Cálculo 1.

Lectura No. 18. Aplicaciones de la Derivada (1)

Julio Lizarazo Osorio

Politécnico Grancolombiano
Institución Universitaria
En alianza con
Whitney International University System
Colombia

Índice

Sección 1: Linealización de funciones

Una aplicación inicial de las derivadas se obtiene de la propiedad geométrica de la derivada, en la primera lectura vimos que la derivada es la pendiente de la recta tangente y que ésta es la recta que mejor describe a la función en el punto en el cual se construye, es por ésto que podemos tratar de aproximar la función en ciertos puntos apoyándonos en la recta tangente.

Ejemplo 1. *Si tomamos la función* $f(x) = x^3 - 3x^2 + x - 1$ *y suponemos que no tenemos a mano una calculadora al tratar de encontrar el valor de la función en el punto* $x = 1{,}9$ *vemos que las cuentas son largas.*

Una forma de dar un valor aproximado es notar que la función es muy fácil de evaluar en $x = 2$ *en cuyo caso nos da* $f(2) = 8 - 12 + 2 - 1 = -3$*, al encontrar la derivada en dicho punto vemos que* $f'(x) = 3x^2 - 6x + 1$*, y* $f'(2) = 12 - 12 + 1 = 1$ *lo que quiere decir que en* $x = 2$ *la función pasa por* $y = -3$ *y tiene un crecimiento de 1 luego la recta tangente en dicho punto es* $y = f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0)$ *o sea* $y = 1(x - 2) + (-3)$.

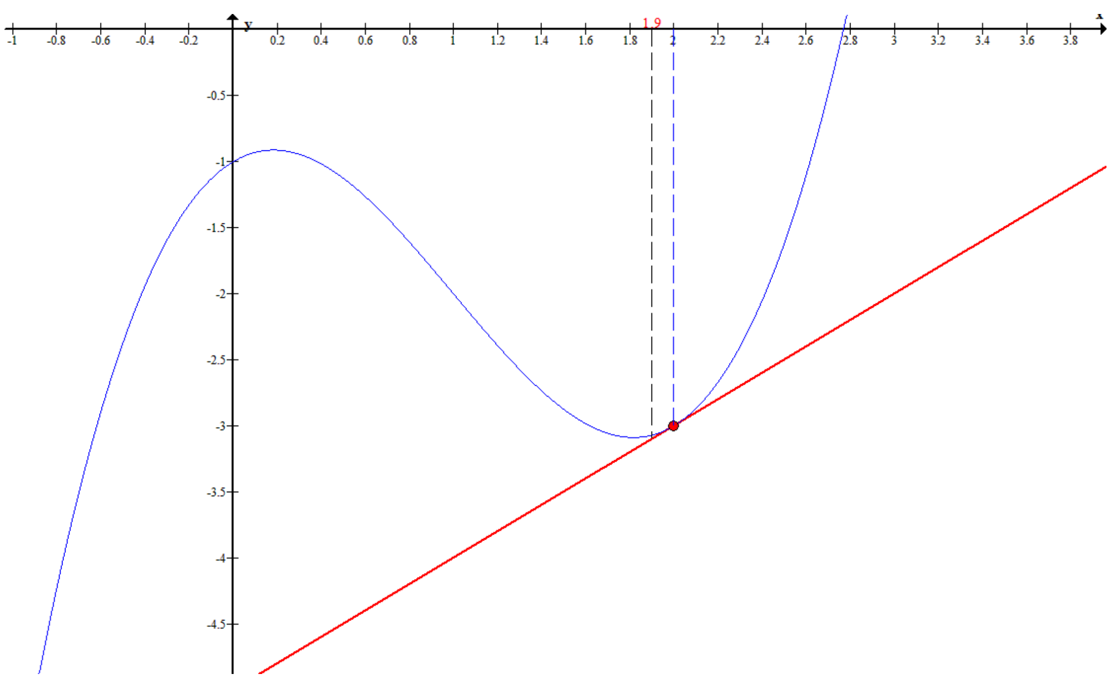


Figura 1: aproximación tangente

La recta tangente entonces es $y = x - 5$ *que es una función muy fácil de evaluar en* 1,9*, nos da* $y = -3{,}1$*. Lo que podemos afirmar entonces sin usar una calculadora es que el valor de la función* $f(x) = x^3 - 3x^2 + x - 1$ *en* $x = 1{,}9$ *es aproximadamente* $-3{,}1$ *lo escribimos como* $f(1{,}9) \approx -3{,}1$*, el valor real es de* $y = -3{,}071$*.*

El error entonces que estamos cometiendo al decir que el valor de la función f *en* $x = 2$ *es de* $-3{,}1$ *es simplemente de* 0,029*, a pesar de no ser ésta una función difícil de evaluar ya que es un polinomio, sirve para ilustrar el porque se busca aproximar una función mediante una recta, es simplemente porque es mas cómodo y fácil evaluar rectas que cualquier otra función*

En la mayoría de casos la evaluación de una función no es una tarea sencilla, los computadores y calculadoras siempre va a realizar una aproximación de dichas evaluaciones y en todos los casos lo hacen mediante la evaluación de polinomios que aproximan la función. Nosotros usaremos por el momento solo polinomios de primer grado que son las rectas tangentes.

Ejemplo 2. *Aproximar la función* $f(x) = \sin(x^2 - 1)$ *en el punto* $x = 0{,}9$*. Nuevamente evaluar la función en el punto dado no es sencillo a mano pero en un punto muy cercano si tiene sentido evaluar la función por lo sencillo que resulta, ya que la función evaluada en* 1 *es* $\sin(0) = 0$*, para aproximar el valor de la función en el punto es necesario encontrar la ecuación de la recta tangente y usarla en remplazo de la función.*

Como $f'(x) = \cos(x^2 - 1)(2x)$ *y al evaluarla en* 1 *da* $f'(1) = \cos(0)2 = 2$ *luego la ecuación de la recta tangente es* $y = 2(x - 1) + 0$ *que al evaluarla en* $x = 0{,}9$ *nos da* $y = -0{,}2$*, mientras la función evaluada en* 0,9 *nos da* $-0{,}188858895$ *como se ve otra vez es un valor bastante cercano a la aproximación que encontramos.*

1.1: Ejercicios

1. Encuentre mediante linealización una aproximación del valor de la función $f(x) = e^{3\sin(x)}$ en el punto $x = 0{,}1$
2. *a*) Trate de aproximar el valor de la función e^x en el punto $x = 1$ usando la recta tangente a la función en el punto $x = 0$
   b) Realice un gráfico que ilustre el ejercicio anterior
   c) Cual es el error de su aproximación y porque es tan grande
3. Encuentre una aproximación del valor de la función $f(x) = \sqrt{\frac{x}{10} - \frac{1}{2}}$ en el punto $x = 6$, ¿cuál punto escogería usted para hacer la aproximación? (recuerde que debe ser un punto cercano a $x = 6$ en donde quede fácil evaluar la función f)

1.2: Método de Newton

Así como necesitamos aproximar la evaluación de la mayoría de las funciones también aparece la necesidad de aproximar los puntos en los cuales las funciones alcanzan algún valor, en particular cuando alcanzan el valor de cero es decir donde tienen una raíz.

Para muchas funciones no hay necesidad de hacer ésto, como por ejemplo resolver la ecuación $x^2 - 4 = 0$ que consiste simplemente en despejar, y encontrar que las soluciones son $x = 2$ y $x = -2$ no creo que sorprenda a nadie.

Pero encontrar la solución a la ecuación $\cos(x) = x$ no es tan simple ya que la única solución es un número irracional que según el teorema del valor intermedio se encuentra entre cero y 1 ya que al escribir la ecuación como $\cos(x) - x = 0$, vemos que la función $f(x) = \cos(x) - x$ toma por imagen en 0 el valor $f(0) = 1$ que es positivo y en $x = 1$ toma el valor $f(1) = \cos(1) - 1 \approx -0{,}459697694$ que es negativo, luego en algún punto entre 0 y 1 la función que es continua debe alcanzar el valor de 0. La pregunta es, ¿Cuál es el valor de la raíz de la función $f(x) = \cos(x) - x$?.

Un método construido para dar respuesta a éste interrogante es el de Newton, que consiste en usar la recta tangente para aproximar la raíz de una función, la siguiente gráfica ilustra el método de Newton.

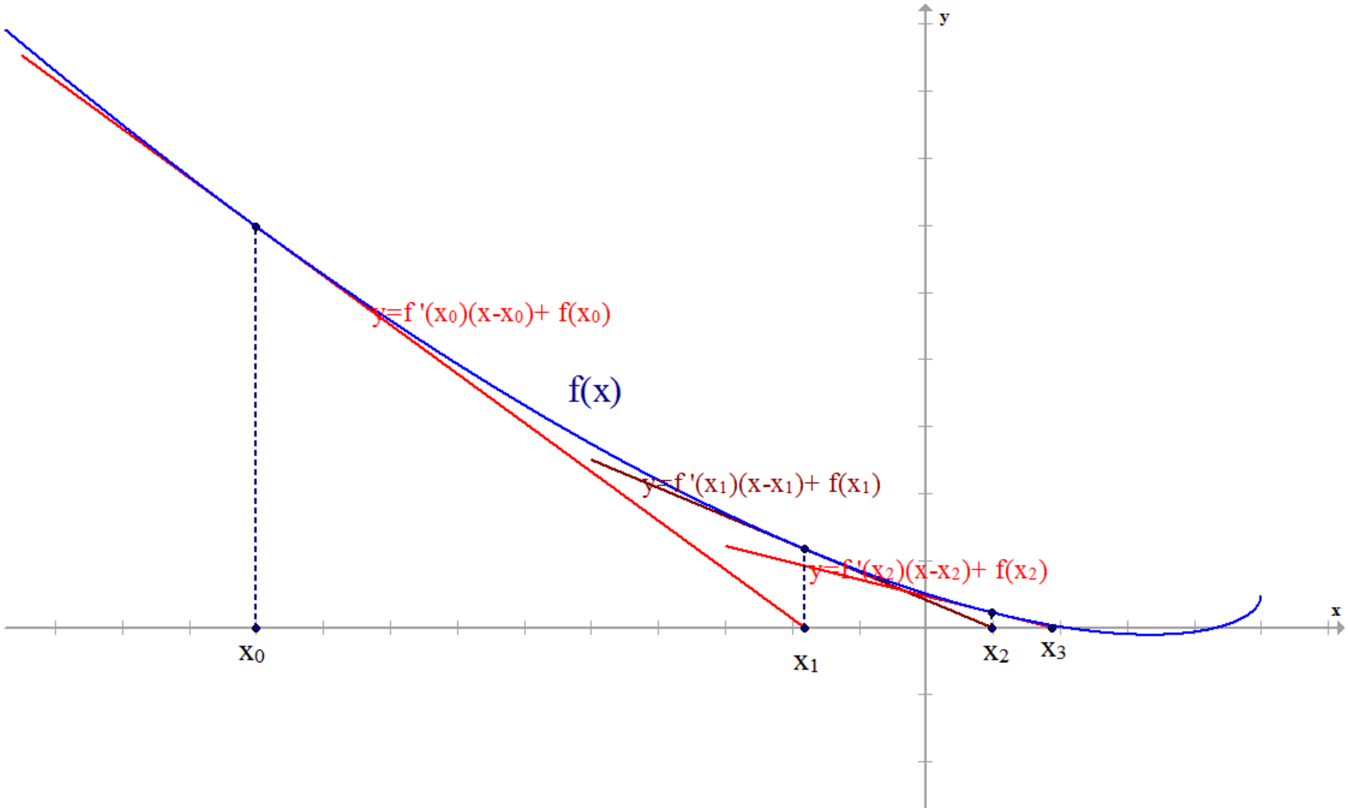


Figura 2: Método de Newton

- Como se ve en la gráfica uno empieza simplemente escogiendo un valor arbitrario x_0. Lo más probable es que no sea una raíz, de ser así ya terminó el método.
- consideramos luego la recta tangente a la función en dicho punto que en general es $y = f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0)$, como ésta es una recta es muy simple encontrar el valor de la raíz de ésta en vez de la raiz de la función
- La raiz de la recta tangente inicial es pues el valor x para el cual $0 = f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0)$ que es $x = x_0 - \frac{f(x_0)}{f'(x_0)}$, valor al que llamamos x_1 como se aprecia en la gráfica.
- Realizamos la misma construcción que habíamos realizado en x_0 pero en x_1 y con éste encontramos x_2
- Finalmente bajo condiciones apropiadas el método termina por acercarnos al valor de la raíz

veamos con una tabla como el método ne Newton tomando como punto inicial $x = 0$ termina por encontrar una aproximación de la raíz

i	$f(x_i) = \cos(x_i) - x_i$	$f'(x_i) = -\sin(x_i) - 1$	$x_i = x_{i-1} - \frac{f(x_{i-1})}{f(x_{i-1})}$
0	1	-1	0
1	$-0{,}459697694131860$	$-1{,}841470984807900$	1
2	$-0{,}018923073822117$	$-1{,}681904952941490$	0,750363867840244
3	$-0{,}000046455898991$	$-1{,}673632544224300$	0,739112890911362
4	$-0{,}000000000284721$	$-1{,}673612029308950$	0,739085133385284
5	0	$-1{,}673612029183210$	0,739085133215161
6	0	$-1{,}673612029183210$	0,739085133215161

Como se ve en la tabla nuestra cuarta aproximación a la raíz es el valor $x_4 = 0{,}739085133385284$ en el cual la función vale $f(x_4) = -0{,}000000000284721$ y en nuestra 5 aproximación el valor de la función en x_5 es de cero.

1.3: Ejercicios

1. Encuentre la sexta aproximación a la raíz de la función $f(x) = x + e^x$ comenzando en $x_0 = 0$
2. *a*) Encuentre la segunda aproximación a la raíz de la función $f(x) = \sqrt{4 - x^2}$ comenzando en $x_0 = 1$
   b) Realice una gráfica y explique la situación.
3. Encuentre una raíz de función $f(x) = |x^2 - 1| - 1$ comenzando en $x_0 = 1$, proponga un punto inicial mejor.

Sección 2: Descripción de funciones

Ahora vamos a tratar de describir funciones usando la noción de derivada que como habíamos mencionado anteriormente sirve para medir la pendiente de la función en un punto específico. También daremos una interpretación a la segunda derivada y veremos el bosquejo de gráficas usando éstos dos conceptos.

2.1: Criterio de primera derivada

Si tomamos por ejemplo la función $f(x) = x^2$ vemos que $f'(x) = 2x$ y que $f'(x) > 0$ si $2x > 0$ como todos sabemos solo ocurre si $x > 0$, la interpretación que le damos a éste resultado es que la función $f(x) = x^2$ es creciente (tiene derivada positiva) únicamente si es evaluada en puntos mayores a cero la función creciente más fácil que uno se imagina es una recta entonces por el momento podemos imaginarnos ésta función como una recta de pendiente positiva o creciente y decreciente si $x < 0$.

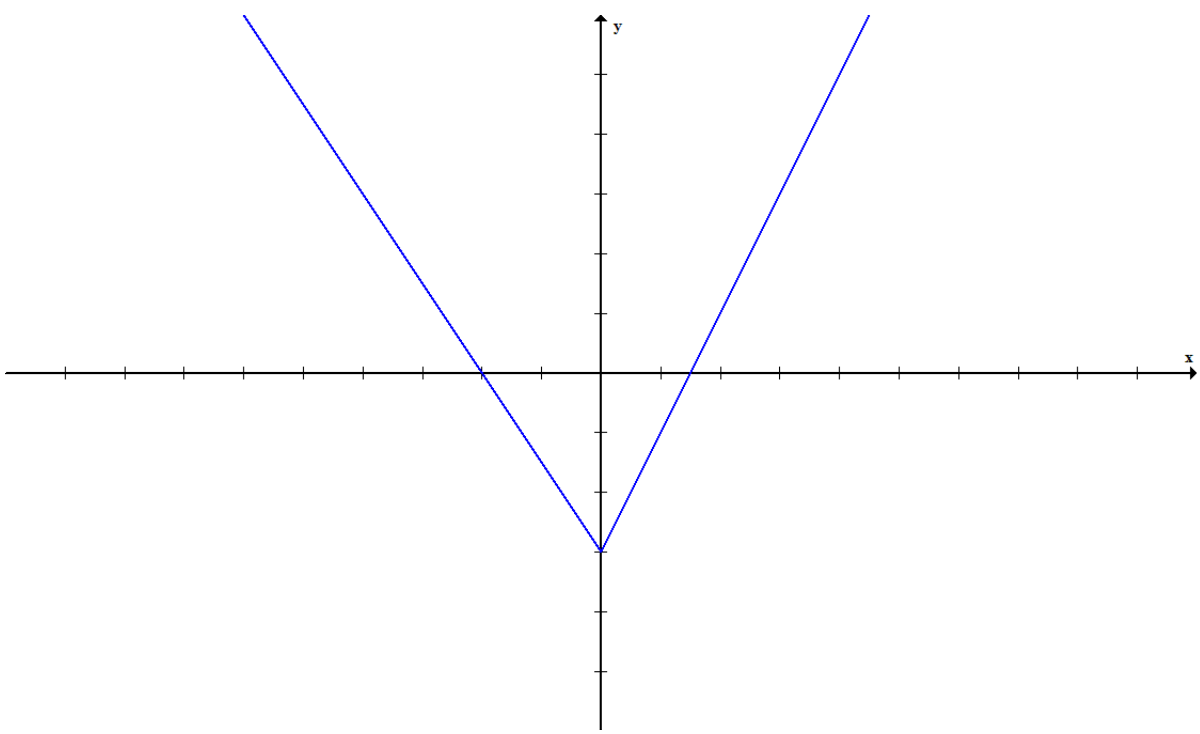


Figura 3: esqueleto de x^2

ésta gráfica para nada es como la real pero es una aproximación a la misma, una con poca precisión, muchas funciones tienen el mismo comportamiento y de ésta gráfica no se tiene certeza ni siquiera por donde pasa.

Si embargo podemos construir un esqueleto lineal que nos permite intuir como se va a verla gráfica de la función utilizando para ésto lo descrito anteriormente.

Ejemplo 3. *Si queremos graficar la función $f(x) = 2x^3 - 3x^2 + 1$ aunque tabulemos usando muchos puntos jamas tendremos un representación exacta siempre será una aproximación de la función real pues simplemente tendríamos que evaluar la función en todos los puntos de su dominio que usualmente son los reales para poder tener no una representación sino la función exacta.*

Justificados en ésto buscamos poder obtener una representación significativamente buena con el menor esfuerzo y éste menor esfuerzo se consigue usando las derivadas como herramientas.

Obtendremos la derivada de la función que es $f'(x) = 6x^2 - 6x$ que se puede factorizar como $6x(x-1)$ lo siguiente es tratar de averiguar en donde la derivada que calculamos es positiva, negativa cero o no existe. Para ésto comenzamos encontrando en donde se hace cero o no existe.

Esta función siempre existe porque su dominio son todos los reales y para averiguar donde se hace cero resolvemos $f'(x) = 0$ las soluciones de ésta ecuación hacen parte de los puntos críticos, que son los puntos en los que la derivada se hace cero o no existe. *, que son la solución de $6x(x-1) = 0$, como es un producto éste es cero solo si alguno de los factores es cero en éste casi si $x = 0$ o $x - 1 = 0$ luego la solución de ésta ecuación es decir los puntos críticos son $\{0, 1\}$*

Ahora que conocemos en donde se hace cero la derivada usamos el teorema del valor intermedio y la continuidad de la derivada para averiguar en donde es positiva o negativa la derivada.

Dado que la derivada solo se anula en 0 y 1 si evaluamos la función en dos puntos antes de cero x_0 y x_1 no se puede tener que en un número la derivada sea positiva y en otro la derivada sea negativa ya que de ser así por la continuidad de la derivada se tendría la existencia de otro cero entre x_0 y x_1 lo que no es posible porque dijimos que no tenía más ceros.

Lo que dije antes es que solo tenemos que considerar los intervalos $(-\infty, 0)$, $(0, 1)$ y $(1, \infty)$ que son los intervalos generados por los puntos críticos y evaluar la derivada en un punto cualquiera escogido encada intervalo, el signo obtenido de ésta evaluación es el mismo signo que tendrán todas las imágenes de la derivada en ese intervalo.

Los intervalos	$(-\infty, 0)$	$(0, 1)$	$(1, \infty)$
Escogemos el punto	$x = -1$	$x = \frac{1}{2}$	$x = 2$
Evaluamos f' en el punto	$f'(-1) = 12 > 0$	$f'(\frac{1}{2}) = -\frac{3}{2} < 0$	$f'(2) = 12 > 0$
f' En todo el intervalo	$f'(x) > 0$	$f'(x) < 0$	$f'(x) > 0$
Entonces la función$f(x)$	*crece*	*decrece*	*crece*

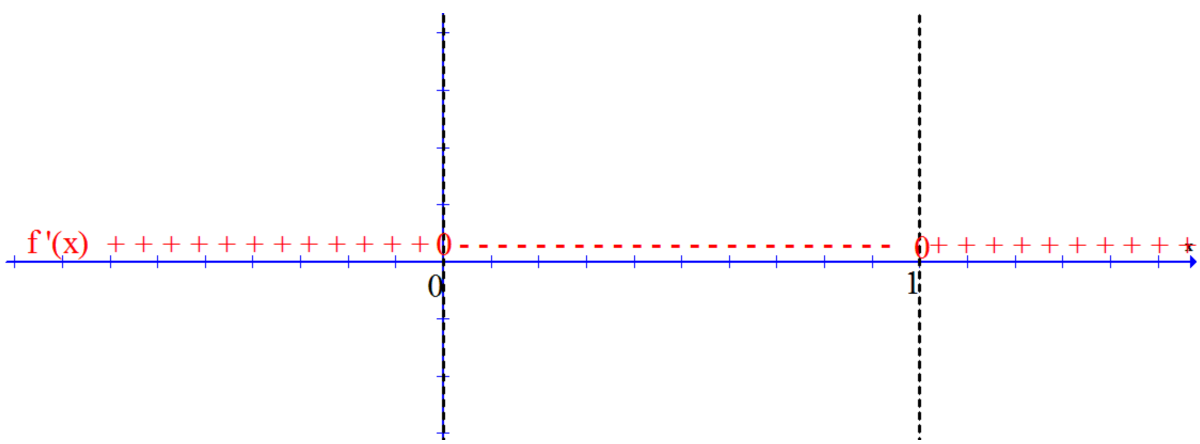


Figura 4: Comportamiento de $f'(x)$

presentamos entonces un esqueleto de la función $f(x) = 2x^3 - 3x^2 + 1$, la pendiente de cada recta no representa la pendiente de la función simplemente si es creciente o decreciente, solo se escogieron los puntos $(0, 1)$ y $(1, 0)$ por donde pasa la función evaluando la función en dichos puntos puede constatar ésta afirmación.

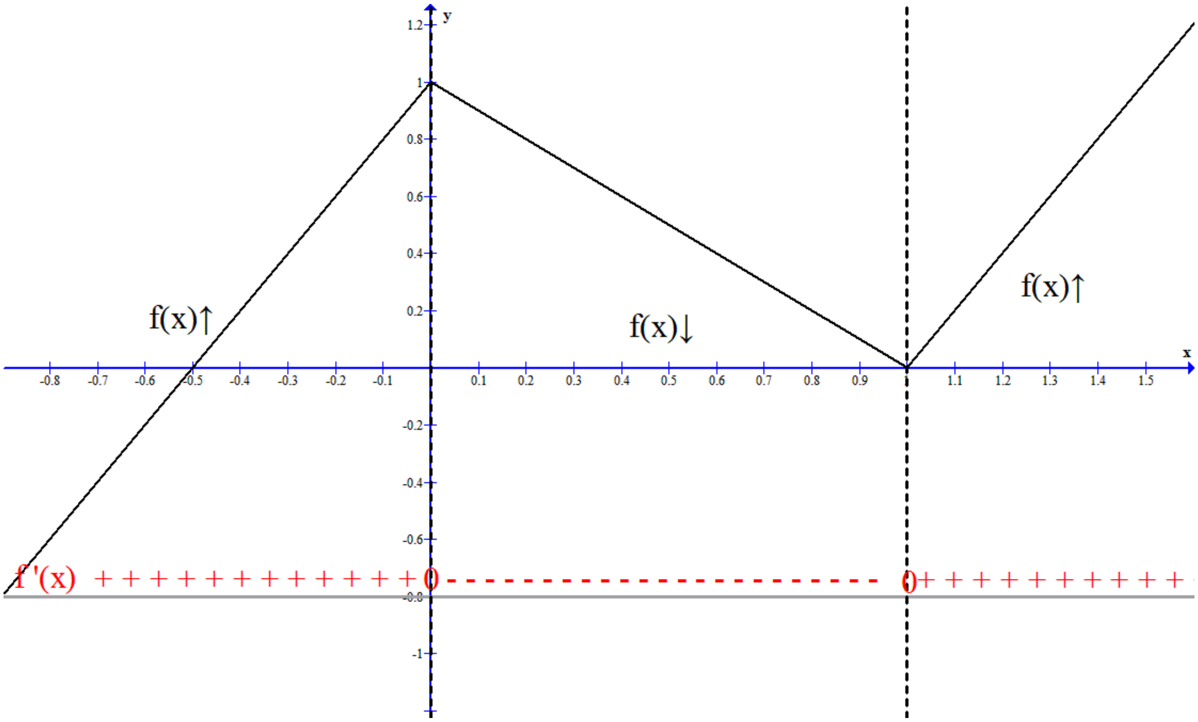


Figura 5: Esqueleto de la función $f(x) = 2x^3 - 3x^2 + 1$ construido usando la derivada

Ahora podemos ver la gráfica de la función junto al esqueleto previamente realizado.

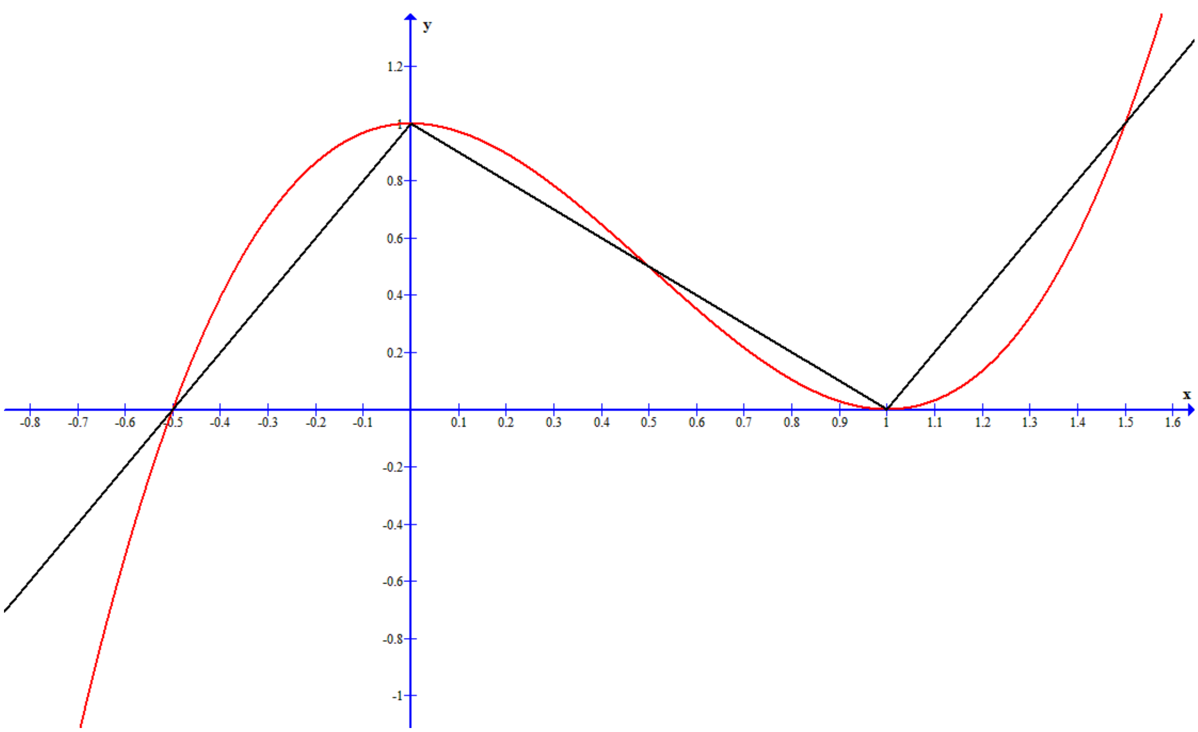


Figura 6: la función $f(x) = 2x^3 - 3x^2 + 1$ y el esqueleto construido usando la derivada

Por el momento podemos entonces construir esqueletos de funciones que solo describen su crecimiento y decrecimiento usando el siguiente procedimiento

PROCEDIMIENTO DE PRIMERA DERIVADA PARA REPRESENTAR FUNCIONES

1. Encontrar el dominio de la función $f(x)$, recuerde que solo se puede considerar y graficar una función en su dominio
2. Calcular la derivada y encontrar con ésta los puntos críticos, recuerde que Los puntos críticos de una función $f(x)$ son las raíces de la derivada y los puntos del dominio de la función en las cuales la derivada no existe.
3. Usar el teorema del valor intermedio para determinar los intervalos de crecimiento y decrecimiento de la función. Éstos son los intervalos en donde la derivada es positiva o negativa y se encuentran ubicando en una recta real los puntos críticos, identificando los intervalos que se generan sobre el dominio de la función con éstos puntos críticos y evaluando la derivada en un punto cualquiera de cada intervalo. El teorema del valor intermedio le permite afirmar que en cada intervalo la derivada tiene el mismo comportamiento que en el punto escogido.
4. Evaluar la función en los puntos críticos y ubicarlos en el plano cartesiano con el fin de hacer pasar por allí la gráfica de su esqueleto.
5. Realizar la gráfica del esqueleto de la función

Usemos éste procedimiento nuevamente para construir un representación lineal (esqueleto) de la función

$$f(x)=\begin{cases}\sqrt{x+1} & \text{si } x<0\\ \sqrt{1-x} & \text{si } 0\le x\end{cases}$$

Ejemplo 4. *para la función*

$$f(x)=\begin{cases}\sqrt{x+1} & si\ \ x<0\\ \sqrt{1-x} & si\ \ 0\le x\end{cases}$$

primero identificamos su dominio, para ésto recuerde que para que $\sqrt{1+x}$ se pueda evaluar se necesita que $1+x\ge 0$, es decir $-1\le x$ luego la función f no se puede evaluar en números menores a -1 ya que en éstos números debe usarse la regla de asignación $\sqrt{1+x}$ y ésto es imposible. El mismo procedimiento sirve para convencerse que la función no se puede evaluar en número mayores a 1. Luego el dominio de la función es solo $[-1,1]$ Segundo calculamos su derivada. como vimos en la

primera lectura una función a trozos se deriva en cada intervalo en que está definida y en la costura se deriva mediante la definición o también se puede simplemente verificar si los limites laterales de las derivadas coinciden en la costura así

$$f'(x)=\begin{cases}\frac{1}{2\sqrt{1+x}} & si\ \ x<0\\ \frac{-1}{2\sqrt{1-x}} & si\ \ 0<x\end{cases}$$

y luego revisamos en la costura que es $x=0$ puede ser así:

$$\lim_{x\to 0^-} f'(x)=\lim_{x\to 0^+} f'(x)$$

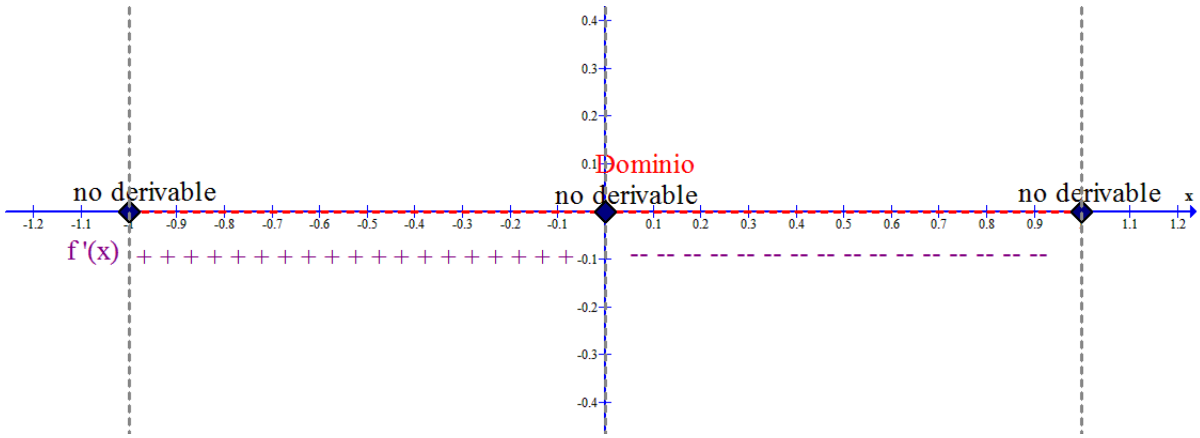
de coincidir éstos límites existe la derivada en el punto, de lo contrario no existe la derivada en el punto, recuerde que a la izquierda del cero la derivada se calcula con $\frac{1}{2\sqrt{1+x}}$ mientras que a la derecha se calcula con $\frac{-1}{2\sqrt{1-x}}$, luego

$$\lim_{x\to 0^-} f'(x)=\lim_{x\to 0^-}\frac{1}{2\sqrt{1+x}}\stackrel{?}{=}\lim_{x\to 0^+} f'(x)=\lim_{x\to 0^+}\frac{-1}{2\sqrt{1-x}}$$

$$\lim_{x\to 0^-}\frac{1}{2\sqrt{1+x}}=\frac{1}{2}\stackrel{?}{=}\lim_{x\to 0^+}\frac{-1}{2\sqrt{1-x}}=-\frac{1}{2}$$

$$\frac{1}{2}\neq-\frac{1}{2}$$

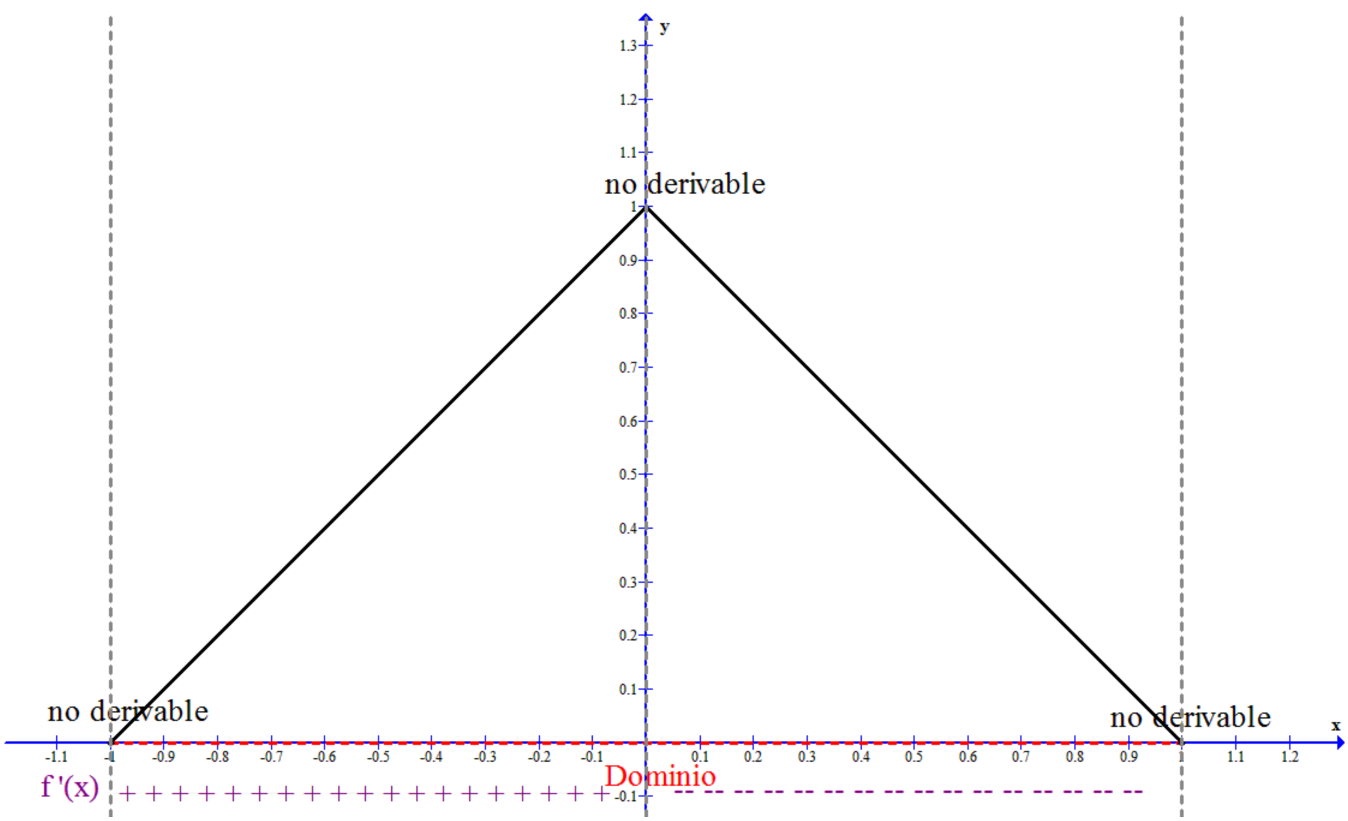
por ende la función no es derivable en $x=0$, observe que las derivadas también tienen problemas en los extremos del dominio, $f'(-1)$ se debe evaluar con la regla $\frac{1}{2\sqrt{1+x}}$ pero eso es imposible porque en dicho punto la regla de asignación dividiría por cero. Misma cosa en $x=1$ luego los puntos críticos son $\{-1,0,1\}$ todos son críticos porque la derivada no existe allí no *existen puntos críticos en los cuales la derivada de cero ya que ninguna de las dos reglas de asignación que tiene la derivada se anula alguna vez (porque un cociente se hace cero solo si su numerador es cero y su denominador es distinto de cero)*



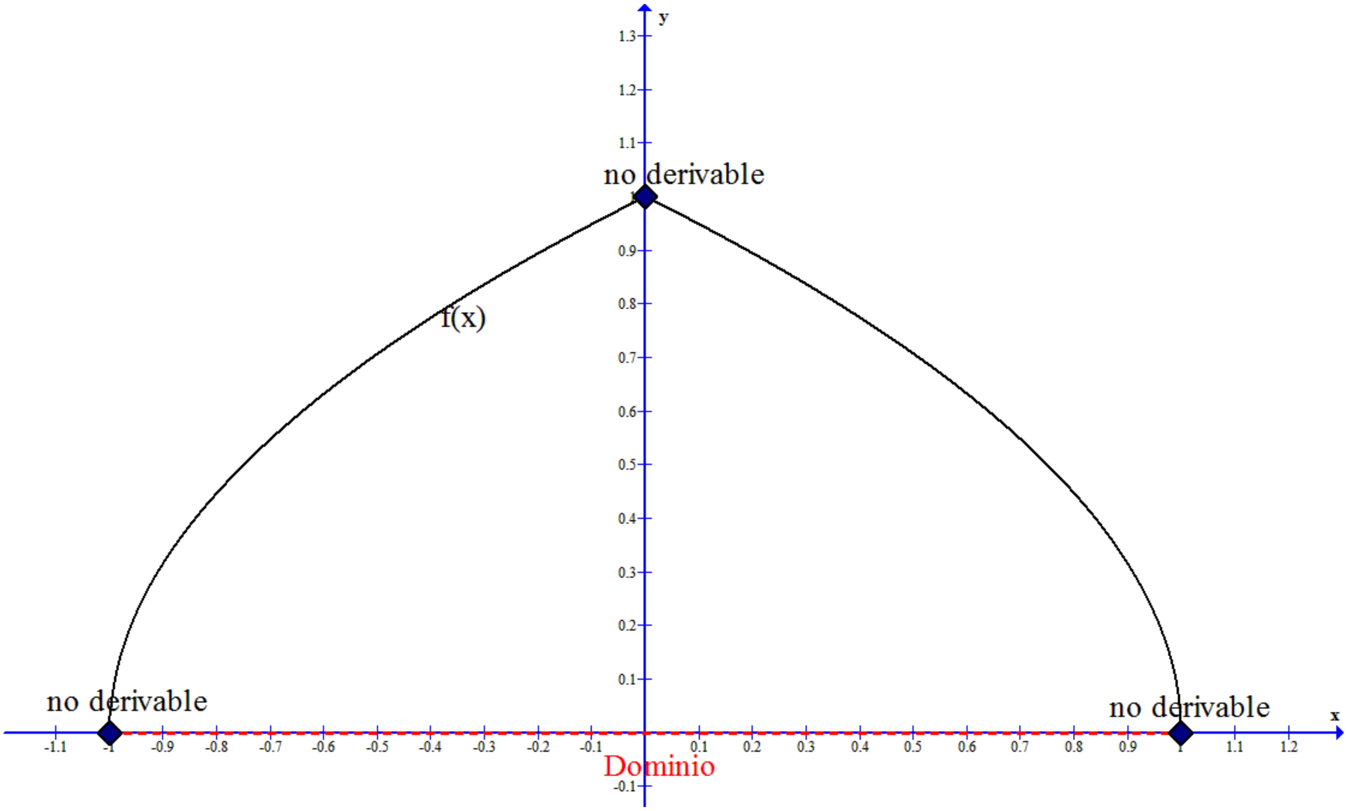
Como se ve en la gráfica anterior el dominio quedo dividido en dos intervalos que son $(-1,0)$ *y* $(0,1)$ *escogemos entonces un número en cada uno de ellos por ejemplo en* $x = -0{,}5$ *que está en el primer intervalo la derivada nos da* $f'(-0{,}5) = \frac{1}{\sqrt{1+(-0{,}5)}} = 1{,}414213562$ *luego la derivada es positiva en todo ese intervalo y éste se convierte en un intervalo de crecimiento, al evaluar la derivada en* $x = 0{,}5$ *nos da* $f'(0{,}5) = \frac{-1}{\sqrt{1-0{,}5}} = -1{,}414213562$ *luego la derivada es negativa en todo el intervalo entonces éste es un intervalo de decrecimiento de la función.*

luego evaluamos la función también en los puntos críticos $f(-1) = \sqrt{1+(-1)} = 0$, $f(0) = \sqrt{1-0} = 1$ *y* $f(1) = \sqrt{1-1} = 0$, *con esto ya conocemos tres puntos por los que debe pasar la función y al construir el esqueleto de la misma lo tenemos en cuenta entonces en el intervalo* $(-1,0)$ *la función es creciente porque la derivada es positiva y pasa por los puntos* $(x,y) = (-1,0)$ *y* $(x,y) = (0,1)$, *en el intervalo* $(0,1)$ *la función es decreciente porque la derivada en éste intervalo es negativa y pasa por los puntos* $(x,y) = (0,1)$ *y* $(x,y) = (1,0)$

Con ésta información construimos entonces el siguiente esqueleto.

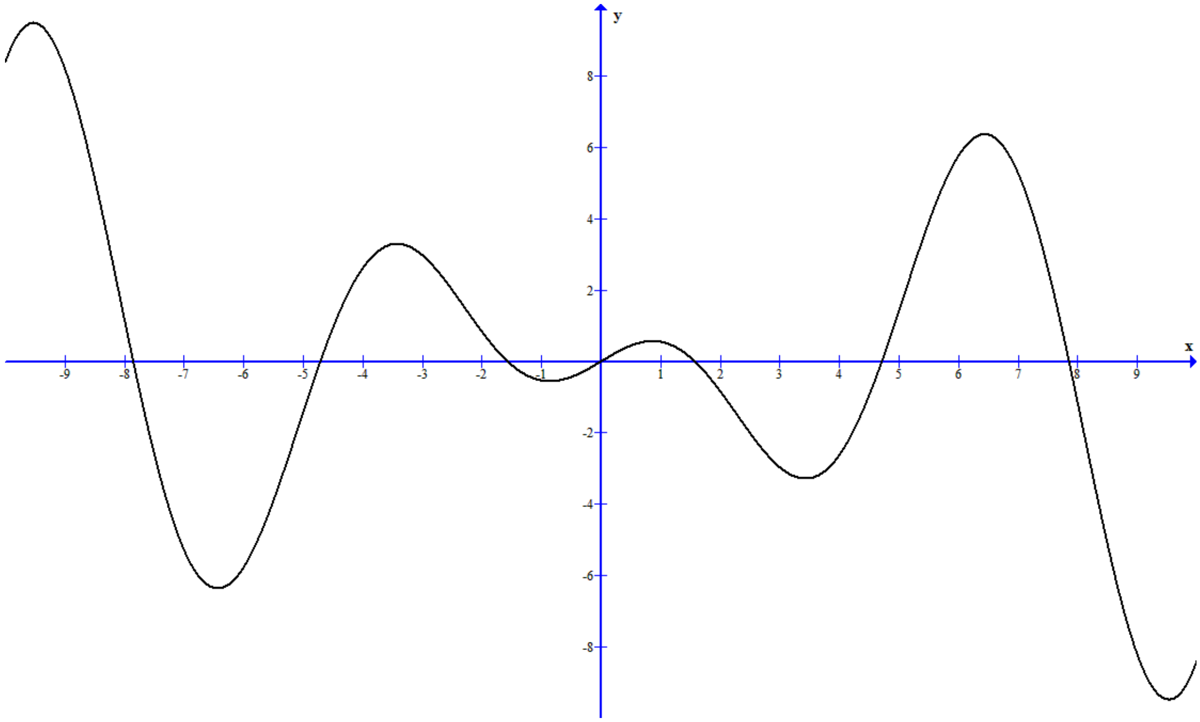


Se puede comparar con la gráfica de la función que es ésta.



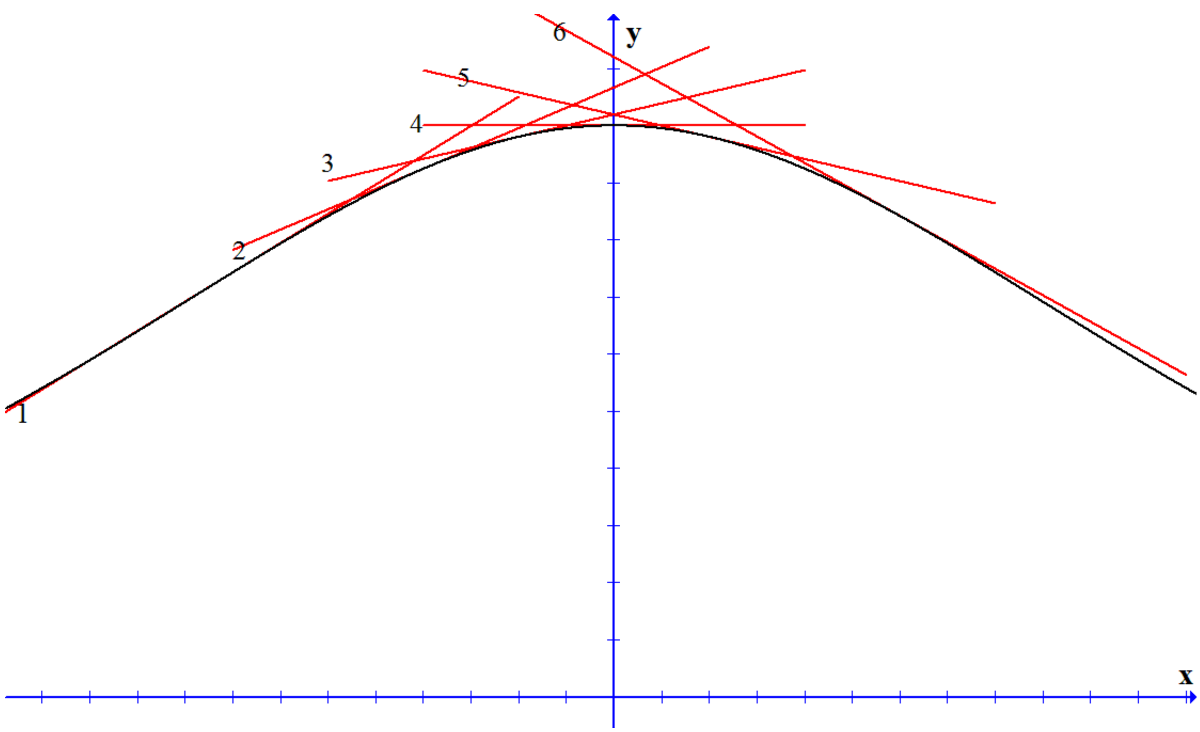
2.2: Ejercicios

1. Encuentre los puntos críticos de la función $f(x) = |x^2 - 1|$
2. Grafique el esqueleto de la función $f(x) = 3x^4 + 4x^3 - 12x^2$
3. Grafique el esqueleto de la función $f(x) = \sqrt{1 - x^2}$
4. Encuentre los intervalos de crecimiento y decrecimiento de la función $\frac{1}{x^2+1}$
5. Grafique la función $f(x) = \frac{1+x}{1-x}$, no olvide que ésta función posee asíntotas
6. Diga cuales son los intervalos de crecimiento, decrecimiento, y cuales son los puntos críticos para la función cuya gráfica es



2.3: Criterio de Segunda derivada

Comencemos por dar una interpretación de la segunda derivada.



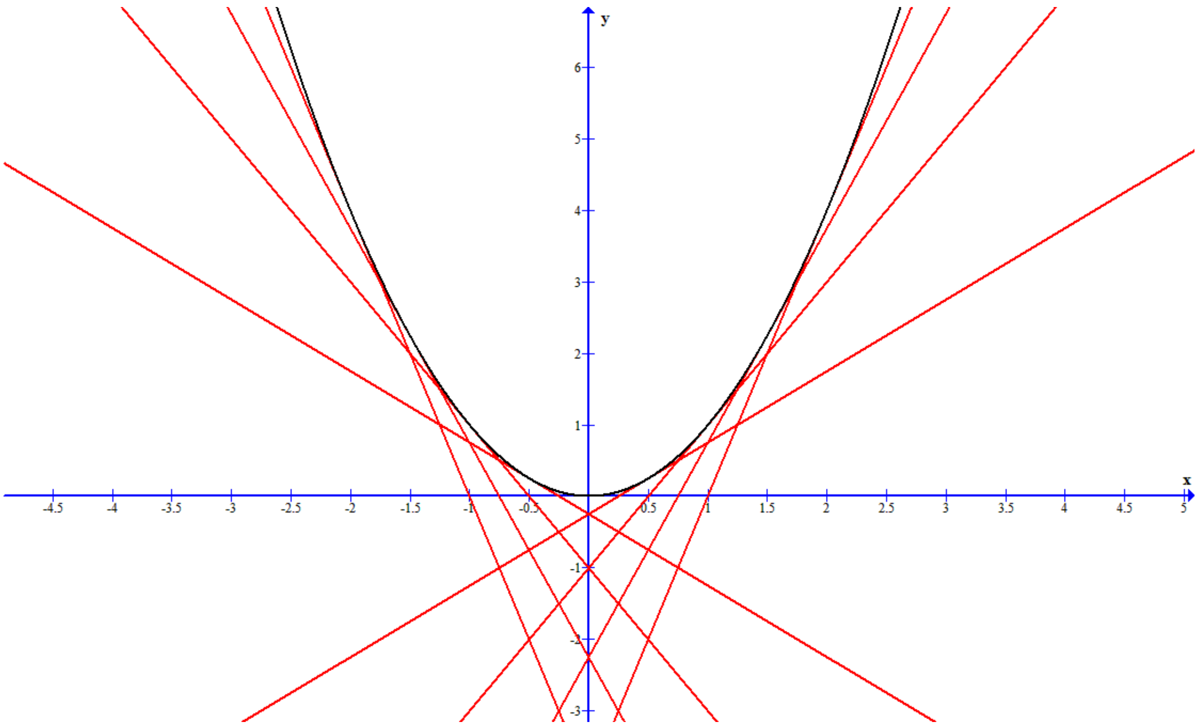
En la gráfica anterior se presenta una sucesión de rectas tangentes a un función dada la intención al presentar ésta es que observe que las rectas tangentes también presentan cambios, éstos cambios se analizan de izquierda a derecha y rápidamente se puede ver que las pendientes de éstas rectas tangentes van decreciendo luego la variación o el cambio de éstas pendientes es negativo no estoy diciendo que las pendientes sean negativas sino que el cambio entre una pendiente y la siguiente es decreciente luego la función que genera cada una de esas cantidades (pendientes) debe ser una función decreciente o sea $f'(x)$ decrece, que se traduce en que su derivada sea negativa o sea $f''(x) < 0$

Es un buen ejercicio para el lector que trate de estimar la pendiente de cada una de las rectas y vea de verdad que a medida que avanza a la derecha éstas pendientes son cada vez menores, como la derivada de f es la que genera cada una de esas pendientes la observación anterior nos dice que la derivada es decreciente luego su derivada o sea la segunda derivada de f es negativa.

Siempre que la segunda derivada sea negativa significa entonces que la primera es decreciente y la gráfica de la función se verá entonces como la que está arriba, a éstas gráficas se les llama cóncavas hacia abajo.

Si la segunda derivada es positiva significa que la primera derivada crece y entonces la gráfica de la función f sera cóncava hacia arriba.

Las funciones mas simples a las que se acude para recordar éstas definiciones son las parábolas, mire por ejemplo la gráfica de x^2 que es cóncava hacia arriba trate de identificar las pendientes de las rectas tangentes a la curva recorriendo la gráfica de izquierda a derecha y verá como éstas van creciendo.



Con ésta interpretación de la segunda derivada se puede dar cuerpo o volumen al esqueleto de la función que se podía construir usando la primera derivada

Consideremos un polinomio y tratemos entonces de usar el criterio de primera derivada para construir un esqueleto al que luego forma usando la segunda derivada

Ejemplo 5. *Tomemos* $f(x) = 3x^4 + 4x^3 - 6x^2 - 12x + 1$.

- *El dominio son todos los reales por se un polinomio*
- *La derivada es* $f'(x) = 12x^3 + 12x^2 - 12x - 12$
- *luego los puntos críticos de existir solo son las soluciones de la ecuación* $f'(x) = 0$, *o sea las soluciones de* $12x^3+12x^2-12x-12 = 0$ *ecuación que como todas las ecuaciones polinomiales se resuelve factorizando, en éste caso es fácil queda* $12(x^3+x^2-x-1) = 12(x^2(x+1)-(x+1)) = 12(x+1)(x^2-1) = 12(x+1)(x-1)(x+1)$ *en donde se ve que las raíces de la derivada es decir los puntos críticos son solamente* $x = -1$ *y* $x = 1$ *ya que para que* $12(x+1)(x-1)(x+1) = 0$ *se necesita que alguno de los factores de ésta multiplicación sea cero por ende o* $x+1 = 0$ *o* $x-1 = 0$ *o lo que es lo mismo o* $x = -1$ *o* $x = 1$.

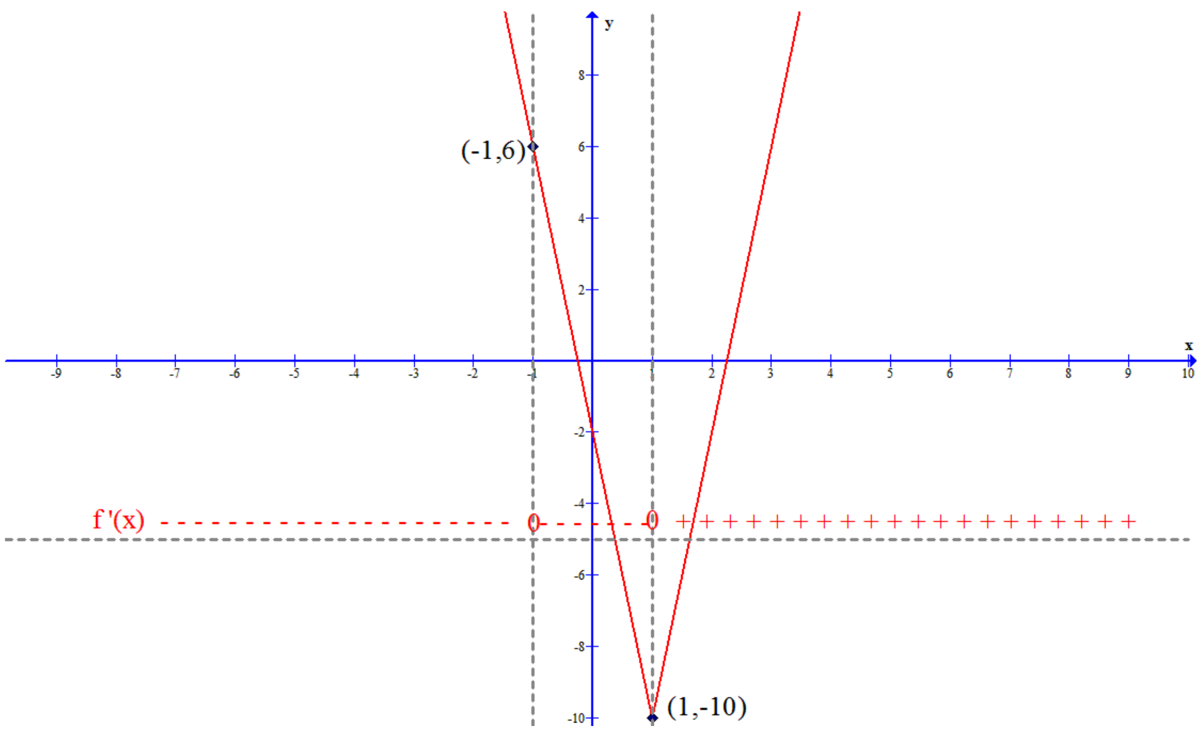
- *Con los puntos críticos se genera la partición del dominio de la función, que en este caso son todos los reales, en intervalos que son los intervalos de crecimiento o decrecimiento, éstos intervalos son* $(-\infty, -1)$, $(-1, 1)$ *y* $(1, \infty)$

- *Escogemos pues en cada intervalo un punto y usando la continuidad de la derivada podemos deducir si éstos intervalos son intervalos de crecimiento o de decrecimiento.*

  En el primer intervalo escogemos $x = -2$ *y evaluando la derivada encontramos que* $f'(-2) = -36$ *luego éste es un intervalo de decrecimiento para la función porque* $f' < 0$ *en todo el intervalo, en el intervalo* $(-1, 1)$ *podemos escoger el cero (recuerde que cualquier punto del intervalo sirve)* $f'(0) = -12$*, entonces éste también es un intervalo de decrecimiento, por último en el intervalo* $(1, \infty)$ *podemos escoger* $x = 2$ *y evaluando al derivada en dicho punto nos da* $f'(2) = 108$*, por lo que éste es un intervalo de crecimiento para la función*

- *Evaluamos entonces la función en los puntos críticos para saber por donde pasa la gráfica de la función,* $f(-1) = 6$ *y* $f(1) = -10$

- *Construimos el siguiente esqueleto de función con ésta información*



Continuemos entonces analizando la segunda derivada, a ésto le haremos un procedimiento similar al realizado con la primera

- *La derivada* $f'(x) = 12x^3 + 12x^2 - 12x - 12$ *tiene por dominio todos los reales por ser un polinomio*

- *La derivada de la derivada o sea la segunda derivada es* $f''(x) = 36x^2 + 24x - 12$ *que siempre existe y tiene entonces por puntos "críticos" únicamente las raíces de la ecuación* $f''(x) = 0$ *(En éste caso no los llamamos puntos críticos porque se confunden con las raíces de la derivada y no necesariamente son iguales).*

  La solución de ésta ecuación se podría encontrar usando la ecuación cuadrática, si $ax^2 + bx + c = 0$ *las soluciones son* $x_1 = \frac{-b-\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$ *y* $x_2 = \frac{-b+\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$*, siempre y cuando* $b^2 - 4ac \geq 0$ *en nuestro caso* $a = 36$, $b = 24$ *y* $c = -12$ *entonces* $b^2 - 4ac = 1008$ *luego las soluciones existen y son* $x_1 = -1$ *y* $x_2 = \frac{1}{3}$

- *Éstos puntos dividen el dominio de la derivada en intervalos que son* $(-\infty, -1)$, $(-1, \frac{1}{3})$ *y* $(\frac{1}{3}, \infty)$.

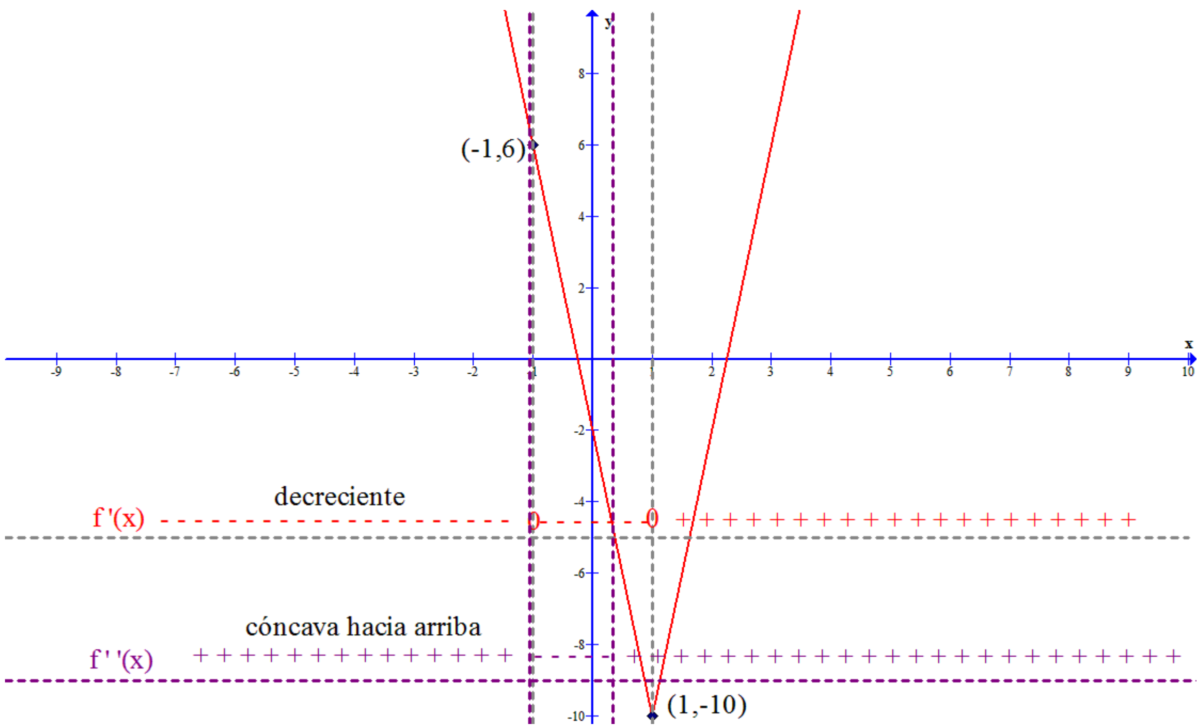
  Escogemos un punto en cada intervalo y evaluamos allí la segunda derivada, en el primer intervalo escogemos $x = -2$ *y al evaluar la segunda derivada nos da* $f''(-2) = 84$ *luego éste es un intervalo de segunda derivada positiva que como* *comentamos hace un momento significa de derivada creciente que quiere decir que la función es cóncava hacia arriba allí, por eso lo llamamos intervalo de concavidad positiva.*

En el siguiente intervalo tomamos $x = 0$ y al evaluar la segunda derivada allí nos da $f''(0) = -12$ luego éste es un intervalo de concavidad negativa, y finalmente en el tercer intervalo tomamos $x = 1$ que al evaluarse en la segunda derivada da $f''(1) = 48$ luego éste es un intervalo de concavidad positiva.

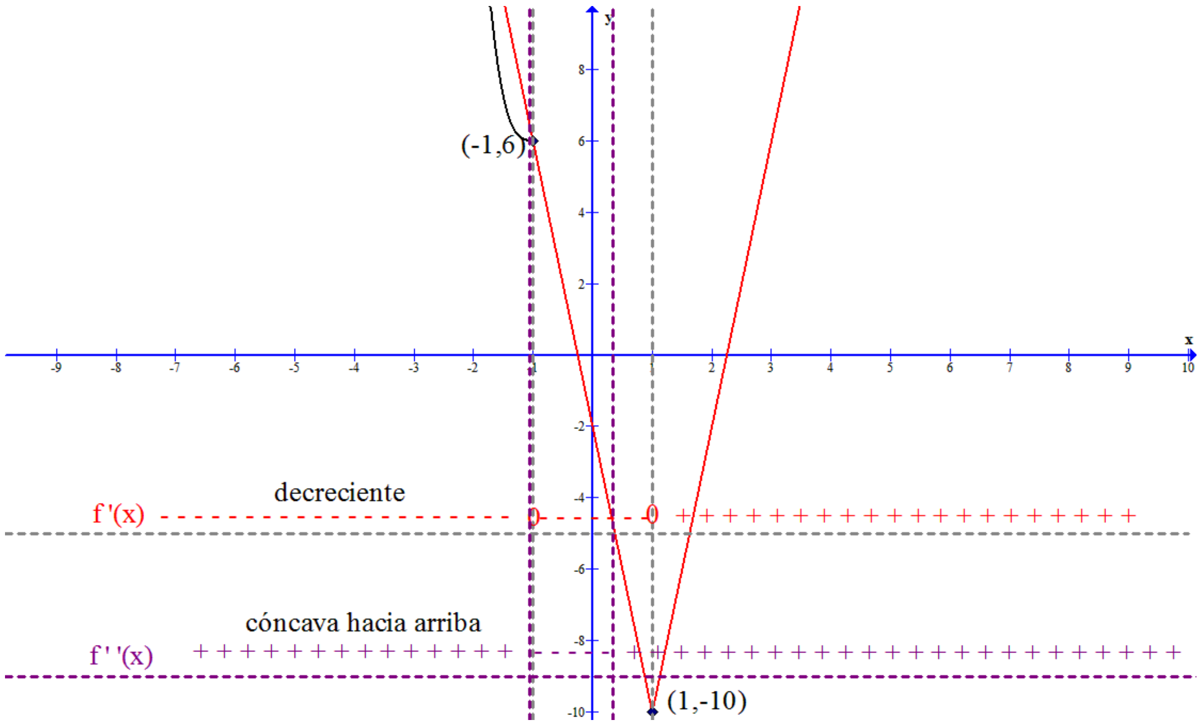
La forma de incorporar los resultado de concavidad obtenidos de la segunda derivada en la gráfica ya construida es usando como molde a las parábolas no ubicamos en un intervalo de los que se genera al sobreponer los obtenidos de la primera derivada y los de la segunda, y allí se puede leer entonces un crecimiento o decrecimiento y una concavidad positiva o negativa.

Si tenemos por ejemplo creciente y cóncava hacia arriba, buscamos una parábola que sea cóncava hacia arriba y de ésta escogemos lo mitad que es creciente, y ésta gráfica la insertamos en la que estamos tratando de construir.

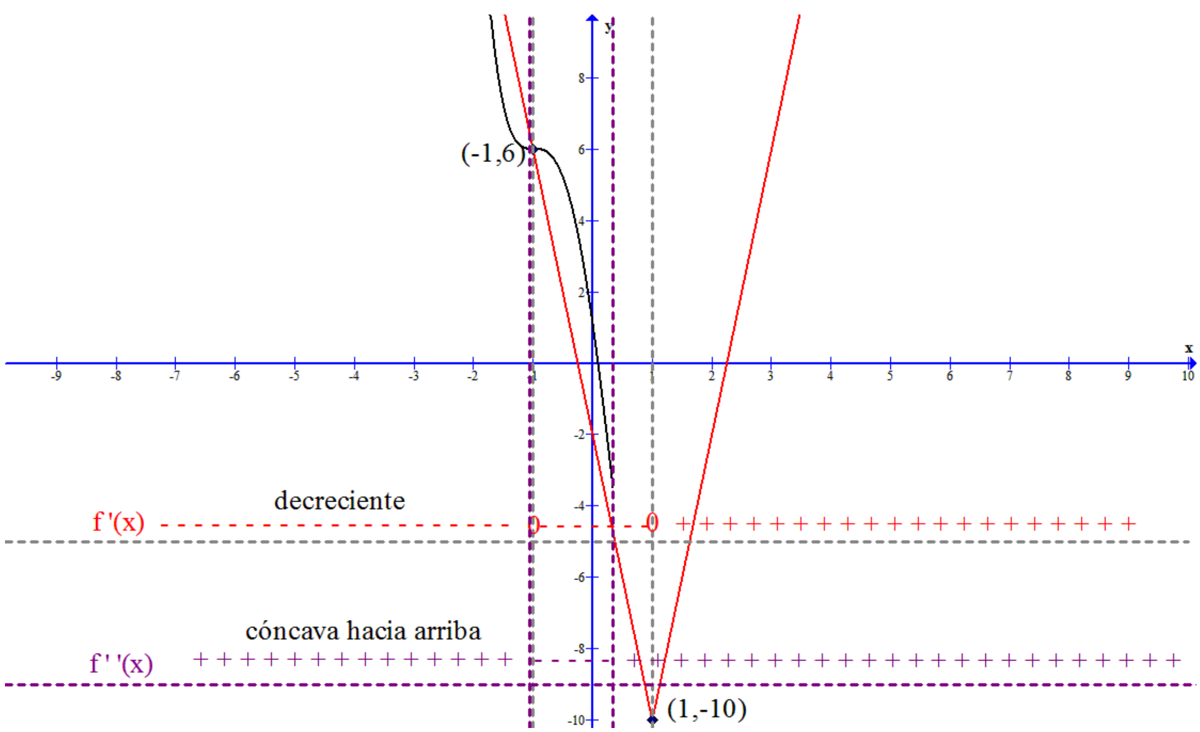
por ejemplo en la siguiente gráfica se presentan los signos de la primera y segunda derivada en sus respectivos intervalos



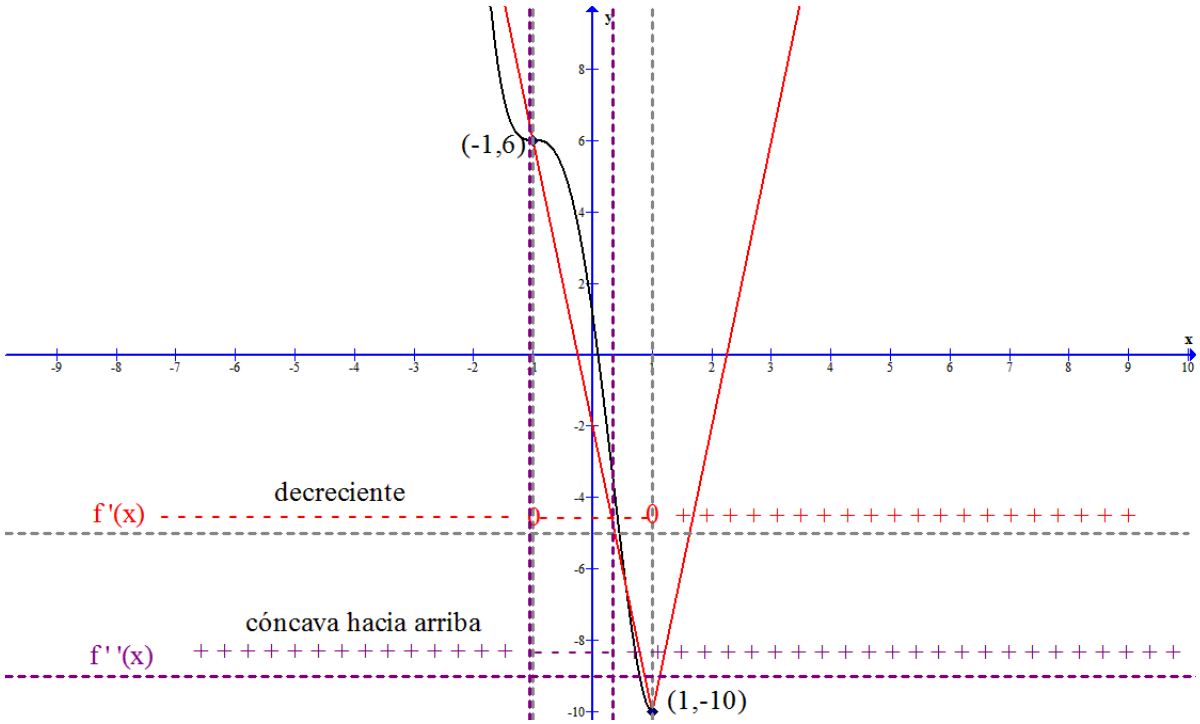
en ésta gráfica se ve que en el intervalo $(-\infty, -1)$ la función debe ser decreciente y cóncava hacia abajo luego buscamos la gráfica de una parábola que abre hacia abajo y tomamos su rama decreciente y la insertamos en ése intervalo teniendo la precaución de que ésta no se salga del intervalo y pase por el punto $(-1, 6)$ ya que por ahí pasa la gráfica de nuestra función



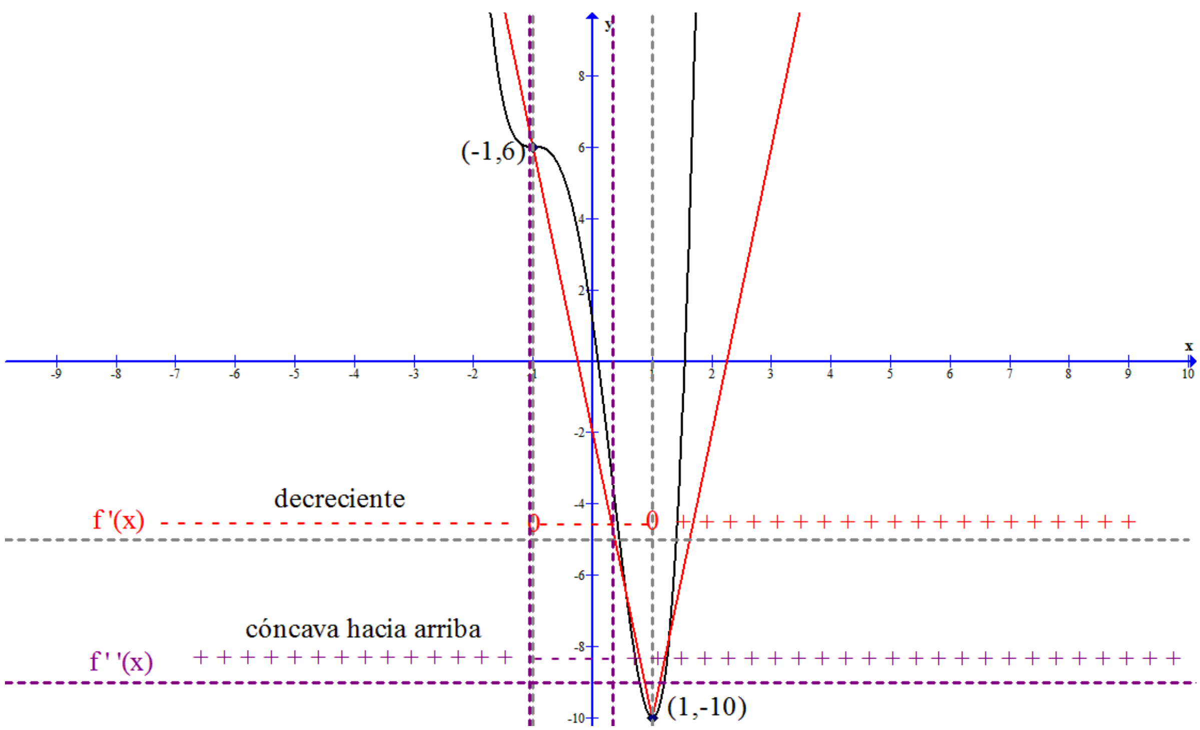
El siguiente intervalo que se obtiene al sobreponer los de la primera y segunda derivada es $(-1, \frac{1}{3})$ *en donde la primera derivada dice que la función es decreciente y la segunda dice que ademas es cóncava hacia abajo, teniendo cuidado que comience en donde terminamos antes podemos tener una gráfica como*



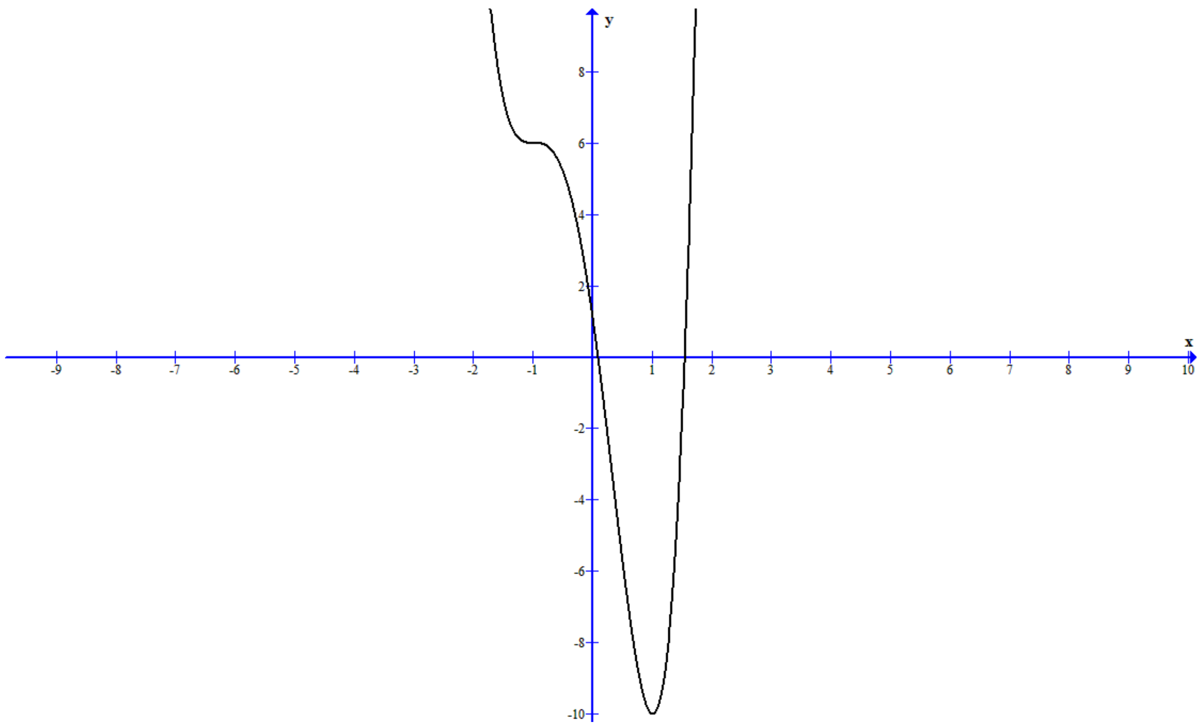
El siguiente intervalo que se obtiene al sobreponer los de la primera y segunda derivada es $(\frac{1}{3}, 1)$ *en donde la primera derivada dice que la función es decreciente y la segunda dice que ademas es cóncava hacia arriba, teniendo cuidado que comience en donde terminamos antes podemos tener una gráfica como*



El último intervalo que se obtiene al sobreponer los de la primera y segunda derivada es $(1, \infty)$ *en donde la primera derivada dice que la función es creciente y la segunda dice que ademas es cóncava hacia arriba, teniendo cuidado que comienze en donde terminamos antes podemos tener una gráfica como*



y al borrar toda la construcción auxiliar se vería la gráfica



Las raíces de la segunda derivada para las que inmediatamente a la izquierda del punto se tiene una concavidad distinta a la que se tiene inmediatamente a la derecha del punto se llaman puntos de inflexión

El ejemplo anterior se convierte en una guía para obtener gráficas de funciones usando los criterios de primera y segunda derivada, pero es bueno hacer un resumen

GRAFICAR UNA FUNCIÓN

- Encontrar el dominio
- Calcular la derivada
- Encontrar los puntos críticos que son las raíces de la derivada
- Dividir el dominio de la función en intervalos, los generados por los puntos críticos, y decidir si éstos son intervalos de crecimiento o de decrecimiento de la función
- calcular la segunda derivada
- Encontrar las raíces de la segunda derivada y los puntos del dominio de la función en los que la segunda derivada no existe (estos puntos no son puntos críticos, podrían ser de inflexión si cambia la concavidad dela función en dicho punto)
- Dividir el dominio de la función en intervalos, los generados por las raíces de la segunda derivada y los puntos del dominio de la función donde la segunda derivada no existe, y decidir si éstos son intervalos de concavidad positiva o de concavidad negativa de la función
- En cada intervalo generado al superponer los dos grupos de intervalos construidos decidir que porción de una parábola es la que aproxima a la función y asegurarse que pase lo mas próximo a los valores que toma la función.

  Es recomendable evaluar la función en los puntos críticos y también en las raíces de la segunda derivada para hacer pasar nuestra gráfica por dichos puntos.

Para construir una gráfica debe tener en cuenta ademas de las recomendaciones anteriores el encontrar las asintotas y ubicarlas en su gráfica

2.4: Ejercicios

1. Graficar la función $\frac{x+1}{1-x}$ usando los criterios de primera y segunda derivada sin olvidar ubicar las asintotas
2. Graficar la función $\frac{x^2}{1+x}$ usando los criterios de primera y segunda derivada sin olvidar ubicar las asintotas
3. Graficar la función $\frac{x^2}{1+x^2}$ usando los criterios de primera y segunda derivada sin olvidar ubicar las asintotas
4. Describa los intervalos de crecimiento, decrecimiento, concavidad positiva, concavidad negativa, puntos críticos y puntos de inflexión de la función