POLI POLITÉCNICO GRANCOLOMBIANO INSTITUCIÓN UNIVERSITARIA

FACULTAD DE INGENIERÍA, DISEÑO E INNOVACIÓN

Unidad 2 / Escenario 4

Lectura fundamental

Otros métodos de integración

Contenido

1 Método de integración por sustitución trigonométrica

2 Integrales de funciones racionales

Palabras clave: integración, trigonométrica, racionales, cociente.

1. Método de integración por sustitución trigonométrica

Aunque el método de sustitución permite determinar y evaluar algunas integrales, existen expresiones como como $\sqrt{a^2-x^2}$, $\sqrt{a^2+x^2}$ o $\sqrt{x^2-a^2}$ que requieren de una sustitución de tipo trigonométrico para su resolución.

Un aspecto a tener en cuenta en las integrales que contienen las expresiones algebraicas presentadas se centra en que estas se pueden asociar, a través del teorema de Pitágoras, con triángulos rectángulos, los cuales, a su vez, permiten establecer, con las razones trigonométricas, sustituciones que facilitan los procesos de integración. Es de aquí que proviene el nombre de sustituciones trigonométricas.

Para explicar este tipo de sustitución se presentarán cinco ejemplos que contienen en su integrando expresiones como las mencionadas y, posterior a esto, se hará un resumen que permite al lector reconocer el proceso de determinación y cálculo de integrales que se resuelven bajo sustituciones trigonométricas.

Ejemplo 1. Determine $\int \sqrt{a^2-x^2}\,dx$

Cuando la expresión es de la forma a^2-x^2 se dibuja un triángulo rectángulo en el que se ubica la información junto con el teorema de Pitágoras, para encontrar el cateto adyacente. Se considera el triángulo rectángulo porque al revisar sus diferentes opciones, esta es la que más reduce el proceso de integración. Observe la figura 1:

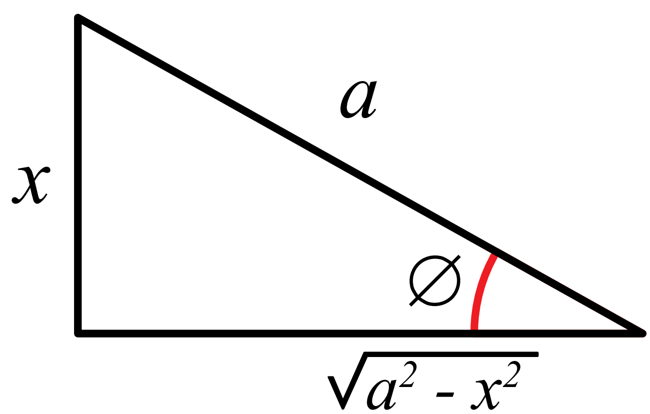

Figura 1. Integrando de la forma $\sqrt{a^2-x^2}$

Fuente: elaboración propia

De dicho triángulo es posible establecer las relaciones $sin\varnothing = \frac{x}{a}$, de donde $x = asin\varnothing$ y $cos\varnothing = \frac{\sqrt{a^2-x^2}}{a}$, de la cual $\sqrt{a^2-x^2} = acos\varnothing$.

Si se hace la sustitución $x = asin\varnothing$, al derivar se tiene que el diferencial de ella sería $dx = acos\varnothing d\varnothing$, por lo que:

$\int\sqrt{a^2-x^2}dx = \int\sqrt{a^2-(asin\varnothing)^2}\,acos\varnothing d\varnothing$	Se sustituye x y dx en la integral dada
$= \int\sqrt{a^2-a^2sin^2\varnothing}\,acos\varnothing d\varnothing$	Se opera la potencia del paréntesis
$= \int\sqrt{a^2(1-sin^2\varnothing)}\,acos\varnothing d\varnothing$	Se factoriza a^2
$= \int\sqrt{a^2cos^2\varnothing}\,acos\varnothing d\varnothing$	Se hace uso de la identidad $1-sin^2\varnothing = cos^2\varnothing$
$= \int acos\varnothing acos\varnothing d\varnothing$	Se extrae la raíz

Observe que el cálculo de la raíz corresponde a la relación que no se usó en la integral cuando se inició el ejemplo. Si el lector gusta, se puede hacer el cambio desde el principio para reducir procesos porque se llega a la misma expresión.

$= \int a^2cos^2\varnothing d\varnothing$	Se opera el resultado
$= a^2\int cos^2\varnothing d\varnothing$	Se aplican propiedades
$= a^2\left(\frac{1}{2}\varnothing + \frac{1}{4}sin2\varnothing\right) + C$	Se usa el resultado encontrado en la sección anterior (ejemplo 2 de las integrales trigonométricas)
$= \frac{a^2}{2}\varnothing + \frac{a^2}{4}(2sin\varnothing cos\varnothing) + C$	Se aplica propiedad distributiva y la identidad del ángulo doble
$= \frac{a^2}{2}\varnothing + \frac{a^2}{2}(sin\varnothing cos\varnothing) + C$	Se realiza la multiplicación indicada

Como la idea es dejar en la respuesta el integrando, se observa el triángulo rectángulo y de ahí se obtienen los valores de las funciones en términos de x, a y $\sqrt{a^2-x^2}$. Eso significa que:

$tan\varnothing = \frac{x}{\sqrt{a^2-x^2}}$, por lo que $\varnothing = tan^{-1}\left(\frac{x}{\sqrt{a^2-x^2}}\right)$. De otra parte, como $sin\varnothing = \frac{x}{a}$ y $cos\varnothing = \frac{\sqrt{a^2-x^2}}{a}$, se sustituyen estas expresiones así:

$$\int \sqrt{a^2-x^2}\,dx = \frac{a^2}{2}\varnothing + \frac{a^2}{2}(sin\varnothing cos\varnothing) + C = \frac{a^2}{2}tan^{-1}\left(\frac{x}{\sqrt{a^2-x^2}}\right) + \frac{a^2}{2}\left(\frac{x}{a}\right)\left(\frac{\sqrt{a^2-x^2}}{a}\right) + C$$

Que, al simplificar las expresiones, arroja el siguiente resultado:

$$\int \sqrt{a^2-x^2}\,dx = \frac{a^2}{2}tan^{-1}\left(\frac{x}{\sqrt{a^2-x^2}}\right) + \frac{1}{2}x\sqrt{a^2-x^2} + C$$

Ejemplo 2. Determine $\int \sqrt{x^2-a^2}\,dx$

Para empezar, como la expresión es de la forma x^2-a^2, se va a dibujar un triángulo rectángulo ubicando esta información en él y utilizando el teorema de Pitágoras para encontrar el otro cateto. Observe la figura 2:

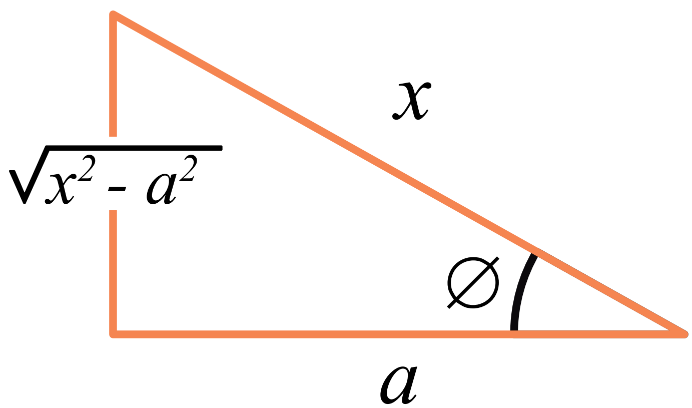

Figura 2. Integrando de la forma $\sqrt{x^2-a^2}$
Fuente: Elaboración propia (2018)

En este triángulo es posible establecer las relaciones $sec\varnothing = \frac{x}{a}$, de donde $x = asec\varnothing$ y $tan\varnothing = \frac{\sqrt{x^2-a^2}}{a}$, de la cual $\sqrt{x^2-a^2} = atan\varnothing.$

Si se hace la sustitución $x = asec\varnothing,$ al derivar se tiene que el diferencial de ella sería:

$dx = asec\varnothing tan\varnothing d\varnothing$, y $\sqrt{x^2-a^2} = atan\varnothing;$ se tiene:

$\int \sqrt{x^2-a^2}\,dx = \int atan\varnothing asec\varnothing tan\varnothing d\varnothing$ Se sustituyen las expresiones anteriores

$= \int a^2 sec\varnothing tan^2\varnothing d\varnothing$ Se opera el resultado

$$= a^2 \int sec\varnothing tan^2\varnothing d\varnothing$$ Se aplican propiedades

$$= a^2 \int sec\varnothing\left(sec^2\varnothing - 1\right) d\varnothing$$ Se usa la identidad trigonométrica $tan^2\varnothing + 1 = sec^2\varnothing$

$$= a^2 \int \left(sec^3\varnothing - sec\varnothing\right) d\varnothing$$ Se aplica propiedad distributiva

$$= a^2 \left(\frac{sec\varnothing tan\varnothing}{2} + \frac{ln\left|sec\varnothing + tan\varnothing\right|}{2} - ln\left|sec\varnothing + tan\varnothing\right| \right) + C$$ Se integra con respecto a $\varnothing$

$$= a^2 \left(\frac{sec\varnothing tan\varnothing}{2} - \frac{1}{2} ln\left|sec\varnothing + tan\varnothing\right| \right) + C$$ Se realiza la suma indicada

$$= \frac{a^2}{2} \left(\frac{x}{a} \bullet \frac{\sqrt{x^2 - a^2}}{a} - ln\left| \frac{x}{a} + \frac{\sqrt{x^2 - a^2}}{a} \right| \right) + C$$ Se escriben las funciones en términos de x, que al simplificar las expresiones arroja el siguiente resultado:

$$\int \sqrt{x^2 - a^2}\, dx = \frac{x\sqrt{x^2 - a^2}}{2} - \frac{a^2}{2} ln\left| \frac{x + \sqrt{x^2 - a^2}}{a} \right| + C$$

Ejemplo 3. Encuentre $\int \sqrt{a^2 + x^2}\, dx$

Para empezar, como la expresión es de la forma $a^2 + x^2$, se va a dibujar un triángulo rectángulo ubicando esta información en él y utilizando el teorema de Pitágoras para encontrar la hipotenusa. Observe la figura 3:

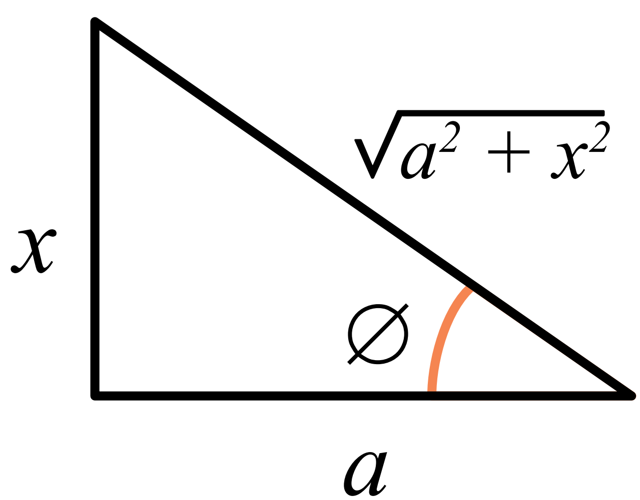

Figura 3. Integrando de la forma $\sqrt{a^2 + x^2}$

Fuente: elaboración propia

En este triángulo es posible establecer las relaciones $tan\varnothing = \frac{x}{a}$, de donde $x = atan\varnothing$ y $sec\varnothing = \frac{\sqrt{a^2+x^2}}{a}$, de la cual $\sqrt{a^2+x^2} = asec\varnothing$

Si se hace la sustitución $x = atan\varnothing,$ al derivar se tiene que el diferencial de ella sería $dx = asec^2\varnothing d\varnothing$ y $\sqrt{a^2+x^2} = asec\varnothing;$ se tiene:

$\int \sqrt{a^2+x^2}\,dx = \int asec\varnothing asec^2\varnothing d\varnothing$ Se sustituyen las expresiones anteriores

$= \int a^2 sec^3\varnothing d\varnothing$ Se opera el resultado

$= a^2 \int sec^3\varnothing d\varnothing$ Se aplican propiedades

$= a^2\left(\frac{sec\varnothing tan\varnothing}{2} + \frac{1}{2} ln\left|sec\varnothing + tan\varnothing\right|\right) + C$ Se integran las funciones con respecto a $\varnothing$

$= \frac{a^2}{2}\left(\frac{\sqrt{a^2+x^2}}{a} \bullet \frac{x}{a} + \frac{1}{2} ln\left|\frac{\sqrt{a^2+x^2}}{a} + \frac{x}{a}\right|\right) + C$ Se escriben las funciones en términos de $x,$ que al simplificar las expresiones arroja el siguiente resultado:

$$\int \sqrt{a^2+x^2}\,dx = \frac{x\sqrt{a^2+x^2}}{2} + \frac{a^2}{4} ln\left|\frac{\sqrt{a^2+x^2}+x}{a}\right| + C$$

Ejemplo 4. Encuentre $\int \frac{1}{\sqrt{x^2+2x+5}}dx$

Aunque a simple vista esta integral no parece tener relación con las expresiones presentadas para las sustituciones trigonométricas, al aplicar el proceso de completar cuadrados se encuentra que la expresión del radical sí posee una estructura como estas; observe:

$$x^2+2x+5 = x^2+2x+1+4 = (x+1)^2+2^2$$

En este caso, la expresión $x+1,$ que contiene a la variable, corresponderá al término x de la estructura y el número 2 será el valor de a, por lo que la sustitución a utilizar sería la misma del ejemplo 3, de la forma $x^2+a^2.$

De acuerdo con esto, $x+1 = 2tan\varnothing,$ y su diferencial $dx = 2sec^2\varnothing d\varnothing$ y $2sec\varnothing = \sqrt{(x+1)^2+4}$, que al sustituir en la integral daría:

$$\int \frac{1}{\sqrt{(x+1)^2+2^2}}dx = \int \frac{2sec^2\varnothing d\varnothing}{2sec\varnothing}$$ Se sustituyen las expresiones anteriores

$$= \int sec\varnothing d\varnothing$$ Se simplifica $2sec\varnothing$

$$= ln\left|sec\varnothing + tan\varnothing\right| + C$$ Se integra con respecto a $\varnothing$

$$= ln\left|\frac{\sqrt{(x+1)^2+4}}{2} + \frac{x+1}{2}\right| + C$$ Se escriben las funciones en términos de $x,$ que al simplificar las expresiones arroja el siguiente resultado:

$$\int \frac{1}{\sqrt{x^2+2x+5}}dx = \int \frac{1}{\sqrt{(x+1)^2+2^2}}dx = ln\left|\frac{\sqrt{(x+1)^2+4}}{2} + \frac{x+1}{2}\right| + C$$

Ejemplo 5. Encuentre $\int \frac{1}{\sqrt{12-9x^2}}dx$

Este ejemplo es similar al anterior en el sentido de que, a pesar de no presentar una estructura idéntica a las expresiones que requieren sustitución trigonométrica, si se realiza un proceso algebraico se identifica que corresponde a una de ellas. En este caso, se espera que la expresión dentro del radical quede de la forma $a^2 - x^2,$ o algo análogo, que permita usar la sustitución correspondiente.

Observe cómo se logra lo anterior:

$$\frac{1}{\sqrt{12-9x^2}} = \frac{\frac{1}{3}}{\frac{\sqrt{12-9x^2}}{3}}$$ Se divide el numerador y denominador por 3, así no se altera la fracción

$$= \frac{\frac{1}{3}}{\sqrt{\frac{12}{9} - \frac{9x^2}{9}}}$$ Se introduce dentro del radical el 3 por lo que ingresa su cuadrado

$$= \frac{\frac{1}{3}}{\sqrt{\frac{4}{3} - x^2}}$$ Se simplifican las fracciones dentro del radical

$$=\frac{1}{3}\left(\frac{1}{\sqrt{\left(\sqrt{\frac{4}{3}}\right)^2-x^2}}\right)$$ Se factoriza el $\frac{1}{3}$ y se escribe $\frac{4}{3}$ como un cuadrado

Con esta forma de escribir el integrando, se tiene que la integral a hallar es $\int\frac{1}{3}\left(\frac{1}{\sqrt{\left(\sqrt{\frac{4}{3}}\right)^2-x^2}}\right)dx$,

para la cual se haría la sustitución teniendo en cuenta que: $a=\sqrt{\frac{4}{3}}$, $\sqrt{\left(\sqrt{\frac{4}{3}}\right)^2-x^2}=\sqrt{\frac{4}{3}}cos\varnothing$,

$x=\sqrt{\frac{4}{3}}sin\varnothing$ y $dx=\sqrt{\frac{4}{3}}cos\varnothing d\varnothing$

De acuerdo con lo anterior, el proceso de integración es:

$$\int\frac{1}{3}\left(\frac{1}{\sqrt{\left(\sqrt{\frac{4}{3}}\right)^2-x^2}}\right)dx=\frac{1}{3}\int\frac{1}{\sqrt{\frac{4}{3}}cos\varnothing}\bullet\sqrt{\frac{4}{3}}cos\varnothing d\varnothing$$ Se sustituyen las expresiones anteriores

$$=\frac{1}{3}\int d\varnothing$$ Se simplifica $\sqrt{\frac{4}{3}}cos\varnothing$

$$=\frac{1}{3}\varnothing+C$$ Se integra con respecto a $\varnothing$

$$=\frac{1}{3}sin^{-1}\left(\frac{x}{\sqrt{\frac{4}{3}}}\right)+C=\frac{1}{3}sin^{-1}\left(\frac{\sqrt{3}x}{2}\right)+C$$ Se escriben las funciones en términos de x, que al simplificar las expresiones arroja el siguiente resultado:

$$\int\frac{1}{\sqrt{12-9x^2}}dx=\frac{1}{3}sin^{-1}\left(\frac{x}{\sqrt{\frac{4}{3}}}\right)+C=\frac{1}{3}sin^{-1}\left(\frac{\sqrt{3}x}{2}\right)+C$$

Las sustituciones trigonométricas usadas en esta sección se pueden resumir como se expone a continuación; recuérdelas, para que las aplique cuando sea necesario.

En síntesis...

Para realizar sustituciones trigonométricas tenga en cuenta lo siguiente

Si es de la forma	Se sustituyen
$\sqrt{a^2 - x^2}$	$x = asin\varnothing$, y, $\sqrt{a^2 - x^2} = acos\varnothing$
$\sqrt{a^2 + x^2}$	$x = atan\varnothing$, y, $\sqrt{a^2 + x^2} = asec\varnothing$
$\sqrt{x^2 - a^2}$	$x = asec\varnothing$, y, $\sqrt{x^2 - a^2} = atan\varnothing$

1.1. Ejercicios propuestos para practicar

Determine las siguientes integrales:

1. $\int \frac{x^3}{\sqrt{9+x^2}}dx$
2. $\int \frac{\sqrt{x^2-4}}{x}dx$
3. $\int \frac{dx}{\sqrt{16-x^2}}$
4. $\int \frac{dx}{\sqrt{16+6x-x^2}}$
5. $\int \frac{tanx}{\sqrt{sec^2x-4}}dx$

2. Integrales de funciones racionales

Una función integrando de la forma $f(x)=\dfrac{p(x)}{q(x)}$, con $p(x)$ y $q(x)$ polinomios, tal que $q(x)\neq 0$ recibe el nombre de función racional y su integral se determina según la estructura de $p(x)$ y $q(x)$. A continuación se muestran los procesos a realizar de acuerdo con el tipo de polinomios que sean $p(x)$ y $q(x)$.

Caso 1: integrando de la forma $f(x)=\dfrac{p(x)}{q(x)}$ con $p(x)$ una constante y $q(x)$ una expresión lineal. Cuando el integrando sea de la forma que se indica en este caso, en el proceso de integración se sugiere la sustitución $u=$ expresión del denominador.

Ejemplo: Determine $\int \dfrac{1}{3x+2}dx$

Se utiliza el método de integración por sustitución. Observe:

Sea $u=3x+2$	Se propone esa sustitución
$du=3dx$	Se deriva u con respecto a x
$dx=\dfrac{du}{3}$	Se despeja la diferencial dx
$\int \dfrac{1}{3x+2}dx=\int \dfrac{1}{u}\bullet\dfrac{du}{3}$	Se sustituyen u y dx en la integral
$=\dfrac{1}{3}\int \dfrac{du}{u}$	Se extrae la constante
$=\dfrac{1}{3}lnu+C$	Se integra con respecto a u
$=\dfrac{1}{3}ln(3x+2)+C$	Se reemplaza u por $3x+2$. En resumen:

$$\int \frac{1}{3x+2}dx=\frac{1}{3}ln(3x+2)+C$$

En síntesis...

Observe que el grado del denominador es 1 y en el numerador hay una constante. En este caso, siempre el método a utilizar es por sustitución y el resultado es un logaritmo natural.

Caso 2: integrando de la forma $f(x)=\dfrac{p(x)}{q(x)}$ con $p(x)$ una constante y $q(x)$ una expresión lineal con multiplicidad mayor que 1 (multiplicidad: exponente de la expresión).

Cuando el integrando sea de la forma que se indica en este caso, en el proceso de integración se sugiere nuevamente la sustitución $u =$ expresión del denominador.

Ejemplo: Determine $\int \dfrac{1}{(3x+2)^4}dx$

Nuevamente, se utiliza el método de sustitución. Observe:

Sea $u=3x+2$	Se propone esa sustitución
$du=3dx$	Se deriva u con respecto a x
$dx=\dfrac{du}{3}$	Se despeja la diferencial dx
$\int \dfrac{1}{(3x+2)^4}dx=\int \dfrac{1}{u^4}\bullet\dfrac{du}{3}$	Se sustituyen u y dx en la integral
$=\dfrac{1}{3}\int\dfrac{du}{u^4}$	Se extrae la constante
$=\dfrac{1}{3}\int u^{-4}du$	Se reescribe el integrando para que quede en el numerador
$=\dfrac{1}{3}\left(\dfrac{u^{-3}}{-3}\right)$	Se integra con respecto a u
$=-\dfrac{1}{9u^3}+C$	Se escribe el exponente negativo como positivo y se multiplica
$=-\dfrac{1}{9(3x+2)^3}+C$	Se reemplaza u por $3x+2$. En resumen:

$$\int \frac{1}{(3x+2)^4}\,dx = -\frac{1}{9(3x+2)^3} + C$$

En síntesis...

Observe que el denominador es un factor de multiplicidad 4 de tipo lineal (grado del polinomio $3x+2$ es 1) y el numerador es una constante. Para este tipo de estructuras, el método sugerido es por sustitución y la integral que resulta aplica la regla básica de integración de una potencia.

Caso 3: integrando de la forma $f(x) = \dfrac{p(x)}{q(x)}$ con $p(x)$ una constante y $q(x)$ una expresión de la forma $a^2 + x^2$ o alguna otra análoga a esta.

Cuando el integrando sea de la forma que se indica en este caso, en el proceso de integración se sugiere la sustitución trigonométrica asociada a la tangente.

Ejemplo: Determine $\int \frac{3}{4+x^2}\,dx$

Cómo mejorar...

En el Escenario anterior, pudo conocer un Material de apoyo que corresponde a una tabla que contiene las funciones trigonométricas inversas, revísela pues este ejemplo es muy similar a una de ellas.

$$\int \frac{3}{4+x^2}\,dx = 3\int \frac{1}{4+x^2}\,dx$$

Se extrae la constante

$$= 3\left(\frac{1}{2} arctan\left(\frac{x}{2}\right)\right) + C$$

Se integra según fórmula de inversa de la tangente. En resumen:

$$\int \frac{3}{4+x^2}\,dx = \frac{3}{2} arctan\left(\frac{x}{2}\right) + C$$

En síntesis...

Observe el integrando y si el denominador tiene una expresión como las que requieren sustitución trigonométrica, empléela para determinar o calcular la integral.

Existen integrandos racionales en los que el grado del numerador es menor que el del denominador; en ellos no se pueden realizar los procesos mencionados en los casos anteriores. Para determinar integrales con este tipo de integrandos se descompone la función racional en suma de fracciones. Este método recibe el nombre de **fracciones parciales**. Observe los siguientes casos.

Caso 4: integrando racional cuyo grado del numerador es menor que el del denominador y el denominador se puede escribir como factores lineales diferentes sin multiplicidad.

Ejemplo. Determine $\int \frac{x+2}{x^2+x-6}\,dx$

Paso 1. Descomponer en fracciones parciales el integrando $\frac{x+2}{x^2+x-6}$

$$\frac{x+2}{x^2+x-6} = \frac{x+2}{(x+3)(x-2)}$$

Se factoriza el denominador y se reescribe la fracción con esos factores

$$\frac{x+2}{(x+3)(x-2)} = \frac{A}{x+3} + \frac{B}{x-2}$$

Dado que los factores en el denominador son lineales, diferentes y sin multiplicidad, se puede reescribir el integrando como la suma de dos fracciones cuyo denominador son los factores de la factorización.

Paso 2. Encontrar los valores de A y B.

$$\frac{x+2}{(x+3)(x-2)}=\frac{A(x-2)+B(x+3)}{(x+3)(x-2)}$$ Se efectúa la suma de fracciones indicada

$x+2=A(x-2)+B(x+3)$ Para que la igualdad se satisfaga, los numeradores deben ser iguales

$x+2=Ax-2A+Bx+3B$ Se realizan las multiplicaciones indicadas

$x+2=x(A+B)+(-2A+3B)$ Se agrupan los términos con x y los términos independientes.

Para que se cumpla la anterior igualdad, los términos correspondientes deben ser iguales, esto es:

$x=x(A+B)$ Que es equivalente a $1x=(A+B)x$, y, $2=-2A+3B$

Por lo que:

$$\begin{cases} A+B=1 \\ -2A+3B=2 \end{cases}$$

Corresponde a un sistema de ecuaciones que al resolverlo por el método de reducción (el lector puede usar algún otro que conozca porque el resultado será el mismo) se tiene:

$$\begin{cases} 2A+2B=2 \\ -2A+3B=2 \end{cases}$$ Se multiplica la ecuación $A+B=1$ por 2 y se deja igual la segunda

$5B=4$ Se suman miembro a miembro las igualdades dadas

$B=\frac{4}{5}$ Se despeja B

$A=\frac{1}{5}$ Se despeja A, teniendo en cuenta que $A+B=1$

De acuerdo con lo obtenido, el integrando quedaría reescrito así:

$$\frac{x+2}{(x+3)(x-2)}=\frac{1/5}{x+3}+\frac{4/5}{x-2}$$

Se sugiere al lector que, como ejercicio, compruebe que la suma de la derecha es igual a la fracción de la izquierda.

Paso 3. Determinar la integral propuesta.

$\int \frac{x+2}{x^2+x-6}dx = \int\left(\frac{1/5}{x+3}+\frac{4/5}{x-2}\right)dx$	Se reescribe el integrando por su equivalente en sumas parciales
$= \int \frac{1/5}{x+3}dx + \int \frac{4/5}{x-2}dx$	Se aplican propiedades de integración
$= \frac{1}{5}\int \frac{1}{x+3}dx + \frac{4}{5}\int \frac{1}{x-2}dx$	Se extraen las constantes
$= \frac{1}{5}\ln(x+3) + \frac{4}{5}\ln(x-2) + C$	Se evalúan las integrales. En resumen:

$$\int \frac{x+2}{x^2+x-6}dx = \frac{1}{5}\ln(x+3) + \frac{4}{5}\ln(x-2) + C$$

En síntesis...

Cuando en un integrando racional el grado del numerador sea menor que el del denominador y el denominador se pueda escribir como factores lineales diferentes sin multiplicidad, es decir, que ninguno de ellos se repita, la fracción parcial será la suma de fracciones cuyos numeradores son constantes, que se suelen denotar como A, B, C...., y cada denominador es uno de los factores lineales de la factorización del denominador del integrando.

Una vez se exprese el integrando como una suma de fracciones parciales se determina la integral dada.

Caso 5: integrando de la forma $f(x) = \frac{p(x)}{q(x)}$ con $p(x)$ una expresión lineal sin multiplicidad y $q(x)$ una expresión cuadrática factorizable y con multiplicidad mayor que 1 (multiplicidad: exponente de la expresión.)

Cuando el integrando sea de la forma que indica este caso, en el proceso de integración se sugiere hacer nuevamente la sustitución $u =$ expresión del denominador en cada integral en que queda expresada la descomposición.

Ejemplo: Determine $\int \frac{x}{x^2-2x+1}dx$

Paso 1. Descomponer en fracciones parciales el integrando $\frac{x}{x^2-2x+1}$

$\frac{x}{x^2-2x+1}=\frac{x}{(x-1)^2}$	Se factoriza el denominador y se reescribe la fracción con esos factores
$\frac{x}{(x-1)^2}=\frac{A}{(x-1)}+\frac{B}{(x-1)^2}$	El común denominador es $(x-1)^2$; eso implica que puede existir una fracción con denominador $(x-1)^1$ y otra con denominador $(x-1)^2$.

Además, como el factor es lineal, se toman como numeradores A y B, respectivamente.

Paso 2. Encontrar los valores de A y B.

$\frac{x}{x^2-2x+1}=\frac{A(x-1)+B}{(x-1)^2}$	Se efectúa la suma de fracciones indicada, hallando el común denominador
$x = A(x-1)+B$	Para que la igualdad se satisfaga, los numeradores deben ser iguales
$x = Ax - A + B$	Se realizan las multiplicaciones indicadas
$x = Ax + (-A+B)$	Se agrupan los términos con x y los términos independientes

Para que se cumpla la anterior igualdad, los términos correspondientes deben ser iguales; esto es:

$x = Ax,$ que es equivalente a $1x = Ax$, y, $0 = -A + B$.

Es decir:

$$A = 1$$

$$-A + B = 0$$ Lo que implica que $B = 1$

Al sustituir en la expresión, se tiene que:

$$\frac{x}{x^2-2x+1}=\frac{1}{(x-1)}+\frac{1}{(x-1)^2}$$

Paso 3. Determinar la integral propuesta.

$$\int\frac{x}{x^2-2x+1}dx=\int\left(\frac{1}{(x-1)}+\frac{1}{(x-1)^2}\right)dx$$ Se reescribe el integrando por el equivalente en sumas parciales

$$=\int\frac{1}{(x-1)}dx+\int\frac{1}{(x-1)^2}dx$$ Se aplican propiedades

$$=\ln(x-1)-\frac{1}{(x-1)}+C$$ Se evalúan las integrales. En resumen:

$$\int\frac{x}{x^2-2x+1}dx=\ln(x-1)-\frac{1}{(x-1)}+C$$

En síntesis...

Si se repite n veces un factor lineal en el denominador, es decir, tiene multiplicidad mayor que 1, su equivalente en fracciones parciales tiene n sumandos, en donde el denominador de cada uno de ellos es el factor elevado a la potencia 1 y va aumentando de uno en uno hasta llegar a n.

Una vez se exprese el integrando como una suma de fracciones parciales se determina la integral dada.

Caso 6: integrando de la forma $f(x)=\frac{p(x)}{q(x)}$ con $p(x)$ una expresión lineal sin multiplicidad y $q(x)$ el producto de expresiones lineales, algunas de las cuales tienen multiplicidad mayor que 1 (multiplicidad: exponente de la expresión).

Cuando el integrando sea de la forma que indica este caso, en el proceso de integración se sugiere hacer nuevamente la sustitución $u=$ expresión del denominador en cada integral en que queda expresada la descomposición.

Ejemplo. Determine $\int \frac{x+3}{(x+2)^2(x-1)}dx$

Paso 1. Descomponer en fracciones parciales el integrando $\frac{x+3}{(x+2)^2(x-1)}$.

Observe que ya el denominador está factorizado y que hay un factor que se repite y otro que no, así que, uniendo los dos ejercicios anteriores, la fracción parcial que se plantea es:

$$\frac{x+3}{(x+2)^2(x-1)}=\frac{A}{(x+2)}+\frac{B}{(x+2)^2}+\frac{C}{(x-1)}$$ Se introducen tres variables por ser factores lineales

Paso 2. Encontrar los valores de A, B y C.

$$\frac{x+3}{(x+2)^2(x-1)}=\frac{A(x+2)(x-1)+B(x-1)+C(x+2)^2}{(x+2)^2(x-1)}$$ Se realiza la suma de fracciones

$$\frac{x+3}{(x+2)^2(x-1)}=\frac{A(x^2+x-2)+B(x-1)+C(x^2+4x+4)}{(x+2)^2(x-1)}$$ Se realiza multiplicación de paréntesis

$$\frac{x+3}{(x+2)^2(x-1)}=\frac{Ax^2+Ax-2A+Bx-B+Cx^2+4Cx+4C}{(x+2)^2(x-1)}$$ Se termina de multiplicar

$$\frac{x+3}{(x+2)^2(x-1)}=\frac{(A+C)x^2+(A+B+4C)x+(-2A-B+4C)}{(x+2)^2(x-1)}$$ Se agrupan los términos semejantes

Para que se cumpla la anterior igualdad, los términos correspondientes deben ser iguales. Es decir:

$$x+3=(A+C)x^2+(A+B+4C)x+(-2A-B+4C)$$

Por lo que el sistema de ecuaciones a resolver es:

$$\boldsymbol{A}+\boldsymbol{C}=0$$

$$\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}+4\boldsymbol{C}=1$$

$$-2\boldsymbol{A}-\boldsymbol{B}+4\boldsymbol{C}=3$$

Al sumar la segunda y tercera ecuación se obtiene: $-A+8C=4,$ y al sumar este resultado con la primera ecuación se obtiene que $9C=4,$ por lo que $C=\frac{4}{9}$. Eso significa que al sustituir en la primera ecuación $A=-\frac{4}{9}$ y escribiendo los valores en la segunda ecuación, se tiene que $B=-\frac{1}{3}$

Al sustituir en la expresión, queda:

$$\frac{x+3}{(x+2)^2(x-1)}=\frac{-4/9}{(x+2)}+\frac{-1/3}{(x+2)^2}+\frac{4/9}{(x-1)}$$

Paso 3. Determinar la integral propuesta.

$$\int\frac{x+3}{(x+2)^2(x-1)}dx=\int\left(\frac{-4/9}{(x+2)}+\frac{-1/3}{(x+2)^2}+\frac{4/9}{(x-1)}\right)dx$$ Se reescribe el integrando como sus sumas parciales

$$=\int\frac{-4/9}{(x+2)}dx+\int\frac{-1/3}{(x+2)^2}dx+\int\frac{4/9}{(x-1)}dx$$ Se aplican propiedades

$$=-\frac{4}{9}\ln(x+2)+\frac{1}{3(x+2)}+\frac{4}{9}\ln(x-1)+C$$ Se evalúa cada integral. En resumen:

$$\int\frac{x+3}{(x+2)^2(x-1)}dx=-\frac{4}{9}\ln(x+2)+\frac{1}{3(x+2)}+\frac{4}{9}\ln(x-1)+C$$

En síntesis...

Cuando el integrando tenga en su denominador un producto de expresiones lineales, algunas con una multiplicidad mayor que 1, se debe tener en cuenta que el número de sumandos de la fracción parcial es igual a la potencia de los que se repiten más los que no se repiten.

Una vez se exprese el integrando como una suma de fracciones parciales se determina la integral dada.

Caso 7: integrando de la forma $f(x)=\dfrac{p(x)}{q(x)}$, con $p(x)$ un polinomio de un grado menor que el grado del polinomio del denominador y $q(x)$ contiene factores cuadráticos irreductibles (no se pueden factorizar).

Cuando el integrando sea de la forma que indica este caso, en el proceso de integración se sugiere hacer nuevamente la sustitución $u =$ expresión del denominador en cada integral en que queda plasmada la descomposición. Algunas veces es necesario ajustar matemáticamente el numerador para que se pueda evaluar la integral. Siga el proceso que se realiza en el siguiente ejemplo.

Ejemplo. Determine $\int \dfrac{2x^2-3}{(x+1)(x^2+x+1)}$

Paso 1. Descomponer en fracciones parciales el integrando $\dfrac{2x^2-3}{(x+1)(x^2+x+1)}$

Observe que el trinomio x^2+x+1 no tiene raíces reales; se puede probar usando el discriminante de la fórmula de la cuadrática $b^2-4ac.$ Si esa operación es negativa, indica que no tiene raíces reales; al sustituir se obtiene -3, luego no es factorizable. Como ese factor es cuadrático, implica que en el numerador puede haber una expresión algebraica de un grado menor, es decir, puede haber un factor lineal. Por otra parte, el factor $x+1$ es lineal, luego en el numerador solo va una constante. Según lo anterior, la descomposición en fracciones parciales es:

$$\frac{2x^2-3}{(x+1)(x^2+x+1)}=\frac{A}{(x+1)}+\frac{Bx+C}{(x^2+x+1)}$$

Paso 2. Encontrar los valores de A, B y C

$$\frac{2x^2-3}{(x+1)(x^2+x+1)}=\frac{A(x^2+x+1)+(Bx+C)(x+1)}{(x+1)(x^2+x+1)}$$

Se realiza la suma de fracciones

$$\frac{2x^2-3}{(x+1)(x^2+x+1)}=\frac{Ax^2+Ax+A+Bx^2+Bx+Cx+C}{(x+1)(x^2+x+1)}$$

Se realizan las multiplicaciones indicadas

$$\frac{2x^2-3}{(x+1)(x^2+x+1)}=\frac{(A+B)x^2+(A+B+C)x+(A+C)}{(x+1)(x^2+x+1)}$$

Se agrupan términos semejantes

Para que se cumpla la anterior igualdad, los términos correspondientes deben ser iguales. Es decir:

$$2x^2-3=(A+B)x^2+(A+B+C)x+(A+C)$$

Por lo que el sistema de ecuaciones a resolver es:

$$\begin{cases} A+B=2 \\ A+B+C=0 \\ A+C=-3 \end{cases}$$

Solucionando el sistema de ecuaciones (queda al lector que lo revise), se obtiene que:

$$A=-1,\ B=3,\quad C=-2$$

Por lo que el integrando queda:

$$\frac{2x^2-3}{(x+1)(x^2+x+1)}=\frac{-1}{(x+1)}+\frac{3x-2}{(x^2+x+1)}$$

Paso 3. Determinar la integral propuesta.

$$\int\frac{2x^2-3}{(x+1)(x^2+x+1)}dx=\int\frac{-1}{(x+1)}dx+\int\frac{3x-2}{(x^2+x+1)}dx$$

La primera integral es simple, mientras que la segunda es un poco más dispendiosa y por eso se va a hacer el proceso paso a paso; observe:

Se halla $\int\frac{3x-2}{(x^2+x+1)}dx$. Si se emplea el método de sustitución donde $u=x^2+x+1,$ se necesita que en el numerador esté la derivada, que sería $du=(2x+1)dx$. Sin embargo, la expresión que está en el numerador no es $(2x+1)dx$, pero con trucos matemáticos es posible obtener este valor. Mire cómo se puede transformar el integrando:

$$\frac{3x-2}{(x^2+x+1)}=\frac{(3x-2)\left(\frac{2}{3}\right)}{(x^2+x+1)\left(\frac{2}{3}\right)}$$

Se multiplica y divide por $\frac{2}{3}$, así la fracción no se altera

$$=\frac{3}{2}\left(\frac{2x-\frac{4}{3}}{\left(x^2+x+1\right)}\right)$$

El $\frac{2}{3}$ del denominador se extrae como su inverso $\frac{3}{2}$ de la integral. En el numerador se realiza la multiplicación, obteniéndose el 2

$$=\frac{3}{2}\left(\frac{2x-\frac{4}{3}+\frac{7}{3}-\frac{7}{3}}{x^2+x+1}\right)$$

En el numerador se suma y se resta $\frac{7}{3}$

$$=\frac{3}{2}\left(\frac{2x+1-\frac{7}{3}}{x^2+x+1}\right)$$

Al sumar $-\frac{4}{3}+\frac{7}{3}$ se obtiene el 1

$$=\frac{3}{2}\left(\frac{2x+1}{x^2+x+1}+\frac{-\frac{7}{3}}{x^2+x+1}\right)$$

Se separa el común denominador

$$=\frac{3}{2}\left(\frac{2x+1}{x^2+x+1}\right)-\frac{7}{2}\left(\frac{1}{x^2+x+1}\right)$$

Se quitan paréntesis y realizan operaciones

Por lo que el integrando queda:

$$\frac{3x-2}{\left(x^2+x+1\right)}=\frac{3}{2}\left(\frac{2x+1}{x^2+x+1}\right)-\frac{7}{2}\left(\frac{1}{x^2+x+1}\right)$$

Para determinar la integral propuesta:

$$\int\frac{2x^2-3}{(x+1)\left(x^2+x+1\right)}dx=\int\frac{-1}{(x+1)}dx+\int\frac{3x-2}{\left(x^2+x+1\right)}dx$$

Resultado obtenido anteriormente

$$\int\frac{2x^2-3}{(x+1)\left(x^2+x+1\right)}dx=\int\frac{-1}{(x+1)}dx+\int\frac{3}{2}\left(\frac{2x+1}{x^2+x+1}\right)dx-\int\frac{7}{2}\left(\frac{1}{x^2+x+1}\right)dx$$

Se sustituye el segundo integrando

$$\int\frac{2x^2-3}{(x+1)\left(x^2+x+1\right)}dx=-\ln(x+1)+\frac{3}{2}ln\left(x^2+x+1\right)-\frac{7}{2}\int\frac{1}{x^2+x+1}dx$$

Se determina la segunda integral

Queda por determinar $\int \frac{1}{x^2+x+1}dx$. Según la forma que tiene la cuadrática se puede pensar que la integral es una arcotangente, por lo que el denominador se va a escribir de la forma a^2+x^2, observe:

$x^2+x+1 = x^2+x+\frac{1}{4}+1-\frac{1}{4}$ Se suma y se resta $\frac{1}{4}$ al denominador; así la expresión no se altera

$= \left(x+\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}$ Se agrupan los tres primeros términos y se factorizan

$= \left(\frac{2x+1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}$ Se hace la suma interna

$= \frac{(2x+1)^2}{4}+\frac{3}{4}$ Se saca el 2 de denominador del paréntesis. En resumen:

$$x^2+x+1 = \frac{1}{4}\left((2x+1)^2+3\right)$$

Se sustituye este resultado en la integral original:

$\int \frac{2x^2-3}{(x+1)(x^2+x+1)}dx = -\ln(x+1)+\frac{3}{2}ln\left(x^2+x+1\right)-\frac{7}{2}\int \frac{1}{\frac{1}{4}\left((2x+1)^2+3\right)}dx$ Se sustituye el denominador

$\int \frac{2x^2-3}{(x+1)(x^2+x+1)}dx = -\ln(x+1)+\frac{3}{2}ln\left(x^2+x+1\right)-14\int \frac{1}{\left((2x+1)^2+3\right)}dx$ Se operan las constantes

$\int \frac{2x^2-3}{(x+1)(x^2+x+1)}dx = -\ln(x+1)+\frac{3}{2}ln\left(x^2+x+1\right)-14\left(\frac{1}{\sqrt{3}}tan^{-1}\left(\frac{2x+1}{\sqrt{3}}\right)\right)+C$ Se evalúa la integral

En definitiva:

$$\int \frac{2x^2-3}{(x+1)(x^2+x+1)}dx = -\ln(x+1)+\frac{3}{2}ln\left(x^2+x+1\right)-\frac{14}{\sqrt{3}}tan^{-1}\left(\frac{2x+1}{\sqrt{3}}\right)+C$$

En síntesis...

1. Cuando el denominador tenga factores cuadráticos no factorizables, para escribirlo como fracción parcial se pone en el numerador una expresión lineal $Ax+B$.
2. En general, cuando el denominador tenga un polinomio de grado n no factorizable, en la fracción parcial va a ir un polinomio de grado $n-1$.
3. Para encontrar una integral con denominador cuadrático no factorizable se hacen transformaciones, de tal manera que el numerador se pueda escribir como su derivada, obteniendo como respuesta un logaritmo y la otra integral, transformándola para que quede una arcotangente.

Caso 8: integrando de la forma $f(x)=\dfrac{p(x)}{q(x)}$, con $p(x)$ un polinomio de grado mayor que el grado del polinomio del denominador.

Cuando el integrando sea de la forma que indica este caso, en el proceso de integración se debe realizar la división entre los polinomios y escribir la integral como el resultado de esa división (recuerde que, en una división, el dividendo es igual a la suma del cociente con la división entre el residuo sobre el divisor). Posteriormente se procede a determinar las integrales con alguno de los métodos vistos. Siga el proceso que se realiza en el siguiente ejemplo:

Ejemplo. Determine $\int \dfrac{x^4-3x^2+1}{x^2-4}dx$

Se divide el numerador entre el denominador, así:

Lo que significa que: $\dfrac{x^4-3x^2+1}{x^2-4}=x^2+1+\dfrac{5}{x^2-4}=x^2+1+5\left(\dfrac{1}{x^2-4}\right)$

Por lo que la integral a determinar se transforma en:

$\int \dfrac{x^4-3x^2+1}{x^2-4}dx=\int\left(x^2+1+5\left(\dfrac{1}{x^2-4}\right)\right)dx$	Se reescribe la integral

$= \int x^2 dx + \int dx - 5\int \frac{1}{x^2-4}dx$ Se aplican propiedades

$= \frac{x^3}{3} + x - 5\int \frac{1}{x^2-4}dx$ Se determinan algunas integrales

Para evaluar la $\int \frac{1}{x^2-4}dx$ se procede por medio de fracciones parciales:

$\frac{1}{x^2-4} = \frac{1}{(x+2)(x-2)}$ Se factoriza el integrando

$\frac{1}{(x+2)(x-2)} = \frac{A}{x+2} + \frac{B}{x-2}$ Se separa en dos fracciones con denominadores distintos lineales

$\frac{1}{(x+2)(x-2)} = \frac{A(x-2)+B(x+2)}{(x+2)(x-2)}$ Se realiza la suma indicada

$\frac{1}{(x+2)(x-2)} = \frac{x(A+B)+(-2A+2B)}{(x+2)(x-2)}$ Se agrupan los términos semejantes

Se establece la igualdad entre fracciones y el sistema de ecuaciones que se obtiene es:

$$\begin{cases} A+B=0 \\ -2A+2B=1 \end{cases}$$

Se soluciona este sistema de ecuaciones, teniendo como resultado: $B = \frac{1}{4},\ A = -\frac{1}{4}$, por lo que:

$$\frac{1}{x^2-4} = \frac{-1/4}{x+2} + \frac{1/4}{x-2}$$

De esta manera, la integral original queda:

$\int \frac{x^4-3x^2+1}{x^2-4}dx = \frac{x^3}{3} + x + 5\int \left(\frac{-1/4}{x+2} + \frac{1/4}{x-2} \right) dx$ Se sustituyen los datos obtenidos

$= \frac{x^3}{3} + x - \frac{5}{4}\int \left(\frac{1}{x+2} \right) dx + \frac{5}{4}\int \left(\frac{1}{x-2} \right) dx$ Se aplican propiedades de la integral

$= \frac{x^3}{3} + x - \frac{5}{4}ln(x+2) + \frac{5}{4}ln(x-2) + C$ Se determinan las integrales planteadas. En resumen:

$$\int \frac{x^4-3x^2+1}{x^2-4}dx = \frac{x^3}{3} + x - \frac{5}{4}ln(x+2) + \frac{5}{4}ln(x-2) + C$$

Referencias

Purcell, E. J., Varberg, D. y Rigdon, S. (2007). Cálculo. México: Pearson Educación.

INFORMACIÓN TÉCNICA

FACULTAD DE
INGENIERÍA, DISEÑO
E INNOVACIÓN

Módulo: Cálculo II

Unidad 2: La integral definida y método de integración

Escenario 4: Otros métodos de integración

Autor: Martha Helena Zambrano Valentín

Asesor Pedagógico: Jeiner Velandia

Diseñador Gráfico: Carlos Montoya

Asistente: Ginna Paola Quiroga