Cálculo 1.

Lectura No.11. Funciones trigonométricas inversas.

Hugo E. Zamora C.

POLITÉCNICO GRANCOLOMBIANO
INSTITUCIÓN UNIVERSITARIA
En alianza con
WHITNEY INTERNATIONAL UNIVERSITY SYSTEM
Colombia

Sección 1: Introducción

Los problemas de la cotidianidad que originan conocimiento matemático tienen diversas formas de presentación, las cuales posibilitan distintas aproximaciones a las nociones relacionadas con los elementos de los problemas. En ese sentido, así como se han explorado formas de relacionar los lados de un triángulo rectángulo, que se han nombrado como razones trigonométricas de un ángulo, se dirige ahora el interés del estudio hacia la determinación de las medidas de ángulos si se conocen sus razones o funciones trigonométricas.

Esta mirada se plantea desde las funciones trigonométricas y el estudio de sus propiedades, con objeto de intentar determinar la existencia de la función inversa para cada una de ellas. A continuación se examinan las ecuaciones trigonométricas, las cuales en sus procesos de resolución usan elementos de las funciones inversas.

Sección 2: Restricción de funciones.

En lecturas previas se ha afirmado que una función tiene inversa o es invertible si es uno a uno. Para el caso de las funciones trigonométricas, debido al hecho que son periódicas, es correcto afirmar que ninguna de ellas es uno a uno, por lo tanto no se podría hablar de la existencia de la inversa.

Sin embargo, mediante una restricción del dominio de cada una de las funciones trigonométricas es posible considerar la existencia de la función inversa. Restringuir el dominio de una función consiste en seleccionar un subconjunto del dominio de la función, en el cual la función sea uno a uno y que contenga (en este caso), la información de los posibles valores de imágenes de la función estudiada.

Usualmente el dominio de $f(x) = \sin x$ se restringe al intervalo $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$, pues en dicho intervalo la función seno asume todos los valores posibles, es decir los números reales entre -1 y 1 y además la función es uno a uno. Así que la función seno restringida a dicho intervalo se escribe $f(x) = \sin x$, con $-\frac{\pi}{2} \leq x \leq \frac{\pi}{2}$. En este escrito para referirnos a la función restringida, se hará mediante la notación: $f(x) = \mathbf{sin\,x}$. (La diferencia está en el tipo de letra usado y en la negrilla de los caracteres). Note que el dominio de $f(x) = \mathbf{sin\,x}$ es $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ y su rango es $[-1, 1]$. Las figuras 1 y 2 muestran las gráficas de $f(x) = \sin x$ y $f(x) = \mathbf{sin\,x}$.

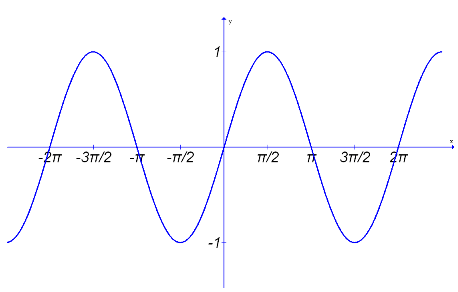


Figura 1: Gráfica de $y = \sin x$

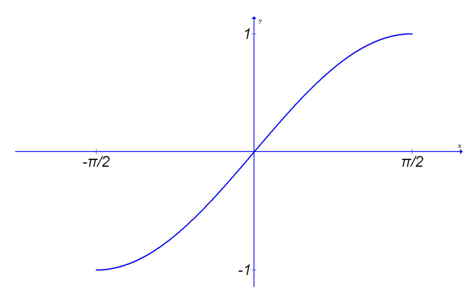


Figura 2: Gráfica de $f(x) = \mathbf{sin\,x}$

Mediante razonamientos similares se construyen las demás funciones trigonométricas restringidas. En el caso de $f(x) = \cos x$ su dominio se restringue a $[0, \pi]$ y para $f(x) = \tan x$ se considera como dominio el intervalo $(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$. Las figuras 3 a 6 muestran las funciones trigonométricas coseno y tangente en su dominio y las funciones $f(x) = \mathbf{cos\,x}$ y $f(x) = \mathbf{tan\,x}$.

Se invita al lector para que esboce las gráficas de las funciones cotangente, secante y cosecante restringidas de tal forma, que se conviertan en funciones uno a uno.

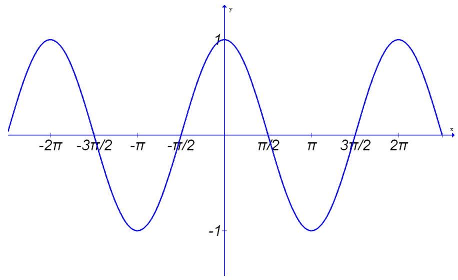


Figura 3: Gráfica de $y = \cos x$

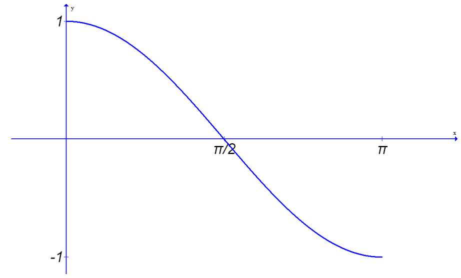


Figura 4: Gráfica de $f(x) =$ **cos x**

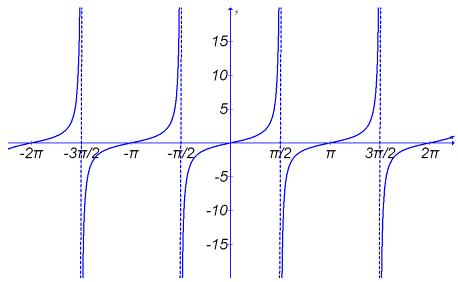


Figura 5: Gráfica de $y = \tan x$

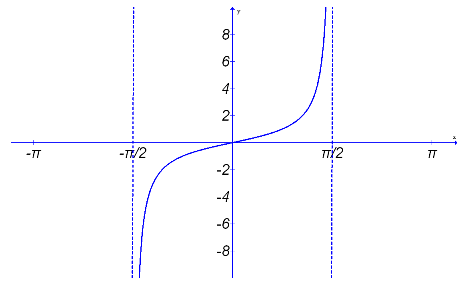


Figura 6: Gráfica de $f(x) =$ **tan x**

Sección 3: Las funciones trigonométricas inversas

Una vez definidas las funciones trigonométricas restringidas en su dominio, de tal forma que sean funciones uno a uno, es posible determinar y estudiar la función inversa de cada una de ellas.

Si $f(x) =$ **sin x** , entonces la función $y = \sin^{-1} x$ se denomina la función inversa de f. La expresión $y = \sin^{-1} x$ equivale a afirmar que $x = \sin y$. La función inversa de $f(x) =$ **sin x** también se escribe como $y = \arcsin x$.

Como se tiene que $D_f = [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ y que $R_f = [-1, 1]$, note que el dominio de $y = \sin^{-1} x$ es $[-1, 1]$ y su rango es $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$. Los ceros de la función inversa se tienen para valores x tales que $0 = \sin^{-1} x$. Esto quiere decir que $\sin 0 = x$, o sea que $x = 0$. El intercepto de la gráfica de $y = \sin^{-1} x$ con el eje vertical se encuentra mediante la imagen de 0, es decir $y = \sin^{-1} 0$, lo que significa que $\sin y = 0$ con $-\frac{\pi}{2} \leq y \leq \frac{\pi}{2}$, es decir $y = 0$ es el único ángulo que en este intervalo cumple la condición. Con esta información y algunos puntos de la función obtenidos con la equivalencia entre $y = \sin^{-1} x$ y $x = \sin y$ (como se muestra en las tablas) se esboza la gráfica correspondiente, que se muestra en la figura 7.

Valores para $x = \sin y$					
x	$-\frac{\pi}{2}$	$-\frac{\pi}{4}$	0	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{2}$
y	-1	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	0	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	1

Valores para $y = \sin^{-1} x$					
x	-1	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	0	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	1
y	$-\frac{\pi}{2}$	$-\frac{\pi}{4}$	0	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{2}$

3.1: Ejemplos

1. Como $f(x) =$ **sin x** y $y = \sin^{-1}(x)$ son funciones inversas, entonces se cumple que $\sin(\sin^{-1}(x)) = x$ o también que $\sin(\arcsin x) = x$ con la condición que $-1 \leq x \leq 1$. Asimismo se tiene que $\sin^{-1}(\sin y) = y$ o en forma equivalente $\arcsin(\sin y) = y$ siempre que $-\frac{\pi}{2} \leq y \leq \frac{\pi}{2}$. Es importante construir con las demás funciones trigonométricas restringidas y sus inversas, igualdades similares a las indicadas, con las condiciones necesarias para cada una de ellas.

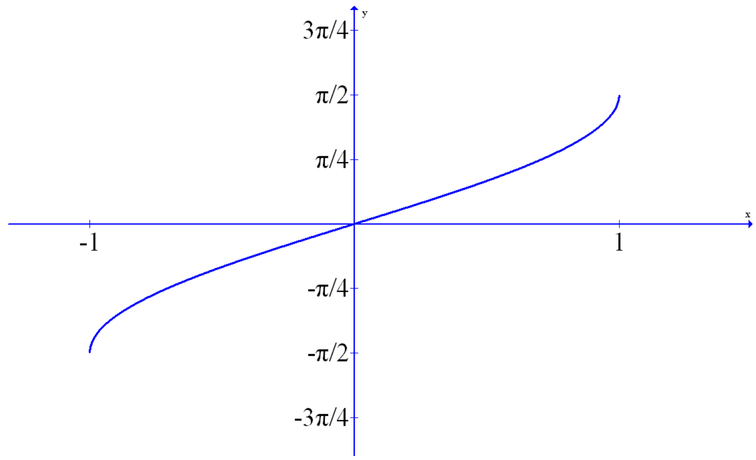


Figura 7: Gráfica de $f(x) = \arcsin x$

Es correcto afirmar que $\sin(\sin^{-1}(\frac{\sqrt{2}}{2})) = \frac{\sqrt{2}}{2}$ pues se tiene que $-1 \leq \frac{\sqrt{2}}{2} \leq 1$. Sin embargo al evaluar la expresión $\sin^{-1}(\sin\frac{5\pi}{6})$ es incorrecto afirmar que se obtiene $\frac{5\pi}{6}$ pues este valor no pertenece al intervalo $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$. En este caso se evalúa en primer lugar la expresión $\sin\frac{5\pi}{6}$ y luego se evalúa la expresión que contiene la función inversa. Se procede así: $\sin^{-1}(\sin\frac{5\pi}{6}) = \sin^{-1}(\frac{1}{2}) = \frac{\pi}{6}$. Note que $\frac{\pi}{6}$ pertenece al intervalo $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$

2. Para determinar el valor de la expresión $\cos^{-1}\left(\tan\frac{3\pi}{4}\right)$, es usual proceder de la siguiente forma. Se nombra la expresión, por ejemplo como $A = \cos^{-1}\left(\tan\frac{3\pi}{4}\right)$ y se evalúa la función trigonométrica, obteniéndose la expresión $A = \cos^{-1}(-1)$. Esta igualdad equivale a $\cos A = -1$ con $0 \leq A \leq \pi$. Así que $A = \pi$. En este tipo de evaluaciones se recurre a valores de funciones trigonométricas de ángulos particulares y conocidos (cuando se quiere expresar en forma exacta el valor de la expresión) o a una calculadora para hallar valores aproximados.

3. La determinación del valor preciso de la expresión $\sin(\cos^{-1}(\frac{3}{4}))$ se hace con base en la definición de razones trigonométricas de ángulos agudos de un triángulo rectángulo, o con base en la definición de las funciones trigonométricas de un ángulo en posición normal. Una forma de proceder consiste en nombrar la expresión que contiene la función trigonométrica inversa, por ejemplo $B = \cos^{-1}(\frac{3}{4})$ en este caso. Esto significa que $\cos B = \frac{3}{4}$ por lo cual el cálculo pedido se reduce a determinar el valor de $\sin B$ con $0 \leq B \leq \pi$. Es decir que en este caso B es un ángulo agudo. (¿Por qué?)

   Es corriente representar la situación en un triángulo rectángulo, para hallar $\sin B$.

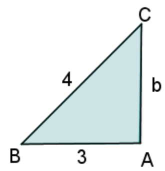
4. Es habitual simplificar expresiones que contienen funciones trigonométricas inversas y escribirlas en términos algebraicos de las variables que aparecen en la expresión. Para simplificar la expresión $\tan(\arcsin x)$ en términos de x se procede en forma similar a la realizada en el ejemplo anterior. Si se asume $x > 0$, se nombra la expresión que contiene la función trigonométrica inversa y se representa la situación en un triángulo rectángulo.

3.2: Ejercicios

1. En la discusión teórica se ha mostrado una forma de esbozar la gráfica de la función $y = \sin^{-1} x$. Seguir este procedimiento para graficar las demás funciones trigonométricas inversas.

2. Calcular cada una de las expresiones dadas. Use calculadora si es necesario.

   a) $\cot^{-1}(\tan\frac{\pi}{4})$



Uno de los ángulos agudo se nombra como $\widehat{B}$. Por lo tanto el cateto adyacente a $\widehat{B}$ mide 3 y la hipotenusa mide 4. Para determinar el valor de $\sin B$ se determina la medida del cateto opuesto a $\widehat{B}$.

Se tiene que $4^2 = b^2 + 3^2$. Así que $7 = b^2$ y por lo tanto $b = \sqrt{7}$. Esto significa que $\sin B = \frac{\sqrt{7}}{4}$

Figura 8: Triángulo Rectángulo

b) $\tan^{-1}(\tan \frac{11\pi}{6})$
c) $\sin^{-1}(\sec 0)$

3. Calcular cada una de las expresiones dadas. Use triángulos rectángulos o ángulos en posición estándar para ilustrar las situaciones.

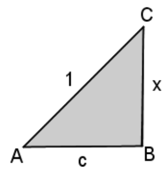
   a) $\sin[\cos^{-1} 0]$
   b) $\sec[\cos^{-1}(\frac{\sqrt{3}}{2})]$
   c) $\cot[\tan^{-1}(1)]$
   d) $\tan[\sin^{-1}(-\frac{1}{2})]$
   e) $\sin[\sin^{-1}(\frac{12}{13}) - \cos^{-1}(\frac{3}{5})]$. Sugerencia: Nombre $A = \sin^{-1}(\frac{12}{13})$ y $B = \cos^{-1}(\frac{3}{5})$
   f) $\sin[2\sin^{-1}(\frac{4}{5})]$

4. Si $x > 0$, escriba en términos de x cada una de las expresiones dadas.

   a) $\cos(\tan^{-1} x)$
   b) $\csc(\cos^{-1}\left(\frac{x}{\sqrt{x^2+4}}\right))$
   c) $\sin(2\tan^{-1} x)$
   d) $\cos(\frac{1}{2}\cos^{-1} x)$

5. Trazar la gráfica de cada función. Utilizar movimientos geométricos sobre funciones trigonométricas básicas.

   a) $y = \cos^{-1}(x-1) + 2$
   b) $y = -3\sin^{-1} 2x$



Sea $\arcsin x = A$. Esto significa que $\sin x = A$. Por lo tanto para simplificar $\tan(\arcsin x)$, basta determinar el valor de $\tan A$. De acuerdo con el gráfico se tiene que el cateto opuesto a $\widehat{A}$ mide x y la hipotenusa mide 1. Así que $1^2 = x^2 + c^2$. Por lo tanto, $c = \sqrt{1-x^2}$. Se sigue que $\tan A = \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}$

Figura 9: Triángulo Rectángulo

Sección 4: Ecuaciones trigonométricas

Expresiones de igualdad que contienen funciones trigonométricas cuyos ángulos están expresados en términos de variables y que son verdaderas para algunos valores de la variable, se denominan ecuaciones trigonométricas. Se propone el estudio de formas de determinar soluciones de ecuaciones trigonométricas. Se hará uso del conocimiento sobre solución de ecuaciones como las lineales, cuadráticas, racionales, etc; así como también se recurre al uso de identidades trigonométricas.

Es común plantear dos escenarios para la solución de una ecuación trigonométrica. Uno de ellos es aquel donde se asume que la variable admite cualquier valor real condicionado a la función trigonométrica en consideración y otro donde se especifica un intervalo en el cual se quieren hallar las soluciones de la ecuación. En general, el intervalo para la segunda situación es $[0, 2\pi]$.

Así que la solución de $\cos x = \frac{1}{2}$ en $[0, 2\pi]$ se obtiene teniendo en cuenta que $\cos x = \frac{1}{2}$ equivale a $x = \cos^{-1}\frac{1}{2}$, lo que significa que es necesario hallar x ángulo en radianes cuyo coseno sea $\frac{1}{2}$. Note que x es un ángulo del primer cuadrante o del cuarto cuadrante. De acuerdo con el estudio en lecturas anteriores se ha mostrado que $\cos\frac{\pi}{3} = \frac{1}{2}$. Este ángulo es del primer cuadrante y a la vez es el ángulo t de referencia para hallar el ángulo x del cuarto cuadrante que también es solución de la ecuación. Se tiene que $t = 2\pi - x$, así que $x = 2\pi - \frac{\pi}{3} = \frac{5\pi}{3}$. Por lo tanto, el conjunto solución de la ecuación es $\{\frac{\pi}{3}, \frac{5\pi}{3}\}$

Ahora, si se asume que la ecuación se soluciona en $\mathbb{R}$ basta usar la periodicidad de la función coseno (que es 2π) y expresar el conjunto solución como $\{x : x = \frac{\pi}{3} + 2\pi k,\ \text{o}\ x = \frac{5\pi}{3} + 2\pi k, \text{con } k \in \mathbb{Z}\}$

4.1: Ejemplos

1. El procedimiento para solucionar la ecuación $2\sin^2 x + 4\sin x = 0$ en $[0, 2\pi]$ se apoya en el uso de propiedades de los reales, de la siguiente forma:

$$
\begin{aligned}
2\sin^2 x + 4\sin x &= 0 && \\
2\sin x(1 + 2\sin x) &= 0 && \text{Factorización del binomio}\\
2\sin x = 0, \text{o},\ 1 + 2\sin x &= 0 && \text{Propiedad de los números reales}\\
\sin x = 0, \text{o},\ \sin x &= -\frac{1}{2} && \text{Despeje de } \sin x \text{ en cada ecuación}\\
x = \sin^{-1}(0), \text{o},\ x &= \sin^{-1}\left(-\frac{1}{2}\right) && \text{Despeje de } x
\end{aligned}
$$

Las soluciones de $x = \sin^{-1} 0$ en $[0, 2\pi]$ son $x = 0, \pi, 2\pi$. (¿Por qué?) Para obtener la solución de $x = \sin^{-1}\left(-\frac{1}{2}\right)$ en $[0, 2\pi]$, hay que tener en cuenta que de acuerdo con la definición de la función inversa del seno, $x \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$. Así que utilizando valores de ángulos particulares estudiados antes o una calculadora se obtiene que $x = -\frac{\pi}{6}$.

Para hallar la solución en el intervalo especificado, se asume que el ángulo de referencia es $t = \frac{\pi}{6}$ y como x debe ser un ángulo del tercer cuadrante o del cuarto cuadrante entonces se tiene que $t = x - \pi$, o $t = 2\pi - x$, por lo tanto $\frac{\pi}{6} = x - \pi$, o $\frac{\pi}{6} = 2\pi - x$ y así $x = \frac{7\pi}{6}$, o $x = \frac{11\pi}{6}$.

Así que el conjunto solución de la ecuación es $\{0, \pi, \frac{7\pi}{6}, \frac{11\pi}{6}, 2\pi\}$

2. Para solucionar la ecuación $\sin^2 x = 2\cos x - 2$ en $[0, 2\pi]$, se tiene en cuenta que al usar la identidad $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$ se logra escribir la ecuación en términos de $\cos x$ y se obtiene una ecuación cuadrática. Se procede entonces de la siguiente forma:

$$
\begin{aligned}
\sin^2 x &= 2\cos x - 2 && \\
1 - \cos^2 x &= 2\cos x - 2 && \sin^2 x = 1 - \cos^2 x\\
\cos^2 x + 2\cos x - 3 &= 0 && \text{Igualar la ecuación a } 0\\
(\cos x + 3)(\cos x - 1) &= 0 && \text{Factorización del trinomio}\\
\cos x + 3 = 0, \text{o},\ \cos x - 1 &= 0 && \text{Propiedad de los reales}\\
\cos x = -3, \text{o},\ \cos x &= 1 && \text{Despeje de } \cos x\\
x = \cos^{-1}(-3), \text{o},\ x &= \cos^{-1}(1) && \text{Despeje del ángulo } x
\end{aligned}
$$

Observe que la ecuación $x = \cos^{-1}(-3)$ no tiene solución, pues la función inversa del coseno tiene como dominio el intervalo $[-1, 1]$. La ecuación $x = \cos^{-1}(1)$ tiene solución en $x = 0$, 0 $x = \pi$. Luego, la solución de la ecuación dada es $\{0, \pi\}$.

3. Un procedimiento para resolver la ecuación $\sin 2x = \tan x \sin 2x$ en $[0, 2\pi]$ requiere un manejo particular en cuanto se consideran diferentes tipos de ángulos. Una forma de determinar el conjunto solución de la

ecuación es:

$$\begin{aligned}
\sin 2x &= \tan x \sin 2x \\
\sin 2x - \tan x \sin 2x &= 0 && \text{Igualar la ecuación a 0} \\
\sin 2x(1 - \tan x) &= 0 && \text{Factorización del binomio} \\
\sin 2x = 0,\ \text{o},\ 1 - \tan x &= 0 && \text{Propiedad de los reales} \\
\sin 2x = 0,\ \text{o},\ \tan x &= 1 && \text{Despeje de cada función trigonométrica} \\
2x = \sin^{-1}(0),\ \text{o},\ x &= \tan^{-1}(x) && \text{Despeje de cada ángulo}
\end{aligned}$$

Note que el ángulo en la ecuación $\sin 2x = 0$ es $2x$, así que se realiza la siguiente consideración para determinar los valores x que hacen verdadera la ecuación: Como se tiene que $0 \leq x \leq 2\pi$, entonces $0 \leq 2x \leq 4\pi$. (¿Cuál es la razón de esta afirmación?). Así que se determinan ángulos entre 0 y 4π para los cuales el valor de la función seno sea 0. Entonces se tiene que $2x = 0, \pi, 2\pi, 3\pi, 4\pi$ y por lo tanto $x = 0, \frac{\pi}{2}, \pi, \frac{3\pi}{2}, 2\pi$

Las soluciones de $\tan x = 1$ son ángulos del primer cuadrante y del tercer cuadrante. En el primer cuadrante se tiene que $x = \frac{\pi}{4}$ que a la vez es el ángulo de referencia t para determinar el ángulo x solución del tercer cuadrante. Como se tiene que $t = \pi - x$ para x en el tercer cuadrante, entonces $x = \frac{5\pi}{4}$. En suma el conjunto solución de la ecuación es $\{0, \frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}, \pi, \frac{5\pi}{4}, \frac{3\pi}{2}, 2\pi\}$

4.2: Ejercicios

Resolver las ecuaciones dadas, en el intervalo $[0, 2\pi]$

1. $\sqrt{3}\cos\theta - 2\cos^2\theta = 0$
2. $\sec x - 2 = 0$
3. $\tan\alpha + \sqrt{3} = 0$
4. $2\sin^2 A = \sin A + 1$
5. $2\cos^2 t + 7\sin t = 5$
6. $2\cos 2\beta - \sqrt{2} = 0$
7. $2\cos(x - \frac{\pi}{6}) = 1$
8. $1 - \sqrt{3}\sin t = \cos t$
9. $2\tan B = \sec^2 B$
10. $2\cos^3 x + \cos^2 x - 2\cos x = 1$