Unidad 4 / Escenario 8

Lectura Fundamental

Aplicando conceptos y procesos del álgebra lineal

Contenido

1. Palabras claves

Vectores, Espacios vectoriales, Transformaciones lineales, Valores y vectores propios.

2. Introducción

A lo largo del módulo se han abordado los conceptos básicos del álgebra lineal y dentro del proceso se han expuesto contextos e ideas con el fin de asociar los conocimientos a situaciones de la vida real, e identificar así la forma en que se puede estructurar el pensamiento para alcanzar un nivel de aplicabilidad más profundo de los temas. Un elemento importante en todo proceso de aprendizaje consiste en reconocer qué se ha aprendido, y esto plantea los siguientes interrogantes:

1. ¿Cuáles conceptos se abordaron y cómo se aplican en la cotidianidad?
2. ¿Qué tanto se recuerda del conocimiento visto y cómo se evidencia si el recuerdo es válido?
3. ¿Qué estrategias se pueden emplear para recuperar lo olvidado?

Responder estos cuestionamientos es el objetivo de esta lectura y para ello se presentarán tres secciones donde se retomarán los principales conceptos del módulo, a partir de los cuales se darán las pautas para mejorar los procesos de aprendizaje que el lector emplea para aprender el álgebra lineal.

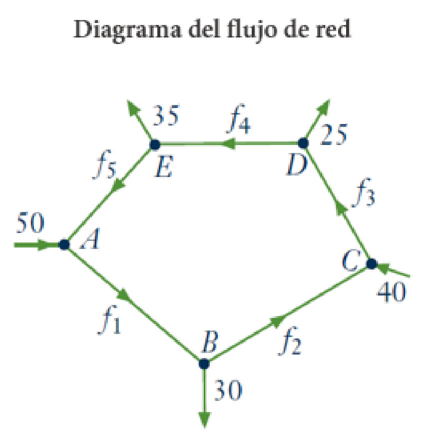
3. Aplicando lo aprendido

3.1. Objetos del álgebra lineal y su uso en la representación de información

Los objetos básicos del álgebra lineal que se expusieron en este módulo correspondieron a matrices, n-úplas, polinomios y funciones y a partir de situaciones se mostró cómo se podían emplear para organizar y representar información de un contexto, una situación o un problema. Para verificar su adecuada apropiación y comprensión, a continuación se recordarán tanto los objetos como su uso.

Contexto 1: Uso de la representación matricial

Los flujos de red son ampliamente utilizados en múltiples situaciones de la vida real (redes de internet, redes de trabajo, redes sociales, redes de autopistas con entradas y salidas, redes de circuitos, entre otros) y se fundamentan en el principio de que el flujo total de entrada al sistema de la red debe ser igual al de salida. La figura 1 expone un flujo de red, ¿se podría representar esta información de forma que se identifique el comportamiento del flujo bajo el principio establecido? La respuesta es sí y se logra por medio de representaciones matriciales como se muestra a continuación:



Representación del flujo de red

$$\begin{array}{ll} \text{Punto } A & 50 + f_5 = f_1 \\ \text{Punto } B & f_1 = 30 + f_2 \\ \text{Punto } C & 40 + f_2 = f_3 \\ \text{Punto } D & f_3 = 25 + f_4 \\ \text{Punto } E & f_4 = 35 + f_5 \end{array}$$

$$\downarrow$$

Representación del sistema

$$\begin{array}{rcrcrcrcrcr} -f_1 & & & & & & & + & f_5 & = & -50 \\ f_1 & - & f_2 & & & & & & & = & 30 \\ & & f_2 & - & f_3 & & & & & = & -40 \\ & & & & f_3 & - & f_4 & & & = & 25 \\ & & & & & & f_4 & - & f_5 & = & 35 \end{array}$$

Figura 1. **Flujo de red**.
*Fuente:*Nicholson, W.K.(2013). Flujos de red. En Linear algebra with Applications (p.27)7^{th} ed. United States of America

Con lo anterior, se puede representar el sistema lineal por medio de representaciones matriciales de la siguiente manera:

$$\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} f_1 \\ f_2 \\ f_3 \\ f_4 \\ f_5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -50 \\ 30 \\ -40 \\ 25 \\ 35 \end{pmatrix}$$

Contexto 2: Uso de n-uplas para representar información

En un proceso de producción o fabricación intervienen factores como el maquinado, lo electrónico, la puesta a punto y las pruebas, entre muchos otros. Estos elementos, según el aspecto que se desee analizar y determinar de ellos, se pueden representar a través de n-uplas.

Para verificar que se comprende la anterior idea, suponga que se van a fabricar televisores y que de los factores mencionados se quiere identificar el tiempo que estará cada televisor en maquinado, en constitución electrónica, en puesta a punto y en prueba, para luego sacar el costo de producción según el tiempo requerido en la fabricación. En este caso el tiempo es la variable pero en cada factor será diferente, por lo que la información se puede expresar de forma explícita con la 4-upla $u = (x_1, x_2, x_3, x_4)$ donde:

x_1: es el tiempo que estará cada televisor en el proceso de maquinado.
x_2: es el tiempo que estará cada televisor en el proceso de constitución electrónica.
x_3: es el tiempo que estará cada televisor en el proceso de puesta a punto.
x_4: es el tiempo que estará cada televisor en el proceso de prueba.

u: contiene los tiempos requeridos en la fabricación de cada televisor en el maquinado, la constitución electrónica, la puesta a punto y la prueba.

Contexto 3: Uso de polinomios en la representación de información

El cableado de algunos puentes colgantes tiene forma parabólica la cual está asociada a una expresión de tipo polinómica. En la figura 2 se aprecia la forma del cable de un puente de estos, que de acuerdo con las dimensiones y características de resistencia y sostenimiento, entre muchas otras, se puede expresar como un polinomio de grado dos de la siguiente forma:

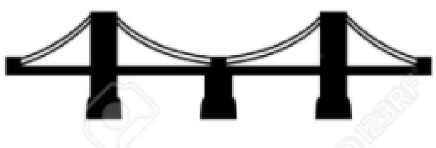
Forma parabólica de algunos puentes colgantes	**Representación polinómica del cable del puente entre las torres**
	$p(x) = \frac{w}{2T_1}x^2 + b$ w: es el peso por unidad de longitud del puente que se asume constante. T_1: es la tensión en el punto más bajo del puente. b: es la distancia vertical más baja del cable que indica el vértice de la parábola. Las torres son las líneas verticales azules que se aprecian en la figura 2.

Figura 2. **Representación matemática puente colgante**.
*Fuente:*Dusan Loncar. (2017). Recuperado de https://goo.gl/rjgocy

Contexto 4: Uso de funciones no polinómicas en la representación de información

Una batería de una cantidad conocida de voltios que está conectada a una serie de circuitos en el cual la inductancia y resistencia estan dadas, y tiene una representación por medio de funciones que permite determinar la corriente en cualquier instante y suelen ser de la forma $i(t) = \frac{E_0}{R} + ce^{-\frac{R}{L}t}$ donde R, L y E son valores conocidos que corresponden a la inductancia, la resistencia y el voltaje impreso sobre el circuito, mientras c es una constante que se determina con unas condiciones dadas sobre el sistema.

Con estas ideas, es deber del lector comenzar a ejercitar su mente para identificar en su entorno personal o laboral cómo representar información con objetos del álgebra lineal, y para ello se recomienda seguir un proceso como el siguiente:

- Identificar las variables que intervienen en el contexto, situación o problema y simbolizarlas.

- Establecer y escribir relaciones entre las variables. En matemáticas las relaciones son igualdades o desigualdades.
- Asociar la relación establecida con los objetos del álgebra lineal y reescribirlos con dicho lenguaje.

A partir de las relaciones establecidas, que serán sistemas de ecuaciones lineales, sumas o productos entre n-uplas, polinomios o funciones, se hace necesario recordar los procesos de resolución u operación aprendidos, con el fin de encontrar una solución o un camino de estudio del contexto, situación o problema que se desee abordar. Para afianzar los conocimientos, se recomienda hacer el ejercicio que se expone en esta lectura y que consiste en hacer resúmenes de lo aprendido.

Habiendo identificado el amplio uso que tienen los objetos del álgebra lineal en la representación de información en la vida real, el paso a seguir consiste en analizar, como conjunto, a todos los elementos que posean las mismas características, con el fin de determinar: si con algunos de ellos se pueden generar objetos del mismo tipo o de otro, qué acciones (que para el caso de las matemática se entiende como qué operaciones) se pueden hacer con ellos y cómo se podrían establecer esos elementos, lo cual concierne a todo lo aprendido en la unidad de espacios vectoriales.

3.2. Espacios vectoriales, sus derivados e importancia en el establecimiento de conjuntos que representan información

Al considerar los conjuntos de matrices, n-uplas, polinomios o funciones que representan un contexto, situación o problema, se deben responder interrogantes como:

- ¿Está definida la adición entre esos objetos?
- ¿Está definida la multiplicación escalar con dichos objetos?

Las anteriores son las acciones básicas que debe cumplir un conjunto para que tenga sentido su aplicación en la vida real, en caso de no cumplirse esas operaciones no habrá proceso alguno que se pueda hacer con ellos.

Las operaciones mencionadas son necesarias para definir un espacio vectorial, por lo que cada conjunto que se establezca deberá cumplir lo siguiente o no podrá aplicarse a contextos de la vida real.

Sea V un conjunto de objetos llamados vectores y el conjunto de los números reales junto con las operaciones de adición y multiplicación por escalar, V es un espacio vectorial si para todo u,v y w en V y todo $k, j \in R$ se satisfacen los axiomas de:

- Cerradura bajo la adición.
- Conmutativa sobre la adición de vectores.
- Asociativa de la adición de vectores.
- Existencia del vector cero como elemento neutro de la adición.
- Existencia del vector inverso como elemento anulador de la adición.
- Cerradura sobre la multiplicación por un escalar.
- Asociativa en la multiplicación por escalar.

- Distributividad respecto a la adición de vectores.
- Distributividad respecto a la adición de escalares.
- Existencia del elemento idéntico como elemento neutro de la multiplicación escalar.

Posterior a esto, el lector debe centrarse en identificar si su conjunto puede determinarse de forma más eficiente con los elementos necesarios y suficientes, que en álgebra lineal se conoce como establecer conjuntos generadores y bases. Para ello, se debe verificar lo que se expone a continuación:

- Identificar los elementos generadores y formar un conjunto con ellos.
- Tomar un elemento del espacio vectorial escrito de forma general para constatar que es posible escribirlo como una combinación lineal de los elementos del cojunto generador.
- Resolver el sistema de ecuaciones que se establece a partir de la combinación lineal del ítem anterior para identificar qué tipo de solución tiene.
- A partir de la solución establecer si el conjunto genera o no al elemento del espacio vectorial.

En caso de que el conjunto sea generador, el interés se debe orientar hacia la dependencia o independencia lineal de los elementos del conjunto generador y si se cumple la segunda opción, el conjunto será una base del espacio vectorial. El proceso para identificar independencia consiste en demostrar que la ecuación $c_1v_1 + c_2v_2 + c_3v_3 + ... + c_nv_n = 0$, se satisface unicamente sí todas las constantes c_1, c_2, $c_3, ...,$ c_n son iguales a cero.

Si se considera lo anterior y se intenta aplicar a los contextos dados en la sección anterior, ¿qué se obtendrá?

Identificando espacios vectoriales, conjuntos generadores y bases en contextos

En el caso de los flujos de red si se considera la matriz que representa cada uno de los posibles flujos que se pueden construir, ¿será que el conjunto de todas las matrices que representan un flujo de red es un espacio vectorial? Es importante tener presente que además de analizar la matriz de un flujo de red, que es un caso particular, resulta útil identificar si todas las posibles matrices cumplen los axiomas de espacio vectorial. Con ello, sería posible combinar los diferentes flujos de red del mismo tipo, permitiendo constituir redes más grandes, coherentes y aplicables a la vida real.

El conjunto que se puede conformar con la información del anterior contexto se escribe simbólicamente como:

$$M_{5\times5} = \{A_{5\times5} : a_{ij} \in \{-1, 0, 1\} \text{ con } i, j = 1, 2, 3, 4 \text{ o } 5\}$$

Note que el conjunto se denotó como $M_{5\times5}$ y está compuesto por todas las matrices A de tamaño 5×5 cuyas componentes toman el valor -1, 0 o 1.

Para la situación del proceso de producción o fabricación, en la que se representaron los tiempos necesarios para elaborar un producto en los factores de maquinado, electrónico, puesta a punto y pruebas, la información se representó con 4-uplas, y si se analiza el conjunto que se puede formar con todas las uplas de dicho tamaño, ¿será que este tendría una estructura de espacio vectorial?

La importancia de que lo sea radica en que se podría pensar en la producción de múltiples artículos por una misma empresa, con lo cual permitiría tener controlados los tiempos de producción.

El conjunto que se puede conformar a partir de este contexto se escribe simbólicamente como:

$$V = \{(x_1, x_2, x_3, x_4) : x_i \in \mathbb{R}^+ \cup 0\}$$

Note que el conjunto corresponde a todas las 4-uplas que se pueden construir clasificando los tiempos de producción en maquinado, electrónico, puesta a punto y prueba, para cualquier tipo de artículo. Es importante resaltar que los valores de las componentes están en los reales positivos porque el tiempo no puede ser una cantidad negativa.

Si se consideran las otras dos aplicaciones expuestas en la sección anterior se tendrán alternativas similares a las mencionadas, así que como parte del proceso de aprendizaje, el lector debe intentar constituir el tipo de conjunto que se formaría al pensar en todos los polinomios y las funciones asociadas a los temas mencionados, para luego establecer si cumplen las condiciones de espacio vectorial.

Para probar si son espacios vectoriales hay que verificar los axiomas mencionados, esto queda como ejercicio de práctica para el lector.

Después de haber identificado si los conjuntos son espacios vectoriales se puede ahondar en el tema buscando conjuntos generadores y bases de ellos, para lo cual se usará lo aprendido sobre las bases canónicas de los espacios vectoriales estudiados en el módulo, ya que el proceso de construir una base distinta a las indicadas implica tiempo y conocimientos más profundos del álgebra lineal.

Para el conjunto $M_{5\times5}$ cuyas componentes de la matriz toman los valores -1, 0 y 1, un posible conjunto generador sería el de todas las matrices tales que una sola de sus componentes vale 1, mientras las demás valen 0:

$$Gen(M_{5\times5}) = \left\{ \begin{pmatrix} 1&0&0&0&0\\0&0&0&0&0\\0&0&0&0&0\\0&0&0&0&0\\0&0&0&0&0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0&1&0&0&0\\0&0&0&0&0\\0&0&0&0&0\\0&0&0&0&0\\0&0&0&0&0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0&0&1&0&0\\0&0&0&0&0\\0&0&0&0&0\\0&0&0&0&0\\0&0&0&0&0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0&0&0&1&0\\0&0&0&0&0\\0&0&0&0&0\\0&0&0&0&0\\0&0&0&0&0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0&0&0&0&1\\0&0&0&0&0\\0&0&0&0&0\\0&0&0&0&0\\0&0&0&0&0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0&0&0&0&0\\0&1&0&0&0\\0&0&0&0&0\\0&0&0&0&0\\0&0&0&0&0 \end{pmatrix}, ..., \begin{pmatrix} 0&0&0&0&0\\0&0&0&0&0\\0&0&0&0&0\\0&0&0&0&0\\0&0&0&0&1 \end{pmatrix} \right\}$$

El proceso que sige es determinar si toda matriz del conjunto $M_{5\times5}$ se puede escribir como una combinación lineal de los elementos generadores y si ellos son linealmente independientes para establecerlo como una base de $M_{5\times5}$.Para esto, se considerará la matriz general $A \in M_{5\times5}$, con la condición de que cada a_{ij} es -1, 0 o 1 con i, $j = 1, 2, 3, 4$ y 5, lo cual se expresa así:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11}&a_{12}&a_{13}&a_{14}&a_{15}\\a_{21}&a_{22}&a_{23}&a_{24}&a_{25}\\a_{31}&a_{32}&a_{33}&a_{34}&a_{35}\\a_{41}&a_{42}&a_{43}&a_{44}&a_{45}\\a_{51}&a_{52}&a_{53}&a_{54}&a_{55} \end{pmatrix}$$

y se escribirá la combinación lineal para resolver el sistema y determinar si se cumple la condición de generador.

$$\begin{pmatrix} a_{11}&a_{12}&a_{13}&a_{14}&a_{15}\\a_{21}&a_{22}&a_{23}&a_{24}&a_{25}\\a_{31}&a_{32}&a_{33}&a_{34}&a_{35}\\a_{41}&a_{42}&a_{43}&a_{44}&a_{45}\\a_{51}&a_{52}&a_{53}&a_{54}&a_{55} \end{pmatrix} = c_1 \begin{pmatrix} 1&0&0&0&0\\0&0&0&0&0\\0&0&0&0&0\\0&0&0&0&0\\0&0&0&0&0 \end{pmatrix} + c_2 \begin{pmatrix} 0&1&0&0&0\\0&0&0&0&0\\0&0&0&0&0\\0&0&0&0&0\\0&0&0&0&0 \end{pmatrix} + c_3 \begin{pmatrix} 0&0&1&0&0\\0&0&0&0&0\\0&0&0&0&0\\0&0&0&0&0\\0&0&0&0&0 \end{pmatrix} + c_4 \begin{pmatrix} 0&0&0&1&0\\0&0&0&0&0\\0&0&0&0&0\\0&0&0&0&0\\0&0&0&0&0 \end{pmatrix} + ... + c_{25} \begin{pmatrix} 0&0&0&0&0\\0&0&0&0&0\\0&0&0&0&0\\0&0&0&0&0\\0&0&0&0&1 \end{pmatrix}$$

Es claro que resolver este ejercicio es bastante extenso por lo que se hace necesario usar una herramienta de software que reduzca el tiempo de cálculo, usando Mathematica, por ejemplo, se pueden obtener las respuestas.

Después de usar un software que apoye el proceso de resolución y en caso de que este arroje resultados coherentes, se dice que los elementos considerados generan la matriz A, por lo que el conjunto de todos ellos será un conjunto generador.

De una forma análoga se procede para determinar si los elementos del $Gen(M_{5\times5})$ son linealmente independientes y para ello se presentará la estructura, pero por el tamaño y la cantidad de operaciones se hace necesario volver a usar un software para resolver el sistema. Al hacer lo indicado, si el software arroja que la única forma de cumplirse la combinación escrita se tiene cuando los coeficientes $c_i = 0$ con $i = 1, 2, 3, ..., 25$ se dirá que las matrices del $Gen(M_{5\times5})$ son linealmente independientes. A continuación se presenta la estructura que tendría la combinación lineal para verificar independencia:

$$c_1 \begin{pmatrix} 1\,0\,0\,0\,0 \\ 0\,0\,0\,0\,0 \\ 0\,0\,0\,0\,0 \\ 0\,0\,0\,0\,0 \\ 0\,0\,0\,0\,0 \end{pmatrix} + c_2 \begin{pmatrix} 0\,1\,0\,0\,0 \\ 0\,0\,0\,0\,0 \\ 0\,0\,0\,0\,0 \\ 0\,0\,0\,0\,0 \\ 0\,0\,0\,0\,0 \end{pmatrix} + c_3 \begin{pmatrix} 0\,0\,1\,0\,0 \\ 0\,0\,0\,0\,0 \\ 0\,0\,0\,0\,0 \\ 0\,0\,0\,0\,0 \\ 0\,0\,0\,0\,0 \end{pmatrix} + c_4 \begin{pmatrix} 0\,0\,0\,1\,0 \\ 0\,0\,0\,0\,0 \\ 0\,0\,0\,0\,0 \\ 0\,0\,0\,0\,0 \\ 0\,0\,0\,0\,0 \end{pmatrix} + ... + c_{25} \begin{pmatrix} 0\,0\,0\,0\,0 \\ 0\,0\,0\,0\,0 \\ 0\,0\,0\,0\,0 \\ 0\,0\,0\,0\,0 \\ 0\,0\,0\,0\,1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0\,0\,0\,0\,0 \\ 0\,0\,0\,0\,0 \\ 0\,0\,0\,0\,0 \\ 0\,0\,0\,0\,0 \\ 0\,0\,0\,0\,0 \end{pmatrix}$$

Ahora bien, si se cumplen las condiciones dadas, se afirmará que el conjunto es una base del espacio $M_{5\times5}$.

De un modo análogo se puede proceder para determinar si los conjuntos establecidos para los otros contextos poseen o no un conjunto generador y una base. Esto queda como ejercicio para el lector.

3.3. Transformaciones lineales, valores y vectores propios. Su importancia para determinar el comportamiento de la respuesta de un sistema

La importancia de las transformaciones lineales radica en la practicidad que tiene usar el supuesto de que su solución es un múltiplo del objeto de entrada porque con él se puede analizar el comportamiento de la transformación. Sin embargo, antes de identificar si una transformación es o no lineal hay que reconocerla y esto consiste en representarla y escribirla simbólicamente. Observe cómo se hace para los contextos presentados en esta lectura.

Contexto 1

Para representar y escribir simbólicamente la transformación que se observa en el contexto 1 se considera solo la matriz del sistema y el vector de entrada, no se usa el vector resultante porque se va a tratar de identificar cuál sería la respuesta de la transformación en cualquier caso. De acuerdo con esto se identifica la transformación como se expone a continuación:

De la representación matricial

$$\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} f_1 \\ f_2 \\ f_3 \\ f_4 \\ f_5 \end{pmatrix}$$

$T(v)$ se escribe así:

$$\begin{array}{ccccc} T & : & \mathbb{R}^5 & \rightarrow & M_{5\times1} \\ & & \downarrow & & \downarrow \\ & & (\, f_1,\, f_2,\, f_3,\, f_4,\, f_5 \,) & \rightarrow & \overbrace{\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} f_1 \\ f_2 \\ f_3 \\ f_4 \\ f_5 \end{pmatrix}} \end{array}$$

$$T\,(\, f_1,\, f_2,\, f_3,\, f_4,\, f_5 \,) = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} f_1 \\ f_2 \\ f_3 \\ f_4 \\ f_5 \end{pmatrix}$$

Contexto 2

Para representar y escribir simbólicamente la transformación que se observa en el contexto 2 se debe identificar cómo se calculan los costos en términos del tiempo de producción en cada factor. Dado que esta información no se indica en el enunciado se pueden hacer supuestos; por ejemplo, que se tiene el costo de cada factor y que estos son a, b, c y d cuyos valores son unidades monetarias que pueden ir desde miles hasta millones u otro, según los artículos que se produzcan y el país en donde se fabrican, para este caso se van a considerar números reales positivos porque se desconoce dicha información. Con base en esto la transformación se expresaría así:

$$\begin{array}{ccccc} T & : & \mathbb{R}^4 & \rightarrow & \mathbb{R}^+ \\ & & \downarrow & & \downarrow \\ & & \begin{pmatrix} x_1, & x_2, & x_3, & x_4 \end{pmatrix} & \rightarrow & \overbrace{\begin{pmatrix} a & b & c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix}} \end{array}$$

$$T\begin{pmatrix} x_1, & x_2, & x_3, & x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b & c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix}$$

cuyo resultado es la suma de los costos de cada artículo producido (en cada uno de los factores: maquinado, electrónico, puesta a punto y prueba).

$$\text{Costo total por el tiempo de producción: } C_T = \begin{pmatrix} a & b & c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = ax_1 + bx_2 + cx_3 + dx_4$$

Contexto 3

La transformación que se observa en el contexto 3 se podría representar y escribir de la siguiente manera:

$$\begin{array}{ccccc} T & : & \mathbb{R} & \rightarrow & P_2(x) \\ & & \downarrow & & \downarrow \\ & & x & \rightarrow & \overbrace{b + \frac{w}{2T_1}x^2} \end{array}$$

Polinomio de la forma del cable del puente:

$$p_2(x) = T(x) = b + \frac{w}{2T_1}x^2 \text{ con } b, w \text{ y } T_1 \in \mathbb{R}$$

Contexto 4

La representación y escritura simbólica de la transformación que se observa en el contexto 4 podría ser la siguiente:

Sea $W = \{f/f$ es una función continua exponencial de la forma $a + be^{ct}$ con a, b y $c \in \mathbb{R}\}$

$$\begin{array}{ccccc} T & : & \mathbb{R}^+ \cup \{0\} & \rightarrow & W \\ & & \downarrow & & \downarrow \\ & & t & \rightarrow & \overbrace{\frac{E_0}{R} + ce^{\frac{R}{L}t}} \end{array}$$

Función que representa la corriente del circuito:

$$f(x) = T(x) = \frac{E_0}{R} + ce^{\frac{R}{L}t} \text{ con } E_0, R, c \text{ y } L \in \mathbb{R}$$

Después de identificar la forma de cada transformación se debe verificar si ellas son de tipo lineal y esto consiste en comprobar que $T(\lambda v) = \lambda T(v)$ y que $T(u + v) = T(u) + T(v)$ con $\lambda \in \mathbb{R}$, u y v vectores del espacio vectorial. Se hará el proceso para el contexto 1 y las demás transformaciones quedan como ejercicio para el lector.

- Se analizará si $T(\lambda v) = \lambda T(v)$ con $\lambda \in \mathbb{R}$.

  1. $\lambda v = \lambda\,(\, f_1,\, f_2,\, f_3,\, f_4,\, f_5\,) = (\,\lambda f_1,\, \lambda f_2,\, \lambda f_3,\, \lambda f_4,\, \lambda f_5\,)$
  2. $T(\lambda v) = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda f_1 \\ \lambda f_2 \\ \lambda f_3 \\ \lambda f_4 \\ \lambda f_5 \end{pmatrix}$
  3. $T(\lambda v) = \begin{pmatrix} -1\lambda f_1+0+0+0+\lambda f_5 \\ 1\lambda f_1+(-1)\lambda f_2+0+0+0 \\ 0+1\lambda f_2+(-1)\lambda f_3+0+0 \\ 0+0+1\lambda f_3+(-1)\lambda f_4+0 \\ 0+0+0+1\lambda f_4+(-1)\lambda f_5 \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} -1f_1+0+0+0+f_5 \\ 1f_1+(-1)f_2+0+0+0 \\ 0+1f_2+(-1)f_3+0+0 \\ 0+0+1f_3+(-1)f_4+0 \\ 0+0+0+1f_4+(-1)f_5 \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} f_1 \\ f_2 \\ f_3 \\ f_4 \\ f_5 \end{pmatrix} = \lambda T(v).$
  4. Se concluye que $T(\lambda v) = \lambda T(v)$.

- Se analizará si $T(u+v) = T(u) + T(v)$ con u y v vectores de $\mathbb{R}^5$

  1. $T(u+v) = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} \left(\begin{pmatrix} f_1 \\ f_2 \\ f_3 \\ f_4 \\ f_5 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} f_6 \\ f_7 \\ f_8 \\ f_9 \\ f_{10} \end{pmatrix} \right)$
  2. Si se usa la propiedad distributiva de vectores se tiene que

$$\begin{aligned} T(u+v) &= \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} \left(\begin{pmatrix} f_1 \\ f_2 \\ f_3 \\ f_4 \\ f_5 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} f_6 \\ f_7 \\ f_8 \\ f_9 \\ f_{10} \end{pmatrix} \right) \\ &= \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} f_1 \\ f_2 \\ f_3 \\ f_4 \\ f_5 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} f_6 \\ f_7 \\ f_8 \\ f_9 \\ f_{10} \end{pmatrix} \\ &= T(u) + T(v) \end{aligned}$$

  .

  3. Se concluye que $T(u+v) = T(u) + T(v)$.

Al cumplirse lo anterior, se establece que la transformación dada es lineal y con este hecho se pueden determinar los valores y vectores propios de la misma suponiendo que esta transformación cumple que $T(v) = \lambda v$. En caso que sea posible establecer soluciones de la transformación diferentes a la trivial (el vector cero) las combinaciones lineales de los vectores propios generarán la solución general del sistema.

- Se hallarán los valores propios.

  1. Operar $A - \lambda I$.

$$\begin{aligned} A - \lambda I &= \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} - \lambda \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \lambda & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \lambda \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} -1-\lambda & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & -1-\lambda & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1-\lambda & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1-\lambda & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1-\lambda \end{pmatrix} \end{aligned}$$

2. Hallar el valor de $det(A - \lambda I)$.

$$det(A-\lambda I) = -\lambda^5 - 5\lambda^4 - 10\lambda^3 - 10\lambda^2 - 5\lambda = \lambda(-\lambda^4 - 5\lambda^3 - 10\lambda^2 - 10\lambda - 5)$$

   Note que aquí se escribió el resultado del determinante, si se desea verificar hay que hacer todo el proceso para hallar el determinante de la matriz 5×5 presentada en el numeral 1. También puede ser de utilidad emplear un software como Wolfram Alpha.

3. Averiguar cuándo el valor del determinante da cero o se anula.

$$\lambda(-\lambda^4 - 5\lambda^3 - 10\lambda^2 - 10\lambda - 5) = 0$$

   Aplicando la ley de los productos nulos y resolviendo cada ecuación se tiene que

$$\lambda \quad = \quad 0 \quad o \quad -\lambda^4 - 5\lambda^3 - 10\lambda^2 - 10\lambda - 5 \quad = \quad 0$$

   Las soluciones de la ecuación $-\lambda^4 - 5\lambda^3 - 10\lambda^2 - 10\lambda - 5 = 0$ resultan ser los siguientes números complejos: : $\lambda \approx -1.80902 + 0.587785i$, $\lambda \approx -1.80902 - 0.587785i$, $\lambda \approx -0.690983 + 0.951057i$ y $\lambda \approx -0.690983 - 0.951057i$. Se sugiere revisar la lectura anterior para recordar el significado de las raíces de un polinomio.

- Se hallan los vectores propios.

  Este proceso implica tomar cada valor propio y reemplazarlo en el sistema $(A - \lambda I)v = 0$, el cual debe resolverse con alguno de los métodos aprendidos en la primera unidad del módulo. Se presentará la estructura para el caso $\lambda = 0$ y queda como actividad de refuerzo para el lector hacer al menos uno de los que resultaron complejos.

$$(A - \lambda I)v \quad = \quad 0$$

$$\begin{pmatrix} -1-\lambda & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & -1-\lambda & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1-\lambda & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1-\lambda & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1-\lambda \end{pmatrix} \begin{pmatrix} f_1 \\ f_2 \\ f_3 \\ f_4 \\ f_5 \end{pmatrix} \quad = \quad 0$$

$$\begin{pmatrix} -1-0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & -1-0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1-0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1-0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1-0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} f_1 \\ f_2 \\ f_3 \\ f_4 \\ f_5 \end{pmatrix} \quad = \quad 0$$

$$\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} f_1 \\ f_2 \\ f_3 \\ f_4 \\ f_5 \end{pmatrix} \quad = \quad 0$$

  Al resolver el sistema la solución obtenida es

$$\begin{pmatrix} f_1 \\ f_2 \\ f_3 \\ f_4 \\ f_5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

- Se concluye según los valores y vectores propios obtenidos.

  - Dado que la opción $\lambda = 0$ genera el vector solución $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ este es el generador de todas las soluciones reales del sistema.

- De acuerdo con lo expuesto en la lectura anterior, los valores característicos de matrices reales son considerados como las raíces reales de la ecuación característica, por lo que las raíces complejas no se abordan en este módulo por competer al campo de los valores característicos complejos que requieren de un conocimiento más profundo, altamente aplicado a los sistemas dinámicos que se estudian en módulos de nivel superior.

4. Practico lo aprendido

Realice lo que se indica a continuación.

1. Establezca los conjuntos que se pueden determinar de los contextos 2 y 3 de la sección 3.1.

2. Describa qué significaría que los conjuntos del numeral anterior fueran espacios vectoriales y qué condiciones deberían cumplir.

3. Indique qué significaría o cómo sería un conjunto generador o una base para al menos uno de los espacios vectoriales que logre establecer en los cuatro contextos expuestos en la lectura.

4. Describa y represente como mínimo una transformación lineal que se pueda extraer de alguno de los contextos de la lectura.

5. Verifique si la transformación lineal que describió en el anterior ejercicio puede tener la respuesta básica ($T(v) = \lambda v$) y establezca las condiciones que se derivan de este supuesto, así como la respuesta que tendría la transformación.

6. Lea el siguiente contexto y realice el proceso que se expuso en esta lectura desde la primera hasta la última sección.

   Actualmente los sistemas de información cobran gran relevancia en las actividades diarias del ser humano, en esta era de la información ¿quién no ha realizado una búsqueda por internet sobre algún tema de interés?, se ha preguntado ¿cuál es el proceso que realiza un buscador para arrojar páginas que con seguridad le puede brindar mejor información sobre el tema de búsqueda? Los algoritmos de búsqueda son un buen ejemplo de aplicación de lo tratado en el módulo de Álgebra Lineal.

   Cuando se realiza una búsqueda de información sobre un tema en particular el buscador organiza las páginas web según su nivel de importancia y este es el orden en que aparecen en el navegador. Por ejemplo, si usted introduce en el navegador de google la palabra "nutrición", este le arroja, en nivel de relevancia, las páginas en las que podrá encontrar información relacionada con la palabra, pero ¿cómo se determina el nivel de relevancia? Para ejemplificar el proceso básico que realiza un navegador, tomará como ejemplo un número pequeño de páginas, pero en realidad un navegador maneja la información de más de un billon de páginas.

   Suponga que se tienen seis páginas relacionadas con la palabra nutrición enumeradas de 1 a 6 y en cada una de ellas se encuentra un enlace que direcciona a alguna o varias de las cinco páginas restantes. La figura 1 es la representación gráfica de la estructura de enlaces entre las páginas, en la que los puntos representan cada una de las páginas y el sentido de la flecha indica si hay un enlace desde una página a otra; a esta representación se le conoce como grafo.

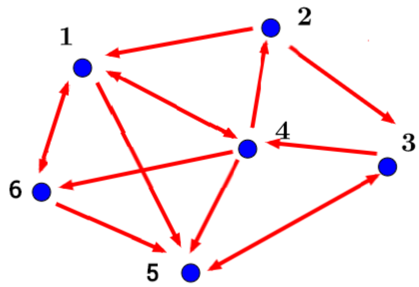


Figura 3. Representación gráfica de la estructura de enlaces de una página a otra.
Fuente: Elaboración propia.

Referencias

[1] Grossman,S. (2012). *Álgebra lineal.* (7a. ed.) McGraw-Hill Interamericana. Tomado de http://www.ebooks7-24.com

5. Lista de referencias de figuras

1. Nicholson, W.K.(2013).Flujos de red. En *Linear algebra with Applications* (p.27)7^{th} ed. United States of America.

2. Dusan Loncar. (2017).*Arcilla.*[Imagen]. Recuperado de https://goo.gl/rjgocy.

INFORMACIÓN TÉCNICA

Ingeniería y Ciencias Básicas

Módulo: Álgebra Lineal
Unidad 4: Analizando comportamientos de transfromaciones lineales finitas
Escenario 8: Aplicando lo aprendido

Autor: Sandra Milena Rojas Tolosa

Asesor Pedagógico: Diana Marcela Diaz Salcedo
Diseñador Gráfico: Kevin Mauricio Ramírez Corredor
Corrector de estilo: Angélica del Pilar Parra
Asistente: Leidy Alejandra Morales