POLI POLITÉCNICO GRANCOLOMBIANO INSTITUCIÓN UNIVERSITARIA

FACULTAD DE INGENIERÍA, DISEÑO E INNOVACIÓN

Unidad 2 / Escenario 3

Lectura fundamental

Métodos de solución en dos variables (método gráfico)

Contenido

Palabras clave: programación lineal, optimización, método gráfico

1. Solución de programas lineales

En este escenario nos centraremos en conocer y dominar el método de solución básico para un problema de optimización lineal con máximo dos variables de decisión. En ese sentido, es importante que recordemos claramente la definición de un problema de programación lineal y tengamos presente cada uno de sus elementos.

Un buen punto de partida para presentar la solución de los programas lineales es considerar un caso sencillo en el cual se tienen solo dos variables de decisión. Por lo tanto, una solución se representa por medio de un punto en el plano cartesiano y el conjunto de todas las soluciones posibles determina una región en dicho plano. Estos conceptos que son familiares a todos nosotros nos permitirán comprender los principios básicos del algoritmo de solución que vamos a utilizar.

2. Método gráfico

Para entender cómo funciona el algoritmo de solución en dos dimensiones, vamos a ilustrar los pasos básicos con un ejemplo. Consideremos el siguiente problema:

$$(P1)\ \text{Máx } Z = 2X_1+3X_2$$

$$s.a.$$

$$X_1 + X_2 \leq 10 \quad (1)$$

$$-X_1 + X_2 \leq 2 \quad (2)$$

$$X_2 \leq 4 \quad (3)$$

$$X_1 \geq 0 \quad (5)$$

$$X_2 \geq 0 \quad (6)$$

Lo primero que debemos hacer es graficar el espacio de soluciones, es decir, el conjunto de puntos en R2 que satisfacen simultáneamente a todas las restricciones. Vamos a comenzar graficando cada una de ellas por separado y luego, encontraremos la intersección de las regiones definidas por cada una.

De esta manera, consideremos las restricciones de no negatividad, aquellas numeradas en nuestro ejemplo con (5) y (6); estas definen el primer cuadrante del plano, así que nuestro conjunto de soluciones estará ubicado en esta parte del plano, es decir, comenzamos con el primer cuadrante, como se observa en la figura 1.

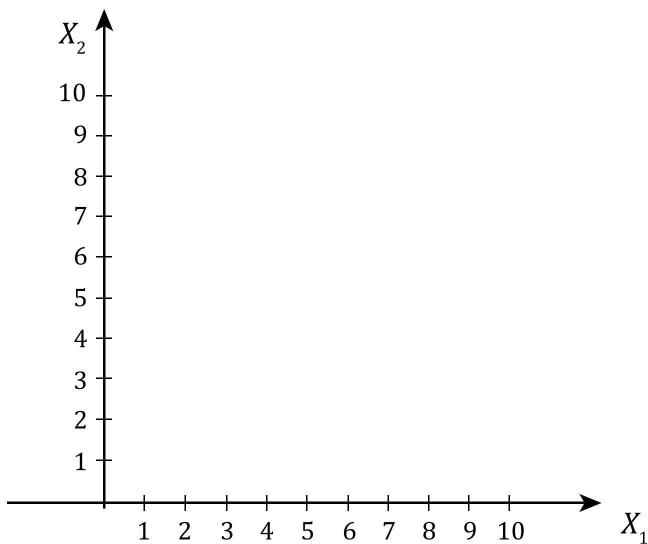

Figura 1. Región acotada por las restricciones de no negatividad
Fuente: elaboración propia

Notemos que a diferencia de los habituales ejes X y Y tenemos ahora los ejes X_1 y X_2 que corresponden a las variables de decisión, pero la forma en que graficamos las rectas y regiones es la habitual.

Vamos a comenzar con las otras restricciones del problema, veamos la desigualdad (1), la cual está limitada por la ecuación: $X_1 + X_2 = 10$, así que lo que debemos hacer es graficar la recta correspondiente a dicha ecuación. Al colocarla en la forma intersecto pendiente la ecuación toma la forma de:

$$X_2 = -X_1 + 10$$

Es decir, corta al eje X_2 en 10 y tiene pendiente -1, al graficarla en el plano de la figura 1, obtenemos la recta de la figura 2.

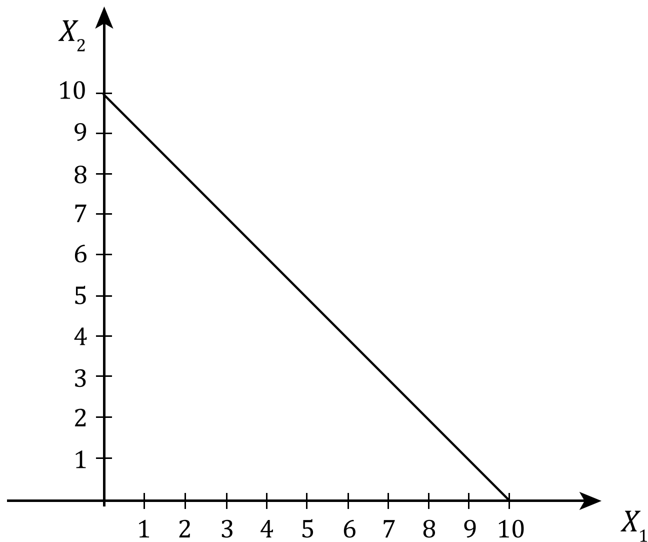

Figura 2. Recta que acota la primera restricción

Fuente: elaboración propia

Ahora bien, la primera restricción es una desigualdad, así que debemos tomar la región que satisface dicha desigualdad, como una de las dos regiones separadas por la recta. Para determinar cuál de las dos regiones es la indicada, si es la que está acotada por el triángulo con vértices (0,0), (10,0) y (0,10) o, por el contrario, es la región que se encuentra por fuera de dicho triángulo, podemos tomar un punto cualquiera (pero no sobre la recta) y determinar si dicho punto satisface o no la desigualdad original. Si la satisface el punto está en la región correcta, si no es así, entonces la región es aquella que no contiene al punto seleccionado. Por ejemplo, en este caso, podemos tomar el origen como punto de prueba, es decir, el punto (0,0). Veamos si satisface:

$$X_1 + X_2 \leq 10$$

$$0 + 0 \leq 10$$

Como el punto (0,0) satisface la restricción y se encuentra por debajo de la recta, entonces, la región que satisface la restricción es la que se encuentra por debajo, es decir, el triángulo acotado por los ejes y la recta. Podemos ver la región en la figura 3.

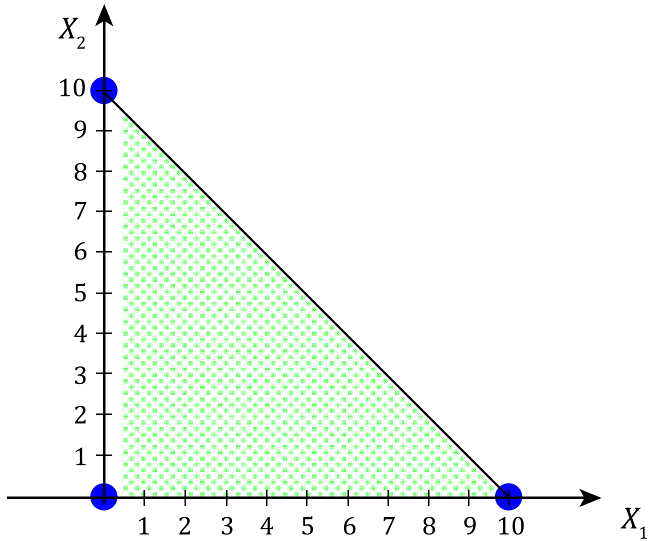

Figura 3. Región acotada por la primera restricción

Fuente: elaboración propia

Antes de continuar con las demás restricciones, es importante notar los puntos que corresponden a intersecciones de las restricciones; en nuestro ejemplo, podemos observar dichos puntos resaltados en azul, los que corresponden a las esquinas de la región acotada, (0,0), (10,0) y (0,10); es importante aprender a identificarlos porque de ellos dependerá la solución del problema.

Continuemos ahora con la segunda restricción, por facilidad vamos a graficar esta desigualdad sin tener en cuenta la restricción anterior, al final nos centraremos en poner todas las restricciones en el mismo gráfico para acotar el conjunto de soluciones del problema. La desigualdad (2) está limitada por la ecuación: $-X_1 + X_2 = 2$, que al colocarla en la forma intersecto pendiente la ecuación toma la forma de:

$$X_2 = X_1 + 2$$

Es decir, corta al eje X_2 en 2 y tiene pendiente 1, al graficarla en el plano de la figura 1 obtenemos la recta de la figura 4.

Como en el caso anterior, la restricción es una desigualdad y debemos escoger a una de las dos regiones separadas por la recta. Para determinar cuál de las dos regiones, tomaremos un punto cualquiera (pero no sobre la recta) y determinaremos si dicho punto satisface o no la desigualdad original. Por ejemplo, el punto (0,0) y veamos si satisface:

$$-X_1 + X_2 \leq 2$$

$$-0 + 0 \leq 2$$

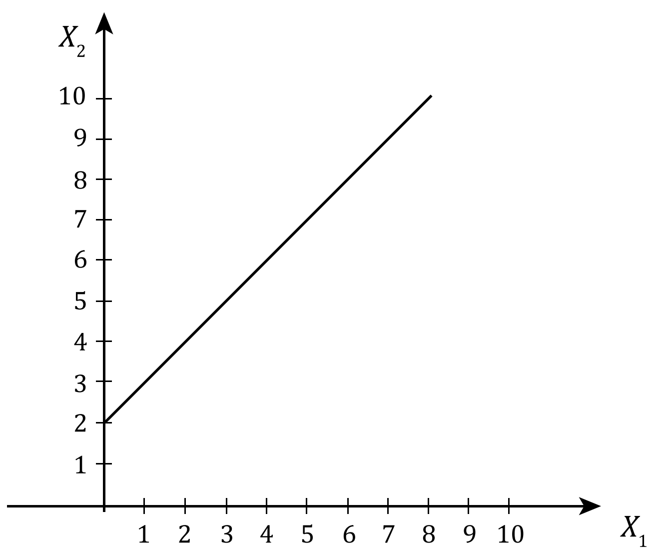

Figura 4. Recta que acota la segunda restricción

Fuente: elaboración propia

Como el punto (0,0) satisface la restricción y se encuentra por debajo de la recta, entonces, en la figura 5, la región que satisface la restricción es la que se encuentra por debajo. En esta misma figura, también podemos ver que la región solo tiene dos esquinas, los puntos (0,0) y (0,2), y que hacia la derecha la región no está acotada.

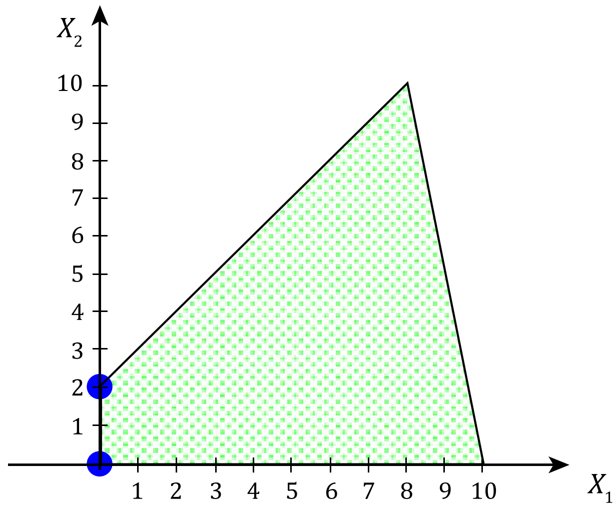

Figura 5. Región acotada por la segunda restricción

Fuente: elaboración propia

Ahora, debemos encontrar la región acotada por la tercera restricción, nuevamente vamos a graficar esta desigualdad sin tener en cuenta las restricciones anteriores. La desigualdad (3) está limitada por la ecuación: $X_2=4$, que ya se encuentra en la forma intersecto pendiente, es decir, corta al eje X_2 en 4 y tiene pendiente 0, es una recta paralela al eje X. Al graficarla en el plano de la figura 1, obtenemos la recta de la figura 6.

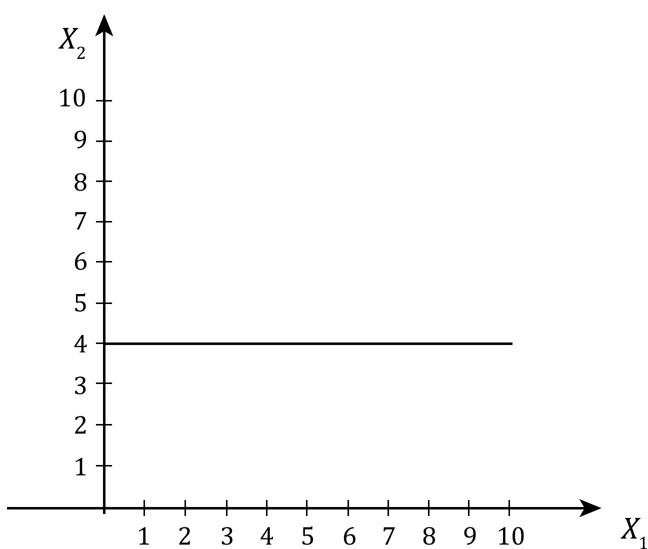

Figura 6. Recta que acota la tercera restricción

Fuente: elaboración propia

Como en los casos anteriores, la restricción es una desigualdad y debemos escoger a una de las dos regiones separadas por la recta. Para determinar cuál de las dos regiones, seguiremos el procedimiento usual, es decir, tomaremos un punto cualquiera (que no esté sobre la recta) y determinaremos si dicho punto satisface o no la desigualdad original. Por ejemplo, tomemos el punto (0,0) y veamos si satisface:

$$X_2 \leq 4$$

$$0 \leq 4$$

Como el punto (0,0) satisface la restricción y se encuentra por debajo de la recta, entonces, la región que satisface la restricción es la que se encuentra por debajo, como se puede ver la región en la figura 7.

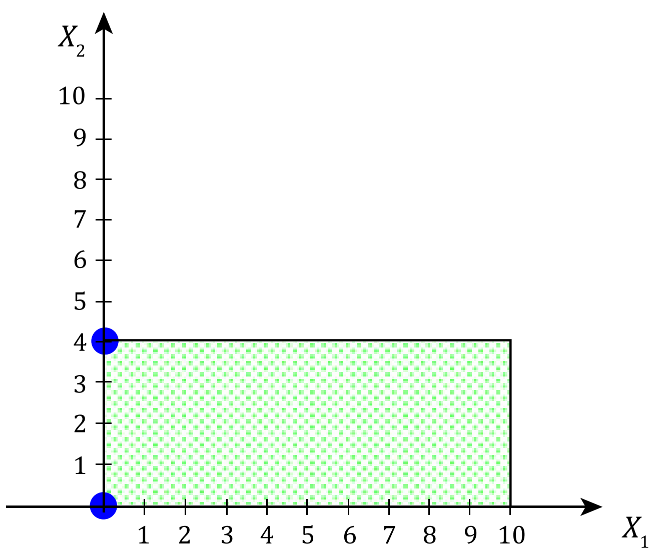

Figura 7. Región acotada por la tercera restricción.

Fuente: elaboración propia

Al observar la figura 7, como en el caso anterior, podemos ver que la región solo tiene dos esquinas: los puntos (0,0) y (0,4) y nuevamente se nota que hacia la derecha la región no está acotada.

3. Región factible

Como ya tenemos todas las regiones definidas por las tres restricciones del problema, junto con las restricciones de no negatividad para las dos variables, lo único que nos queda es graficar dichas regiones en el mismo plano y tomar la intersección de las tres regiones, esos puntos serán los que satisfacen a todas las restricciones a la vez, es decir, esa será la región factible. En la figura 8, se muestra la región obtenida en este caso.

Notemos en la figura 8 que la región tiene 5 esquinas, lo que denominaremos como puntos extremos, la definición geométrica formal de los puntos extremos es la siguiente:

Punto extremo: Un punto p de un conjunto convexo S es un punto extremo si para cada segmento de línea que está totalmente contenido en S y contiene a p, el punto p es un punto inicial (o final) del segmento.

En la definición anterior se entiende por un conjunto convexo al conjunto de puntos tal que toda línea recta que une cualesquiera dos puntos del conjunto está totalmente contenida en dicho conjunto.

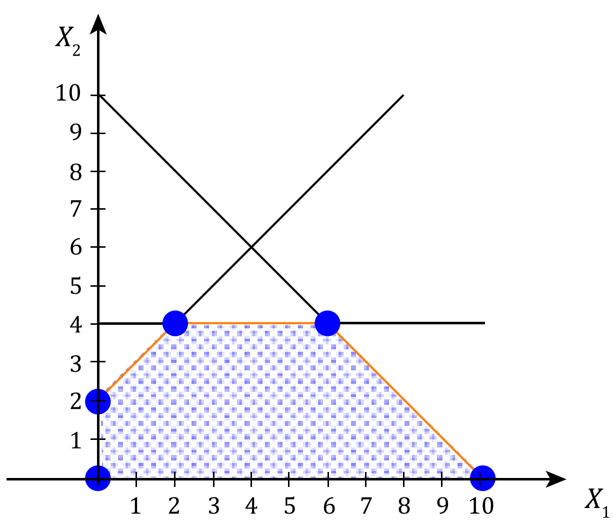

Figura 8. Región factible para el problema P1

Fuente: elaboración propia

De esta forma, tenemos en nuestra región factible se presentan 5 puntos extremos: (0,0), (0,2), (2,4), (6,4) y (10,0). La importancia de los puntos extremos está en el hecho de que para un programa lineal la solución óptima, ya sea de minimización o maximización, siempre se podrá encontrar en un punto extremo. Así, para encontrar la solución óptima a nuestro problema nos basta con considerar únicamente los 5 puntos extremos. Por tratarse de un problema pequeño, se pude encontrar la solución simplemente evaluando la función objetivo en los 5 puntos extremos y escogiendo el que obtenga un mayor valor.

$$Z\,(0,0) = 2\,(0) + 3\,(0) = 0$$

$$Z\,(0,2) = 2\,(0) + 3\,(2) = 6$$

$$Z\,(2,4) = 2\,(2) + 3\,(4) = 16$$

$$Z\,(6,4) = 2\,(6) + 3\,(4) = 24$$

$$Z\,(10,0) = 2\,(10) + 3\,(0) = 20$$

Por lo tanto, la solución óptima del problema se encuentra en el punto (6,4) en donde se obtiene un valor para la función objetivo de 24.

Una alternativa al proceso de evaluación en los puntos extremos, particularmente útil cuando se tienen muchos de ellos, es dibujar las curvas de nivel de la función objetivo e ir aumentando su valor, disminuyéndolo en el caso de un problema de minimización, hasta que se salga de la región factible, el último punto en tocar con las curvas de nivel antes de salir de la región factible corresponderá a la solución óptima. En la figura 9 se puede observar la solución óptima del problema junto con la curva de nivel correspondiente.

En síntesis...

El procedimiento sistemático para solucionar un problema lineal con dos variables de decisión será:

- Para cada restricción encuentre la línea recta correspondiente y trácela sobre el primer cuadrante del plano XY
- La línea divide el plano en dos regiones, utilice un punto cualquiera, no uno sobre la recta, para evaluar la restricción. Si se satisface con dicho punto tome esa como la región correcta y sombréela. Si el punto no satisface la restricción, entonces, tome la región que no contiene al punto como la región correcta y sombréela.
- Repita el procedimiento para todas las restricciones del problema.
- La región en donde todas las restricciones se satisfacen, aquella que fue sombreada en todos los casos es la región factible, identifíquela.
- Busque las esquinas de dicha región, estas corresponden a los puntos extremos del problema, encuentre sus coordenadas correctamente. Para este paso es posible que necesite resolver un sistema de ecuaciones simultáneas; no se guíe únicamente por el gráfico, encuentre las coordenadas exactas de la intersección de las rectas que definen la esquina.
- Trace las curvas de nivel de la función objetivo, aumente gradualmente el valor de la misma, si se trata de un problema de minimización, entonces, disminuya el valor, hasta que la curva de nivel toque tan solo un punto de la región factible, ese punto será una esquina (punto extremo) y por ende allí estará la solución óptima. Alternativamente, si se trata de pocos puntos extremos se puede evaluar la función objetivo en todos ellos y escoger el punto que optimice la función.

El procedimiento anterior se conoce como **método gráfico** y siempre se puede utilizar en programas lineales con dos variables de decisión.

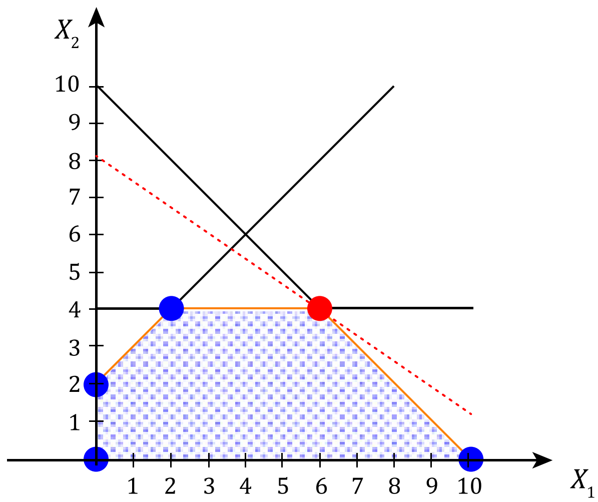

Figura 9. Solución óptima para el problema P1

Fuente: elaboración propia

4. Tipos de solución

Vamos a terminar nuestra presentación del método con tres casos atípicos que se pueden presentar. En el problema anterior la solución óptima se encontró en uno de los puntos extremos de la región factible, eso es lo que se conoce como una solución óptima única, pero ese no es el único caso posible al resolver un programa lineal, en realidad, pueden pasar una de las siguientes cuatro posibilidades:

- Solución óptima única
- Óptimos alternos (múltiples soluciones óptimas)
- Solución no acotada
- Problema no factible

El primer caso ya lo exploramos con el ejemplo anterior, veamos los siguientes tres casos:

4.1. Óptimos alternos

Este caso se presenta cuando una de la curva de nivel de la función objetivo con el valor óptimo coincide con alguna de las restricciones que define alguna de las caras de la región factible, así no hay un único último punto que coincida con la curva de nivel, es todo un segmento de línea el que coincide, por lo tanto, cualquiera de los puntos en dicho segmento será una solución óptima. Veamos un ejemplo:

Considere el siguiente problema lineal, adaptado de (Hillier & Lieberman, 2015):

$$(P2)\ \text{Máx } Z = 3X_1 + 2X_2$$

$$s.a.$$

$$3X_1 + 2X_2 \leq 18$$

$$X_1 \leq 6$$

$$X_2 \leq 4$$

$$X_1 \geq 0$$

$$X_2 \geq 0$$

¿Sabía que...?

Cuando se tiene un problema lineal con óptimos alternos, este corresponde a un sistema de ecuaciones simultaneas lineales con infinitas soluciones.

La región factible del problema, sus puntos extremos y la curva de nivel $Z = 18$ se muestran en la figura 10.

En la figura, podemos observar que la curva de nivel de la función objetivo y la restricción $3X_1 + 2X_2 \leq 18$ coinciden, por lo tanto, todos los puntos en el segmento de línea que une los puntos (2,6) y (4,3) conllevan a un valor de la función objetivo de 18. Es decir, todos los puntos sobre dicho segmento son soluciones óptimas, es por eso que, decimos que el problema tiene óptimos alternos.

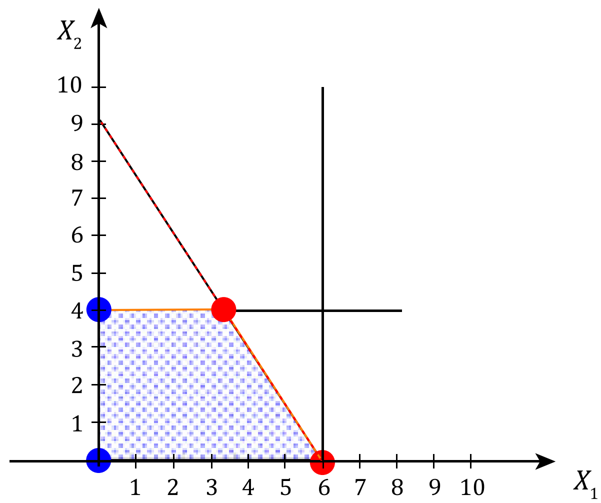

Figura 10. Solución óptima para el problema P2.

Fuente: elaboración propia

4.2. Solución no acotada

En ocasiones la región factible no es una región acotada, es decir, existe alguna dirección en la que podemos movernos indefinidamente y aun así seguimos dentro de la región factible, a dicha dirección se le conoce como **dirección extrema**. Esto no necesariamente implica que el problema tenga una solución no acotada, aún es posible que la solución óptima se encuentre en alguno de los puntos extremos del problema. Sin embargo, si la dirección de movimiento de las curvas de nivel de la función objetivo coincide con esta dirección extrema, entonces, la solución podrá crecer, o disminuir, indefinidamente y no se tendrá una solución acotada para el problema. Veamos esta situación con más detalle en los siguientes dos ejemplos.

Considere el siguiente problema lineal, tomado de (Hillier & Lieberman, 2015):

$$(P3)\ \text{Máx}\ Z = 3X_1+5X_2$$

s.a.

$$X_1 \leq 4$$

$$X_1 \geq 0$$

$$X_2 \geq 0$$

La región factible del problema, que es no acotada, presenta sus puntos extremos y las curvas de nivel $Z=20$, $Z=25$, $Z=30$, $Z=35$, los cuales se muestran en la figura 11.

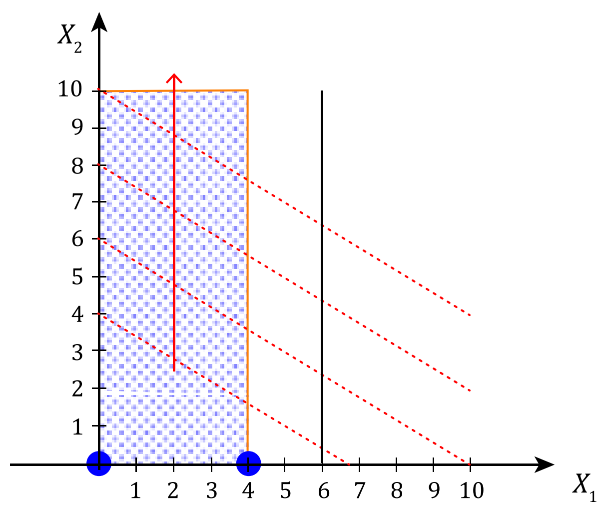

Figura 11. Región factible y curvas de nivel para el problema P3.

Fuente: elaboración propia

Como se observa en la figura anterior, las curvas de nivel siempre caerán en la región factible, es decir, la función objetivo puede crecer indefinidamente y aun así las restricciones del problema se satisfacen, es por esta razón que decimos que la solución es no acotada.

Sin embargo, no siempre que tengamos una región factible no acotada tendremos una solución del problema no acotada, por ejemplo, consideremos el siguiente problema:

$$(P4)\ \text{Máx } Z = 3X_1$$

$s.a.$

$$X_1 \leq 4$$

$$X_1 \geq 0$$

$$X_2 \geq 0$$

La región factible del problema, sus puntos extremos y la curva de nivel Z=12 se muestran en la figura 12.

Como lo observamos en la figura 12, aunque la región factible es no acotada, las curvas de nivel de la función objetivo crecen en una dirección diferente a la dirección extrema, por eso, al llegar al valor de 12, la función objetivo alcanza una cara de la región factible y ya no puede aumentar más. En este caso, tenemos óptimos alternos, porque cualquier punto sobre la semirrecta X=4 proporciona el mismo valor para la función objetivo.

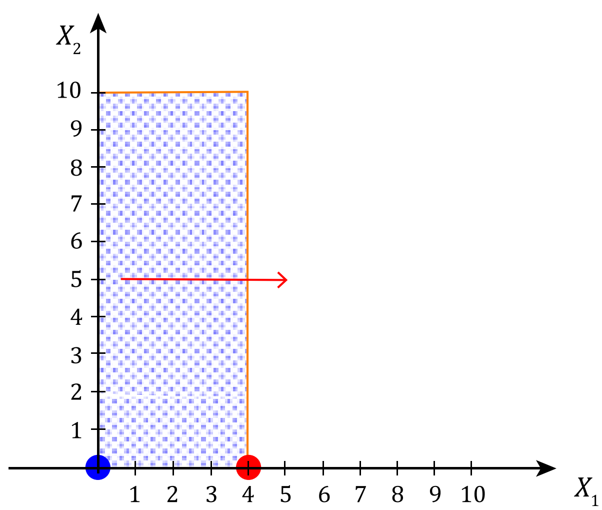

Figura 12. Solución óptima para el problema P4

Fuente: elaboración propia

4.3. Problema no factible

Este último caso se presenta cuando no existe ningún punto del plano que satisfaga simultáneamente todas las restricciones, es decir, no existe ni una sola solución factible, por lo tanto, el problema no tendrá solución. Veamos un ejemplo

Considere el siguiente problema lineal:

$$(P5)\ \text{Máx } Z = X_1 + X_2$$

$$s.a.$$

$$X_1 \leq 4$$

$$X_1 \geq 5$$

$$X_1 \geq 0$$

$$X_2 \geq 0$$

¿Sabía que...?

Cuando se tiene un problema lineal no factible, con las restricciones del problema siempre se puede construir un sistema de ecuaciones simultaneas lineales que no tienen solución

En la figura 13, se muestran las dos regiones acotadas por cada una de las restricciones y como se observa allí, no hay intersección de dichas regiones, es decir, ninguno de los puntos del plano satisface las dos restricciones a la vez, por lo tanto, no tenemos solución factible para este problema.

Con esto damos por terminado el método gráfico, en la siguiente cartilla trataremos de generalizar los conceptos aquí vistos para aplicarlos a problemas con más de dos variables de decisión, para lo cual introduciremos el método Simplex.

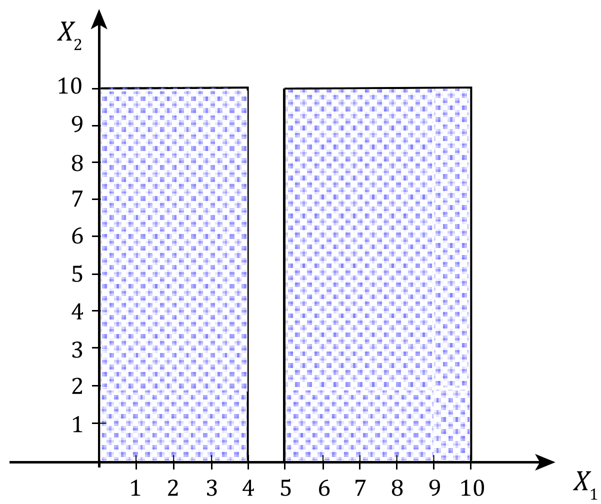

Figura 13. Regiones acotadas por las restricciones del problema P5

Fuente: elaboración propia

Referencias

Hillier, F. S., & Lieberman, G. J. (2015). Investigación de operaciones (10a ed.). México: McGraw-Hill.

INFORMACIÓN TÉCNICA

FACULTAD DE
INGENIERÍA, DISEÑO
E INNOVACIÓN

Módulo: Investigación de Operaciones

Unidad 2: Métodos de solución de problemas lineales

Escenario 3: Métodos de solución en dos variables (método gráfico)

Autor: Juan Carlos Gutiérrez Vanegas

Asesor Pedagógico: Amparo Sastoque

Diseñador Gráfico: Juan Rodríguez

Asistente: Eveling Peñaranda