Facultad de Ingeniería y Ciencias Básicas

Unidad 3 / Escenario 6

Lectura Fundamental

Cálculo 1

Contenido

Palabras y frases claves: Aproximación, derivada, reglas básicas, recta tangente.

1. Introducción

En la presente sección se expondrá la noción de derivada como una herramienta para estudiar la variación en diversas situaciones reales o hipotéticas; este concepto es muy importante en el estudio de las funciones de variable real porque nos indica la variación en un instante determinado o para un valor determinado de la variable. Es importante estudiar la derivada y sus diferentes interpretaciones puesto que es la mejor aproximación lineal alrededor de un punto, además es la pendiente de la recta tangente a la curva en un punto, otra interpretación es desde la física, como la velocidad instantánea. Más adelante se formalizará el concepto de la derivada de una función, se estudiarán las reglas de derivación, se harán ejemplos y se finalizará con la derivada de las funciones compuestas, mediante la regla de la cadena.

2. La noción de derivada

Una de las interpretaciones de la derivada desde el punto de vista geométrico surgió al tratar de contestar la siguiente pregunta: ¿Cómo determinar la ecuación de una recta tangente T a una curva en un punto P?
Antes de dar respuesta a este interrogante, es necesario que recuerde los siguientes conceptos:

1. **Recta secante:** es una línea que intersecta en dos o más puntos a una curva.
2. **Recta tangente:** es una línea que intersecta en un punto a una curva.
3. **Pendiente de una recta:** es la diferencia del cambio en y dividido por la diferencia del cambio en el eje x, es decir, para dos puntos diferentes (x_1, y_1) y (x_2, y_2) en la recta, se tiene que

$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{Cambio \;\; en\ el\ eje\ y}{Cambio \;\; en\ el\ eje\ x}$$

Se ilustrará el problema de encontrar la ecuación de la recta tangente de una función $f(x)$ en un punto a:

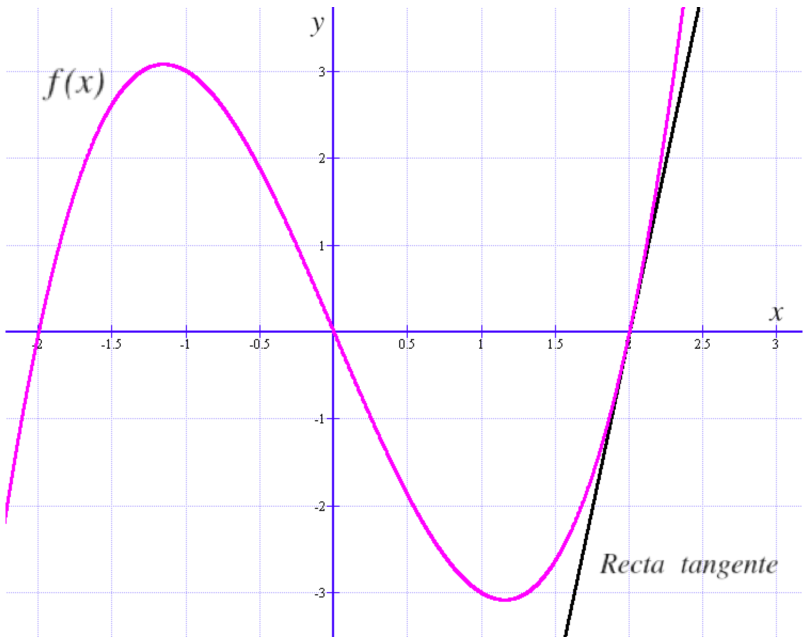

Figura 1: Recta tangente a la función $f(x) = x^3 - 4x$ en $x = 2$

El problema se presenta porque para hallar la ecuación de una recta es necesario conocer dos puntos de la recta; para esto se dará solución al problema de la siguiente forma: sea P un punto fijo de la función con coordenadas $(a, f(a))$ y se tomará otro punto Q, con coordenadas $(x, f(x))$; con estos dos puntos, se trazará una recta secante a la gráfica de $f(x)$; la pendiente de esta recta es $m = \frac{f(x)-f(a)}{x-a}$.

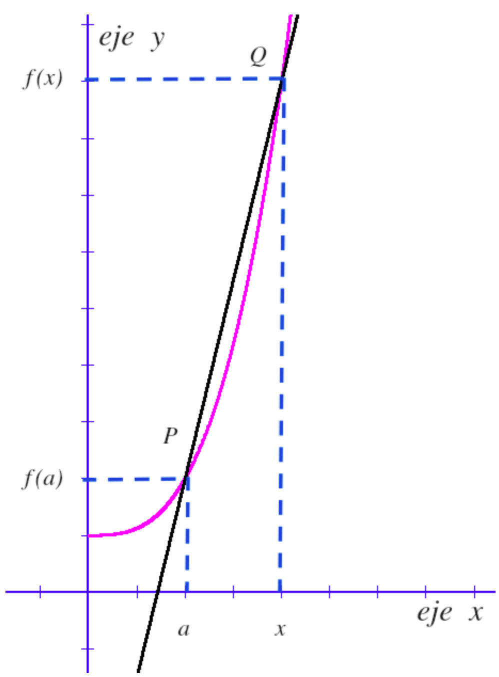

Figura 2: Recta secante a la función

Como la idea es hallar la ecuación de la recta tangente en el punto P, se moverá el punto Q a lo largo de la gráfica de la función $f(x)$ hacia el punto P y se tiene:

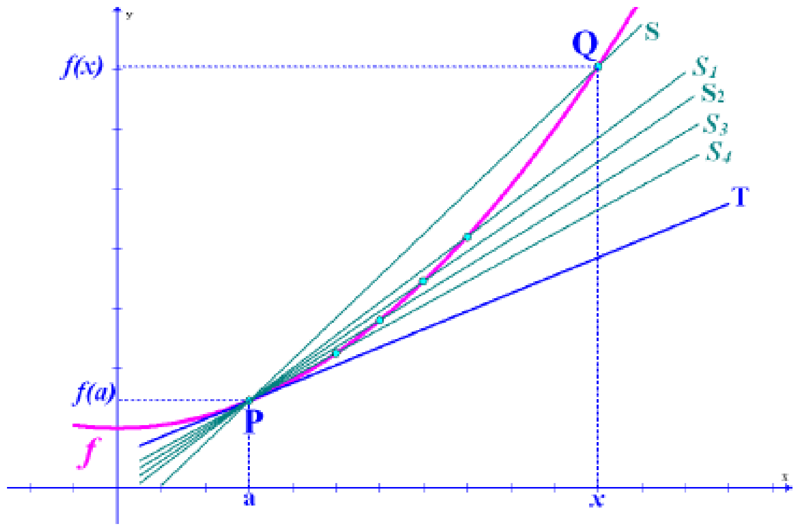

Figura 3: Rectas secantes a la función f
Fuente:Zamora, H. (2010). *Aplicación de los límites. La función derivada. Cartilla.* Bogotá, Colombia: Institución universitaria politécnico grancolombiano- Educación Virtual.

Por lo tanto la coordenada x se está acercando a la coordenada a y la pendiente de la recta tangente de la función f en el punto $P(a, f(a))$ es

$$m = \lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} \ \textit{Si el límite existe.}$$

Es importante que el lector tenga en cuenta que hay otra expresión para la pendiente de la recta tangente que en algunas ocasiones es más fácil de usar; para esto se tiene que $h = x - a$, por tanto, $x = a + h$, entonces la pendiente de la recta secante será:

$$m = \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$$

Tenga en cuenta que cuando x se aproxima a a, h tiende a cero y se tiene que

$$m = \lim_{h \to 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$$

Ejemplo 1.

Encuentre la ecuación de la recta tangente a la curva $f(x) = 2x^3 + 3$, en el punto $x = \frac{1}{2}$
Primero se hallará la pendiente m

$$\begin{aligned} m = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} &= \lim_{h \to 0} \frac{f(\frac{1}{2} + h) - f(\frac{1}{2})}{h} \\ &= \lim_{h \to 0} \frac{[2(\frac{1}{2} + h)^3 + 3] - [2(\frac{1}{2})^3 + 3]}{h} \\ &= \lim_{h \to 0} \frac{[2(\frac{1}{8} + \frac{3}{4}h + \frac{3}{2}h^2 + h^3) + 3] - [\frac{13}{4}]}{h} \\ &= \lim_{h \to 0} \frac{(\frac{2}{8} + \frac{6}{4}h + \frac{6}{2}h^2 + 2h^3) + 3 - \frac{13}{4}}{h} \end{aligned}$$

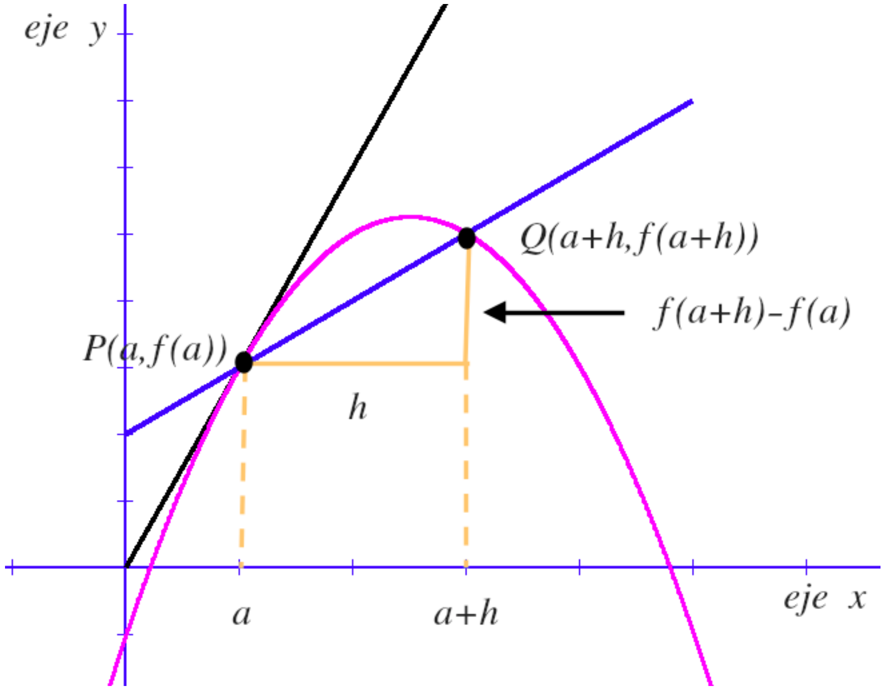

Figura 4: Definición alterna de derivada

simplificando se tiene

$$\begin{aligned}
\lim_{h\to 0}\frac{(\frac{1}{4}+\frac{3}{2}h+3h^2+2h^3)-\frac{1}{4}}{h} &= \lim_{h\to 0}\frac{\frac{3}{2}h+3h^2+2h^3}{h}\\
&= \lim_{h\to 0}\frac{h(\frac{3}{2}+3h+2h^2)}{h}\\
&= \lim_{h\to 0}\frac{3}{2}+3h+2h^2=\frac{3}{2}
\end{aligned}$$

Luego, la pendiente de la recta tangente a la función $f(x)=2x^3+3$ en el punto $x=\frac{1}{2}$ es $m=\frac{3}{2}$

Ahora, recuerde que la ecuación de la recta tiene la forma $y=mx+b$ y ya se halló m, entonces, para hallar b, se debe tener cuenta que cuando $x=\frac{1}{2}$, el valor de y es $y=f(\frac{1}{2})=2(\frac{1}{2})^3+3=\frac{13}{4}$, por tanto, se tiene la coordenada $(\frac{1}{2},\frac{13}{4})$ y ahora, reemplazando estos valores, se tiene que b es

$$\begin{aligned}
y &= mx+b\\
\frac{13}{4} &= \frac{3}{2}\left(\frac{1}{2}\right)+b\\
\frac{13}{4} &= \frac{3}{4}+b\\
\frac{13}{4}-\frac{3}{4} &= b\\
\frac{10}{4} = \frac{5}{2} &= b
\end{aligned}$$

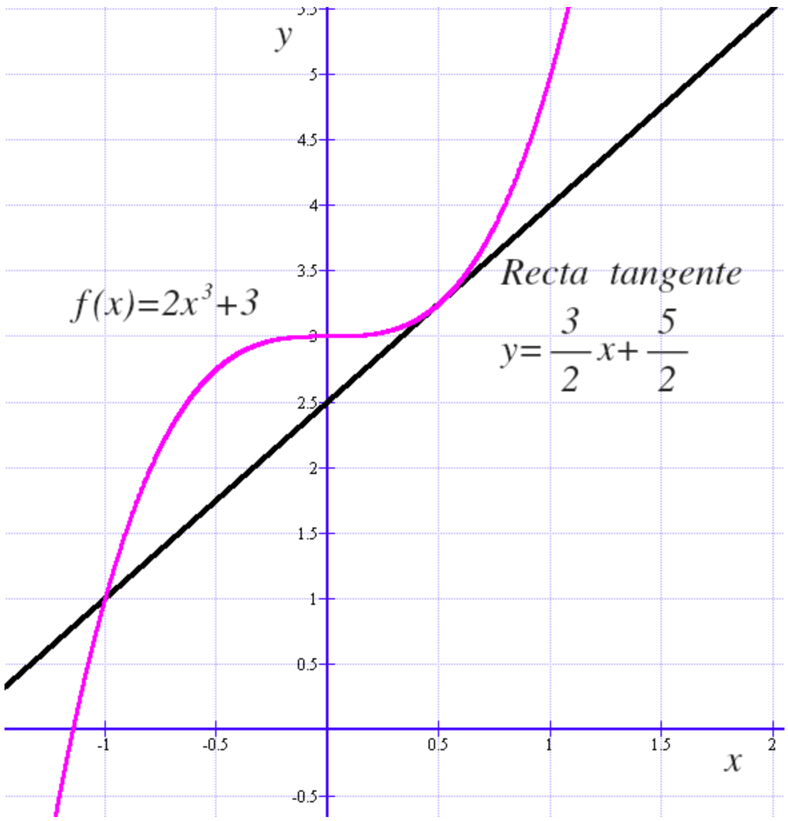

Figura 5: Ejemplo recta tangente

Luego, la ecuación de la recta tangente buscada es $y = \frac{3}{2}x + \frac{5}{2}$

Sabías que: los grandes creadores del cálculo diferencial fueron el inglés Sir Isaac Newton (1642-1727) y el alemán Goottfriend Leibniz (1646-1716).

3. La función derivada

En esta sección se formalizará con el concepto de la derivada de una función y se expondrán ejemplos donde se hallará la derivada por definición.

La derivada de una función $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ **en un número** a, denotada por $f'(a)$ es

$$f'(a) = \lim_{h \to 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$$

si el límite existe.

Ejemplo 2.

Hallemos $f'(x)$ para la función $f(x) = 3x^2 + 4$.
Tomando el cociente diferencial tendríamos

$$\begin{aligned}\frac{f(x+h)-f(x)}{h} &= \frac{[3(x+h)^2+4]-(3x^2+4)}{h} \\ &= \frac{3x^2+6xh+3h^2+4-3x^2-4}{h} \\ &= \frac{(6x+3h)h}{h} = 6x+3h,\end{aligned}$$

y tomando el límite tenemos

$$\lim_{h\to 0} \frac{f(x+h)-f(x)}{h} = \lim_{h\to 0} 6x+3h = 6x.$$

Esto quiere decir que la derivada de la función $f(x) = 3x^2 + 4$ es $f'(x) = 6x$

Ejemplo 3.

Halle $f'(x)$ para la función

$$f(x) = \begin{cases} x^2-1 & \text{si } x < 1 \\ 3-2x^2 & \text{si } 1 \leq x, \end{cases}$$

Teniendo en cuenta la definición de derivada, es necesario considerar limites laterales. Tenga presente que si se encuentra evaluando la función $f(x)$ en números más pequeños que 1 se debe hacer con la regla de asignación $f(x) = x^2 - 1$ y se tiene:

$$\begin{aligned}\lim_{h\to 0^-} \frac{f(1+h)-f(1)}{h} &= \lim_{h\to 0^-} \frac{1+2h+h^2-1}{h} \\ &= \lim_{h\to 0^-} \frac{h(2+h)}{h} = 2\end{aligned}$$

Y por la derecha nos encontramos evaluando la función f en un número mayor o igual 1, luego debemos hacerlo mediante la regla de asignación $f(x) = 3 - 2x^2$, por lo que

$$\begin{aligned}\lim_{h\to 0^+} \frac{f(1+h)-f(1)}{h} &= \lim_{h\to 0^+} \frac{3-2(1+h)^2-(3-2(1)^2)}{h} \\ &= \lim_{h\to 0^+} \frac{(3-2(1+2h+h^2))-(3-2)}{h} \\ &= \lim_{h\to 0^+} \frac{3-2-4h-2h^2-1}{h} \\ &= \lim_{h\to 0^+} \frac{-4h-2h^2}{h} \\ &= \lim_{h\to 0^+} \frac{h(-4-2h)}{h} \\ &= \lim_{h\to 0^+} (-4-2h) = -4\end{aligned}$$

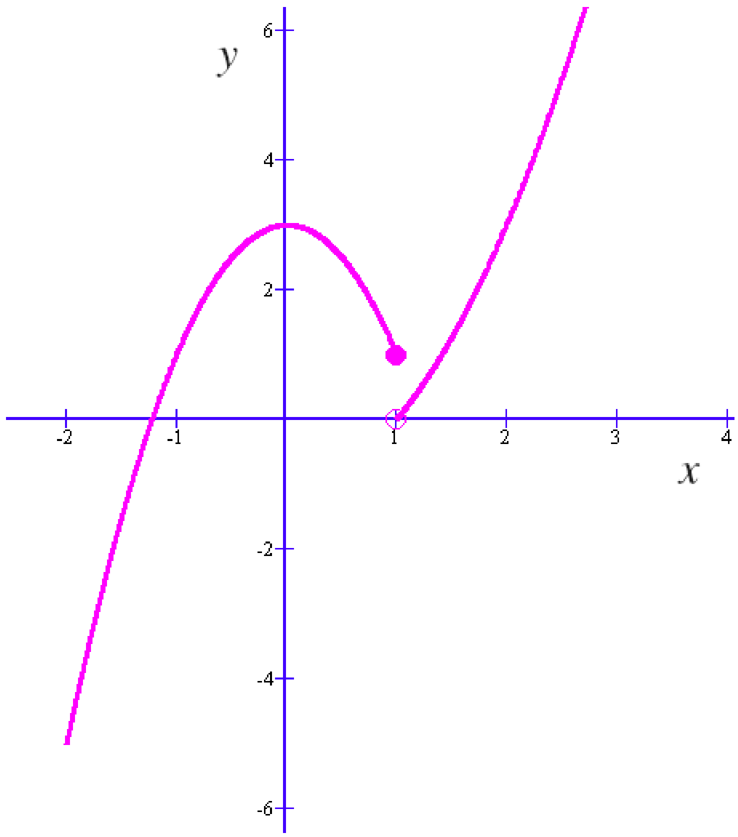

Figura 6: Gráfica de funcióna trozos

Esto nos permite concluir que el límite no existe debido a que los límites laterales no coinciden, por lo tanto la función no es derivable en $x = 1$.

Teniendo en cuenta el ejemplo anterior, se puede concluir el siguiente teorema:

Teorema: si la función f es derivable en el punto $x = c$, entonces es continua en dicho punto, equivalente, si f no es continua en $x = c$ entonces no puede ser derivable en ese punto.

4. Derivadas de funciones básicas

Como se ha apreciado, el proceso para hallar la derivada de una función a partir de la definición puede ser un poco tedioso, por todo el tiempo y operaciones que debe realizar; por lo tanto en esta sección se estudiarán las reglas básicas para encontrar la derivada de una función. Por lo tanto, debe tener en cuenta que la derivada de una función f es otra función f' y para la notación o simbolización se tiene que dada la función $f(x)$ la derivada se puede notar así:

$$f'(x) \qquad o \qquad y' \qquad o \qquad \frac{dy}{dx} \qquad o \qquad D_x f$$

Reglas de derivación

1. **Regla para la función constante:** si $f(x) = k$, en donde k representa un número real, decimos que f es una función de valor constante k y su derivada es, $f'(x) = 0$ es decir, **la derivada de una función constante es cero.**
2. **Regla de la potencia:** si $f(x) = x^n$, en donde n es un número real, decimos que la función es de potencia y su derivada es $f'(x) = nx^{n-1}$.
3. **Regla del múltiplo constante:** si $y = kf(x)$, en donde k es una constante, su derivada es $y' = kf'(x)$. Esto significa que, la derivada de una constante k multiplicada por una función f es igual a la constante k multiplicada por la derivada de la función f.
4. **Regla para la suma-diferencia:** si $f(x) = g(x) \pm h(x)$, entonces $f'(x) = g'(x) \pm h'(x)$. Esto significa que la derivada de la suma(resta) es igual a la suma(resta) de las derivadas.
5. Si $f(x) = g(x) \cdot h(x)$, entonces $f'(x) = g'(x) \cdot h(x) + g(x) \cdot h'(x)$. **Esta regla se denomina la regla del producto.**
6. Si $f(x) = \dfrac{g(x)}{h(x)}$, con $h(x) \neq 0$ entonces $f'(x) = \dfrac{g'(x) \cdot h(x) - g(x) \cdot h'(x)}{[h(x)]^2}$. **Esta regla se denomina la regla del cociente.**
7. La función logaritmo natural que se define $f(x) = \ln x$ y cuya derivada es $f'(x) = \frac{1}{x}$.
8. La función exponencial que se define mediante $f(x) = e^x$ cuya derivada es $f'(x) = e^x$.

A continuación se exponen algunos ejemplos de estas reglas:

Ejemplo 4.

Determinar la derivada de $f(x) = (x^2 + 17)(x^3 - 3x + 1)$.
Aplicando la regla del producto se tiene:

$$f'(x) = (2x)(x^3 - 3x + 1) + (x^2 + 17)(3x^2 - 3)$$

Realizando las operaciones y simplificando:

$$f'(x) = 5x^4 + 42x^2 + 2x - 51$$

Ejemplo 5.

Determinar la derivada de $g(x) = \dfrac{5x^2 + 2x - 6}{3x - 1}$.
Aplicando la regla del cociente se tiene:

$$g'(x) = \frac{(10x + 2)(3x - 1) - (5x^2 + 2x - 6)(3)}{(3x - 1)^2}$$

Realizando operaciones y simplificando:

$$g'(x) = \frac{15x^2 - 10x + 16}{(3x - 1)^2}$$

Continuando con las reglas de derivación, ahora se exponen las derivadas de las funciones trigonométricas que son:

Derivadas de funciones trigonométricas

1. Si $f(x) = \sin x$ entonces $f'(x) = \cos x$
2. Si $f(x) = \cos x$ entonces $f'(x) = -\sin x$
3. Si $f(x) = \tan x$ entonces $f'(x) = \sec^2 x$
4. Si $f(x) = \csc x$ entonces $f'(x) = -\csc x \cot x$
5. Si $f(x) = \sec x$ entonces $f'(x) = \sec x \tan x$
6. Si $f(x) = \cot x$ entonces $f'(x) = -\csc^2 x$

A continuación se exponen algunos ejemplos de derivación con funciones trigonométricas:

Ejemplo 6.

Determinar la derivada de $f(x) = \dfrac{\sin x + \cos x}{\tan x}$.
Aplicando la regla del cociente en funciones trigonométricas se tiene:

$$f'(x) = \frac{(\cos x - \sin x)\tan x - (\sin x + \cos x)\sec^2 x}{\tan^2 x}$$

Ejemplo 7.

Determinar la derivada de $g(x) = \sin x \tan x$.
Aplicando la regla del producto se tiene:

$$g'(x) = \cos x \tan x + \sec^2 x \sin x$$

5. Regla de la cadena

Siguiendo con el estudio de las derivadas, veamos una regla para derivar funciones compuestas:

Sean $y = f(u)$ y $u = g(x)$. Si $g(x)$ es derivable en x y f es derivable en $u = g(x)$, entonces la función compuesta por $(f \circ g)(x) = f(g(x))$ es derivable en x y

$$(f \circ g)'(x) = f'(g(x))g'(x)$$

Veamos ahora algunos ejemplos donde se aplica la derivada de la función compuesta, es decir, la regla de la cadena:

Ejemplo 8.
Encuentre la derivada de

$$y = \left(\frac{x+1}{x-1}\right)^3$$

Antes de aplicar la regla de la cadena, identifique la función interna y la función externa. En este caso la función interna se llamará $g(x)$ y esta es el cociente $g(x) = \frac{x+1}{x-1}$ y la función externa es la potencia al cubo $y = (g(x))3$. Ahora, aplicando la regla de la cadena e iniciando a derivar la función externa y luego la interna, se tiene:

$$y' = 3 \cdot \left(\frac{x+1}{x-1}\right)^2 \frac{1 \cdot (x-1) - (x+1) \cdot 1}{(x-1)^2}$$

Simplificando:

$$y' = 3 \cdot \left(\frac{x+1}{x-1}\right)^2 \frac{-2}{(x-1)^2} = \left(\frac{x+1}{x-1}\right)^2 \frac{-6}{(x-1)^2}$$

Se tiene:

$$y' = -6 \cdot \frac{(x+1)^2}{(x-1)^4}$$

Ejemplo 9.

Encuentre la derivada de la función $f(x) = \sin(x^2 + 3x + 1)$.
Aplicando la regla de la cadena se tiene:

$$f'(x) = \cos(x^2 + 3x + 1)(2x + 3)$$

Tenga en cuenta que primero se deriva la función más externa y se multiplica por la derivada de la función interna.

Ahora lo invito a realizar los siguientes ejercicios, para afianzar lo estudiado.

6. Ejercicios

1. Halle $f'(x)$ por medio de la definición de límite.

   a) $f(x) = 3x^2 + 4$
   b) $g(x) = \frac{2}{x}$
   c) $h(x) = \frac{1}{x+1}$
   d) $f(x) = \sqrt{3x}$
   e) $h(x) = \sqrt{x^2 + 4}$
   f) $t(x) = \dfrac{x-1}{x+1}$

2. Derive las siguientes funciones.

   a) $f(x) = x^4 + x^3 + x^2 + x + 1$
   b) $g(x) = \frac{3}{x^3} + x^{-4}$
   c) $h(x) = (x^2 + 2)(x^3 + 1)$
   d) $g(x) = \frac{5x-4}{x^2+2x-3}$
   e) $f(x) = \frac{2x^2-3x+1}{3x+5}$
   f) $f(x) = (x^4 + 2x)(x^3 + 2x^2 + 1)$
   g) $h(x) = x(x^2 + 1)$
   h) $f(x) = \sin^2 x + \cos^2 x$
   i) $g(x) = \frac{\sin x}{x}$
   j) $h(x) = x^2 \cos x$
   k) $f(x) = \frac{\tan x + \cos x}{\sin x}$

3. Determinar la derivada de la función dada en cada caso.

a) $f(x) = 3x^2 + 5x - 2$

b) $f(x) = \ln x + \frac{1}{x^2} - \sqrt{x} + 2$

c) $f(x) = \sqrt{\frac{x}{x+1}}$

d) $f(x) = (x^2 + 5x)(1 - 2x)$

e) $f(x) = \sqrt{3x^2 - 5x - 2}$

f) $f(x) = \frac{2x^2+7x+2}{x-3}$

g) $f(x) = (4x^3 + 8x - 12)^{-4}$

h) $f(x) = \sqrt{\frac{2}{x} - 1}$

i) $f(x) = \left(\frac{3-5x}{x+3}\right)^2$

j) $f(x) = \frac{2}{x} - 5x^3 + (x-9)^2 - 2\ln x + e^{2x}$

k) $f(x) = \cos(3x^2 - 2x)$

l) $f(x) = \sin^3\left(\frac{x^2}{1-x}\right)$

m) $f(x) = \cos^4(\sqrt{x})$

n) $f(x) = \sin(x^2 + x)$

Referencias

[1] Zamora, H. (2010). *Aplicaciones de los límites. La función derivada-Cartilla.* Bogotá, Colombia: Institución universitaria politécnico grancolombiano- Educación Virtual.

[2] Stewart, J; Redlin, L & Watson, S. (2001).*Precalculo.* México. Thomson Learning.

[3] Grupo de Modelamiento Matemático. (2017).Facultad de Ingeniería y Ciencias básicas Institución Universitaria Politécnico Grancolombiano.

INFORMACIÓN TÉCNICA

Módulo: Cálculo I
Unidad 3: Límites y derivadas
Escenario 6: La noción de la derivada

Autor: Luisa Fernanda Martínez Rojas

Asesor Pedagógico: Diana Marcela Díaz Salcedo
Diseñador Gráfico: Kevin Mauricio Ramírez Correa
Corrector de estilo:
Asistente: Leidy Alejandra Morales