Unidad 1 / Escenario 2

Lectura fundamental

Formulación de modelos algebraicos

Contenido

Palabras clave: investigación de operaciones, programación lineal, optimización, modelos algebraicos

1. Modelos de programación lineal

En el Escenario anterior, discutimos los elementos clave de lo que ahora entendemos como un programa lineal, aquellos sin lo cual no estaría completa la formulación de un problema como un programa lineal, estos son:

- Variables de decisión
- Función objetivo
- Criterio de optimización
- Restricciones

Una vez tenemos identificados todos esos elementos para nuestro problema específico, podemos decir que hemos formulado el problema como un PL (Programa Lineal).

Sin embargo, hemos señalado algunas características que deben cumplirse en las funciones involucradas tanto en la función objetivo como en las restricciones, estas deben ser funciones lineales, lo cual implica una serie de supuestos que ahora vamos a ver en detalle.

2. Supuestos de un programa lineal

Al formular un problema como un programa lineal, se tiene por supuestas al menos cuatro hipótesis principales sobre el comportamiento del problema, estas hipótesis se deben satisfacer al menos en un rango de operación que permita la implementación de la solución obtenida. Como veremos a continuación, las hipótesis pueden parecer extremadamente restrictivas, sobre todo no realistas, pero en la mayoría de los casos prácticos los supuestos son razonables y las soluciones obtenidas con el programa lineal son implementables en el problema real.

Las cuatros hipótesis, o supuestos, de un programa lineal son:

2.1. Proporcionalidad

Esta primera hipótesis es una consecuencia directa del uso de funciones lineales tanto en la función objetivo como en las restricciones, así cada variable de decisión contribuye a la función objetivo con un valor proporcional al valor mismo de la variable y la constante de proporcionalidad es el coeficiente de dicha variable en la función objetivo. Matemáticamente lo podemos expresar así:

Si la función objetivo está dada por $Z=c_1 X_1 + c_2 X_2 + \cdots + c_j X_j + \cdots + c_n X_n$, entonces la contribución de la variable X_j a la función objetivo es de $c_j X_j$, si el valor de la variable X_j se disminuye a la mitad, su contribución también lo hará; si el valor de la variable X_j se duplica, su contribución también se duplicará. En esto consiste la proporcionalidad.

De la misma forma, si para la i"-ésima" restricción, tenemos una combinación lineal de las variables con coeficientes dados por $a_{i1} X_1 + a_{i2} X_2 + \cdots + a_{ij} X_j + \cdots + a_{in} X_n \leq b_i$, entonces la contribución de la variable X_j a dicha restricción de $a_{ji} X_j$; así, si el valor de la variable X_j se duplica, su contribución también se duplicará. Nuevamente tenemos una relación de proporcionalidad.

Esta relación implica que ni en la función objetivo ni en las restricciones se consideran economías de escala, descuentos o costos fijos. Sin embargo, como veremos más adelante al utilizar otro tipo de variables, como las binarias o las enteras, podremos tener en cuenta este tipo de efectos.

2.2. Aditividad

Nuevamente, esta hipótesis expresa directamente que las funciones involucradas en la función objetivo y en las restricciones son combinaciones lineales de las variables, porque la base de la hipótesis es que la contribución total, ya sea en la función objetivo o en las restricciones, es la suma directa de las contribuciones de cada variable. Lo que tal vez no es evidente en dicha hipótesis es que implícitamente indica que no existe ningún tipo de interacción entre las variables, mucho menos efectos de suplementariedad o sustitución.

2.3. Divisibilidad

Esta es una hipótesis clave para el algoritmo de solución que vamos a utilizar en este curso. Las variables pueden tomar cualquier valor real mayor o igual a cero, es decir, son variables **continuas**

no negativas. Así, cada variable de decisión se puede dividir en infinitos valores reales, no están restringidas a tomar valores enteros.

Como en el caso de la proporcionalidad, más adelante nos permitiremos utilizar variables binarias o enteras, en donde el supuesto de divisibilidad no aplica; sin embargo, cuando se hace uso de este tipo de variables nos salimos del campo de aplicación de la programación lineal y entramos en uno nuevo que se conoce como programación entera mixta. Desafortunadamente, en este curso introductorio no discutiremos los algoritmos de solución para este tipo de problemas, pero si construiremos modelos con variables de este tipo.

2.4. Certidumbre

Esta hipótesis puede ser la más controversial de todas porque asegura que todos los parámetros del problema: los coeficientes en la función objetivo, los coeficientes de cada variable en cada una de las restricciones y los lados derechos de todas las restricciones son conocidos de antemano con total certeza, que no existe ningún tipo de incertidumbre sobre el valor que cada uno de dichos parámetros va a tomar. Es decir, todos los elementos estocásticos o probabilísticos de cada uno de los factores del problema están representados por un equivalente determinístico en el problema.

En síntesis...

Al formular un problema como un programa lineal se debe verificar que tanto la función objetivo, como las restricciones, cumplan con los cuatro supuestos, lo cual garantizará que éstas se pueden escribir como combinaciones lineales de las variables de decisión.

Ahora veremos cómo se aplican esos principios en diferentes familias de problemas, pero primero debemos tener un lenguaje común para modelar problemas.

3. Notación básica

En la formulación de problemas nos enfrentaremos con diferentes modelos lineales, pero debemos manejar un lenguaje común para todos ellos. Existen diferentes formas en las cuales se puede escribir un programa lineal y cada una de ellas será útil en alguna situación específica. Por el momento, es suficiente para nosotros conocer la forma canónica expresada con subíndices y con vectores y matrices.

Para las variables de decisión utilizaremos el vector columna $\boldsymbol{X}$, cuyos componentes denotaremos con X_j, en donde el índice j estará en el rango de 1 hasta n, donde n representa el número de variables de decisión del problema.

Para los coeficientes de la función objetivo, utilizaremos el vector columna $\boldsymbol{c}$, cuyos componentes denotaremos con c_j, nuevamente el índice j estará en el rango de 1 hasta n.

Para los coeficientes de las diferentes restricciones utilizaremos una matriz de dimensión $m \times n$, donde m representa el número de restricciones y n el número de variables de decisión del problema. Las componentes de la matriz, que llamaremos $\boldsymbol{A}$, las denotaremos por a_{ij}.

Finalmente, para el lado derecho de las restricciones utilizaremos el vector columna $\boldsymbol{b}$, con componentes b_i, en donde el índice i estará en el rango de 1 hasta m.

Con esta notación ya definida, podemos escribir un problema de minimización de las siguientes maneras:

En forma matricial:

$$\text{Min } Z = c^T X$$

$$s.a$$

$$AX \geq b$$

$$X \geq 0$$

Cómo mejorar...

En un problema de maximización, la formulación matricial sería:

$$\text{Max } Z = c^T X$$

$$s.a$$

$$AX \leq b$$

$$X \geq 0$$

Utilizando sumatorias:

$$\text{Min } Z = \sum_{J=1}^{n} c_j X_j$$

$$s.a$$

$$\sum_{J=1}^{n} a_{ij} X_j \leq b_1 \; \forall i = 1, \dots, m$$

$$X_j \geq 0 \; \forall j = 1, \dots, n$$

Cómo mejorar...

En un problema de maximización, la formulación quedaría:

$$\text{Max } Z = \sum_{J=1}^{n} c_j X_j$$

$$s.a$$

$$\sum_{J=1}^{n} a_{ij} X_j \leq b_1 \; \forall i = 1, \dots, m$$

$$X_j \geq 0 \; \forall j = 1, \dots, n$$

En forma explícita:

$$\text{Min } Z = c_1 X_1 + c_2 X_2 + \cdots + c_n X_n$$

$$s.a$$

$$a_{11} X_1 + a_{12} X_2 + \cdots + a_{1n} X_n \geq b_1$$

$$a_{21} X_1 + a_{22} X_2 + \cdots + a_{2n} X_n \geq b_2$$

$$a_{m1} X_1 + a_{m2} X_2 + \cdots + a_{mn} X_n \geq b_m$$

$$X_1 \geq 0, X_2 \geq 0, \dots, X_n \geq 0$$

Ahora, consideraremos una serie de problemas que habitualmente se resuelven con programación lineal. Cada uno de los modelos que presentamos a continuación posee una estructura característica y por lo tanto es importante que nos familiaricemos con ella, para lograr así mejorar nuestras habilidades para construir modelos lineales en cada nuevo problema al que nos enfrentemos.

4. Problema de la dieta

¿Sabía que...?

Este problema está considerado, históricamente, como una de las aplicaciones militares que dio inicio a la investigación de operaciones. A mediados de la década del 40, Stigler (1945) planteó una solución heurística para un problema de alimentación del ejército estadounidense, que consistía en planear las raciones de cada soldado para que fueran lo más económicas posible, mientras cumplieran con todos los requerimientos nutricionales. Este problema fue luego resuelto de manera óptima utilizando el algoritmo Simplex, que veremos más adelante, y sorprendentemente la solución de Stigler estaba alejada del óptimo en tan solo 24 centavos de dólar al año por soldado.

De manera general, podemos enunciar el problema de la siguiente forma:

Tenemos n *diferentes tipos de alimento, digamos* $F_1, F_2, \ldots, F_n$*, que contienen diferentes cantidades de nutrientes y que existen m diferentes tipos de dichos nutrientes, digamos* $N_1, N_2, \ldots, N_m$*. El costo por unidad para el alimento tipo* j *está dado por* c_j *y el requerimiento diario de cada nutriente* i *está representado por* b_i*, en unidades adecuadas en cada caso. Finalmente, cada unidad de alimento* j *contiene una cantidad* a_{ij} *de nutriente* i*. La idea es encontrar una combinación de alimentos que suplan las necesidades diarias de nutrientes al mínimo costo.*

La formulación general del problema anterior es la siguiente:

Se definen como variables de decisión como la cantidad de alimento, de cada tipo, a utilizar cada día. Formalmente se tiene una variable por cada tipo de alimento y se define así:

Xj: Cantidad de alimento tipo j, en las unidades adecuadas para cada tipo, que se incluirá cada día en la dieta. $\forall\ j=1,\ldots,n$

La función objetivo está dada por el costo total de la dieta y en función de las variables de decisión que se representa como:

$$Z = c_1 X_1 + c_2 X_2 + \cdots + c_n X_n$$

Por tratarse de un costo, el criterio de optimización es el de **minimización**.

El conjunto de restricciones está formado por una restricción para cada tipo de nutriente, pero todas ellas con la misma forma; por ejemplo, para el nutriente tipo i tenemos que:

$$a_{i1} X_1 + a_{i2} X_2 + \cdots + a_{in} X_n \geq b_i$$

Finalmente, se agregan las restricciones de no negatividad y el problema toma la forma canónica definida anteriormente, esto es:

$$\text{Min } Z = c_1 X_1 + c_2 X_2 + \cdots + c_n X_n$$

$$s.a$$

$$a_{11} X_1 + a_{12} X_2 + \cdots + a_{1n} X_n \geq b_1$$

$$a_{21} X_1 + a_{22} X_2 + \cdots + a_{2n} X_n \geq b_2$$

$$a_{m1} X_1 + a_{m2} X_2 + \cdots + a_{mn} X_n \geq b_m$$

$$X_1 \geq 0, X_2 \geq 0, \ldots, X_n \geq 0$$

Ahora veamos un ejemplo particular, supongamos que debemos alimentar una pequeña granja de gallinas y tenemos dos opciones de concentrado para este propósito: el concentrado Corn y el concentrado Flakes, con estos alimentos debemos garantizar los requerimientos de proteínas, potasio y sodio de los animales. En la siguiente tabla se resume el aporte de cada tipo de concentrado a cada requerimiento, así como el nivel mínimo requerido por cada animal y el precio por libra de cada tipo de concentrado.

Tabla 1. Datos para el ejemplo del problema de dieta

Tipo concentrado	Corn	Flakes	Requerimiento Mínimo
Proteínas (g)	8	12	10
Potasio (mg)	150	100	120
Sodio (mg)	750	700	720
Costo por libra ($)	600	500	

Fuente: elaboración propia

La idea es encontrar la combinación de alimentos más económica a comprar que garantice los requerimientos mínimos de los animales.

Veamos, entonces, como queda la formulación del problema:

4.1. Variables de decisión

Las cantidades sobre las cuales se tiene control en este problema son las cantidades de cada tipo de alimento que se pueden comprar, por lo tanto, definimos:

X_1: Cantidad de alimento Corn a incluir en la dieta diaria

X_2: Cantidad de alimento Flakes a incluir en la dieta diaria

4.2. Función objetivo y criterio de optimización

El objetivo en este problema es encontrar la combinación más económica, por lo tanto, la función objetivo está relacionada con el costo del alimento y cómo se busca el costo más bajo; el criterio es de minimización, por lo tanto, queda:

$$\text{Min } Z = 600X_1 + 500X_2$$

4.3. Restricciones

Las restricciones en este tipo de problemas tienen que ver con los requerimientos mínimos de cada nutriente, en este caso proteínas, potasio y sodio, así que tenemos:

Para las Proteínas: $8X_1 + 12X_2 \geq 10$

Para el Potasio: $150X_1 + 100X_2 \geq 120$

Para el Sodio: $750X_1 + 700X_2 \geq 720$

Finalmente, debemos incluir la restricción de no negatividad:

$$X_1 \geq 0, X_2 \geq 0$$

Y ya tenemos la formulación completa de nuestro problema de dieta, la cual tiene la forma descrita en la formulación general.

5. Problema de administración de inversiones

¿Sabía que...?

En 1972, Broaddus presentó un artículo en donde explicaba cómo utilizar la programación lineal en el ambiente financiero; su objetivo era que los banqueros entendieran la importancia de la herramienta en la administración óptima de las inversiones. El ejemplo de Broaddus fue sumamente sencillo, pero fue la base de una gran rama de nuevos problemas.

Primero veamos una descripción general del problema:

Se tiene un capital de K unidades monetarias el cual se debe invertir, por un único periodo, en una de las n *opciones disponibles, digamos* $P_1, P_2, \ldots, P_n$*; cada una de las opciones tiene un rendimiento porcentual asociado, para el periodo bajo consideración de* $\alpha_1, a_2, \ldots, a_n$*. Por las características de cada tipo de inversión, existen límites inferiores y superiores para cada una, es decir, el capital invertido en la opción* P_j *no puede ser inferior a* L_j *ni superior a* U_j*. Estos límites no siempre existen para todas las opciones y algunas de ellas pueden tener uno u otro de los límites. El objetivo es encontrar la mejor forma de invertir el capital de manera que se maximice la ganancia efectiva del periodo en consideración.*

La formulación general del problema anterior es la siguiente:

Se definen como variables de decisión como la cantidad de dinero invertido en cada opción, es decir, se tiene una variable por cada tipo de inversión y se define así:

X_j: Cantidad de dinero invertida en la opción $P_j \; \forall \, j = 1,\ldots,n$

La función objetivo está dada por la ganancia efectiva en el periodo bajo consideración y en función de las variables de decisión se representa como:

$$Z = \alpha_1 X_1 + \alpha_2 X_2 + \cdots + \alpha_n X_n$$

Por tratarse de una ganancia, el criterio de optimización es el de **maximización.**

El conjunto de restricciones está formado por una restricción del presupuesto total y dos restricciones para cada tipo de inversión. La del presupuesto total queda de la forma:

$$X_1 + X_2 + \cdots + X_n \leq K$$

Mientras que las de los límites de cada inversión, por ejemplo, para la opción P_j, se escriben como:

$$X_j \geq L_j$$

$$X_j \leq U_j$$

Finalmente, las restricciones de no negatividad son redundantes si todas las variables ya tienen definido un límite inferior, así el problema toma la forma de:

$$\text{Max } Z = a_1 X_1 + a_2 X_2 + \cdots + a_n X_n$$

$$s.a$$

$$X_1 + X_2 + \cdots + X_n \leq k$$

$$X_1 \geq L_1$$

$$\vdots$$

$$X_n \geq L_n$$

$$X_1 \leq U_1$$

$$\vdots$$

$$X_n \leq U_n$$

Ahora sí, veamos un ejemplo particular, basado en el que Broaddus presentó en 1972.

Suponga que un banco tiene 100 millones para invertir, parte de ese dinero se puede poner en préstamos y la otra parte en bonos. Los préstamos tienen una rentabilidad mayor, digamos del 10% E.A., comparada con la rentabilidad de los bonos, digamos 5%. Sin embargo, los bonos se pueden vender en el mercado casi inmediatamente por lo cual representan liquidez. Por compromisos comerciales y de regulación, no se puede invertir más de 50 millones en préstamos y por razones de liquidez, al menos el 25% del capital se debe invertir en bonos. El banco desea maximizar su ganancia con su plan de inversiones.

Veamos entonces la formulación del problema:

5.1. Variables de decisión

Las variables sobre las cuales toma la decisión en este problema son las cantidades a invertir en cada opción, por lo tanto definimos:

X_1: Cantidad de dinero, en millones, invertida en préstamos

X_2: Cantidad de dinero, en millones, invertida en bonos

5.2. Función objetivo y criterio de optimización

El objetivo en este problema es encontrar el plan de inversiones que produzca la mayor ganancia, por lo tanto la función objetivo está relacionada con la rentabilidad de cada inversión y el criterio es de maximización, por lo tanto queda:

$$\text{Max } Z = 0.10X_1 + 0.05X_2$$

5.3. Restricciones

La primera restricción tiene que ver con el presupuesto disponible, por lo tanto la suma de las dos inversiones no puede superar el capital disponible, esto es:

$$X_1 + X_2 \leq 100$$

Las otras restricciones tienen que ver con los límites, inferior y superior, que define el banco para cada inversión

Límite inferior para los préstamos: $X_1 \geq 0$

Límite inferior para los bonos: $X_2 \geq 25$

Límite superior para los préstamos: $X_1 \leq 50$

Límite superior para los bonos: $X_2 \leq 100$

Y ya tenemos la formulación completa de nuestro problema de inversión, la cual tiene la forma descrita en la formulación general.

6. Problema de selección de inversiones (Problema de la mochila)

Un problema en apariencia muy similar al anteriormente discutido es aquel en donde se tiene un capital, o cualquier otro tipo de recurso, y se desea invertir en una serie de opciones con el fin de obtener la mayor rentabilidad de la inversión. La diferencia con el problema anterior radica en que en este caso cada proyecto tiene un valor fijo de inversión, no se puede decidir invertir más o menos que lo estipulado por cada proyecto. De la misma forma, al final del periodo de inversión cada proyecto paga una determinada cantidad de dinero y esta no es modificable. El origen exacto del problema no es muy claro, pero se ha rastreado hasta los años 30. Existen diferentes variaciones del problema, pero en general el problema, en su versión binaria (**0-1**), se pude describir así:

Se tiene un capital de K unidades monetarias el cual se debe invertir, por un único periodo, en una de las n opciones disponibles, digamos $P_1, P_2, \ldots, P_n$*; cada una de las opciones, digamos la opción* P_j*, requiere una inversión inicial fija* w_j *y al final del periodo bajo consideración otorga un pago de* c_j*. El objetivo es encontrar la mejor forma de invertir el capital de manera que se maximice la ganancia efectiva del periodo en consideración.*

La formulación general del problema contiene un elemento nuevo, las variables de decisión están restringidas a tomar uno de dos valores posibles, lo que se conoce como variables binarias. Para definir las variables de decisión, ya no consideramos la cantidad de dinero invertido en cada opción porque este es un parámetro fijo, en su lugar definimos una variable que nos indica si la en la opción se invierte o no. Así, se tiene una variable por cada tipo de inversión y se define así:

¿Sabía que...?

Este tipo de variables se conoce como variables binarias y no cumplen con el principio de divisibilidad de la programación lineal, lo que ocasiona que este modelo ya no sea un programa lineal. A este tipo de modelos se les conoce como programa entero mixto.

Se tiene una variable por cada tipo de inversión y se define así:

$$X_j = \begin{cases} 0 \text{ si no se invierte en la opción } P_j \\ 1 \text{ si se invierte en la opción } P_j \end{cases} \quad \forall \; j=1, \dots, n$$

La función objetivo está dada por la ganancia total y en función de las variables de decisión se representa como:

$$Z = c_1 X_1 + c_2 X_2 + \cdots + c_n X_n$$

Nótese que, por tratarse de variables binarias, la ganancia de cada proyecto se incluye totalmente o no se incluye en absoluto, no hay ganancias parciales por proyecto. Por tratarse de una ganancia, el criterio de optimización es el de **maximización**.

En la versión inicial del problema se tiene una única restricción, la del presupuesto total y esta queda de la forma:

$$w_1 X_1 + w_2 X_2 + \cdots + w_n X_n \leq K$$

Finalmente, no se tienen restricciones de no negatividad porque las variables están restringidas al conjunto {0,1}, así el problema toma la forma de:

$$\text{Max } Z = c_1 X_1 + c_2 X_2 + \cdots + c_n X_n$$

$$s.a$$

$$w_1 X_1 + w_2 X_2 + \cdots + w_n X_n \leq k$$

$$X_j \in \{0,1\} \quad \forall \, j=1,\dots,n$$

Ya en un ejemplo concreto, suponga que usted dispone de 30 millones para invertir y que le presentan un portafolio con 4 opciones, cada opción requiere una inversión inicial y produce un pago total al final de un año como se muestra en la siguiente tabla:

Tabla 2. Datos para el ejemplo del problema de la mochila

Proyecto	P1	P2	P3	P4
Inversión Inicial (millones)	7	15	6	12
Pago total (millones)	10	26	10	24

Fuente: elaboración propia

Su objetivo es encontrar la combinación de proyectos en los cuales debe invertir para maximizar su ganancia.

La formulación para esta instancia del problema quedaría:

6.1. Variables de decisión

La decisión en este problema es si un proyecto se incluye o no en la inversión, por lo tanto definimos, para cada proyecto:

$$X_j = \begin{cases} 0 \text{ si no se invierte en la opción } P_j \\ 1 \text{ si se invierte en la opción } P_j \end{cases}$$

Donde el índice j recorre el rango de 1 a 4.

6.2. Función objetivo y criterio de optimización

El objetivo en este problema es encontrar el plan de inversiones que produzca la mayor ganancia, por lo tanto, la función objetivo está relacionada con la ganancia de cada proyecto y el criterio es de maximización, así tenemos que:

$$\text{Max } Z = 10X_1 + 26X_2 + 10X_3 + 24X_4$$

6.3. Restricciones

La única restricción es la que tiene que ver con el presupuesto disponible, por lo tanto, la suma de todas las inversiones no puede superar el capital disponible, esto es:

$$X_1 + X_2 + X_3 + X_4 \leq 30$$

Finalmente, debemos incluir la restricción que indica que las variables son binarias:

$$Xj \in \{0,1\} \quad \forall\, j = 1,\ldots,4$$

Y ya tenemos la formulación completa de nuestro problema de inversión, la cual tiene la forma descrita en la formulación general.

7. Problema de transporte

¿Sabía que...?

Este tal vez es uno de los problemas de programación lineal más conocidos y utilizados. Los orígenes del problema se pueden rastrear hasta 1781 (Monge, 1781).

En este problema se trata de encontrar la mejor manera de transportar productos entre los almacenes o plantas de producción y los clientes finales. Cada trayecto utilizado tiene un costo unitario asociado y la idea es encontrar el plan de envíos que minimice el costo total de transporte. Aunque la formulación original trataba con envíos entre ciudades o puertos diferentes, la formulación se puede aplicar a problemas de producción en donde los envíos se refieren precisamente a la demanda del producto sin que esto incluya ningún tipo de transporte. Existe una formulación en el área de flujo en redes que es tal vez mucho más conocida y sobre la cual se pueden aplicar algoritmos muy eficientes para encontrar la solución al problema. Sin embargo, nosotros usaremos la formulación como programa lineal. La descripción general del problema, considerando un único tipo de producto, se puede resumir así:

Se tiene un conjunto de m orígenes (plantas, puertos, almacenes, ciudades) en donde se tiene, o produce, un único tipo de producto que debe ser enviado a un conjunto de n destinos, cada uno con su propia demanda del producto. Cada origen i tiene una oferta O_i y cada destino j una demanda de D_j. Existen medios de transporte entre cada origen y cada destino, pero cada combinación conlleva un costo unitario diferente, digamos que entre el origen i y el destino j el costo unitario de transporte es de c_{ij}. La idea es encontrar el plan de envíos óptimo que satisface todas las demandas al menor costo.

La formulación general del problema de transporte es la siguiente:

Se definen como variables de decisión como la cantidad de producto enviado desde cada origen a cada destino, esto es:

X_{ij}: Cantidad de producto enviada desde el origen i al destino j $\forall\ i = 1,\dots,m, \forall\ j = 1,\dots,n$

Nótese que ahora la variable de decisión tiene dos subíndices, así por ejemplo la variable X_1,1 se debe entender como la variable que corresponde al envío desde el origen 1 al destino 1 y no como la undécima variable del problema. Entonces en total se tiene una variable por cada combinación origen-destino.

La función objetivo está dada por el costo total de todos los envíos y en función de las variables de decisión se representa como:

$$Z = c_{11} X_{11} + c_{12} X_{12} + \cdots + c_{1n} X_{1n} + c_{21} X_{21} + c_{22} X_{12} + \cdots + c_{2n} X_{2n} + \cdots + c_{mn} X_{mn}$$

Lo cual utilizando la notación de sumatoria se puede simplificar a:

$$Z = \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} c_{ij} X_{ij}$$

Por tratarse de un costo, el criterio de optimización es el de **minimización.**

El conjunto de restricciones está formado por dos subconjuntos, uno que garantiza que no se sobrepasan las ofertas de cada origen y otro que garantiza que todas las demandas son satisfechas. Para las ofertas tenemos que:

$$X_{11} + X_{12} + \cdots + X_{1n} \leq O_1$$

$$X_{21} + X_{22} + \cdots + X_{2n} \leq O_2$$

$$X_{m1} + X_{m2} + \cdots + X_{mn} \leq O_m$$

Lo que nuevamente usando sumatorias se puede escribir como:

$$\sum_{j=1}^{n} X_{ij} \leq O_i \ \forall \ i=1,\ldots,m$$

Por otra parte, para las demandas tenemos que:

$$X_{11} + X_{21} + \cdots + X_{m1} \geq D_1$$

$$X_{12} + X_{22} + \cdots + X_{m2} \geq D_2$$

$$X_{1n} + X_{2n} + \cdots + X_{mn} \leq D_n$$

Lo que usando sumatorias se puede escribir como:

$$\sum_{i=1}^{m} X_{ij} \geq D_j \forall j = 1,\ldots,n$$

Finalmente, se agregan las restricciones de no negatividad y el problema toma la forma de:

$$\text{Min } Z = \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} c_{ij} X_{ij}$$

$$\sum_{j=1}^{n} X_{ij} \leq O_i \forall \; i = 1,\ldots, m$$

$$\sum_{i=1}^{m} X_{ij} \geq D_j \quad j = 1,\ldots, n$$

$$X_{ij} \geq 0 \forall i = 1,\ldots,m, \forall j = 1,\ldots,n$$

Para finalizar con un ejemplo puntual del problema, considere la siguiente situación:

Suponga que una pequeña compañía compra su principal insumo en el exterior y le llega por barco a los puertos de Buenaventura, Tumaco y Urabá. A cada puerto llegan al mes 25, 15 y 10 toneladas del insumo respectivamente. Sus plantas de producción se localizan en Cartago y Envigado y cada una demanda mensualmente 25 toneladas del insumo. En la siguiente tabla se muestran los costos unitarios, por tonelada, para transportar el insumo entre cada puerto y cada planta.

Tabla 3. Datos para el ejemplo del problema de transporte

	Cartago	Envigado
Buenaventura	35000	75000
Tumaco	42000	66000
Urabá	82000	40000

Fuente: elaboración propia

La compañía desea encontrar el plan de envíos que minimice sus costos totales de transporte.

La formulación para este problema quedaría:

7.1. Variables de decisión

La decisión en este problema es la cantidad a enviar desde cada puerto a cada planta, por lo tanto definimos:

X_{ij}: Cantidad de producto enviada desde el puerto i a la planta j $\forall\ i=1,2,3, \forall\ j=1,2$

7.2. Función objetivo y criterio de optimización

El objetivo en este problema es encontrar el plan de envíos con el menor costo total, por lo tanto la función objetivo está relacionada con el costo de cada trayecto y el criterio es de minimización, por lo tanto tenemos que:

$$\text{Min } Z = 35000X_{11} + 75000X_{12} + 42000X_{21} + 66000X_{22} + 82000X_{31} + 40000X_{32}$$

7.3. Restricciones

Para los puertos tenemos restricciones sobre la cantidad a enviar desde cada uno, es decir:

Para Buenaventura tenemos que: $X_{11} + X_{12} \leq 25$

Para Tumaco tenemos que: $X_{21} + X_{22} \leq 15$

Para Urabá tenemos que: $X_{31} + X_{32} \leq 10$

Finalmente, para cada planta tenemos que satisfacer la demanda, es decir:

Para Cartago tenemos que: $X_{11} + X_{21} + X_{31} \geq 25$

Para Envigado tenemos que: $X_{12} + X_{22} + X_{32} \geq 25$

Finalmente, debemos incluir la restricción de no negatividad:

$$\mathrm{X}ij \geq 0 \quad \forall\, i = 1,2,3, \forall\, j = 1,2$$

Y ya tenemos la formulación completa de nuestro problema de inversión, la cual tiene la forma descrita en la formulación general

Referencias

Broaddus, A. (1972). Linear Programming: A New Approach to Bank Portfolio Management. *Federal reserve bank of Richmond monthly review*, *58*(11), 1–11. Recuperado de https://fraser.stlouisfed.org/docs/publications/frbrichreview/pages/65726_1970-1974.pdf

Monge, G. (1781). Mémoire sur la théorie des déblais et des remblais. *Histoire de l'Académie Royale des Sciences de Paris, avec les Mémoires de Mathématique et de Physique pour la même année*, 666–704.

Stigler, G. J. (1945). The Cost of Subsistence. *Journal of Farm Economics*, *27*(2), 303. Recuperado de https://doi.org/10.2307/1231810

INFORMACIÓN TÉCNICA

FACULTAD DE
INGENIERÍA, DISEÑO
E INNOVACIÓN

Módulo: Investigación de Operaciones

Unidad 1: Formulación de programas lineales

Escenario 2: Formulación de modelos algebraicos

Autor: Juan Carlos Gutiérrez Vanegas

Asesor Pedagógico: Amparo Sastoque

Diseñador Gráfico: Juan Rodríguez

Asistente: Eveling Peñaranda