Cálculo 1.

Lectura No.10. Gráficas de funciones trigonométricas.

Hugo E. Zamora C.

POLITÉCNICO GRANCOLOMBIANO
INSTITUCIÓN UNIVERSITARIA
En alianza con
WHITNEY
INTERNATIONAL UNIVERSITY SYSTEM
Colombia

Sección 1: Introducción

Con objeto de profundizar en el conocimiento de los modelos trigonométricos se propone el estudio de sus gráficas. Para ello, en primer lugar se discute acerca de las funciones periódicas. La exploración de este tipo de funciones tiene que ver con el reconocimiento y determinación de patrones en diversas situaciones del entorno y con las repeticiones de dichos patrones. Tal es la situación de la rotación de la tierra alrededor de su eje, la cual se afirma que se hace en un período de un día, o sea que la rotación se repite cada día; o la traslación alrededor del sol que se hace en un período de un año, o las estaciones las cuales tienen un patrón de comportamiento y se repiten regularmente cada año.

Luego, se estudiarán los elementos básicos de las funciones trigonométricas como dominio, ceros (si existen), y-intercepto (si existe) y finalmente se aborda la mirada sobre características particulares de cada modelo que permitan esbozar su gráfica en forma adecuada.

Sección 2: Funciones periódicas.

Informalmente, una función es periódica si parte de su gráfica se repite en intervalos de igual longitud. Observe que en la figura 1 la gráfica de f se repite en intervalos de longitud 4.

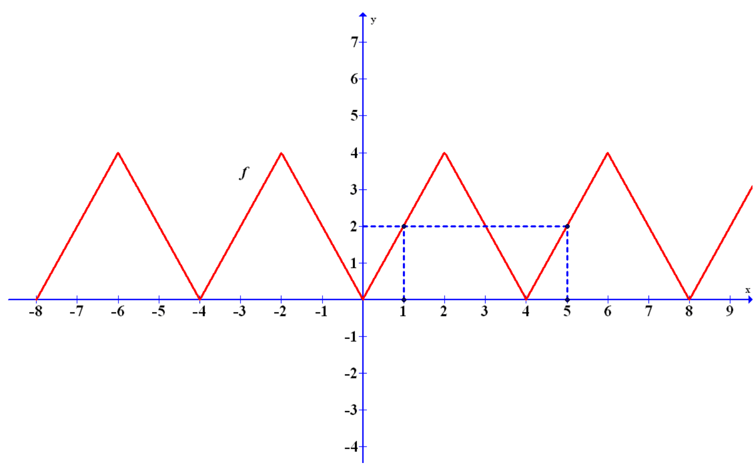

Figura 1: Gráfica de una función periódica

Note que de acuerdo con la gráfica de f se tiene que $f(5) = f(1+4) = f(1) = 2$. Este hecho caracteriza las funciones periódicas. Es decir, se afirma que una función f es periódica de período p si para todo elemento x del dominio de f sucede que $f(x+p) = f(x)$. El menor valor de p para el cual la afirmación es correcta se conoce como el período *fundamental* de p. En el ejemplo, el período fundamental es 4.

Así que si se conoce el comportamiento de f en un intervalo cuya longitud sea la longitud del período fundamental, se puede replicar la gráfica de f (que se realiza en este intervalo) a todo el dominio de f. En el caso de la figura 1, basta con conocer la gráfica de f, por ejemplo en el intervalo $[0,4]$ para esbozar la gráfica completa de f.

Para el caso de las funciones trigonométricas, en la lectura anterior se demostraron las identidades $\sin(x+2\pi) = \sin x$, $\cos(x+2\pi) = \cos x$, $\tan(x+\pi) = \tan x$. Por lo tanto, se asegura que las funciones seno y coseno son funciones periódicas de período 2π y la función tangente es función periódica de período π.

Politécnico Grancolombiano Institución Universitaria
En alianza con Whitney International University System Colombia

2.1: Ejercicios

1. Si f es una función periódica de período fundamental 7 y se conocen las imágenes de f en el intervalo $[0, 7]$ cuál es el valor de $f(24)$ en términos de la imagen de un elemento en $[0, 7]$

2. Demuestre las siguientes identidades y elabore una conclusión acerca del período de las funciones cotangente, secante y cosecante.

   a) $\cot(t + \pi) = \cot t$

   b) $\sec(t + 2\pi) = \sec t$

   c) $\csc(t + 2\pi) = \csc t$

3. Demuestre que si f y g son funciones de período p, entonces $f - g$ es una función periódica de período p.

Sección 3: Gráfica de las funciones $f(t) = \sin t$, $f(t) = \cos t$ y $f(t) = \tan t$

1. **Elementos básicos.**

   En las funciones especificadas la variable t representa la medida de un ángulo en radianes. Para determinar el dominio de cada función señalada, se analizan la definiciones estudiadas en lecturas anteriores. Si t es un ángulo en posición normal y $P(x, y)$ es un punto en el lado terminal de t, se tiene que $\sin t = \frac{y}{r}$, con r la distancia de P al origen del sistema de coordenadas cartesianas. Como $r > 0$, entonces $\frac{y}{r}$ es un número real para cualquier ángulo t, así que el dominio de $f(t) = \sin t$ es el conjunto de los números reales. Un razonamiento similar permite afirmar que el dominio de $f(t) = \cos t$ es $\mathbb{R}$

   En el caso de la función tangente, se tiene que $\tan t = \frac{y}{x}$ con $x \neq 0$, así que si la abcisa x del punto P en el lado terminal de t es 0, no existe $\tan t$. Esta situación se da si el lado terminal de t está en el eje y, que es el caso de los ángulos cuadrantales de $90°$ ($\frac{\pi}{2} rad.$) y $270°$ ($\frac{3\pi}{2} rad.$) y todos los ángulos coterminales con estos dos ángulos. Es decir para todos los ángulos de medida un múltiplo impar de $\frac{\pi}{2}$ no existe la tangente. En suma, el dominio de la función tangente está constituido por los números reales diferentes a los múltiplos impares de $\frac{\pi}{2}$.

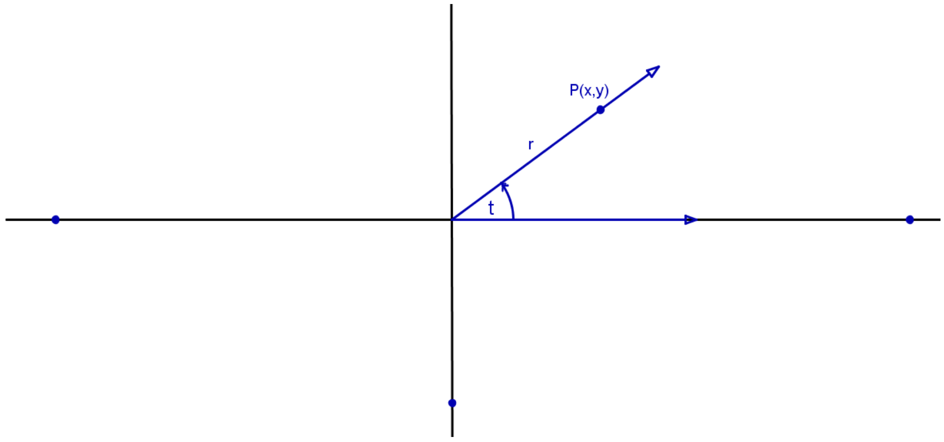

Figura 2: Angulo en posición normal

La determinación de los ceros de las funciones en consideración se hace con base en la solución de las ecuaciones $\sin t = 0$, $\cos t = 0$ y $\tan t = 0$. Estas ecuaciones se denominan trigonométricas y existen procedimientos

Politécnico Grancolombiano Institución Universitaria
En alianza con Whitney International University System Colombia

específicos de solución. Por ahora, mediante un análisis de la expresión se determinan las soluciones de cada ecuación. Así, en el caso de $\sin t = 0$, es preciso identificar los números reales (ángulos medidos en radianes), para los cuales la igualdad es verdadera. En lecturas previas hemos mostrado que $\sin 0 = 0$ y $\sin \pi = 0$. Asimismo para todos los ángulos t coterminales con estos dos ángulos se tendrá $\sin t = 0$. Esto quiere decir que para todos los múltiplos de π la ecuación se hace una igualdad verdadera. Luego, la gráfica de f intercepta al eje horizontal en los reales que sean múltiplos de π. Muestre un razonamiento similar que le permita asegurar que los ceros de $f(t) = \cos t$ son los múltiplos impares de $\frac{\pi}{2}$. Finalmente construya un argumento que le permita concluir que los ceros de $f(t) = \tan t$ son los mismos ceros de $f(t) = \sin t$.

El y-intercepto de cada una de las funciones estudiadas (si existe) será la imagen de 0 mediante cada función. Detallar por qué se declara que la función seno intercepta al eje vertical en $(0, 0)$, la función coseno intercepta al eje vertical en $(0, 1)$ y la función tangente intercepta dicho eje en $(0, 0)$

La siguiente tabla resume los elementos que se han identificado para las funciones seno, coseno y tangente.

Función	Dominio	Ceros	y-intercepto
Seno	$\mathbb{R}$	$\{x \in \mathbb{R} : x = n\pi,\ n \text{ entero}\}$	$y = 0$
Coseno	$\mathbb{R}$	$\{x \in \mathbb{R} : x = (2n+1)\frac{\pi}{2},\ n \text{ entero}\}$	$y = 1$
Tangente	$\{x \in \mathbb{R} : x \neq (2n+1)\frac{\pi}{2},\ n \text{ entero}\}$	$\{x \in \mathbb{R}/x = n\pi,\ \text{n entero}\}$	$y = 0$

2. **Aspectos particulares.**
Como previamente se ha determinado que las funciones seno y coseno tienen período 2π y la función tangente tiene período π, entonces se escogen los intervalos $[0, 2\pi]$ para las dos primeras funciones y el intervalo $[0, \pi]$ para la función tangente, con objeto de conocer el comportamiento de cada función en ellos, trazar la gráfica y replicarla al dominio de cada función.

Para la función seno analizamos sus valores en cada uno de los cuadrantes del plano cartesiano. Se recurre al siguiente razonamiento: Si t es un ángulo del primer cuadrante se tiene de acuerdo con la figura 2 que $\sin t = \frac{y}{r}$, con $y > 0$, $r > 0$. A medida que t se acerque a $\frac{\pi}{2}$, el valor de y se acerca suficientemente a r, por lo tanto se puede afirmar que $\sin t$ se acerca a 1. En resumen, si $0 < t < \frac{\pi}{2}$ entonces $0 < \sin t < 1$, es decir, en el primer cuadrante la función seno crece de 0 a 1. Mediante el mismo razonamiento se caracteriza el comportamiento de la función seno en los demás cuadrantes y el comportamiento de la función coseno en los cuatro cuadrantes. La tabla que se muestra más adelante resume el comportamiento de las funciones en estudio, en cada cuadrante.

Al analizar el comportamiento de la expresión $\tan t = \frac{y}{x}$ en el primer cuadrante, se observa a medida que t se acerca a $\frac{\pi}{2}$, el valor de y se acerca a r y el valor de x se acerca a 0, luego $\frac{y}{x}$ crece hacia valores positivos grandes, es decir $\frac{y}{x} \to \infty$. De la misma forma se procede a realizar el análisis de la expresión que define la tangente, para determinar su comportamiento en el segundo cuadrante.

Función	IQ	IIQ	$IIIQ$	IVQ
Seno	Crece de 0 a 1	Decrece de 1 a 0	Decrece de 0 a -1	Crece de -1 a 0
Coseno	Decrece de 1 a 0	Decrece de 0 a -1	Crece de -1 a -0	Crece de 0 a 1
Tangente	Crece de 0 a ∞	Crece de $-\infty$ a 0		

Politécnico Grancolombiano Institución Universitaria
En alianza con Whitney International University System Colombia

Del comportamiento de las imágenes de cada función en los intervalos seleccionados se deriva el rango de cada función, el cual para las funciones seno y coseno es $[-1, 1]$ y para la función tangente es $\mathbb{R}$. Con la información obtenida y con apoyo en los valores de funciones para ángulos particulares se esbozan las gráficas en los intervalos referidos y luego se replica al dominio de cada función. Las figuras 3 a 8 muestran dicho trabajo.

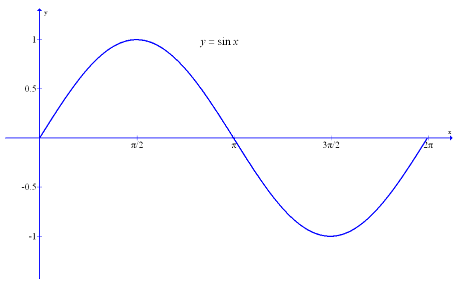

Figura 3: Gráfica de $y = \sin x$ en $[0, 2\pi]$

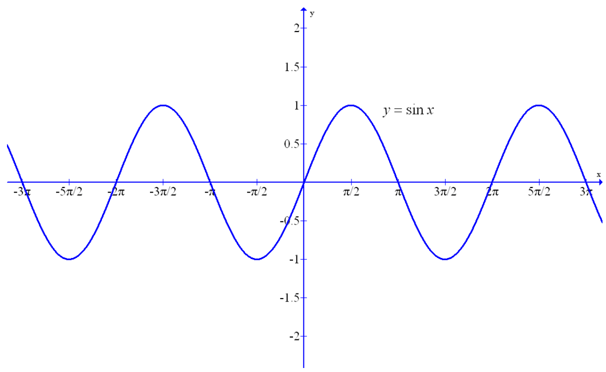

Figura 4: $y = \sin x$ en su dominio

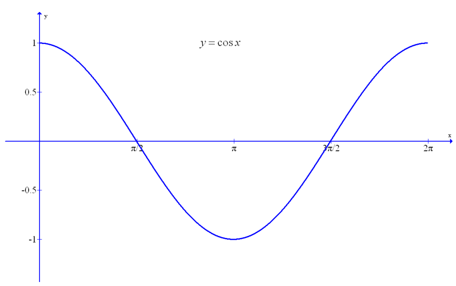

Figura 5: Gráfica de $y = \cos x$ en $[0, 2\pi]$

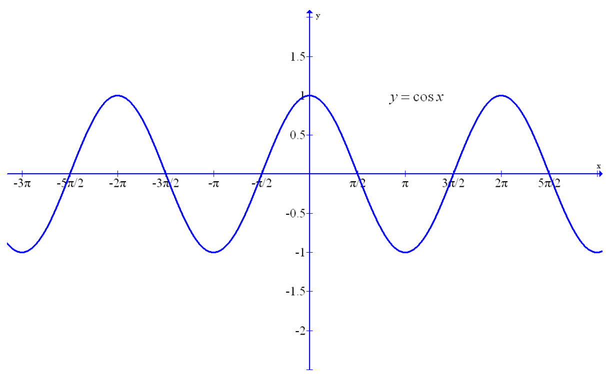

Figura 6: $y = \cos x$ en su dominio

3.1: Ejercicios

1. Para la función $f(t) = \cot t$, determinar dominio, ceros (si existen) y y-intercepto (si existe). Como se demostró previamente que el período de esta función es π, establecer el crecimento o decrecimiento de f en los cuadrantes comprendidos por el intervalo $[0, \pi]$. Luego, esbozar la gráfica de f en $[0, \pi]$ y finalmente replicarla a a su dominio.

2. Para las funciones $f(t) = \sec t$ y $f(t) = \csc t$, determinar dominio, ceros (si existen) y y-intercepto (si existe). Como se demostró anteriormente que el período de estas funciones es 2π, establecer el crecimento o decrecimiento de f en los cuadrantes comprendidos por el intervalo $[0, 2\pi]$. Luego, esbozar la gráfica de las funciones en $[0, 2\pi]$ y finalmente replicarlas a su dominio.

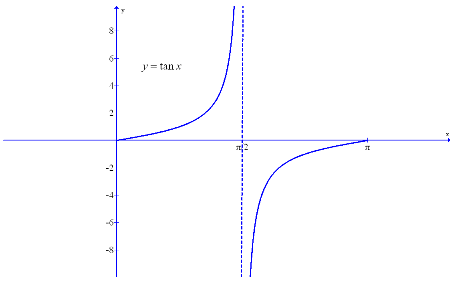

Figura 7: Gráfica de $y = \tan x$ en $[0, \pi]$

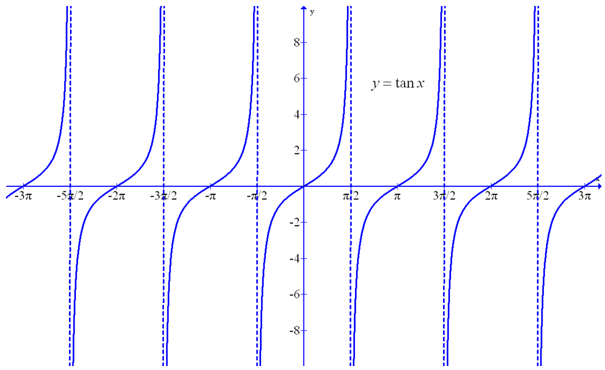

Figura 8: $y = \tan x$ en su dominio

Sección 4: Gráficas de funciones que contienen expresiones trigonométricas

Se asumen como modelos básicos las funciones trigonométricas cuyos elementos fundamentales, aspectos particulares y gráficas se han descrito en los párrafos anteriores. Por lo tanto, con base en estos modelos y con ayuda de los movimientos geométricos de traslación, reflexión y homotecias se pueden esbozar las gráficas de funciones que contienen expresiones trigonométricas.

Para graficar una función con base en los elementos referidos, esta debe tener la forma $y = Af(B(x-C)) + D$, donde f es una función trigonométrica y A es real y B, C, D son números reales positivos.

Así que para trazar la gráfica de $g(x) = -3\sin(2x - \pi) - 1$, hay que transformar la expresión que define la función. Al factorizar 2 en la expresión señalada, se obtiene $g(x) = -3\sin 2\left(x - \frac{\pi}{2}\right) - 1$. Las transformaciones sucesivas de $f(x) = \sin x$ para obtener g son:

$$f(x) = \sin x \qquad f\left(x - \frac{\pi}{2}\right) = \sin\left(x - \frac{\pi}{2}\right)$$

$$f\left[2\left(x - \frac{\pi}{2}\right)\right] = \sin 2\left(x - \frac{\pi}{2}\right) \qquad 3f\left[2\left(x - \frac{\pi}{2}\right)\right] = 3\sin 2\left(x - \frac{\pi}{2}\right)$$

$$-3f\left[2\left(x - \frac{\pi}{2}\right)\right] = -3\sin 2\left(x - \frac{\pi}{2}\right) \qquad 3f\left[2\left(x - \frac{\pi}{2}\right)\right] - 1 = -3\sin 2(x - \frac{\pi}{2}) - 1.$$

Las figuras 9 a 14 muestran los movimientos geométricos que permiten bosquejar la función g. Como $f(x) = \sin x$ tiene período 2π se dibuja su gráfica en $[0, 2\pi]$. En cada una de las transformaciones se muestra un ciclo de la nueva función.

Una forma alterna de trazar las gráficas de funciones que contienen expresiones trigonométricas, se refiere a la identificación de dos elementos propios de estas funciones: el período y el desfase. El período ha sido explicado anteriormente. El desfase se refiere a un valor del dominio de la función desde el cual se puede replicar un ciclo del modelo básico que se asume para graficar este tipo de funciones. Se consideran en este análisis funciones del tipo $y = f(Kx + M)$ con f una función trigonométrica y K un real positivo.

Se presenta la forma de determinar el período y el desfase de una función del tipo $f(x) = \sin(Kx + M)$. Como el modelo básico a usar para grafica f es $y = \sin x$, se ha demostrado que su dominio es 2π y se ha escogido el intervalo $[0, 2\pi]$ para dibujar un ciclo del modelo. Esto significa que para $y = \sin x$ se tiene que $0 \leq x \leq 2\pi$. Así que se desea conocer cómo varía x en el caso de la función f.

Como la función seno tiene período 2π se afirma que $0 \leq Kx + M \leq 2\pi$, por lo tanto $-M \leq Kx \leq 2\pi - M$ y por consiguiente $-\frac{M}{K} \leq x \leq \frac{2\pi}{K} - \frac{M}{K}$. Así que si un ciclo de $y = \sin x$ empieza en 0, se asegura que un ciclo de

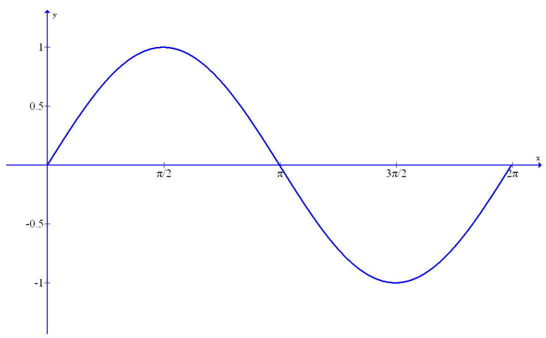

Figura 9: Gráfica de $f(x) = \sin x$

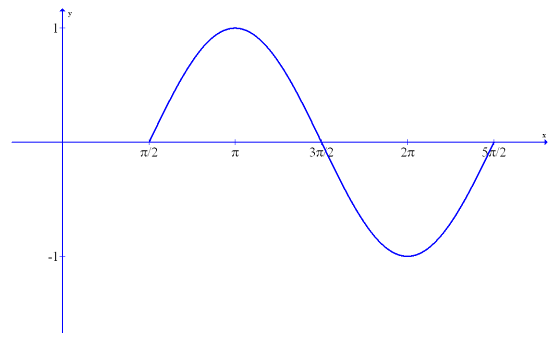

Figura 10: Gráfica de $y = \sin\left(x - \frac{\pi}{2}\right)$

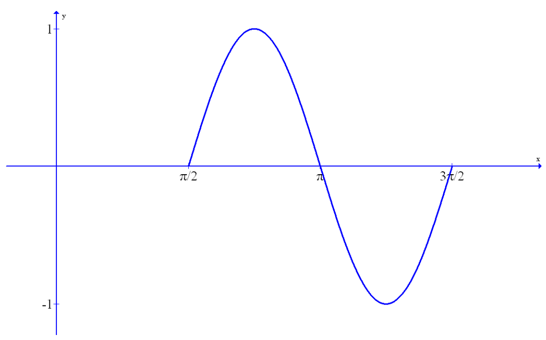

Figura 11: Gráfica de $f(x) = \sin\left[2\left(x - \frac{\pi}{2}\right)\right]$

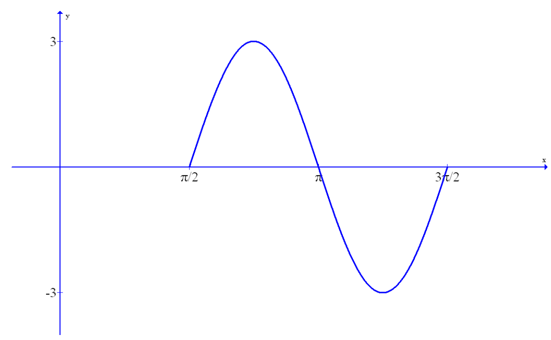

Figura 12: Gráfica de $y = 3\sin\left[2\left(x - \frac{\pi}{2}\right)\right]$

$f(x) = \sin(Kx + M)$ comienza en $-\frac{M}{K}$. A este valor se le denomina el *desfase* de f. Ahora el período de f es la distancia entre los extremos en los que se mueve x es decir $\frac{2\pi}{K} - \frac{M}{K} + \frac{M}{K}$, o sea que el período de f es $\frac{2\pi}{K}$. Note que el el período y el desfase que se han determinados, son válidos para funciones f cuyo modelo base sea una función de período 2π.

Para gráficar $f(x) = 3\cos(3x + \frac{\pi}{2}) + 2$, se determinan el período y el desfase de $y = \cos(3x + \frac{\pi}{2})$, que de acuerdo con los resultados del párrafo anterior son respectivamente $\frac{2\pi}{3}$ y $-\frac{\pi}{6}$. Así que dibujamos un ciclo de la función coseno en el intervalo $\left[-\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{2}\right]$. ¿Por qué razón el extremo superior de este intervalo es $\frac{\pi}{2}$? Para completar la gráfica de f se recurre a movimientos geométricos de la función esbozada. Las figuras 15 a 18 muestran el procedimiento.

4.1: Ejercicios

1. Para las funciones que se definen a continuación, determinar período, desfase y esbozar su gráfica.
   a) $f(x) = -\cos(3x - \frac{2\pi}{3})$
   b) $g(x) = 2\tan(x - \frac{\pi}{4})$
   c) $h(x) = \frac{3}{2}\sin(\frac{x}{3} - \pi)$
   d) $m(x) = \cot 2x$
   e) $t(x) = \sec(\frac{\pi x}{4})$
2. Construya una función del tipo $y = A\sin(Bx + C)$ que describa la función de la figura 19
3. Construya una función del tipo $y = A\cos(Bx + C)$ que describa la función de la figura 20
4. Graficar las funciones que a continuación se definen

POLITÉCNICO GRANCOLOMBIANO INSTITUCIÓN UNIVERSITARIA
En alianza con WHITNEY INTERNATIONAL UNIVERSITY SYSTEM Colombia

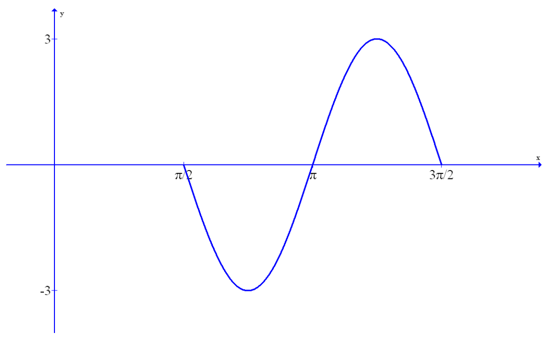

Figura 13: Gráfica de $f(x) = -3\sin\left[2\left(x - \frac{\pi}{2}\right)\right]$

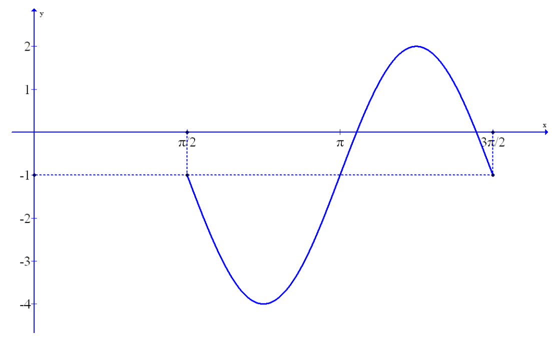

Figura 14: Gráfica de $y = -3\sin\left[2\left(x - \frac{\pi}{2}\right)\right] - 1$

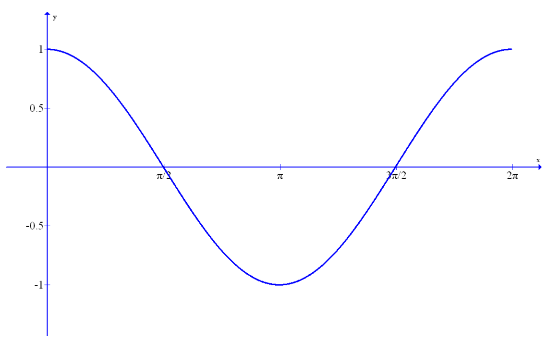

Figura 15: Gráfica de $f(x) = \cos x$

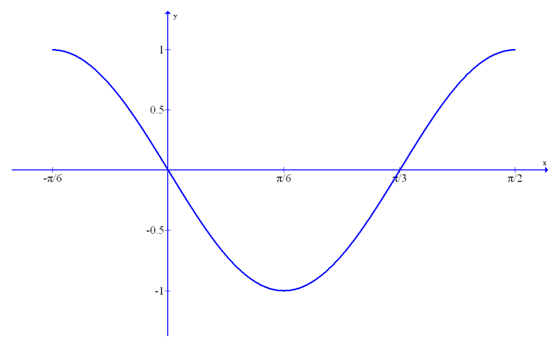

Figura 16: Gráfica de $y = \cos(3x + \frac{\pi}{2})$

a) $f(x) = 5\cos(2x - 3)$

b) $g(x) = -3\sin(-\frac{1}{4}(x - 8))$

c) $h(x) = \csc(1 - \pi x)$

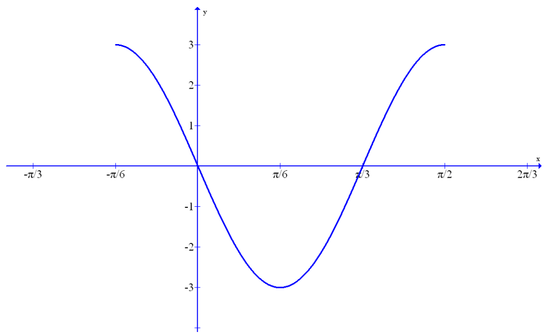

Figura 17: Gráfica de $y = 3\cos(3x + \frac{\pi}{2})$

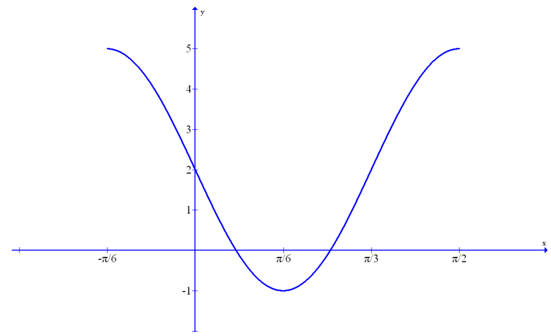

Figura 18: Gráfica de $y = 3\cos(3x + \frac{\pi}{2}) + 2$

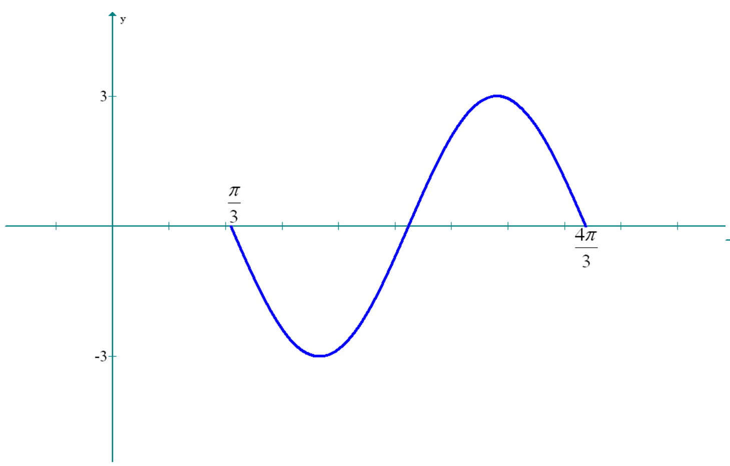

Figura 19: Función trigonométrica

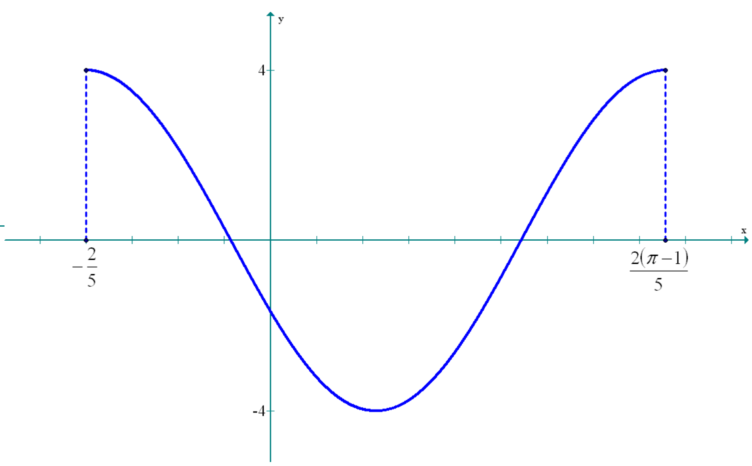

Figura 20:

POLITÉCNICO GRANCOLOMBIANO
INSTITUCIÓN UNIVERSITARIA
En alianza con
WHITNEY
INTERNATIONAL UNIVERSITY SYSTEM
Colombia