Institución Universitaria Politécnico Grancolombiano

Facultad de Ingeniería y Ciencias Básicas

Unidad 1 / Escenario 2

Lectura Fundamental

# Cálculo 1

## Contenido

*Palabras y frases claves:* funciones, dominio, rango, propiedades, elementos.

# 1. Introducción

En la presente lectura se abordarán los elementos y las propiedades de las funciones; puesto que a pesar que hay varios tipos de funciones, existen elementos comunes entre ellas como son: la imagen, la pre-imagen, los puntos de corte con los ejes, el dominio y el rango; además algunas funciones cumplen propiedades que las diferencian de las demás como ser o no inyectiva, sobreyectiva, par e impar. En esta lectura nos acercaremos a procesos matemáticos más formales que son necesarios para el estudio del cálculo.

# 2. Gráfica de una función

La gráfica de una función es la representación y/o dibujo de una expresión algebraica sobre los ejes coordenados $x$ e $y$

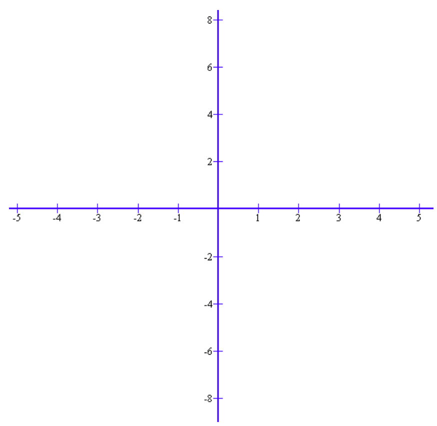


Figura 1: Plano cartesiano

**Sabías que:** la gráfica de una función $f(x)$ permite ver el comportamiento global de la función.

Es decir que la gráfica de una función $f$ es el conjunto de todos los puntos $(x, f(x))$. La técnica para realizar la gráfica de una función consiste en darle valores a la variable independiente $x$ y calcular el valor $y = f(x)$, por comodidad estos valores se consignan en una tabla de valores, luego estos puntos se ubican en el plano cartersiano y finalmentente se hace un trazo suave sobre estos puntos cuando sea posible. Observe el siguiente ejemplo:

$$f(x) = x^2 - 2x - 3$$

Siguiendo la técnica descrita, se hará una tabla de valores, donde escogemos valores positivos y negativos para la variable independiente $x$.

**Ten en cuenta que:** la fórmula o expresión algebraica nos indica cuáles operaciones debemos hacer con cada valor de x para obtener su correspondiente valor $f(x)$.

| x | $-3$ | $-2$ | $-1$ | $0$ | $1$ | $2$ | $3$ | $4$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $y = f(x)$ | $12$ | $5$ | $0$ | $-3$ | $-4$ | $-3$ | $0$ | $5$ |

Tabla 1: Tabla de valores de la función

Ahora, se ubican estos puntos sobre un plano cartesiano y luego se hace un trazado suave sobre estos puntos; para así obtener la representación gráfica de la función.

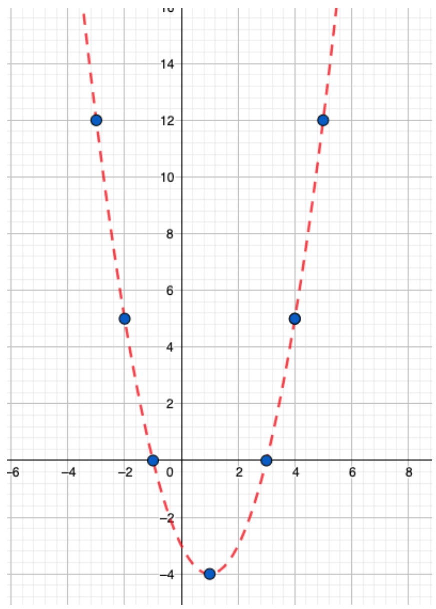


Figura 2: Gráfica de la función $f(x) = x^2 - 2x - 3$

**Para mejorar:** más adelante se estudiarán otras técnicas para graficar funciones y una característica importante como la continuidad de una función, porque cuando la función no es continua, no es posible unir todos los puntos.

En las gráficas de las funciones hay algunos puntos (elementos) que tienen un especial interés; estos los estudiaremos en la siguiente sección.

**Para mejorar:**en internet existen gran cantidad de software libre para graficar funciones a partir de su fórmula; por ejemplo: winplot, GeoGebra y Graph. Los gráficos de la presente lectura han sido realizados con Graph. Links descarga: https://www.padowan.dk/

# 3. Elementos de una función

## 3.1. Dominio de una función

Dada una función $f(x)$, el dominio es el conjunto de valores que puede tomar la variable independiente $x$; es decir, los valores de $x$ donde la función existe; y se representan como $Dom f$.

**Ejemplo 1.**

Calcular el dominio de las siguientes funciones

a) $f(x) = \dfrac{x^4}{x^2 + x - 6}$ b) $g(x) = \sqrt{x^2 - 6x}$ c) $h(x) = \dfrac{1}{\sqrt{2x - 1}}$

**Solución**

a) La función racional no está definida cuando el denominador es 0. Puesto que:

$$f(x) = \frac{x^4}{x^2 + x - 6} = \frac{x^4}{(x+3)(x-2)}$$

Por lo tanto, la función no está definida cuando $x = -3$ y $x = 2$, por lo anterior el dominio de $f(x)$ es

$$Dom\ f(x) = \mathbb{R} - \{-3, 2\}$$

También, se puede escribir en forma de intervalo como:

$$Dom f = (-\infty, -3) \cup (-3, 2) \cup (2, \infty)$$

b) La función $g(x)$ no está definida para números negativos, por lo tanto, se tiene la siguiente desigualdad:

$$x^2 - 6x \geq 0$$

$$x(x-6) \geq 0$$

Así, se tiene que los valores de $x = 0$ y $x = 6$, dividen la recta real en los siguientes intervalos

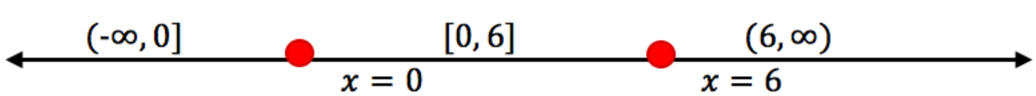


Figura 3: Intervalos en la recta real

Ahora se debe probar, cuáles de estos tres intervalos hacen parte del dominio; para esto, se toma un punto de prueba en cada uno de los intervalos.

| Punto de prueba | Valor | Verdadero/falso | Interalo |
|---|---|---|---|
| -2 | $16 \geq 0$ | Verdadero | $(-\infty, 0]$ |
| 3 | $-9 \geq 0$ | Falso | $[0, 6]$ |
| 8 | $16 \geq 0$ | Verdadero | $[6, \infty)$ |

Tabla 2: Valores de prueba

Por lo tanto, el dominio de la función $g(x)$ es

$$Dom\ g(x) = (-\infty, 0] \cup [6, \infty)$$

c) En esta función $h(x)$ se debe tener en cuenta que no existe la raíz cuadrada de un número negativo y además no se puede dividir por 0; por lo tanto se tiene la siguiente desigualdad:

$$2x - 1 > 0$$

$$x > \frac{1}{2}$$

Por lo anterior, el dominio $Dom\ h(x) = \left(\frac{1}{2}, \infty\right)$

**Nota:** si la función $f(x)$ está dada por una gráfica, el dominio se puede determinar observando los intervalos donde existe $f(x)$.

## 3.2. Rango

Ahora, el rango de una función $f(x)$ es el conjunto de valores que puede tomar $y$, es decir, es el conjunto de las imágenes de la función y se representa como $Ranf(x)$.

**Tenga en cuenta que:** en algunos textos llaman al rango, recorrido.

**Ejemplo 2.**

Para calcular el rango de la función de la figura 4, se debe mirar el eje $y$, donde la función esté definida, en este caso el rango es $[-1, 8]$

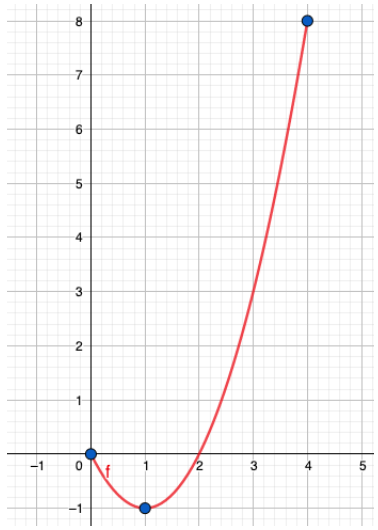


Figura 4: Gráfica de la función $f(x) = x^2 - 2x$

## 3.3. Imagen o evaluación de una función

Para calcular la imagen de la variable independiente $x$, se sustituye este valor en la función $f(x)$

**Ejemplo 3.**

Si le dan la función $f(x) = \frac{2x^2-x-2}{x-2}$ y le piden calcular la imagen de $x = 5$, se debe sustituir este valor en la definición de $f(x)$

$$f(5) = \frac{2(5)^2 - (5) - 2}{5 - 2} = \frac{50 - 5 - 2}{3} = \frac{43}{3}$$

Ahora, si le piden calcular la imagen en una función a trozos, debe tener especial cuidado de evaluar la imagen en la parte del dominio correspondiente.

**Ejemplo 4.**

Se tiene la función

$$f(x) = \begin{cases} x^2, & \text{si } x < 0 \\ x + 1, & \text{si } x \geq 0 \end{cases}$$

Calcular, $f(-3)$ y $f(3)$. Para hallar $f(-3)$, se debe considerar el trozo donde está $x = -3$, en este caso el primer trozo de la función, por lo tanto, $f(-3) = 3^2 = 9$; ahora para calcular $f(3)$, se debe considerar el segundo trozo, por lo tanto, $f(3) = 3 + 1 = 4$.

## 3.4. Preimagen

Cuando se habla de la preimagen de una función, se hace referencia a las $x$, es decir a las variables independientes. Para calcular la preimagen de un elemento se debe igualar la función a la imagen y se debe resolver esa ecuación;

por ejemplo, se tiene la función $f(x) = \frac{x-3}{2}$ y se pide que calcule la preimagen de 10, entonces

$$\frac{x-3}{2} = 10$$

$$x - 3 = 20$$

$$x = 20 + 3 = 23$$

por lo tanto, la preimagen de 10 es 17.

## 3.5. Ceros o raíces

Los ceros o las raíces de una función son los puntos en los que la gráfica corta al eje $x$, es decir, cuando la imagen es cero, $f(x) = 0$

Observando la gráfica (Figura 5) se aprecia que la función $f(x) = x^3 - x^2 - x + 1$ tiene dos ceros, en $-1$ y 1.

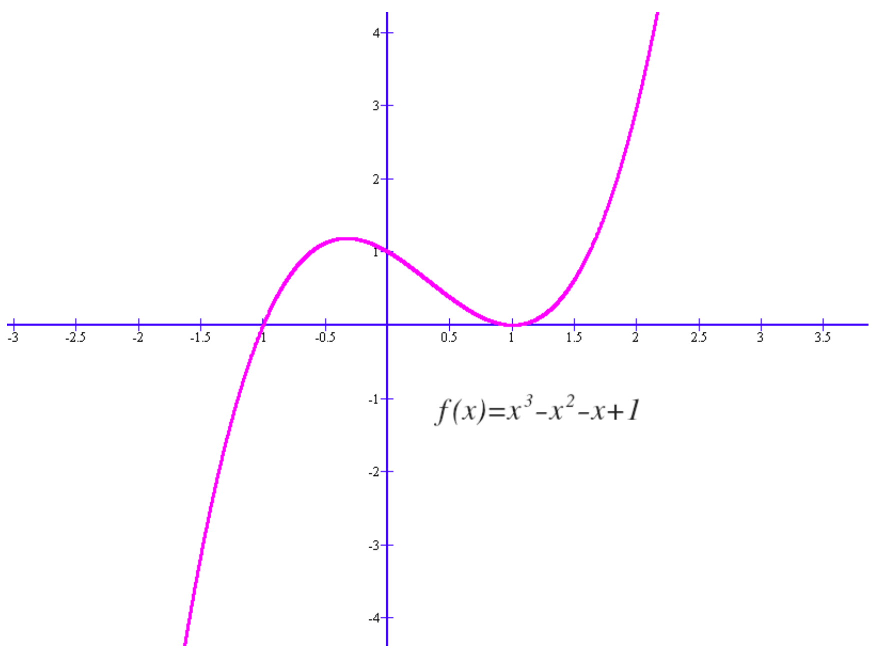


Figura 5: Ceros o raíces de una función
Fuente: elaboración propia

Ahora, para encontrar los ceros en forma analítica, se debe igualar la función a cero ($f(x) = 0$) y resolver la ecuación resultante. Por lo tanto una función puede tener o no tener ceros.

**Ejemplo 5.**

Encontrar los ceros de la función $f(x) = x^2 - 2x - 3$; vamos a resolver entonces la ecuación

$$x^2 - 2x - 3 = 0$$

Factorizando se tiene

$$(x + 1)(x - 3) = 0$$

Igualando cada parentesis a 0 y despejando $x$ se tiene que $x = -1$ y $x = 3$ son los ceros de esta función.

## 3.6. Intercepto en $y$

El intercepto en $y$ de una función, es el valor donde la función corta al eje $y$; este se puede encontrar evaluando la función para $x = 0$. Por ejemplo, hallar el intercepto en la función

$$f(x) = \frac{x^2 - 4}{x^2 - 9}$$

Se hace $x = 0$ y se tiene

$$y = \frac{0 - 4}{0 - 9} = \frac{4}{9}$$

Por tanto, $y = \frac{4}{9}$ es el intercepto con el eje $y$.

## 3.7. Ejercicios

A continuación se plantean los siguientes ejercicios para afianzar lo estudiado.

1. Para las siguientes funciones determine el dominio, rango, ceros e intercepto con el eje $y$:

   *a*) $f(x) = 3x - 10$
   *b*) $g(x) = x^2 - 5x + 1$
   *c*) $h(x) = \frac{1}{x-2}$
   *d*) $f(x) = \sqrt{x^2 - 1}$

2. Para cada una de las funciones definidas a trozos que se dan a continuación, encuentre: dominio y los ceros; halle $f(-1)$, $f(1)$ y los valores de $x$ que hacen que $f(x) = 1$. (Trace la gráfica aproximada).

   *a*) $f(x) = \begin{cases} x, & \text{si } x < -1 \\ x^2, & \text{si } -1 \leq x < 2 \\ 5, & \text{si } x \geq 2 \end{cases}$

   *b*) $f(x) = \begin{cases} 3, & \text{si } x < -1 \\ x^2 - 2, & \text{si } -2 \leq x < 0 \\ 4, & \text{si } x = 3 \\ 2 & \text{si } x > 4 \end{cases}$

   *c*) $f(x) = \begin{cases} x + 3, & \text{si } x < -5 \\ \sqrt{25 - x^2}, & \text{si } -5 \leq x \leq 5 \\ 3 - x, & \text{si } 5 < x \end{cases}$

3. Halle el dominio de cada una de las siguientes funciones:

   *a*) $f(x) = \sqrt{-x}$
   *b*) $h(x) = \sqrt{5 - \sqrt{x}}$
   *c*) $k(x) = \sqrt{\frac{x+1}{x-1}}$
   *d*) $l(x) = \sqrt{\frac{1-2x}{3}}$
   *e*) $j(x) = \frac{1}{(2x+3)^2}$

# 4. Propiedades de las funciones

Ahora se va a estudiar una propiedad de las funciones que es importante: la simetría, pues facilita el estudio de las funciones así como su representación gráfica; por lo tanto, en esta sección se va a estudiar esta propiedad y más adelante se estudiarán las demás propiedades como lo son: la continuidad, la monotonía y la periodicidad.

## 4.1. Par e impar

Sea $f(x)$ una función

1. $f(x)$ es par si $f(-x) = f(x)$ para toda $x$ en el dominio de $f$.
2. $f(x)$ es impar si $f(-x) = -f(x)$ para toda $x$ en el dominio de $f$.

**Ejemplo 6.**

Determine si las siguientes funciones son par, impar o ninguna:

a) $f(x) = 5x^2 + 2$ b) $g(x) = x^3 - 5x$ c) $h(x) = 2x - x^2$

**Solución**

a) $f(-x) = 5(-x)^2 + 2 = 5x^2 + 2 = f(x)$ por tanto la función es par.

b) $g(-x) = (-x)^3 - 5(-x) = -x^3 + 5x = -(x^3 - 5x) = -f(x)$ por tanto es una función impar.

c) $h(-x) = 2(-x) - (-x)^2 = -2x - x^2$ por lo tanto no es una función par ni impar.

Ahora, realizando las gráficas de estas funciones se tiene:

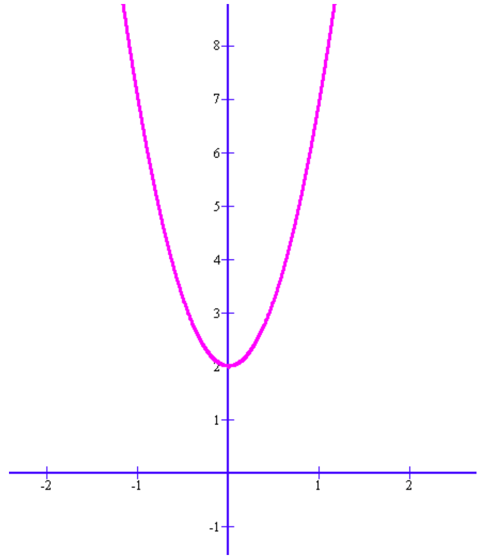


Figura 6: Función par

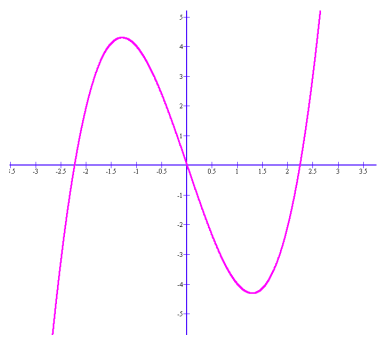

Figura 7: Función impar

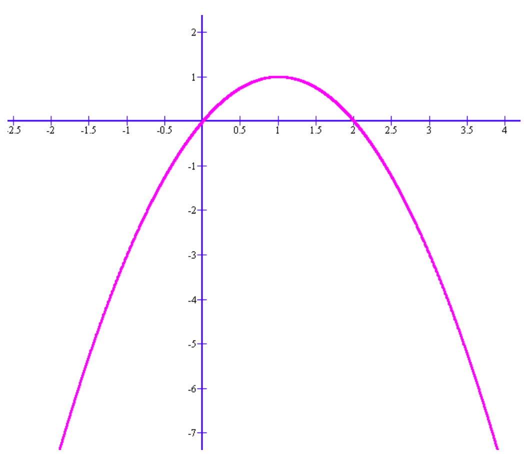

Figura 8: Función no par y no impar

Por lo tanto, una función $f$ es **simétrica** si al doblar su gráfica por un eje de **simetría** está se superpone. Existen dos tipos de simetría: funciones **simétricas respecto al eje** $y$ (también se llama funciones pares), las **funciones simétricas respecto al origen** (también se llaman funciones impares).

# 5. Otros tipos de funciones

Las funciones se pueden clasificar también dependiendo del modo en que estén relacionados los elementos del dominio con los elementos del conjunto de llegada o rango en funciones inyectivas, sobreyectivas y biyectivas.

## 5.1. Inyectiva o uno a uno

Una función con dominio $A$ se llama función uno a uno (inyectiva) si no hay dos elementos de $A$ que tengan la misma imagen (James, I, & S, 2001), es decir:

$$f(x_1) \neq f(x_2) \quad \textit{siempre que} \quad x_1 \neq x_2$$

Para mirar esta propiedad en forma gráfica, se puede hacer la prueba de la recta horizontal que afirma que:

Una función es uno a uno si y solo si ninguna recta horizontal cruza su gráfica más de una vez.

**Ejemplo 7.**

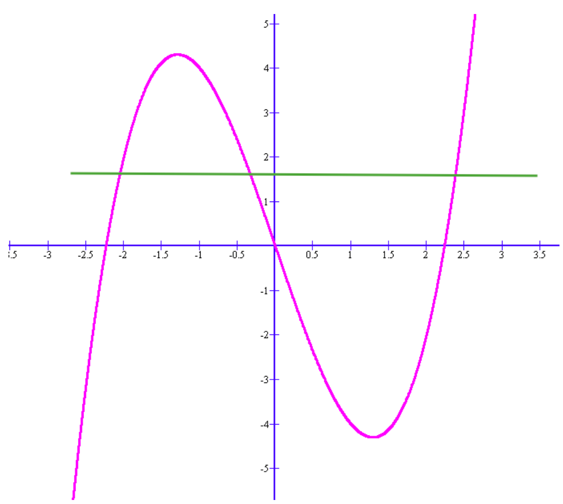

Figura 9: Función no inyectiva

## 5.2. Sobreyectiva

Una función es sobreyectiva cuando el rango de la función es igual al conjunto de llegada, es decir, cuando todos los elementos del rango son la imagen de algún elemento del dominio.

**Ejemplo 8.**

La función $f(x) = x^3 - 5x$ es sobreyectiva, observe las siguientes figuras:

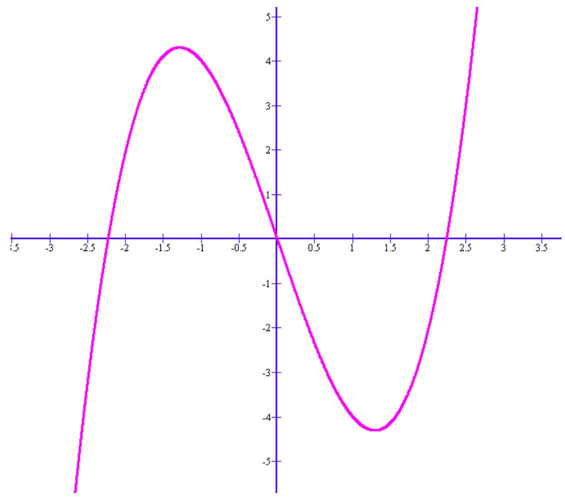

Figura 10: Función sobreyectiva

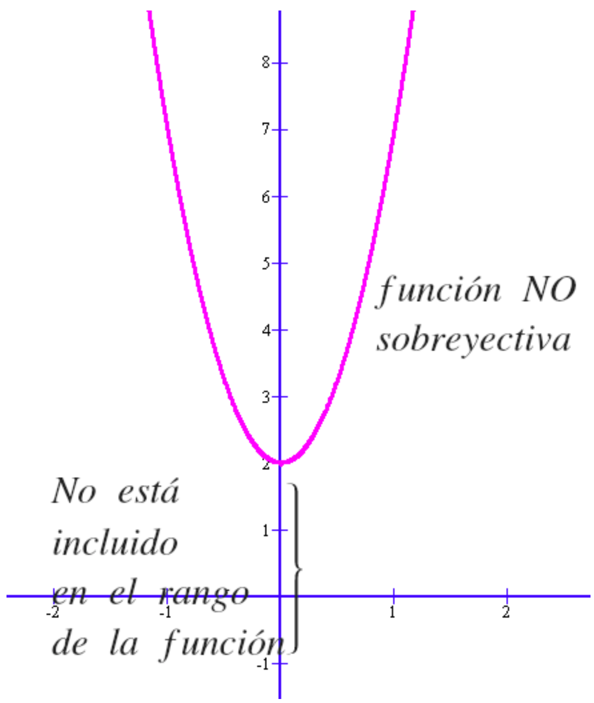


Figura 11: Función no sobreyectiva

## 5.3. Biyectiva

Una función es biyectiva cuando es inyectiva y sobreyectiva; es decir que debe cumplir las dos propiedades, un ejemplo de función biyectiva son las funciones lineales, entre otras.

**Ejemplo 9.**

La función $f(x) = x^3 - 2$ es una función inyectiva (Verificarlo con la prueba de la linea horizontal) y además es sobreyectiva, por tanto, es biyectiva.

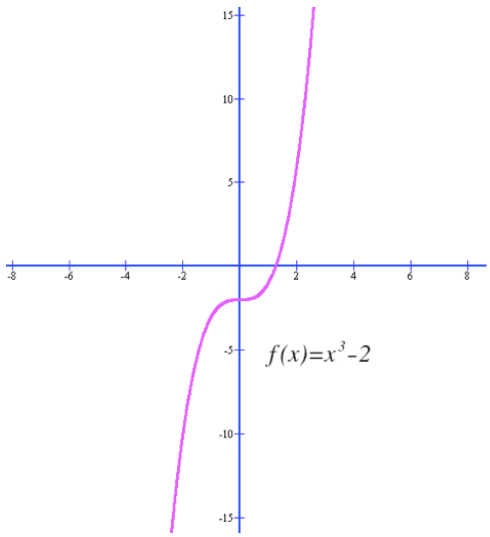


Figura 12: Función biyectiva

## 5.4. Función inversa

Sea $f$ una función uno a uno con dominio $A$ y rango $B$, entonces su función inversa $f^{-1}$ tiene dominio $B$ y rango $A$ y está definida por

$$f^{-1}(y) = x \iff f(x) = y$$

para cualquier $y$ en $B$ (James, I, & S, 2001).

De esta definición, debe tener en cuenta que solo las funciones inyectivas tienen función inversa.

**¿Cómo se halla la función inversa?**

1. Escriba $y = f(x)$
2. Despeje $x$ si le es posible
3. Intercambie $x$ y $y$

**Ejemplo 10.**

Halle la función inversa de $f(x) = 2x^3 - 5$, para esto vamos a seguir los pasos propuestos:

1. **Escriba** $y = f(x)$

$$y = 2x^3 - 5$$

2. **Despeje $x$ si le es posible**

$$\frac{y+5}{2} = x^3$$
$$\sqrt[3]{\frac{y+5}{2}} = x$$

3. **Intercambie $x$ y $y$**

$$f^{-1}(x) = \sqrt[3]{\frac{x+5}{2}}$$

## 5.5. Composición de funciones

Dadas dos funciones $f(x)$ y $g(x)$, la función compuesta $f \circ g$ (también llamada la composición de $f$ y $g$) está definida por:

$$(f \circ g)(x) = f(g(x))$$

**Ejemplo 11.**

Se tienen las funciones $f(x) = \sqrt{x+1}$ y $g(x) = x^2$ y se calculará la función compuesta $(f \circ g)(x)$; por lo tanto, primero se calcularán los dominios de la funciones que son $Dom\ f(x) = [-1, \infty)$ y $Dom\ g(x) = \mathbb{R}$; ahora si se hallará la función compuesta

$$(f \circ g)(x) = f(g(x)) = f(x^2) = \sqrt{x^2+1}$$

Ahora, calculando el dominio de la función compuesta se tiene:

$$Dom(f \circ g)(x) = \{x\ tal\ que,\ \ x \in Dom\ g(x)\ \ y\ \ g(x) \in Dom\ (f(x))\}$$

Es decir que

$$Dom(f \circ g)(x) = \{x\ tal\ que,\ \ x \in\ \mathbb{R}\ y\ \ x^2 \in [-1, \infty)\}$$

por lo tanto,

$$Dom(f \circ g)(x) = \{x\ tal\ que,\ \ x^2 \geq -1\} = \mathbb{R}.$$

Se pide al lector que encuentre $(g \circ f)(x)$ para que verifique que la composición de funciones no es conmutativa.

**Sabías que:** $(f \circ g)(x) \neq (g \circ f)(x)$

## 5.6. Ejercicios

A continuación se plantean los siguientes ejercicios para afianzar lo estudiado

1. Para las siguientes funciones determine si son o no inyectivas, en caso de serlo, halle su función inversa.

   a. $f(x) = 3x - 10$
   b. $g(x) = x^2 - 5x + 1$
   c. $h(x) = \frac{1}{x-2}$
   d. $f(x) = \sqrt{x^2 - 1}$

2. ¿Es $g(x) = 4 - \sqrt{9 - x^2}$ una función impar? Justifique su respuesta.

3. Dada $f(x) = \sqrt{x + 9}$, encuentre

   a) $F(x + 9)$
   b) $F(x^2 - 9)$
   c) $F(x^4 - 9)$
   d) $F(x^2 + 6x)$
   e) $\frac{F(x+h)-F(x)}{h}$

# Referencias


[1] Zamora, H. (2010). *Tipos de funciones-Cartilla*. Bogotá, Colombia: Institución universitaria politécnico grancolombiano- Educación Virtual.

[2] Stewart, J; Redlin, L & Watson, S. (2001).*Precalculo*. México. Thomson Learning.

[3] Grupo de Modelamiento Matemático. (2017).Facultad de Ingeniería y Ciencias básicas Institución Universitaria Politécnico Grancolombiano.

## INFORMACIÓN TÉCNICA

**Módulo:** Cálculo I
**Unidad 1:** Elementos y propiedades de las funciones
**Escenario 2:** Elementos y propiedades de las funciones

**Autor:** Luisa Fernanda Martínez Rojas

**Asesor Pedagógico:** Diana Marcela Díaz Salcedo
**Diseñador Gráfico:** Kevin Mauricio Ramírez Correa
**Corrector de estilo:**
**Asistente:** Leidy Alejandra Morales