INSTITUCIÓN UNIVERSITARIA POLITÉCNICO GRANCOLOMBIANO

Facultad de Ingeniería y Ciencias Básicas

Unidad 4 / Escenario 7

Lectura Fundamental

Cálculo 1

Contenido

Palabras y frases claves: Derivada, aplicaciones, razón de cambio, derivada implícita, valores extremos.

1. Introducción

En esta sección se continua con el estudio de las derivadas como la derivación implícita y las derivadas de orden superior. Estos tipos de derivadas son muy útiles, porque sirven para resolver las aplicaciones de derivadas como las razones de cambio donde se hace necesaria la derivación implícita, y también para el trazado de curvas donde se hace relevante el uso de las derivadas de orden superior, y así calcular los puntos de inflexión.

Por tanto lo invito a realizar la lectura cuidadosamente, siguiendo los pasos y preguntándose el ¿por qué? de cada uno de estos y al finalizar realice los ejercicios propuestos para que afiance lo estudiado.

2. Derivada de orden superior

Cuando se está derivando una función f para obtener f', esta es una nueva función; y si ahora se deriva f', se produce una nueva función f'' llamada **la segunda derivada** de f, esta nueva función puede derivarse y así producir f''', que se denomina **la tercera derivada** de f, y así se puede continuar y obtener **la cuarta derivada** que se símboliza $f^{(4)}$, la quinta derivada $f^{(5)}$ y así sucesivamente. Observe el siguiente ejemplo:

Ejemplo 1.

Si

$$f(x) = \sin(x^2)$$

Encuentre las tres primeras derivadas.

- Se tiene que $f(x) = \sin(x^2)$.

- Aplicando la regla de la cadena se deriva la función obteniendo:

$$f'(x) = \cos(x^2)2x$$

- Para hallar la segunda derivada debe tener en cuenta que esta nueva función es un producto, por tanto se aplicará la regla del producto y la regla de la cadena:

$$f''(x) = (\cos(x^2))'(2x) + (\cos(x^2))(2x)'$$

Obteniendo

$$f''(x) = (-\sin(x^2)2x)(2x) + \cos(x^2)(2)$$

Realizando las operaciones

$$f''(x) = -4x^2\sin(x^2) + 2\cos(x^2)$$

- Calculando la tercera derivada, que se puede simbolizar

$$f'''(x) = f^{(3)}(x)$$

Esta se obtiene al derivar la segunda derivada, aplicar las reglas de derivación y la regla de la cadena así:

$$f'''(x) = \frac{d}{dx}\left[(-4x^2\sin(x^2) + 2\cos(x^2))\right]$$

$$f'''(x) = (-8x)\sin(x^2) - (4x^2)(\cos(x^2)(2x)) + 2(-\sin(x^2))(2x)$$

Para simbolizar la derivada, se introdujo la siguiente notación:

$$f'(x) \qquad o \qquad y' \qquad o \qquad \frac{dy}{dx} \qquad o \qquad D_x f$$

Por tanto, para las derivadas de orden superior se tienen las siguientes notaciones:

Derivada	f' Notación	y' Notación	D Notación	Notación de Leibniz
Primera	$f'(x)$	y'	$D_x y$	$\frac{dy}{dx}$
Segunda	$f''(x)$	y''	$D_x^2 y$	$\frac{d^2y}{dx^2}$
Tercera	$f'''(x)$	y'''	$D_x^3 y$	$\frac{d^3y}{dx^3}$
Cuarta	$f^{(4)}(x)$	$y^{(4)}$	$D_x^4 y$	$\frac{d^4y}{dx^4}$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
n-ésima	$f^{(n)}(x)$	$y^{(n)}$	$D_x^n y$	$\frac{d^ny}{dx^n}$

Tabla 1: Notación para las derivadas de $y = f(x)$

3. Derivación implícita

Continuando con el estudio de las derivadas, si ahora se quiere derivar una función como la siguiente:

$$x^3y + y^3x = 30$$

lo que usted haría sería despejar y y después haría la derivada. Sin embargo hay ocasiones que despejar y no es tan sencillo (o no se puede), por tanto, y se define como una función implícita de x, y como es una función, esta se puede derivar aunque esta función no esté expresada explícitamente, es decir, de la forma $y = f(x)$.

Es decir, que si le piden encontrar la derivada de $x^3y + y^3x = 30$ y la ecuación de la recta tangente en el punto $(1, 3)$, lo que se hace es derivar a ambos lados de la igualdad que describe la relación, así:

$$\frac{d}{dx}(x^3y + y^3x) = \frac{d}{dx}(30)$$

Teniendo en cuenta las propiedades de las derivadas, a la izquierda se tiene una suma donde sus sumandos son productos y a la derecha una constante:

$$\left(3x^2 \cdot y + x^3 \cdot 1 \cdot \frac{dy}{dx}\right) + \left(3y^2\frac{dy}{dx} \cdot x + y^3 \cdot 1\right) = 0$$

Despejando $\frac{dy}{dx}$ se tiene:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{-3x^2y - y^3}{x^3 + 3xy^2}$$

Como puede apreciar, la derivada sigue en términos de x y y, no como quedaba anteriormente en términos de una sola variable, por tanto, para hallar la pendiente se necesita un punto, en este caso $(1, 3)$ y nos da:

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{9}{7}$$

Como ya se tiene la pendiente y un punto, es posible encontrar la ecuación de la recta tangente, sólo hace falta encontrar b y para esto se tiene:

$$\begin{aligned} y &= mx + b \\ 3 &= -\frac{9}{7}(1) + b \\ 3 + \frac{9}{7} &= +b \\ \frac{30}{7} &= b \end{aligned}$$

por tanto, la ecuación de la recta tangente pedida es $y = -\frac{9}{7}x + \frac{30}{7}$.

Observe ahora el siguiente ejemplo:

Ejemplo 2.

Halle la derivada de la siguiente función:

$$y^2x^2 + x^3 = 4$$

Este ejemplo es similar al ejercicio anterior, se debe derivar a ambos lados de la igualdad.

$$\frac{d}{dx}\left(y^2x^2 + x^3\right) = \frac{d}{dx}(4)$$

Derivando a ambos lados

$$\frac{d}{dx}(y^2x^2) + \frac{d}{dx}(x^3) = 0$$

En la parte izquierda nos queda la derivada del producto (y^2x^2) y la derivada de x^3, resolviendo esto tenemos:

$$2xy^2 + 2x^2y\frac{dy}{dx} + 3x^2 = 0$$

Despejando $\dfrac{dy}{dx}$ se tiene:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{-(3x^2 + 2xy^2)}{2x^2y}$$

La derivación implícita se usa para encontrar derivadas de funciones inversas y en problemas de aplicación de las derivadas como razones de cambio.

4. Razón de cambio relacionadas

En el estudio del cálculo diferencial es importante analizar los cambios de una magnitud con respecto a otra con la que de alguna manera están relacionadas; estas son las razones de cambio relacionadas.

Estas razones de cambio se pueden observar en nuestra cotidianidad o en diversos campos de acción del ser humano como: el cambio de una población respecto al tiempo, el cambio de la temperatura de un líquido respecto al tiempo o el cambio de la distancia con el tiempo, entre otras más; para estudiar estos problemas relativos a la variación de una o más cantidades, en donde dependen unas variables de otras, se deben tener en cuenta las razones relacionadas, en donde generalmente se requiere de derivar implícitamente.

A continuación se presentan ejemplos donde se relacionan dos variables y se desea conocer la variación de una de ellas conociendo la variación de la otra variable, donde usualmente se usa la derivación implícita y/o la regla de la cadena.

Ejemplo 3.
Suponga que una pompa de jabón mantiene su forma esférica conforme se expande, ¿qué tan rápido aumenta el radio cuando este es de 3 pulgadas, si se sopla el aire a la burbuja a una razón de $3\frac{pulg^3}{seg}$?

Solución

Leyendo cuidadosamente el problema se percibe, que están preguntando sobre la variación del radio. Los datos que nos proporciona son: el radio de 3 pulgadas y la variación del volumen respecto al tiempo $3\frac{pulg^3}{seg}$, es decir, $\frac{dV}{dt}$; por tanto, una ecuación que nos relacione estas variables es el volumen de una esfera.

$$V = \frac{4}{3}\pi r^3$$

Ahora, derivando implícitamente el volumen de la esfera (pompa de jabón) con respecto al tiempo, se obtiene:

$$\frac{dV}{dt} = 4\pi r^2 \frac{dr}{dt}$$

Como el problema pregunta por la variación del radio con respecto al tiempo, se debe despejar $\frac{dr}{dt}$ y se obtiene:

$$\frac{\frac{dV}{dt}}{4\pi r^2} = \frac{dr}{dt}$$

Reemplazando

$$\frac{3}{4\pi(3)^2} = \frac{1}{12\pi} \approx 0,0265... \frac{pulg}{seg}$$

Que será nuestra respuesta.

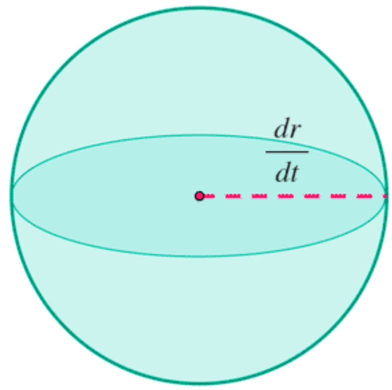

Figura 1: Esfera-pompa de jabón
Fuente: https://www.calculadoraconversor.com/calculadora-area-de-una-esfera/

Estrategias para resolver problemas de razones de cambio relacionadas:

1. Lea varias veces el problema cuidadosamente hasta tener claro ¿qué le está pidiendo el problema?
2. Identifique y simbolice todas las cantidades que cambian con el tiempo.
3. ¿Qué datos le brinda el enunciado del problema? Use la notación de derivadas para escribir la razón que desea encontrar.
4. En lo posible, grafique la situación.
5. Escriba un ecuación o una función que relacione todas las variables.
6. Derive la ecuación o función encontrada en el paso (5), tenga en cuenta que puede ser derivación ímplicita.

Ejemplo 4.
Dos autos parten desde un mismo punto; uno viaja hacia el sur a una velocidad de 30 km/h y el otro, hacia el este, a una velocidad de 40 km/h. Después de dos horas, ¿Cuál es la velocidad de separación de los dos autos?

Solución

Leyendo cuidadosamente el enunciado del ejercicio, este está pidiendo que se calcule la velocidad a la que se están separando los carros 2 horas después de haber partido desde el mismo punto.

Si se considera que $s(t)$ es la distancia que separa los autos en un instante t, entonces lo que está pidiendo el ejercicios es $\frac{ds}{dt}$ cuando han transcurrido 2 horas.

La representación gráfica de la situación es:

- Si $x(t)$ es la distancia recorrida hacia el este en t horas, entonces

$$x(t) = v \cdot t = 40 \cdot t = 40t$$

- Si $y(t)$ es la distancia recorrida hacia el sur en t horas, entonces

$$y(t) = v \cdot t = 30 \cdot t = 30t$$

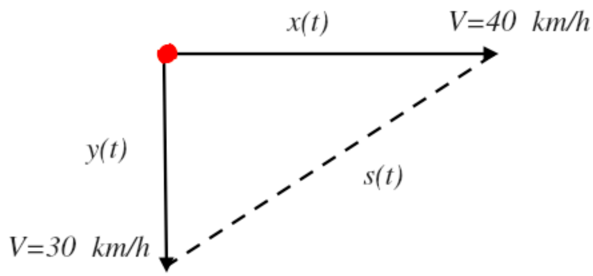

Figura 2: Ejemplo

Ahora, usando el teorema de Pitágoras para calcular la distancia s que separa a los autos es

$$
\begin{aligned}
s(t)^2 &= x(t)^2 + y(t)^2 = (40t)^2 + (30t)^2 = 1600t^2 + 900t^2 = 2500t^2 \\
s(t) &= \sqrt{2500t^2} \\
s(t) &= 50t
\end{aligned}
$$

Por lo tanto, la distancia $s(t) = 50t$ es una función lineal y su derivada es $\frac{ds}{dt} = 50$, que es una función constante, así que la distancia que separa a los autos 2 horas después es $s(2) = 50\ km/h$.

5. Máximos y mínimos

Es frecuente que se encuentre situaciones en las que se debe hallar el máximo o mínimo ingreso de cierta producción de una máquina, o determinar el máximo o mínimo de cierta cantidad de material, o la máxima o mínima capacidad de un recipiente; en este tipo de problemas se pide que maximice o minimice cierta función y aquí surge una oportunidad para el cálculo diferencial y la aplicación de la derivada, puesto que brinda las herramientas para solucionar este tipo problemas.

Por lo tanto, suponga que tiene una función $f(x)$, donde su dominio es S, resultaría natural preguntarse lo siguiente:

1. ¿$f(x)$ tiene un valor máximo o mínimo en su dominio?
2. En caso que los tenga, ¿en dónde se alcanzan?
3. Si existen estos valores, ¿cuáles son los valores máximo y/o mínimo?

Entonces, para iniciar el estudio de los máximos y mínimos, se iniciará por la siguiente definición:

Definición
Suponga que S, el dominio de f, contiene el punto c. Decimos que:

I. $f(c)$ es el **valor máximo** de f en S, $f(c) \geq f(x)$ para toda x en S;

II. $f(c)$ es el **valor mínimo** de f en S, $f(c) \leq f(x)$ para toda x en S;

III. $f(c)$ es el **valor extremo** de f en S, si es un valor máximo o un valor mínimo;

IV. La función que queremos maximizar o minimizar es la **función objetivo**.

Ahora, teniendo en cuenta la definición anterior, ya se sabe cuándo un número es un máximo un mínimo, pero hace falta saber si estos valores existen, puesto que se pueden presentar ciertos casos como por ejemplo, una función cuadrática. Este tipo de función tiene valor máximo o valor mínimo, pero una función lineal no tiene valores extremos, las funciones trigonométricas $f(x) = \sin x$ y $f(x) = \cos(x)$ tiene máximo y mínimo en el intervalo $[0, 2\pi]$; entonces, para resolver estos cuestionamientos se tiene el siguiente teorema sobre la existencia de los máximo y mínimos.

Teorema de existencia de máximo y mínimo
Si f es continua en un intervalo cerrado $[a, b]$, entonces f alcanza un valor máximo y un valor mínimo en ese intervalo.

Si leyó cuidadosamente el anterior teorema, para que la función tenga máximo y mínimo **es clave** que la función $f(x)$ sea una **función continua en un intervalo cerrado**.

Pero ahora hace falta saber **¿en dónde están los valores extremos?** Los valores extremos se encuentran en **los puntos críticos** de f, estos puntos pueden ser de tres clases: **fronterizos, estacionarios y singulares**, en el siguiente teorema se definen los puntos críticos:

Teorema de los puntos críticos
Sea f definida en un intervalo I que contiene al punto c. Si $f(c)$ es un valor extremo, entonces c debe ser un punto crítico; es decir, c es alguno de los siguientes:

I. un punto froterizo de I;

II. un punto estacionario de f; es decir, un punto en donde $f'(c) = 0$, o

III. un punto singular de f; esto es, un punto en donde $f'(c)$ no existe

Gráficamente, los puntos críticos se pueden visualizar así:

1. **Puntos fronterizos**

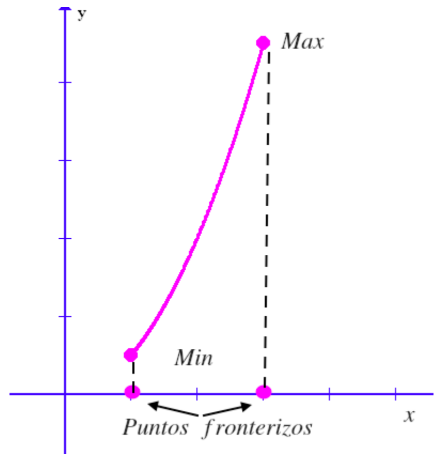

Figura 3: Puntos fronterizos

2. **Puntos estacionarios:** donde la recta tangente es horizontal, es decir que la derivada es igual cero.

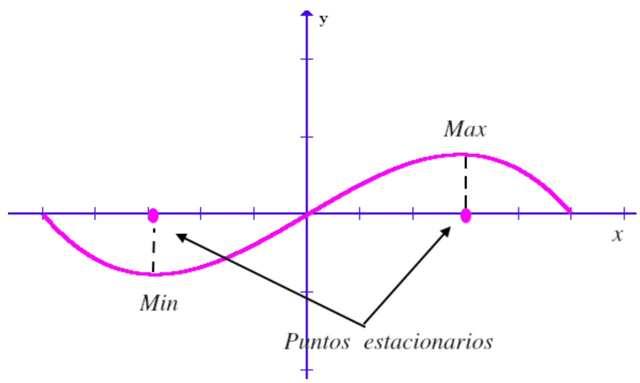

Figura 4: Puntos singulares

3. **Punto singular:** donde la gráfica de $f(x)$ tiene una esquina, tangente vertical, o quizás un salto

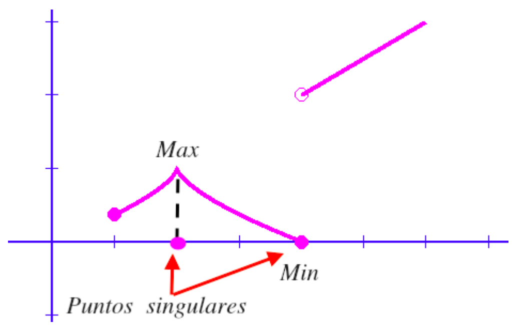

Figura 5: Puntos singulares

A continuación se expondrán dos ejemplos donde se pondrá en práctica la teoría dada:

Ejemplo 5.

Determine los valores máximo y mínimo de $f(x) = x^3 - 3x + 1$ en el intervalo $\left[-\frac{3}{2}, 3\right]$

Solución

Para hallar los valores extremos se calculará la derivada para encontrar los puntos críticos.

$$\begin{aligned} f'(x) &= 3x^2 - 3 = 0 \\ x^2 &= \frac{3}{3} \\ x &= \pm 1 \end{aligned}$$

Por tanto los puntos críticos son $x = 1$, $x = -1$ e incluyendo los puntos frontera $x = \frac{-3}{2}$ y $x = 3$, reemplazando en la función:

$$\begin{aligned} f(1) &= (1)^3 - 3(1) + 1 = -1 \\ f(-1) &= (-1)^3 - 3(-1) + 1 = 3 \\ f\left(-\frac{3}{2}\right) &= \left(-\frac{3}{2}\right)^3 - 3\left(-\frac{3}{2}\right) + 1 = \frac{17}{8} =\approx 2.125 \\ f(3) &= (3)^3 - 3(3) + 1 = 19 \end{aligned}$$

Por lo tanto, el valor máximo de f es 19 y se alcanza en $x = 3$ y el valor mínimo es -1 y lo alcanza en $x = 1$. Observe la gráfica de la función y corrobore la respuesta.

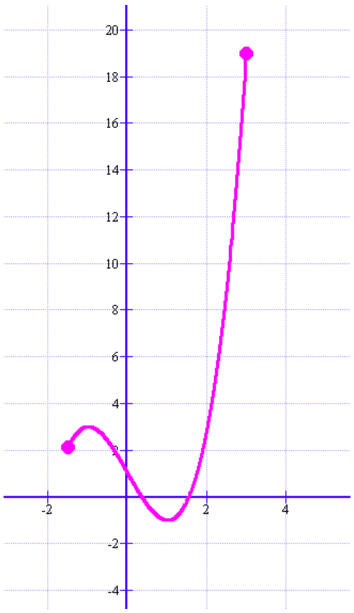

Figura 6: Gráfica $f(x) = x^3 - 3x + 1$

Sugerencias para encontrar los valores extremos sobre un intervalo cerrado $[a, b]$

1. Evalúe la función en los puntos frontera del intervalo $[a, b]$.
2. Encuentre todos los puntos críticos en el intervalo abierto (a, b).
3. Evalúe la función en todos los puntos críticos.
4. Los valores mayores son los valores máximos absolutos y los valores menores son los valores mínimos absolutos en el intervalo $[a, b]$.

Ejemplo 6.

Determine los valores máximo y mínimo de $g(x) = \dfrac{1}{1+x^2}$ en el intervalo $[-3, 1]$.

Solución
Este ejemplo se resolverá usando la sugerencia para hallar los valores extremos:

1. Evaluando la función en los valores extremos se tiene:

$$g(-3) = \frac{1}{1+(-3)^2} = \frac{1}{10} = 0.1$$
$$g(1) = \frac{1}{1+1^2} = \frac{1}{2} = 0.5$$

2. Hallando los puntos críticos, se tiene que la derivada es $g'(x) = \frac{-2x}{(1+x^2)^2}$, observando la derivada, en especial el númerador, se puede apreciar que esa derivada siempre va a existir, puesto que el denominador nunca será cero, la derivada es cero cuando $x = 0$, por tanto este es el único punto crítico.
3. Evaluando en el punto crítico $g(0) = 1$.
4. Por tanto el valor máximo de g es 1 y lo alcanza en $x = 0$ y el valor mínimoes $\frac{1}{10}$ y lo alcanza en -3.

Observe la gráfica de esta función:

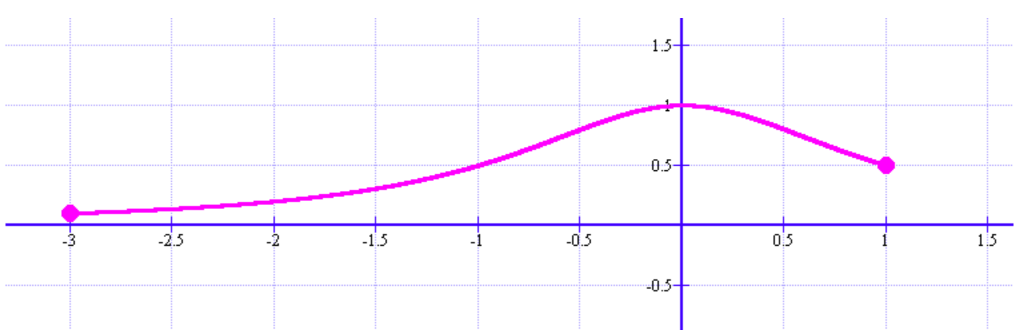

Figura 7: Gráfica $g(x) = \frac{1}{1+x^2}$

6. Ejercicios

1. Encuentre la tercera derivada de las siguientes funciones:

   a) $y = x^3 + 3x^2 + 6x$

   b) $y = \frac{3x}{1-x}$

   c) $y = \sin(x^3)$

   d) $y = (3x + 7)^3$

   e) $y = x^5 + x^4$

   f) $y = \frac{x}{x-1}$

2. Halle $y''(2)$ en las siguientes funciones:

   a) $y = 5x^3 + 2x^2$

   b) $y = \frac{2x^2}{5-x}$

   c) $y = (\cos(\pi x))^{-2}$

   d) $y = x\sin(x)$

3. En los siguientes ejercicios encuentre $\frac{dy}{dx}$:

   a) $4x^3 + 7xy^2 = 2y^3$

   b) $\sqrt{5xy} + 2y = y^2 + xy^3$

   c) $y = 3x^{5/3} + \sqrt{x}$

   d) $y = \sqrt[4]{2x+1}$

   e) $y = \dfrac{1}{(x^3 + 2x)^{2/3}}$

   f) $y = \sqrt{x^2 \cos x}$

4. Resolver las siguientes situaciones:

   a) Suponga que un incendio forestal se propaga en forma circular cuyo radio cambia a razón de 1.8 m/min. ¿A qué razón está creciendo el área de la región incendiada cuando el radio alcanza una longitud de 60 m?

   b) Un anuncio publicitario tiene forma de un cilindro circular recto. Determinar la variación de su volumen en el proceso de inflado, sabiendo que la altura permanece constante.

   c) Una placa en forma de triángulo equilátero se expande con el tiempo. Cada lado aumenta a razón constante de 2 cm/h¿Con qué rapidez crece el área cuando cada lado mide 8 cm?

   d) Un controlador aéreo sitúa a 2 aviones a la misma altitud, convergiendo en su vuelo hacia un mismo punto de encuentro (ver figura). Uno de ellos (avión 1) está a 150 millas de ese punto y vuela a 450 millas por hora. El otro avión (avión 2) está a 200 millas del punto y vuela a 600 millas por hora.

      1) ¿A qué velocidad decrece la distancia entre los aviones?

      2) ¿De cuánto tiempo dispone el controlador para situarlos en trayectorias diferentes?

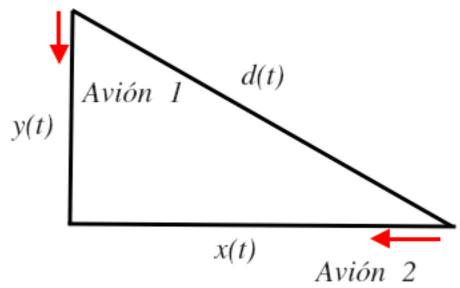

Figura 8: Ejercicio

5. Para las siguientes funciones encuentre los valores extremos sobre el intervalo dado:

   a) $f(x) = x^2 + 4x + 4$ en el intervalo $[-4, 0]$

   b) $f(x) = \dfrac{x}{1+x^2}$ en el intervalo $[-1, 4]$

   c) $f(\theta) = \sin\theta$ en el intervalo $\left[-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{6}\right]$

   d) $f(x) = \dfrac{x^{5/3}}{2+x}$ en el intervalo $[-1, 8]$

   e) $f(\theta) = \cos\theta$ en el intervalo $[0, 8\pi]$

   f) $f(x) = \sqrt{9-x^2}$ en el intervalo $[-3, 3]$

Referencias

[1] Lizarazo, J. (2012). *Aplicaciones de la Derivada (s)-Cartilla.* Bogotá, Colombia: Institución universitaria politécnico grancolombiano- Educación Virtual.

[2] Purcell, E.; Varberg, D. & Rigdon, S.. (2009).*Cálculo.* Novena Edición. México, México. Pearson Prentice Hall.

[3] Grupo de Modelamiento Matemático. (2017).Facultad de Ingeniería y Ciencias básicas Institución Universitaria Politécnico Grancolombiano.

INFORMACIÓN TÉCNICA

Módulo: Cálculo I
Unidad 4: Aplicaciones de las derivadas
Escenario 7: Aplicaciones de las derivadas - primera parte

Autor: Luisa Fernanda Martínez Rojas

Asesor Pedagógico: Diana Marcela Díaz Salcedo
Diseñador Gráfico: Kevin Mauricio Ramírez Correa
Corrector de estilo:
Asistente: Leidy Alejandra Morales