diseñador Gráfico: Carlos Montoya

Asistente: Ginna Paola Quiroga