Cálculo 1.

Lectura No. 16. Derivadas (1)

Julio Lizarazo Osorio

Índice

Sección 1: Razón de cambio

En un viaje de 500 kilómetros que inició a las 7:00 a.m., Juan observo en las señales de la carreta la distancia faltante a su destino y registro la distancia que le faltaba para llegar, obviamente a las 7:00 a.m. le faltaban 500 kilómetros.
Los datos que Juan registró corresponden a la siguiente tabla.

Dato	hora	distancia
1	7:20	490
2	8:00	450
3	8:37	420
4	9:05	395
5	10:13	315
6	10:57	250
7	11:30	210
8	12:43	130
9	14:20	70
10	15:35	10
11	15:55	0

Cuadro 1: Datos recopilados por Juan en su viaje

De sus experiencias anteriores puede observar que la distancia que le falta a Juan para llegar a su destino es una función de el tiempo x, y que no conoce la forma en la que a cada x se le asigna la distancia respectiva, solo conoce los datos que Juan registro.

Más aún podría tratar de realizar una gráfica usando éstos datos, vera algo así:

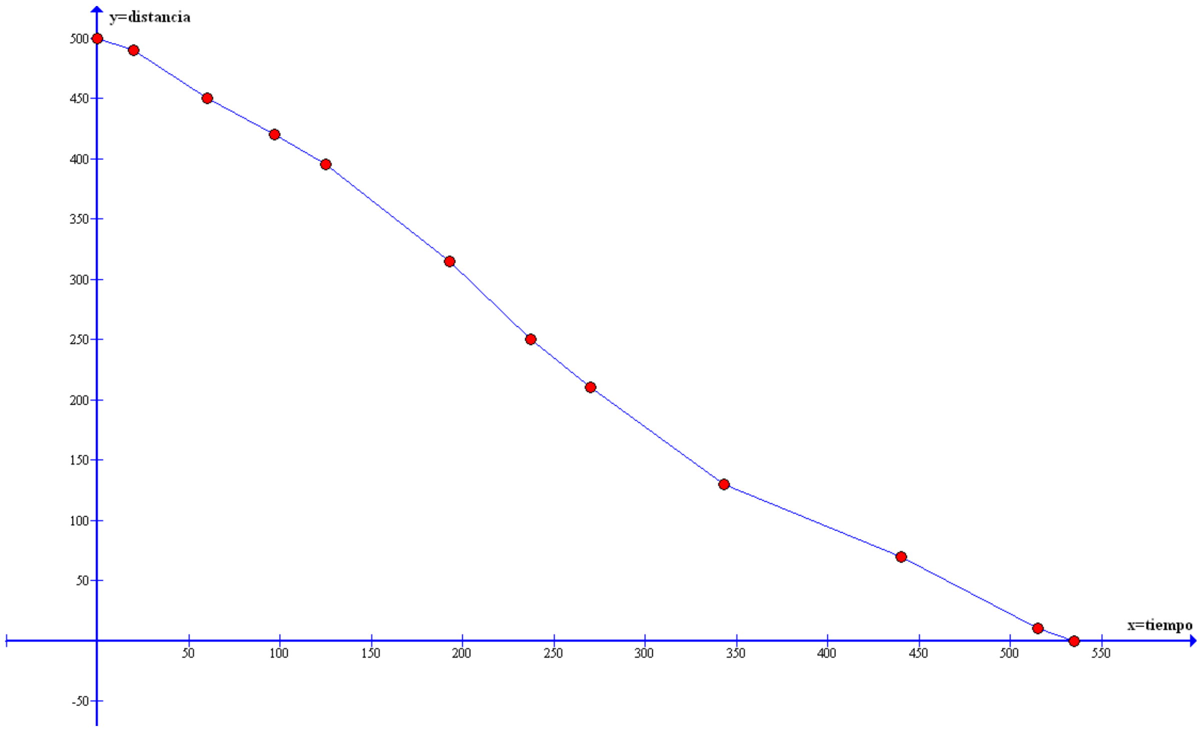


Figura 1: Gráfica de los datos registrados por Juan

Puede entonces visualizar cual es la relación entre el tiempo (en minutos) y la distancia (en kilómetros) al menos empíricamente.

Dese cuenta que por ejemplo entre la 7:00 a.m y las 7:20 a.m. juan recorrió 10 kilómetros, ‟lo que corresponde a -500 metros por minuto ″, mientras que de las 8:00 a.m. a las 8:37 a.m. recorrió 30 kilómetros ‟lo que corresponde a unos -810.8 metros por minuto ″.
En éste procedimiento hemos calculado lo que llamamos la variación de la distancia ‟Usualmente notada como Δy″y la hemos dividido entre la variación del tiempo ‟notada como Δx″para obtener en el primero de los casos $\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{490-500}{7{:}20-7{:}00} \frac{\text{kilómetros}}{\text{hora}} = -500m/min$

La cantidad calculada mediante el cociente $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ se conoce como la variación promedio de la función $y = f(x)$ en el intervalo $[x_1, x_2]$, mecánicamente es $\frac{\Delta f}{\Delta x} = \frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1}$ o como ya se escribió

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

Geometricamente se puede entender el cociente $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ como la pendiente de una recta que pasa por los puntos (x_1, y_1) y (x_2, y_2), luego se puede interpretar la variación promedio de f en el intervalo $[x_1, x_2]$ como la variación de la recta secante que une los puntos (x_1, y_1) y (x_2, y_2).
Es el uso de una aproximación gráfica de la función mediante una recta,como se muestra en la gráfica

Figura 2: función 2

Veamos que por ejemplo éste concepto de aproximación nos permite describir una función,

Ejemplo 1. *Si se conoce una función que pasa por* $(-1,-2)$ *y presenta variaciones de la forma:*

- *la función crece en promedio 2 unidades por cada 3 unidades que se avanza, y esto durante 3 unidades*
- *la función decrece en promedio 3 unidades por cada 2 que avanza, y esto durante 5 unidades*
- *por cada unidad que se avanza la función baja 1 unidad, y esto durante 3 unidades*
- *luego de todo éste recorrido la función pasa por* $(10,6)$

Con toda ésta información se puede realizar la gráfica de la función, que se vera como.

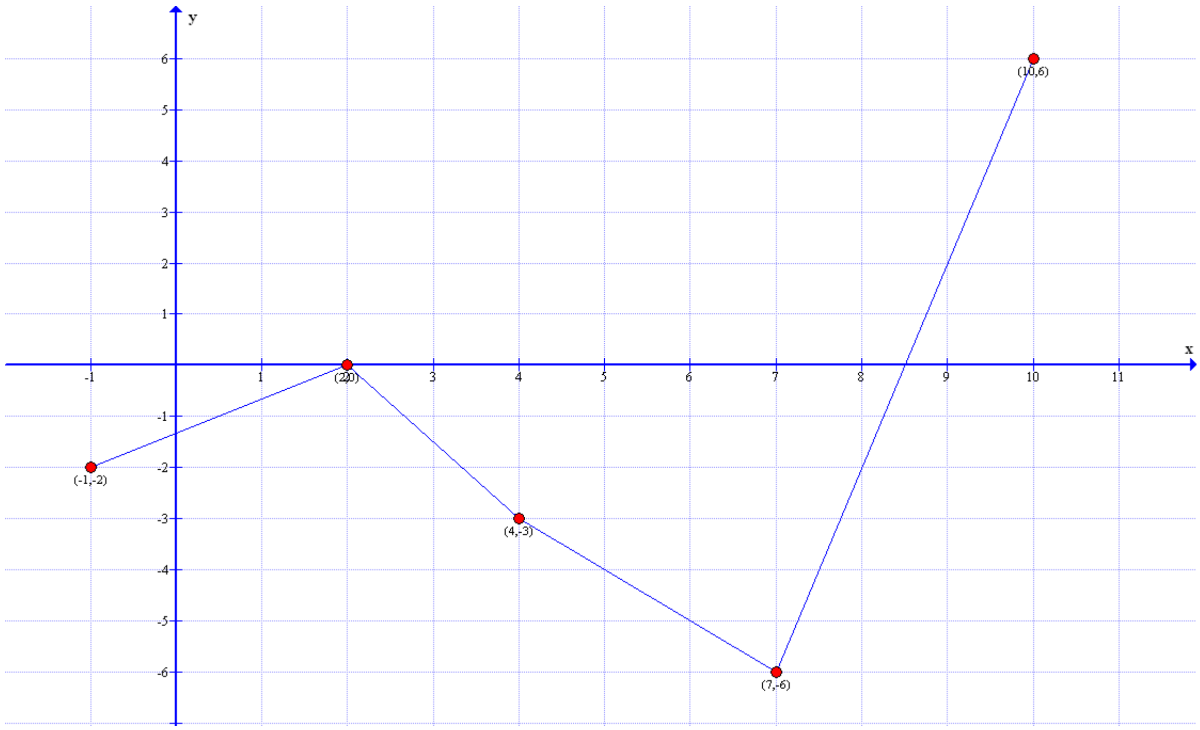


Figura 3: función 3

Note que no se da información puntual de por donde pasa la función en el punto $x = 0$, pero podríamos inferir esto; Nos dicen que la función pasa por $(-1, -2)$ y luego crece a razón de 2 unidades por cada 3, es decir $\frac{2}{3}$ por cada unidad que se avanza, luego en $x = 0$ hemos avanzado una unidad y tendríamos que haber subido $\frac{2}{3}$, entonces $f(0) = -2 + \frac{2}{3} = \frac{-4}{3}$.

Esto se convierte en una descripción de la función en la que se tiene en cuenta muy poca información, gracias a ésta solo se puede obtener una gráfica muy escueta. Falta encontrar un método para hacer una mejor descripción de la función, en particular deberíamos ser capaces de describir la variación de la función no en cada intervalo sino en cada punto.

Ejemplo 2. *Describamos el comportamiento de la función $x^3 - x$ en el intervalo $[-1, 2]$.*

Para esto deberíamos empezar a tabular algunos datos, como por ejemplo

dato	x	$f(x)$
1	-1	0
2	-0.5	0.375
3	0	0
4	0.5	-0.375
5	1	0
6	1.5	1.875
7	2	6

Cuadro 2: datos de $f(x) = x^3 - x$ en $[-1, 2]$

Con base solo en éstos datos podríamos describir el comportamiento de la función $f(x) = x^3 - x$ como:

- *en el intervalo de -1 a $-0{,}5$ la función crece a razón de $0{,}65$ unidades en promedio.*
- *en el intervalo de $-0{,}5$ a $0{,}5$ la función decrece a razón de $-0{,}65$ unidades en promedio.*
- *en el intervalo de $0{,}5$ a 1 la función crece a razón de $0{,}65$ unidades en promedio.*
- *en el intervalo de 1 a $1{,}5$ la función crece a razón de $3{,}75$ unidades en promedio.*

- *en el intervalo de* 1,5 *a* 2 *la función crece a razón de* 8,25 *unidades en promedio.*

Una gráfica que resume el comportamiento real de la función y nuestra descripción es la siguiente:

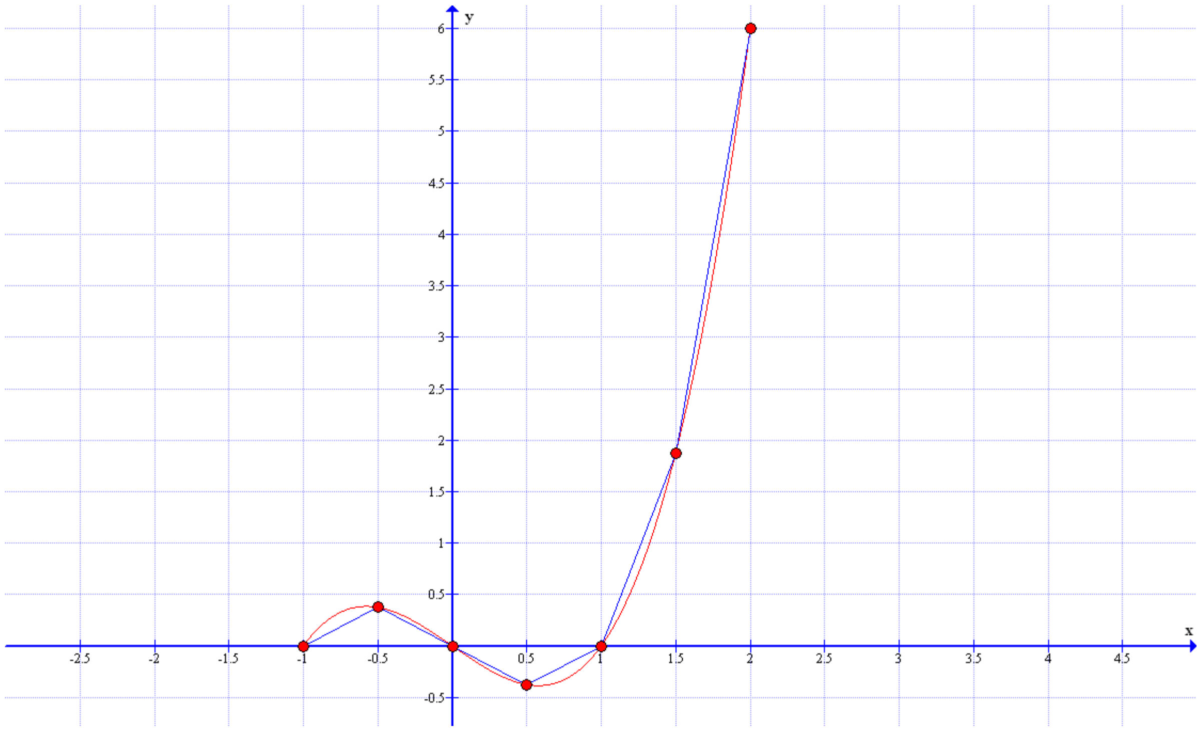


Figura 4: Función $f(x) = x^3 - x$ y nuestra descripción

1.1: Ejercicios

1. Justifique adecuadamente el comportamiento de la función del ejemplo 1
2. Cual es el valor aproximado de $f(2)$ en el ejemplo 1
3. Cual es la variación de la función $f(x) = x^3 - x$ en los intervalos
   - $[-1, 2]$
   - $[-1, 1]$
   - $[-1, 0]$
   - $[-1, -0{,}5]$
   - $[-1, -0{,}8]$
4. Encuentre una función cuya variación en $[1, 3]$ sea cero pero que la función no sea constante
5. Ordene las funciones desde la menos creciente a la más creciente en el intervalo $[0, 4]$
   a) $f_1(x) = x^2 - 1$
   b) $f_2(x) = x^2 - 3$
   c) $f_3(x) = 2 - x^2$
6. Un analista económico observa el comportamiento del dólar y registra lo siguiente:
   - durante el primer día crece un 2 % por cada día

- durante los siguientes 3 días decrece un 3 % por día
- Durante los últimos 4 días crece un 2 % en total

Si al final de los 8 días que duró su observación el dólar vale 2035 cuánto valía al comenzar su observación

7. De el ejercicio anterior entre que días se presenta la mayor variación del dólar
8. En la gráfica

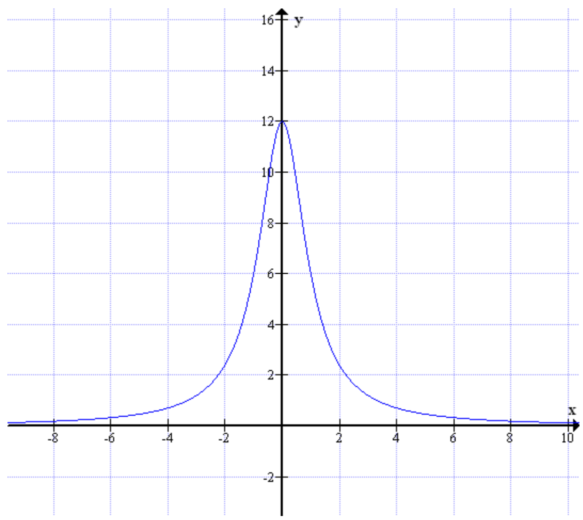


Figura 5: función f

a) ¿La variación de f en $[0,1]$ es mayor que en $[1,2]$?
b) ¿En $[-1,1]$ la función no presenta ninguna variación?
c) ¿En que intervalo de longitud 0.5 se presenta la mayor variación?, ¿En cuál se presenta la menor?

9. La tarifa que se le cobra a una persona por un pasaje aéreo está dada por

$$f(x) = \frac{1}{1+(x-12)^2} + 1,$$

en cientos de miles de pesos, donde x es el tiempo en el cual se realiza la reservación medido en meses. Si mide la variación de la tarifa. En que mes se presenta la mayor variación en el precio y en cual el menor?.

10. Un bacteriólogo está pendiente de un cultivo de bacterias y registra
    - el primer día tiene 100
    - el tercer día registra 700
    - el décimo día registra 2500

¿Cuál es la taza a la cual están creciendo las bacterias cada día?.

Sección 2: Definición de Derivada

Podemos definir, basándonos en el trabajo realizado en las sección anterior la variación instantánea de una función en un punto a.
Si llamamos

$$V_{[a,b]}f = \frac{\Delta y}{\Delta x}$$

la variación promedio de la función f en el intervalo $[a,b]$, podemos entonces hacer la siguiente construcción

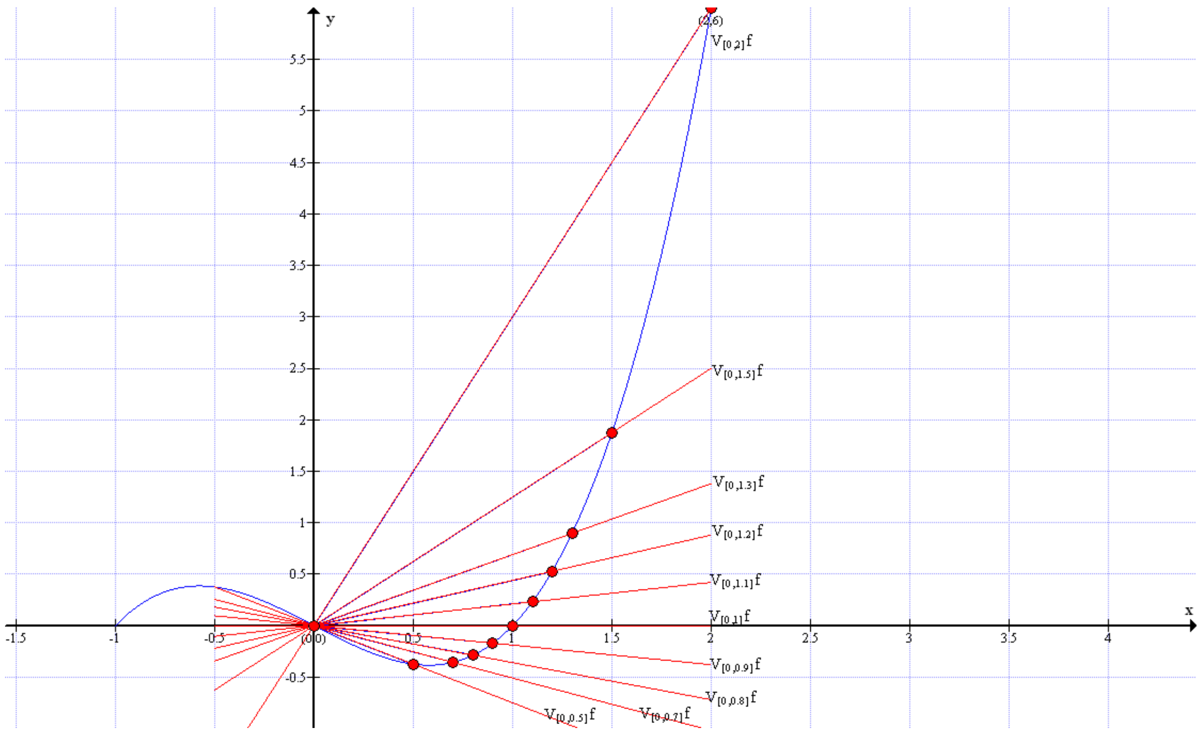


Figura 6: Construcción de la variación instantánea en cero para $f(x) = x^3 - x$

con la cual se observa como al ir encogiendo el intervalo en el cual se tiene la aproximación lineal de la función, la recta se va pareciendo cada vez más a la función, obviamente se va a necesitar más trabajo para hacer una descripción de una función pero va a quedar mucho mejor descrita.

La variación promedio en la función f en el intervalo $[c, c+h]$ escrita como

$$\frac{f(c+h)-f(c)}{(c+h)-c} = \frac{f(c+h)-f(c)}{h}$$

se llama cociente diferencial, debido a que es la base de la definición de la derivada. ˝En éste cociente diferencial en realidad no interesa si h es positivo o negativo ˝

Definición 2.1. *f es derivable en $x = c$ si existe el limite*

$$\lim_{h\to 0} \frac{f(c+h)-f(c)}{h},$$

y al valor de dicho límite lo notaremos $f'(c)$.

Si el limite no existe decimos que f no es derivable en $x = c$, note se que en la construcción gráfica solo se toman variaciones en intervalos de la forma $[0,h]$, es como si solo se ilustrara el límite por derecha en la definición, veamos algunos ejemplos de derivadas usando la definición

Ejemplo 3. *si $f(x) = x$ hallemos $f'(2)$, para esto debemos considerar el cociente diferencial*

$$\frac{f(2+h)-f(2)}{h} = \frac{(2+h)-2}{h} = \frac{h}{h} = 1$$

y luego tomar el límite cuando $h \to 0$ de dicho cociente diferencial, que obviamente es uno.

Ejemplo 4. *Si* $f(x) = x^2$ *hallemos* $f'(-1)$*, al considerar el cociente diferencial tenemos*

$$\begin{aligned}\frac{f(-1+h)-f(-1)}{h} &= \frac{(-1+h)^2-(-1)^2}{h}\\ &= \frac{1-2h+h^2-1}{h}\\ &= \frac{-2h+h^2}{h}\\ &= \frac{-2h}{h}+\frac{h^2}{h}\\ &= -2+h,\end{aligned}$$

luego tomando el limite cuando h *tiende a cero, tenemos*

$$\begin{aligned}\lim_{h\to 0}\frac{f(-1+h)-f(-1)}{h} &= \lim_{h\to 0} -2+h\\ &= -2\end{aligned}$$

Veamos un ejemplo de una función que no es derivable en un punto.

Ejemplo 5. *La función* $f(x) = |x|$ *no es derivable en* $x = 0$*, esto porque*

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(0+h)-f(0)}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{|h|}{h}.$$

Y éste límite no existe debido a que para valores positivos de h *tendríamos* $|h| = h$*, y*

$$\lim_{h\to 0^+}\frac{|h|}{h} = \lim_{h\to 0^+}\frac{h}{h} = 1$$

mientras que para h *negativo se tiene* $|h| = -h$*, y*

$$\lim_{h\to 0^-}\frac{|h|}{h} = \lim_{h\to 0^-}\frac{-h}{h} = -1$$

Esto nos hace concluir que el limite no existe debido a que los límites laterales no coinciden.

Miremos por ejemplo para las funciones a trozos que ocurre

Ejemplo 6. *Tratemos de hallar la derivada de* f *en* $x_0 = 1$*, donde*

$$f(x) = \begin{cases} x & si \quad x < 1\\ 3-x^2 & si \quad 1 \le x,\end{cases}$$

la gráfica de ésta función es:

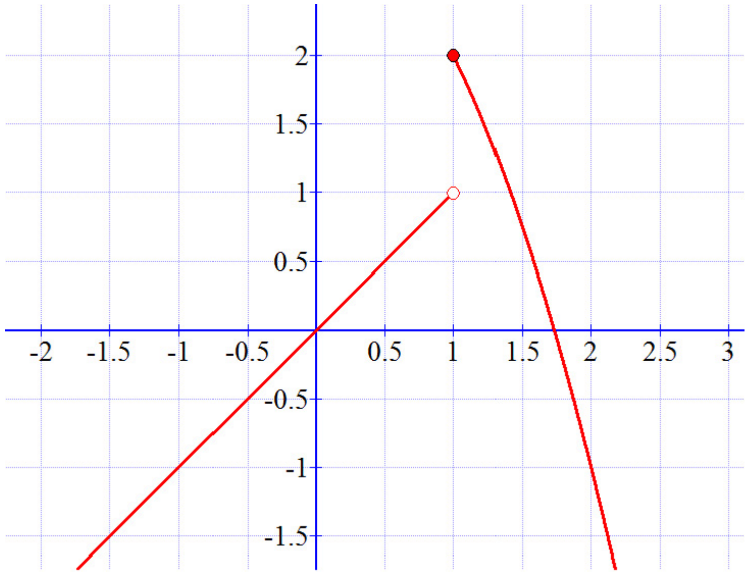


Figura 7: $f(x) = x$ si $x < 1$, $f(x) = 2 - x^2$, si $1 \leq x$

Para poder considerar el límite del cociente diferencial igual que en el ejemplo anterior es necesario considerar limites laterales.

Le recuerdo que si se encuentra evaluando la función f en números más pequeños que 1 se debe hacer con la regla de asignación $f(x) = x$, como en el caso en que $h < 0$ y tome $1 + h$.

$$\begin{aligned}\lim_{h\to 0^-} \frac{f(1+h) - f(1)}{h} &= \lim_{h\to 0^-} \frac{1+h-1}{h} \\ &= \lim_{h\to 0^-} \frac{h}{h} = 1\end{aligned}$$

Y cuando $h > 0$, $1 + h > 1$, entonces nos encontramos evaluando la función f en un número mayor a 1, luego debemos hacerlo mediante la regla de asignación $f(x) = 3 - x^2$, por lo que.

$$\begin{aligned}\lim_{h\to 0^+} \frac{f(1+h) - f(1)}{h} &= \lim_{h\to 0^+} \frac{3-(1+h)^2 - (3-(1)^2)}{h} \\ &= \lim_{h\to 0^+} \frac{(3-1-2h-h^2) - 2}{h} \\ &= \lim_{h\to 0^+} \frac{(-2-h)h}{h} \\ &= \lim_{h\to 0^+} -2-h = -2\end{aligned}$$

Esto nos permite concluir que el limite no existe debido a que los límites laterales no coinciden.

El ejemplo anterior nos motiva a redactar el siguiente teorema

Teorema 2.1. *Si la función f es derivable en el punto $x = c$, entonces es continua dicho punto, equivalente, si f no es continua en $x = c$ entonces no puede ser derivable en ese punto.*

Demostración. Veamos que si f no es continua entonces no es derivable. Si f no es continua en $x = c$ significa que $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) \neq f(c)$, o mejor dicho al ver a x como $c + h$ tenemos

$$\lim_{h\to 0} f(c+h) - f(c) = d \neq 0.$$

Luego

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(c+h) - f(c)}{h}$$

no existe pues el numerador tiende a un número $d \neq 0$ mientras que el denominador tiende a cero.

☑

En la siguiente gráfica correspondiente a la función

$$f(x) = \begin{cases} 2x - 2 & \text{si } x < 1 \\ 3 - x^2 & \text{si } 1 \leq x, \end{cases}$$

interprete las líneas como las rectas secantes que son usadas para encontrar la variación, en particular al acercar los puntos azules al $x_0 = 1$ se tiene que dichas rectas tienden a ser completamente verticales dejando de ser función y de tener pendiente.

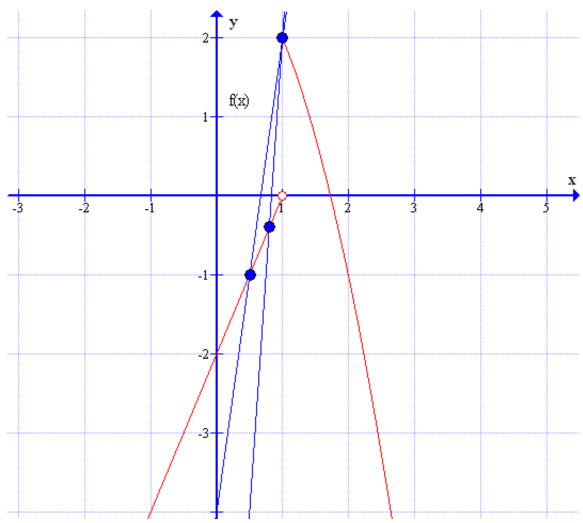


Figura 8: Representación geométrica de una función discontinua

Como consecuencia del anterior teorema, se tiene que si una función no está definida en un punto, entonces no es derivable en dicho punto. por ejemplo la función definida por

$$f(x) = \frac{1}{1-x} \text{ si } x \neq 0$$

tendrá por dominio $\mathbb{R}$ salvo los números 0 y 1, el cero porque ahí no se definió la función a propósito, y en 1 porque allí aritmeticamente no se puede evaluar, posee una asíntota vertical en 1. Su gráfica es mas o menos así:

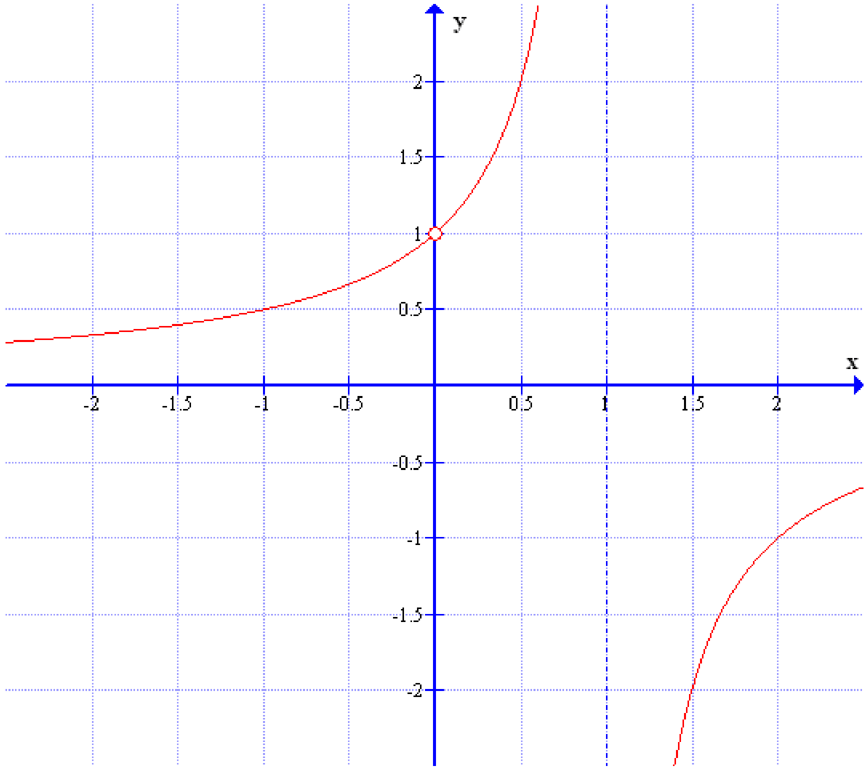


Figura 9: función que no es derivable ni en cero ni en 1

Esta función no es derivable en $x = 1$, porque al considerar el cociente diferencial

$$\lim_{h\to 0} \frac{f(1+h) - f(1)}{h},$$

se tiene que dicho limite no existe porque $f(1)$ no esta definido, una consideración similar se tiene en el caso $x = 0$.

Teorema 2.2. *Si* $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ *es creciente, entonces* $f'(c) \geq 0$ *para todo* $c \in [a, b]$

Demostración. Si f es creciente entonces $f(c+h) - f(c) > 0$ para todo $h > 0$ pequeño, de lo cual

$$\frac{f(c+h) - f(c)}{h} > 0$$

por lo tanto se concluye que la variación es positiva entonces el límite también. ☑

Corolario 2.1. *Si* f' *es positiva en* $[a, b]$*, entonces* f *es creciente en* $[a, b]$*, y si* f' *es negativa en* $[a, b]$*, entonces* f *es decreciente en* $[a, b]$.

Demostración. ejercicio ☑

2.1: Ejercicios

1. Demostrar el corolario anterior (2.1)
2. Halle la derivada en $x_0 = 1$ para las funciones

   a) $f(x) = 3x^2 - 2x + 1$

b) $f(x) = \frac{1}{x}$
c) $f(x) = 2 - x^3$

3. Muestre que la función $f(x) = |x^3|$ es derivable en todo punto
4. Muestre que la función $f(x) = |1 - |x||$ no es derivable en -1, en 1 ni en cero
5. Encuentre los puntos donde $f(x) = |x^2 - 1|$ no es derivable
6. Si $f'(3) = 1$ y $g'(3) = -1$, ¿ ésto significa que el valor de la función f en 3 es mayor que el valor de la función g en 3?. explique que significa.

Sección 3: Cálculo de derivadas usando la definición

Ejemplo 7. *Como se ilustró en la gráfica (6), hallemos $f'(0)$ donde $f(x) = x^3 - x$, empezamos con el cociente diferencial*

$$\begin{aligned}\frac{f(0+h) - f(0)}{h} &= \frac{(h^3 - h) - (0^3 - 0)}{h} \\ &= \frac{h^3 - h}{h} \\ &= \frac{h^3}{h} - \frac{h}{h} = h^2 - 1,\end{aligned}$$

tomando el limite, tenemos

$$\begin{aligned}\lim_{h\to 0} \frac{f(0+h) - f(0)}{h} &= \lim_{h\to 0} h^2 - 1 \\ &= -1\end{aligned}$$

que concuerda con lo expuesto en dicha gráfica.

De continuar así para poder hacer la descripción de una función mediante su variación instantánea nos llevara una eternidad. calculemos entonces la derivada de una función no en un punto específico sino en todo punto, en donde sea derivable.

Ejemplo 8. *Hallemos $f'(x)$ para la función $f(x) = x^2$, tomando el cociente diferencial tendríamos*

$$\begin{aligned}\frac{f(x+h) - f(x)}{h} &= \frac{(x+h)^2 - x^2}{h} \\ &= \frac{x^2 + 2xh + h^2 - x^2}{h} \\ &= \frac{(2x+h)h}{h} = 2x + h,\end{aligned}$$

y tomando el límite tenemos

$$\lim_{h\to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \lim_{h\to 0} 2x + h = 2x.$$

Esto quiere decir que la variación instantánea en cada punto sobre la función $f(x) = x^2$ ya fue calculado y es $f'(x) = 2x$, al analizar éste hecho podemos describir el comportamiento de la función con algo más de precisión

Veamos como se realiza para una función a trozos

Ejemplo 9. *Derivemos la función*

$$f(x) = \begin{cases} 2x - 2 & si\ x < 1 \\ 3 - x^2 & si\ 1 \leq x, \end{cases}$$

como ya se vio ésta función no es derivable en $x = 1$, pero en todos los demás puntos si es derivable, supongamos que $x < 1$ entonces podemos tomar h de tal forma que $x + h < 1$, al menos para un h suficientemente pequeño, entonces al tomar el cociente diferencial y teniendo en cuenta que para $x + h < 1$, $f(x + h) = 2(x + h) - 2$, tendríamos:

$$\begin{aligned} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} &= \frac{2x + 2h - 2 - (2x - 2)}{h} \\ &= \frac{2h}{h} = 2, \end{aligned}$$

luego la derivada de $f(x)$ para $x < 1$ es 2, de manera análoga para $x > 1$ se puede tomar h pequeño tal que $x + h > 1$ y la función evaluada en $x + h$ será

$$f(x + h) = 3 - (x + h)^2 = 3 - x^2 - 2xh - h^2,$$

por consiguiente

$$\begin{aligned} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} &= \frac{(3 - x^2 - 2xh - h^2 - (3 - x^2))}{h} \\ &= \frac{(-2x - h)h}{h} = -2x - h, \end{aligned}$$

entonces la derivada de f en $x > 1$ es $-2x$. Resumiendo, la derivada de $f(x)$ es

$$f'(x) = \begin{cases} 2 & si\ x < 1 \\ -2x & si\ 1 < x, \end{cases}$$

Esto quiere decir que la derivada de funciones a trozos son funciones a trozos. Veamos ahora como interpretar la derivada en la gráfica de una función

Ejemplo 10. *Si tomamos la función $f(x) = x^3 - x$ y hallamos $f'(x)$, tendríamos*

$$\begin{aligned} f'(x) &= \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} \\ &= \lim_{h \to 0} \frac{(x^3 + 3x^2h + 3xh^2 + h^3 - (x + h)) - (x^3 - x)}{h} \\ &= \lim_{h \to 0} \frac{(3x^2 + 3xh + h^2 - 1)h}{h} \\ &= \lim_{h \to 0} 3x^2 + 3xh + h^2 - 1 \\ &= 3x^2 - 1 \end{aligned}$$

Lo cual dice en que $f'(x) = 3x^2 - 1$, y si por ejemplo lo evaluamos en $x = 1$ tendríamos $f'(1) = 3(1)^2 - 1 = 2$.

La interpretación de éste valor es el de la pendiente de una recta "la recta tangente que se observa en la gráfica".

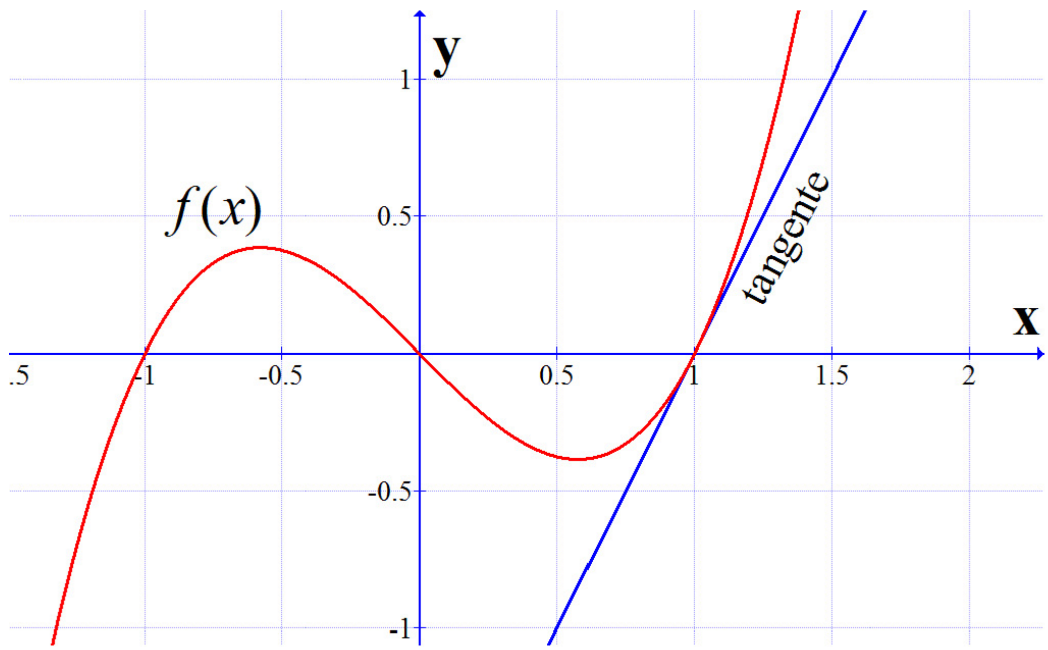


Figura 10: recta tangente a la función $f(x) = x^3 - x$ en $x = 1$

Quiere esto decir que la función en $x = 1$ tiene el comportamiento de una recta "la tangente"de pendiente 2, Recuerde que la derivada surgió del limite cuando h tiende a cero de la variación promedio de la función en intervalos de la forma $[a, a+h]$, y ésta variación es la pendiente de la recta secante que une a los puntos $(a, f(a))$ y $(a+h, f(a+h))$, luego la interpretación que le damos a dicho límite es también el de la pendiente de una recta, solo que al tomar el límite el intervalo en el cuál se media la variación de la función colapso en un solo punto, en el caso de éste ejemplo en $x = 1$. luego la recta que se graficara no es secante sino tangente.

3.1: Ejercicios

1. Usando la definición, encuentre la derivada de $f(x) = x$ y $g(x) = x^2$, luego la de $f + g$
2. Usando la definición, encuentre la derivada de

$$f(x) = \begin{cases} x^2 - 1 & \text{si } x < 1 \\ 3 - 2x^2 & \text{si } 1 \leq x, \end{cases}$$

3. Usando la definición,encuentre la derivada de $f(x) = |x^2 - 1|$, recuerde que esta función esta descrita a trozos
4. Muestre que si $f(x) = mx + b$ entonces $f'(x) = m$

Sección 4: Recta Tangente

Como se comento anteriormente la interpretación geométrica de la derivada $f'(a)$ es la pendiente de una recta, que ésta no es secante sino tangente, una rápida revisión por parte del lector le permitirá recordar que si se conoce la pendiente de una recta y un punto por el que pasa se puede construir la ecuación de la misma.

Si m es la pendiente de la recta que pasa por el punto (x_1, y_1) la ecuación de dicha recta es $y = m(x - x_1) + y_1$, para el caso de la recta tangente a f en x_0, es $y = f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0)$.

De la definición de derivada tenemos que

$$f'(x_0) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h},$$

si cambiamos h por $x - x_0$ tendríamos

$$f'(x_0) = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0},$$

Esto quiere decir que para valores de x muy próximos a x_0

$$f'(x_0) \approx \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0},$$

que se puede reescribir como

$$f'(x_0)(x - x_0) \approx f(x) - f(x_0),$$

de aquí que afirmemos que

$$f(x) \approx f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0),$$

o sea que si f es derivable en x_0, en los valores cercanos de x al x_0 la función es casi igual a su recta tangente. De aquí que se enuncie un teorema muy importante al respecto

Teorema 4.1. *f es derivable en x_0 si y solamente si $f(x) = m(x - x_0) + f(x_0) + \epsilon(x - x_0)$ con $\lim_{x \to x_0} \frac{\epsilon(x - x_0)}{x - x_0} = 0$, aquí la $\epsilon(x - x_0)$ es la función que mide el error de aproximación de la recta a la función f, y obviamente tiende a cero cuando x tiende a x_0*

Demostración. Si la f es derivable previamente se mostró que f debe ser aproximable por la recta tangente, solo faltara dar cuenta del error.

vemos que

$$\epsilon(x - x_0) = f(x) - f(x_0) - f'(x_0)(x - x_0),$$

entonces

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0) - f'(x_0)(x - x_0)}{x - x_0} = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} - f'(x_0) = 0,$$

porque la f es derivable en x_0, en ste caso $m = f'(x_0)$.

De otro lado, si

$$f(x) = m(x - x_0) + f(x_0) + \epsilon(x - x_0)$$

con

$$\lim_{x \to x_0} \frac{e(x - x_0)}{x - x_0} = 0,$$

al cambiar x por $x_0 + h$, es decir $x = x_0 + h$, nos permite afirmar que $x \to x_0$ cuando $h \to 0$, luego la expresión del teorema se puede reescribir como

$$f(x_0 + h) = mh + f(x_0) + \epsilon(h)$$

que se puede reordenar como

$$f(x_0 + h) - f(x_0) = mh + \epsilon(h)$$

y entonces al dividir por h tenemos

$$\frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} = m + \frac{\epsilon(h)}{h},$$

y como

$$\lim_{x \to x_0} \frac{\epsilon(x - x_0)}{x - x_0} = 0,$$

se tiene

$$\lim_{h \to 0} \frac{\epsilon(h)}{h} = 0.$$

De ahí que

$$\begin{aligned} \lim_{h \to 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} &= \lim_{h \to 0} \left(m + \frac{\epsilon(h)}{h} \right) \\ &= m, \end{aligned}$$

luego dicho límite sí existe y es m, lo que quiere decir que f si es derivable en x_0

☑

En la siguiente gráfica se muestra las consecuencias de éste teorema, se puede apreciar que la función $f(x) = x^2 - 1$ y la recta son casi la misma en el punto $x = 0{,}65$, la recta es la tangente de la función en el punto $(0{,}6, f(0{,}6))$ y tiene por ecuación

$$y = f'(0{,}6)(x - 0{,}6) + f(0{,}6)$$

o sea

$$y = 1{,}2(x - 0{,}6) + 0{,}64$$

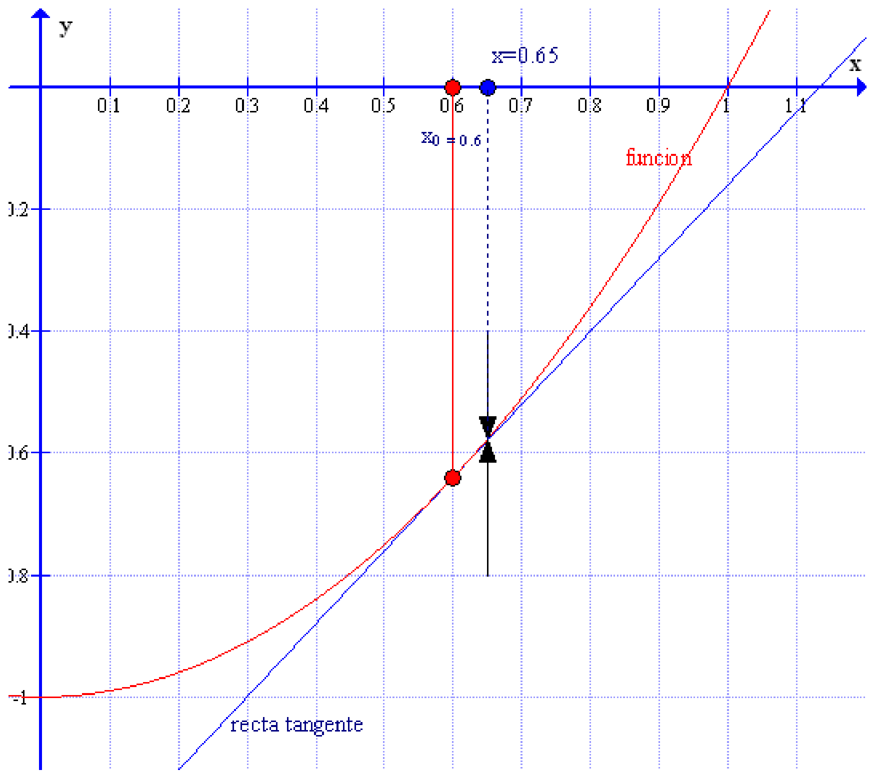


Figura 11: ilustración de proximidad entre recta tangente y función

Encontremos la recta tangente a una función y usemos la para aproximar la función en un punto cercano al cual derivamos.

Ejemplo 11. *Como se pudo observar en la gráfica anterior, la función* $f(x) = x^2 - 1$ *es derivable en* $x = 0{,}6$*, en realidad en todo punto y su derivada es* $f'(x) = 2x$. Es un ejercicio para el lector encontrar ésta derivada , *la recta tangente de la función en el punto* $(0{,}6, f(0{,}6))$ *tiene por ecuación* $y = f'(0{,}6)(x - 0{,}6) + f(0{,}6)$ *o sea* $y = 1{,}2(x - 0{,}6) - 0{,}64$ *que se puede reescribir como* $y = 1{,}2x - 1{,}36$ *y al evaluar la función en* $0{,}65$ *tendríamos* $f(0{,}65) = (0{,}65)^2 - 1 = -0{,}5775$*, mientras que al evaluarlo en la recta tendríamos* $y(0{,}65) = 1{,}2 \times 0{,}65 - 1{,}36 = -0{,}58$

Eso nos da un error de $f(0{,}65) - y(0{,}65) = -0{,}5775 - (-0{,}58) = 0{,}0025$*, lo hacía el teorema al dividir el error entre la distancia de* x *a* x_0 *no es otra cosa que comparar cuan cerca esta la recta de la función con respecto a la distancia entre* x *y* x_0*, en este caso el error es de* $0{,}0025$ *mientras que la distancia entre* x *y* x_0 *es* $0{,}65 - 0{,}6 = 0{,}05$.

Como se menciono anteriormente si una gráfica posee un pico ésta no puede ser derivable, esto se puede entender mejor usando el teorema anterior, ya que si la función posee un pico en x_0 gráficamente al menos es imposible aproximar la función de manera razonable por alguna recta.

Ejemplo 12. *Supongamos que se tiene conocimiento de la derivada de una función, dado que ésta nos dice como se comporta la función vamos a tratar de crear una versión aproximada de la función.*

Si

$$f'(x) = \frac{1}{1 - x}$$

El lector ya notó cual es la función f?, *grafiquemos la* f *en el intervalo* $[-2, 1)$.
Ya que la derivada no existe en $x = 1$ *no se conoce información de* f *allí.*
Primero evaluemos la derivada en algunos puntos entre -2 *y* 1*, por ejemplo:*

x	-2	-1.7	-1.4	-1.1	-0.8	-0.5	-0.2	0.1	0.4	0.7
$f'(x)$	0.333	0.37	0.417	0.476	0.556	0.667	0.833	1.111	1.667	3.333

Cuadro 3: datos para graficar f usando f'

debemos suponer que conocemos cuanto vale la función en -2 *que es el primer punto. Si fuera cero, tendríamos:*

- *f pasa por $(-2, 0)$ y en -2 presenta una variación instantánea de $f'(-2) = 0{,}333$ eso quiere decir que su recta tangente en ese punto es $y(x) = f'(-2)(x - (-2)) + f(-2)$, es decir*

  $$y = 0{,}33(x + 2) + 0$$

  o sea $y = 0{,}33x + 0{,}66$. Como ésta recta es muy parecida a la función graficamos ésta en lugar de f, pero solo en un pequeño intervalo, no se puede abusar porque el teorema solo garantiza el parecido en un pequeño intervalo al rededor de $x = -2$, entonces solo se usa en $[-2, -1{,}7]$

  Con ésta recta entonces podemos predecir el valor de la función en $x = -1{,}7$ que sera

  $$\approx y(-1{,}7) = 0{,}33 \times (-1{,}7) + 0{,}666 = 0{,}1.$$

  Este dato nos permite aproximar la función en un próximo intervalo.

- *Repetimos el procedimiento anterior en el intervalo $[-1{,}7, -1{,}4]$ en este caso la función en $x = -1{,}7$ es $f(-1{,}7) \approx 0{,}1$ y la derivada en se punto es $f'(-1{,}7) = 0{,}37$, luego la ecuación de la recta tangente a f en dicho punto es $y(x) = f'(-1{,}7)(x - (-1{,}7)) + f(-1{,}7)$ es decir $y(x) = 0{,}37(x + 1{,}7) + 0{,}1$ o sea $y = 0{,}37x + 0{,}729$, nuevamente con esta recta tangente en este intervalo podemos encontrar una aproximación razonable de $f(-1{,}4)$ que sera $y(-1{,}4) = 0{,}37 \times (-1{,}4) + 0{,}729 = 0{,}211$*

- *Continuando con el mismo procedimiento en cada uno de los intervalos faltantes se puede construir una gráfica aproximada de la función f de la cual solo se conocía su derivada.*

Mediante esta construcción conocida como el método de Euler se puede obtener la gráfica de una función a partir de su derivada y del conocimiento de un punto inicial.

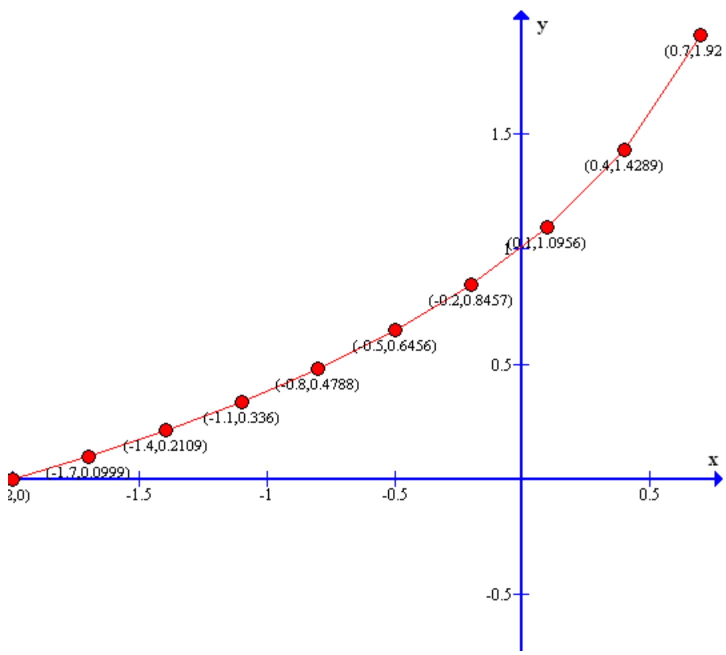


Figura 12: construcción de f usando la información de f', mediante el método de Euler

4.1: Ejercicios

1. Encuentre la recta tangente de la función $f(x) = 1/x$ en $x_0 = 1$
2. Posee recta tangente en $x_0 = 2$ la función $|x - 2|$?
3. Terminar con la construcción que se empezó en el ejemplo 12
4. Use la recta tangente de $f(x) = x^2 - x$ en $x = \frac{1}{2}$ para aproximar el valor de $f(0{,}6)$

Sección 5: Teorema del valor Medio

Quiero terminar esta primera lectura presentado un resultado muy importante en matemáticas, es el teorema del valor medio. Para tal fin primero revisemos un resultado previo llamado el teorema de Rolle,

Teorema 5.1. *Rolle: Una función $f(x)$ definida en el intervalo $[a, b]$ derivable, con derivada sea una función continua y que además $f(a) = f(b) = 0$, posee derivada igual a cero en algún punto $c \in [a, b]$*

La siguiente gráfica ilustra lo que dice geométricamente el teorema

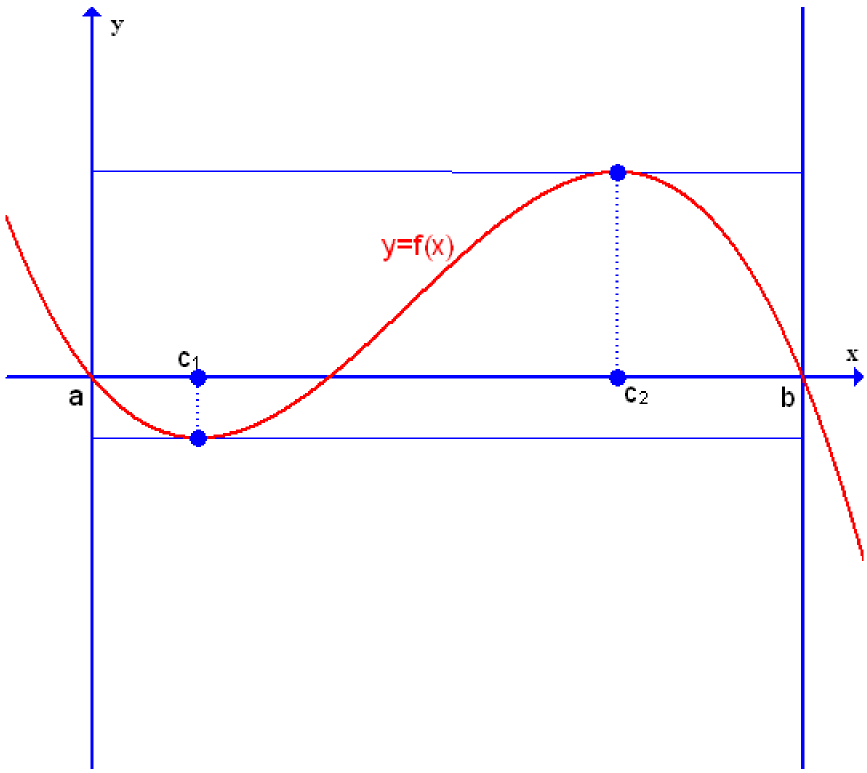


Figura 13: Representación geométrica del teorema de Rolle

Demostración. si f es derivable en el intervalo $[a, b]$ y su derivada es una función continua, si esta es constante entonces es cero todo el tiempo por lo que el teorema seria cierto.

Supongamos entonces que la función f no es constante, entonces en algún momento debe crecer y en otro decrecer. Sin importar que ocurre primero la derivada tiene que cambiar de signo ya que si la función f es creciente, entonces f' es positiva y si es decreciente entonces la derivada es negativa. Usando entonces el teorema del valor intermedio, que recordamos a continuación, se llega a la conclusión que f' debe ser cero en algún punto en el intervalo $[a, b]$, a este punto lo llamamos c ☑

Teorema 5.2. *valor intermedio: Si $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ y es continua, si m es el mínimo valor y M el máximo valor que alcanza la función f en dicho intervalo, entonces la función alcanza todos los valores intermedios entre m y M.*

La siguiente gráfica ilustra el teorema del valor intermedio.

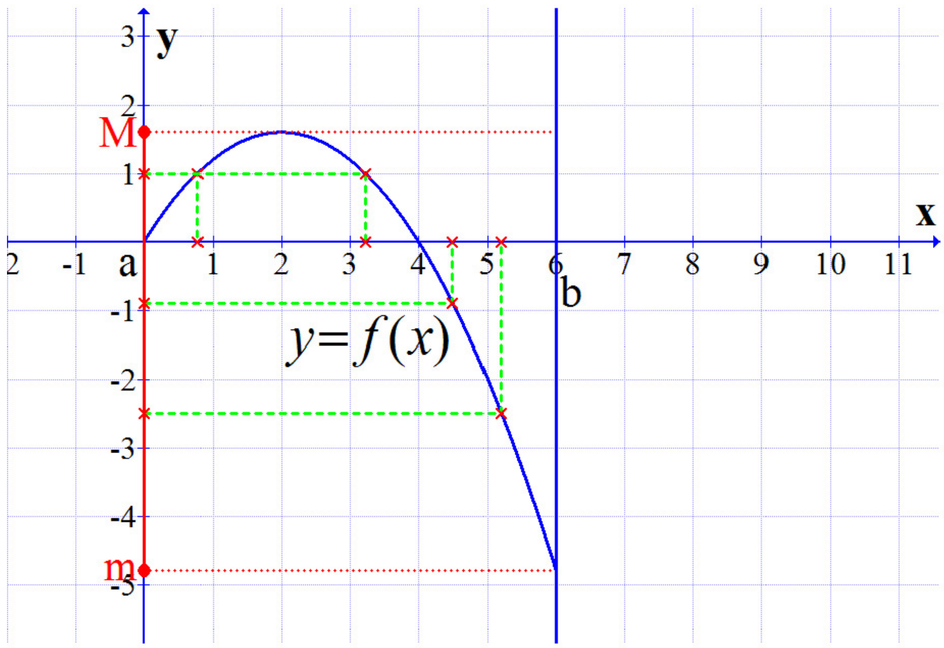


Figura 14: Representación del teorema del valor intermedio

El teorema del valor medio es una generalización del teorema de Rolle, de mucha utilidad teórica

Teorema 5.3. *Valor Medio: si* $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ *es derivable y de derivada continua, entonces existe un punto* $c \in [a, b]$ *para el cual se tiene* $f'(c) = \frac{f(b)-f(a)}{b-a}$

Demostración. Si consideramos la función

$$g(x) = f(x) - \left(\left(\frac{f(b) - f(a)}{b - a}\right)(x - a) + f(a)\right),$$

tenemos entonces,

$$g(a) = f(a) - \left(\left(\frac{f(b) - f(a)}{b - a}\right)(a - a) + f(a)\right) = 0$$

y,

$$\begin{aligned} g(b) &= f(b) - \left(\left(\frac{f(b) - f(a)}{b - a}\right)(b - a) + f(a)\right) \\ &= f(b) - (f(b) - f(a) + f(a)) = 0, \end{aligned}$$

luego g satisface las condiciones del teorema de Rolle, por tanto existe un punto $c \in [a, b]$ en donde $g'(c) = 0$, recuerde que

$$g'(x) = f'(x) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a},$$

entonces

$$g'(c) = f'(c) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a} = 0,$$

de esto se tiene que

$$f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

☑

El siguiente gráfico ilustra el teorema del valor medio

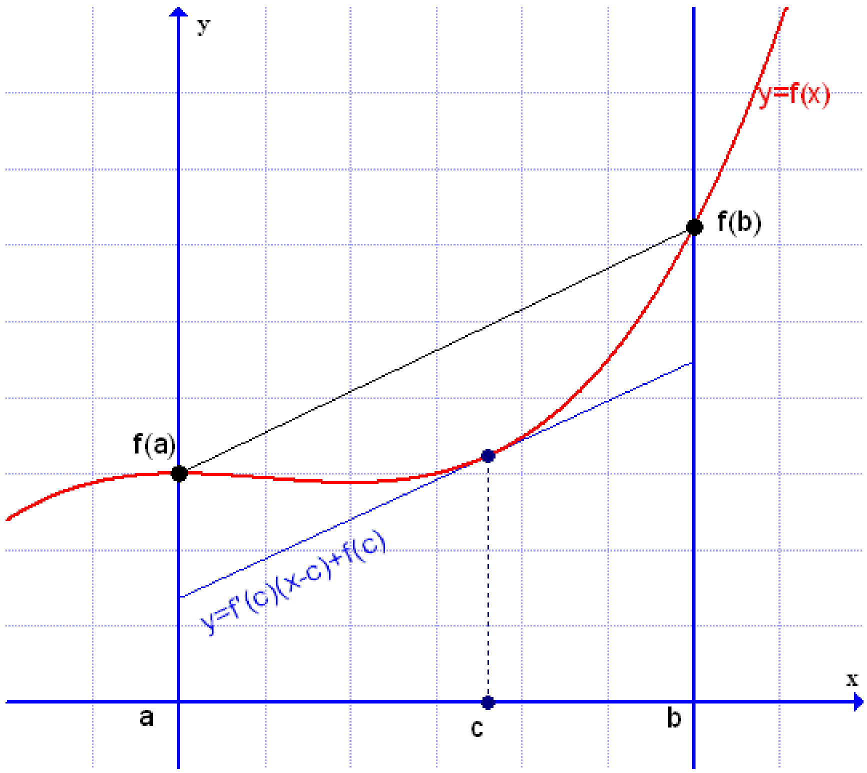
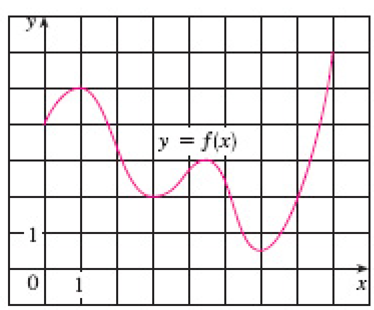


Figura 15: representación del teorema del valor medio

5.1: Ejercicios

1. Use la gráfica de la función f para encontrar el punto c que verifica el teorema del valor medio en el intervalo $[0, 8]$



2. Suponga que $f(0) = -3$ y $f'(x) \leq 5$ para todos los valores de x La desigualdad da una restricción sobre la taza de crecimiento de f que impone entonces una restricción sobre los posibles valores de f. Use el teorema del valor medio para determinar cual puede ser el valor máximo de $f(4)$