Unidad 1 / Escenario 2

Lectura fundamental

Funciones trigonométricas inversas e hiperbólicas

Contenido

Palabras clave: hiperbólico, trigonométricas inversas, derivadas hiperbólicas.

1. Funciones trigonométricas inversas

En el Módulo de Cálculo Diferencial se abordaron las funciones trigonométricas, se hicieron algunas demostraciones sobre identidades y se dio solución a distintos tipos de problemas. En el presente módulo se van a abordar nuevamente las funciones trigonométricas definiendo sus inversas, las cuales contribuyen a encontrar el valor de los ángulos, que se establecen en ellas, a partir de los lados de un triángulo.

Debido a que una función f tiene inversa solo si es inyectiva y, en este caso, las seis funciones trigonométricas son periódicas, es necesario restringir sus dominios a intervalos en los que ellas sean inyectivas. La notación de la función inversa, por ejemplo, en el caso del seno, se nota como $y = sin^{-1}x$ o $y = arcsinx$, que se lee "y igual al inverso del seno o y igual al arcoseno de x" respectivamente. El último nombre lo recibe porque el valor del ángulo que tiene como seno a x es el mismo del arco subtendido sobre la circunferencia de radio 1. Es importante tener presente, entonces, que al hablar de arcoseno se está refiriendo a la inversa de la función seno. Del mismo modo ocurre con las otras funciones trigonométricas.

Cómo mejorar...

Para construir sus gráficas o explorar las que encuentra en este documento, ingrese a la página web **https://www.geogebra.org/graphing.**

1.1. Función arcoseno

Partiendo de la condición para la existencia de la inversa de una función (inyectividad), si se considera la función seno en el intervalo $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$, es posible hablar de su inversa. La figura 1 muestra las gráficas de la función seno con su restricción; note cómo allí, efectivamente, es inyectiva y la gráfica de su función es inversa.

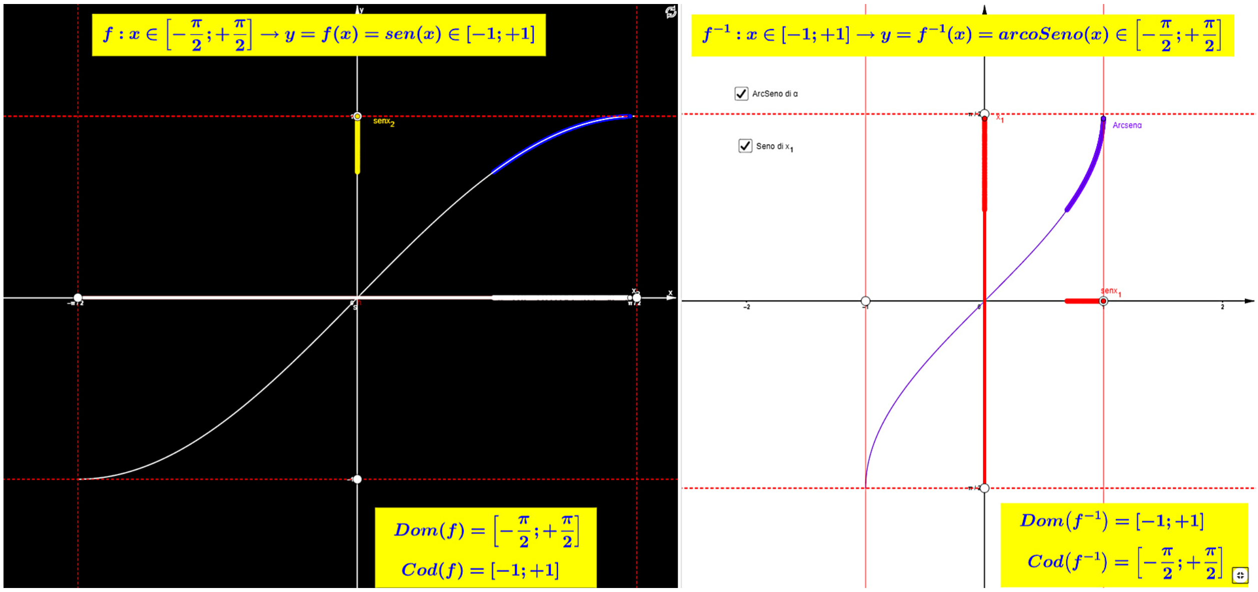

Figura 1. Gráficas de las funciones seno y arcoseno

Fuente: Matteo (s.f)

De acuerdo con lo anterior, la relación

$y = sin^{-1}x$ indica el número que hace que $sin(y) = x$

A partir de lo anterior, se tiene que:

Tabla 1. Datos de las funciones seno y arcoseno de x

	Función seno de x $f(x) = y = sin(x)$	**Función arcoseno de x** $f^{-1}(x) = sin^{-1}x$ **o** $y = arcsin(x)$
DOMINIO	$x \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$	$y \in [-1, 1]$
RANGO	$y \in [-1, 1]$	$y \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$

Fuente: elaboración propia

1.2. Función arcocoseno

Al hacer un análisis similar al de la función seno para establecer su inversa, es decir, tomar la función coseno, se debe verificar que en el intervalo $[0, \pi]$ la función es inyectiva, restringir el dominio de la función a ese intervalo para que exista su inversa y se obtiene que la relación:

$y = cos^{-1}x$ indica el número que se encuentra en el intervalo $[0, \pi]$ que hace que $y = cos(y) = x$

En la figura 2 se muestra, al lado izquierdo, la gráfica de la función coseno con su restricción para que sea inyectiva y, a la derecha, la gráfica de la función arcocoseno. Observe la gráfica de la recta $y = x$ y el reflejo de la función coseno sobre dicha recta; esa es su inversa.

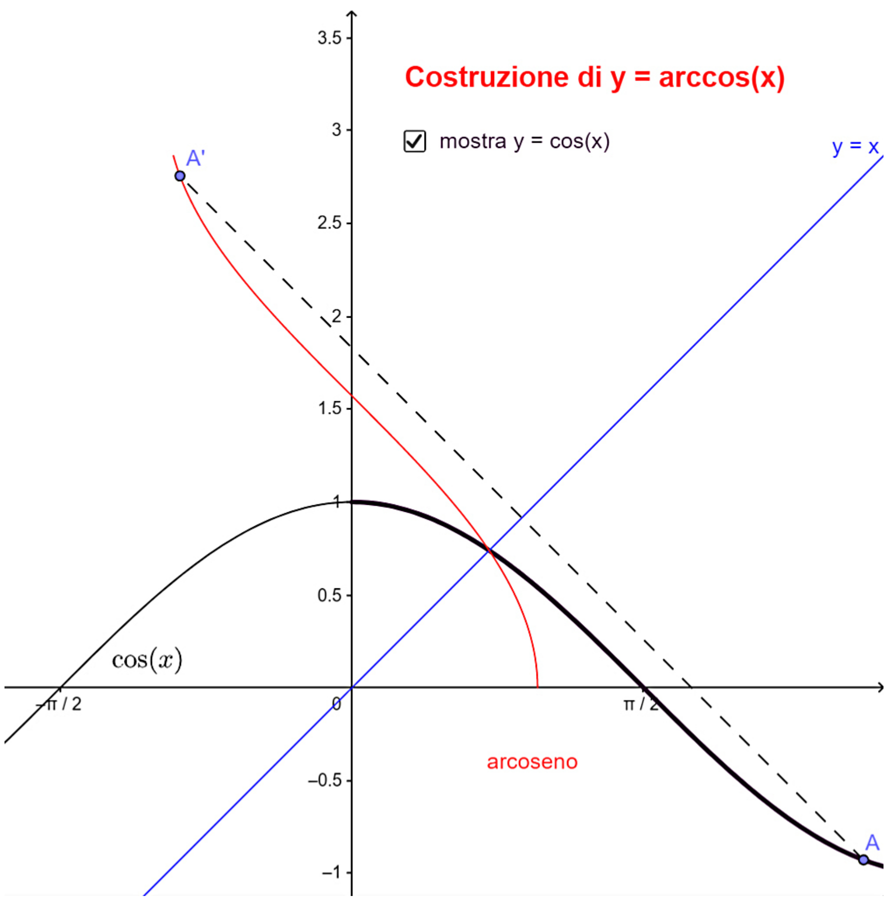

Figura 2. Gráficas de las funciones coseno y arcocoseno

Fuente: Rapella (s.f.)

A partir de lo anterior, se tiene que:

Tabla 2. Datos de las funciones coseno y arcocoseno de x

	Función coseno de x $f(x) = y = cos(x)$	**Función arcocoseno de x** $f^{-1}(x) = cos^{-1} x$ o $y = arccos(x)$
DOMINIO	$x \in [0, \pi]$	$y \in [-1, 1]$
RANGO	$y \in [-1, 1]$	$y \in [0, \pi]$

Fuente: elaboración propia

1.3. Función arcotangente

Al hacer un análisis similar al de las dos funciones anteriores para establecer su inversa, es decir, tomar la función tangente, se debe verificar que en el intervalo $\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$ la función es inyectiva, restringir el dominio de la función a ese intervalo para que exista su inversa y se obtiene que la relación:

$y = tan^{-1}(x)$ indica el número que se encuentra en el intervalo $\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$, que hace que $tan(y) = x$

En la figura 3, se muestra, al lado izquierdo, la gráfica de la función tangente con su restricción para que sea inyectiva y, a la derecha, la gráfica de la función arcotangente. Observe la gráfica de la recta $y = x$ y el reflejo de la función coseno sobre dicha recta; esa es su inversa.

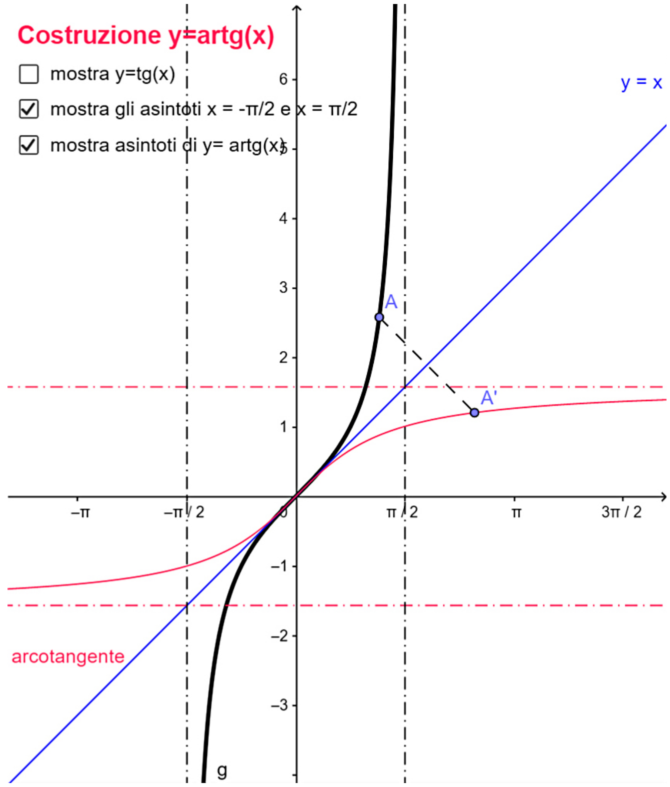

Figura 3. Gráficas de la función tangente y arcotangente

Fuente: Rapella (s.f.)

A partir de lo anterior, se tiene que:

Tabla 3. Datos de la función tangente y arcotangente de x

	Función tangente de x $f(x) = y = tan(x)$	**Función arcotangente de x** $f^{-1}(x) = tan^{-1}\, x$ o $y = arctan(x)$
DOMINIO	$x \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$	$x \in (-\infty, \infty)$
RANGO	$y \in (-\infty, \infty)$	$y \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$

Fuente: elaboración propia

En el siguiente cuadro se exponen los dominios donde las funciones cotangente, secante y cosecante son inyectivas, junto con la descripción de los dominios de sus inversas.

Tabla 4. Dominios de las funciones inyectivas y sus inversas

	$y = cot(x)$	$y = cot^{-1}(x)$	$y = sec(x)$	$y = sec^{-1}(x)$	$y = csc(x)$	$y = csc^{-1}(x)$
DOMINIO	$(0,\pi)$	$(-\infty,\infty)$	$\left(0,\frac{\pi}{2}\right)\cup\left(\frac{\pi}{2},\pi\right)$	$(-\infty,-1]\cup[1,\infty)$	$\left[-\frac{\pi}{2},0)\cup(0,\frac{\pi}{2}\right]$	$(-\infty,-1]\cup[1,\infty)$
RANGO	$(-\infty,\infty)$	$(0,\pi)$	$(-\infty,-1]\cup[1,\infty)$	$\left(0,\frac{\pi}{2}\right)\cup\left(\frac{\pi}{2},\pi\right)$	$(-\infty,-1]\cup[1,\infty)$	$\left[-\frac{\pi}{2},0)\cup(0,\frac{\pi}{2}\right]$

Fuente: elaboración propia

1.4. Aplicación de funciones inversas

Encuentre el valor exacto de $A = tan\left(arcsin\left(\frac{2}{3}\right)\right)cot\left(arccos\left(\frac{1}{3}\right)\right)$

Solución:

Si se llaman $y = arcsin\left(\frac{2}{3}\right)$ y $x = arccos\left(\frac{1}{3}\right)$ el valor a encontrar es:

1. $A = tan(y)cot(x)$

Si $y = arcsin\left(\frac{2}{3}\right)$ significa que $sin(y) = \frac{2}{3}$ y al trazar el triángulo rectángulo de esta razón trigonométrica, considerando que el ángulo es y, se tiene que $sin(y) = \frac{cateto\ opuesto}{hipotenusa}$. Observe la imagen que aparece en la figura 4:

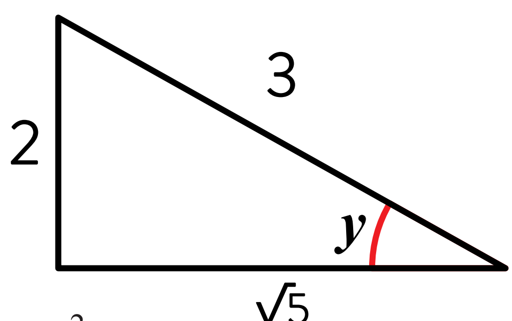

Figura 4. Razón trigonométrica $sin(y) = \frac{2}{3}$

Fuente: elaboración propia

Usando el teorema de Pitágoras, en dicho triángulo se obtiene que el cateto adyacente es igual a $\sqrt{5}$. Por lo que, $\tan(y) = \frac{2}{\sqrt{5}}$

De forma análoga, si $x = arccos\left(\frac{1}{3}\right)$ significa que $cos(x) = \frac{1}{3}$ y en el triángulo rectángulo de esta razón trigonométrica, donde el ángulo es x, $cos(x) = \frac{cateto\ adyacente}{hipotenusa}$. En la figura 5, observe que para el triángulo de esta razón, según el teorema de Pitágoras, el cateto opuesto es igual a $\sqrt{8}$. Por lo que, $\cot(x) = \frac{1}{\sqrt{8}}$.

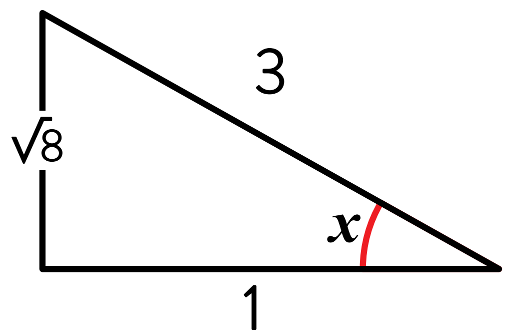

Figura 5. Razón trigonométrica $cos(x) = \frac{1}{3}$

Fuente: elaboración propia

De acuerdo con lo anterior, el valor de A es: $A = tan(y)cot(x) = \frac{2}{\sqrt{5}} \bullet \frac{1}{\sqrt{8}} = \frac{2}{\sqrt{40}} = \frac{\sqrt{10}}{10}$.

2. Derivadas de las funciones trigonométricas inversas

Las funciones trigonométricas inversas se pueden derivar dentro del dominio en el que están definidas, permitiendo con ello hacer cálculos matemáticos al conocerse la función inversa y no la función original. En la tabla que aparece a continuación se escriben las fórmulas de las derivadas de las funciones trigonométricas inversas, siendo $g(x)$ una función bien definida para la composición correspondiente.

Tabla 5. Fórmulas de las derivadas de las funciones trigonométricas inversas

Función	Derivada
$y = sin^{-1}(g(x))$	$y' = \frac{1}{\sqrt{1-(g(x))^2}} \bullet g'(x)$
$y = cos^{-1}(g(x))$	$y' = -\frac{1}{\sqrt{1-(g(x))^2}} \bullet g'(x)$
$y = tan^{-1}(g(x))$	$y' = \frac{1}{1+(g(x))^2} \bullet g'(x)$
$y = cot^{-1}(g(x))$	$y' = -\frac{1}{1+(g(x))^2} \bullet g'(x)$
$y = sec^{-1}(g(x))$	$y' = \frac{1}{\lvert g(x)\rvert \sqrt{(g(x))^2 - 1}} \bullet g'(x)$
$y = csc^{-1}(g(x))$	$y' = -\frac{1}{\lvert g(x)\rvert \sqrt{(g(x))^2 - 1}} \bullet g'(x)$

Fuente: elaboración propia

Se solucionarán algunos ejemplos en donde se aplican esas reglas de derivación. En cada caso se derivará y simplificará completamente.

Ejemplo 1. $y = cos^3(3^x) \bullet tan^{-1}(x^3)$

Solución

$y = cos^3(3^x) \bullet tan^{-1}(x^3)$	Ejercicio planteado
$y' = cos^3(3^x) \bullet \left[tan^{-1}(x^3)\right]' + [cos^3(3^x)]' \bullet tan^{-1}(x^3)$	Se aplica regla del producto
$y' = cos^3(3^x) \bullet \left[\frac{1}{1+(x^3)^2} \bullet (3x^2)\right] + [3cos^2(3^x)(-sen(3^x))(3^x ln3)] \bullet tan^{-1}(x^3)$	

$y' = \frac{3x^2 cos^3\left(3^x\right)}{1+\left(x^3\right)^2} - 3^{x+1} ln3cos^2\left(3^x\right)sen\left(3^x\right)tan^{-1}\left(x^3\right)$	Se organiza el resultado

Ejemplo 2. $y = cos^{-1}\left(\frac{1}{x}\right) + sin^{-1}\left(1-x\right)$

Solución

$y = cos^{-1}\left(\frac{1}{x}\right) + sin^{-1}\left(1-x\right)$	Ejercicio planteado
$y' = -\frac{1}{\sqrt{1-\left(\frac{1}{x}\right)^2}} \cdot \left(-\frac{1}{x^2}\right) + \frac{1}{\sqrt{1-\left(1-x\right)^2}} \cdot \left(-1\right)$	Se determinan las derivadas
$y' = \frac{1}{x^2\sqrt{1-\left(\frac{1}{x}\right)^2}} - \frac{1}{\sqrt{2x-x^2}}$	Se simplifican las expresiones y se organiza

2.1. Ejercicios propuestos para practicar

Derive y simplifique:

1. $y = csc^{-1}\left(x^2+1\right)$
2. $y = xtan^{-1} \cdot \left(\frac{x}{2}\right)$
3. $y = ctan^{-1}\left(lnx\right)$
4. $y = sen^{-1}\sqrt{1-x^2}$

3. Funciones hiperbólicas

Las funciones hiperbólicas se construyen a partir de las funciones exponenciales e^x y e^{-x} y reciben dicho nombre porque cualquier punto $P_2 = (x, y)$, donde $x = cosh(u)$ y $y = sinh(u)$, (llamados coseno hiperbólico de u y seno hiperbólico de u, respectivamente), pertenecen a la rama derecha de la hipérbola unitaria $x^2 - y^2 = 1$; esto es que $cosh^2(u) - sinh^2(u) = 1$. La figura 6 muestra una imagen de una construcción en Geogebra de las gráficas de las funciones coseno hiperbólico, seno hiperbólico y tangente hiperbólica.

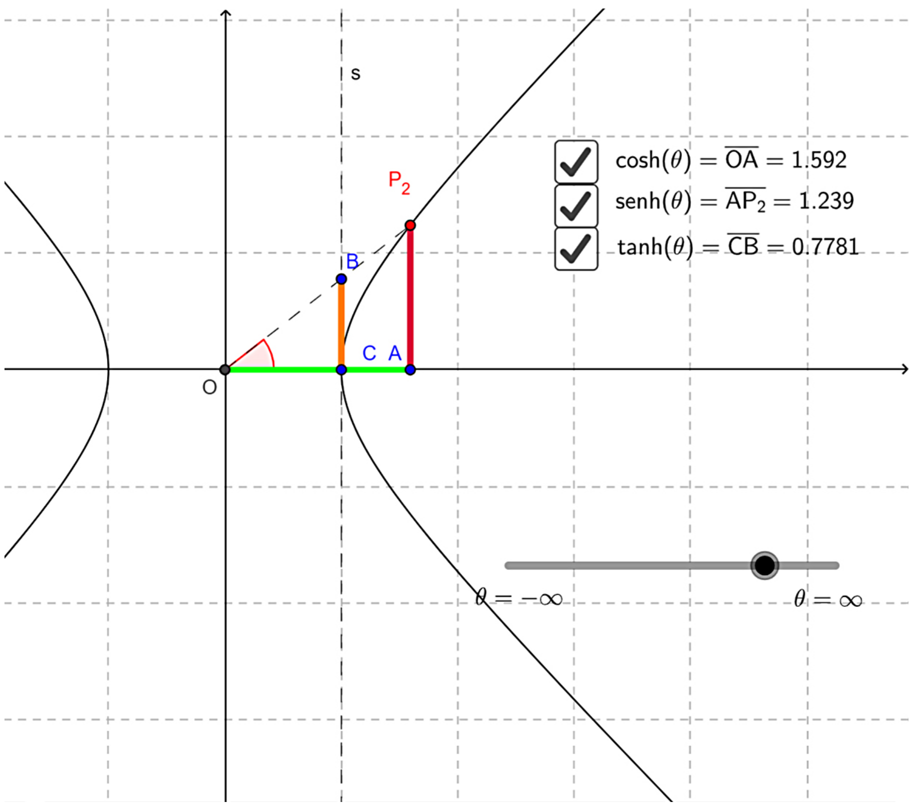

Figura 6. Gráfica de funciones hiperbólicas – curva hiperbólica

Fuente: Meléndez (s.f.)

3.1. Funciones seno hiperbólico, coseno hiperbólico y tangente hiperbólica

En la siguiente tabla se exponen y describen las estructuras de las funciones hiperbólicas que permiten demostrar algunas de las identidades que aparecen allí mencionadas; analícelas y, posteriormente, en la Figura 7, observe las representaciones gráficas de cada una.

Tabla 6. Definición e identidades de algunas funciones

<table>
<tr><th>Función</th><th>Definición</th><th>Identidades</th></tr>
<tr><td>Seno hiperbólico</td><td>$sinh(x)=\frac{e^x-e^{-x}}{2}$</td><td rowspan="6">$cosh^2(x)-sinh^2(x)=1$
$sinh2(x)=2sinh(x)cosh(x)$
$cosh2(x)=cosh^2(x)+sinh^2(x)$
$cosh^2(x)=\frac{cosh2(x)+1}{2}$
$sinh^2(x)=\frac{cosh2(x)+1}{2}$
$tanh^2(x)=1-sech^2(x)$
$coth^2(x)=1+csch^2(x)$</td></tr>
<tr><td>Coseno hiperbólico</td><td>$cosh(x)=\frac{e^x+e^{-x}}{2}$</td></tr>
<tr><td>Tangente hiperbólica</td><td>$tanh(x)=\frac{e^x-e^{-x}}{e^x+e^{-x}}$</td></tr>
<tr><td>Cotangente hiperbólica</td><td>$coth(x)=\frac{e^x+e^{-x}}{e^x-e^{-x}}$</td></tr>
<tr><td>Secante hiperbólica</td><td>$sech(x)=\frac{2}{e^x+e^{-x}}$</td></tr>
<tr><td>Cosecante hiperbólica</td><td>$csech(x)=\frac{2}{e^x-e^{-x}}$</td></tr>
</table>

Fuente: elaboración propia

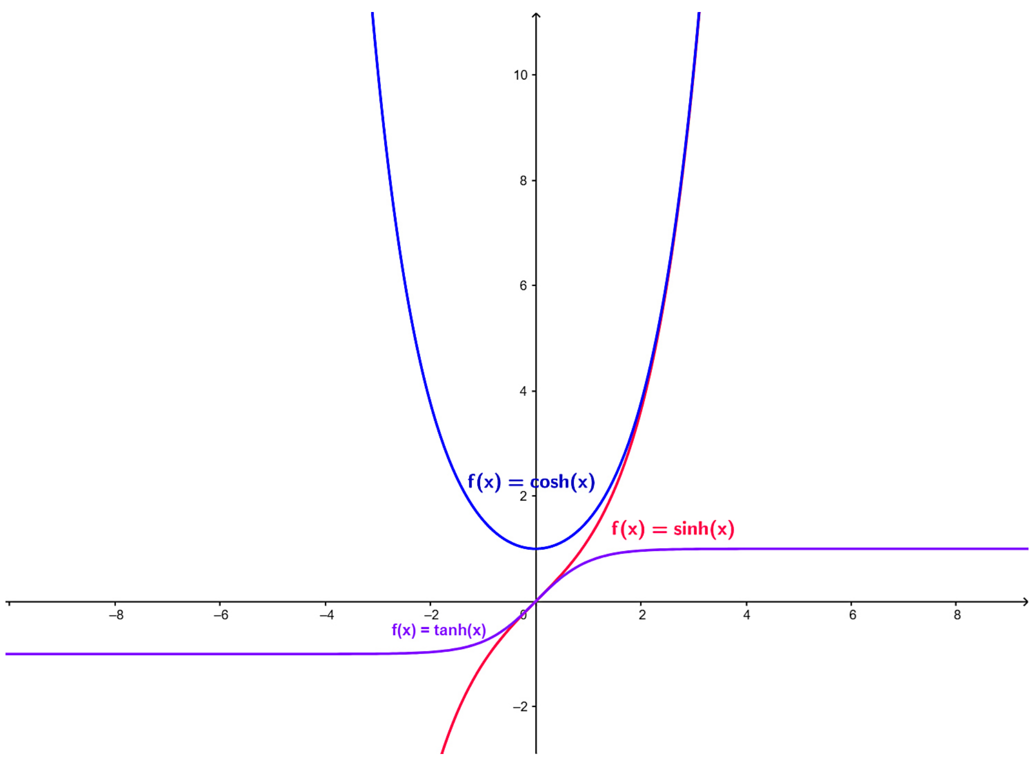

Figura 7. Gráficas de funciones hiperbólicas

Fuente: Hernández (s.f.)

3.1.1. Aplicación de la función tangente hiperbólica

La velocidad de las idealizadas olas viajeras del mar (v) dependen de la longitud de onda (λ) y de la profundidad del agua (d). Esta relación está dada por: $v=\sqrt{\frac{g\lambda}{2\pi}tanh\left(2\pi\frac{d}{\lambda}\right)}$. Si se sabe que $g=9{,}8\,{}^{m}\!/\!_{s^2}$, $\lambda=10m,\ d=8m$, ¿cuál es la velocidad de la ola?

Solución

Al sustituir los valores en las variables, se obtiene:

1. $$v=\sqrt{\frac{9{,}8(10)}{2\pi}tanh\left(2\pi\frac{8}{10}\right)}=3{,}53237\,m/s$$

3.2. Derivadas de las funciones hiperbólicas

A partir de las derivadas de las funciones exponenciales y las propiedades de la función derivada, en esta sección se expondrán las derivadas de las funciones hiperbólicas.

Siendo $g(x)$ una función bien definida para cada caso, en el siguiente cuadro se exponen las derivadas.

Tabla 7. Derivadas de las funciones hiperbólicas

Función	Derivada de la función hiperbólica
$y=\sinh(g(x))$	$y'=\cosh(g(x))\cdot g'(x)$
$y=\cosh(g(x))$	$y'=\sinh(g(x))\cdot g'(x)$
$y=\tanh(g(x))$	$y'=sech^2(g(x))\cdot g'(x)$
$y=\coth(g(x))$	$y'=-csch^2(g(x))\cdot g'(x)$
$y=\operatorname{sech}(g(x))$	$y'=-\operatorname{sech}(g(x))tanh(g(x))\cdot g'(x)$
$y=\operatorname{csch}(g(x))$	$y'=-\operatorname{csch}(g(x))\cot(g(x))\cdot g'(x)$

Fuente: elaboración propia

A continuación, se solucionarán algunos ejemplos en donde se aplican esas reglas de derivación. En cada caso se derivará y simplificará completamente.

Ejemplo 1. $y = tanh\sqrt{1-x^2}$

Solución

$y = tanh\sqrt{1-x^2}$	Se plantea el ejercicio
$y' = sech^2\sqrt{1-x^2}\left(\frac{-2x}{2\sqrt{1-x^2}}\right)$	Se deriva la función hiperbólica
$y' = \frac{-xsech^2\sqrt{1-x^2}}{\sqrt{1-x^2}}$	Se simplifica la respuesta

Ejemplo 2. $y = cosh^2(3x+1) \cdot \sinh(2x-3)$

Solución

$y = cosh^2(3x+1) \cdot \sinh(2x-3)$	Se plantea el ejercicio
$y' = cosh^2(3x+1) \cdot [\sinh(2x-3)]' + [cosh^2(3x+1)]' \cdot \sinh(2x-3)$	Se deriva el producto
$y' = cosh^2(3x+1) \cdot [\cosh(2x-3)2] + [2cosh(3x+1)\sinh(3x+1)3] \cdot \sinh(2x-3)$	Se deriva
$y' = 2cosh^2(3x+1)\cosh(2x-3) + 6\,cosh(3x+1)\sinh(3x+1)\sinh(2x-3)$	Se simplifica

3.3. Funciones hiperbólicas inversas y sus derivadas

Dado que no todas las funciones hiperbólicas son inyectivas, de nuevo es necesario restringir el dominio. En la siguiente tabla, siendo $g(x)$ una función bien definida para cada caso, aparece la restricción del dominio de cada función y la correspondiente función derivada.

Tabla 8. Función hiperbólica inversa y su derivada

Función	Función hiperbólica inversa	Derivada de la función hiperbólica inversa
$y = sinhx$ Con $x \in \mathrm{R}$	$y = sinh^{-1}x$ Con $x \in \mathrm{R}$	$y' = \frac{1}{\sqrt{1+\left(g\left(x\right)\right)^{2}}} \bullet g'\left(x\right)$
$y = coshx$ Con $x \in \left[0,\infty\right)$	$y = cosh^{-1}x$ Con $x \in \left[0,\infty\right)$	$y' = \frac{1}{\sqrt{\left(g\left(x\right)\right)^{2}-1}} \bullet g'\left(x\right)$
$y = tanhx$ Con $x \in \mathrm{R}$	$y = tanh^{-1}x$ Con $x \in \left[-1,1\right]$	$y' = \frac{1}{1-\left(g\left(x\right)\right)^{2}} \bullet g'\left(x\right)$
$y = cothx$ Con $x \in \mathrm{R}$	$y = coth^{-1}x$ Con $x \in \left(-1,1\right)$	$y' = \frac{1}{1-\left(g\left(x\right)\right)^{2}} \bullet g'\left(x\right)$
$y = sechx$ Con $x \in \left[0,\infty\right)$	$y = sech^{-1}x$ Con $x \in \left[0,\infty\right)$	$y' = -\frac{1}{\left\lvert g\left(x\right)\right\rvert\sqrt{1-\left(g\left(x\right)\right)^{2}}} \bullet g'\left(x\right)$
$y = cschx$ Con $x \in \left(-\infty,0\right)\cup\left(0,\infty\right)$	$y = csch^{-1}x$ Con $x \in \left(-\infty,0\right)\cup\left(0,\infty\right)$	$y' = -\frac{1}{\left\lvert g\left(x\right)\right\rvert\sqrt{1+\left(g\left(x\right)\right)^{2}}} \bullet g'\left(x\right)$

Fuente: elaboración propia

En la figura 8, se exponen las gráficas de algunas funciones hiperbólicas y sus inversas.

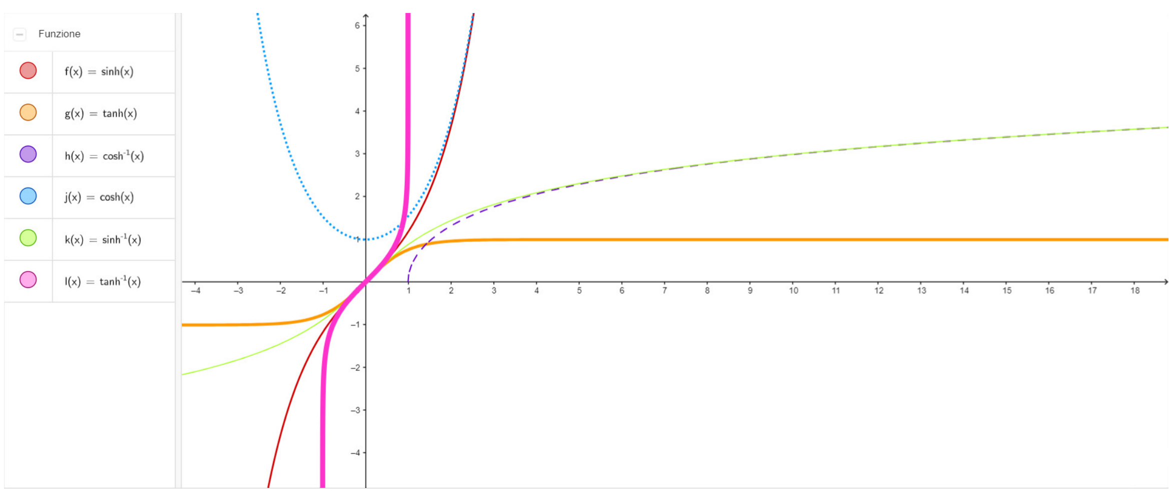

Figura 8. Funciones hiperbólicas y sus inversas

Fuente: bws310game (s.f.)

Se solucionarán algunos ejemplos en donde se aplican esas reglas de derivación. En cada caso se derivará y simplificará completamente.

Ejemplo 1. $y = cosh^{-1}\left(2\sqrt{x+1}\right)$

Solución

$$y = cosh^{-1}\left(2\sqrt{x+1}\right)$$

Se plantea el ejercicio

$$y' = \frac{1}{\sqrt{\left(2\sqrt{x+1}\right)^2 - 1}}\left(2\frac{1}{2\sqrt{x+1}}\right)$$

Se aplican reglas de derivación

$$y' = \frac{1}{\sqrt{x+1}\sqrt{\left(2\sqrt{x+1}\right)^2 - 1}}$$

Se simplifica y organiza la expresión

$$y' = \frac{1}{\sqrt{x+1}\sqrt{4(x+1)-1}} = \frac{1}{\sqrt{4x^2+7x+3}}$$

Se simplifica completamente la expresión

Ejemplo 2. $y = \left(x^2+2x\right)tanh^{-1}(x+1)$

Solución

$$\left(x^2+2x\right)tanh^{-1}(x+1)$$

Se plantea el ejercicio

$$y' = \left(x^2+2x\right)\left[tanh^{-1}(x+1)\right]' + \left[\left(x^2+2x\right)\right]'tanh^{-1}(x+1)$$

Se deriva el producto

$$y' = \left(x^2+2x\right)\left(\frac{1}{1-(x+1)^2}(1)\right) + (2x+2)tanh^{-1}(x+1)$$

Se aplican reglas de derivación

$$y' = \frac{x^2+2x}{1-(x+1)^2} + (2x+2)tanh^{-1}(x+1)$$

Se organiza la información

$$y' = \frac{x^2+2x}{1-\left(x^2+2x+1\right)} + (2x+2)tanh^{-1}(x+1)$$

Se resuelve el cuadrado

$y' = \dfrac{x^2+2x}{-x^2-2x} + (2x+2)tanh^{-1}(x+1)$	Se destruye paréntesis y se opera
$y' = -1 + (2x+2)tanh^{-1}(x+1)$	Se factoriza y se simplifica completamente

3.4. Ejercicios propuestos para practicar

En cada caso derive la función y simplifique completamente la respuesta:

1. $y = \ln(coshx)$
2. $y = t^2 tanh\left(\dfrac{1}{t}\right)$
3. $y = cosh^{-1}(secx)$
4. $y = csch^{-1}(2^{\theta}) + \sqrt{1-\theta^2}\,sech^{-1}\theta$.

Referencias

Purcell, E. J., Varberg, D. y Rigdon, S. (2007). Cálculo. México: Pearson Educación.

Referencias de imágenes

bws310game. (s.f.). *Funciones hiperbólicas y sus inversas* [Imagen]. Recuperado de https://www.geogebra.org/m/etGh3fGc

Hernández, C. (s.f.). *Gráfica de funciones hiperbólicas* [Imagen]. Recuperado de https://www.geogebra.org/m/axYuueGW

Matteo. (s.f). *Gráficas de las funciones seno y arcoseno.* [Imagen]. Recuperado de https://www.geogebra.org/m/swqzwEAF

Meléndez, A. (s.f.). *Gráfica de funciones hiperbólicas* [Imagen]. Recuperado de https://www.geogebra.org/m/V8qXdkvP

Rapella, L. (s.f.). *Gráficas de las funciones coseno y arcocoseno* [Imagen]. Recuperado de https://www.geogebra.org/m/Qf6uy5bk

Rapella, L. (s.f.). *Gráficas de las funciones tangente y arcotangente* [Imagen]. Recuperado de https://www.geogebra.org/m/KjTDwg3d

Texto aclaratorio

- En este documento se han tomado imágenes de GeoGebra en uso de página web libre.

INFORMACIÓN TÉCNICA

FACULTAD DE
INGENIERÍA, DISEÑO
E INNOVACIÓN

Módulo: Cálculo II

Unidad 1: Funciones trascendentes

Escenario 2: Otras funciones trascendentes

Autor: Martha Helena Zambrano Valentín

Asesor Pedagógico: Jeiner Velandia

Diseñador Gráfico: Carlos Montoya

Asistente: Ginna Paola Quiroga