Unidad 2 / Escenario 3

Lectura fundamental

Principios de conteo

Contenido

Palabras claves:
Permutación, combinación, principio de las casillas.

Introducción

Analice los siguientes problemas:

- Desea organizar un viaje para visitar 10 ciudades distintas, ¿de cuántas formas puede planear el recorrido?
- Dispone de 5 camisas, 4 pantalones y 3 pares de zapatos, ¿cuántas formas distintas de vestir son posibles?
- Suponga que ha recibido el mensaje "eersodnd", ¿cuántas palabras se pueden obtener al reordenar los símbolos del mensaje?

Aunque son contextos distintos, tienen en común que su solución corresponde a **contar** cuántos objetos satisfacen una condición particular. Dependiendo de la situación, existen algunas reglas (o principios) que permiten realizar este cálculo.

1. Regla del producto

Suponga que tiene una actividad que debe realizar en t pasos consecutivos, el paso 1 lo puede hacer de n_1 formas distintas, el paso 2 lo puede hacer de n_2 formas distintas y así sucesivamente. Entonces, existen $n_1 n_2 \ldots n_t$ formas distintas de realizar la actividad.

Por ejemplo, si se desea saber cuántas formas de vestir son posibles, si se dispone de 7 camisas, 4 pantalones y 3 pares de zapatos. Entonces, la elección de camisa, pantalón y zapatos se puede considerar como un "paso" de la actividad "vestir". Por lo tanto existen:

$$7 \cdot 4 \cdot 3 = 84 \text{ formas distintas de vestir.}$$

Esta idea se presenta en el siguiente principio:

Principio de producto. Si un procedimiento se puede separar en etapas $e_1, e_2, \ldots, e_k$ y cada etapa e_j tiene n_j posibilidades para $j = 1, 2, \ldots, k$, entonces existen:

$$n_1 \cdot n_2 \cdot n_3 \cdot \ldots n_k \text{ posibilidades de realizar el procedimiento.}$$

Observe con detalle los ejemplos que se desarrollan a continuación.

Ejemplo 1. Suponga que un lenguaje de programación tiene el tipo de datos **SSEntero** que representa números enteros sin signo. Si son necesarios 32 bits para almacenar una **SSEntero**, ¿cuántos números de este tipo son posibles?

Solución: observe que asingar un número **SSEntero** es una tarea que se puede dividir en 32 etapas:

e_1	e_2	e_3	$\cdots$	e_{30}	e_{31}	e_{32}

En cada etapa e_j se asigna 0 o 1 a cada bit. Por lo tanto existen:

$$2 \cdot 2 \cdot 2 \cdots 2 \cdot \cdot 2 = 2^{32} = 42.949.67.296 \text{ posiblidades de generar un } \textbf{SSEntero}$$

$\diamondsuit$

Ejemplo 2. Las placas de los autos en Colombia se construyen de la siguiente forma: tres letras seguidas de tres dígitos, por ejemplo, MED123. ¿cuántas placas se pueden asignar en Colombia?

Solución: la construcción de una placa es una actividad secuencial, en cada paso se asigna una letra (L) o dígito (D) según corresponda:

L	L	L	D	D	D

Si es una letra, se dispone de 26 opciones y si es un dígito son 10 opciones. Por lo tanto, en cada paso se tiene lo siguiente:

26	26	26	10	10	10
L	L	L	D	D	D

con lo cual, el total de placas posibles es:

$$26 \cdot 26 \cdot 26 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 10 = 17.576.000$$

$\diamondsuit$

Ejemplo 3. Suponga que debe realizar 5 trabajos en el día, cada trabajo es independiente de las otros y no repite alguno de ellos. ¿De cuántas formas puede ejecutar las cinco actividades?

Solución: en este caso, cada trabajo representa una etapa. Como las tareas son independientes entonces no debe respetar algún orden específico.

e_1	e_2	e_3	e_4	e_5

Ahora, para la etapa 1 (e_1) tiene 5 opciones, para la etapa 2 (e_2) tiene 4 opciones (dado que no repite el primer trabajo), para la etapa e_3 dispone de 3 opciones (no repite lo asignado en la primera y segunda etapa), en e_4 tiene 2 opciones y para e_5 solo tiene una opción. Por lo tanto las opciones por etapa son:

t_1	t_2	t_3	t_4	t_5
5	4	3	2	1

Con lo cual, la cantidad de posibles formas de ejecutar los cinco trabajos es:

$$5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 120$$

$\diamondsuit$

2. Regla de la suma

Principio de la suma. Suponga que tiene $X_1, X_2, \ldots, X_k$ conjuntos, cada conjunto X_j tiene n_j elementos y $X_i \cap X_j = \emptyset$ para $i \neq j$, entonces, la cantidad posible de elementos que se pueden seleccionar desde X_1 o X_1 o ... o X_k es:

$$n_1 + n_2 + n_3 + \cdots + n_k$$

Otra forma de interpretar el principio de la suma, es considerar que tiene k tareas distintas, donde cada tarea X_j se puede realizar de n_j formas y las tareas **no se pueden realizar de forma simultánea**, entonces existen $n_1 + n_2 + n_3 + \cdots + n_k$ formas de realizar una actividad.

Ejemplo 4. A un turista le ofrecen 3 planes para realizar el día siguiente, el primer plan lo puede realizar de dos formas diferentes, el segundo plan lo puede realizar de tres formas diferentes y el tercer plan lo puede hacer de 5 formas diferentes. Cada plan toma mínimo 6 horas del día, por lo tanto no puede participar en dos planes durante un día ¿cuántas actividades en total tiene el turista?

Solución: como dos planes no se pueden realizar en un mismo día, entonces la cantidad disponible de actividades para el turista es:

$$2 + 3 + 5 = 10$$

$\diamondsuit$

Ejemplo 5. Retomando el ejemplo de las placas de autos en Colombia, ¿cuántas placas se pueden asignar que inicien con la letra M o la letra B?

Solución: como una placa no puede iniciar con la letra M y la letra B simultáneamente, entonces se debe estudiar independientemente cuántas placas inician con la letra M o con la letra B. Si la placa inicia con la letra M:

M					

Entonces, la primera posición es fija pero las demás se asignan como antes. Por lo tanto, existen $1{\cdot}26{\cdot}26{\cdot}10{\cdot}10{\cdot}10 =$ 676.000 posibilidades. De forma similar, existen 676.000 posibles placas con primera letra igual a B. Con lo cual, aplicando el principio de suma, hay $676.000 + 676.000 = 1.352.000$ placas que inician con M o B. $\diamondsuit$

Ejemplo 6. Un estudiante está consultando posibles propuestas de trabajo final. Para ello, indaga con tres docentes que trabajan en el área de su interés, el primer docente tiene 4 posibles proyectos, el segundo docente tiene 3 posibles proyectos y el tercer docente le propone 4 trabajos. ¿Cuántos posibles proyectos de grado tiene el estudiante para seleccionar?

Solución: como no puede realizar de forma simultánea dos proyectos, entonces tiene $4 + 3 + 4 = 11$ posibles trabajos de grado. $\diamondsuit$

3. Permutaciones y combinaciones

Suponga que desea organizar una obra de teatro, para lo cual, una de las tareas es asignar los tres roles principales, para ello, dispone de 10 actores que pueden realizar cualquiera de los papeles. ¿Cuántas asignaciones son posibles?

Para conformar un comité de negociación, un sindicato debe elegir 5 representantes para estar en la mesa. Si existen 12 personas aptas para llevar a cabo esta tarea, ¿cuántos grupos de 5 representantes son posibles de conformar?

En cada una de las situaciones anteriores, se expone un caso especial de conteo. En el primer contexto se debe calcular la cantidad de 3-permutaciones que se pueden realizar con 10 elementos. Para el segundo caso, es necesario calcular la cantidad de 5-**combinaciones** que se pueden formar de 12 elementos. En esta sección se desarrolla cada uno de estos métodos.

3.1. Permutaciones

Definición 1. Una **permutación** de un conjunto S es una disposición ordenada de sus elementos.

Ejemplo 7.

- Si $S = \{a, b, c\}$, entonces son permutaciones de sus elementos: bac, bca o cba.
- Una permutación de los símbolos de la palabra "estudiar" es "tuesardi".

Es importante resaltar que cuando se habla de una permutación, el *orden* en la disposición de los elementos distingue una respuesta de otra. Por tal razón, en el primer ejemplo las permutaciones bac y cba se consideran diferentes.

La pregunta ahora es, ¿cuántas permutaciones de un conjunto de n elementos existen?

Teorema 1. Existen $n!$ permutaciones de n elementos.

Ejemplo 8.

- Si $S = \{a, b, c\}$, entonces existen 3! permutaciones.
- Existen $8! = 8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot \cdots \cdot 1$ permutaciones de las letras de la palabra "estudiar".
- Si se desea organizar un viaje para visitar cuatro ciudades $\{A, B, C, D\}$ y cada ciudad se desea visitar una vez, entonces existen $4! = 24$ posibles formas de viajar.

En otros casos, se desea conocer la cantidad de permutaciones de r elementos de un conjunto S de tama˜no n.

Ejemplo 9.

- Suponga que desea organizar una obra de teatro, para lo cual, una de las tareas es asignar los tres roles principales, para ello dispone de 10 actores que pueden realizar cualquiera de los papeles. ¿Cuántas asignaciones son posibles?
- En una carrera en la que participan 10 ciclistas, ¿de cuántas formas se puede dar el podio (primer, segundo y tercer puesto de la carrera)?

Esto motiva la siguiente definición:

Definición 2. Una **r-permutación** de un conjunto S, de tamaño n, es la disposición ordenada de r de sus elementos.

Ejemplo 10.

- Si $S = \{a, b, c\}$, entonces una 2-permutación es ba, cb o ca.
- Si $S = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$ es una permutación, 4-permutación de S es: 2450, 8756 o 2391.

Ahora, si un conjunto S tiene n elementos, ¿cuántas r- permutaciones existen con los elementos de S?

Teorema 2. La cantidad de r-permutaciones de n elementos es:

$$\frac{n!}{(n-r)!}$$

Esta cantidad se denota $P(n, r)$

Demostración. La selección de forma ordenada r elementos de n posibles, se puede realizar por etapas:

e_1	e_2	e_3	$\cdots$	e_{r-2}	e_{r-1}	e_r

En cada etapa e_j se asigna un elemento, sin repetir, del conjunto. Por lo tanto, en la primera etapa se dispone de n posibles asignaciones, en la segunda etapa se puede realizar $n-1$ asignaciones, dado que no se repite el elemento asignado en la primera etapa, etc. Con lo cual, por la regla del producto, existen:

$$n(n-1)(n-2)\cdots(n-r+1) = \frac{n!}{(n-r)!}$$

formas de seleccionar. □

Ejemplo 11. De una lista de 12 personas que participan por uno de los cargos de *auxiliar administrativo*, *auxiliar contable*, *auxiliar de gestión humana* o *auxiliar de gestión del riesgo*, ¿de cuántas formas se puede realizar la selección?

Solución: en este caso se desea conocer cuántas permutaciones de 4 elementos de los 12 posible, existen. Dado que el orden importa en la elección, por el teorema anterior, existen:

$$P(12,4) = \frac{12!}{(12-4)!} = 9 \cdot 10 \cdot 11 \cdot 12 = 11880$$

formas de repartir los cargos entre los 12 aspirantes. ♢

Ejemplo 12. En una carrera en la que participan 10 ciclistas, ¿de cuántas formas se puede conformar el primer, segundo y tercer puesto de la carrera?

Solución: en este caso,.es necesario calcular 3-permutaciones de 10 elementos, dado que el orden importa en la elección de los ganadores. Por lo tanto, la cantidad de asignaciones posibles es:

$$P(10,3) = \frac{10!}{(10-3)!} = 8 \cdot 9 \cdot 10 = 720$$

♢

3.2. Combinaciones

Cuando el orden no importa en la elección de r elementos de un conjunto de tamaño n, se dice que es una r-combinación.

Teorema 3. La cantidad de r-combinaciones de n elementos es:

$$\frac{n!}{r!(n-r)!}$$

Esta cantidad se denota $C(n,r)$ o $\binom{n}{r}$

Ejemplo 13. Para conformar un comité de negociación, un sindicato debe elegir cinco representantes para estar en la mesa. Si existen 12 personas aptas para llevar a cabo esta tarea, ¿cuántos grupos de cinco representantes se pueden conformar?

Solución: en esta situación es necesario conocer cuántas 5-combinaciones son posibles de un conjunto de tamaño 12, dado que el orden de los integrantes del grupo de representantes del sindicato no tiene importancia. Por lo tanto, existen:

$$\binom{12}{5} = \frac{12!}{5!(12-5)!} = \frac{12!}{5! \cdot 7!} = 792$$

792 posibles elecciones. $\diamondsuit$

Ejemplo 14. Suponga que tiene un grupo de 7 mujeres y un grupo de 4 hombres. ¿De cuántas formas se puede organizar un comité de cinco personas conformado por tres mujeres y dos hombres?

Solución: el comité puede ser construido en etapas, en la primera se seleccionan las mujeres que lo conformarán y en la segunda los hombres que participarán.

Para la primera etapa existen $C(7,3) = \frac{7!}{3!(7-3)!} = 35$ posibilidades y para la segunda etapa hay $C(4,2) = 6$ posibilidades. Con lo cual, por la regla del producto existen $35 \cdot 6 = 210$ formas de organizar el comité. $\diamondsuit$

Ejemplo 15. ¿Cuántos subconjuntos de tamaño 5 existen de un conjunto de tamaño 9?

Solución: Para conformar un subconjunto de tamaño cinco, es necesario seleccionar cinco elementos de los 9 disponibles. Dado que el orden de los elementos seleccionados no determina el subconjunto a formar, entonces, la cantidad de subconjuntos corresponde a la cantidad de 5-combinaciones que se puedan realizar con los 9 elementos.

$$C(9,5) = \binom{9}{5} = \frac{9!}{5!(9-5)!} = \frac{9!}{5!(4)!} = 126$$

$\diamondsuit$

4. Principio de las casillas

En algunas situaciones es útil determinar si hay un objeto, de una lista, que satisface una propiedad. Por ejemplo, si se tienen 27 personas en una sala, ¿existen dos personas cuyo nombre inicie con la misma letra?

Existe un principio de conteo que permite establecer si existe ese objeto. Pero no necesariamente establece cuál objeto es.

Principio de las casillas: Si se tienen n objetos para repartir en k casillas distintas, con $k < n$, entonces existe una casilla con al menos dos objetos.

Ejemplo 16. Entre trece personas, hay dos que nacieron el mismo mes.

Solución: Suponga que los objetos a repartir son las 13 personas y que las casillas son los meses del año. Si cada persona se asigna con la casilla del mes en que nació, entonces por el principio de las casillas existe un mes con al menos dos objetos, es decir, existen dos personas que cumplen el mismo mes $\diamondsuit$

Ejemplo 17. Suponga que se seleccionan cinco números distintos del conjunto $\{1,2,3,4,5,6,7,8\}$ entonces existe (en el grupo seleccionado) al menos un par de elementos que suma 9.

Solución: Considere las siguientes cuatro casillas:

$\{1,8\}$	$\{2,7\}$	$\{3,6\}$	$\{4,5\}$

cada una ha sido etiquetada (en la parte inferior) con los elementos que pueden ser ubicados en ella, por ejemplo, en la casilla solo se puede ubicar el número uno o el número ocho. Ahora, si se seleccionan cinco números de la lista $\{1,2,3,4,5,6,7,8\}$ y se ubican en las casillas anteriores (respetando lo que indica la etiqueta) entonces por el principio de las casilla existe una casilla con al menos dos elementos.

Como se puede notar los elementos de cada casilla suman nueve, por lo tanto existen en la elección de cinco números dos que suman nueve. $\diamondsuit$

5. Aplicaciones de los principios de conteo

En esta parte de la lectura se revisarán algunas aplicaciones de los temas presentados en secciones anteriores.

5.1. Subconjuntos de un conjunto

Se desea calcular cuántos subconjuntos existen de un conjunto de 6 elementos. Para ellos se debe determinar cuántos subconjuntos de tamaño 1 existen, cuántos de tamaño 2 existen, etc. Al revisar el ejemplo 15 se concluye:

Tabla 1: **Cantidad de subconjuntos**

Tamaño	Cantidad de subconjuntos
0	$C(6,0) = \binom{6}{0} = 1$
1	$C(6,1) = \binom{6}{1} = 6$
2	$C(6,2) = \binom{6}{2} = 15$
3	$C(6,3) = \binom{6}{3} = 20$
4	$C(6,4) = \binom{6}{4} = 15$
5	$C(6,5) = \binom{6}{5} = 6$
6	$C(6,6) = \binom{6}{6} = 1$

Fuente: Elaboración propia.

Por lo tanto existen $\binom{6}{0}+\binom{6}{1}+\binom{6}{2}+\binom{6}{3}+\binom{6}{4}+\binom{6}{5}+\binom{6}{6} = 64$ subconjuntos de un conjunto de seis elementos.

De forma general se tiene:

Teorema 4. La cantidad de subconjuntos de un conjunto de n elementos, corresponde a:

$$\binom{n}{0}+\binom{n}{1}+\binom{n}{2}+\cdots+\binom{n}{n-2}+\binom{n}{n-1}+\binom{n}{n}$$

5.2. Teorema del Binomio

¿Cómo calcular $(x+z)^n$?, una forma eficiente de realizar esta tarea es observar que un término de la expansión:

$$\underbrace{(x+z)(x+z)\cdots(x+z)}_{n-\text{veces}}$$

corresponde a la elección de x o z en cada factor, con lo cual cada término corresponde a una expresión de la forma $x^k z^{n-k}$, ¿pero de cuántas formas se puede elegir k-véces x y $n-k$-veces z?, como no importa de cuál factor se seleccione x entonces la pregunta anterior se puede reformular de la siguiente manera: ¿de cuántas formas es posible elegir k-veces x de n factores? La respuesta es $\binom{n}{k}$.

De esta idea se desprende el siguiente teorema, cuya demostración puede consultar en [3]:

Teorema 5.

$$(x+z)^n = \binom{n}{0}x^n z^0 + \binom{n}{1}x^{n-1}z^1 + \binom{n}{2}x^{n-2}z^2 + \cdots + \binom{n}{n-2}x^2 z^{n-2} + \binom{n}{n-1}x^1 z^{n-1} + \binom{n}{n}x^0 z^n$$

Ejemplo 18.

$$\begin{aligned}(x+z)^3 &= \binom{3}{0}x^3 + \binom{3}{1}x^2 z + \binom{3}{2}x^1 z^2 + \binom{3}{3}x^0 z^3 \\ &= x^3 + 3x^2 z + 3xz^2 + z^3\end{aligned}$$

Ejemplo 19.

$$(1+1)^n = \binom{n}{0} + \binom{n}{1} + \binom{n}{2} + \cdots + \binom{n}{n-2} + \binom{n}{n-1} + \binom{n}{n}$$

Luego, $\binom{n}{0} + \binom{n}{1} + \binom{n}{2} + \cdots + \binom{n}{n-2} + \binom{n}{n-1} + \binom{n}{n} = 2^n$, es decir, existen 2^n subconjuntos de un conjunto de n elementos.

Ejercicios

Los siguientes ejercicios tienen como objetivo que el estudiante afiance los conceptos presentados en la lectura no se deben entregar al tutor del módulo.

1. ¿Cuántas 3-permutaciones hay de los símbolos a, b, c, d?
2. ¿Cuántas 3-combinaciones hay de los símbolos a, b, c, d?
3. En una reunión asisten 10 hombres y 15 mujeres. ¿De cuántas formas se puede organizar un comité que esté conformado por 3 hombres y 4 mujeres?
4. Dentro de las cadenas binarias de longitud 5, por ejemplo 01011, 11110, 00001, etc. ¿Cuántas tienen en la tercera posición el símbolo 1?
5. Si seleccionan 8 personas al azar, demuestre que existen al menos dos personas que nacieron el mismo día.
6. Probar que al seleccionar 101 números distintos del conjunto $\{1, 2, 3, 4, 5, \ldots, 199, 200\}$ entonces existen dos números (en los seleccionados) tales que uno divide al otro. [Sugerencia: Cualquier número entero positivo se puede escribir de la forma $2^k y$ con y un número impar]
7. ¿Cuántos subconjuntos existen de un subconjunto de 15 elementos?
8. Suponga que dispone de tres tipos de sobres, diferenciados por su color: rojo, verde y azul. De cada tipo tiene al menos 10 sobres. ¿De cuántas formas puede seleccionar 10 sobres si debe asegurar que al menos debe existir un sobre rojo y dos sobres verdes?
9. Una función $f : A \to B$ es *parcial* si $f(a)$ no está definida para todo $a \in A$. Si A y B son conjuntos finitos, ¿cuántas funciones parciales existen de A a B?
10. ¿Cuántos caminos en el plano xy existen para ir del punto $(1, 5)$ al punto $(8, 10)$?. Un camino consiste en pasos de una unidad a la derecha o una unidad hacia arriba.

Bibliografía

[1] Grimaldi, R. (1998)*Matemáticas discreta y combinatoria*. México: Addison-Wesley Iberoamericana.

[2] Hammack, R (2013) *Book of proof*, second edition, Editor: Richard Hammack.

[3] Johnsonbaugh R. (2017) *Discrete Mathematics*, 8th Edition, Pearson.

[4] Rosen, K.H. and Pérez, J.M. (2004) *Matemática discreta y sus aplicaciones*, Madrid: McGraw-Hill.

INFORMACIÓN TÉCNICA

Módulo: Elementos en Teoría de la Computación
Unidad 2: Conteo e inducción
Escenario 3: Principios de conteo

Autor: Diego Arévalo Ovalle

Asesor Pedagógico: Óscar Mauricio Salazar
Diseñador Gráfico: Diego Arévalo Ovalle
Asistente: Alejandra Morales

Este material pertenece al Politécnico Grancolombiano. Por ende, es de uso exclusivo de las Instituciones adscritas a la Red Ilumno. Prohibida su reproducción total o parcial.