Unidad 3 / Escenario 5

Lectura Fundamental

Reconociendo estructuras algebraicas fundamentales parte 2

Contenido

1. Palabras claves

Espacios vectoriales,bases, dimensión.

2. Preguntas introductorias

Un factor importante en el tratamiento de información es la eficiencia, y esto implica la determinación de los elementos necesarios y suficientes que permiten obtener, cumplir o alcanzar los propósitos que se establezcan ante un contexto o una situación particular. Un ejemplo de esto se observa en los procesos de producción; en ellos se establecen unos requerimientos de fabricación en los que se identifican los recursos o la materia prima necesaria y suficiente para la elaboración del producto; si por el contrario se usara más de lo necesario, esto es que con una parte ellos se pudiera hacer lo mismo, se estaría siendo ineficiente, con lo cual se perjudican los procesos de producción, en muchos sentidos.

Esta idea permite entender de lo que en álgebra lineal se conoce como conjuntos generadores y bases, y a partir de esos objetos matemáticos se deriva una teoría que permite establecer cómo es posible obtener cualquier elemento de un conjunto con estructura de espacio vectorial (teniendo presente esta condición por estar definidas en él las operaciones de adición y multiplicación escalar, haciendo aplicable la teoría en situaciones de la vida real) a partir de los elementos generadores y/o que conforman una base para él.

Frente a lo anterior, esta lectura se centra en responder los interrogantes que se exponen a continuación a partir de la teoría. A este respecto se resalta que el lector debe comenzar a identificar de forma autónoma, contextos donde pueda aplicar este conocimiento.

- ¿Qué características poseen los elementos que forman un conjunto generador?
- ¿Cómo se determina si un conjunto genera o es una base para un espacio vectorial?
- ¿Cómo se construyen bases de un espacio vectorial?
- ¿Cómo se puede caracterizar un espacio vectorial a partir del conjunto generador?

Para la apropiación del conocimiento referido en las preguntas es indispensable que el lector:

- Reconozca con claridad el proceso que permite expresar un elemento como una combinación lineal de otros elementos.
- Identifique cómo se construyen conjuntos generadores y haga los procesos de comprobación o verificación para que lo sean.
- Determine la dependencia e independencia lineal de un conjunto de vectores.

3. Reconociendo elementos generadores

Antes de presentar los conceptos formales de la lectura se analizará la importancia de reconocer elementos generadores y a partir de esto se expondrá, en las siguientes secciones, la teoría alrededor del concepto de base.

En la pestaña “Diseño” de herramientas de ofimática como Word, Excel, Power Point y similares aparece un ícono que brinda la opción de establecer una paleta de colores como la que se aprecia en la figura 1, para la elaboración de los documentos, hojas de cálculo y presentaciones.

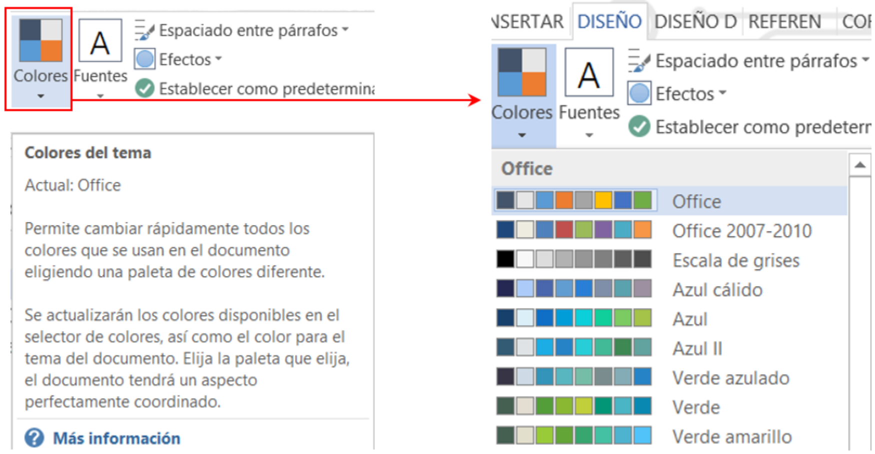

Figura 1: **Opciones de color del tema en Word**.*Fuente:*Herramienta ofimática Word

Cada una de las opciones de la figura contiene unas paletas de colores con las cuales se generan otras y cuando se eligen, el documento se ve coordinado y armonioso bajo la paleta elegida. En otras palabras, cada paleta es un conjunto generador de colores.

A partir de lo anterior se explicará el proceso a seguir para identificar cómo objetos del álgebra lineal, tales como elementos generadores y bases, están implícitos en situaciones de la vida real y aunque la lectura se centre en lo teórico, el lector deberá ir construyendo por su cuenta elementos generadores asociados a su realidad laboral o personal, para apropiarse del conocimiento y potenciar sus habilidades de pensamiento.
Con los colores del tema Office en la figura 1 junto con los colores blanco y negro, se puede generar cualquier color y tonalidad, y esta información se asocia al álgebra lineal de la siguiente forma:

Elementos del espacio vectorial que generan los colores del tema Office junto con los colores negro y blanco	Elementos generadores
Son las 10-uplas de la forma $(a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, a_6, a_7, a_8, a_9, a_{10})$ donde cada a_i es un valor de 0 a 1 que indica la intensidad del color correspondiente a la posición i en la paleta, agregando los colores negro y blanco, con $i = 1, 2, 3, \dots, 10$. El $\mathbf{1}$ representa la tonalidad más intensa y el $\mathbf{0}$ la usencia de color.  $(a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, a_6, a_7, a_8, a_9, a_{10})$	v_1: (1,0,0,0,0,0,0,0,0,0): 10-upla cuyo único color es el primer color de la paleta en su mayor intensidad. v_2: (0,1,0,0,0,0,0,0,0,0): 10-upla cuyo único color es el segundo color de la paleta en su mayor intensidad. Las demás 10-uplas se definen análogamente a las anteriores y corresponden a las siguientes: v_3: (0,0,1,0,0,0,0,0,0,0) v_4: (0,0,0,1,0,0,0,0,0,0) v_5: (0,0,0,0,1,0,0,0,0,0) v_6: (0,0,0,0,0,1,0,0,0,0) v_7: (0,0,0,0,0,0,1,0,0,0) v_8: (0,0,0,0,0,0,0,1,0,0) v_9: (0,0,0,0,0,0,0,0,1,0) v_{10}: (0,0,0,0,0,0,0,0,0,1)

Combinaciones de los elementos generadores para obtener un elemento del espacio vectorial
Todo color del espacio vectorial que generan los colores del tema Office con el negro y el blanco se puede obtener a partir de una combinación de los elementos generadores así: $c_1 v_1 + c_2 v_2 + c_3 v_3 + c_4 v_4 + c_5 v_5 + c_6 v_6 + c_7 v_7 + c_8 v_8 + c_9 v_9 + c_{10} v_{10} = u$ Donde u será la 10-upla con los colores en la intensidad obtenida según el valor escalar c_i, con $i = 1,2,3, \dots, 10$. Un ejemplo de estas combinaciones se aprecia en la siguiente 10-upla:  $0.98v_1 + 0.6v_2 + 0.7v_3 + 0.8v_4 + 0.8v_5 + 0.7v_6 + 0.6v_7 + 0.7v_8 + 0.87v_9 + 0.9v_{10} = u$

Al observar la anterior paleta de colores se identifica que aparecen dos tipos de azul y uno de ellos se podría obtener a partir del otro, así que en el sentido matemático se identifica una dependencia entre esos colores, por lo que se podría prescindir de uno de ellos con el fin de usar los elementos necesarios y suficientes para generan un espacio vectorial de colores. Al conjunto constituido por dichos elementos se le conoce con el nombre de base.

A partir de lo anterior se identifican dos conceptos fundamentales de la teoría que se aborda en esta sección y que corresponden a: generador e independencia, los cuales constituyen las condiciones que debe cumplir un conjunto para ser una base de un espacio vectorial.

Definición 3.1. *El conjunto de vectores $S = \{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$ es una **base** de un espacio vectorial V si cumple las siguientes condiciones:*

- *S es un conjunto linealmente independiente.*
- *S genera a V.*

4. Cómo determinar si un conjunto es una base de un espacio vectorial

Para determinar si un conjunto es una base de un espacio vectorial es necesario comprobar las condiciones mencionadas en la definición anterior, que corresponden a que sus elementos deben generar el espacio y ser linealmente independientes

Sea E el conjunto constituido por las 10-uplas que corresponden al color negro y blanco en la paleta de Office vista en la sección anterior $E = (1, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0), (0, 1, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0) = v_1, v_2$ se puede verificar que este conjunto es una base para el espacio vectorial de la escala de grises ya que cumple las condiciones de la definición 3.1, observe:

I. Genera todos los colores de la escala de grises.
Para verificar esta idea es necesario que todo color de la escala de grises se pueda escribir como una combinación lineal de los elementos de la base. Dado que no es posible hacer la comprobación con cada color de dicha escala (porque son demasiados), a partir del álgebra lineal se va a emplear la 10-upla $u = (a, b, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0)$ con $0 \leq a \leq 1$ y $0 \leq b \leq 1$, que representará cualquier color de la escala de grises y se escribirá como una combinación lineal de los vectores v_1 y v_2. Dicha combinación lineal conducirá a un sistema de ecuaciones lineales que se resolverá, y de acuerdo con lo que arroje el proceso se analizará si es soluble y en caso de serlo, se podrá afirmar que los vectores generan cualquier color de la escala de grises.

Al expresar el vector u como una combianción lineal de los elementos de E se tiene:

$$c_1(1, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0) + c_2(0, 1, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0) = (a, b, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0)$$

A partir de la combinación lineal anterior se genera el siguiente sistema de ecuaciones:

$$\begin{aligned} c_1 0 + c_2 1 &= a \qquad && \text{El 1 representa la máxima intensidad de color y 0 la ausencia de color} \\ c_1 1 + c_2 0 &= b && \\ c_1 1 + c_2 1 &= 1 && \text{Desde aquí las siguientes ecuaciones son todas iguales, por tanto,} \\ & && \text{se debe resolver el sistema de tres ecuaciones.} \end{aligned}$$

La solución del sistema se realiza haciendo el siguiente análisis:

- Operando la ecuación $c_1 0 + c_2 1 = a$ se obtiene que $c_2 = a$
- Aplicando el mismo razonamiento en el ítem anterior, se obtiene que $c1 = b$.

Es decir, el sistema de ecuaciones tiene solución $c_1 = a$ y $c_2 = b$. Por tanto, E sí genera la escala de grises.

II. Los elementos son linealmente independientes.

Para verificar si los vectores v_1 y v_2 son linealmente independientes es indispensable que el uno no se pueda escribir en términos del otro, esta idea es que el blanco no se pueda obtener a partir del negro o viceversa y matemáticamente esto significa que $v_1 \neq \alpha v_2$, con $0 \leq \alpha \leq 1$, lo que es eqivalente a $c_1v_1 + c_2v_2 = 0$ porque $c_1 = c_2 = 0$. Note que la combinación lineal se está igualando al vector 0, que en este caso está representado por $0 = (0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0)$

De la combinación lineal $c_1v_1 + c_2v_2 = 1$ se obtiene el siguiente sistema de ecuaciones:

$$c_1 0 + c_2 1 = 0$$
$$c_1 1 + c_2 0 = 0$$
$$c_1 1 + c_2 1 = 0$$

Desde aquí las siguientes ecuaciones son todas iguales, por tanto, se debe resolver el sistema de tres ecuaciones.

De la ecuación $c_1 0 + c_2 1 = 0$, se obtiene que $c_2 = 0$. Este mismo razonamiento se aplica para la segunda ecuación donde $c_1 = 0$. Por tanto, los elementos de E son linealmente independientes puesto que $c_1 = c_2 = 0$.

Al comprobarse las dos condiciones anteriores, se concluye que E es una base para el espacio vectorial de la escala de grises.

El contexto anterior es un ejemplo de la actividad que realizará el lector cuando se enfrente a situaciones en las que tendrá que identificar aquellas en las que es posible traducir el lenguaje del contexto en un lenguaje matemático, y por medio de los objetos del álgebra lineal seleccionar aquellos que son necesarios y suficientes para establecer relaciones.

En adelante se abordarán situaciones en un contexto geométrico y abstracto para afianzar procesos asociados al concepto de base de un espacio vectorial.

A continuación se presenta una interpretacipon geométrica del concepto de base de un espacio vectorial y cómo se identifican las dos condiciones que se deben cumplir.

En la figura 2 los vectores azules son $u = (1, 0), w = (0, 1)$. Verificar si este conjunto de vectores es una base para el espacio vectorial $\mathbb{R}^2$.

I. Genera todos los vectores en $\mathbb{R}^2$.
Para verificar esta condición es necesario que se cumpla que $(x, y) = c_1(1, 0) + c_2(0, 1)$. En la figura se observa que los vectores rojos son multiplos escalares de u y w, además, el vector verde es la suma de estos, es decir existen los escalres $c_1 = a, c_2 = b$ tales que $(x, y) = c_1(1, 0) + c_2(0, 1) = a(1, 0) + b(0, 1)$.

II. Los elementos son linealmente independientes.
En la figura 1 se observa que los vectores u y w no son paralelos, lo que singifica que son linealmente independientes.

Al comprobar las dos condiciones anteriores, se concluye que el conjunto $\{(1, 0), (0, 1)\}$ es una base para el espacio vectorial $\mathbb{R}^2$, a esta base se le denomina base canónica o estandar.

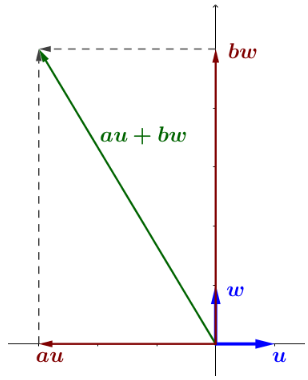

Figura 2: **Base canónica en** $\mathbb{R}^2$.*Fuente:*Elaboración propia

¿Sabías que...?

- El máximo número de vectores linealmente independientes que puede tener $\mathbb{R}^n$ es n.
- Un conjunto con n vectores linealmente independientes en $\mathbb{R}^n$ es una base.
- Sea $V = \{v_1, v_2, \ldots, v_m\}$ un conjunto de vectores en $\mathbb{R}^n$, si $m > n$ entonces V es linealmente dependiente y por tanto, no constituyen una base.

Los item mencionados anteiormente serán de utilidad para determinar fácilmente si un conjunto es o no una base para un espacio vectorial; no obstante, para otros casos, será necesario emplear otros métodos procedimentales más detallados. Observe el siguiente ejemplo:

Determinar si este conjunto $\{1 - x, 5 - x^2, x\}$ es una base del espacio vectorial P_2. De nuevo, es necesario verificar las dos condiciones.

I. Genera a todos los polinomios de grado 2.
En el ejemplo 10 de la lectura del escenario anterior se comprobó que el conjunto $\{1 - x, 5 - x^2, x\}$ genera a P_2. Si es necesario, revise el proceso realizado allí.

II. Los elementos son linealmente independientes.

- Escribir la combinación lineal igualada al polinomio 0.

$$c_1(1 - x) + c_2(5 - x^2) + c_3x = 0$$

- Construir el sistema de ecuaciones homogéneo:

$$\begin{aligned} c_1 + 5c_2 &= 0 \\ -c_1 + c_3 &= 0 \\ -c_2 &= 0 \end{aligned}$$

- Resolver el sistema, pero recuerde que el teorema 6.1 del escenario anterior dió herramientas útiles para determinar la independencia de un conjunto de vectores de manera sencilla, esto es hallar el determinante de la matriz de coeficientes:

$$\begin{vmatrix} 1 & 5 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{vmatrix} = -1$$

Dado que el determinante es diferente de cero, se concluye que el conjunto de vectores es linealmente independiente.
Por tanto, el conjunto $\{1-x, 5-x^2, x\}$ es una base del espacio P_2.

En síntesis...

Para comprobar si un conjunto de vectores es una base de un espacio vectorial se debe:

I. Comprobar si el conjunto dado genera el espacio vectorial indicado; si no genera, se conluye que no es una base.

II. Comprobar si los elementos del conjunto son linealmente independientes. Para ello, se sugiere tener en cuenta las afirmaciones del Teorema 6.1 expuesto en la lectura del escenario anterior. **Nota:** Para el caso del espacio vectorial $\mathbb{R}^n$, si el número de elementos del conjunto dado es mayor que n, se concluye que no es una base.

Recuerde que un espacio vectorial puede tener más de un conjunto generador pero no todos son una base, pues alguno de sus elementos se puede expresar como una combinación lineal de los demás, el inconvenientes es determinar cuál(es) elementos depende(n) de los demás; la teoría de matrices es una buena herramienta para ello, observe:

Ejemplo 1. *Sea* $S = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \right\}$. *Determinar una base para el subespacio* $W = genS$ *de* M_{22}.

En primer lugar se elabora una combinación lineal con los elementos dados, igualada a 0.

$$c_1 \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + c_2 \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} + c_3 \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} + c_4 \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Luego, el sistema de ecuaciones homogéneo asociado a la ecuación anterior.

$$\begin{aligned} c_1 + c_3 - c_4 &= 0 \\ c_2 + c_3 + c_4 &= 0 \\ c_2 + c_3 + c_4 &= 0 \\ c_1 + c_3 - c_4 &= 0 \end{aligned}$$

El paso a seguir es construir la matriz asociada al sistema y trasformarla en una matriz escalonada, de manera que las columnas en las cuales aparecezcan los 1 principales constituyen una base para el espacio vectorial. En este caso sería:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Note que esta matriz solo tiene dos filas dado que hay dos pares de ecuaciones lineales, además ya está en forma escalonada, con los 1 principales en las columnas 1 y 2. Por tanto, las matrices asociadas a dichas columnas constituyen una base para el espacio generado $GenS$, en este caso $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$

5. Construyendo bases de un espacio vectorial

En la mayoría de los casos, las bases requieren ser determinadas a partir del espacio vectorial estudiado; por ejemplo si se tiene un proceso de produccción industrial, determinar cuáles son los insumos necesarios y suficientes para la producción es un proceso necesario en la planeación de poducción. Debido a esto a continuación se explicará el proceso que se debe realizar para construir una base a partir de un espacio vectorial.

Ejemplo 2. *Determinar una base para el conjunto de vectores que pertencen al plano* $3x + 4y - 2z = 0$.

- Paso 1: identificar las condiciones que deben cumplir los elementos de la base.
  El espacio vectorial es el plano $3x + 4y - 2z = 0$ el cual está definido a partir de las variables x, y, z es decir por 3-uplas de la forma (x, y, z) que al asignarles valores numéricos y reemplazarlas en la ecuación del plano den como resultado 0. Por ende los elementos de la base deben 3-uplas, en lenguaje matemático, $\pi = \{(x, y, z) : 3x + 4y - 2z = 0\}$.

- Paso 2: expresar un elemento del espacio vectorial a partir de la condición dada.
  En este caso, el vector (x, y, z) se debe expresar en términos de la ecuación dada; por ejemplo, para hallar un punto que pertenezca al plano, usualmente se suelen dar valores a dos de sus variables y a partir de ellas se determina el valor de la tercera. En este caso, si se seleccionan arbitrariamente los valores x, y y se sustituyen en la ecuación del plano, se puede determinar el valor de z en términos de x, y. Observe:

$$\begin{aligned} 3x + 4y - 2z &= 0 \\ -2z &= -(3x + 4y) \\ z &= \frac{3x + 4y}{2} \\ z &= \frac{3x}{2} + \frac{4y}{2} \end{aligned}$$

  Es decir, todo vector que pertenezca al plano dado se puede expresar como $\left(x, y, \frac{3x}{2} + 2y\right)$

- Paso 3: expresar el elemento obtenido en el item anterior como una combinación lineal de elementos del espacio vectorial.
  Una posible estrategia para expresar $\left(x, y, \frac{3x}{2} + 2y\right)$ en primer lugar es reescribirlo como una suma de vectores en $\mathbb{R}^3$, de manera que en cada vector solo aparezca una variable, esto es,

$$\left(x, y, \frac{3x}{2} + 2y\right) = \left(x, 0, \frac{3x}{2}\right) + (0, y, 2y)$$

  Lo siguiente es expresar cada uno de los vectores anteriores como un producto escalar, en el que los escalares serán las variables:

$$\left(x, y, \frac{3x}{2} + 2y\right) = x\left(1, 0, \frac{3}{2}\right) + y\,(0, 1, 2)$$

  De esta manera, se obtiene que los vectores $\left(1, 0, \frac{3}{2}\right)$, $(0, 1, 2)$ generan el plano dado.

- Paso 4: verificar si los vectores obtenidos en el item anterior son linealmente independientes.

  Dado que solo se tienen dos vectores, para verificar esta condición solo basta con obervar que no son paralelos, porque uno no es múltiplo escalar del otro; es decir, son linealmente independientes.

Al obtener un conjunto de vectores que genera al espacio indicado y que son linealmente independientes, se concluye que $V = \left\{ \left(1, 0, \frac{3}{2}\right), (0, 1, 2) \right\}$ es una base para el conjunto de vectores en $\mathbb{R}^3$ que pertenecen al plano $3x + 4y - 2z = 0$.
En la siguiente imagen puede observar la representción gráfica del plano y su base.

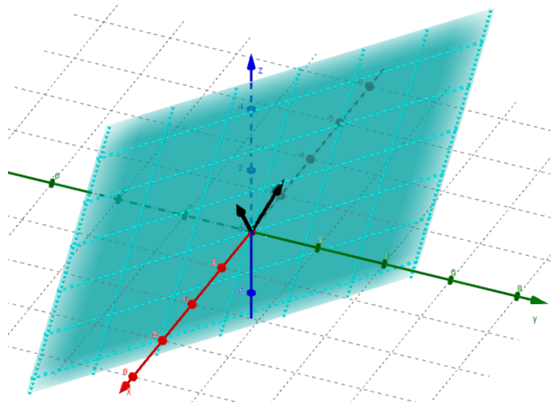

Figura 3: **Representación gráfica del plano** $3x + 4y - 2z = 0$ **y su base** $V = \left\{ \left(1, 0, \frac{3}{2}\right), (0, 1, 2) \right\}$.*Fuente:*Elaboración propia

Ejemplo 3. *Determinar una base para el subespacio de* P_3 *formado por los vectores de la forma* $at^3 + bt^2 + ct + d$ *donde* $a = b$ *y* $c = 4a + d$.

Para determinar la base del subespacio indicado, se seguirán de nuevo los pasos descritos en el ejemplo anterior.

- Paso 1: identificar el tipo de elementos que debe componer la base.
  En este caso, los elementos son polinomios de grado menor o igual a 3. Escrito en lenguaje matemático: $\pi = \{P_3 : a = b, c = 4a + d\}$.

- Paso 2: expresar un elemento del espacio vectorial a partir de la condición dada.
  En este caso, el polinomio $at^3 + bt^2 + ct + d$ se debe expresar en términos de las condiciones dadas. Observe:

$$\begin{aligned} &at^3 + bt^2 + ct + d && \\ &at^3 + at^2 + (4a + d)t + d && \text{Aplicando las igualdades } a = b \text{ y } c = 4a + d. \\ &at^3 + at^2 + 4at + dt + d && \text{Resolviendo el paréntesis.} \\ &a(t^3 + t^2 + 4t) + d(t + 1) && \text{Factor común.} \end{aligned}$$

  Es decir todo vector del subespacio dado se puede expresar como $a(t^3 + t^2 + 4t) + d(t + 1)$.

- Paso 3: expresar el elemento obtenido en el item anterior como una combinación lineal de elementos del espacio vectorial.
  Observe que el polinomio $a(t^3 + t^2 + 4t) + d(t + 1)$ está escrito como una combinación lineal de los polinomios $(t^3 + t^2 + 4t)$ y $(t + 1)$. Por tanto, se concluye que estos generan al subespacio $at^3 + bt^2 + ct + d$ donde $a = b$ y $c = 4a + d$.

- Paso 4: comprobar la independencia lineal.
Para que polinomios sean linealmente independientes se debe verificar que la ecuación

$$c_1(t^3 + t^2 + 4t) + c_2(t + 1) = 0$$

se cumple solo para $c_1 = c_2 = 0$. El sistema de ecuaciones asociado a la ecuación anterior es

$$\begin{aligned} c_1t^3 &= 0 \\ c_1t^2 &= 0 \\ 4c_t + c_2t &= 0 \\ c_2 &= 0 \end{aligned}$$

Dado que $c_1 = c_2 = 0$, se concluye que los polinomios son linealmente independientes.

Por tanto, el conjunto $V = \{(t^3 + t^2 + 4t), (t + 1)\}$ constituye una base para el subespacio de $P_3 = at^3 + bt^2 + ct + d$ donde $a = b$ y $c = 4a + d$
El proceso para determinar una base de un espacio vectorial, ejemplificado en los dos casos anteiores, es aplicable a cualquier espacio. Note que el conjunto de vectores de una base para el caso de $\mathbb{R}^n$ han sido finitos de igual manera para subespacios de P_n; no obstante, en muchos casos las bases son infintas, este es el caso del espacio vectorial de todos los polinomios y de las funciones continuas. En esta lectura no se abordarán estos casos pues su estudio requiere de otros conceptos matemáticos de nivel más avanzado.

Para mejorar...

Adquirir la habilidad para comprobar si un conjunto es una base o determinar una base para determinado espacio vecotorial, solo se adquiere a través del estudio de varios ejemplos y la práctica en la aplicación de dichos procesos en diversos casos. En la lectura complementaria 1 podrá observar ejemplos adicionales sobre bases en $\mathbb{R}^n$, P_n y en $M_{m\times n}$; no obstante, también encontrará algunos ejemplos relacionados con el espacio vectorial de funciones continuas, por lo cual no sobra que revise dichos ejemplos pues es posible que descubra que no le es imposible comprenderlos. Luego de hacer la revisión de dichos ejemplos, práctique estos procesos desarrollando los ejercicios que se proponen en esta lectura.

6. Completar una base de un espacio vectorial

Hasta el momento se ha expuesto el proceso para determinar una base de un espacio vectorial según la situación dada; no obstante, en algunos casos es posible construir otra base a partir de algunos elementos del espacio vectorial y elementos de su base canónica.
A continuación se presenta la base canónica o base estandar de los espacios vectoriales más usuales.

- Para $\mathbb{R}^n$, $B = \{(1, 0, 0, \ldots, 0), (0, 1, 0, \ldots, 0), (0, 0, 1, \ldots, 0), \ldots, (0, 0, 0, \ldots, 1)\}$
- Para P_n, $B = \{1, x, x^2, \ldots, x^n\}$.
- Para $M_{m\times n}$,

$$B = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & 0 & \ldots & 0 \\ \vdots & & & \vdots \\ 0 & 0 & \ldots & 0 \end{pmatrix}_{m\times n}, \begin{pmatrix} 0 & 1 & \ldots & 0 \\ 0 & 0 & \ldots & 0 \\ \vdots & & & \vdots \\ 0 & 0 & \ldots & 0 \end{pmatrix}_{m\times n}, \ldots, \begin{pmatrix} 0 & 0 & \ldots & 1 \\ 0 & 0 & \ldots & 0 \\ \vdots & & & \vdots \\ 0 & 0 & \ldots & 0 \end{pmatrix}_{m\times n}, \ldots, \begin{pmatrix} 0 & 0 & \ldots & 0 \\ 1 & 0 & \ldots & 0 \\ \vdots & & & \vdots \\ 0 & 0 & \ldots & 0 \end{pmatrix}_{m\times n}, \ldots, \begin{pmatrix} 0 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & 0 & \ldots & 0 \\ \vdots & & & \vdots \\ 0 & 0 & \ldots & 1 \end{pmatrix}_{m\times n} \right\}$$

El uso de estas bases canónicas será de gran utilidad cuando se necesite completar una base para un espacio vectorial. Observe el siguiente proceso:

Ejemplo 4. *Determine una base para* $\mathbb{R}^4$ *que incluya los vectores* $u_1 = (-1, 5, 1, 0)$ *y* $u_2 = (0, 1, 2, 1)$.

- Paso 1: formar un conjunto que contenga los elementos de la base canónica de $\mathbb{R}^4$ y los vectores dados. Sea $S = \{(-1, 5, 1, 0), (0, 1, 2, 1), (1, 0, 0, 0), (0, 1, 0, 0), (0, 0, 1, 0), (0, 0, 0, 1)\}$.
- Paso 2: formar una matriz cuyas columnas son los vectores dados.
$$\begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 5 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$
- Paso 3: transformar la matriz anterior en una matriz escalonada reducida.
$$\begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 5 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -5 & 9 \end{pmatrix}$$
- Paso 4: identificar en la matriz escalonada reducida las columnas que contienen los pivotes (unos principales), pues serán los elementos que constituyan una base para el espacio o subespacio dado.
En este caso, los pivotes se encuentran en las primeras cuatro columnas, las cuales corresponden a los vectores $(-1, 5, 1, 0), (0, 1, 2, 1), (1, 0, 0, 0), (0, 1, 0, 0)$ los cuales constituyen una base (denominada B) que genera S; esto es
$$B = \{(-1, 5, 1, 0), (0, 1, 2, 1), (1, 0, 0, 0), (0, 1, 0, 0)\}$$

El anterior proceso se debe aplicar siempre que se desee construir una base que incluya unos elementos dados.

7. Caracterizando espacios vectoriales a partir de su base

El número de elementos de una base de un espacio vectorial determina su dimensión y la combinación lineal de ellos permite caraterizar el espacio vectorial que se genera.

Definición 7.1. ***Dimensión de un espacio vectorial****: se llama dimensión de un espacio vectorial* V *al número de elementos que hay en cualquiera de sus bases. Se denota matemáticamente como dim*(V)

Las dimensiones de los espacios vectoriales usuales se pueden deducir a partir de sus bases canónicas; esto es, Además de la dimensión. Observe el siguiente ejemplo:

Ejemplo 5. *Caracterizar el subespacio vectorial cuya base es* $B = \{(-1, 2, 4), (1, 2, 3)\}$.

En primer lugar, se concluye que la dimensión del subespacio vectorial es 2 dado que su base tiene 2 elementos, lo que hace falta es caracterizar sus elementos, esto se obtiene al determinar el conjunto generado por elementos de

Espacio vectorial	Dimensión
$\mathbb{R}^n$	n
$M_{m\times n}$	mn
P_n	$n+1$
Funciones	infinita

la base. Observe:

$$
\begin{aligned}
(a,b,c) &= c_1(-1,-5,4)+c_2(1,2,3) && \text{Combianción lineal.}\\
a &= -c_1+c_2 && \text{Sistema de ecuaciones asociado.}\\
b &= -5c_1+2c_2\\
c &= 4c_1+3c_2
\end{aligned}
$$

Resolviendo el sistema de ecuaciones:

$$\left(\begin{array}{cc|c} -1 & 1 & a\\ -5 & 2 & b\\ 4 & 3 & c \end{array}\right) \Longrightarrow \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & a\\ 0 & 1 & \frac{5a+b}{7}\\ 0 & 0 & -23a+b+7c \end{array}\right)$$

El anterior sistema tiene solución solo si $-23a+b+7c=0$, lo cual representa la ecuación de un plano que pasa por el origen.

Al finalizar la lectura se espera que usted haya reconido cómo desarrollar esas dos habilidades mencionadas en la introducción del documento: 1) comprobar si un conjunto dado es una base y 2)construir conjuntos que sean una base de un espacio vectorial, las cuales le permitirán desarrollar su competencia de analizar, pues implica dividir un todo (espaco vectorial) en partes (conjuntos generadores, bases)y reconciendo y estableciendo cualidades, relaciones, estructuras y operaciones. El análisis lleva a la definición de unos procedimientos que permiten dividir de manera organizada y sistemática, en este caso un espacio vectorial, en partes más simples o elementales como lo es una base. Por tanto, el poner en práctica los procesos aquí descritos lo llevará a adquirir las habilidades mencionadas.

8. Practico lo aprendido

Los ejercicios 1 al 4 son tomados de Grossman (2012), sección 4.6

1. Determinar si el conjunto de vectores dados es una base para el espacio vectorial referido
    a) En P_2: x^2-1,x^2-2, x^2-3.
    b) En M_{22}: $\begin{pmatrix} 3 & 1\\ 0 & 0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 & 2\\ 0 & 0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -5 & 1\\ 0 & 6\end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1\\ 0 & -7\end{pmatrix}$.
    c) $H=\left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : x+y=0\right\}$; $(1,-1),(-3,3)$
2. Encuentre una base en $\mathbb{R}^3$ para el conujunto de vectores en la recta $x=3t, y=-2t, z=t$ y su dimensión.

3. Encuentre una base para espacio solución del sistema homogéneo $\begin{cases} x - 3y + z = 0 \\ -2x + 2y - 3z = 0 \\ 4x - 8y + 5z = 0 \end{cases}$ y su dimensión.

4. Encuentre una base para el espacio vectorial para las matrices diagonales $n \times n$ y su dimensión.

5. Sea S_n el espacio vectorial de matrices simétricas, determine su dimensión.

6. Determine una base para el espacio vectorial indicado que incluya los elementos dados.

   a) En $\mathbb{R}^4$, que incluya $(2,1,4,2),(0,3,0,1)$

   b) En M_{22}, que incluya $\begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$

   c) En P_3, que incluya $x^3 - 1, x - 2$

7. Determine una base y caraterice el espacio generado por el conjunto $S = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \right\}$.

Referencias

[1] Grossman,S. (2012). *Álgebra lineal.* (7a. ed.) McGraw-Hill Interamericana. Tomado de http://www.ebooks7-24.com

INFORMACIÓN TÉCNICA

Módulo: Álgebra Lineal
Unidad 3: Transformaciones entre espacios vectoriales
Escenario 5: Reconociendo estructuras algebraicas fundamentales

Autor: Sandra Milena Rojas Tolosa

Asesor Pedagógico: Diana Marcela Diaz Salcedo
Diseñador Gráfico: Kevin Mauricio Ramírez Corredor
Corrector de estilo: Angélica del Pilar Parra
Asistente: Leidy Alejandra Morales