Instituto Politécnico

Universidad Nacional de Rosario Universidad Nacional de

Aplicaciones de las Leyes de Newton

3º Año

Cód- 7303-17

Prof. Liliana Grigioni
Prof. Marcela Palmegiani
Prof. Juan Farina

Dpto. de Física

Física III

fisica.ips.edu.ar
www.ips.edu.ar

Masterización: RECURSOS PEDAGOGICOS

Aplicaciones de las Leyes de Newton

Introducción

En este capítulo vamos a aplicar las leyes de Newton a casos particulares de movimientos rectilíneos y curvilíneos de partículas. Por ejemplo, la caída de una moneda al piso, una piedra que se tira verticalmente hacia arriba, una pelota de golf lanzada desde un tee, un satélite en orbita circular alrededor de la Tierra, una moto en una pista circular de prueba. Algunas de las trayectorias de las partículas mencionadas son en una dimensión como la de la moneda o de la piedra y otras son en dos dimensiones como el movimiento de la pelota de golf o el movimiento circular del satélite.

Movimiento de proyectiles

Se llama proyectil a cualquier objeto que es lanzado por algún agente y que continua en movimiento en virtud de su propia inercia. Una piedra lanzada al aire, una pelota de béisbol lanzada por un jugador son proyectiles que describen movimientos rectilíneos o curvilíneos. En esta primera parte estudiaremos el movimiento de proyectiles lanzados verticalmente hacia abajo o hacia arriba y luego el de proyectiles lanzados horizontal u oblicuamente.

Para hacer un estudio dinámico del movimiento de proyectiles necesitamos conocer las fuerzas que actúan sobre éstos y plantear la segunda ley de Newton para encontrar la aceleración, ésta permitirá determinar la posición y la velocidad del proyectil en cada instante.

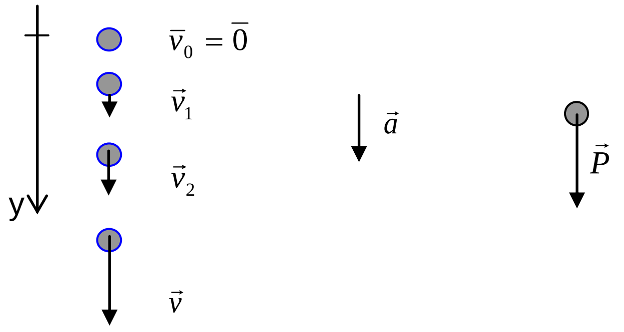
Consideraremos que el objeto al despegarse del mecanismo que lo lanza se mueve a través del aire sin estar en contacto con otros cuerpos. Supondremos despreciable el rozamiento con el aire (tiempo de vuelo menor a 10 s), entonces el proyectil interactúa sólo con la Tierra, se encuentra bajo la acción de la fuerza gravitatoria únicamente, supuesta constante. Por lo tanto se mueve con aceleración constante, la aceleración de la gravedad, describiendo una trayectoria rectilínea o curvilínea.

Pero, ¿cómo describir el movimiento de un objeto en el campo gravitatorio terrestre?, ¿de qué depende la forma de su trayectoria? Daremos respuesta a estos interrogantes analizando distintos casos.

Caída libre

Llamamos caída libre al movimiento rectilíneo de un objeto que se mueve bajo la acción única de la fuerza peso.

Un cuerpo de masa m se deja caer cerca de la superficie terrestre. El cuerpo tiene inicialmente velocidad nula (en el instante que es liberado) y, a medida que el tiempo transcurre durante la caída, su velocidad va aumentando, experimenta una aceleración.



Veamos cuáles son las fuerzas que actúan sobre el cuerpo durante su caída y realicemos el diagrama de cuerpo libre. La resistencia del aire es un factor que afecta el movimiento de un objeto que cae pero, para objetos lo suficientemente densos (mucha masa por unidad de volumen) y distancias cortas de caída, produce un efecto muy leve, con lo que podemos considerarla despreciable. Entonces, la única fuerza que actúa sobre el cuerpo surge de la interacción gravitatoria del objeto que cae con la Tierra y es el peso $\vec{P}$ del cuerpo.

Aplicando la Segunda Ley de Newton:

$$\Sigma \vec{F}_y = m.\vec{a}_y \quad \Rightarrow \quad \Sigma \vec{F} = \vec{P} \quad \vec{P} = m.\vec{g} \quad \Rightarrow \quad \boxed{\vec{a}_y = \vec{g}}$$

resulta que la aceleración del cuerpo es la aceleración debida a la gravedad $\vec{g}$.

Todos los objetos que se mueven bajo la acción única de la fuerza peso se aceleran de igual forma cuando están situados en el mismo punto del campo gravitatorio.

Como vimos en el capítulo anterior, el valor de la aceleración de la gravedad varía con el cuadrado de la distancia al centro de la Tierra, disminuye cuando aumenta la altitud y presenta pequeñas variaciones con la latitud. Vamos a ignorar estas variaciones de la aceleración de la gravedad y la consideraremos constante, con un valor $g = 9{,}8\frac{m}{s^2}$, en las proximidades de la superficie terrestre.

El movimiento de un objeto en caída libre es un movimiento en una dimensión con aceleración constante $\vec{g}$, de dirección vertical y sentido hacia el centro de la Tierra (MRUV)
Si conocemos la velocidad inicial y la aceleración del cuerpo, es sencillo encontrar su velocidad y su posición en función del tiempo.
Entonces, usando las ecuaciones del movimiento rectilíneo uniformemente variado, y tomando $t_0 = 0$ en el instante en que el cuerpo es liberado, resultan las siguientes expresiones:

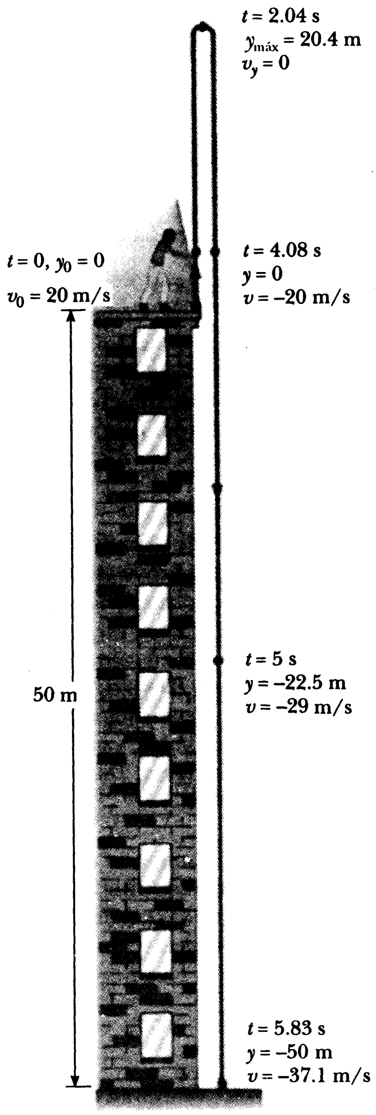
$$\boxed{\vec{v}_y = \vec{v}_0 + \vec{g}t}$$

$$\boxed{\vec{y} = \vec{y}_0 + \vec{v}_0 t + \frac{1}{2}\vec{g}t^2}$$

$$\boxed{v^2 = v_0^2 + 2g\Delta y}$$

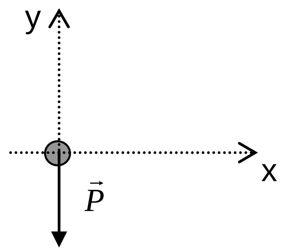
Es importante destacar que estas expresiones dependen de las condiciones iniciales del movimiento y del sistema de referencia elegido, el que determinará el signo de las magnitudes vectoriales intervinientes en las ecuaciones.

Si la velocidad inicial es nula, el cuerpo cae desde el reposo aumentando uniformemente su velocidad.
Si se lanza verticalmente hacia abajo con una determinada rapidez, el cuerpo cae aumentando su velocidad pero desde un valor inicial distinto de cero.
Si se lanza verticalmente hacia arriba, el cuerpo sube disminuyendo su velocidad hasta detenerse e inmediatamente cae con movimiento uniformemente acelerado.



Ejemplo
Se lanza una piedra desde la terraza de un edificio de 50 m de alto con una velocidad inicial de 20 m/s en línea recta y hacia arriba. Calcula:

a) El tiempo necesario para que la piedra alcance su altura máxima.
b) La altura máxima.
c) El tiempo necesario para que la piedra regrese a la terraza del edificio.
d) La velocidad de la piedra en ese instante.
e) La velocidad y posición de la piedra en t = 5 s.
f) Representa gráficamente a = f(t), v = f(t), y = f(t) para el vuelo completo hasta que la piedra llega al suelo.



a) $t = \dfrac{v - v_0}{-g} \Rightarrow t = \dfrac{0 - 20\frac{m}{s}}{-9{,}8\frac{m}{s^2}} \Rightarrow t = 2{,}04s$

b) $v^2 = v_0^2 + 2(-g)\Delta y \Rightarrow \quad y_{máx} = \dfrac{0 - \left(20\frac{m}{s}\right)^2}{2.\left(-9{,}8\frac{m}{s^2}\right)} \Rightarrow y_{máx} = 20{,}4m$

(con respecto a la terraza)

c) $t = 4{,}08s$

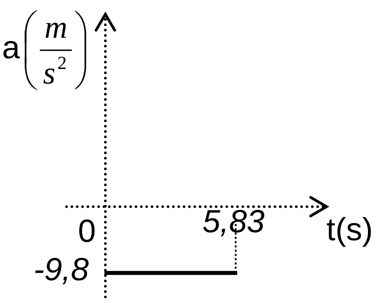
d) $\vec{v} = \vec{v}_0 + \vec{g}t \Rightarrow v = v_0 = +(-g\,t) \Rightarrow v = 20\frac{m}{s} + \left(-9{,}8\frac{m}{s^2}\right).4{,}08s \Rightarrow v = -20\frac{m}{s}$

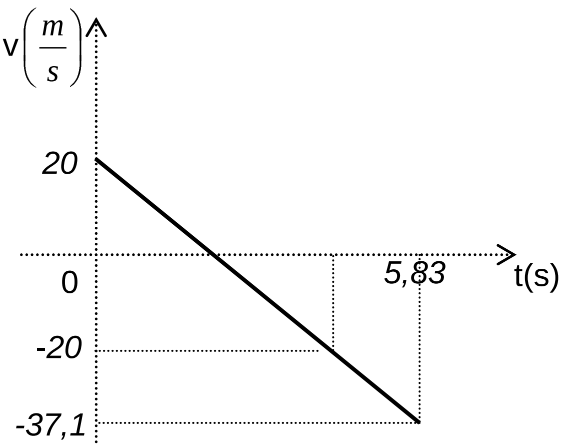
e) $\vec{v} = \vec{v}_0 + \vec{g}t \Rightarrow v = -29\frac{m}{s}$

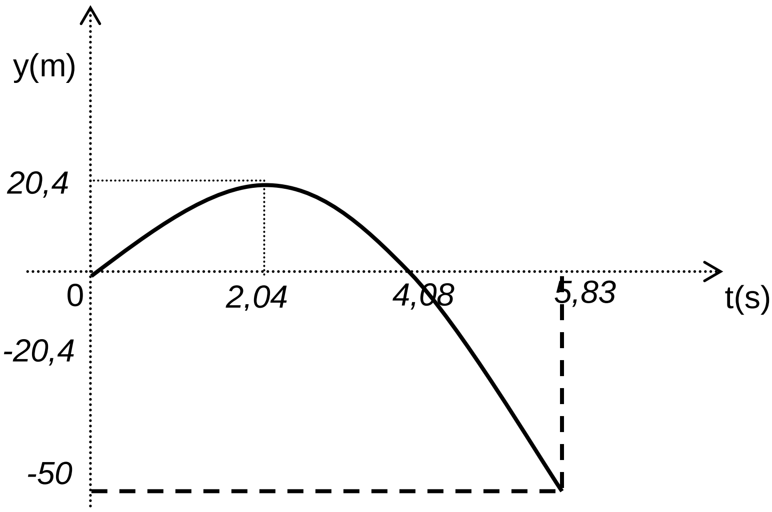
$\vec{y} = \vec{y}_0 + \vec{v}_0 t + \frac{1}{2}\vec{g}t^2 \Rightarrow y = y_0 + v_0 t + \frac{1}{2}(-g\,t^2)\; y = 0 + 20\frac{m}{s}.5s + \frac{1}{2}\left(-9{,}8\frac{m}{s^2}\right)(5s)^2 \Rightarrow$

$\Rightarrow y = -22{,}5m$

f)







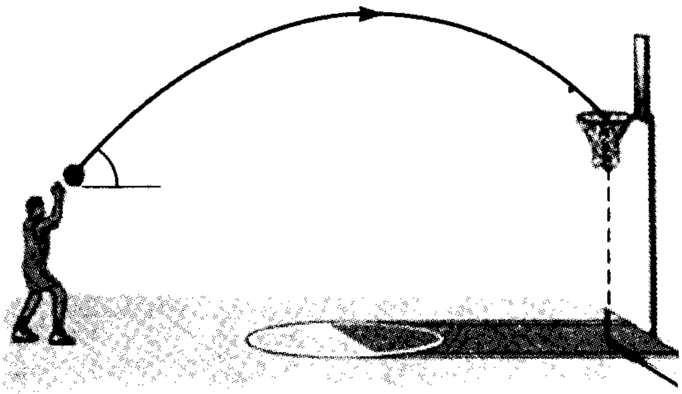
Convenimos usar la expresión "objeto que cae libremente" al referirnos a un cuerpo que se mueve bajo la acción de la atracción gravitatoria únicamente y con trayectoria vertical. Los objetos lanzados hacia arriba o hacia abajo y los que se sueltan desde el reposo, todos caen libremente una vez que se han liberado.

Para discutir:
Un niño lanza una pelota al aire con cierta velocidad inicial hacia arriba, otro niño deja caer otra pelota en el mismo instante, compara las aceleraciones de los dos objetos mientras permanecen en el aire. Si ambos cuerpos inician su movimiento desde la misma altura con respecto al suelo, compara sus velocidades en el momento que llegan al suelo.

Movimientos parabólicos

Hemos estudiado movimientos rectilíneos en los que la fuerza resultante que actúa sobre los cuerpos tiene la misma dirección que el movimiento. Si la fuerza que actúa sobre un objeto tiene una dirección que no es la del movimiento, éste se mueve describiendo una trayectoria curva.
Estas trayectorias curvilíneas, a primera vista, parecen muy complicadas pero con métodos adecuados pueden estudiarse de un modo sencillo.

¿Podrías describir el movimiento de la pelota de la figura?

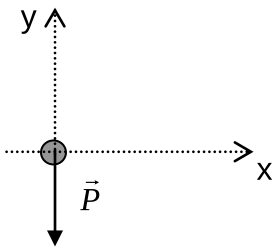


La pelota describe una curva contenida en un plano.

Para encontrar la posición de la pelota en cada instante tenemos que encontrar las coordenadas *x* e *y* respecto de algún sistema de referencia en el plano, entonces la posición del objeto en cada instante está dada por *P(x; y).*

Para hallar las ecuaciones que permiten describir el movimiento de la pelota aplicaremos las leyes de Newton.

La única fuerza que actúa sobre la pelota durante su vuelo es el peso $\vec{P}$.



Aplicando la Segunda Ley de Newton:

$$\Sigma\vec{F}_x = m.\vec{a}_x = \vec{0} \qquad \Rightarrow \qquad \boxed{\vec{a}_x = \vec{0}}$$

$$\Sigma\vec{F}_y = m.\vec{a}_y \qquad \Rightarrow \qquad \Sigma\vec{F}_y = \vec{P} \qquad \Rightarrow \qquad \boxed{\vec{a}_y = \vec{g}}$$

resulta que la aceleración es la aceleración de la gravedad $\vec{g}$.

En el eje *x* la aceleración es nula, el movimiento es uniforme.

En el eje *y* hay un movimiento rectilíneo uniformemente variado, de aceleración $\vec{g}$, desacelerado mientras el cuerpo sube y acelerado en el descenso.

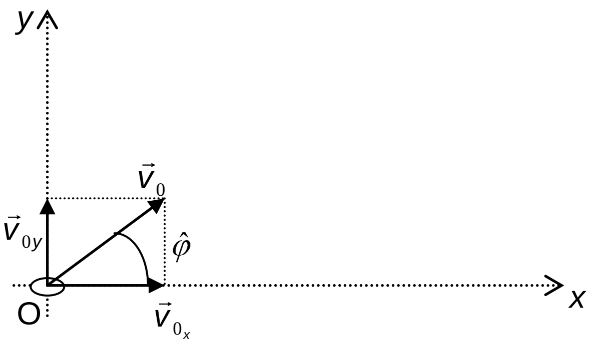
Realizamos el estudio componiendo dos movimientos: uno horizontal (MRU) y otro vertical (MRUV) que son independientes y se producen simultáneamente.

Es interesante notar que la componente horizontal del movimiento es totalmente independiente de la componente vertical y que ambas componentes se dan al mismo tiempo. Sus efectos combinados producen toda la gama de trayectorias curvas que describen los proyectiles.

Tiro oblicuo

Un cuerpo de masa m se arroja con una velocidad inicial $\vec{v}_0$ que forma un ángulo $\hat{\varphi}$ con la horizontal.
Para analizar este movimiento, vamos a descomponerlo en sus componentes rectangulares.

Descomponemos la velocidad inicial $\vec{v}_0$ en sus componentes horizontal $\vec{v}_{0_x}$ y vertical $\vec{v}_{0_y}$:



$$\left.\begin{aligned} v_{0_x} &= v_0.\cos\hat{\varphi} \\ v_{0_y} &= v_0.\text{sen}\,\hat{\varphi} \end{aligned}\right\}\text{ son las componentes de la velocidad inicial}$$

La posición inicial de la partícula es (*x_0=0; y_0=0)* en el instante *t_0=0* cuando el objeto es liberado.

El movimiento horizontal es uniforme, entonces:

$$v_x = constante = v_{0_x} \quad \Rightarrow \quad \boxed{v_x = v_0 \cos\hat{\varphi}}$$

$$x = x_0 + v_x(t - t_0)\ ,$$

como $x_0 = 0$ y $t_0 = 0$, resulta:

$$x = v_x t \quad \Rightarrow \quad \boxed{x = v_0 \cos\hat{\varphi}.t}$$

El movimiento vertical es uniformemente variado de aceleración $\vec{g}$, entonces:

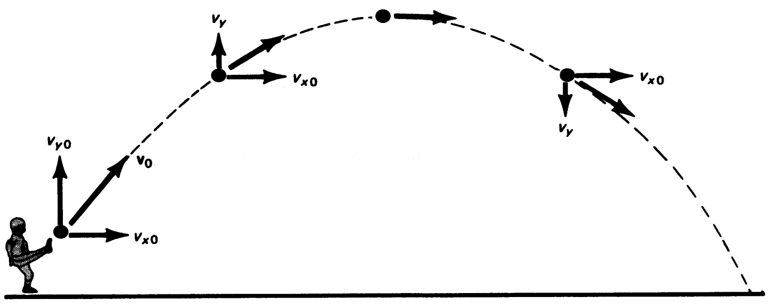
$$v_y = v_{0_y} + a_y(t - t_0) \quad \Rightarrow \quad \boxed{v_y = v_0 sen\,\hat{\varphi} + (-g).t}$$

$$y = y_0 + v_{0_y}(t - t_0) + \frac{1}{2}a_y(t - t_0)^2\ ,$$

como $y_0 = 0$ y $t_0 = 0$, resulta:

$$\boxed{y = v_0 sen\,\hat{\varphi}.t + \frac{1}{2}(-g)\,t^2}$$

La velocidad $\boxed{\vec{v} = \vec{v}_x + \vec{v}_y}$ cambia continuamente de dirección, siendo en cada punto tangente a la trayectoria.



En la figura se observa que la componente vertical $\vec{v}_y$ de la velocidad varía mientras que la componente horizontal $\vec{v}_x$ permanece constante.

La posición del proyectil en cada instante está dado por

$$P = (x; y) \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} x = v_0 \cos\hat{\varphi}.t \\ y = v_0 sen\,\hat{\varphi}.t + \frac{1}{2}(-g)t^2 \end{cases}$$

Para determinar la ecuación de la trayectoria descripta por el proyectil combinamos las ecuaciones que dan las posiciones *x* e *y* del proyectil en cada instante:

$$x = v_0 \cos\hat{\varphi}.t \qquad\qquad y = v_0 sen\,\hat{\varphi}.t + \frac{1}{2}(-g)t^2$$

El valor común del tiempo *t* en ambas expresiones las relaciona.

Despejamos el tiempo *t* de la primera ecuación

$$t = \frac{x}{v_0 \cos\hat{\varphi}}$$

Y sustituimos *t* en la segunda

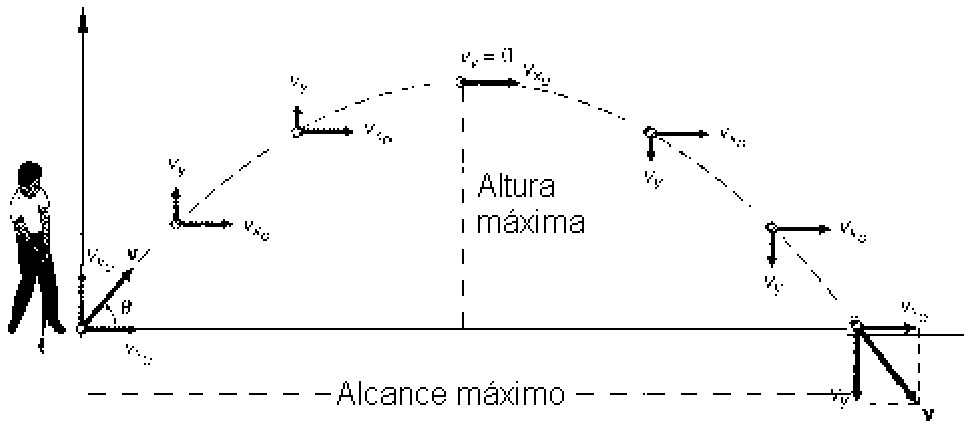
$$y = v_0 sen\,\hat{\varphi}\frac{x}{v_0 \cos\hat{\varphi}} + \frac{1}{2}(-g)\left(\frac{x}{v_0 \cos\hat{\varphi}}\right)^2$$

Resulta:

$$\boxed{y = tg\hat{\varphi}.x + \frac{(-g)}{2v_0{}^2.\cos^2\hat{\varphi}}.x^2}$$

Que es la ecuación de la trayectoria del proyectil. Esta ecuación tiene como representación gráfica una parábola.

En la figura siguiente, además de los vectores velocidad en los distintos puntos se encuentran indicados la altura máxima y el alcance horizontal máximo.

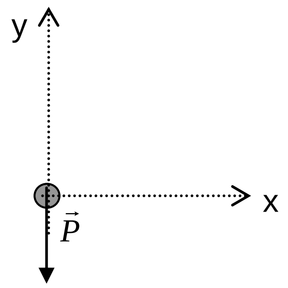


El vector velocidad es tangente a la trayectoria en cada punto (velocidad variable) y el vector aceleración es siempre vertical, dirigido hacia abajo y de módulo constante.

Ejemplo

Un atleta de salto de longitud se despega del suelo a un ángulo de 20º con la horizontal y a una velocidad de 11 m/s.

a) ¿Qué tan lejos salta?
b) ¿Cuál es la máxima altura que alcanza?



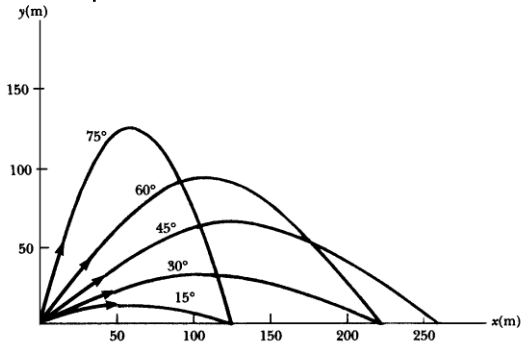
a) $v_y = v_0 sen\hat{\varphi} + (-g\,t) \Rightarrow t_{asc} = \dfrac{0 - v_0 sen\hat{\varphi}}{-g} \Rightarrow t_{asc} = 0{,}38s \Rightarrow t_{total} = 2t_{asc} = 0{,}76s$

$x = v_{0x} t_{total} \Rightarrow x = 7{,}86m$

b) $y_{máx} = v_0 sen\hat{\varphi}.t_{asc} + \dfrac{1}{2}(-g\,t_{asc})^2 \Rightarrow y_{máx} = 0{,}72m$

La suposición de que el movimiento del atleta de salto de longitud es el de una partícula es una simplificación extrema. No obstante, los valores que se obtienen son coherentes.

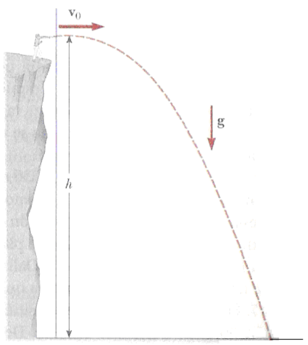
La figura muestra las trayectorias descriptas por el mismo proyectil disparado desde el origen de coordenadas con la misma rapidez pero distinta inclinación. Se observa que para ángulos de inclinación complementarios, el alcance horizontal es el mismo.

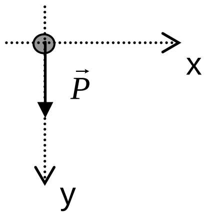


Tiro horizontal

Un caso particular del movimiento parabólico es el de un proyectil lanzado horizontalmente. Se procede como anteriormente a descomponer el movimiento parabólico en dos movimientos rectilíneos independientes y simultáneos.

Se lanza horizontalmente un objeto con velocidad inicial $\vec{v}_0$. Analizamos el movimiento a partir del instante de liberación (t_0=0). La posición inicial del proyectil es *P_0=(x_0=0; y_0=0)*





Una vez que el objeto es liberado se mueve bajo la acción de la fuerza peso:

- La aceleración horizontal es cero ($a_x = 0$), de modo que la componente horizontal de la velocidad es constante $v_x = v_0$.
  De acuerdo con la expresión $x = v_x.t$, el objeto se mueve con velocidad constante en dirección horizontal.
- La aceleración en el eje vertical es la aceleración de la gravedad ($a_y = g$).

Cae libremente en dirección vertical con $v_{y_0} = 0$ (como si se lo soltara)

Las expresiones $v_y = g.t \quad y = \frac{1}{2}gt^2$ nos dan la componente vertical de la velocidad y la ordenada para cada instante.

Un objeto lanzado horizontalmente, se mueve bajo la acción de la fuerza peso y viaja con velocidad uniforme en dirección horizontal, al mismo tiempo, que experimenta hacia abajo una caída libre.

La aceleración resultante es

$$\vec{a} = \vec{a}_x + \vec{a}_y \quad \Rightarrow \quad \vec{a} = \vec{g}$$

La velocidad en cada instante es

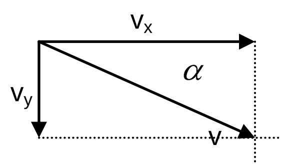
$$\vec{v} = \vec{v}_x + \vec{v}_y\,, \ (v_x = v_0;\ v_y = gt).$$

El valor de esta velocidad instantánea es

$$v = \sqrt{v_x^{\,2} + v_y^{\,2}}$$

y su dirección la indicamos con α

$$\hat{\alpha} = \operatorname{arctg}\frac{v_y}{v_x}$$



Los puntos por los que pasa el proyectil están dados por $P = (x;y)$ con

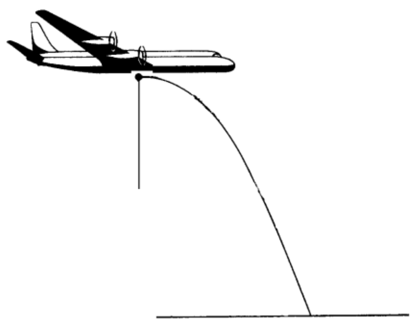
$$x = v_0 t \qquad \text{e} \qquad y = \frac{1}{2}gt^2.$$

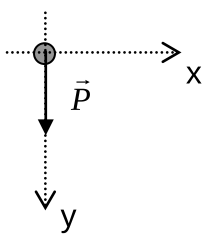
La trayectoria es parabólica, su ecuación es $y = \frac{g}{2.v_o^{\,2}}x^2$

Ejemplo

Un avión de rescate en Alaska deja caer un paquete de provisiones a un grupo de exploradores extraviados, como se muestra en la figura. Si el avión viaja horizontalmente a 40 m/s y a una altura de 100 m sobre el suelo

a) ¿Dónde cae el paquete en relación con el punto en que se soltó?
b) ¿Cuáles son las componentes horizontal y vertical de la velocidad del paquete justo antes de que golpee el suelo?





a) $y = \frac{1}{2}gt^2 \quad \Rightarrow \quad t = 4{,}52s \qquad \Rightarrow \qquad x = v_0 t \quad \Rightarrow \quad x = 180{,}8m$

b) $v_x = 40\frac{m}{s} \qquad v_y = gt \quad \Rightarrow \quad v_y = 44{,}30\frac{m}{s}$

Según un observador en el suelo, el paquete viaja a lo largo de la trayectoria parabólica indicada. ¿Cuál es la trayectoria del paquete para un observador en el avión (suponiendo que éste se mueve con velocidad constante)?

Problemas

Suponemos despreciable el rozamiento con el aire, salvo que se especifique lo contrario.

1. Una pelota se deja caer desde el techo de un edificio de 24 m de altura. Calcula la velocidad con la que llega al suelo y el tiempo de caída. Grafica a = f(t), v = (t) e y = f(t). R) v= 21,69 m/s t = 2,21 s

2. Una piedra se deja caer desde el reposo, a una altura H. Cuando está a 16 m sobre el terreno, su velocidad es de 12 m/s.
   a) Calcula la velocidad de la piedra cuando choca con el piso. R) v = 21,4 m/s
   b) Calcula la altura H. R) H = 23,35 m
   c) Encuentra el tiempo que la piedra estuvo en el aire. R) t = 2,18 s

3. Una pelota se arroja hacia abajo con una velocidad de 12 m/s desde una ventana a 36m sobre el terreno. a)¿A qué distancia del suelo se encuentra la pelota después de 1,25 s y cuál es su velocidad en ese instante? b)¿Con qué velocidad caerá la pelota al suelo? R) a) 13,44 m y 24,25 m/s b) 29,15 m/s

4. Una piedra se lanza verticalmente hacia abajo desde un puente, con una velocidad inicial de 10 m/s, y pega en el agua 1,4 s después. Determina la altura del puente sobre el agua. Grafica a = f(t), v = (t) e y = f(t). R) 23,60 m

5. ¿Con qué rapidez ha de lanzarse una pelota, verticalmente hacia arriba, para que alcance una altura máxima de 4 m? R) 8,85 m/s

6. Una pelota se tira verticalmente hacia arriba con una velocidad de 16 m/s.
   a) ¿Cuál es la altura máxima que alcanza la pelota?
   b) Suponiendo que vuelve al lugar de lanzamiento, ¿cuál ha sido el tiempo de vuelo?
   c) ¿Cuáles son los instantes en que la pelota tiene una rapidez de 10 m/s?
   d) ¿Con qué velocidad regresa al punto de lanzamiento?
   e) Grafica: a = f(t), v = f(t), y = f(t).
   R) a) 13,06 m b) 3,26 s c) 0,612 s y 2,653 s d) 16 m/s (vertical descendente)

7. Una pelota es lanzada verticalmente hacia arriba con una velocidad de 40 m/s desde una ventana de un edificio. Llega a la vereda con una velocidad de 62 m/s. a) ¿A qué altura de la vereda se halla la ventana?, b) ¿qué distancia total recorre?
   R) a)114,49 m b) 277,75 m

8. Desde un helicóptero, que asciende verticalmente con una rapidez de 1,75 m/s, se cae accidentalmente una cámara fotográfica, desde una altura de 50 m. Halla el tiempo que tardará la cámara en llegar al suelo y la velocidad con que llega.
   R) t = 3,38 s v= (0;-31,36 m/s)

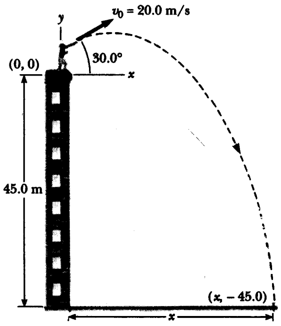
9. Un paracaidista, se deja caer desde un helicóptero y desciende 50 m sin fricción con el aire. Cuando se abre el paracaídas se retarda su caída a razón de 2 m/s^2, alcanzando el suelo con una velocidad de 3m/s.
   a) ¿Cuánto tiempo está en el aire? R) 17,3 s
   b) ¿A qué altura estaba el helicóptero cuando salió el paracaidista? R) 292,75 m

10. Desde un puente de 44 m de altura se deja caer una piedra. Después de 1,5 s se lanza verticalmente hacia abajo una segunda piedra y ambas chocan simultáneamente con la superficie del agua.
    a) ¿Cuál fue la rapidez inicial de la segunda piedra? R) a) 22 m/s
    b) Grafica: a = f(t), v = f(t) , y = f(t) para ambas piedras.

11. Se lanza un cuerpo con una velocidad de 100 m/s formando un ángulo de 30º por encima de la horizontal. Calcula:
    a) La altura máxima que alcanza, con respecto al punto de lanzamiento. R) 127,5 m
    b) El alcance máximo. R: 884 m
    c) La posición y la velocidad a los 3 s y a los 7 s de ser lanzado.
       R: P_{3s} = (259,8; 105,9) m P_{7s} = (606,2; 109,9) m
       v_{3s} = (86,6; 20,6) m/s v_{7s} = (86,6; -18,6) m/s

12. Una pelota resbala por un tejado que forma un ángulo de 30º con la horizontal y al llegar al extremo cae con una rapidez de 10m/s. La altura del edificio es de 60 m. Calcula:
    a) la velocidad al tocar el suelo R: $\bar{v} =$ (8,66 ; 34,66) m/s
    b) el tiempo empleado en caer R: t = 3,026 s
    c) el alcance horizontal con que llega al suelo. R: 26,20 m

13. Un niño quiere lanzar una pelota para que pase justo por encima de un edificio de 40 m de altura, situado a 20 m de distancia. Para esto lanza la pelota con una rapidez de 40 m/s y una inclinación de 45º. La pelota abandona la mano a una altura de 1,2 m del suelo. Determina si la pelota pasa por encima del edificio. En caso afirmativo ¿a qué altura por encima del edificio lo hará?. En caso negativo ¿a qué altura chocará con el edificio? R: No pasa por encima del edificio, choca a los 18,73 m de altura



14. Desde la terraza de un edificio se lanza una piedra hacia arriba formando un ángulo de 30º con la horizontal y con una velocidad inicial de 20 m/s como se ve en la figura. Si la altura del edificio es de 45 m, ¿cuánto tiempo permanece la piedra "en vuelo"?, ¿dónde golpea la piedra el suelo? (Respuestas: 4,22 s y 73 m a partir de la base del edificio)

15. Un buzo sale de un trampolín de 4 m de alto con una velocidad de 8 m/s y un ángulo de 30º arriba de la horizontal.
    a) ¿Cuál es la altura máxima del buzo sobre el agua?
    b) ¿Qué tan lejos de un punto situado directamente abajo del borde del trampolín chocará el buzo con el agua?

16. Un bombero a 50 m de un edificio en llamas dirige un chorro de agua de una manguera con un ángulo de 30º sobre la horizontal. Si la velocidad inicial de la corriente es de 40m/s ¿a qué altura el agua incide en el edificio?. Determina si al incidir ya había logrado o no alcanzar la altura máxima.

17. Un avión bombardero que vuela horizontalmente a 600 km/h suelta una bomba de 50 kg cuando se encuentra a una altura de 800 m. Determina:
    a) la velocidad de la bomba cuando empieza a caer R: $\bar{v} =$ (166,67 ; 0) m/s
    b) la velocidad cuando se halla en la mitad de su caída R: $\bar{v} =$ (166,67 ; 88,54) m/s
    c) la velocidad cuando llega a tierra R: $\bar{v} =$ (166,67 ; 125,22) m/s

18. Un objeto se deja caer desde el reposo. Si el tiempo durante el cual cae se duplica, la distancia de caída:
    a) se duplica
    b) se reduce a la mitad
    c) se multiplica por cuatro
    d) se divide por cuatro

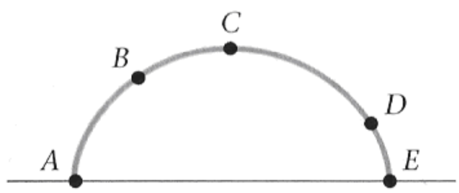
Selecciona la respuesta correcta y justifica.

19. Un estudiante que está en lo alto de un edificio de altura h, lanza una pelota hacia arriba con una rapidez v_0 y luego lanza otra pelota hacia abajo con la misma velocidad inicial. ¿Cómo se comparan las velocidades finales de las pelotas cuando llegan al suelo?

20. Una pelota es lanzada hacia arriba por un pasajero que está a bordo de un tren que se mueve con velocidad constante. Describe la trayectoria de la pelota vista por el pasajero y vista por un observador estacionario fuera del tren.

21. ¿Verdadero o falso?: Cuando un proyectil se dispara horizontalmente tarda el mismo tiempo en llegar al suelo que un proyectil que se ha dejado caer desde la misma altura. Justifica.

22. La figura representa la trayectoria parabólica de piedra que va de A a E.



a) ¿En qué punto/s la aceleración es vertical y hacia abajo?
b) ¿En qué punto/s la aceleración es cero?
c) ¿En qué punto/s el valor de la velocidad es máximo?
d) ¿En qué punto/s el valor de la velocidad es mínimo?
e) ¿En qué dos puntos el valor de la velocidad es el mismo? ,¿es la velocidad vectorial la misma en esos puntos?

ESTÁTICA

Hasta este momento nos hemos ocupado exclusivamente de estudiar el movimiento de una sola **partícula**. Más adelante vamos a estudiar el movimiento de un **cuerpo rígido**.
Un cuerpo rígido es una combinación de un gran número de partículas que ocupan posiciones fijas unas respecto de otras. Un cuerpo rígido es un objeto extendido que no puede deformarse aplicando fuerzas. Un volumen de agua líquida no es un cuerpo rígido, pero el hielo que se forma si el agua se congela sí lo es.
El concepto de cuerpo rígido es una idealización ya que, en realidad, las partículas (átomos y moléculas) de un sólido vibran constantemente. No obstante, la mayoría de los sólidos pueden considerarse como rígidos para el análisis de sus movimientos.
En los capítulos que siguen veremos que los cuerpos rígidos pueden rotar, además de trasladarse, aunque el estudio del movimiento de los mismos queda para después.
En este capítulo nos restringiremos a establecer las condiciones de equilibrio del cuerpo rígido y analizar algunos casos concretos como ejercitación.

Un caso particularmente interesante de las aplicaciones de las Leyes de Newton lo constituye la **Estática**, que es la parte de la Mecánica destinada al estudio de los cuerpos que permanecen en reposo (equilibrio estático).

Todos los cuerpos que se encuentran dentro del campo gravitatorio terrestre están sometidos a las fuerzas gravitatorias por lo que si se encuentran en reposo existen otras fuerzas que equilibran las gravitatorias. Estas fuerzas son provistas a los cuerpos por los vínculos. Un ejemplo de esto lo tenemos cuando un cuerpo en reposo se encuentra sobre una mesa; ésta es el vínculo que limita su desplazamiento vertical.
En general diremos que vínculo es todo aquello que limita el movimiento de los cuerpos y nuestra tarea es calcular la fuerza que hacen los vínculos para sostener a los cuerpos.

Para resolver las reacciones de vínculo (fuerzas que hacen los vínculos en reacción a las acciones que hacen los cuerpos sobre ellos) en el caso de cuerpos puntuales basta aplicar las leyes de Newton, sabiendo que en la condición de reposo la aceleración vale cero, por lo que:

$$\sum \overline{F} = \overline{O}$$

Realizando el diagrama de cuerpo libre y aplicando la ecuación vectorial anterior se obtiene el valor de las reacciones de vínculo.

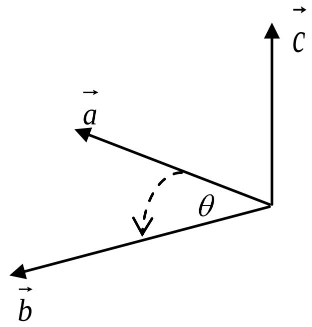
La ecuación anterior es suficiente si se trata de casos que pueden ser reducidos a partículas, es decir cuando el cuerpo, aunque sea extenso, las fuerzas que actúan sobre él son concurrentes.
Si el sistema de fuerzas no es concurrente se debe agregar a la ecuación anterior otra que tiene que ver con la rotación del cuerpo.
Cuando se ejerce una fuerza sobre un cuerpo rígido y se modifica su movimiento de rotación, el origen de este cambio es el torque o momento de la fuerza.

Torque o Momento de una fuerza con respecto a un punto

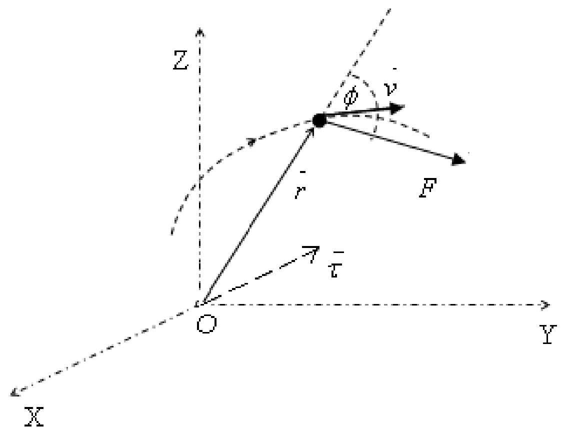
Para definir el torque usaremos *producto vectorial* entre dos vectores:

Dados dos vectores cualesquiera $\vec{a}$ y $\vec{b}$, *se define el producto vectorial* $\vec{a} \wedge \vec{b}$ *como un tercer vector* $\vec{c}$ *cuyo módulo es:* $a\,b\,\mathrm{sen}\,\theta$, *donde* θ *es el ángulo formado entre los vectores* $\vec{a}$ y $\vec{b}$

La dirección del vector $\vec{c}$ *es perpendicular al plano formado por los vectores* $\vec{a}$ y $\vec{b}$ *y su sentido está determinado por la regla de la mano derecha, la cual consiste, en que los cuatro dedos de dicha mano, apuntan a lo largo del vector* $\vec{a}$ *y luego se enrollan hacia el vector* $\vec{b}$ *a través del ángulo* θ. *La dirección del pulgar extendido es el sentido del vector* $\vec{c}$



Imaginemos una partícula que describe una trayectoria cualquiera en el espacio y sobre la cual actúa una fuerza $\vec{F}$, según muestra la figura



Definimos el **Torque** o **Momento de la fuerza** $\vec{F}$ **con respecto al punto O** y lo simbolizamos $\bar{\tau}$, como el producto vectorial entre los vectores posición y fuerza

$$\boxed{\vec{\tau} = \vec{r} \wedge \vec{F}}$$

Módulo: $\tau = r\,F\,\mathrm{sen}\,\phi$, donde ϕ es el ángulo comprendido entre $\vec{r}$ y $\vec{F}$

Dirección: perpendicular al plano determinado por las direcciones de $\vec{r}$ y $\vec{F}$

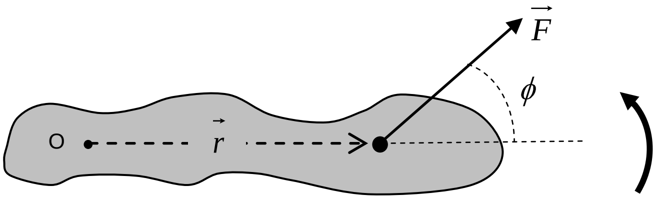
Sentido: regla de la mano derecha.

$$[\tau] = m\,N = m\,\frac{kg\,m}{s^2} = kg\;m^2\,s^{-2}$$

El torque es una magnitud vectorial.

Ejemplo

Consideremos el objeto rígido, fijo a un punto O, como muestra la figura. Cuando se le aplica una fuerza $\vec{F}$, formando un ángulo ϕ con la horizontal, el objeto gira alrededor de un eje perpendicular al plano del dibujo y que pasa por el punto O.



El momento o torque de la fuerza con respecto al centro de rotación es $\vec{\tau} = \vec{r} \wedge \vec{F}$, siendo:

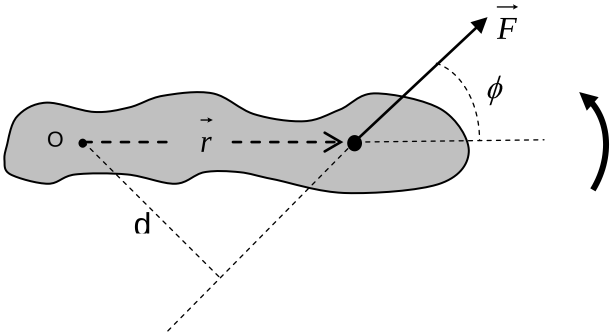
Módulo: $\tau = r\,F\,\mathrm{sen}\,\phi$, ($\phi$ es el ángulo comprendido entre $\vec{r}$ y $\vec{F}$)

Dirección: perpendicular al plano determinado por las direcciones de $\vec{r}$ y $\vec{F}$

Sentido: regla de la mano derecha.

Analizando $\tau = r\,F\,\mathrm{sen}\,\phi$ resulta:

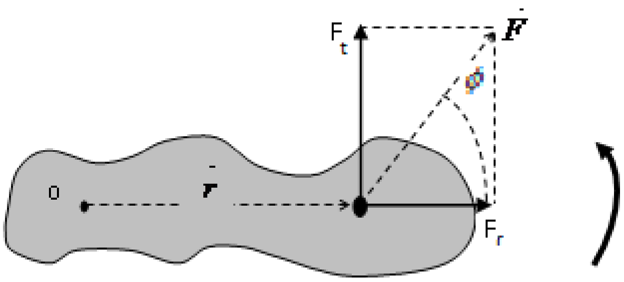
I) $r\,\mathrm{sen}\,\phi = d$ (brazo de momento o brazo de palanca)



Por lo tanto podemos expresar el valor del momento de una fuerza con respecto al centro de rotación, como el producto entre el módulo de la fuerza, multiplicado por la distancia perpendicular desde el centro de rotación hasta la línea de acción de la fuerza:

$$\boxed{\tau = F.d}$$

II) $F sen\phi = F_t$ (componente perpendicular a la dirección de r)



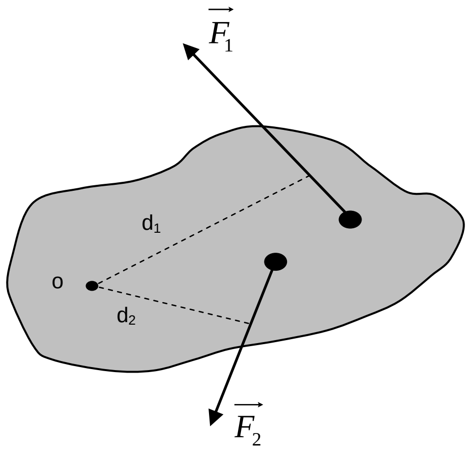
Esta componente de la fuerza es la única que tiende a producir rotación alrededor de O. La componente $F_r = F\cos\phi$ debido a que su dirección pasa por O, no produce rotación. Por lo tanto también podemos expresar el momento como el producto entre la componente de la fuerza perpendicular a r y dicha distancia.

$$\boxed{\tau = F_t \, . \, r}$$

Si sobre un objeto rígido actúa más de un torque, el momento o **torque resultante** está dado por:

$$\boxed{\bar{\tau}_{neto} = \sum \bar{\tau}_i}$$

En la figura siguiente $\overrightarrow{F_2}$ hace rotar el objeto, alrededor del centro O, en el sentido de las agujas del reloj y $\overrightarrow{F_1}$ lo hace rotar en sentido contrario.



Usaremos una convención asignándole al momento que produce una rotación en el mismo sentido que las agujas del reloj un signo positivo y el signo contrario al que produce una rotación en sentido opuesto.

De esta forma el momento neto o resultante alrededor de O resulta:

$$\tau_{Neto} = -F_1 \,.\, d_1 + F_2 \,.\, d_2$$

Condiciones de equilibrio del cuerpo rígido

Por definición una partícula puede tener solo movimiento de traslación. Si la resultante de las fuerzas que actúan sobre una partícula es cero, la partícula está moviéndose con velocidad constante o está en reposo; en este último caso se dice que está en equilibrio estático. Pero el movimiento de un cuerpo rígido, en general, es de traslación y de rotación. En este caso, si la resultante tanto de las fuerzas como de los torques que actúan sobre el cuerpo rígido es cero, el cuerpo está en reposo, está en equilibrio estático.

Para que un cuerpo rígido esté en equilibrio estático se deben cumplir dos requisitos simultáneamente, llamados condiciones de equilibrio. La primera condición de equilibrio es la Primera Ley de Newton, que garantiza el equilibrio de traslación. La segunda condición de equilibrio, corresponde al equilibrio de rotación, se enuncia de la siguiente forma: “la suma vectorial de todos los torques externos que actúan sobre un cuerpo rígido alrededor de cualquier origen es cero”. Esto se traduce en las siguientes dos ecuaciones, consideradas como las condiciones de equilibrio de un cuerpo rígido:

1ra Condición de equilibrio:

$$\sum \overline{F} = \overline{O}$$

2da Condición de equilibrio:

$$\sum \overline{\tau} = \overline{O}$$

Como estas ecuaciones vectoriales son equivalentes a seis ecuaciones escalares, resulta un sistema final de seis ecuaciones con seis incógnitas, por lo que limitaremos el análisis a situaciones donde todas las fuerzas que actúan sobre un cuerpo rígido, están en el plano xy, donde también obviamente se encuentra r.
Con esta restricción se tiene que tratar sólo con tres ecuaciones escalares, dos de la primera condición de equilibrio y una de la segunda, entonces el sistema de ecuaciones vectoriales se reduce a las siguientes ecuaciones escalares:

$$\sum F_x = 0, \quad \sum F_y = 0, \quad \sum \tau_O = 0$$

Cuando se tratan problemas con cuerpos rígidos se debe considerar la fuerza de gravedad o peso del cuerpo, e incluir en los cálculos el torque producido por su peso. Para calcular el torque debido al peso, se puede considerar como si todo el peso estuviera concentrado en un solo punto, llamado centro de gravedad.

Centro de gravedad

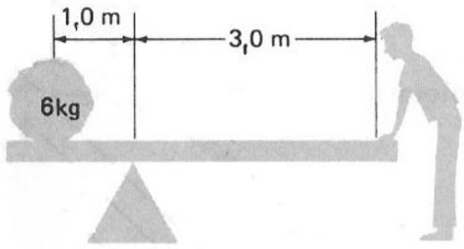
Debido a que un cuerpo es una distribución continua de masa, en cada una de sus partes actúa la fuerza de gravedad. El centro de gravedad es la posición donde se puede considerar actuando la fuerza de gravedad neta, es el punto ubicado en la posición promedio donde se concentra el peso total del cuerpo. Para un objeto simétrico homogéneo, el centro de gravedad se encuentra en el centro geométrico, pero no para un objeto irregular.

Para aplicar las condiciones de equilibrio, es recomendable seguir las siguientes instrucciones:

a) Dibujar el diagrama de cuerpo libre del sistema en estudio.
b) Dibujar los vectores que representen las fuerzas en el punto de aplicación donde las fuerzas efectivamente actúan.
c) Elegir un sistema de coordenadas conveniente para descomponer las fuerzas, donde dibujar la componente perpendicular a la posición.
d) Elegir un eje de rotación O adecuado en el cuerpo rígido, donde se anulen los torques de (algunas) fuerzas desconocidas.

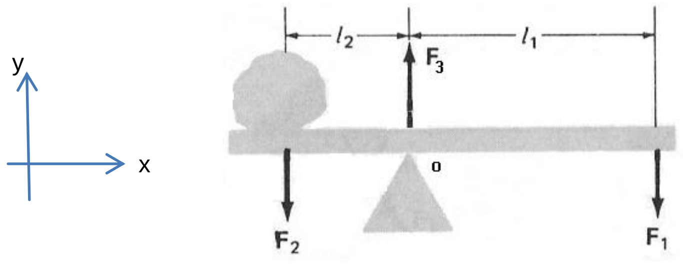
Ejemplo

¿Qué fuerza debe ejercer una persona para equilibrar el sistema representado en la figura? El sistema consiste en una barra de peso despreciable sobre la que se apoya una piedra de 6 kg en uno de sus extremos, como se muestra en la figura



Las fuerzas que actúan sobre la barra son:

- La fuerza F_1 que ejerce la persona sobre la barra
- La fuerza F_2 = 58,8 N que ejerce la piedra sobre la barra
- La fuerza F_3 que ejerce el apoyo sobre la barra



Para que el sistema se encuentre en equilibrio, se deben cumplir las dos condiciones de equilibrio, el equilibrio de traslación y el de rotación

De acuerdo con la primera condición de equilibrio y como todas las fuerzas son verticales, resulta:

$$\sum F_x = 0$$

$$\sum F_y = F_3 - F_2 - F_1 = 0$$

De acuerdo con la segunda condición de equilibrio, la suma de los torques alrededor de cualquier eje debe ser cero

$$\sum \bar{\tau} = \bar{0}$$

Si tomamos los torques alrededor del eje que pasa por O, el torque de la fuerza F_3 es nulo, F_2 da lugar a un torque de sentido antihorario (le corresponde signo positivo, según el convenio adoptado) y la fuerza F_1 da lugar a un torque de sentido horario (signo negativo, según convenio)

$$\sum \bar{\tau}_O = \bar{\tau}_{O_{F_3}} + \bar{\tau}_{O_{F_2}} + \bar{\tau}_{O_{F_1}} = \bar{0} \qquad \Rightarrow \qquad \sum \tau_O = 0 + F_2 l_2 + (-F_1 l_1) = 0 \qquad \Rightarrow$$

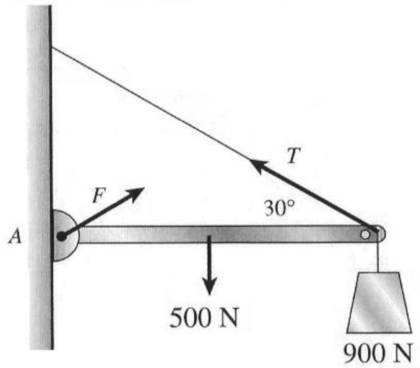
$$\Rightarrow \quad \frac{F_2 l_2}{l_1} = F_1$$

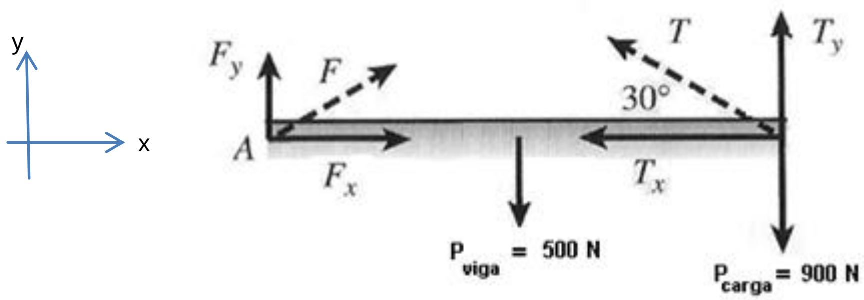
Reemplazando, obtenemos el valor de la fuerza que debe ejercer la persona para equilibrar el sistema $F_1 = \dfrac{58{,}8N.1m}{3m} = 19{,}6N$

Si queremos saber el valor de la fuerza F_3 que ejerce el apoyo sobre la barra, reemplazamos en $\sum F_y = F_3 - F_2 - F_1 = 0$ y resulta F_3 = 78,4 N

Ejemplo

Una viga uniforme de 500 N y 3 m de longitud está sostenida por un cable, como se observa en la figura. La viga se apoya en la pared a través de un pivote y el cable forma un ángulo de 30º con respecto a la viga, que está en posición horizontal. Si una carga de 900 N se cuelga del extremo derecho, ¿cuál es la tensión $\bar{T}$ del cable?, ¿cuáles son las componentes horizontal y vertical de la fuerza ejercida por el pivote?





(1) $\Sigma \overline{F}_x = \overline{0} \quad \Rightarrow \quad F_x - T_x = 0$

(2) $\Sigma \overline{F}_y = \overline{0} \quad \Rightarrow \quad F_y + T_y - P_{viga} - P_{c\arg a} = 0$

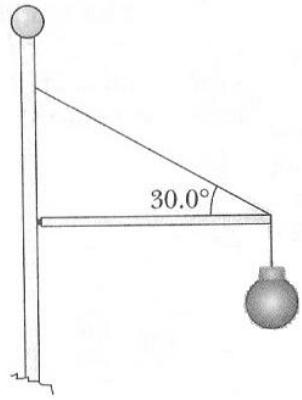
(3) $\sum \overline{\tau}_A = \overline{0} \quad \Rightarrow \quad \overline{\tau}_{AF_x} + \overline{\tau}_{AF_y} + \overline{\tau}_{AP_{viga}} + \overline{\tau}_{AP_{carga}} + \overline{\tau}_{AT_x} + \overline{\tau}_{AT_y} = \overline{0} \quad \Rightarrow$

$$\Rightarrow \quad 0+0+\left(-P_{viga}\frac{l}{2}\right)+\left(P_{c\arg a}\, l\right)+0+T_y l = 0 \quad \Rightarrow \quad T_y = 1150N$$

Como $T_y = Tsen30°$, resulta $T = 2300N$

Trabajando las ecuaciones **(1)** y **(2)** obtenemos $F_x = T_x = T\cos 30° = 1992N$ y $F_y = 250N$

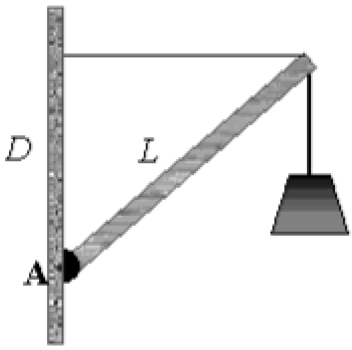
Ejercicio 1



Una luminaria de 20 kg de un parque está sostenida en el extremo de una viga horizontal de masa despreciable que está unida a un poste por medio de una bisagra, como se ve en la figura. Un cable a 30º ayuda a sostener la lámpara. Encuentra:

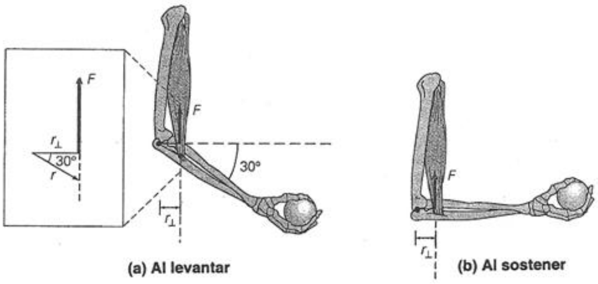
a) La tensión en el cable
b) Las fuerzas horizontal y vertical ejercidas sobre la viga por el poste.

Ejercicio 2
Una barra uniforme de longitud L= 5m y peso 50 N está articulada en A en una pared. Un alambre fijo en la pared a una distancia D= 4m sobre la articulación, sujeta a la barra por el extremo superior, como se muestra en la figura. El alambre permanece horizontal cuando se cuelga un cuerpo de peso 10 N en el extremo superior de la barra. Calcula la tensión del alambre y la fuerza de reacción en la articulación de la barra.



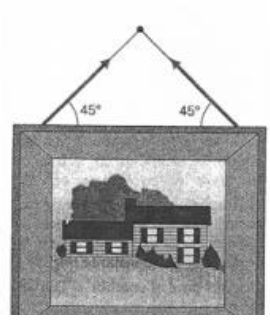
Problemas de aplicación

1) Calcula los siguientes torques, sabiendo que el músculo ejerce en ambos casos una fuerza de 600 N. El eje de rotación pasa a través de la articulación y el músculo está fijo a 4 cm de la articulación

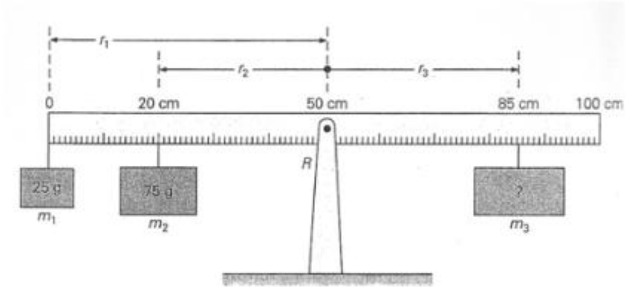


(a) Al levantar (b) Al sostener

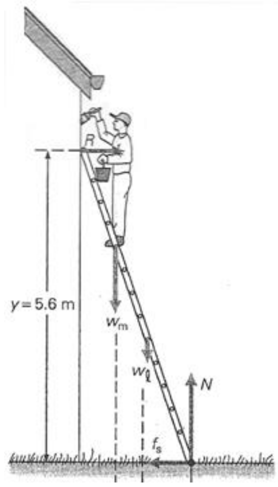
2) Un cuadro cuelga sobre una pared como muestra la figura. Si tiene una masa de 5 kg, ¿cuál es la tensión en cada uno de los cables que lo sostienen?



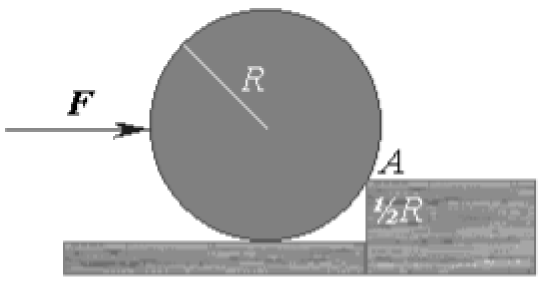
3) Tres masas (m_1 = 25 g, m_2 = 75 g y m_3) están suspendidas de una regla métrica como se muestra en la figura ¿Cuál es la masa que debe estar suspendida del lado derecho para mantener el sistema en equilibrio estático?
r_1 = 50 cm, r_2 = 30 cm y r_3 = 35 cm



4) Una escalera de 15 kg descansa contra una pared lisa. Un pintor de 78 kg está de pie sobre la escalera como se ve en la figura. ¿Qué fuerza friccional debe actuar en la base de la escalera para evitar que ésta resbale?



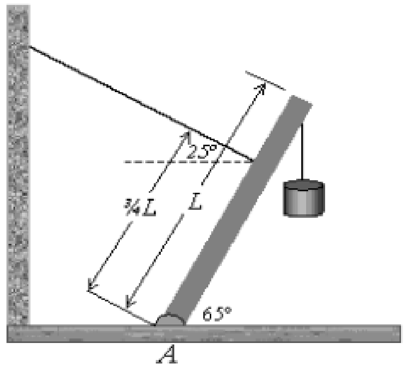
5) En el sistema de la figura, una fuerza horizontal F, cuya línea de acción pasa por el centro de un tambor de radio R y peso P, se aplica sobre el tambor, para hacerlo subir por un escalón de alto R/2. Hacer las



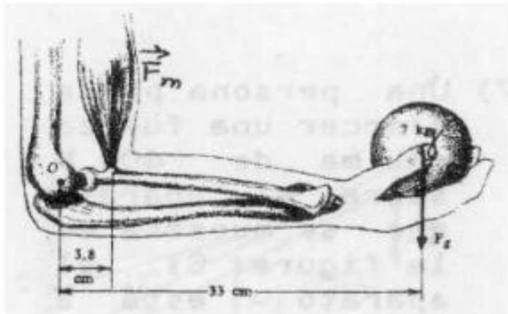
suposiciones necesarias para calcular el valor de la: a) fuerza F, b) fuerza del borde del escalón en A, c) dirección de la fuerza en A

6) Un tablón uniforme de 6m de longitud y 30kg de masa, descansa horizontalmente sobre un andamio. Si 1.5m del tablón sobresale por un extremo del andamio. ¿Cuánto puede caminar un pintor de brocha gorda de 70kg por la parte sobresaliente antes de que el tablón se vuelque? R: 0.64 m.

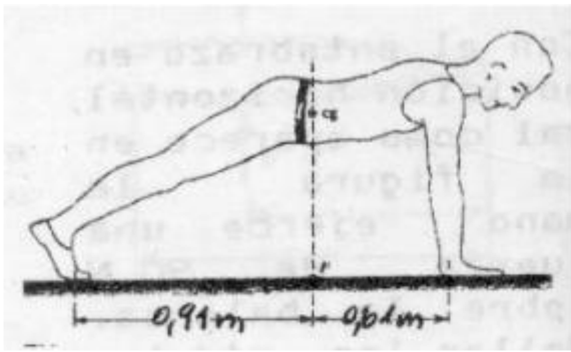
7) Un poste uniforme de 1200 N se sostiene por un cable, como en la figura. El poste se sujeta con un perno en A la parte inferior y en la parte superior se cuelga un cuerpo de 2000 N. Encuentre la tensión en el cable de soporte y las componentes de la fuerza de reacción en el perno en A. R: 1465 N, (1328î + 2581j) N



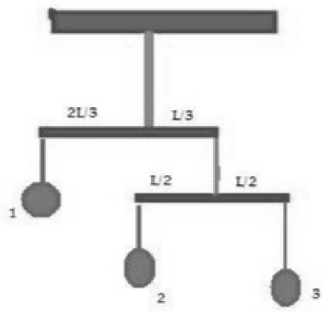
8) El antebrazo de la figura, está con respecto al brazo a 90ºy sostiene en la mano un cuerpo de peso 70 N. Despreciando al peso del antebrazo: ¿Cuál es el torque producido por el peso de 70N alrededor de la articulación del codo (punto O)? ¿Cuál es el torque alrededor de O producido por la fuerza F_m ejercida sobre el antebrazo por el bíceps? ¿Cuál es la magnitud de Fm?



9) La figura nos muestra un atleta preparado para hacer un salto. Pesa 750N y su centro de gravedad está localizado por encima de un punto P que hay en el suelo. Este punto está a 0,9 m de la punta de sus pies y a 0,6m de sus hombros, ¿Cuáles son las fuerzas ejercidas por el suelo sobre las manos y pies del atleta?



10) El móvil de la figura está colgado en equilibrio. Este consiste de objetos suspendidos por hilos verticales. El objeto 3 pesa 1,40N,y cada una de las barras horizontales pesa 0,50N, siendo idénticas y de densidad constante.
Calcular: El peso de los objetos y la tensión en el hilo superior
R: 1525 N; 1,40 N; 5,325 N
NO BORRAR ESTE SALTO DE PÁGINA QUE ES LO



QUE PERMITE HACER FOTOCOPIAS DOBLE FAZ