

Unidad 1 / Escenario 1

Lectura Fundamental

Cálculo 1

Contenido

- 1 **Introducción**
- 2 **Concepto de función**
- 3 **Representación de funciones**
- 4 **Tipos de funciones**

Palabras y frases claves: función, tipos, graficas, variable, relación.

1. Introducción

En la actualidad, con el acceso y manejo de la internet se está expuesto a la manipulación de información que se encuentra en formas diversas como gráficas, tablas, enunciados y fórmulas; y sea esta una oportunidad para estudiar las relaciones entre las variables que estos encierran, por ejemplo:

1. Se ha tomado el registro de la temperatura a lo largo de un día en la ciudad de Bogotá, y se han obtenido los siguientes datos:

Hora del día	5:00	7:00	9:00	11:00	13:00	15:00	17:00	19:00	21:00
Temperatura ($^{\circ}C$)	-3	0	5	12	12	12	8	5	2

Tabla 1: Temperatura de Bogotá

2. El peso del niño y/o niña durante un periodo de tiempo

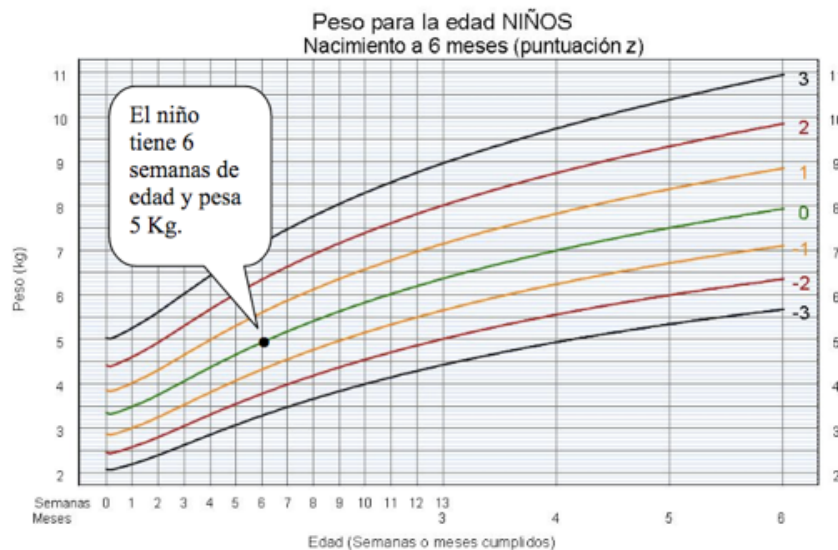


Figura 1: Organización Mundial de la Salud, 2008

Sabías que: Las tablas brindan una forma práctica para presentar muchos datos.

Uno de los objetivos es mostrar que las matemáticas, en especial las funciones, nos proporcionan herramientas para analizar y entender situaciones que se representan en el entorno familiar o laboral. Retomando los ejemplos planteados, se puede decir que:

- **Ejemplo 1:** La temperatura de Bogotá depende de la hora del día.
- **Ejemplo 2:** El peso del niño depende de la edad que tiene.

En ambos casos se observa que hay relación entre variables. Dependiendo de la situación, las variables se clasifican en dependientes e independientes. Observe la siguiente tabla:

Variable independiente	Variable dependiente
Hora de un día	La temperatura en grados
Edad	Peso

Tabla 2: Tipos de variable

2. Concepto de función

Una función es una relación establecida entre dos variables que asigna a cada valor de la variable independiente x , un único valor de la variable dependiente y .

Es decir, que una función tiene tres partes; dos conjuntos no vacíos A y B , y una regla que los relaciona; para precisar el concepto tenemos la siguiente definición:

Definición de función: Una función es una regla que asigna a cada elemento x en un conjunto A exactamente un elemento, llamado $f(x)$, en un conjunto B . El conjunto A se llama el dominio de la función y el rango de la función es un subconjunto de B formado por todos los valores asignados. (James, I, & S, 2001)

Para simbolizar la relación se emplea generalmente x para la variable independiente e y para la variable dependiente; y la función se simboliza:

$$f(x) = y \quad \text{se lee } f \text{ de } x \text{ igual a } y$$

Se hace necesario aclarar que el conjunto A o dominio de la función puede ser cualquier colección de objetos como personas, horas, edad, ciudades; pero en este módulo estamos interesados en que los conjuntos A y B sean subconjuntos de los números Reales.

2.1. Prueba de la línea vertical

Con respecto a las gráficas de las funciones, estas se deben analizar cuidadosamente, puesto que todos los gráficos no nos representan una relación funcional; para ayudarnos en esta tarea, existe la prueba de la recta vertical que nos dice:

Si una línea vertical corta o intersecta la gráfica de una relación en más de un punto, entonces esa relación **no** es una función

Tenga en cuenta que esa línea vertical se puede trazar en cualquier parte de la gráfica.

Ejemplo 1.

Observe las siguientes gráficas

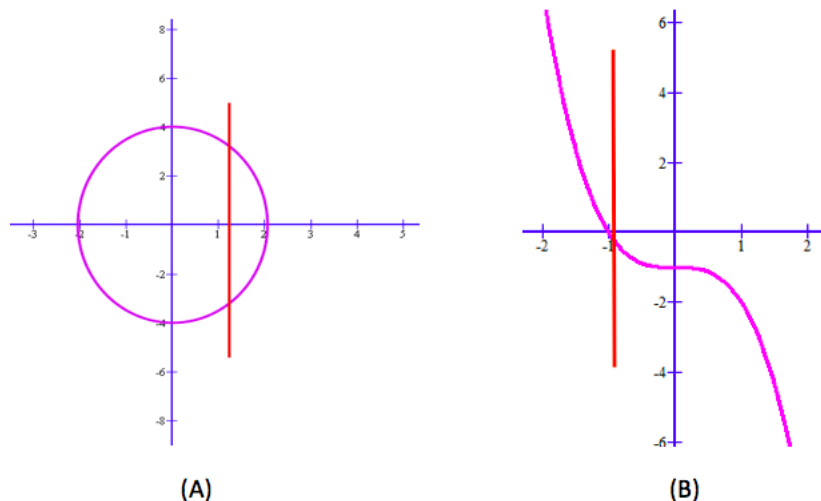


Figura 2: (A). Relación que no es función. (B) relación que es una función

3. Representación de funciones

Una función se puede representar de cuatro formas:

1. Expresión verbal (una explicación con palabras comunes).
2. Una tabla de valores (generalmente acompañada de una explicación)
3. Un gráfico (en un plano cartesiano)
4. Una fórmula (o expresión algebraica)

Estudiar las funciones permite conocer variaciones, estimar qué sucede en valores intermedios y en algunos casos predecir.

El siguiente ejemplo va a permitir representar la información dada, de formas distintas, así como evidenciar el concepto de función:

1. Representación verbal

Científicos están estudiando el cambio climático y escogieron la ciudad de Bogotá para iniciar su investigación, por esto han tomado el registro de la temperatura a lo largo de un día en la ciudad de Bogotá, y obtuvieron los siguientes datos: a las 5 : 00 horas la temperatura fue de $-3^{\circ}C$, a las 7 : 00 horas fue de 0° , a las 9 a.m. la temperatura fue de 5° ; de 11 : 00 a las 15 : 00 horas fue de $12^{\circ}C$; y a las 17 : 00 horas se tomó la temperatura y esta era de $8^{\circ}C$, a las 19 : 00 horas fue de 5° y finalmente a las 21 : 00 horas fue de $2^{\circ}C$.

2. Representación mediante tabla

Hora del día	5:00	7:00	9:00	11:00	13:00	15:00	17:00	19:00	21:00
Temperatura ($^{\circ}C$)	-3	0	5	12	12	12	8	5	2

Tabla 3: Temperatura de Bogotá

3. Representación gráfica

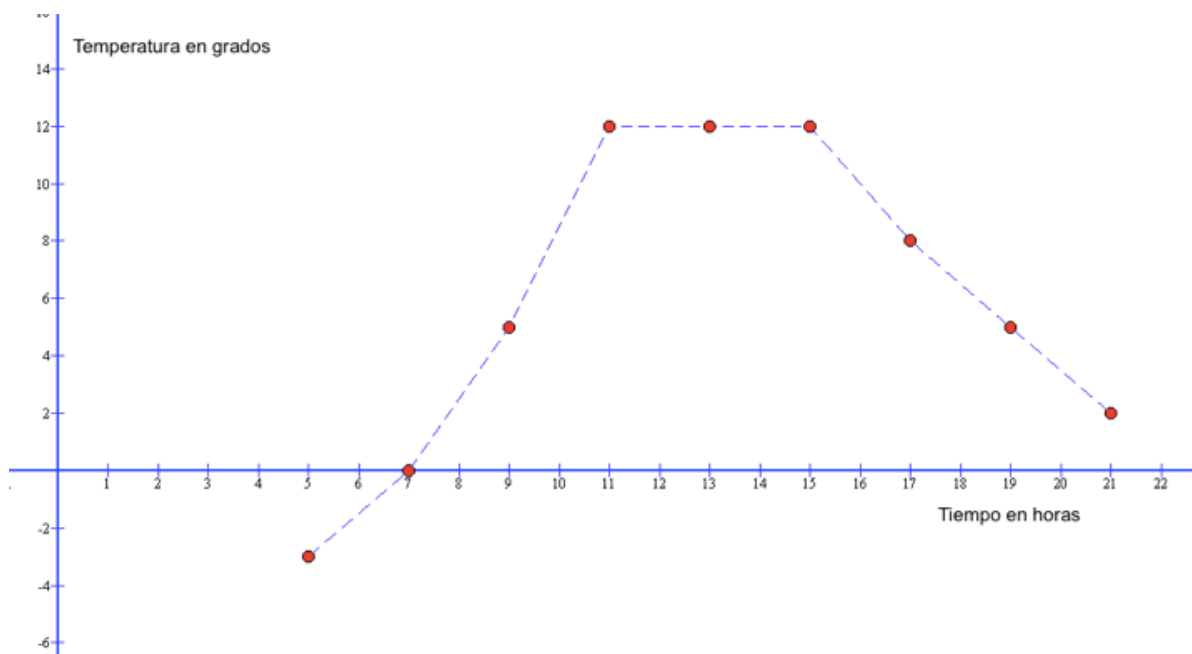


Figura 3: Relación tiempo y temperatura

4. Representación algebraica.

La representación algebraica de la situación planteada se expresa mediante una función definida a trozos, así:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{3}{2}x - \frac{21}{2}, & \text{si } 5 \leq x < 7 \\ \frac{5}{2}x - \frac{35}{2}, & \text{si } 7 \leq x < 9 \\ \frac{7}{2}x - \frac{53}{2}, & \text{si } 9 \leq x < 11 \\ 12, & \text{si } 11 \leq x < 15 \\ -2x + 42, & \text{si } 15 \leq x < 17 \\ -\frac{3}{2}x + \frac{67}{2}, & \text{si } 17 \leq x < 21 \end{cases}$$

4. Tipos de funciones

Las funciones se pueden clasificar dependiendo de su tipología en función polinómica, especial o trascendental, así:

- Función polinómica
 - ★ Función lineal
 - ★ Función cuadrática
 - ★ Función cúbica
- Funciones especiales
 - ★ Función definida a trozos
 - ★ Función valor absoluto
 - ★ Función racional
- Funciones trascendentales
 - ★ Funciones trigonométricas
 - ★ Función exponencial
 - ★ Función logarítmica

A continuación se analizarán las gráficas de los diferentes tipos de funciones y en algunos casos se expondrán sus características y ejemplos.

4.1. Función polinómica

Una función polinomial de grado n es una función de la forma

$$P(x) = a_0 + a_1x + \dots + a_{n-1}x^{n-1} + a_nx^n$$

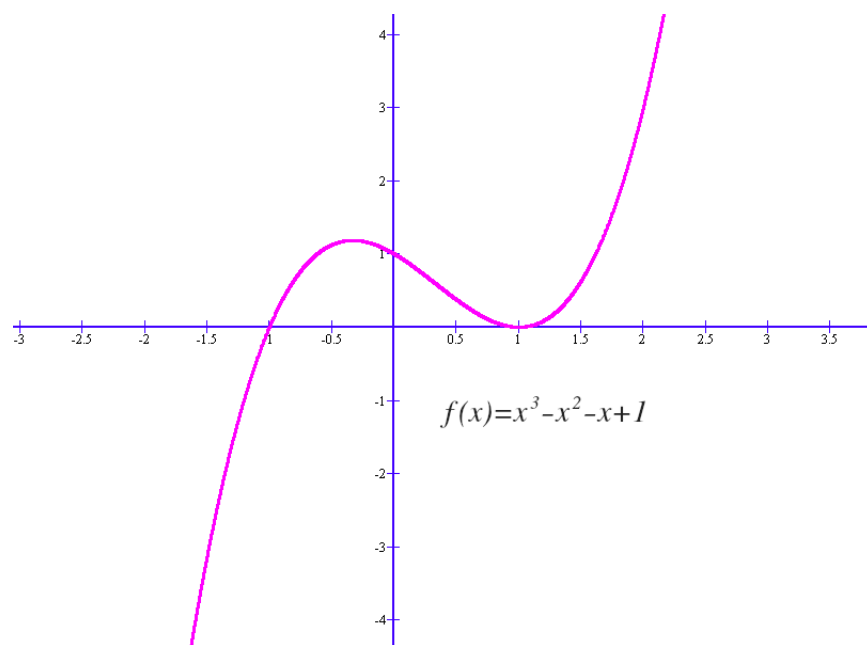


Figura 4: Función polinómica

donde n es un entero no negativo y $a_n \neq 0$.

Los números a_0, a_1, \dots, a_n se llaman coeficientes del polinomio.

El número a_0 es el coeficiente constante o término constante.

El número a_n es el coeficiente de la potencia más alta (coeficiente principal).

El término $a_n x^n$ es el término principal.

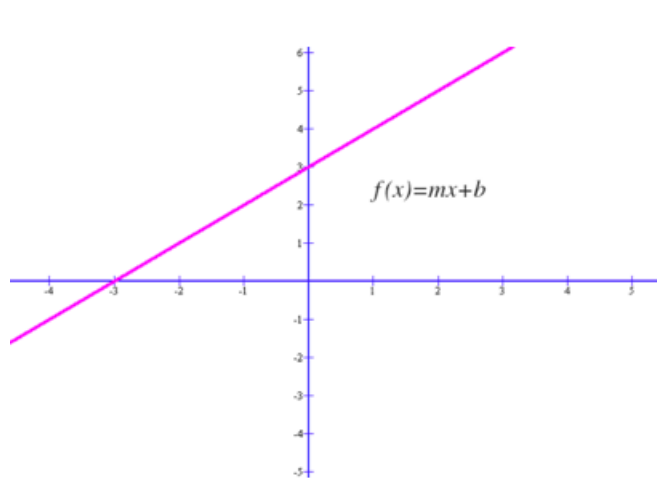
Generalmente, estas funciones se estudian según el grado del polinomio, por ejemplo de grado 1 tenemos la función lineal, de grado 2 la función cuadrática, de grado 3 la función cúbica y así se puede continuar hasta llegar al grado n .

4.1.1. Función lineal

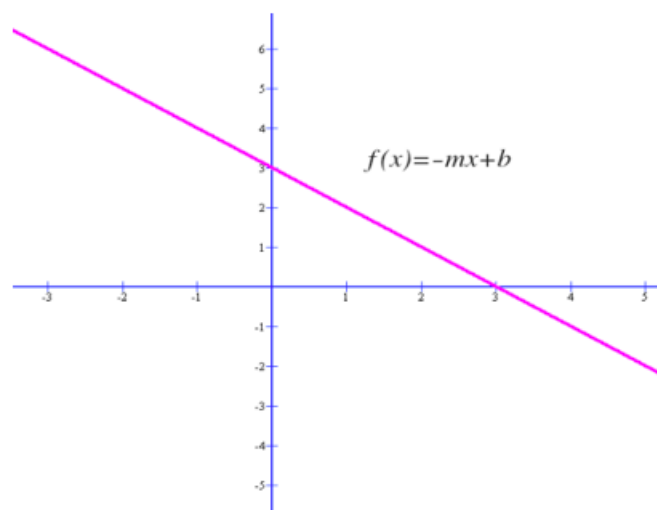
Son funciones polinómicas de grado 1 porque el mayor exponente del polinomio es x .

$$f(x) = mx + b$$

donde m es la pendiente de la recta; si m es positiva la recta se inclina a la derecha y si m es negativa se inclina a la izquierda; la gráfica de esta función es:



(A)



(B)

Figura 5: (A). Función lineal con m positiva. (B) Función lineal con $-m$ negativa

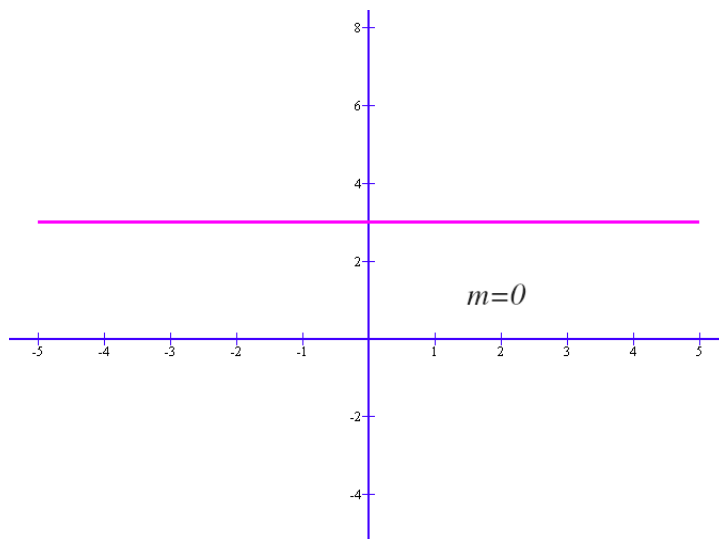


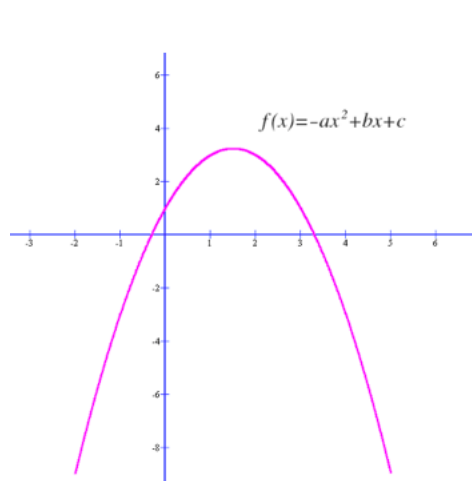
Figura 6: Función constante con $m = 0$

4.1.2. Función cuadrática

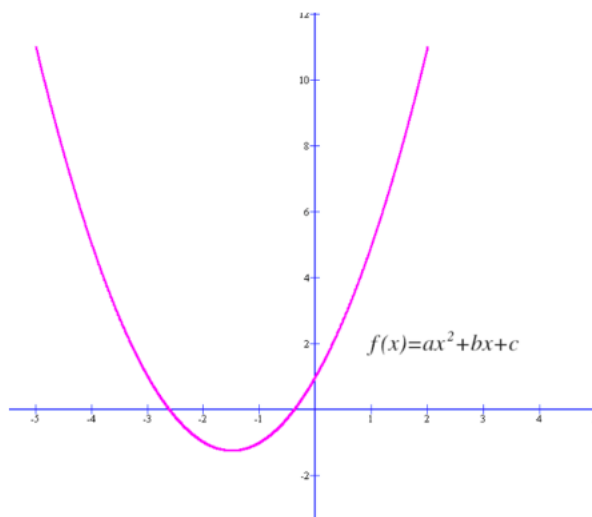
Son funciones polinómicas de grado 2 o también se les llama cuadráticas porque el mayor exponente del polinomio es 2

$$f(x) = ax^2 + bx + c \text{ con } a \neq 0$$

La gráfica de esta función es una parábola vertical que abre hacia arriba si $a > 0$ o hacia abajo si $a < 0$.



(A)



(B)

Figura 7: (A) Función cuadrática con $a < 0$. (B) Función cuadrática con $a > 0$

4.1.3. Función cúbica

La función cúbica es una función polinómica de grado 3 y tiene la forma:

$$f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d \text{ con } a \neq 0$$

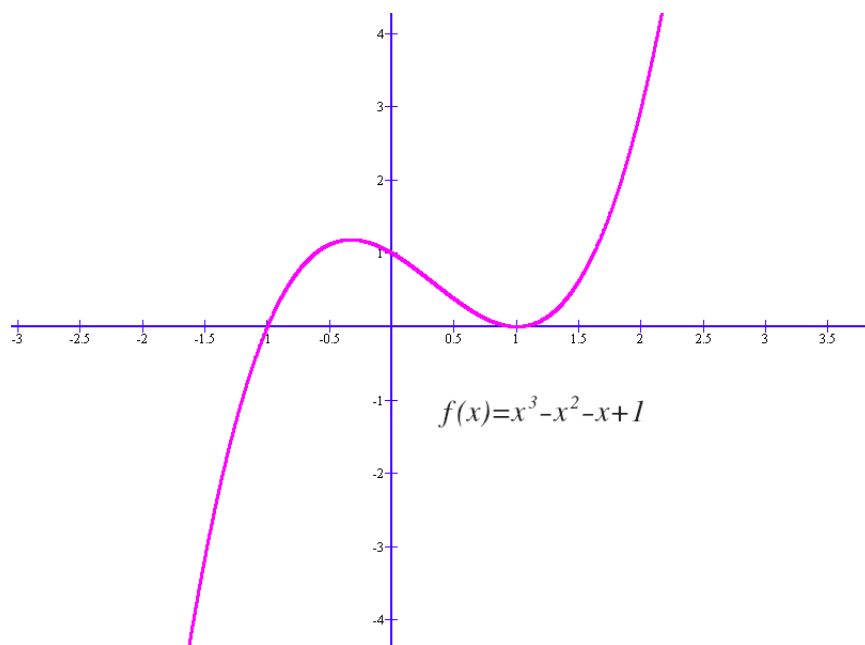


Figura 8: Función cúbica $f(x) = x^3 + x^2 - x + 1$

El dominio y rango de la funciones cúbicas son los reales y cortan al eje x en uno, dos o tres puntos según el número de raíces del polinomio.

4.2. Funciones especiales

4.2.1. Función definida a trozos

La función definida a trozos, o función por partes, es aquella que tiene distintas expresiones o fórmulas dependiendo del intervalo en el que se encuentra la variable independiente (x). Por ejemplo:

$$f(x) = \begin{cases} 4x - 2, & \text{si } x \leq 1 \\ 3, & \text{si } 1 < x < 3 \\ -2x + 8, & \text{si } x \geq 3 \end{cases}$$

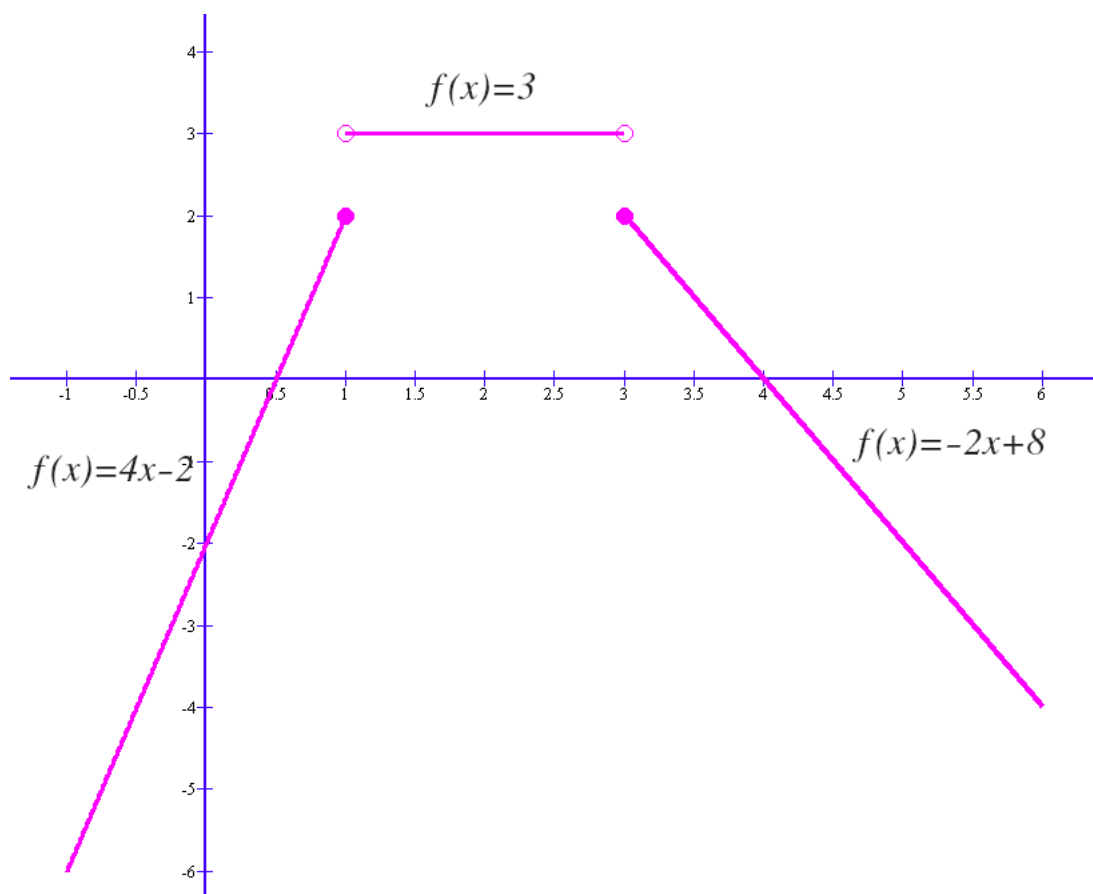


Figura 9: Función a trozos

4.2.2. Función valor absoluto

Sea $f(x) = |x|$, la función valor absoluto de x , entonces

$$|x| = \begin{cases} x, & \text{si } x \geq 0 \\ -x, & \text{si } x < 0 \end{cases}$$

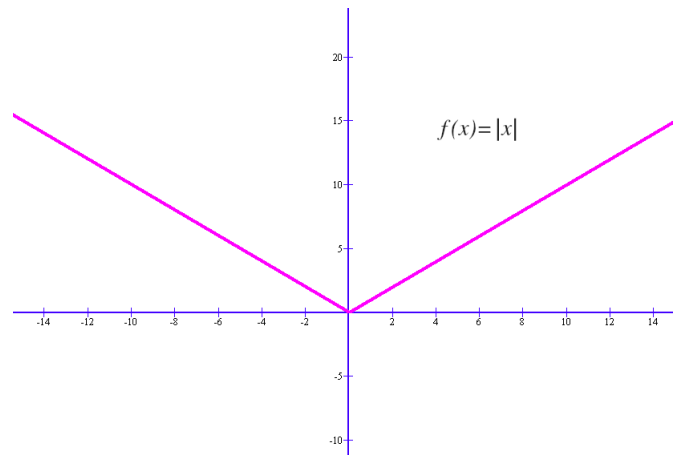


Figura 10: Función valor absoluto

4.2.3. Función racional

Una función racional es el cociente de dos funciones polinómicas:

$$f(x) = \frac{P(x)}{Q(x)}$$

Donde $P(x)$ es el numerador y $Q(x)$ es el denominador, con $Q(x) \neq 0$

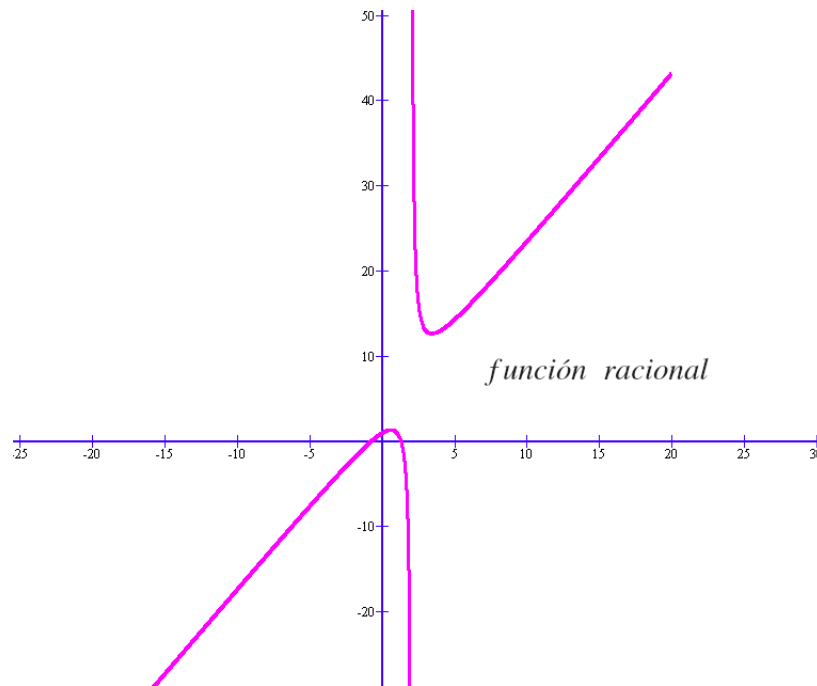


Figura 11: Función racional

4.3. Funciones trascendentes

4.3.1. Funciones trigonométricas

Las funciones trigonométricas son funciones periódicas, es decir, que se repite el valor de la imagen cada 360° grados o 2π radianes; a continuación se expondrán las gráficas de estas funciones junto con su tabla de valores.

Función seno

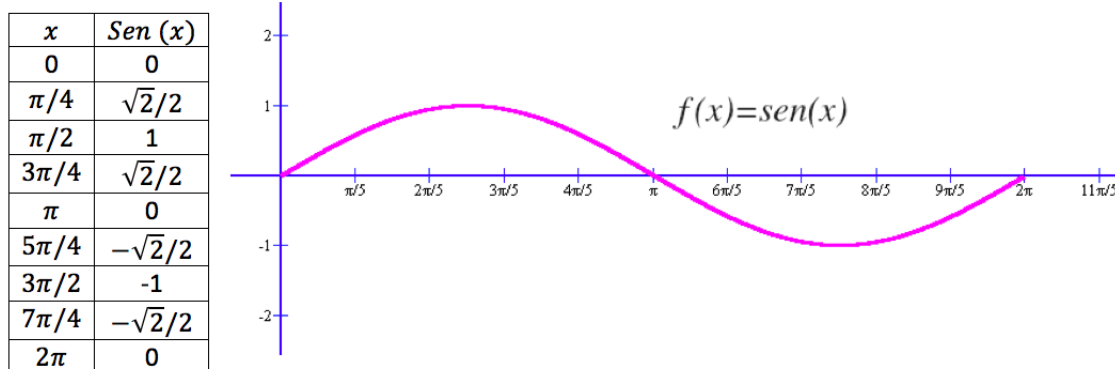


Figura 12: Función seno

Función coseno

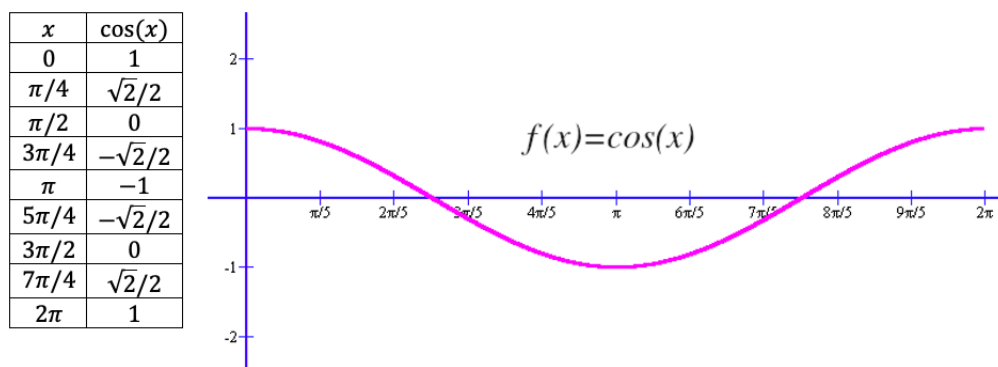


Figura 13: Función coseno

Función tangente

x	$Tan(x)$
0	0
$\pi/4$	1
$\pi/2$	Indeterminado
$3\pi/4$	-1
π	0
$5\pi/4$	1
$3\pi/2$	Indeterminado
$7\pi/4$	-1
2π	0

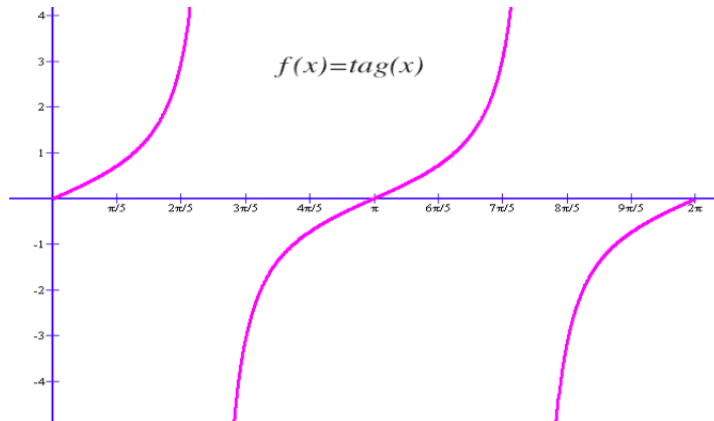


Figura 14: Función tangente

Función cosecante

x	$Csc(x)$
0	Indeterminado
$\pi/4$	$\sqrt{2}$
$\pi/2$	1
$3\pi/4$	$\sqrt{2}$
π	Indeterminado
$5\pi/4$	$-\sqrt{2}$
$3\pi/2$	-1
$7\pi/4$	$-\sqrt{2}$
2π	Indeterminado

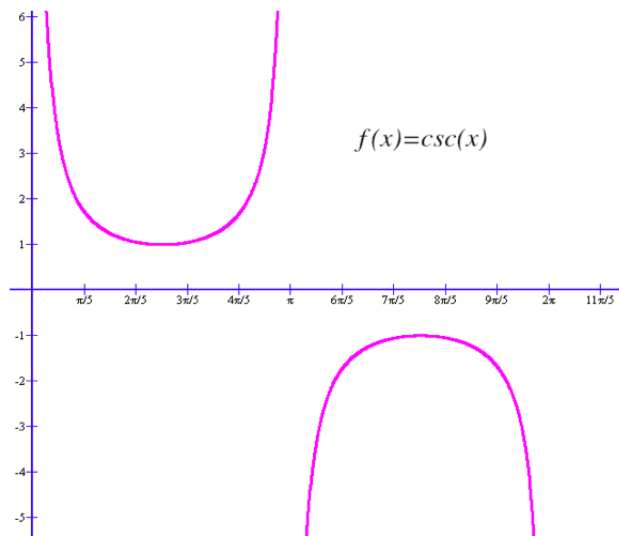


Figura 15: Función cosecante

Función secante

x	$\sec(x)$
0	1
$\pi/4$	$\sqrt{2}$
$\pi/2$	Indeterminado
$3\pi/4$	$-\sqrt{2}$
π	-1
$5\pi/4$	$-\sqrt{2}$
$3\pi/2$	Indeterminado
$7\pi/4$	$\sqrt{2}$
2π	1

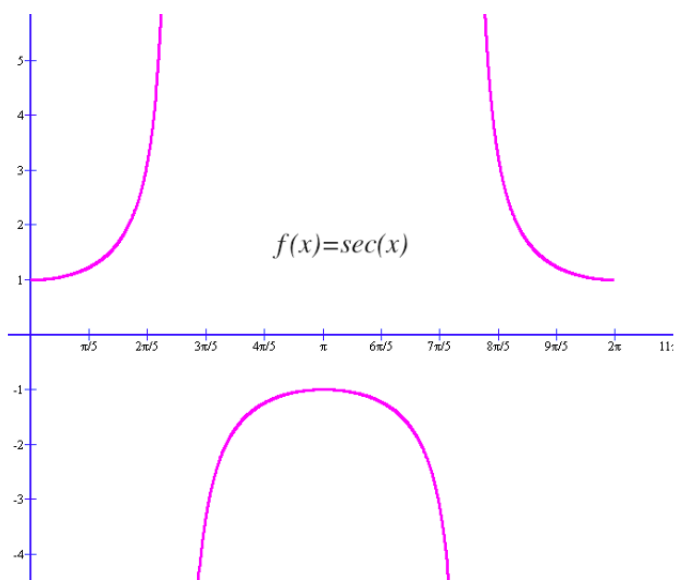


Figura 16: Función secante

Función cotangente

x	$\text{ctg}(x)$
0	Indeterminado
$\pi/4$	1
$\pi/2$	0
$3\pi/4$	-1
π	Indeterminado
$5\pi/4$	1
$3\pi/2$	0
$7\pi/4$	-1
2π	Indeterminado

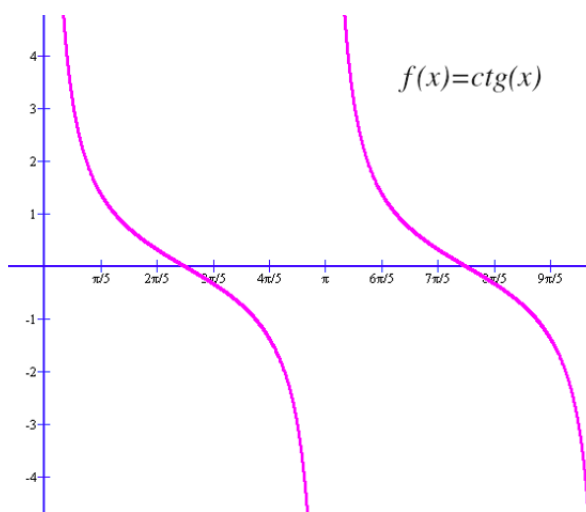


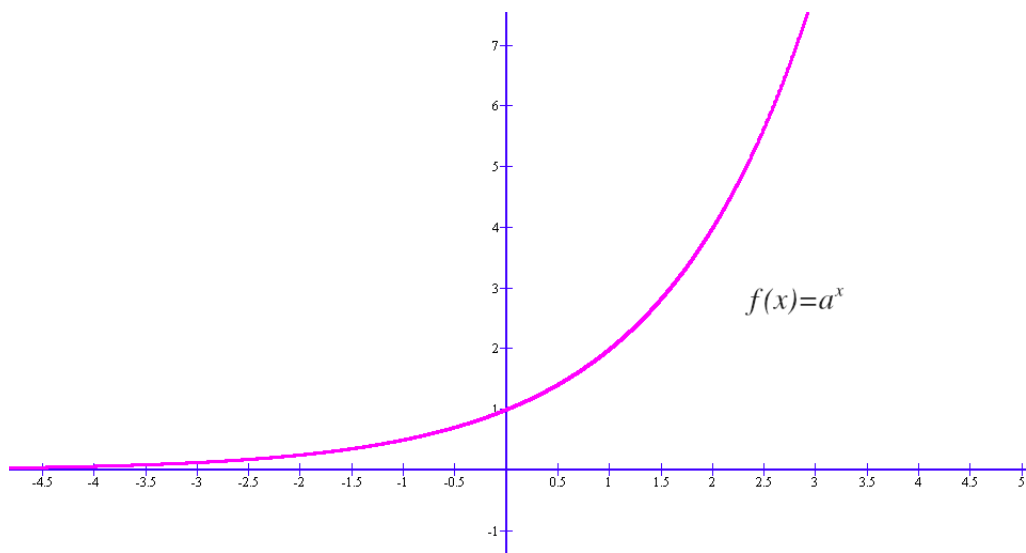
Figura 17: Función cotangente

4.3.2. Función exponencial

Es una función de la forma

$$f(x) = a^x$$

donde $a > 0$ y $a \neq 1$, observe que la variable independiente x está en el exponente de la función.



Función exponencial

4.3.3. Función logarítmica

Es una función de la forma

$$f(x) = \log_a(x)$$

y está compuesta por un logaritmo de base a , siendo $a > 0$ y $a \neq 1$.

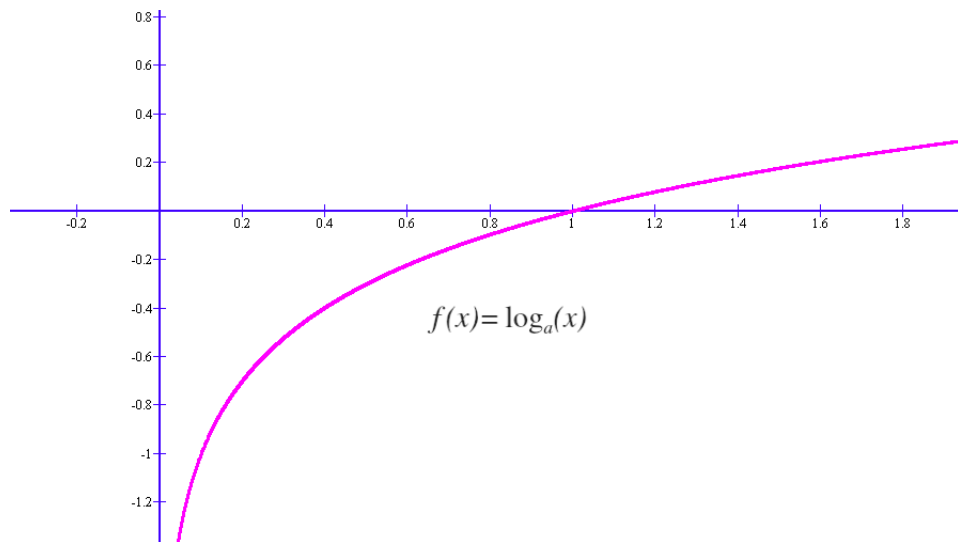


Figura 18: Función logarítmica

Referencias

- [1] Organización Mundial de la Salud. (2008). *Curso de capacitación sobre la evaluación del crecimiento del niño. Ginebra.*
- [2] Zamora, H. (2010). *Modelos funcionales: Las funciones trigonométricas-Cartilla.* Bogotá, Colombia: Institución universitaria politécnico grancolombiano- Educación Virtual.
- [3] Stewart, J; Redlin, L & Watson, S. (2001). *Precalculo.* México, México. Thomson Learning.
- [4] Grupo de Modelamiento Matemático. (2017). Facultad de Ingeniería y Ciencias básicas Institución Universitaria Politécnico Grancolombiano.

INFORMACIÓN TÉCNICA



Módulo: Cálculo I

Unidad 1: Funciones

Escenario 1: Funciones

Autor: Luisa Fernanda Martínez Rojas

Asesor Pedagógico: Diana Marcela Díaz Salcedo

Diseñador Gráfico: Kevin Mauricio Ramírez Correa

Corrector de estilo:

Asistente: Leidy Alejandra Morales

*Este material pertenece al Politécnico Grancolombiano.
Por ende, son de uso exclusivo de las Instituciones
adscritas a la Red Ilumino. Prohibida su reproducción
total o parcial.*