POLITÉCNICO GRANCOLOMBIANO
INSTITUCIÓN UNIVERSITARIA

FACULTAD DE INGENIERÍA, DISEÑO E INNOVACIÓN

Unidad 1 / Escenario 1

Lectura Fundamental

Matrices y sistemas de ecuaciones. Formas de organizar información

Contenido

1. Palabras clave

Matrices, sistemas de ecuaciones lineales,organización de la información

2. Preguntas introductorias

En la toma de decisiones y solución de problemas, cotidianos, se requiere planear, organizar los datos, y establecer relaciones entre ellos; en este sentido el álgebra lineal permite construir procesos adecuados para el desarrollo de dichas actividades. En particular, en la situación expuesta al inicio del escenario, relacionada con la planificación de un viaje familiar y para lo expuesto en él, sería apropiado establecer un proceso que estime el dinero necesario para el viaje y permita, si es posible, tomar decisiones al respecto, con eficacia y rapidez. De acuerdo con esto, se esperaría que dicho proceso:

1. Organice y exponga de forma sencilla y clara los datos necesarios para la estimación.
2. Facilite el proceso de estimación en caso de presentarse cambios en las cantidades que intervienen en el contexto.
3. Permita tomar decisiones con la información obtenida a partir de él.

Estas características en la estructuración de procesos, son requeridas en diversas situaciones de la vida cotidiana y generan interrogantes como los siguientes:

- ¿Cómo se puede organizar y exponer la información dada en contextos como los mencionados, de modo que éstos cumplan las condiciones presentadas en él?
- ¿Cuál sería el proceso que permitiría hacer estimaciones como las planteadas?
- ¿Qué conocimientos se requieren para la construcción del proceso?
- ¿Cómo puede dicho proceso llevar a la toma de decisiones adecuadas?

Si se reflexiona respecto a lo anterior, se puede identificar que incluso algo que parece ser tan sencillo como planificar y determinar el dinero necesario para un viaje, puede llegar a ser una actividad no tan simple por requerir de elementos como los mencionados. Es por esto que la Matemática, a través del Álgebra Lineal con los contenidos que se exponen en esta lectura, permite construir procesos que atienden a situaciones como las del contexto (entre muchas otras similares), responden a los interrogantes presentados y facilitan la toma de decisiones. Observe cómo esto es posible, con lo expuesto en las siguientes secciones.

3. Cómo organizar información

Para organizar y exponer información relevante de un contexto o una situación es indispensable discriminar de él, aquellos datos que son fundamentales para establecer las relaciones que existen entre ellos. De acuerdo con el contexto y para ese caso, dichos datos son: el número de personas que viajarán, el número de días que durará el viaje, el tipo y costo de hospedaje por ciudad, los costos de alimentación, el tipo y costo de transporte utilizado y los costos de los lugares o sitios turísticos que se pueden visitar, mientras las relaciones consisten en cómo varían los costos implicados según el número de personas que viajan.

Con lo anterior y la información dada en la situación, se identifica que dentro de los datos algunos son conocidos, como por ejemplo los tipos y costos de hospedaje por ciudad y de transporte (terrestre), que varían según la cantidad de personas que viajan, y otros son desconocidos, como el número de personas que viajarán. Esta información a pesar de estar perfectamente descrita en el contexto, en la forma en que se presenta, no facilita su retención en la mente y requiere el estar leyéndola una y otra vez para elaborar cualquier estimación sobre los costos del viaje. Es por ello, que sería recomendable organizarla de tal manera que a simple vista sea clara y simple, y facilite el cálculo de los costos mencionados. Dentro de las formas que existen para ordenar información se encuentra el uso de tablas como las que se muestran a continuación.

Tabla 1: Costo de hospedaje por noche.

	Santa Marta	**Barranquilla**	**Cartagena**
Habitación $1-2$ **personas**	70,000	50,000	80,000
Habitación $3-4$ **personas**	63,000	45,000	76,000
Habitación 5 **personas**	56,000	38,000	72,000

*Fuente:*Elaboración propia (2017)

Tabla 2: Costo de transpote.

	BTA-SMT	**SMT-B/Q**	**B/Q-CTG**	**CTG-BTA**
$1-2$ **personas**	80,000	32,000	17,000	130,000
$3-4$ **personas**	75,000	30,000	16,000	125,000
5 **personas**	70,000	28,000	15,000	115,000

*Fuente:*Elaboración propia (2017)

Esta manera de presentar información permite visualizarla con claridad, establecer relaciones a partir de ella e identificar características importantes para la toma de decisiones, como por ejemplo, en qué ciudad es más económico el hospedaje y el transporte, y qué tipo de acomodación es más benéfica para los interesados. Una organización muy similar a esta se obtiene con el uso de **matrices**, que ofrece el álgebra lineal, con la diferencia de que al reconocer su uso es posible representar de forma más práctica la información, facilitando su análisis y el establecimiento de relaciones.

Una **Matriz** es un arreglo bidimensional (rectangular) de elementos de un conjunto, enmarcados dentro de un paréntesis o un corchete. Los elementos dispuestos en forma horizontal se denominan filas y los ubicados en forma vertical reciben el nombre de columnas. Si los elementos del arreglo pertenecen al conjunto de los números reales, se dice que es una matriz real.

La representación gráfica y la notación matemática de matrices se expone en la tabla 3.

Tabla 3: Representación gráfica y notación simbólica de matrices.

Gráfica	Simbólica	Observaciones
$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & \dots & a_{3n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$	$A = (a_{ij})_{m\times n}$	m:número de filas n:número de columnas a_{ij}:elemento ubicado en la fila i columna j $m \times n$: tamaño de la matriz
$\vdots$	$\vdots$	Por ejemplo, a_{32} es el elemento ubicado en la fila 3 (F_3) y columna 2 (C_2) de la matriz
$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & \dots & a_{3n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix}$	$A = [a_{ij}]_{m\times n}$	El uso de paréntesis o corchete es indiferente y se elige por preferencia

*Fuente:*Elaboración propia (2017)

Sabías qué?
Hay matrices que se caracterizan según su forma o sus elementos y que dependiendo de estos reciben nombres particulares?. En la sección de material de apoyo encontrará el recurso Tipos de Matrices en el que se describen de algunas de ellas; su estudio es importante ya que en varias ocasiones se hará referencia a ellas.

Para identificar los beneficios del uso de matrices en la presentación y organización de información se partirá del contexto del viaje y a partir de él, en esta y las siguientes secciones, se mostrarán las relaciones matemáticas que se pueden establecer entre los datos así como el proceso que permite estimar los montos de dinero para realizar el viaje.

En esta sección se comenzará por mostrar la representación y organización matricial de la información por ser un elemento clave y promover la eficiencia en la toma de decisiones.

Matriz de hospedaje, que se denotará con la letra H: en esta matriz cada elemento representa el costo por persona según el tipo de hospedaje y la ciudad donde se hospedarán; las filas representan el tipo de hospedaje por noche, que básicamente corresponde al número de personas que se hospedarán por habitación, y las columnas las ciudades donde se hospedarán. Por ejemplo, el elemento ubicado en la segunda fila tercera columna indica que el costo por persona en un hospedaje para 3-4 personas en la ciudad de Cartagena es de 76000.

$$\begin{array}{cc} & \begin{array}{ccc} \text{Santa Marta} & \text{Barranquilla} & \text{Cartagena} \end{array} \\ H = & \begin{pmatrix} 70000 & 50000 & 80000 \\ 63000 & 45000 & 76000 \\ 56000 & 38000 & 72000 \end{pmatrix}_{3\times 3} \begin{array}{l} \leftarrow \text{Hospedaje para 1-2 personas} \\ \leftarrow \text{Hospedaje para 3-4 personas} \\ \leftarrow \text{Hospedaje para 5 personas} \end{array} \end{array}$$

Matriz de transporte, denotada con la letra T: para esta, las filas representan el número de personas que viajan y las columnas el costo de transporte de las ciudades de donde parten y hacia donde se trasladan.

$$
\begin{array}{cc}
 & \begin{array}{cccc} \text{BTA-STM} & \text{STM-B/Q} & \text{B/Q-CTG} & \text{CTG-BTA} \end{array} \\
T = & \begin{pmatrix} 80000 & 32000 & 17000 & 130000 \\ 75000 & 30000 & 16000 & 125000 \\ 70000 & 28000 & 15000 & 115000 \end{pmatrix}_{3\times 4}
\end{array}
\begin{array}{l} \leftarrow \text{Transporte para 1-2 personas} \\ \leftarrow \text{Transporte para 3-4 personas} \\ \leftarrow \text{Transporte para 5 personas} \end{array}
$$

Así como se presenta en este ejemplo, el uso de matrices se puede emplear en cualquier contexto que relacione información como la expuesta. Un ejercicio que puede ser útil para reforzar este conocimiento consiste en plantear situaciones similares y anotar en una libreta cómo sería la representación de la información en una matriz.

4. Formas de interpretar información

Para interpretar y analizar la información de un contexto que se puede representar en forma matricial, es necesario establecer relaciones entre las matrices que contienen los datos del mismo. Estas relaciones básicamente corresponden a realizar operaciones desde el punto de vista matricial. A continuación se exponen algunas de ellas.

4.1. Interpretando la suma de matrices

Si se quiere analizar en el contexto cuánto debe pagar cada persona por hospedaje y transporte, por ciudad, en cada una de las opciones, se podría hacer una lista de precios y con ella hallar la suma de los valores correspondientes. Esta estructura se aplicaría así:

Valor de hospedaje para $1-2$ personas en Santa Marta $+$ Valor del transporte de Bogotá a Santa Marta $+$ Valor de hospedaje para $1-2$ en Barranquilla $+$ Valor del transporte de Santa Marta a Barranquilla $+\cdots$

Note cómo este proceso no parece ser muy eficiente y práctico, pero si se analizan detenidamente las acciones que allí se hacen, ellas consisten simplemente en hallar la suma de los valores correspondientes de las matrices H y T, el cual es justamente el proceso de adición entre matrices. Para identificar mejor esta idea, a continuación se explicará dicha operación.

Suma de matrices: dadas dos matrices $A=(a_{ij})_{m\times n}$ y $B=(b_{ij})_{m\times n}$, la suma $A_{m\times n}+B_{m\times n}$, da como resultado la matriz $C=(c_{ij})_{m\times n}$, donde $c_{ij}=a_{ij}+b_{ij}$ para todo i,j.

Note que para hallar la suma de dos matrices estas deben tener el mismo tamaño y el proceso consiste básicamente en adicionar los elementos correspondientes de A y B, es decir, los que se ubican en la misma fila y misma columna de cada una.

Siguiendo la idea presentada anteriormente, al intentar aplicar el proceso de suma de matrices entre H y T ocurre que ellas no tienen dispuesta la información del mismo modo, por lo que no tendrían el mismo tamaño (T tiene una columna de más, que representa el costo de transporte de regreso a casa y es un dato que no contiene la matriz

H) y no se podrían adicionar. Pese a esto, si se construye una nueva matriz T tal que en la tercera columna se encuentren los costos totales de llegada y salida de Cartagena se resumiría la información y quedaría del mismo tamaño que la matriz H, permitiendo con ello hallar la suma deseada. De acuerdo con esto:

$$\begin{array}{cl} \begin{array}{ccc} \text{BTA-STM} & \text{STM-B/Q} & \text{B/Q-CTG-BTA} \\ \downarrow & \downarrow & \downarrow \end{array} & \\ T = \begin{pmatrix} 80000 & 32000 & 147000 \\ 75000 & 30000 & 141000 \\ 70000 & 28000 & 130000 \end{pmatrix}_{3\times 3} & \begin{array}{l} \leftarrow \text{Transporte para 1-2 personas} \\ \leftarrow \text{Transporte para 3-4 personas} \\ \leftarrow \text{Transporte para 5 personas} \end{array} \end{array}$$

Y la suma indicada se hallaría así:

$$\begin{aligned} H + T &= \begin{pmatrix} 70000 & 50000 & 80000 \\ 63000 & 45000 & 76000 \\ 56000 & 38000 & 72000 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 80000 & 32000 & 147000 \\ 75000 & 30000 & 141000 \\ 70000 & 28000 & 130000 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 70000 + 80000 & 50000 + 32000 & 80000 + 147000 \\ 63000 + 75000 & 45000 + 30000 & 76000 + 141000 \\ 56000 + 70000 & 38000 + 28000 & 72000 + 130000 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 150000 & 82000 & 227000 \\ 138000 & 75000 & 217000 \\ 126000 & 66000 & 202000 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Si se denota la suma con la letra C, esto es $C = H + T$, ella representa el costo total de transporte y hospedaje, según la ciudad y el número de personas que viajan y resumiría toda la información presentándola de forma simple y clara.

$$\begin{array}{cl} \begin{array}{c} \text{Costo hospedaje por una noche y transporte} \\ \begin{array}{ccc} \text{BTA-STM} & \text{STM-B/Q} & \text{B/Q-CTG-BTA} \\ \downarrow & \downarrow & \downarrow \end{array} \end{array} & \\ C = \begin{pmatrix} 150000 & 82000 & 227000 \\ 138000 & 75000 & 217000 \\ 126000 & 66000 & 202000 \end{pmatrix} & \begin{array}{l} \leftarrow \text{Para 1-2 personas} \\ \leftarrow \text{Para 3-4 personas} \\ \leftarrow \text{Para 5 personas} \end{array} \end{array}$$

Con la matriz obtenida se puede interpretar la información relacionada, por ejemplo, el elemento $C_{32}(66000)$ corresponde al valor que debe pagar una persona por una noche de hospedaje y el transporte hacia la ciudad de Barranquilla, si viajan cinco personas, mientras el elemento $C_{23}(217000)$, es el valor que paga una persona por el hospedaje de una noche y el transporte (Barranquilla-Cartagena; Cartagena-Bogotá) en la ciudad de Cartagena, si viajan de 3 a 4 personas.

Sabias qué?
¡La suma de $T + H$ es la misma de $H + T$! Esta propiedad se conoce como la **propiedad conmutativa de la suma de matrices** y se puede observar en la lectura complementaria así como otras propiedades que cumple la adición de matrices. Si se estudian y aprenden dichas propiedades es posible abreviar muchos procesos. ¡Revísalas!

Cómo mejorar?
Una de las actividades que contribuyen al aprendizaje es la revisión de ejemplos tanto procedimentales como de aplicación. Esto permite reconocer estructuras generales que pueden aplicarse en el desarrollo de muchos otros ejercicios y problemas. En la lectura complementaria aparecen varios ejemplos de la suma de matrices y el uso de sus propiedades. Al realizar dicha lectura podrá reforzar los conocimientos expuestos en esta sección.

4.2. Interpretando la multiplicación

Debido a que el viaje puede no ser para una sola noche, surge el interés en conocer cuál sería el costo según el tiempo de permanencia en cada ciudad para con ello quizá, determinar cuál opción resulta más económica o rentable. Por ende, ahora se analizará esta situación considerando una estadía como la que se expone en la tabla 4 y construyendo la respectiva representación matricial.

Tabla 4: Opciones de estadía en cada ciudad.

	Opción 1 - (Noches)	Opción 2 - (Noches)
S. Marta	3	3
Barranquilla	1	2
Cartagena	3	2

*Fuente:*Elaboración propia (2017)

Representación matricial de las opciones

La información de la tabla se puede representar de dos formas:

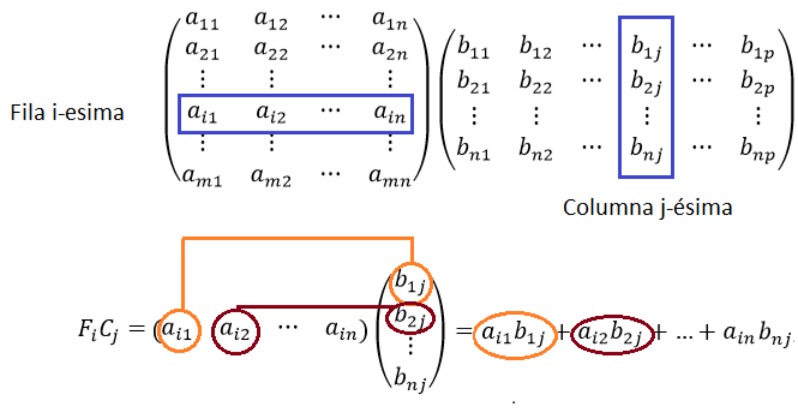
$$D = \begin{pmatrix} 3 & 3 \\ 1 & 2 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} \text{ o } D^t = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 3 \\ 3 & 2 & 2 \end{pmatrix}$$

A la matriz D^t, se le conoce como la matriz transpuesta de D.

Con esta nueva matriz y el interés en determinar el costo total del hospedaje según el número de noches, por cada opción de hospedaje, surge la pregunta de si existe algún proceso para multiplicar matrices ya que el producto del costo de una noche por el número de noches daría el costo total de las estadías indicadas. Al interrogante mencionado la respuesta es afirmativa y a continuación se explica dicho proceso.

Multiplicación de matrices: dadas dos matrices $A = (a_{ij})_{m\times n}$ y $B = (b_{ij})_{n\times p}$, el producto AB se define como la matriz $C = (c_{ij})_{m\times p}$ donde cada elemento c_{ij} de C, corresponde a la suma de los términos obtenidos al multiplicar la i-ésima fila de A con la j-ésima columna de B, componente a componente. En notación matemática esto consiste en lo siguiente.
$AB = C = (c_{ij})_{m\times p}$ donde $c_{ij} = a_{i1}b_{1j} + a_{i2}b_{2j} + \cdots + a_{in}b_{2n} = \Sigma_{k=1}^{n} a_{ik}b_{2k}$, donde $1 \leq i \leq m$ y $1 \leq j \leq p$.

Una característica fundamental de la multiplicación entre matrices es que sólo es posible realizarla cuando el número de columnas de A es igual al número de filas de B. Esta es una condición que evidencia el por qué la multiplicación entre matrices NO es conmutativa como sí ocurre con la multiplicación entre números reales. De acuerdo con esto, $A_{m\times n}B_{n\times p}$ es posible pero $B_{n\times p}A_{m\times n}$ no lo es porque $p \neq m$.



Sabías qué...

- A la multiplicación de una matriz fila $A_{1\times n}$ con la matriz columna $B_{m\times 1}$, se le conoce como **Producto punto**, la cual se denota como $A \cdot B$. En la unidad 2 se estudiará con más detalle este producto.

- ¿Hay otra multiplicación conocida como multiplicación por escalar?
Multiplicación escalar: sean $A_{m\times n}$ una matriz de tamaño $m \times n$ y k un número real $k \in \Re$, la multiplicación escalar se define como $kA_{m\times n} = k(a_{ij})_{m\times n} = (ka_{ij})_{m\times n}$.
En el material de apoyo 'Aplicando lo aprendido' encontrará un ejemplo de esta operación, ¡revíselo! ya que esta operación es ampliamente utilizada.

Para aplicar la multiplicación de matrices con el fin de calcular los costos totales, con las dos opciones de hospedaje dadas, hay que definir cómo realizarla de modo que se cumpla la condición mencionada sobre los tamaños de las matrices. Por esta razón hay que analizar si se debe utilizar la matriz D o D^t ya que el producto indicado se puede hallar siempre que el número de columnas de la matriz multiplicando, en este caso H, tenga el mismo número de filas de la matriz multiplicador, es decir D, escrita de forma conveniente. Al revisar los tamaños de las matrices se observa que H es de tamaño 3×3 mientras D es de tamaño 3×2 y como el número de columnas de H coincide con el de las filas de D se puede hacer el producto indicado:

$$H = \begin{pmatrix} 70000 & 50000 & 80000 \\ 63000 & 45000 & 76000 \\ 56000 & 38000 & 72000 \end{pmatrix} \quad D = \begin{pmatrix} 3 & 3 \\ 1 & 2 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$$

Para verificar que la multiplicación dé el resultado esperado es importante analizar el significado de dicha multiplicación según el contexto; dado que en la matriz H los elementos de las columnas representan el costo de una noche de estadía en las ciudades y en la matriz D cada elemento de las filas corresponden al número de días que se estará en cada ciudad, la forma en que se organizaron los datos en la matriz D muestra que la operación tiene sentido. A continuación se muestra cómo se realiza la operación así como su significado.

$$HD = \begin{pmatrix} 70000 & 50000 & 80000 \\ 63000 & 45000 & 76000 \\ 56000 & 38000 & 72000 \end{pmatrix}_{3\times 3} \begin{pmatrix} 3 & 3 \\ 1 & 2 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}_{3\times 1}$$

Se debe multiplicar cada fila de la matriz H por cada columna de la matriz D así:

$$F_1Col_1 = \begin{pmatrix}70000 & 50000 & 80000\end{pmatrix}\begin{pmatrix}3\\1\\3\end{pmatrix} = 70000(3) + 50000(1) + 80000(3) = 500000$$

En donde 70000(3) representa el costo total de hospedaje por 3 noches para 1-2 personas en Santa Marta, 50000(1) es el costo total de hospedaje por 1 noches para 1-2 personas en Barranquilla, 80000(3) corresponde al costo total de hospedaje por 3 noches para 1-2 personas en Cartagena, y la suma de esos valores da el costo total para la opción 1 de estadía, en las tres ciudades con acomodación para 1-2 personas. De acuerdo con esto se pagarían 500,000 al elegir dicha opción.

Continuando con el proceso de multiplicación se obtiene:

$$F_1Col_2 = \begin{pmatrix}70000 & 50000 & 80000\end{pmatrix}\begin{pmatrix}3\\2\\2\end{pmatrix} = 70000(3) + 50000(2) + 80000(2) = 470000$$

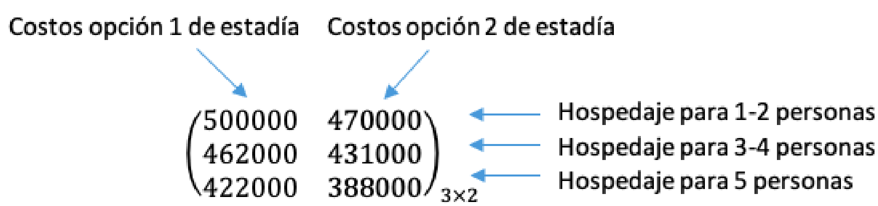
$$F_2Col_1 = \begin{pmatrix}63000 & 45000 & 76000\end{pmatrix}\begin{pmatrix}3\\1\\3\end{pmatrix} = 63000(3) + 45000(1) + 76000(3) = 462000$$

$$F_2Col_2 = \begin{pmatrix}63000 & 45000 & 76000\end{pmatrix}\begin{pmatrix}3\\2\\2\end{pmatrix} = 63000(3) + 45000(2) + 76000(2) = 431000$$

$$F_3Col_1 = \begin{pmatrix}56000 & 38000 & 72000\end{pmatrix}\begin{pmatrix}3\\1\\3\end{pmatrix} = 56000(3) + 38000(1) + 72000(3) = 422000$$

$$F_3Col_2 = \begin{pmatrix}56000 & 38000 & 72000\end{pmatrix}\begin{pmatrix}3\\2\\2\end{pmatrix} = 56000(3) + 38000(2) + 72000(2) = 388000$$

Y estos resultados se organizan en la matriz producto como se expone a continuación:



Con los valores de esta matriz se tiene la oportunidad de tomar decisiones según el dinero con el que cuenten los interesados en hacer el viaje, por ejemplo, a partir de ella se identifica que el costo total de hospedaje de la opción 1, en las tres ciudades, en acomodación de 3-4 personas es de 462.000 y así mismo se pueden comparar las demás para decidir qué opción elegir. Con lo cual se puede concluir que la multiplicación entre matrices permite tomar decisiones sobre cuál opción es la más económica además de calcular de forma más eficiente el costo total de cada opción de permanencia. Con la información dada en la matriz, ¿cuál sería esa opción?

Cómo mejorar? Para reforzar este concepto es importante revisar ejemplos tanto procedimentales como de aplicación. En la lectura complementaria encontrará explicaciones adicionales sobre la multiplicación en matrices y sus propiedades; realice la lectura y siga las indicaciones dadas allí para afianzar estos conocimientos.

5. Representar adecuadamente información

Hasta el momento se ha expuesto cómo las matrices y sus operaciones permiten organizar e interpretar información relacionada entre sí, pero en el contexto tratado, por ejemplo, se han hecho supuestos respecto a los días de permanencia y los costos de hospedaje según el tipo de acomodación, y sería más conveniente definir alternativas para los interesados según el presupuesto con el que cuenten, ya que con esto se les presentarían solo las opciones que realmente pueden considerar. Por lo que el propósito ahora se debe centrar en diseñar un proceso que permita hacer los cálculos de los costos de manera eficiente, dependiendo de la cantidad de personas y del presupuesto que con el que cuenten los interesados

Para lograr el anterior propósito hay que determinar qué información es conocida y cuál es desconocida y variable; en este caso, el costo de hospedaje por acomodación (matriz H), el número de personas que viajarían y el presupuesto con el que cuentan los interesados serían datos conocidos y fijos, mientras el número de noches de estadía sería desconocido y variable. Conociendo esto, se prosigue con la representación matricial que deberá usar operaciones para mostrar las relaciones que arrojarán los resultados esperados y por último se efectúan procesos que conduzcan a establecer los valores que satisfacen las condiciones dadas

Para reconocer con mayor claridad lo anterior, suponga que 11 personas viajarán con el presupuesto y la asignación de habitaciones indicados en la tabla 5 pero están interesados en saber cuántos días podrán quedarse con esas condiciones.

Tabla 5: Presupuesto de estadía de grupo de 11 personas.

	Costo Total por persona
Habitación 2 personas	540.000
Habitación 4 personas	494.000
Habitación 5 personas	444.000

*Fuente:*Elaboración propia (2017)

Dado que el costo total de hospedaje, según acomodación, se obtiene al multiplicar el costo de hospedaje (por noche) por el número de noches en cada ciudad, lo cual es desconocido, la información se puede representar así:

$$\begin{pmatrix} 70000 & 50000 & 80000 \\ 63000 & 45000 & 76000 \\ 56000 & 38000 & 72000 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 540000 \\ 494000 \\ 444000 \end{pmatrix}$$

Donde x, y, z representan el número de noches que se hospedarán en Santa Marta, Barranquilla y Cartagena respectivamente. Al resolver el producto se obtiene la igualdad entre matrices que se expone a continuación y hace necesario encontrar los valores de x, y y z que satisfacen dicha igualdad.

$$\begin{pmatrix} 70000x + 50000y + 80000z \\ 63000x + 45000y + 76000z \\ 56000x + 38000y + 72000z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 540000 \\ 494000 \\ 444000 \end{pmatrix}$$

Antes de encontrar los valores mencionados es importante reconocer el significado de una igualdad entre matrices, sus componentes y nombres, observe:

Dos **matrices** A **y** B **son iguales** si tienen el mismo tamaño y sus elementos correspondientes son iguales. En notación matemática:

$$A_{m\times n} = B_{m\times n} \text{ si y sólo si } a_{ij} = b_{ij} \text{ para todo } i, j.$$

En este sentido, dado que las matrices mencionadas son iguales, sus elementos correspondientes deben ser iguales:

$$\begin{aligned} 70000x + 50000y + 80000z &= 540000 \\ 63000x + 45000y + 76000z &= 494000 \\ 56000x + 38000y + 72000z &= 444000 \end{aligned}$$

Al igualar los elementos de las matrices se obtienen tres ecuaciones con tres incógnitas, el cual es un **Sistema de ecuaciones lineales**, en el que x, y y z representan las *incógnitas*, los valores que las multiplican son los *coeficientes* y los términos que están a la derecha de la igualdad son los *términos independientes*.

Sistema de ecuaciones lineales. Un sistema de ecuaciones lineales es un conjunto de m ecuaciones con n incógnitas.

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n &= b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n &= b_2 \\ &\vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n &= b_m \end{aligned}$$

En representación matricial: $AX = B$, donde:
$A = (a_{ij})_{m\times n}$. Matriz de coeficientes
$X = (x_i)_{n\times 1}$. Matriz de incógnitas
$B = (b_1)_{m\times 1}$. Matriz de términos independientes
Cuando la matriz B es la matriz nula, el sistema se denomina **Sistema Lineal Homogéneo.**

Después de comprender qué significa una igualdad entre matrices hay que establecer un proceso para encontrar los valores de la información desconocida y es el tema que se abordará en el próximo escenario. De acuerdo con esto, se finaliza este escenario esperando que se haya identificado cómo el álgebra lineal a través de las representaciones matriciales ayudan en la toma de decisiones porque permiten representar información de forma clara, precisa y sencilla, así como establecer relaciones entre la información por medio de las operaciones básicas de adición y multiplicación.

6. Practico lo aprendido

A continuación se presentan unos ejercicios que le permitirán ejercitar los conceptos y procesos abordados en la lectura. Antes de solucionarlos, revise todos los materiales que se sugieren en las secciones **Sabias que?** y **cómo mejorar**. Ejercicios de comprensión:
Las siguientes imágenes muestran la representación gráfica de los últimos consumos mensuales de servicios públicos de agua, gas y luz.

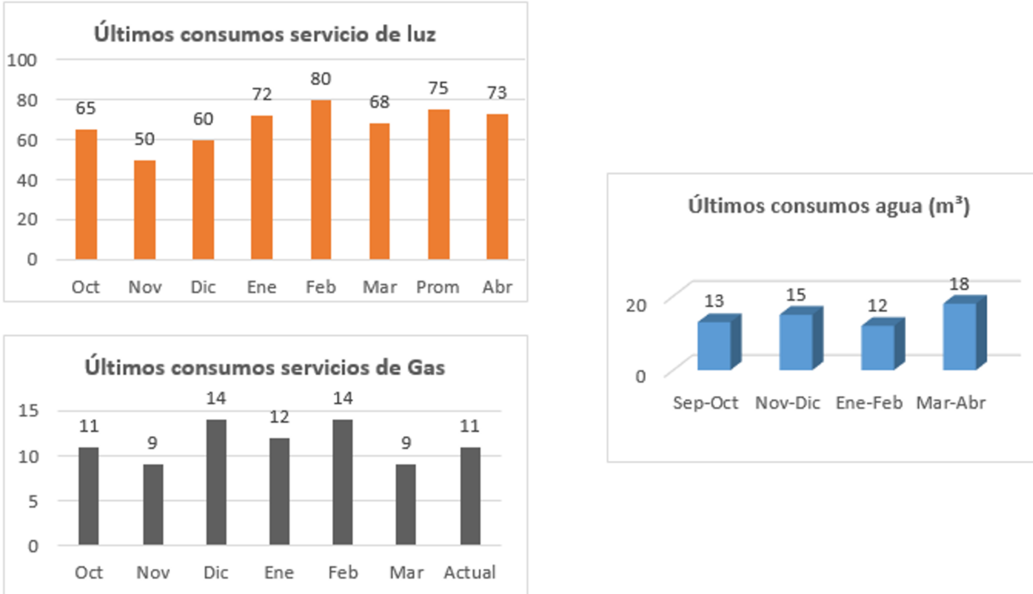


Figura 1: **Servicios públicos.**
Fuente: Elaboración propia

1. ¿Es posible organizar y representar en una sola matriz los consumos mes a mes de los tres servicios públicos?, ¿si no es así existe alguna opción de organizar los meses por periodos de manera que se pueda representar toda la información en una sola matriz?

2. A partir de la matriz construida en el numeral anterior, responda:

   a) De la información dada en los gráficos, ¿cuál información no tuvo en cuenta para la elaboración de la matriz?

   b) ¿Cuál es el tamaño de la matriz que representa la información de los últimos consumos de servicios públicos?

   c) ¿Qué representan las filas de la matriz?, ¿qué representan las columnas?

   d) ¿En qué posición de la matriz se ubica el mayor consumo de gas?

   e) ¿En qué mes hubo mayor consumo de servicios públicos?

   f) ¿Qué significado tiene la matriz transpuesta en este contexto?

   g) Si el costo por unidad de consumo de gas es de 117,85, el de luz 440,51 y el de agua 1468, determine el dinero pagado por concepto de servicios públicos durante los últimos consumos. ¿En qué periodo se pagó más cantidad de dinero por concepto de servicios públicos?

Ejercicios Procedimentales

1. Considere la siguiente matriz y marque con una X qué tipo de matriz es (puede ser más de una)

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

• Rectangular	•Transpuesta	•Diagonal	•Triangular superior
•Cuadrada	•Simétrica	•Identidad	•Triangular inferior
•Fila	•Antisimétrica	• Escalonada	•Escalonada Reducida
•Columna			

2. Dadas las siguientes matrices, realice las operaciones indicadas

$$A = \begin{pmatrix} 9 & -2 \\ 8 & -4 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \; B = \begin{pmatrix} 2 & 5 & -4 \\ 0 & -3 & 6 \end{pmatrix} \text{ y } C = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 3 & 4 & 5 \\ 0 & -2 & 4 \end{pmatrix}$$

- $2A + B^t$
- ABC
- $(A + B)^t C$
- $AA^t + C$

3. Sea la matriz $A = \begin{pmatrix} 1 & 6 \\ 8 & -6 \end{pmatrix}$ encuentre una matriz no nula tal que $A = 2B$

4. Escriba el sistema dado en la forma $AX = B$

- $3x + 5y - 9z = 0$
  $-8y + 7z = -3$
  $9x - 7y + 5z = -4$

- $x + z = -1$
  $y + z = -3$
  $x - z = 0$
  $x + y = 3$

Referencias

[1] rossman, S. (2012).Álgebra lineal.(7a. ed.) McGraw-Hill Interamericana. Página 104. Tomado de http://www.ebooks7-24.com

INFORMACIÓN TÉCNICA

Módulo: Álgebra Lineal
Unidad 1: Objetos del álgebra lineal y sus relaciones
Escenario 1: Matrices y los sistemas de ecuaciones. Formas de organizar información

Autor: Sandra Milena Rojas Tolosa

Asesor Pedagógico: Diana Marcela Diaz Salcedo
Diseñador Gráfico: Kevin Mauricio Ramírez Corredor
Corrector de estilo: Angélica del Pilar Parra
Asistente: Leidy Alejandra Morales