Unidad 1 / Escenario 1

Lectura fundamental

Introducción a la investigación de operaciones

Contenido

Palabras clave: investigación de operaciones, programación lineal, optimización, toma de decisiones

1. Problema de optimización

En este Escenario nos centraremos en conocer y aplicar correctamente los principios de la programación lineal a problemas de optimización. En ese sentido, es pertinente que definamos claramente lo que se entiende como un problema de optimización y, dentro de estos, encontrar las características que este debe cumplir, para que la programación lineal se pueda usar como herramienta de solución.

Comencemos con un problema de optimización *no restringido*. Tal vez el lector está familiarizado con este tipo de problemas en una variable. Allí, se tenía una función $f(x)$ y lo que se buscaba era encontrar sus puntos mínimos o sus puntos máximos. Decimos que el problema es *no restringido* porque dichos puntos críticos, los máximos y los mínimos, se buscaban sobre todo en el dominio de la función. En la figura 1 se ilustra este problema.

Aún, cuando es un ejemplo sencillo, podemos observar varios elementos interesantes. Primero, partimos de una función a optimizar, en este caso $f(x)$, la cual se conocerá como **función objetivo**, está es una función de una indeterminada, en este caso x, que juega el papel de la **variable de decisión**. Para que un problema de decisión esté bien formulado le exigiremos que exista más de una "solución", el caso sin soluciones, aunque interesante no será abordado aquí y cuando solo existe una solución esta será la óptima. En la figura 1, existen infinitas soluciones, cada punto del dominio es una solución, porque allí la función objetivo está bien definida. La idea del problema de optimización está en encontrar la **mejor** de las soluciones; para el caso del mínimo, en la figura podemos ver que la mejor de las soluciones se encuentra alrededor de 3.5 (la solución *exacta,* a dos cifras decimales, es 3.43), mientras que, para el caso del máximo, en la figura podemos ver que la mejor de las soluciones se encuentra alrededor de 6.5 (la solución *exacta*, a dos cifras decimales, es 6.44). Es decir, tenemos una mejor solución dependiendo de si buscamos el valor más bajo o el valor más alto de la función objetivo, este criterio de búsqueda se conocerá como **criterio de optimización.**

Aunque nuestro primer problema nos permite explorar muchos de los elementos con los que trataremos a lo largo del módulo, nos hacen falta dos de los principales aspectos del problema que son el núcleo de la programación lineal, por lo tanto, es importante centrarnos en las funciones lineales e incluir restricciones al problema de optimización.

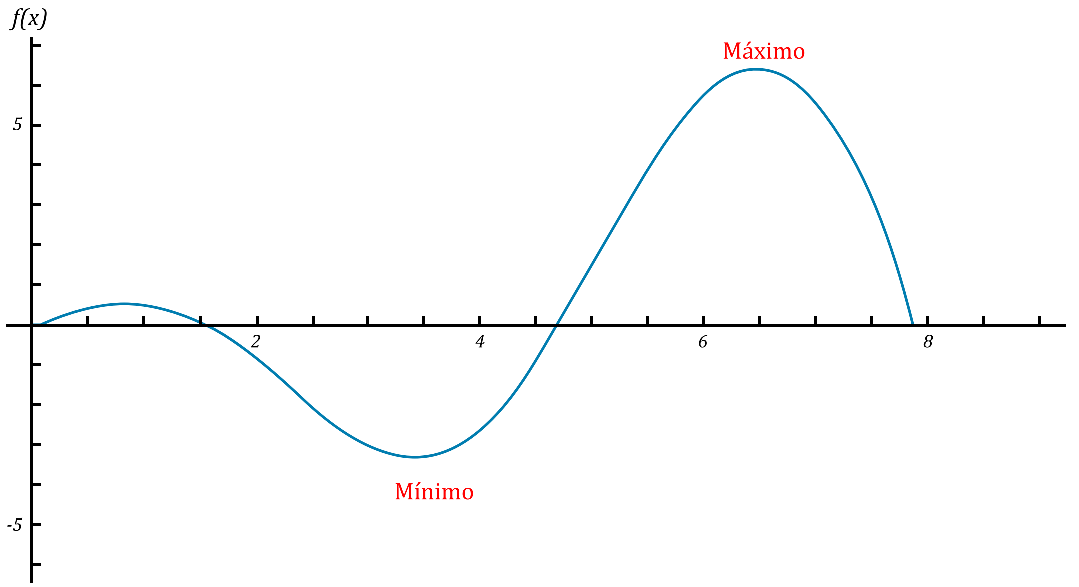

Figura 1.Ejemplo de un problema de optimización no restringido

Fuente: elaboración propia

2. Optimización lineal

El primer elemento que debemos definir para entrar en el campo de la optimización lineal es una función lineal. Si seguimos considerando un problema con una única variable de decisión, una función lineal toma la forma conocida de $y = mx + b$, en donde nuestra función $f(x)$ es precisamente y . Es este caso, observamos que tenemos una función polinómica, en donde, el grado mayor del polinomio es 1, es decir, la mayor potencia de x que aparece en la función es 1.

En síntesis...

Al usar la definición de función polinómica podemos extendernos al caso multivariado, es decir, donde tendremos una función que depende de más de una variable de decisión, allí nuevamente lo que exigiremos para tener una función lineal en las variables de decisión es que el grado del polinomio sea como máximo 1.

Veamos unos ejemplos que ilustran este concepto:

- $f(x) = 3x + 1$ Función lineal
- $f(x) = 5x^2 + 1$ No es función lineal, término al cuadrado
- $f(x)=\sqrt{x + 1}$ Función lineal No es función lineal, hay un radical
- $f(x) = 2^{X-3}$ No es función lineal, es una función exponencial
- $f(x,y) = 3x + 5y-2$ Función lineal
- $f(x,y) = x + 2y^2$ No es función lineal, término al cuadrado
- $f(x,y) = 3x + y - 2xy$ No es función lineal, término cuadrático *(xy)*

Con base en los diferentes ejemplos mostrados, debemos caracterizar lo que se entiende por una función lineal: debe ser una función polinómica, eso excluye radicales, logaritmos y funciones exponenciales, como se puede observar en los primeros cuatro ejemplos presentados anteriormente. Pero cuando pasamos al caso de múltiples variables de decisión, debemos ser aún mucho más cuidadosos, es claro que el quinto ejemplo muestra una relación lineal, porque todos los exponentes de las variables son 1; en el sexto ejemplo, de otra parte, el exponente de y hace que la función no sea lineal. Sin embargo, es el último ejemplo el que nos puede causar problemas, allí todos los exponentes de las variables son 1; aunque, el último término involucra el producto de dos variables, por lo tanto, ese término tiene grado 2, así que la función no es lineal.

De esta forma, se hace necesario definir formalmente lo que se entenderá aquí como una función lineal de las variables de decisión. Supongamos que en nuestro problema se tiene el siguiente conjunto de variables de decisión:

$$X_1, X_2, X_3, \ldots, X_n$$

Es decir, tenemos *n* diferentes variables en nuestro problema, entonces, una **combinación lineal** estará dada por la expresión:

$$c_1 X_1 + c_2 X_2 + c_3 X_3 + \cdots + c_n X_n$$

En donde todos los coeficientes, para nuestro caso, serán números reales independientes del conjunto de variables.

De esta forma, entenderemos por función lineal a una combinación lineal de las variables de decisión, es decir, a funciones de la forma:

$$f(X_1,X_2,\ldots,X_n)=c_1 X_1 + c_2 X_2 + c_3 X_3+\cdots+ c_n X_n$$

¿Sabía que...?

Aunque muchos problemas de optimización no encajan en el ámbito de los programas lineales, en muchos casos es posible linealizar las funciones, según el nivel de precisión deseado, para poder usar la programación lineal como método de solución.

Ya definido el tipo de funciones que permitiremos en nuestro problema, es hora de incluir el aspecto final que nos llevará a tener un programa de optimización lineal. Una función lineal es no acotada en R^n, en donde n corresponde a la dimensión del espacio en la que se encuentra definida la función, es decir, en nuestro caso el número de variables de decisión del problema. Así, que no tiene sentido buscar el valor máximo o el valor mínimo en todo su dominio, el problema tendrá sentido si dicha función está sujeta a un conjunto de restricciones, las cuales acotarán el conjunto de soluciones de tal forma que si tenga sentido buscar un valor extremo ya sea mínimo y/o máximo.

Ese conjunto de restricciones estará definido nuevamente por una serie de desigualdades en donde las funciones que las definen pueden ser de cualquier tipo e involucrar a todas o a un subconjunto de las variables de decisión. Sin embargo, para que sigamos teniendo un problema de optimización lineal, dichas funciones no podrán ser diferentes, en su característica lineal, a la función objetivo, es decir, todas las restricciones deberán estar formadas por desigualdades que involucren solo a funciones lineales.

Encontrar la solución a un problema de optimización con restricciones es mucho más complicado que en los casos donde no tenemos un problema restricto; los métodos de solución que buscan los picos o valles de las funciones ya no se pueden aplicar directamente porque debido a las restricciones, es muy posible que el valor máximo o mínimo ya no se encuentre en un pico o en un valle de la función, sino en cualquier punto intermedio. Es por eso que se requiere de nuevos algoritmos de solución y nuevas condiciones que nos permitan establecer cuando nos encontramos en la solución óptima.

Afortunadamente, en el caso en que todas las funciones sean lineales, combinaciones lineales de las variables de decisión, existen algoritmos sumamente eficientes para encontrar dichas soluciones y las condiciones de optimalidad están totalmente caracterizadas. Es por eso que en nuestro módulo nos centraremos en la formulación y solución de problemas de programación lineal, refiriéndonos a problemas de optimización restringidos en los que tanto la función objetivo como el conjunto de restricciones están definidas por combinaciones lineales de las variables de decisión.

3. Elementos de un programa lineal

Con base en lo discutido en las dos secciones anteriores, estamos en condiciones de definir de manera más precisa los principales elementos que tendrán los problemas que solucionaremos en este curso, es importante que se tengan en cuenta siempre que vayamos a formular y a resolver un problema, ser exhaustivos en la definición de cada elemento, con lo cual podremos potencializar nuestras capacidades de resolución de problemas.

El orden que se presenta a continuación, aunque es el más conveniente, no es una camisa de fuerza, debido a que en situaciones particulares es posible que vayamos definiendo diferentes elementos y que no se siga en estricto rigor la secuencia aquí recomendada, esto hará parte de nuestras habilidades para la formulación de problemas. Dicho esto, los principales elementos de un programa lineal son:

3.1. Variables de decisión

Las variables de decisión representan, generalmente, los aspectos del problema que son posibles de ajustar o de definir por el tomador de decisiones; estos valores no son conocidos de antemano y se tiene un conjunto posible entre el cual se debe escoger el mejor valor.

En un programa lineal, las variables de decisión son estrictamente valores reales mayores o iguales a cero. Sin embargo, a medida que avancemos con los modelos, podremos ver que estos valores se pueden restringir aún más, para que sean números enteros o inclusive tomar solo un par de valores, o permitir que se tomen valores negativos. La dimensión del espacio de soluciones estará dada por el número de variables de decisión que se definan.

3.2. Función objetivo

Como ya lo hemos enunciado antes, la función objetivo será una función lineal, es decir, una combinación lineal de las variables de decisión. Esta función debe representar el objetivo o meta que se busca optimizar con la solución del problema y está compuesta por la suma de las contribuciones de cada variable de decisión al objetivo propuesto.

3.3. Criterio de optimización

Con la función objetivo ya definida es importante, y no siempre obvio, definir la dirección en la que se va a optimizar a dicha función. Es decir, si se trata de un problema de minimización o de un problema de maximización.

3.4. Conjunto de restricciones

En este punto se debe decidir cuáles son las limitantes que impiden el crecimiento, o la disminución, exagerado de la función objetivo. Aquí se encuentran las disponibilidades de recursos, así como las restricciones tecnológicas, las capacidades de las máquinas o los medios de transporte, la mano de obra disponible y en general, cualquier aspecto que limite a alguna variable de decisión. Es importante señalar que, en este nivel, también se encontrarán los compromisos comerciales con los clientes, los pedidos a satisfacer o las fechas de entrega. De la misma forma, será habitual que aparezcan restricciones que no están relacionadas directamente con recursos o compromisos del problema real, pero que son relaciones artificiales que se imponen para conseguir la solución adecuada del problema. Las restricciones generalmente serán desigualdades, ya sea de menor o igual o de mayor o igual, pero también se pueden tener igualdades en algunos casos.

Entre el conjunto de restricciones es importante señalar la restricción de **No negatividad**, la cual es un conjunto de restricciones en sí misma, se define una restricción para cada variable de decisión, la que asegura que los valores que toma dicha variable son siempre mayores o iguales a **0**.

Ahora veremos un ejemplo típico de un programa lineal para que comprendamos de mejor manera cada uno de los elementos descritos.

4. Ejemplo de un programa lineal

Considere la siguiente situación:

Suponga que, durante las vacaciones de mitad de año, usted ha podido visitar a una muy querida tía que vive a las afueras de la ciudad. Allí, su tía tiene una parcela de 10 hectáreas y generalmente cultiva tomates o zanahorias, cuyo precio por libra es bastante similar. Cada periodo, ella decide cultivar uno u otro tipo de cultivo, pero también tiene la opción de dividir su parcela y en una parte cultivar tomates y en la otra, zanahorias. El principal problema que tiene es el gasto de dos insumos críticos: el fertilizante y el pesticida. Para cada hectárea cultivada con tomates, se deben utilizar 10 libras de fertilizante y 3 galones de pesticida; mientras que para cada hectárea cultivada con zanahoria se requieren 15 libras de fertilizante, pero solo 2 galones de pesticida. El fertilizante que utiliza su tía es orgánico, producido por ella misma y por lo tanto solo dispone de 120 libras para todos sus cultivos. Por otra parte, el pesticida es un producto químico, por lo que su utilización se debe mantener en un nivel muy bajo; teniendo en cuenta esto, su tía no utiliza más de 30 galones en toda su parcela.

Finalmente, según las estimaciones de su tía, cada hectárea cultivada con tomates produce 60 kilos de producto, mientras que cada hectárea cultivada con zanahorias producirá 80 kilos de producto. Usted, como un futuro profesional que domina las matemáticas aplicadas, le debe ayudar a su tía a tomar la mejor decisión para su cultivo.

El problema anterior, aunque muy sencillo como veremos a continuación, ilustra completamente todos los elementos importantes de un programa lineal; veamos cada aspecto con detalle.

Las variables de decisión se refieren a los aspectos del problema que son controlables por el tomador de decisiones, en este caso su tía. Aunque parecen existir múltiples aspectos que se pueden decidir, todos ellos se relacionan directamente con una decisión fundamental: **cuántas hectáreas dedicar a cada tipo de cultivo.**

Su tía podría, por ejemplo, tratar de decidir cuánto pesticida gastar, pero el gasto es una cantidad fija por cada hectárea dependiendo el tipo de cultivo, así que al decidir cultivar tomates o zanahorias implícitamente se decide cuanto pesticida gastar, de la misma forma el consumo de fertilizantes está implícito en la decisión del cultivo.

Una vez identificados los aspectos que vamos a modelar con las variables de decisión, debemos escribirlo de forma concreta, definiendo una variable de decisión para cada aspecto. En este caso, tenemos dos variables de decisión, una asociada a cada tipo de cultivo, las cuales escribimos así:

X_1**:** Número de hectáreas a cultivar con tomates

X_2**:** Número de hectáreas a cultivar con tomates

Note que las variables de decisión del problema toman valores numéricos; si por ejemplo decidimos que $X_1=3$, es claro su significado, debemos cultivar 3 hectáreas con tomates. Es importante garantizar que todas las variables de decisión sean definidas de tal forma que siempre tomen valores numéricos. Notemos, además que, si por ejemplo $X_1=3.5$, dicha respuesta es completamente válida en nuestro problema, se puede separar de la parcela una zona de 3.5 hectáreas para tomates, es decir, los valores de cada variable no tienen porque razón ser valores enteros. Este último aspecto no será tan evidente en todos los problemas, pero esos casos los analizaremos más adelante.

Una vez definidas las variables de decisión, tenemos que definir la función objetivo. Esta función debe representar fielmente la meta a conseguir con la solución del problema. En muchos casos se define en términos monetarios, ya sean gastos, ingresos o utilidades; pero este no siempre es el caso, por ejemplo, en este problema no tenemos ningún tipo de información financiera, la única información relacionada está en la frase *"cuyo precio por libra es bastante similar"* es decir, no hay diferencia en los ingresos por libra de cada tipo de producto. Por lo tanto, para optimizar el uso de la parcela, se debe buscar la **mayor producción.** Cada tipo de cultivo produce una determinada cantidad de producto y la producción total será la suma de las producciones de cada tipo de cultivo, lo que garantiza la linealidad de la función objetivo, por ejemplo, si dividimos la parcela a la mitad, 5 hectáreas para cada tipo de cultivo, tendríamos una producción de:

- **Para los tomates:** 60 kilos/hectárea × 5 hectáreas = 300 kilos
- **Para las zanahorias:** 80 kilos/hectárea × 5 hectáreas = 400 kilos

Así, la producción total sería de **60×5+80×5=700** kilos. En general, para obtener la producción total se debe multiplicar la cantidad de hectáreas cultivadas con tomates por 60 y las cultivadas con zanahorias por 80 y sumar las dos cantidades, es decir:

$$\mathbf{Z}=60X_1+80_2$$

En donde el uso de la letra Z para definir la función objetivo es una costumbre.

Ahora, con base en nuestra definición de la función objetivo debemos decidir si lo que queremos es encontrar el valor más grande o el valor más pequeño para dicha función, es decir, debemos escoger el criterio de optimización. En este caso, como la función objetivo representa la producción total de la parcela, no tiene sentido disminuirla, lo que queremos es encontrar el mayor nivel de producción posible, por lo tanto, queremos maximizar a Z, esto se indica como:

$$\text{"Máx" } \mathbf{Z}=60X_1+80X_2$$

Ahora, debemos definir cuáles de los aspectos del problema limitan la producción de la parcela, si no existieran dichos límites, podríamos hacer la función objetivo tan grande como queramos; por ejemplo, podríamos cultivar 1000000 de hectáreas con tomates y 1000000 con zanahorias, obteniendo una producción de 140000000 kilos de producto. ¡Pero obviamente, esto no es posible! Existen restricciones naturales en el problema, la cantidad de hectáreas de la parcela es limitada, no podemos cultivar millones de hectáreas si solo disponemos de 10, esta sería nuestra primera restricción, la cantidad de hectáreas disponibles, para expresar esta restricción con base en las variables de decisión definidas consideremos los siguientes ejemplos:

- Se pueden cultivar 5 hectáreas con tomates y 5 hectáreas con zanahorias, porque

$$5+5\leq 10$$

- Se pueden cultivar 7 hectáreas con tomates y 3 hectáreas con zanahorias, porque

$$7+3 \leq 10$$

- Se pueden cultivar 5 hectáreas con tomates y 2 hectáreas con zanahorias, porque

$$5+2 \leq 10$$

- No se pueden cultivar 6 hectáreas con tomates y 5 hectáreas con zanahorias, porque

$$6+5 \nleq 10$$

En donde usamos siempre el signo ≤ porque se trata de un recurso limitante. Esta relación, se puede expresar fácilmente usando las variables de decisión porque estas representan, precisamente, el número de hectáreas a cultivar, es decir, la restricción se puede escribir como:

$$X_1+X_2 \leq 10$$

El número de hectáreas de la parcela no es la única limitante, también tenemos una restricción en la cantidad de fertilizante que debemos usar, sin embargo, aquí no podemos poner simplemente la suma de las variables de decisión y compararla con la cantidad de fertilizante disponible, es decir, la expresión $X_1+X_2 \leq 120$ **no tiene sentido**. Al lado derecho, estamos sumando hectáreas y el lado izquierdo, el número 120, representa libras de fertilizante. Debemos ajustar nuestro lado izquierdo para que también represente libras de fertilizante, para ello tomemos por ejemplo una de las soluciones planteadas anteriormente.

Si cultivamos 5 hectáreas con tomates y 5 hectáreas con zanahorias, entonces el gasto de fertilizante sería de:

- **Para los tomates:** 10 libras/hectárea 5 hectáreas = 50 libras
- **Para las zanahorias:** 15 libras/hectárea 5 hectáreas = 75 libras

Así, consumiríamos en total 125 libras de fertilizante, lo cual no es posible porque solo tenemos 120 libras disponibles.

Por otra parte, si cultivamos 7 hectáreas con tomates y 3 hectáreas con zanahorias, entonces, el gasto de fertilizante sería de:

- **Para los tomates:** 10 libras/hectárea 7 hectáreas = 70 libras
- **Para las zanahorias:** 15 libras/hectárea 3 hectáreas = 45 libras

Así, consumiríamos en total 115 libras de fertilizante, lo cual es menor o igual a 120.

Comparando las dos relaciones anteriores tenemos que:

$$10 \times 5 + 15 \times 5 \nleq 120$$

$$10 \times 7 + 15 \times 3 \leq 120$$

Es decir, la restricción del fertilizante en términos de las variables de decisión se puede escribir como:

$$10X_1 + 15X_2 \leq 120$$

Un razonamiento similar para el otro recurso, el pesticida, del cual tenemos disponibles solo 30 galones, nos lleva a la siguiente relación:

- Si cultivamos 5 hectáreas con tomates y 5 hectáreas con zanahorias, entonces, el gasto de pesticida sería de:

$$3 \times 5 + 2 \times 5 \leq 30$$

La cual, en términos de las variables de decisión se expresa como:

$$3X_1 + 2X_2 \leq 30$$

Así, hemos definido un conjunto de restricciones que representan las limitaciones reales del problema. Solo nos queda por definir una última restricción, la de no negatividad, la cual sencillamente se expresa como:

$$X1 \geq 0$$

$$X2 \geq 0$$

En resumen, nuestro modelo lineal para el problema del cultivo de tomates y zanahorias se escribe así:

X_1: Número de hectáreas a cultivar con tomates

X_2: Número de hectáreas a cultivar con tomates

$$\text{"Máx"}\ Z = 60X_1 + 80X_2$$

$$S.A.$$

$$X_1 + X_2 \leq 10$$

$$15X_1 + 10X_2 \leq 120$$

$$3X_1 + 2X_2 \leq 30$$

$$X_1 \geq 0$$

$$X_2 \geq 0$$

La solución del problema es un aspecto que dejaremos para la semana 3, en donde encontraremos cuántas hectáreas con cada tipo de cultivo se deben plantar y cuál sería la producción total de la parcela

5. Ejemplos de aplicaciones

El ejemplo anterior es una simplificación excesiva de los modelos a los cuales nos enfrentaremos al solucionar problemas de la vida real. En esos problemas el número de variables de decisión puede alcanzar números de millones, mientras que el conjunto de restricciones puede estar formado por cientos de miles; sin embargo, la estructura de dichos problemas es la misma que mostramos con nuestro ejemplo. Ahora discutiremos brevemente algunas de las aplicaciones más importantes de la programación lineal, no entraremos en los detalles de cada modelo porque aún no tenemos los elementos necesarios para ello, el objetivo aquí es que veamos las variadas aplicaciones en donde se puede usar la programación lineal.

¿Sabía que...?

En cualquiera de las referencias bibliográficas de nuestro módulo se encontrarán infinidad de aplicaciones a diferentes problemas que fueron abordado a través de la programación lineal, sin ser exhaustivos estos incluyen temas como:

- Administración de proyectos
- Mezclas alimenticias
- Asignación de recursos
- Control de tráfico
- Flujo en redes
- Capacitación de personal
- Definición de turnos de operarios
- Definición de horarios de clase
- Asignación de salones y profesores
- Ubicación de sucursales
- Localización de planta
- Distribución dentro de la planta
- Recorrido de vehículos para recoger o entregar
- Planeación de menús
- Selección de proyectos
- Control de inventarios

Ahora, reseñaremos algunos proyectos que son interesantes, primero por tratarse de problemas locales y segundo por ser trabajos relativamente recientes. Es altamente recomendable que se sigan las referencias y se consulten los textos completos, los cuales están disponibles en la web y son de acceso abierto.

- Modelo de Programación Lineal entera mixta para el corte, carga y transporte de caña de azúcar. Un caso de estudio en Perú (Morales-Chávez, Soto-Mejía, & Sarache, 2016)
- Modelo de programación lineal binaria para el balance de carga de trabajo en el problema de asignación de proyectos (Acuña-Parada, Madiedo-Bautista, & Ortiz-Pimiento, 2013)
- Un nuevo algoritmo para la solución de problemas de programación lineal (Ramírez, Buitrago, Britto, & Fedossova, 2012)
- Evaluación de la eficiencia de las compañías aéreas brasileñas a través de un modelo híbrido de análisis envolvente de datos (DEA) y programación lineal multiobjetivo (Da Silveira, De Mello, & Meza, 2012)
- Competencia espacial por cuotas de mercado: el problema del líder-seguidor mediante programación lineal (Rodríguez, Peñate, & Pérez, 2011)
- Aplicación de un modelo de programación lineal en la optimización de un sistema de planeación de requerimientos de materiales (MRP) de dos escalones con restricciones de capacidad (Hidalgo & Díaz, 2010)
- Uso de la programación lineal paramétrica en la solución de un problema de planeación de requerimiento de materiales bajo condiciones de incertidumbre (Serna, Serna, & Ortega, 2010)
- Validación de soluciones obtenidas para el problema del despacho hidrotérmico de mínimo costo empleando la programación lineal binaria mixta (Ortiz Pimiento & Díaz Serna, 2008)
- Programación lineal como herramienta para toma de decisiones financieras (Díaz, 2007)
- Formulación de mezclas de sustratos mediante programación lineal (Morales, García, Haller, Victoria, & Spínola, 2005)
- Uso de programación lineal para conocer los parámetros geométricos de superficies cónicas convexas (Santiago-Alvarado, Vázquez-Montiel, Nivón-Santiago, & Castañeda-Roldán, 2004)
- Modelado del Transporte de Distribución Mediante Programación Lineal Entera (Ferrer, Coves, & De Los Santos, 2004)

- La programación lineal, como una herramienta para la asignación del presupuesto publicitario (Méndez, 2003)
- Uso de la programación lineal binaria entera para apoyar la planificación de las paradas de equipos industriales para su mantenimiento (Espinosa, 2002)

Esta es solo una pequeña muestra de trabajos en nuestro idioma que utilizan la programación lineal como su herramienta de trabajo principal.

Referencias

Acuña-Parada, S. Y., Madiedo-Bautista, E., & Ortiz-Pimiento, N. R. (enero – junio, 2013). Modelo de programación lineal binaria para el balance de carga de trabajo en el problema de asignación de proyectos. En: Ingeniería y Universidad, *17*(1), 167–181.

Da Silveira, J. Q., De Mello, J. C. C. B. S., & Meza, L. A. (2012). Evaluación de la eficiencia de las compañías aéreas brasileñas a través de un modelo híbrido de análisis envolvente de datos (DEA) y programación lineal multiobjetivo. En: Revista chilena de ingeniería *20*(3), 331–342.

Díaz, G. M. (2007). Programación lineal como herramienta para toma de decisiones financieras. *Sotavento M.B.A. 0*(10), 60–67.

Espinosa, F. F. (2002). Uso de la programación lineal binaria entera para apoyar la planificación de las paradas de equipos industriales para su mantenimiento. *Información Tecnológica, 13*(6), 61–66. Recuperado de https://www.scopus.com/inward/record.uri?eid=2-s2.0-0036942926&partnerID=40&md5=414cbcf4df371c511ffdf8d8752c47a3

Ferrer, L., Coves, A. M., & De Los Santos, M. A. (2004). Modelado del Transporte de Distribución Mediante Programación Lineal Entera. *Información Tecnológica*, *15*(4), 65–69. Recuperado de https://www.scopus.com/inward/record.uri?eid=2-s2.0-4043181941&partnerID=40&md5=56cb1897d581ab3ff99685ee3a1ceccd

Hidalgo, L. D., & Díaz, H. H. T. (abril, 2010). Aplicación de un modelo de programación lineal en la optimización de un sistema de planeación de requerimientos de materiales (MRP) de dos escalones con restricciones de capacidad. En: Ingeniería e investigación *30*(1), 168–173.

Méndez, J. R. (2003). La programación lineal, como una herramienta para la asignación del presupuesto publicitario. *Sotavento M.B.A., 0*(1), p. 81

Morales-Chávez, M. M., Soto-Mejía, J. A., & Sarache, W. (2016). Modelo de programación lineal entera mixta para el corte, carga y transporte de caña de azúcar. Un caso de estudio en Perú. En: DYNA, *83*(195), 173–179. https://doi.org/10.15446/dyna.v83n195.49490

Morales, B. P. Z., García, P. S., Haller, V. H. V., Victoria, D. E. & Spínola, A. G. (2005). Formulación de mezclas de sustratos mediante programación lineal. Interciencia, *30*(6), 365–369.

Ortiz Pimiento, N. R., & Diaz Serna, F. J. (2008). Validación de soluciones obtenidas para el problema del despacho hidrotérmico de mínimo costo empleando la programación lineal binaria mixta. En: DYNA, 75(156), 43–54.

Ramírez, A. L., Buitrago, O., Britto, R. A., & Fedossova, A. (mayo – junio, 2012). Un nuevo algoritmo para la solución de problemas de programación lineal. En: Ingeniería e investigación, *32*(2), 68–73.

Rodríguez, C. M. C., Peñate, D. R. S., & Pérez, J. A. M. (2011). Competencia espacial por cuotas de mercado: El problema del líder-seguidor mediante programación lineal. En: Revista Electrónica de Comunicaciones y Trabajos de ASEPUMA, *12*(1), 69–84.

Santiago-Alvarado, A., Vázquez-Montiel, S., Nivón-Santiago, R., & Castañeda-Roldán, C. (2004). Uso de programación lineal para conocer los parámetros geométricos de superficies cónicas convexas. *Revista Mexicana de Física, 50*(4), 358–365. Recuperado de https://www.scopus.com/inward/record.uri?eid=2-s2.0-5044226797&partnerID=40&md5=3eadf56f6f16e4035fe4204107170a0a

Serna, M. D. A., Serna, C. A., & Ortega, G. P. (diciembre, 2010). Uso de la programación lineal paramétrica en la solución de un problema de planeación de requerimiento de materiales bajo condiciones de incertidumbre. Ingeniería e investigación, *30*(3), 96–105.

INFORMACIÓN TÉCNICA

FACULTAD DE
INGENIERÍA, DISEÑO
E INNOVACIÓN

Módulo: Investigación de Operaciones

Unidad 1: Formulación de programas lineales

Escenario 1: Introducción a la investigación de operaciones

Autor: Juan Carlos Gutiérrez Vanegas

Asesor Pedagógico: Amparo Sastoque

Diseñador Gráfico: Juan Rodríguez

Asistente: Eveling Peñaranda