Unidad 2 / Escenario 3

Lectura Fundamental

Reconociendo objetos del álgebra lineal y sus relaciones

Contenido

1. Palabras clave

n-uplas, vectores, combinación lineal.

2. Preguntas introductorias

Algunos de los objetivos matemáticos bajo los cuales se define el álgebra lineal son las matrices, las n-uplas, los polinomios y las funciones, entre otros, y cada uno de ellos permite representar, organizar y relacionar información en diversos contextos, tal y como se observó en la primera unidad, para el caso de las matrices. A este respecto surgen interrogantes como:

- En contextos menos cotidianos y más asociados a una profesión, ¿qué otras representaciones se puede hacer con dichos objetos?
- ¿Cuáles necesidades surgen alrededor de dichas representaciones en términos de entenderlas y crear relaciones entre ellas, de modo que puedan emplearse en situaciones de la vida real?
- ¿Qué habilidades se deben desarrollar para identificar cuándo se pueden o no usar dichos objetos y sus relaciones en contextos profesionales?

Estos interrogantes se responderán en la lectura de la siguiente manera: se reconocerán los elementos que constituyen un conjunto para identificar qué tipo de operaciones son básicas y necesarias para su manejo y aplicabilidad en la vida real; después de esto se presentarán los pasos a seguir en la verificación de la posibilidad de uso de los objetos en contextos profesionales, lo cual debe volverse un hábito para el lector.

3. Representación de información asociada a una profesión

Existen demasiados tipos de representaciones que se pueden realizar con objetos matemáticos como los mencionados en la sección de preguntas introductorias. A continuación se presentan cuatro de ellos.

¿Sabías qué. . . ?

Las **matrices** son arreglos rectangulares de tamaño $m \times n$, donde m y n son números naturales y corresponden al número de filas o renglones y de columnas del arreglo, respectivamente.
Las **n-uplas** son cualquier conjunto ordenado de n objetos de la forma,
$\left(a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n\right)$ o $\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix}$; que a su vez pueden ser vistos como matrices de tamaños $1 \times n$ o $n \times 1$, respectivamente; donde n es un número natural.
Los **polinomios** son expresiones de la forma $P_n(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + a_{n-2}x^{n-2} + \ldots + a_1 x^1 + a_0$, donde n es el grado del polinomio, a_i con $0 \leq i \leq 0$, son los coeficientes, $a_n x^n$ es el término principal y a_0 es el término independiente. Por ejemplo $P_4(x) = -3x^4 + 7x^3 + \frac{3}{5}x + 9$, es un polinomio de grado cuatro con término principal $-3x^4$ y término independiente 9.
Una **función** es una regla de asignación entre dos conjuntos A y B, de manera que a cada elemento del conjunto A se asigna un único elemento del conjunto B.

Nótese que en la definición se menciona que los elementos de una n-upla son objetos, por lo que pueden ser cualquier objeto matemático dependiendo del contexto de la situación al cual esté asociado.

Con estos elementos en este aparte se busca que el lector abra su mente a dichas formas de representación, las haga propias e invente las que considere que facilitan su labor profesional, de forma coherente, para que las aplique en su quehacer cotidiano; el ideal es que esto se vuelva una habilidad la cual se adquiere de forma autónoma a partir de la asociación del lenguaje cotidiano con el lenguaje matemático. En lo que sigue se expondrán algunas situaciones en la que se emplean las representaciones mencionadas.

El procesamiento de imágenes es la rama de la ingeniería que se ocupa de la edición digital de estas, apoyada en el uso de matrices para representar los pixeles que conforman o componen una imagen, y de n-uplas para describir la tonalidad de la misma.

Un pixel almacena un número que representa la tonalidad de una parte de la imagen, la cual dependiendo del modelo de color utilizado, RGB o CMYK, se define a partir de la combinación de los tonos de los colores rojo, verde y azul, o cian, magenta, yellow y key, según el modelo. Cada una de esas combinaciones se asocia en el lenguaje matemático a la 3-upla (r, g, b) y 4-tupla (c, m, y, k), cuyas componentes indican la tonalidad de los colores que conforman el pixel observado.

En el modelo RGB las tonalidades se definen como se observa en la Figura 1.
Con este modelo, una parte de una imagen puede representarse por medio de una matriz cuyas componentes son 3-uplas como se expone en la Figura 2, en ésta se reconocen los siguientes aspectos:

- Cada elemento de la matriz corresponde a la tonalidad de la combinación de colores que aparece en el pixel. Por ejemplo a_{13} corresponde a la 3-upla $(0, 0, 1)$ que es la tonalidad rojo del pixel de la esquina superior izquierda.

- Las 3-uplas $(0, 0, 0)$,$(1, 1, 1)$,$(1, 0, 0)$,$(0, 1, 0)$ y $(0, 0, 1)$ representan los colores negro, blanco, rojo, verde y azul en su tonalidades más claras, respectivamente.

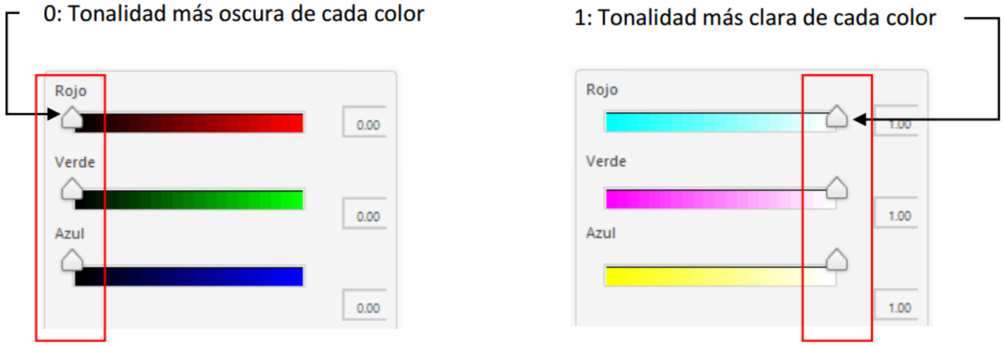


Figura 1: **Tonalidades de los colores que constituyen la 3-upla**.
*Fuente:*Elaboración propia

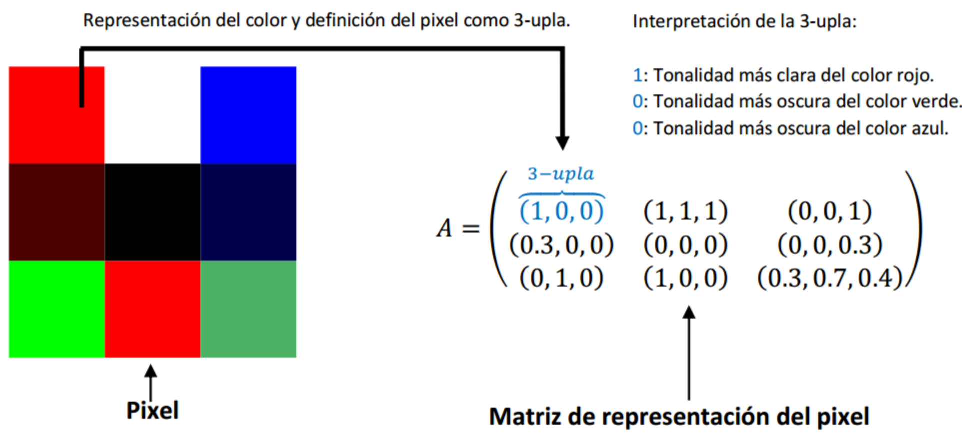


Figura 2: **Representación matricial de un pixel**.
*Fuente:*Elaboración propia

- Las 3-uplas $(0.3, 0, 0)$,$(0, 0, 0.3)$ y $(0.3, 0.7, 0.4)$ son combinaciones de los tres tonos y por ello tienen valores que están entre cero y uno.

Con esto se aprecia que las n-uplas se usan para categorizar elementos, que para este caso fueron tonos de color, pero se usan también en otros campos como, por ejemplo, en la Economía en cuyo caso estas indican las preferencias de consumo de bienes de una persona (como ocurre con la economía) o los precios de dichos bienes (ver imagen 3).

De otra parte, en situaciones que competen al movimiento de una partícula, el área de una región plana, el volumen de un objeto, en los costos e ingresos en términos de las unidades producidas y vendidas, y las señales de tipo continuo o discreto que aparecen en aeronáutica y circuitos, entre muchas otras, suelen emplearse expresiones polinomiales u otras funciones para representar la información que proveen. Algunos ejemplos son:

- Los ingresos obtenidos de un producto por una empresa en sus primeros tres años de estar en el mercado, en términos de las unidades vendidas, se pueden representar con expresiones polinomiales como las siguientes:

- Las señales continuas y discretas que aparecen en varios campos de la ingeniería, entendidas como cantidades físicas que varían con el tiempo, el espacio o cualquier otra variable, pueden representarse a través de funciones continuas (cuyo dominio tiene valores infinitos y puede ser el conjunto de los números reales o un subconjuto de éste) o discretas (su dominio tiene valores finitos) como las que se aprecian en la siguiente figura.

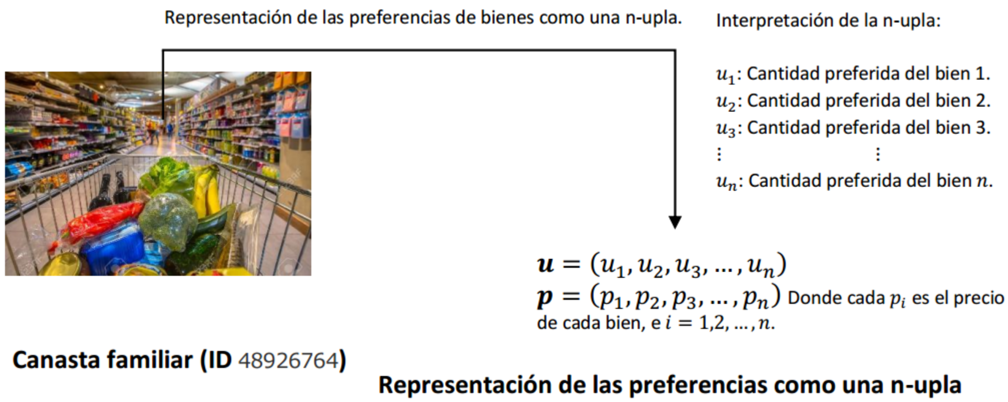


Figura 3: **Representación de preferencias con una n-upla**.
*Fuente:*Elaboración propia

Primer año $\longrightarrow$ $p_1(x) = 200 - 3x^2$
Segundo año $\longrightarrow$ $p_2(x) = 100 - x^2$
Tercer año $\longrightarrow$ $p_3(x) = 100 + 20x - 8x^2$

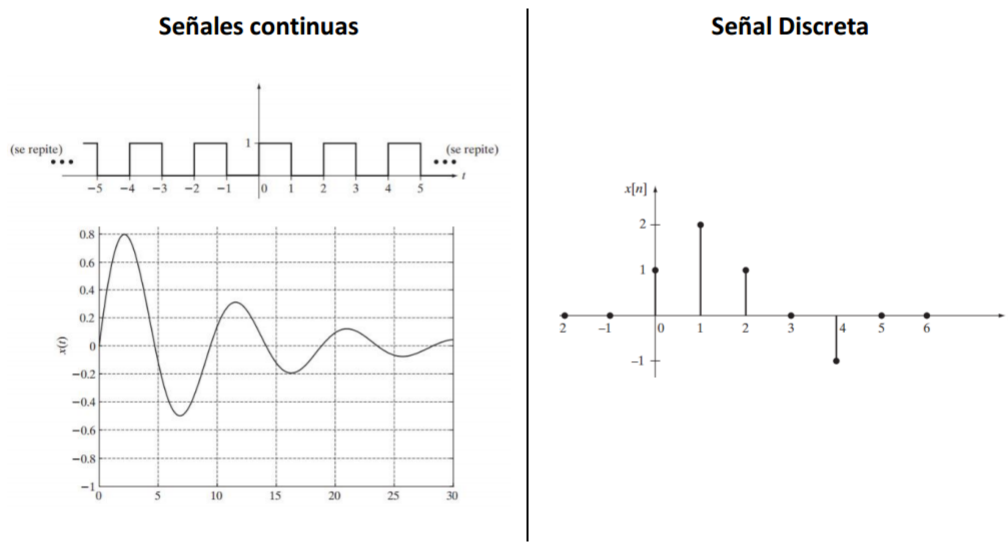


Figura 4: **Ejemplos de señales continuas y discretas**.
*Fuente:*Kamen, E. y Heck, B. (2008, p. 9,11)

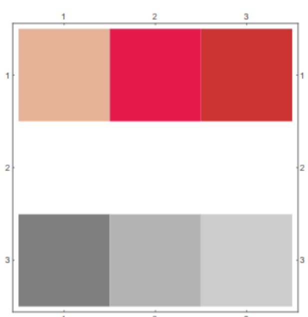
En estos casos cada señal emitida en un tiempo determinado es una función que se suele representar a través de n-uplas como $(x(t_0), x(t_1), x(t_3), ..., x(t_n))$, donde $x(t_i)$ es el valor de la señal en el tiempo t_i con $0 \leq i \leq n$. Ahora que se identifican algunas formas de representar información a través de los objetos matemáticos, surgen preguntas como las que se exponen a continuación.

Procesamiento de imágenes	Análisis de las preferencias de un bien
¿Cómo obtener una acentuación de tonos de color en un pixel dado? ¿Cómo se pueden acentuar o atenuar los colores de una imagen?	¿Con dos o más tipos de preferencias qué combinaciones se pueden realizar? ¿Es posible escalar las preferencias?
Ingresos en términos de las cantidades vendidas	**Señales continuas y discretas**
¿En los primeros tres años de cuánto fueron los ingresos de un producto determinado, en términos de las cantidades vendidas? ¿Es posible escalar esos ingresos?	Cuando se emiten dos señales al tiempo, ¿qué señal resulta? ¿Es posible escalar una señal?

La respuesta a estos interrogantes implica definir relaciones entre los objetos matemáticos considerados, las cuales se traducen al lenguaje del álgebra lineal en operaciones como la adición, la multiplicación escalar y el producto punto. Estas operaciones no se pueden aplicar siempre ni a cualquier contexto por lo que es necesario identificar si existen unas relaciones básicas o mínimas que se puedan definir y usar en todos los contextos. A continuación se intentará deducir esto.

3.1. La adición de objetos del álgebra lineal

En el procesamiento de imágenes la adición de matrices sirve para realizar ajustes de tonalidades y responde a la pregunta de cómo obtener una acentuación de tonos de color en un pixel dado. Para identificar esto, considere la matriz A de la imagen 5 y suponga que se desea acentuar el tono azul del pixel.



$$\longrightarrow A = \begin{pmatrix} (0.9, 0.7, 0.6) & (0.9, 0.1, 0.3) & (0.8, 0.2, 0.2) \\ (1, 1, 1) & (1, 1, 1) & (1, 1, 1) \\ (0.5, 0.5, 0.5) & (0.7, 0.7, 0.7) & (0.8, 0.8, 0.8) \end{pmatrix}$$

Figura 5: **Representación matricial del pixel**.
*Fuente:*Elaboración propia

Lo solicitado se logra adicionando a A una matriz B que contenga la triplas del tono de color que se busca acentuar.

$$B = \begin{pmatrix} (0,0,1) & (0,0,1) & (0,0,1) \\ (0,0,1) & (0,0,1) & (0,0,1) \\ (0,0,1) & (0,0,1) & (0,0,1) \end{pmatrix}$$

La adición $A + B$, que se nombrará con la letra C, dará la acentuación en los tonos azules.

$$
\begin{aligned}
A+B &= \begin{pmatrix} (0.9,0.7,0.6) & (0.9,0.1,0.3) & (0.8,0.2,0.2) \\ (1,1,1) & (1,1,1) & (1,1,1) \\ (0.5,0.5,0.5) & (0.7,0.7,0.7) & (0.8,0.8,0.8) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} (0,0,1) & (0,0,1) & (0,0,1) \\ (0,0,1) & (0,0,1) & (0,0,1) \\ (0,0,1) & (0,0,1) & (0,0,1) \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} (0.9,0.7,1.6) & (0.9,0.1,1.3) & (0.8,0.2,1.2) \\ (1,1,2) & (1,1,2) & (1,1,2) \\ (0.5,0.5,1.5) & (0.7,0.7,1.7) & (0.8,0.8,1.8) \end{pmatrix} \\
&= C
\end{aligned}
$$

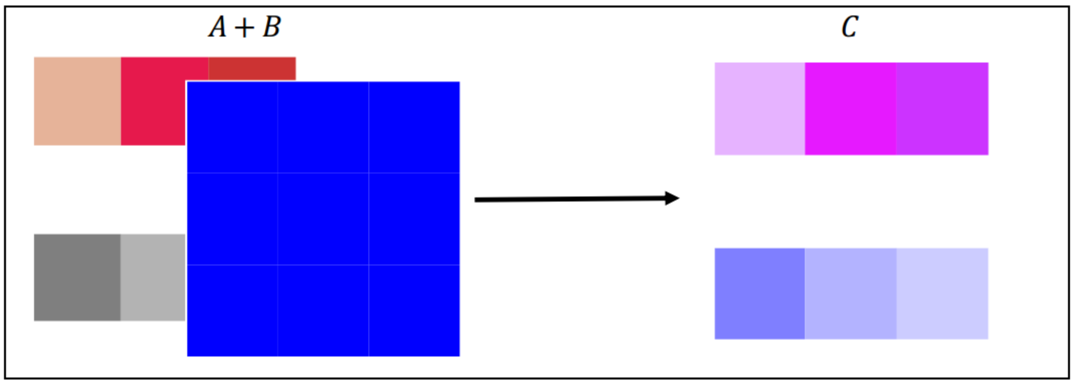


Figura 6: **Suma de los tonos de color de dos pixeles**.
*Fuente:*Elaboración propia

Para el caso de las preferencias de bienes, si se consideran dos n-uplas con los mismos n bienes pero con diferente cantidad de cada uno de ellos. Sean estas $u = (u_1, u_2, u_3, \ldots, u_n)$ y $v = (v_1, v_2, v_3, \ldots, v_n)$ con u_i y v_i el número de productos del bien i en las tuplas u y v respectivamente, la suma $u+v$ podría representar los siguientes excenarios según el contexto:
a) La cantidad total de cada bien de una persona que ha aumentado sus preferencias en estos.
b) Las cantidades totales preferidas de dichos bienes por dos personas diferentes y
c) el número total de unidades consumidas de esos bienes durante un periodo de tiempo.

$$u + v = (u_1, u_2, u_3, \ldots, u_n) + (v_1, v_2, v_3, \ldots, v_n) = (u_1 + v_1, u_2 + v_2, u_3 + v_3, \ldots, u_n + v_n)$$

Combinación de dos preferencias:
Si de otra parte se analiza el caso de los ingresos de una empresa para uno de sus productos, en los tres primeros años de venta, la suma indicaría el total de los ingresos y estaría expresado en términos de las cantidades del producto, x, y respondería a preguntas como: ¿en los primeros tres años de cuánto fueron los ingresos de un producto determinado, en términos de las cantidades vendidas? Retomando la información dada en la sección anterior esto sería:

Ingresos totales:

$$p_1(x) + p_2(x) + p_3(x) = 200 - 3x^2 + 100 - x^2 + 100 + 20x - 8x^2 = 400 + 20x - 12x^2$$

Finalmente, para el contexto de las señales si se consideran dos de ellas, sean estas $x_n = (x(t_0), x(t_1), x(t_3), \ldots, x(t_n))$ y $y_n = (y(t_0), y(t_1), y(t_3), \ldots, y(t_n))$, la suma $S_n = x_n + y_n$ será una señal cuyo valor en cualquier instante es igual a la suma de los valores de las señales correspondientes en ese instante y responderá a la pregunta: cuando se emiten dos señales al tiempo, ¿qué señal resulta?

Señal resultante: $S_n = x_n + y_n = (x(t_0) + y(t_0), x(t_1) + y(t_1), x(t_3) + y(t_3), \ldots, x(t_n) + y(t_n))$

Suma de n-uplas: sea $u = (u_1, u_2, u_3, \ldots, u_n)$ y $v = (v_1, v_2, v_3, \ldots, v_n)$, con $n \in \mathbb{N}$, se define la suma $u \oplus v$ como $u \oplus v = (u_1 + v_1, u_2 + v_2, u_3 + v_3, \ldots, u_n + v_n)$.
Observaciones:

- Si los elementos de una n-upla son números reales, el conjunto de todas estas n-uplas se denotan como $\mathbb{R}^n$; es decir, $\mathbb{R}^n = (a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n) : a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n \in \mathbb{R}$.
- Las n-uplas se suelen notar con letras minúsculas.
- Dos n-uplas son iguales si los elementos de la misma posición son iguales; esto es,

$$(a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n) = (b_1, b_2, b_3, \ldots, b_n) \Leftrightarrow \begin{cases} a_1 = b_1 \\ a_2 = b_2 \\ \quad\vdots \\ a_n = b_n \end{cases}$$

Nótese que en la definición se menciona que los elementos de una n-upla son **objetos**, por lo que pueden ser cualquier objeto matemático dependiendo del contexto de la situación al cual esté asociado.

¿Sabías qué. . . ?

La operación de adición definida sobre el conjunto de n-uplas cumple las mismas propiedades definidas para las matrices. Sea S el conjunto de las n-uplas y $u, v, w \in S$, se cumple que:

- Para todo $u, v \in S$, $u \oplus v = w \in S$.
- $u \oplus v = v \oplus u$.
- $(u \oplus v) \oplus w = u \oplus (v \oplus w)$.
- Para todo $v \in S$, existe una n-upla p, tal que $u \oplus p = p \oplus u = u$.
- Para todo $v \in S$, existe una n-upla $-u$, tal que $u \oplus (-u) = (-u) \oplus u = p$.

Se usa el símbolo $\oplus$ para indicar la adición de objetos pues no siempre la adición es la usual, esto depende de las necesidades del contexto.

3.2. La multiplicación por escalar en objetos del álgebra lineal

En el procesamiento de imágenes, la multiplicación por escalar también sirve para ajustar imágenes y responde al interrogante ¿cómo se pueden acentuar o atenuar los colores? Teniendo en cuenta la representación matricial de imagen y pixeles de la sección anterior, si se desean atenuar todos los colores que la componen en la misma cantidad, se debe hacer una multiplicación por escalar. En la Figura 7 se expone un ejemplo cuando la atenuación es de 1.5.

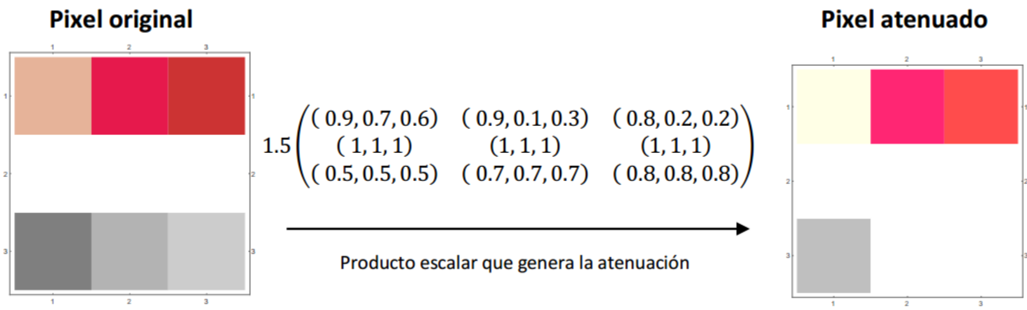


Figura 7: **Acentuación de los tonos de color de un pixel**.
*Fuente:*Elaboración propia

El producto por un escalar cambia la tonalidad de la imagen y se da una acentuación cuando el escalar es un número inferior a 0, mientras que si es superior a 1 se presentará una atenuación.

Para los otros tres casos de aplicación mencionados en la sección anterior, la multiplicación escalar responde a preguntas como ¿es posible escalar: un bien, los ingresos de una empresa o una señal?. Un ejemplo concreto de esta idea se presentaría si se desean triplicar las preferencias, lo cual correspondería a multiplicar todas las cantidades de bienes por 3; si por el contrario se usa un negativo, el producto podría indicar un desabastecimiento de dichos bienes. Algo similar ocurre para los ingresos y las señales que significarían, respectivamente, una amplificación o reducción de ellos, pero debe aclararse que estas interpretaciones son muy generales y necesitan ser bien analizadas según el contexto en el que se encuentren.

Contexto	**Multiplicación por escalar**
Análisis de las preferencias de un bien	$3u = (3u_1, 3u_2, 3u_3, \dots, 3u_n)$
Ingresos en términos de las cantidades vendidas	$3P_3(x) = 300 + 60x - 24x^2$
Señales continuas y discretas	$3x_n = (3x(t_0), 3x(t_1), 3x(t_3), \dots, 3x(t_n))$

Multiplicación por escalar: sea $u = (a_1, a_2, a_3, \dots, a_n)$ con $n \in \mathbb{N}$ y $k \in \mathbb{R}$, se define ku como

$$ku = (ka_1, ka_2, ka_3, \dots, ka_n)$$

¿Sabías qué. . . ?

La operación producto escalar definida sobre el conjunto de n-uplas cumple las mismas propiedades definidas para esta operación sobre las matrices.
Sea S el conjunto de las n-uplas y $u, v, w \in S$ y $c, k \in \mathbb{R}$, se cumple que:

- Para todo $u \in S$, $1u = u$ y $0u = 0$.
- $(ck)u = c(ku)$.
- $(c + k)u = cu \oplus ku$
- $k(u \oplus v) = ku \oplus kv$

3.3. El producto punto de objetos del álgebra lineal

Producto punto: sea $u = (u_1, u_2, u_3, \ldots, u_n)$ y $v = (v_1, v_2, v_3, \ldots, v_n)$ con $n \in \mathbb{N}$, se define el producto punto como

$$u \cdot v = (u_1, u_2, u_3, \ldots, u_n) \cdot (v_1, v_2, v_3, \ldots, v_n) = u_1v_1 + u_2v_2 + u_3v_3 + \ldots + u_nv_n$$

En el caso del procesamiento de imágenes el producto punto no tiene sentido, ya que sería multiplicar un pixel por otro pixel y eso en la realidad no ocurre. Es por esto que aunque las operaciones definidas en el álgebra lineal existen no puede aplicarse a todo contexto y es necesario que como lector identifique esto para que aplique el conocimiento adecuadamente.

En oposición a esto, en el caso de las preferencias de bienes y las señales el producto punto si tiene sentido. Observe:

- Sean $u = (u_1, u_2, u_3, \ldots, u_n)$ la n-upla que representa la cantidad consumida de cada bien u_i, con $i \in \mathbb{N}$ y $p = (p_1, p_2, p_3, \ldots, p_n)$ los precios correspondientes, se podría determinar el costo total de los bienes consumidos así:

1) Multiplicando cada cantidad consumida de un bien por su correspondiente precio	$\longrightarrow$	$u_1p_1, u_2p_2, u_3p_3, \ldots, u_np_n$
2) Adicionando los productos obtenidos en el numeral 1.	$\longrightarrow$	$u_1p_1 + u_2p_2 + u_3p_3 + \ldots + u_np_n$

- Sean $x_n = (x(t_0), x(t_1), x(t_3), \ldots, x(t_n))$ y $y_n = (y(t_0), y(t_1), y(t_3), \ldots, y(t_n))$ dos señales, el producto punto dará una señal que consiste en la suma de los productos de las señales en cada tiempo t_i, con lo cual se genera la señal completa de inicio a fin.

1) Multiplicando las señales en sus tiempos correspondientes.	$\longrightarrow$	$x(t_0)y(t_0), x(t_1)y(t_1), x(t_3)y(t_3), \ldots, x(t_n)y(t_n)$
2) Adicionando los productos obtenidos en el numeral 1.	$\longrightarrow$	$x(t_0)y(t_0) + x(t_1)y(t_1) + x(t_3)y(t_3) + \ldots + x(t_n)y(t_n)$

Nótese que el resultado del producto punto de n-uplas es un valor escalar y no una n-upla.

¿Sabías qué. . . ?

Esta operación tiene otra interpretación si se estudia el contexto geométrico de las n-uplas. En el recurso "n-uplas en un contexto geométrico" encontrará dicha interpretación, sus características y operaciones. ¡Revíselo! ya que ese contexto es muy familiar para los lectores.

4. Combinación de relaciones

En la sección anterior se definieron las relaciones de adición, multiplicación por un escalar y en algunos casos el producto punto. Para el caso de las dos primeras relaciones, en ocasiones resulta de gran utilidad combinarlas para ampliar las posibilidades y obtener diferentes resultados. Observe.
En el caso del procesamiento de imágenes, la intensidad del color de un pixel se puede definir como una combinación de las relaciones de adición y multiplicación escalar de los colores rojo (1,0,0), verde (0,1,0)y azul (0,0,1); por ejemplo, el color ■ es la siguiente combinación lineal:

$$(0.8, 0.1, 0.3) = 0.8(1, 0, 0) + 0.1(0, 1, 0) + 0.3(0, 0, 1)$$

En el caso de las señales, una señal se compone a partir de la adición de la amplificación o reducción de señales básicas; por ejemplo $S = 3s_1 + 4.5s_2 - 2s_3$, donde s_1, s_2 y s_3 son señales particulares. Esta posibilidad de combinar las operaciones de adición y multiplicación por escalar es una herramienta esencial del Álgebra Lineal, y se establece formalmente bajo el concepto de combinación lineal, que consiste en que un elemento de un conjunto S que contenga una categoría de objetos, pueda expresarse en términos de una combinación de los demás. En lenguaje matemático, esto se define como:

Combinación lineal. Sea S un conjunto de objetos y $u_1, u_2, u_3, \ldots, u_n \in S$. A todo elemento de la forma

$$v = a_1u_1 + a_2u_2 + a_3u_3 + \ldots + a_nu_n$$

donde $a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n \in \mathbb{R}$ se denomina combinación lineal de $u_1, u_2, u_3, \ldots, u_n$.

Nótese que los objetos pueden ser matrices, n-uplas y polinomios, entre otros. A continuación se presentan ejemplos de combinaciones lineales con diferentes objetos del álgebra lineal.

- En $\mathbb{R}^n$, todo elemento es una combinación de las n-uplas canónicas

$$\underbrace{(1, 0, 0, \ldots, 0)}_{n-elementos}, \underbrace{(0, 1, 0, \ldots, 0)}_{n-elementos}, \underbrace{(0, 0, 1, \ldots, 0)}_{n-elementos}, \ldots, \underbrace{(0, 0, 0, ?, 1)}_{n-elementos}$$

.

En el caso específico de $\mathbb{R}^4$, todo elemento (a, b, c, d) es una combinación lineal de

$$(1, 0, 0, 0), (0, 1, 0, 0), (0, 0, 1, 0), (0, 0, 0, 1),$$

puesto que

$$(a, b, c, d) = a(1, 0, 0, 0), +b(0, 1, 0, 0) + c(0, 0, 1, 0) + d(0, 0, 0, 1)$$

.

- Determinar si $\begin{pmatrix} a & d \\ c & a \end{pmatrix}$, es una combinación lineal de las matrices

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Para determinar si la matriz dada es una combinación lineal del conjunto de las tres matrices, deben existir los valores escalares a_1, a_2, a_3 de manera que

$$\begin{pmatrix} a & d \\ c & a \end{pmatrix} = a_1 \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + a_2 \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + a_3 \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Para hallar dichos valores, es necesario resolver las operaciones y establecer la igualdad entre las matrices resultantes. Observe:

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} a & d \\ c & a \end{pmatrix} &= a_1 \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + a_2 \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + a_3 \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} a_1 & 0 \\ 0 & a_1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & a_2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & a_3 \\ a_3 & 0 \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} a & d \\ c & a \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} a_1 & a_2 + a_3 \\ a_3 & a_1 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Retomando la definición de igualdad entre matrices, se tiene que:

$$\begin{aligned} a &= a_1 \\ d &= a_2 + a_3 \\ c &= a_3 \\ a &= a_1 \end{aligned}$$

donde, a, c, d son valores constantes y a_1, a_2, a_3 son las incógnitas. Por tanto, es necesario determinar si el sistema de ecuaciones tiene solución cuya matriz aumentada asociada es

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & a \\ 0 & 1 & 1 & d \\ 0 & 0 & 1 & c \end{array}\right)$$

Si se observa esta matriz se puede notar que ya está en su forma escalonada y a partir de ella se puede concluir que el sistema tiene solución, por lo que se puede afirmar que la matriz $\begin{pmatrix} a & d \\ c & a \end{pmatrix}$ es una combinación lineal de $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$.

5. Características de las relaciones entre objetos del álgebra lineal

A partir de lo abordado en las secciones anteriores se establece que solo la adición y la multiplicación por escalar junto con sus combinaciones se pueden definir y aplicar en cualquier contexto. Estas operaciones deben ser establecidas por el lector de manera que se garantice que el resultado siga siendo un objeto matemático con las mismas características de los objetos operados, además de cumplir las propiedades expuestas en cada aparte de la lectura. Para finalizar, tenga en cuenta que el propósito principal del álgebra lineal es generalizar dichas operaciones y propiedades para configurar una estructura fundamental, independientemente del tipo de objeto con el que se esté trabajando (matrices, n-uplas, polinomio, funciones, entre otros). Cuando se logra establecer que un conjunto posee las dos operaciones indicadas (adición y multiplicación por escalar) y cumple las propiedades descritas para cada uno, recibe el nombre de **espacio vectorial**, y este será el centro de estudio de los dos siguientes escenarios.

6. Practico lo aprendido.

A continuación se presentan unos ejercicios que le permitirán ejercitar los conceptos y procesos abordados en la lectura. Antes de solucionarlos revise todos los materiales que se sugieren en las secciones: Sabías que... y ¿cómo mejorar?.

Ejercicio de comprensión:

Las siguientes n-uplas representan las unidades de consumo de una familia según el tipo de productos que adquieren en el supermercado mensualmente.

Producto	**Enero**	**Febrero**	**Marzo**	**Precio promedio**
Proteínas (carne, pollo, pescado, cerdo)	(5,6,4,3)	(4,5.5,3,5)	(3.5,4,6,2)	(9000,6000,4500,7000)
Lácteos (leche, queso, yogurt, avena)	(10,5,5,3)	(8,4,7,4)	(12,7,4,3)	(2500,3500,8000,2500)
Granos (frijol, lenteja, garbanzo, arveja)	(2.5,3,1,0)	(3,2.5,6,1)	(2,2,0,3)	(3500,2500,3000,2500)

Realice lo que se indica a continuación haciendo uso de los conocimientos expuestos en la lectura, esto es, haga evidente donde se pueden usar los conceptos y procesos presentados en las secciones 2, 3 y 4, si corresponde.

a) Determine la cantidad total de unidades consumidas por cada producto durante los tres primeros meses del año.

b) Determine el valor a pagar en cada mes por cada tipo de producto.

c) Suponga que para el mes de febrero un supermercado va a realizar los siguientes descuentos por tipo de producto: 20 % en carnes, 15 % en lácteos y 7 % en granos. ¿Cuál es el costo por cada tipo de producto consumido durante el mes de febrero?, ¿cuál es el costo total por los productos consumidos en este mes?

Ejercicios procedimentales. Tomados de Grossman, S. (2012) [2]. Para cada uno de los casos siguientes, determinar si u es una combinación lineal de conjunto $v_1, v_2, v_3, \ldots, v_n$.

1. $u = (3, -3, 25)$, $\{(4, 2, 9), (7, 1, -8), (3, -2, 4)\}$.
2. $u = (-19, -9, -46, 74)$, $\{(4, 5, 3, -9), (3, 8, -5, -1), (5, 2, 11, -17), (-3, -7, 0, 8)\}$
3. $u = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 29 & -17 \end{pmatrix}, \left\{ \begin{pmatrix} -2 & -7 \\ 8 & -8 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 7 & 9 \\ 3 & 5 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -7 & 6 \\ -1 & -3 \end{pmatrix} \right\}$

Sugerencia: los sistemas de ecuaciones que resulten los puede resolver empleando cualquier software matemático.

Referencias

[1] Kamen, E. y Heck, B. (2008). *Fundamentos de señales y sistemas usando Matlab*. Pearson.

[2] Grossman,S. (2012). *Álgebra lineal*. (7a. ed.) McGraw-Hill Interamericana. Tomado de http://www.ebooks7-24.com

INFORMACIÓN TÉCNICA

Módulo: Álgebra Lineal
Unidad 2: Objetos del álgebra lineal y sus relaciones
Escenario 3: Reconociendo objetos del álgebra lineal y sus relaciones

Autor: Sandra Milena Rojas Tolosa

Asesor Pedagógico: Diana Marcela Diaz Salcedo
Diseñador Gráfico: Kevin Mauricio Ramírez Corredor
Corrector de estilo: Angélica del Pilar Parra
Asistente: Leidy Alejandra Morales