INSTITUCIÓN UNIVERSITARIA POLITÉCNICO GRANCOLOMBIANO

Facultad de Ingeniería y Ciencias Básicas

Unidad 3 / Escenario 5

Lectura fundamental

Ecuaciones de recurrencia

Contenido

Palabras claves:
Ecuación de recurrencia, ecuación de recurrencia lineal, polinomio característico

Introducción

Existen algoritmos que requieren el uso de funciones definidas de forma recursiva o generar una secuencia de datos (relacionados de forma recursiva). Ejemplos de ello es el método de ordenamiento *merge sort*, el método de *solución de ecuaciones* de Newton o el método de búsqueda binaria; empleados en campos como inteligencia artificial y matemáticas. En esta lectura se presentan herramientas para analizar la complejidad de este tipo de algoritmos.

1. Ecuaciones de recurrencia

Observe las siguientes secuencias de números:

- $1, 2, 4, 8, 16, 32, 64, 128, 256, \ldots$
- $0, 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, \ldots$
- $4, 6, -2, -14, -10, 18, 38, 2, \ldots$

En cada caso, ¿puede hallar un término más de la sucesión? En la primera lista, se observa que cada elemento de la secuencia (a partir de la segunda posición) es el doble del anterior, por lo tanto el término que sigue a 256 es 512; en la seguna lista al analizar sus elementos se concluye que cada término (a partir del tercero) es la suma de los dos términos anteriores [*] por lo cuál el número que sigue a 34 es $55 = 34 + 21$.

Si en una sucesión cada término, a partir de una posición, se obtiene a través de un cálculo que emplea elementos de la secuencia ubicados en posiciones anteriores entonces se dice que existe una *relación de recurrencia* entre los elementos. Las sucesiones presentadas anteriormente son un ejemplo de ello.

Si los elementos de la suceción $1, 2, 4, 8, 16, 32, 64, 128, 256, \ldots$ se denotan por $a_0, a_1, a_2, a_3, \ldots$ respectivamente, entonces la relación de recurrencia para esta secuencia se podría expresar de la siguiente forma:

$$a_n = 2a_{n-1} \qquad \text{para } n \geq 1 \tag{1}$$

Que corresponde a l a i dea "cada elemento, a partir de l a posición 1, de l a secuencia se obtiene multiplicando por 2 el elemento que está en la posición anterior". El lector debe notar que la relación (1) está definida para $n \geq 1$ dado que $a_0 = 1$ corresponde al primer término de la sucesión y sobre este no tiene sentido la relación de recurrencia, además este elemento corresponde a la *condición inicial* para generar los otros elementos.

Si se simbolizan los términos de la sucesión $0, 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, \ldots$ como $b_0, b_1, b_2, \ldots$ respectivamente, entonces la relación de recurrencia presente en esta sucesión se expresa de la forma:

$$b_n = b_{n-1} + b_{n-2} \qquad \text{para } n \geq 2 \tag{2}$$

[*] Esta es la sucesión de Fibonacci.

Y su condición inicial es $b_0 = 0$, $b_1 = 1$. Debe tener presente que el símbolo b_{n-1} hace referencia al elemento que está en la posición anterior a b_n y b_{n-2} denota al elemento que se ubica *dos* posiciones *antes* del elemento b_n. A través de la siguiente definición se formalizan las ideas expuestas anteriormente.

Definición 1. Una *relación de recurrencia* entre los elementos de una sucesión $c_0, c_1, c_2, \ldots$ es una ecuación que establece una relación entre un elemento c_n de la secuencia y los elementos que lo preceden.

Observe que aunque exista una relación de recurrencia en los términos de una sucesión, no todos sus elementos se pueden calcular a través de ella. Por lo tanto, es necesario establecer algunos términos de forma explícita, los cuales se denominan la **condición inicial** de la recurrencia. Por ejemplo, si los términos de una secuencia satisfacen la relación:

$$c_n = c_{n-1} - c_{n-2} \qquad \text{para } n \geq 2$$

Entonces, cada término a partir de la posición $n = 2$ se obtiene realizando la resta de los términos anteriores, pero los términos c_0 y c_1 no son calculables a través de esta relación, por lo tanto es necesario indicar explícitamente su valor. Así, que una definición completa de la sucesión c_n es:

$$\textbf{Condición inicial: } \begin{cases} c_0 = 5 \\ c_1 = 3 \end{cases}$$
$$\textbf{Relación de recurrencia: } \{ c_n = c_{n-1} - c_{n-2} \qquad \text{para } n \geq 2$$

A continuación se exponen ejemplos de sucesiones definidas por una relación de recurrencia. Lo invito a revisar cada uno con detalle.

Ejemplo 1. Sea (f_n) la sucesión definida por la relación $f_n = f_{n-1}^2 - 1$ para $n \geq 1$ y condición inicial $f_0 = 0$. Calcular el término f_2.

Solución: Para hallar f_2 se debe emplear la relación de recurrencia, que para este caso indica que:

$$f_2 = f_1^2 - 1$$

Pero se desconoce el valor de f_1, entonces se debe calcular primero este dato. Para lo cual se emplea de nuevo la relación de recurrencia, por lo tanto:

$$f_1 = f_0^2 - 1$$

el valor de f_0 es 0, *condicion inicial*, con lo cual:

$$f_1 = 0^2 - 1 = -1$$

y conociendo que $f_1 = -1$ se puede determinar f_2:

$$f_2 = (-1)^2 - 1 = 0$$

$\diamondsuit$

Ejemplo 2. Sea (a_n) la sucesión definida por la relación $a_n = a_{n-2} - a_{n-3}$ para $n \geq 3$ y condición inicial $a_0 = 1$, $a_1 = 4$, $a_2 = 7$. Calcular el término a_4.

Solución: Para determinar el valor de a_4 se debe emplear la relación de recurrencia, que para esta posición establece que:

$$a_4 = a_2 - a_1$$

como a_2 y a_1 son condición inicial de la sucesión, entonces sus valores son conocidos y por lo tanto se tiene que:

$$a_4 = 4 - 1 = 3$$

$\diamondsuit$

Ejemplo 3. Sea (b_n) la sucesión definida por la relación $b_n = b_{n-1} + b_{n-3} + b_{n-5}$ para $n \geq 5$ y condición inicial $b_0 = 1$, $b_1 = 2$, $b_2 = -2$, $b_3 = -1$, $b_4 = 0$. Calcular el término b_6.

Solución: para determinar el valor de b_6 se debe emplear la relación de recurrencia, que para esta posición establece que:

$$b_6 = b_5 + b_3 + b_1$$

Como b_3 y b_1 son condición inicial de la sucesión, entonces sus valores son conocidos. Pero el valor de b_5 no se tiene, por lo tanto se debe hallar primero este valor para lo cual se utiliza la relación de recurrencia que indica que:

$$b_5 = b_4 + b_2 + b_0$$

Aquí b_4, b_2 y b_0 son condiciones iniciales entonces se conoce su valor. Así que,

$$b_5 = 0 + (-2) + 1 = -1$$

Ahora, se puede determinar el valor de b_6:

$$\begin{aligned} b_6 &= b_5 + b_3 + b_1 \\ &= -1 + (-1) + 2 = 0 \end{aligned}$$

$\diamondsuit$

Los ejemplos anteriores, permiten exponer el uso de la relación de recurrencia y sus condiciones iniciales para hallar nuevos términos de una sucesión. Como se puede notar, si se desea calcular un término que está en una posición alta es necesario utilizar varios términos previos, lo que computacionalmente puede ser *costoso*; por lo tanto una pregunta natural es: dada una sucesión (c_n) definida por una relación de recurrencia, ¿existe una fórmula que permita hallar el valor de c_n sin tener que recurrir a elementos previos en la sucesión? En lo que sigue se exponen las situaciones donde es posible determinar una fómula explícita para la suceción.

Dependiendo del tipo de relación de recurrencia se pordrá seguir un proceso que permita sustituir la ecuación de recurrencia por una relación explícita entre un término de la sucesión y su posición sin utilizar elementos previos de la secuencia. Por lo tanto, es importante para el lector, identificar los tipos de relaciones de recurrencia y sus métodos de solución.

2. Ecuaciones de recurrencia lineales homogéneas

Definición 2. Una relación de recurrencia es una *ecuación de recurrencia lineal homogénea con coeficientes constantes de orden* k si es de la forma:

$$a_n = c_1 a_{n-1} + c_2 a_{n-2} + c_3 a_{n-3} + \cdots + c_k a_{n-k} \qquad \text{con } c_k \neq 0$$

donde $c_i \in \mathbb{R}$ es constante para $i = 1, 2, \ldots, k$.

Es decir, el término de la posición n equivale a la combinación lineal de los elementos que están k posiciones atrás. Es importante destacar que en una relación de recurrencia lineal homogénea de orden k no siempre se hace uso de todos los $k-1$-anteriores elementos. Para simplificar la escritura se dirá a una ecuación de recurrencia lineal homogenea con coeficientes constantes de orden k, *ecuación de recurrencia lineal homogénea*.

Observe a continuación los siguientes ejemplos de relaciones de recurrencia y por qué son o no ecuaciones de recurrencia lineal homogénea.

Ejemplo 4. Sea la relación de recurrencia:

$$a_n = 3a_{n-1}$$

Entonces esta es una ecuación de recurrencia lineal homogénea de orden 1 (es necesario el elemento que está en la posición anterior).

Ejemplo 5. Sea la relación de recurrencia:

$$f_n = f_{n-1}^2$$

Entonces esta **no** es una ecuación de recurrencia *lineal* homogénea, dado que para calcular el término de la posición n es necesario elevar al cuadrado el elemento que está en la posición $n-1$

Ejemplo 6. Sea la relación de recurrencia:

$$b_n = b_{n-1} + b_{n-3} + b_{n-5}$$

Entonces esta es una ecuación de recurrencia lineal homogénea de orden 5 (la posición más pequeña necesaria para calcular b_n está cinco posiciones atrás).

Ejemplo 7. Sea la relación de recurrencia:

$$b_n = b_{n-1} b_{n-3} + b_{n-5}$$

Entonces esta **no** es una ecuación de recurrencia lineal homogénea, dado que existe una multiplicación entre los términos de las posiciones $n-1$ y $n-3$.

Ejemplo 8. Sea la relación de recurrencia:

$$b_n = 3b_{n-1} + 2b_{n-3} + b_{n-4} + n$$

Entonces esta **no** es una ecuación de recurrencia lineal homogénea, dada la presencia del sumando n en la expresión del lado derecho de la ecuación.

En una ecuación de recurrencia lineal *homogénea* solo se puede hacer uso de los términos previos de la sucesión.

Ejemplo 9. Sea la relación de recurrencia:

$$d_n = d_{n-1} - 5d_{n-3} + d_{n-4} + 1$$

Entonces esta **no** es una ecuación de recurrencia lineal homogénea, dada la presencia del sumando 1 en la expresión del lado derecho de la ecuación.

Ejemplo 10. Sea la relación de recurrencia:

$$c_n = c_{n-2} - 5c_{n-3} + c_{n-4}$$

Entonces esta es una ecuación de recurrencia lineal homogénea de orden 4.

Ejemplo 11. Sea la relación de recurrencia:

$$c_n = c_{n-2} - 5c_{n-3} + nc_{n-4}$$

Entonces esta **no** es una ecuación de recurrencia lineal homogénea, dado que el coeficiente de c_{n-4} no es constante.

2.1. Ecuaciones de primer orden

Observe la siguiente ecuación de recurrencia lineal homogénea de orden 1 (o primer orden):

$a_n = 5a_{n-1}$ para $n \geq 1$

Con condicion inicial $a_0 = 7$. Los primeros 5 términos son:

$$\begin{aligned}
a_0 &= 7\\
a_1 &= 5a_0 = 5(7)\\
a_2 &= 5a_1 = 5(5(7)) = 5^2(7)\\
a_3 &= 5a_2 = 5(5^2(7)) = 5^3(7)\\
a_4 &= 5a_3 = 5(5^3(7)) = 5^4(7)
\end{aligned}$$

Lo que sugiere que $a_n = 7(5^n)$ para $n \geq 0$. Esta relación corresponde a una fórmula explícita para calcular un término de la sucesión. Si se desea calcular a_{10} solo es necesario evalúar $7(5^{10}) = 68.359.375$ sin necesidad de conocer los t érminos a_9, a_8, a_7, ... El siguiente teorema indica la forma de construir la relación explícita de una ecuación de recurrencia lineal homogénea de primer orden.

Teorema 1. La relación explícita de la ecuación de recurrencia lineal homogénea de primer orden:

$$a_n = C \cdot a_{n-1} \qquad \text{para } n \geq 1$$

con condición inicial $a_0 = D$ es:

$$a_n = D \cdot (C)^n \qquad \text{para } n \geq 0$$

Es tradicional denominar la relación explícita como la *solución de la ecuación de recurrencia*.

Ejemplo 12. Determinar la solución de la ecuación de recurrencia:

$$b_n = -2b_{n-1} \qquad \text{para } n \geq 1$$

con condición inicial $b_0 = 5$. Luego hallar b_7

Solución: como la ecuación de recurrencia es lineal homogénea de primer orden, entonces por el teorema anterior se tiene que:

$$b_n = 5(-2)^n$$

y por lo tanto $b_7 = 5(-2)^7 = -640$ $\diamondsuit$

Ejemplo 13. En un laboratorio se está estudiando el crecimiento de una batería particular. Los experimentos han evidenciado que la población de este microorganismo crece un 3 % cada día, con relación a la población del día anterior, cuando están en un ambiente limpio y sin presencia de otras bacterias. Determinar cuántas bacterias hay después de 10 días si la población inicial corresponde a 1200 bacterias.

Solución: si se denota por p_n la población de bacterias que hay después de n días, entonces la relación de crecimiento se puede expresar de la forma:

$$p_n = 1.03p_{n-1}$$

y la población inicial corresponde a p_0, es decir $p_0 = 1200$.

Como esta es una relación de recurrencia lineal homogénea de primer orden entonces se tiene que:

$$p_n = 1200(1.03)^n$$

Con lo cual, después de 10 días hay una población de $p_{10} = 1200(1.03)^{10} \approx 1613$ bacterias. $\diamondsuit$

Ejemplo 14. Dada la sucesión $12, 6, 3, \frac{3}{2}, \frac{3}{4}, \ldots$. Determine el término que se ubica en c_{100} si denotamos los elementos de la secuencia por $c_0, c_1, c_2, c_3, \ldots$ respectivamente.

Solución: al analizar la sucesión se observa que hay la siguiente relación de recurrencia entre sus elementos:

$$c_n = \frac{1}{2}c_{n-1} \qquad \text{para } n \geq 1$$

Con condición inicial $c_0 = 12$. Por lo tanto, la solución de la ecuación es:

$$c_n = 12\left(\frac{1}{2}\right)^n$$

así que $c_{100} = 12\left(\frac{1}{2}\right)^{100} \approx 9,47 \times 10^{-30}$ $\diamondsuit$

2.2. Ecuaciones de segundo orden

Considere la siguiente ecuación de recurrencia lineal homogénea de segundo orden:

$$c_n = 2c_{n-1} + 3c_{n-2}$$

con $c_0 = 1$ y $c_1 = 5$.

¿Cómo hallar una relación explícita a partir de esta ecuación? Siguiendo la idea de lo obtenido en las ecuaciones lineales homogéneas de primer orden, se puede suponer que la relación explícita de esta ecuación es de la forma:

$$c_n = k \cdot r^n \tag{3}$$

Con k y r números diferentes a cero. Por lo tanto, el problema ahora consiste en determinar el valor de k y r correctos. Si se sustituye (3) en la ecuación $c_n = 2c_{n-1} + 3c_{n-2}$ se obtiene que

$$k \cdot r^n = 2k \cdot r^{n-1} + 3k \cdot r^{n-2}$$

que es equivalente a la ecuación:

$$kr^n - 2kr^{n-1} - 3kr^{n-2} = 0$$

factorizando kr^{n-2} se obtiene:

$$kr^{n-2}(r^2 - 2r - 3) = 0$$

y como k y r son valores diferentes a cero, entonces se concluye a partir de esta última ecuación que:

$$r^2 - 2r - 3 = 0 \tag{4}$$

La ecuación (4) se denomina la ecuación característica de la recurrencia $c_n = 2c_{n-1} + 3c_{n-2}$. Al resolver esta ecuación[†] se obtiene que:

$$r = 3 \qquad \text{o} \qquad r = -1$$

Es decir, existen dos soluciones de la ecuación de recurrencia:

$$c_n = k_1 \cdot 3^n \qquad \text{o} \qquad c_n = k_2 \cdot (-1)^n$$

El lector puede verificar que tomando solo una de las soluciones, por ejemplo $c_n = k_1 \cdot 3^n$, no es posible satisfacer las dos condiciones iniciales, dado que $c_0 = 1$ y si $c_0 = k_1 \cdot 3^0 = k_1$ entonces $k_1 = 1$, luego $c_n = 1(3)^n$ pero al evaluar c_1 se obtiene $c_1 = 3$ que es distinto a la condición inicial.

Por lo tanto, se considera la solución[‡]

$$c_n = k_1 \cdot 3^n + k_2 \cdot (-1)^n$$

Para hallar los valores de k_1 y k_2 se evalúa la expresión anterior en las posiciones de la condición inicial $n = 0$ y $n = 1$, luego se iguala a lo valores dados $c_0 = 1$ y $c_1 = 5$:

$$\begin{aligned} c_0 &= k_1 \cdot 3^0 + k_2 \cdot (-1)^0 = k_1 + k_2 \\ c_1 &= k_1 \cdot 3^1 + k_2 \cdot (-1)^1 = 3k_1 - k_2 \end{aligned}$$

por lo tanto:

$$\begin{aligned} k_1 + k_2 &= 1 \\ 3k_1 - k_2 &= 5 \end{aligned}$$

Resolviendo este sistema de ecuaciones, se concluye que $k_1 = \frac{3}{2}$ y $k_2 = -\frac{1}{2}$. Así que la solución de la ecuación de recurrencia $c_n = 2c_{n-1} + 3c_{n-2}$ con $c_0 = 1$ y $c_1 = 5$ es

$$c_n = \frac{3}{2} \cdot 3^n - \frac{1}{2} \cdot (-1)^n \qquad \text{para } n \geq 0$$

Lo realizado anteriormente se puede resumir en el siguiente teorema:

[†]puede emplear la fórmula cuadrática, estudiada en sus módulos de matemáticas

[‡]Se puede demostrar que esta relación es también solución de la ecuación homogénea

Teorema 2. Dada la ecuación de recurrencia lineal homogénea de segundo orden con coeficientes constantes:

$a_n + c_1 a_{n-1} + c_2 a_{n-2} = 0$

Si la ecuación característica asociada:

$r^2 + c_1 r + c_2 = 0$

Tiene dos soluciones **reales distintas** r_1 y r_2. Entonces la solución de la recurrencia es de la forma:

$$a_n = k_1 r_1^n + k_2 r_2^n$$

Los valores de k_1 y k_2 se determinan empleando las condiciones iniciales de la relación de recurrencia.

Ejemplo 15. Determinar la solución de la ecuación de recurrencia $b_n = 5b_{n-1} - 6b_{n-2}$ con condición inicial $b_0 = 0$, $b_1 = 2$.

Solución: esta es una ecuación de recurrencia de segundo orden, por lo tanto se intetará aplicar el teorema anterior. Lo primero que se debe hacer es *igualar* a cero la relación de recurrencia $b_n = 5b_{n-1} - 6b_{n-2}$, lo que corresponde a:

$$b_n - 5b_{n-1} + 6b_{n-2} = 0$$

Luego, se determina la ecuación característica de esta relación, que para este ejemplo corresponde a:

$$r^2 - 5r + 6 = 0$$

(Observe con detalle la ecuación característica y la ecuación de recurrencia igualada a cero). Al solucionar la ecuación característica se obtiene:

$$r = 2 \qquad \text{o} \qquad r = 3$$

como son dos soluciones distintas y reales, se concluye que la solución de la recurrencia es de la forma:

$$b_n = k_1(2)^n + k_2(3)^n \tag{5}$$

Para determinar los valores de k_1 y k_2 se evalúa la expresión (5) en $n = 0$ y $n = 1$ con lo que se obtiene que:

$$b_0 = k_1(2)^0 + k_2(3)^0 = k_1 + k_2$$
$$b_1 = k_1(2)^1 + k_2(3)^1 = 2k_1 + 3k_2$$

Pero $b_0 = 0$ y $b_1 = 2$, por lo tanto:

$$k_1 + k_2 = 0$$
$$2k_1 + 3k_2 = 2$$

Resolviendo el sistema, se determina que $k_1 = -2$ y $k_2 = 2$. Así que la solución de la ecuación de recurrencia es:

$$b_n = -2(2)^n + 2(3)^n$$

♢

Ejemplo 16. Determinar la solución de la ecuación de recurrencia $d_n = 3d_{n-1} + 28d_{n-2}$ con condición inicial $d_0 = 1$, $d_1 = 3$.

Solución: al igualar a cero la relación de recurrencia, se obtiene

$$d_n - 3d_{n-1} - 28d_{n-2} = 0$$

Por lo tanto la ecuación característica es:

$$r^2 - 3r - 28 = 0$$

y sus soluciones son:

$$r = 7 \qquad \text{o} \qquad r = -4$$

Como son dos soluciones distintas y reales, se concluye que la solución de la recurrencia es de la forma:

$$d_n = k_1(7)^n + k_2(-4)^n \tag{6}$$

Para determinar los valores de k_1 y k_2 se evalúa la expresión (6) en $n = 0$ y $n = 1$ con lo que se obtiene que:

$$\begin{aligned} d_0 &= k_1(7)^0 + k_2(-4)^0 = k_1 + k_2 \\ d_1 &= k_1(7)^1 + k_2(-4)^1 = 7k_1 - 4k_2 \end{aligned}$$

Pero $d_0 = 1$ y $d_1 = 3$, por lo tanto:

$$\begin{aligned} k_1 + k_2 &= 1 \\ 7k_1 - 4k_2 &= 3 \end{aligned}$$

Resolviendo el sistema, se concluye que $k_1 = \frac{7}{11}$ y $k_2 = \frac{4}{11}$. Así que la solución de la ecuación de recurrencia es:

$$d_n = \frac{7}{11}(7)^n + \frac{4}{11}(-4)^n \qquad n \geq 0$$

$\diamondsuit$

Ejemplo 17. Determinar la solución de la ecuación de recurrencia $c_n = 4c_{n-2}$ con condición inicial $c_0 = 1$, $c_1 = 0$.

Solución: al igualar a cero la relación de recurrencia, se obtiene

$$c_n - 4c_{n-2} = 0$$

Por lo tanto la ecuación característica es:

$$r^2 - 4 = 0$$

y sus soluciones son:

$$r = 2 \text{ o } r = -2$$

Como son dos soluciones distintas y reales, se concluye que la solución de la recurrencia es de la forma:

$$c_n = k_1(2)^n + k_2(-2)^n \tag{7}$$

para determinar los valores de k_1 y k_2 se evalúa la expresión (7) en $n = 0$ y $n = 1$ con lo que se obtiene que:

$$\begin{aligned} c_0 &= k_1(2)^0 + k_2(-2)^0 = k_1 + k_2 \\ c_1 &= k_1(2)^1 + k_2(-2)^1 = 2k_1 - 2k_2 \end{aligned}$$

Pero $c_0 = 1$ y $c_1 = 0$, por lo tanto:

$$k_1 + k_2 = 1$$
$$2k_1 - 2k_2 = 0$$

Resolviendo el sistema, se concluye que $k_1 = \frac{1}{2}$ y $k_2 = \frac{1}{2}$. Así que la solución de la ecuación de recurrencia es:

$$c_n = \frac{1}{2}(2)^n + \frac{1}{2}(-2)^n \qquad n \geq 0$$

$\diamondsuit$

Pero qué sucede si solo hay una solución real de la ecuación característica o si no hay solución en los números reales. En la primera situación se tiene:

Teorema 3. Dada la ecuación de recurrencia lineal homogénea de segundo orden con coeficientes constantes:

$$a_n + c_1 a_{n-1} + c_2 a_{n-2} = 0$$

si la ecuación característica asociada:

$$r^2 + c_1 r + c_2 = 0$$

tiene única solución real r. Entonces la solución de la recurrencia es de la forma:

$$a_n = k_1 r^n + k_2 \cdot n \cdot r^n$$

los valores de k_1 y k_2 se determinan empleando las condiciones iniciales de la relación de recurrencia.

Se debe destacar que para el caso de única solución en la ecuación característica, se construyen dos soluciones: $k_1 r^n$ y $k_2 \cdot n \cdot r^n$

Ejemplo 18. Determinar la solución de la ecuación de recurrencia $c_n = 10c_{n-1} - 25c_{n-2}$ con condición inicial $c_0 = 1$, $c_1 = 2$.

Solución: Al igualar a cero la relación de recurrencia, se obtiene

$$c_n - 10c_{n-1} + 25c_{n-2} = 0$$

Por lo tanto la ecuación característica es:

$$r^2 - 10r + 25 = 0$$

y su única solución es:

$$r = 5$$

entonces se concluye que la solución de la recurrencia es de la forma:

$$c_n = k_1(5)^n + k_2 \cdot n \cdot (5)^n \tag{8}$$

para determinar los valores de k_1 y k_2 se evalúa la expresión (8) en $n = 0$ y $n = 1$ con lo que se obtiene que:

$$c_0 = k_1(5)^0 + k_2(0)(5)^0 = k_1$$
$$c_1 = k_1(5)^1 + k_2(1)(5)^1 = 5k_1 + 5k_2$$

pero $c_0 = 1$ y $c_1 = 2$, por lo tanto:

$$k_1 = 1$$
$$5k_1 + 5k_2 = 2$$

resolviendo el sistema, se concluye que $k_1 = 1$ y $k_2 = -\frac{3}{5}$. Así que la solución de la ecuación de recurrencia es:

$$c_n = 1(5)^n - \frac{3}{5}n(5)^n \qquad n \geq 0$$

$\diamondsuit$

Ejemplo 19. Determinar la solución de la ecuación de recurrencia $c_n = -2c_{n-1} - c_{n-2}$ con condición inicial $c_0 = 1$, $c_1 = 1$.

Solución: al igualar a cero la relación de recurrencia, se obtiene

$$c_n + 2c_{n-1} + c_{n-2} = 0$$

Por lo tanto la ecuación característica es:

$$r^2 + 2r + 1 = 0$$

y su única solución es:

$$r = -1$$

Entonces, se concluye que la solución de la recurrencia es de la forma:

$$c_n = k_1(-1)^n + k_2 \cdot n \cdot (-1)^n \tag{9}$$

Para determinar los valores de k_1 y k_2 se evalúa la expresión (9) en $n = 0$ y $n = 1$ con lo que se obtiene que:

$$c_0 = k_1(-1)^0 + k_2(0)(-1)^0 = k_1$$
$$c_1 = k_1(-1)^1 + k_2(1)(-1)^1 = -k_1 - k_2$$

pero $c_0 = 1$ y $c_1 = 1$, por lo tanto:

$$k_1 = 1$$
$$-k_1 - k_2 = 1$$

Resolviendo el sistema, se concluye que $k_1 = 1$ y $k_2 = -2$. Así que la solución de la ecuación de recurrencia es:

$$c_n = 1(-1)^n - 2n(-1)^n \qquad n \geq 0$$

Que es equivalente a:

$$c_n = (-1)^n(1 - 2n) \qquad n \geq 0$$

$\diamondsuit$

En el caso que no existan soluciones reales, se debe trabajar en el sistema de los números complejos. Se recomienda revisar la lectura complementaria de este escenario.

3. Ecuaciones de recurrencia lineales no homogéneas

En esta sección se presenta un método para solucionar algunas ecuaciones recursivas lineales no homogéneas con coeficientes constantes de la forma:

$$a_n + c_1 a_{n-1} = f(n) \qquad \text{para } n \geq 1$$

o de la forma

$$a_n + c_1 a_{n-1} + c_2 a_{n-2} = f(n) \qquad \text{para } n \geq 2$$

Con $f(n)$ una función no idénticamente cero.

El método consiste en hallar una solución particular del problema $a_n^{(p)} = g(n)$ y la solución $a_n^{(h)}$ del problema homogéneo asociado, para luego considerar la solución $a_n = g(n) + a_n^{(h)}$.

3.1. Solución particular de una relación de recurrencia

Cuando se tiene una relación de recurrencia de la forma:

$$a_n + c_1 a_{n-1} + \cdots + c_k a_{n-k} = f(n)$$

se dice que $a_n = g(n)$ es una **solución particular** de la ecuaci´on de recurrencia si al evaluar la ecuación se satisface la igualdad, es decir:

$$g(n) + c_1 g(n-1) + \cdots + c_k g(n-k) = f(n)$$

Ejemplo 20. Considere la siguiente ecuación de recurrencia no homogénea:

$$a_n - 2a_{n-1} = 5^n$$

verifique que $a_n = \frac{5}{3}(5)^n$ es una solución particular de la ecuación.

Solución: Si $a_n = \frac{5}{3}(5)^n$ entonces $a_{n-1} = \frac{5}{3}(5)^{n-1}$, sustituyendo estos resultados en el lado derecho de la ecuación se obtiene:

$$\begin{aligned} a_n - 2a_{n-1} &= \frac{5}{3}(5)^n - 2\frac{5}{3}(5)^{n-1} \\ &= \frac{5}{3}(5^n - 2(5^{n-1})) \\ &= \frac{5}{3}5^{n-1}(5-2) \\ &= \frac{5}{3}5^{n-1}(3) \\ &= 5^n \end{aligned}$$

con lo cual se cumple la igualdad. $\diamondsuit$

Ejemplo 21. Considere la siguiente ecuación de recurrencia no homogénea:

$$a_n - 3a_{n-1} = n$$

verifique que $a_n = -\frac{1}{2}n - \frac{3}{4}$ es una solución particular de esta ecuación.

Solución: Si $a_n = -\frac{1}{2}n - \frac{3}{4}$ entonces $a_{n-1} = -\frac{1}{2}(n-1) - \frac{3}{4}$, sustituyendo estos resultados en el lado derecho de la ecuación se obtiene:

$$\begin{aligned} a_n - 3a_{n-1} &= -\frac{1}{2}n - \frac{3}{4} - 3\left(-\frac{1}{2}(n-1) - \frac{3}{4}\right) \\ &= -\frac{1}{2}n + \frac{3}{4} + \frac{3}{2}n + \frac{3}{4} \\ &= n \end{aligned}$$

con lo cual se cumple la igualdad. $\diamondsuit$

La pregunta que surge en este punto es ¿cómo hallar una solución particular de una ecuación de recurrencia no homogénea?

Considere la siguiente ecuación de recurrencia no homogénea:

$$a_n + 7a_{n-1} = 4^n \tag{10}$$

si se desea buscar una solución particular se puede suponer que la solución buscada es de la forma

$$a_n = C \cdot 4^n$$

es decir, tiene una forma *similar* a la función que está en el lado derecho de la ecuación, debido a que si $a_n + 7a_{n-1}$ debe dar igual a 4^n entonces a_n debe ser *parecida* a 4^n. Si se reemplaza $a_n = C \cdot 4^n$ en la ecuación 10 se obtiene:

$$C \cdot 4^n + 7(C \cdot 4^{n-1}) = 4^n$$

factorizando $C \cdot 4^{n-1}$ del lado izquierdo, se tiene que:

$$C \cdot 4^{n-1}(4+7) = 4^n$$

dividiendo ambos lados por 4^{n-1}:

$$11C = 4$$

luego $C = \frac{4}{11}$, así que una solución *particular* de la ecuación $a_n + 7a_{n-1} = 4^n$ es $a_n = \frac{4}{11}4^n$.

La siguiente tabla da una referencia para seleccionar la forma de la solución particular, dependiendo de la forma de la función $f(n)$ que se presente en la ecuación de recurrencia. A, A_2, A_1, A_0 representan constantes.

Tabla 1. Estructura de una solución particular $g(n)$

$f(n)$	$g(n)$
K constante	A constante
n	$A_1 n + A_0$
n^2	$A_2 n^2 + A_1 n + A_0$
r^n	Ar^n

Fuente: elaboración propia

Para entender el uso de la tabla anterior, revise el siguiente ejemplo:

Ejemplo 22. Determinar una solución particular de la ecuación de recurrencia $a_n = 4a_{n-2} + 2n$.

Solución: Primero se organiza la ecuación $a_n = 4a_{n-2}+2n$, dejando los términos que hacen referencia a elementos de la sucesión a un solo lado de la igualdad:

$$a_n - 4a_{n-2} = 2n$$

por lo tanto la función $f(n)$ de esta ecuación no homogénea es $f(n) = 2n$. Al revisar la tabla 1 se obtiene que si $f(n)$ es similar a n entonces la solución particular $a_n = g(n)$ puede ser de la forma $a_n = A_1 n + A_0$. Ahora, sustituyendo en la ecuación de recurrencia se obtiene:

$$\begin{aligned} a_n - 4a_{n-2} &= A_1 n + A_0 - 4(A_1(n-2) + A_0) \\ &= -3A_1 n - 3A_0 + 8A_1 \end{aligned}$$

e igualando a $2n$ se concluye que $A_1 = -\frac{2}{3}$ y $A_0 = -\frac{16}{9}$, por lo tanto la solución particular de la ecuación de recurrencia es:

$$a_n = -\frac{2}{3}n - \frac{16}{9}$$

$\diamondsuit$

3.2. Solución de una ecuación no homogénea

Luego de presentar un método para determinar una solución particular de una ecuación no homogénea, se expone el siguiente procedimiento para hallar la solución de una ecuación no homogénea.

Si se tiene una ecuación de recurrencia de la forma:

$$a_n + c_1 a_{n-1} + \cdots + c_k a_{n-k} = f(n)$$

entonces para hallar su solución se puede realizar lo siguiente:

1) Determinar la solución $a_n^{(h)}$ de la ecuación de recurrencia homogénea asociada, es decir:

$$a_n + c_1 a_{n-1} + \cdots + c_k a_{n-k} = 0$$

2) Hallar una solución particular $a_n = g(n)$ de la ecuación no homogénea.

$$a_n + c_1 a_{n-1} + \cdots + c_k a_{n-k} = f(n)$$

3) Construir la solución $a_n = g(n) + a_n^{(h)}$

Ejemplo 23. Determinar la solución de la ecuación $a_n = 4a_{n-2} + 2n$.

Solución: En este caso la ecuación no homogénea correspondiente es:

$$a_n - 4a_{n-2} = 2n$$

con lo cual la ecuación *homogénea* asociada es:

$$a_n - 4a_{n-2} = 0$$

cuya solución es:

$$a_n^{(h)} = k_1 2^n + k_2(-2)^n$$

Ahora, una solución particular de $a_n - 4a_{n-2} = 2n$ se calculó en la sección anterior:

$$a_n^{(p)} = -\frac{2}{3}n - \frac{16}{9}$$

Luego la solución de la ecuación de recurrencia es:

$$a_n = k_1 2^n + k_2(-2)^n - \frac{2}{3}n - \frac{16}{9}$$

para hallar los valores de k_1 y k_2 se hace uso de las condiciones iniciales. ♢

Ejemplo 24. Determinar la solución de la ecuación $a_n + 7a_{n-1} = 4^n$.

Solución: En este caso la ecuación homogénea asociada es:

$$a_n + 7a_{n-1} = 0$$

cuya solución es:

$$a_n^{(h)} = k(-7)^n$$

Ahora, una solución particular de $a_n - 4a_{n-2} = 2n$ se calculó anteriormente:

$$a_n^{(p)} = \frac{4^{n+1}}{11}$$

Luego la solución de la ecuación de recurrencia es:

$$a_n = k(-7)^n + \frac{4^{n+1}}{11}$$

para hallar el valor de k se hace uso de la condición inicial. $\diamondsuit$

4. Ejercicios

Los siguientes ejercicios tienen como objetivo que el estudiante afiance los conceptos presentados en la lectura, no se deben entregar al tutor del m´odulo.

1. Determine los primeros 5 términos de la sucesión definida por la relación de recurrencia $a_n = \frac{1}{3}a_{n-1} + 1$ con la condición inicial $a_0 = -1$.
2. Determine si la relación de recurrencia $c_n = c_{n-1} + c_{n-2} - 1$ es una relación homogénea.
3. Halle una relación de recurrencia para la sucesión $4, 6, -2, -14, -10, 18, \ldots$
4. Determine la solución de la ecuación de recurrencia $d_n = \frac{1}{2}d_{n-1}$ para $n \geq 1$ con $d_0 = 32$
5. Determine la solución de la ecuación de recurrencia $f_n = f_{n-1} + f_{n-2}$ para $n \geq 2$ con $f_0 = 0$, $f_1 = 1$. [Esta es la sucesión de Fibonacci clásica]
6. Determine la solución de la ecuación de recurrencia $f_n = -f_{n-1} + f_{n-2}$ para $n \geq 2$ con $f_0 = 0$, $f_1 = 1$. [Esta es una modificación de la sucesión de Fibonacci]
7. Determine la solución de la ecuación de recurrencia $a_n = 6a_{n-1} - 9a_{n-2}$ para $n \geq 2$ con $a_0 = 1$ y $a_1 = 2$
8. Determine una solución particular de la ecuación de recurrencia $a_n = 5a_{n-1} - 4a_{n-2} + 3^n$
9. Determine una solución particular de la ecuación de recurrencia $a_n = 2a_{n-1} + n^2$
10. Determine la solución de la ecuación de recurrencia $a_n = 5a_{n-1} - 4a_{n-2} + 3^n$ con $a_0 = 1$ y $a_1 = 5$

Bibliografía

[1] Grimaldi, R. (1998) *Matemáticas discreta y combinatoria*. México: Addison-Wesley Iberoamericana.

[2] Hammack, R. (2013) *Book of proof*, second edition, Editor: Richard Hammack.

[3] Rosen, K.H. and Pérez, J.M. (2004) *Matemática discreta y sus aplicaciones*, Madrid: McGraw-Hill.

INFORMACIÓN TÉCNICA

Módulo: Elementos en Teoría de la Computación
Unidad 3: Introducción al análisis de algoritmos
Escenario 5: Relaciones y funciones

Autor: Diego Arévalo Ovalle

Asesor Pedagógico: Óscar Mauricio Salazar
Diseñador Gráfico: Diego Arévalo Ovalle
Asistente: Alejandra Morales