POLI POLITÉCNICO GRANCOLOMBIANO INSTITUCIÓN UNIVERSITARIA

FACULTAD DE INGENIERÍA, DISEÑO E INNOVACIÓN

Unidad 1 / Escenario 2

Lectura Fundamental

Los sistemas de ecuaciones lineales Estudiando lo desconocido

Contenido

1. Palabras claves

Sistemas de ecuaciones lineales, tipos de solución sistemas de ecuaciones.

2. Preguntas introductorias

Al finalizar la sección Representar adecuadamente información, de la lectura fundamental del escenario 1, se mencionó que el paso a seguir al establecer relaciones e igualdades entre matrices con valores desconocidos, consiste en determinar un proceso que permita encontrar dichos valores, para con esto presentar opciones o alternativas que satisfagan las condiciones dadas en la situación. De acuerdo con esto, si se retoma el sistema de ecuaciones que modela el contexto tratado, el cual indaga sobre los días que podrían quedarse los interesados en cada ciudad, según las condiciones dadas en la tabla 5 del escenario 1, el sistema a resolver sería:

$$
\begin{aligned}
80000x + 50000y + 70000z &= 540000 \\
76000x + 45000y + 63000z &= 494000 \\
72000x + 38000y + 56000z &= 444000
\end{aligned}
$$

con x, y y z el número de noches que se hospedarían en Santa Marta, Barranquilla y Cartagena, respectivamente. A partir de ese sistema de ecuaciones lineales surgen interrogantes como los siguientes:

1. ¿Qué significa resolver un sistema de ecuaciones lineales?.
2. ¿Qué procesos existen para resolver sistemas de ecuaciones lineales?
3. ¿Qué resultados se pueden obtener al resolver un sistema de ecuaciones lineales?
4. ¿Existe alguna herramienta o proceso que permita predecir de forma eficiente, el tipo de solución que tienen un sistema de ecuaciones lineales?

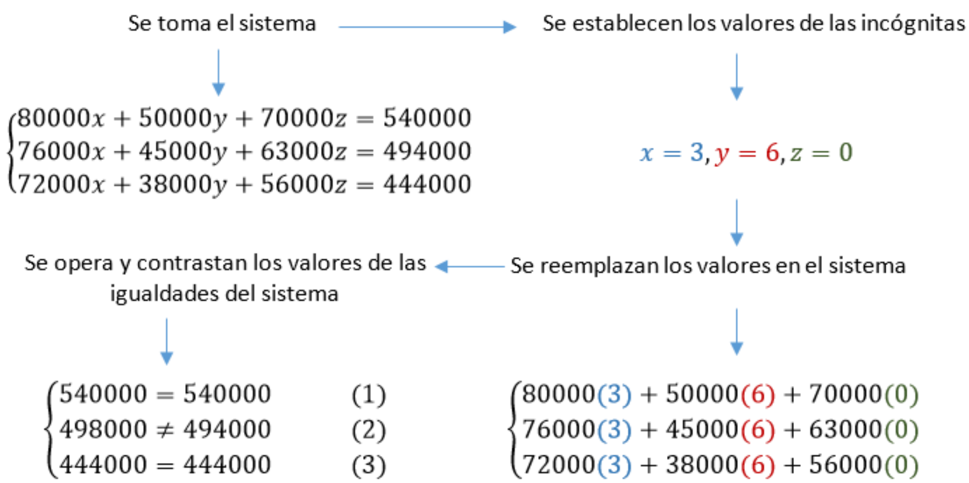
Y son los temas que se abordarán en este escenario además de la interpretación de los resultados de acuerdo al contexto presentado.

3. Cumplir condiciones establecidas

Ante una situación condicionada es necesario reconocer qué significa el cumplimiento de las condiciones establecidas y en el caso de contextos representados por relaciones e igualdades entre matrices con datos desconocidos, esto se refiere a comprender qué significa resolver un sistema de ecuaciones lineales. Para comprender mejor lo anterior, si se analiza el sistema de ecuaciones que representa el contexto del viaje, resolverlo consiste en hallar el número de días que satisface cada igualdad y esto básicamente se logra cuando al reemplazar cada incógnita por un valor determinado, la suma es exactamente la que allí se indica. Matemáticamente esto consiste en lo siguiente.

Solución de un sistema de ecuaciones lineales. Una solución de un sistema de m ecuaciones con n incógnitas es el conjunto formado por n valores reales $c_1, c_2, \ldots, c_n$ tales que al sustituirlos por las incógnitas $x_1, x_2, \ldots, x_n$, respectivamente, satisface la igualdad en cada una de las ecuaciones del sistema.

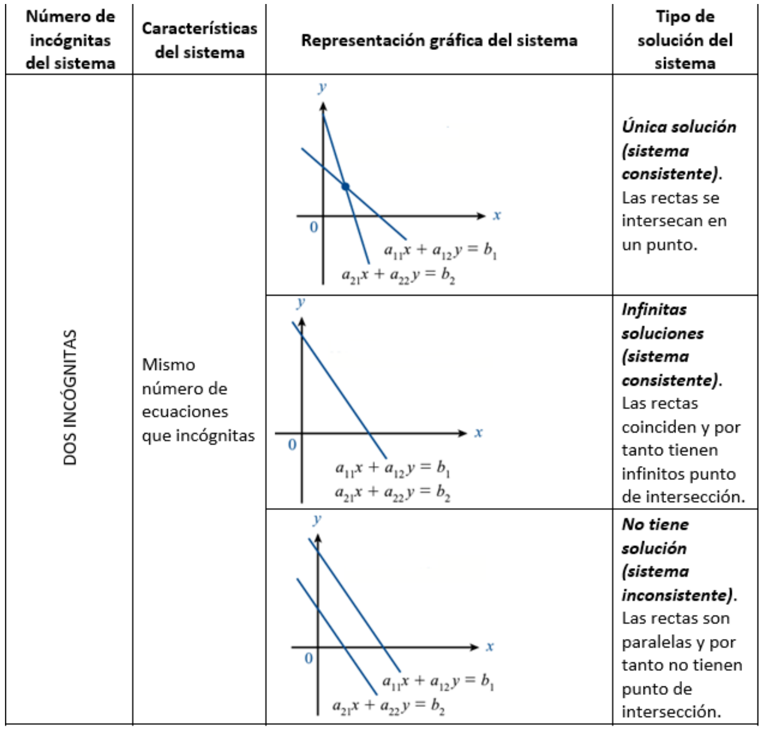
Si se aplica lo anterior al sistema del contexto y se considera la opción de estadía 3 noches en Santa Marta, 6 en Barranquilla y ninguna en Cartagena, la pregunta sería si esta propuesta satisface las condiciones dadas por las personas a través del sistema, lo cual corresponde a asignar los valores, 3, 6 y 0 a las incógnitas así: $x = 3, y = 6$ y $z = 0$. La idea es entonces comprobar si esa terna de números es una solución del sistema, es decir si al reemplazan esos valores de en las tres ecuaciones las igualdades se cumplen. Observe:



Nótese que las igualdades (1) y (3) se cumplen, pero no la (2) por lo que la terna de números dada no es una solución del sistema de ecuaciones.

Bajo esta idea de buscar una terna que resuelva el sistema, surge la pregunta: ¿será que existe esa terna?, es decir, ¿se puede garantizar que siempre habrán valores que satisfagan las condiciones?, porque en la vida real esto no siempre sucede y en multiples ocasiones no es posible adquirir una travesía de viaje con el dinero que se cuenta, entonces, ¿qué tipos de soluciones se pueden presentar en una situación problema representada a través de sistemas de ecuaciones lineales? Para visualizar la respuesta a esta pregunta, a continuación se expondrá la interpretación gráfica de la solución de un sistema de ecuaciones lineales, con la cual es posible comprender qué puede suceder al resolver un sistema.

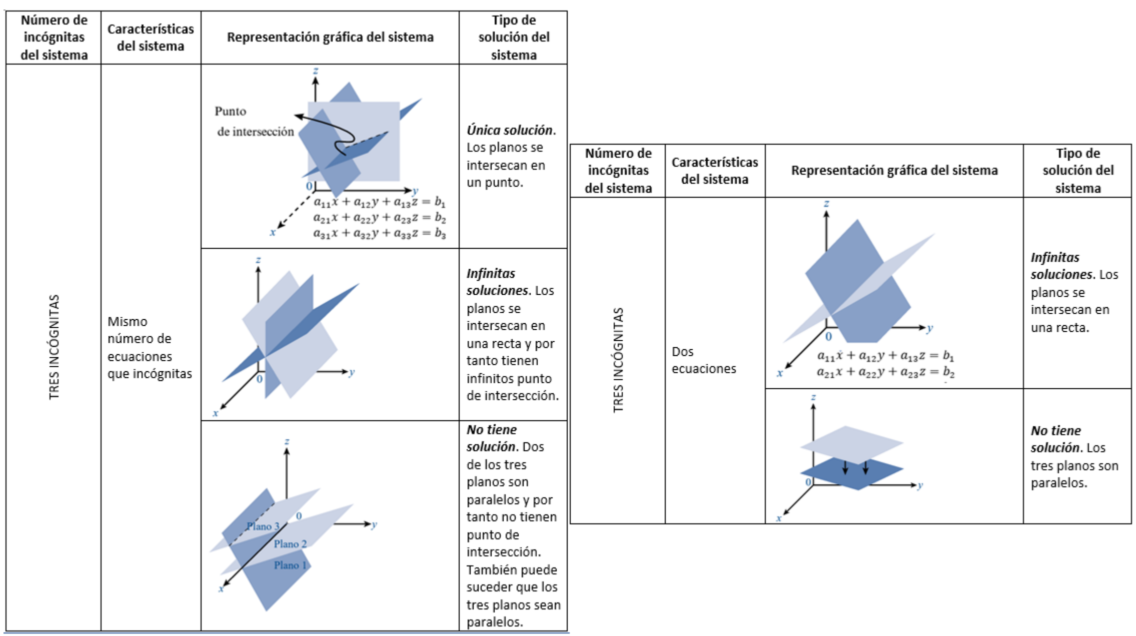
Para el caso de ecuaciones lineales con dos y tres incógnitas es posible hacer una representación gráfica para reconocer el tipo de solución que tendría el sistema obsérvelas a partir de lo presentado en las figuras 1 y 2.



Número de incógnitas del sistema	Características del sistema	Representación gráfica del sistema	Tipo de solución del sistema
DOS INCÓGNITAS	Mismo número de ecuaciones que incógnitas	$a_{11}x + a_{12}y = b_1$ $a_{21}x + a_{22}y = b_2$	***Única solución (sistema consistente).*** Las rectas se intersecan en un punto.
		$a_{11}x + a_{12}y = b_1$ $a_{21}x + a_{22}y = b_2$	***Infinitas soluciones (sistema consistente).*** Las rectas coinciden y por tanto tienen infinitos punto de intersección.
		$a_{11}x + a_{12}y = b_1$ $a_{21}x + a_{22}y = b_2$	***No tiene solución (sistema inconsistente).*** Las rectas son paralelas y por tanto no tienen punto de intersección.

Figura 1: **Características y representación gráfica de los sistemas de ecuaciones con dos incógnitas**. Las imágenes fueron tomadas de Grossman, S. (2008). pp 3, 19-20.

Fuente: Elaboración propia



Número de incógnitas del sistema	Características del sistema	Representación gráfica del sistema	Tipo de solución del sistema
TRES INCÓGNITAS	Mismo número de ecuaciones que incógnitas	Punto de intersección $a_{11}x + a_{12}y + a_{13}z = b_1$ $a_{21}x + a_{22}y + a_{23}z = b_2$ $a_{31}x + a_{32}y + a_{33}z = b_3$	***Única solución.*** Los planos se intersecan en un punto.
			Infinitas soluciones. Los planos se intersecan en una recta y por tanto tienen infinitos punto de intersección.
		Plano 3 Plano 2 Plano 1	***No tiene solución.*** Dos de los tres planos son paralelos y por tanto no tienen punto de intersección. También puede suceder que los tres planos sean paralelos.

Número de incógnitas del sistema	Características del sistema	Representación gráfica del sistema	Tipo de solución del sistema
TRES INCÓGNITAS	Dos ecuaciones	$a_{11}x + a_{12}y + a_{13}z = b_1$ $a_{21}x + a_{22}y + a_{23}z = b_2$	***Infinitas soluciones.*** Los planos se intersecan en una recta.
			No tiene solución. Los tres planos son paralelos.

Figura 2: **Características y representación gráfica de los sistemas de ecuaciones con tres incógnitas**.Las imágenes fueron tomadas de Grossman, S. (2008). pp 3, 19-20.

Fuente: Elaboración propia

Ahora que se identifica el significado de resolver un sistema de ecuaciones lineales y el tipo de solución que puede tener, falta hallar los valores lo resuelven y aunque se podría usar el método de ensayo y error, este resulta ser poco eficiente por estar sujeto al azar. Debido a esto se deben establecer métodos para resolverlos y es lo que se haría en la siguiente sección.

4. Establecer procesos para resolver problemas con condiciones.

Para resolver sistemas de ecuaciones lineales existen métodos como los de eliminación, sustitución, igualación, Gauss, Gauss-Jordan, entre otros, los cuales son expuestos en varios textos de Álgebra lineal. A continuación se presenta un método que posee ventajas de tipo predictivo respecto a los demás y permite determinar si existe o no solución de forma práctica. Todo sistema de ecuaciones lineales, a partir de su representación matricial, se puede expresar algebraicamente como $AX = B$, donde A es la matriz que contiene los coeficientes del sistema, X es la matriz con las incógnitas del mismo y B es la matriz de térrminos independientes. Para caso particular de la situación, se expone a continuación.

Sistema de ecuaciones →

$$\begin{cases} 80000x + 50000y + 70000z = 540000 \\ 76000x + 45000y + 63000z = 494000 \\ 72000x + 38000y + 56000z = 444000 \end{cases}$$

Representación matricial →

$$\begin{pmatrix} 80000 & 50000 & 70000 \\ 76000 & 45000 & 63000 \\ 72000 & 38000 & 56000 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 540000 \\ 494000 \\ 444000 \end{pmatrix}$$

Representación algebraica de la representación matricial →

$$AX = B$$

Visto de esta forma, resolver el sistema consistirá en hallar los valores de la matriz X.
Con la expresión algebraica del sistema $AX = B$, surge el interrogante de si existe un proceso para resolverlo similar al que se usaba en ecuaciones lineales de una incógnita (que consistirá en despejar el valor de la misma empleando operaciones inversas), y aunque la respuesta es afirmativa, tiene algunas variantes porque los factores y términos de la ecuación corresponden a matrices y en ellas no está definida la operación de división.

Ten presente que. . .
La división entre matrices no está definida pero hay una correspondencia de ésta con el recíproco o inverso de la multiplicación en los números reales, el cual permite a través de la multiplicación hacer el proceso de despeje que se pretende. El recíproco o inverso de un número real $a \neq 0$ se expresa como $a^(- 1)$ y cumple la propiedad de que $a \cdot a^{-1} = a^{-1} \cdot a = 1$, y si se analiza esta idea en el conjunto de las matrices, vale la pena preguntarse si dada una matriz A existe otra matriz denotada A^{-1}, que cumpla que $A \cdot A^{-1} = A^{-1} \cdot A = I$, siendo I una matriz que hace las veces del elemento neutro para la multiplicación de matrices. A este respecto la teoría del álgebra lineal expone lo siguiente.

Matriz identidad. Es una matriz cuadrada que hace las veces del elemento neutro para la multiplicación, se denota como I_n, donde n indica el tamaño de la misma y satisface que para toda matriz cuadrada C_n : $I_nC_n = C_nI_n = C_n$.

Matriz inversa. Es una matriz cuadrada de orden n, con $n \in N$, denotada con una letra mayúscula con superíndice -1, que satisface que al multiplicarla por otra matriz del mismo tamaño, da como resultado la matriz identidad. Esto es, sea $A_{n\times n}$ su inversa A^{-1}, satisface que $A^{-1}A = AA^{-1} = I$.
Si A^{-1} existe se dice que A es invertible o no singular y en caso contrario se dice que no es invertible o singular.

De acuerdo con lo anterior, si se supone que A posee inversa, al resolver la ecuación algebraica que representa el sistema de ecuaciones lineales, se obtendría lo siguiente.

$$\begin{array}{cc} AX = B & \\ A^{-1}AX = A^{-1}B & \text{Multiplicando por } A^{-1} \text{ en ambos lados} \\ (A^{-1}A)X = A^{-1}B & \text{Propiedad asociativa de la multiplicación} \\ IX = A^{-1}B & \text{Definición de matriz inversa} \\ X = A^{-1}B & \text{Propiedad modulativa de la multiplicación} \end{array}$$

De lo cual se concluye que la solución del sistema de ecuaciones sería el producto de $A^{-1}B$.

Aplicando lo anterior al sistema dado, si existe y se logra encontrar A^{-1} la solución, al escribirla de la forma $X = A^{-1}B$, sería:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 80000 & 50000 & 70000 \\ 76000 & 45000 & 63000 \\ 72000 & 38000 & 56000 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 540000 \\ 494000 \\ 444000 \end{pmatrix}$$

Para lo cual habría que hallarse la matriz inversa de la matriz de coeficientes A; a continuación se expone el método de Gauss-Jordan que es un proceso que permite hallarla.
Paso 1. Escribir la matriz aumentada $(A|I)$, compuesta por la matriz de coeficientes A y la matriz identidad, I_3

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 80000 & 50000 & 70000 & 1 & 0 & 0 \\ 76000 & 45000 & 63000 & 0 & 1 & 0 \\ 72000 & 38000 & 56000 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

Esta representación se puede hacer más sencilla si antes de formar la matriz aumentada, se multiplica la matriz A por el escalar $\dfrac{1}{1000}$. Esta estrategia mantendrá los mismos resultados que si no se hiciera la multiplicación, pero reduce significativamente los cálculos (esta es una razón fuerte para aprender las propiedades y reconocer muy bien cuándo se puede aprovechar y usar una operación para simplificar y reducir procesos).

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 80 & 50 & 70 & 1 & 0 & 0 \\ 76 & 45 & 63 & 0 & 1 & 0 \\ 72 & 38 & 56 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

Paso 2. Realizar operaciones elementales entre filas para transformar la matriz aumentada a la forma reducida $(I|D)$, donde I es la matriz identidad y D es una matriz nueva que resulta al hacer las operaciones elementales. Las operaciones elementales definidas entre filas son:

I. Intercambiar dos filas, que se denota como $F_i \leftrightarrow F_j$.

II. Multiplicar todos los elementos de una fila por una constante diferente de cero. Esto se denota kF_i, donde k es la constante y F_i es la fila que se multiplica.

III. Adicionar o sustraer una fila con un múltiplo escalar de otra. Simbólicamente esto se escribe como $F_i + kF_j \rightarrow F_i$ o F_j. La flecha indica en qué fila se registrará el resultado.

¿Sabías qué...?

Si una matriz A se puede transformar en una matriz B mediante operaciones entre filas, entonces se dice que A y B son equivalentes por filas o renglones.
Por ejemplo, toda matriz es equivalente a su forma escalonada o a su forma escalonada reducida.
En el caso de la matriz aumentada $(A|B)$ asociada al sistema $AX = B$, si se transforma en una matriz escalonada o escalonada reducida, por ser equivalentes, los sistemas que representan tiene la misma solución.

Hay que tener presente que la idea es que en la matriz A, en la matriz aumentada, se transforme por medio de operaciones en una matriz identidad, mientras la matriz identidad se transformará en una nueva matriz D. A continuación se expone un ejemplo de cómo se aplican las operaciones elementales para anular el elemento a_{31} de la matriz A, en la matriz aumentada.

A la siguiente matriz:

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 80 & 50 & 70 & 1 & 0 & 0 \\ 76 & 45 & 63 & 0 & 1 & 0 \\ 72 & 38 & 56 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

Le aplicamos las operaciones elementales $9F_1$, $10F_3$ y $9F_1 - 10F_3$, obteniendo

$$\begin{array}{c|cccccc} 9F_1 & 720 & 450 & 630 & 9 & 0 & 0 \\ 10F_3 & 720 & 380 & 560 & 0 & 0 & 10 \\ \hline 9F_1 - 10F_3 & 0 & 70 & 70 & 9 & 0 & \text{-10} \end{array} \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 80 & 50 & 70 & 1 & 0 & 0 \\ 76 & 45 & 63 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 70 & 70 & 9 & 0 & -10 \end{array}\right)$$

Observe en la tabla 2 las demás operaciones elementales que se deben hacer para lograr la transformación indicada, analícelas. (Se sugiere tomar una libreta y reproducir las operaciones para comprender mejor lo expuesto en la tabla.

Operación entre filas	**Matriz resultante**
$19F_1 - 20F2 \to F_2$	$\left(\begin{array}{ccc\|ccc} 80 & 50 & 70 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 50 & 70 & 19 & -20 & 0 \\ 0 & 70 & 70 & 9 & 0 & -10 \end{array}\right)$
$7F_2 - 5F_3 \to F_3$	$\left(\begin{array}{ccc\|ccc} 80 & 50 & 70 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 50 & 70 & 19 & -20 & 0 \\ 0 & 0 & 140 & 88 & -140 & 50 \end{array}\right)$
$F_1 - F_2 \to F_1$; $2F_2 - F_3 \to F_2$	$\left(\begin{array}{ccc\|ccc} 80 & 0 & 0 & -18 & 20 & 0 \\ 0 & 100 & 0 & -50 & 100 & -50 \\ 0 & 0 & 140 & 88 & -140 & 50 \end{array}\right)$
$\dfrac{F_1}{80} \to F_1$; $\dfrac{F_2}{100} \to F_2$; $\dfrac{F_3}{140} \to F_3$	$\left(\begin{array}{ccc\|ccc} 1 & 0 & 0 & -\dfrac{18}{80} & \dfrac{20}{80} & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -\dfrac{50}{100} & \dfrac{100}{100} & -\dfrac{50}{100} \\ 0 & 0 & 1 & \dfrac{88}{100} & -\dfrac{140}{140} & \dfrac{50}{140} \end{array}\right)$
Simplificando	$\left(\begin{array}{ccc\|ccc} 1 & 0 & 0 & -\dfrac{9}{40} & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -\dfrac{1}{1} & 1 & -\dfrac{1}{2} \\ 0 & 0 & 1 & \dfrac{22}{35} & -1 & \dfrac{5}{14} \end{array}\right)$

Debido a que fue posible obtener la matriz identidad en la parte izquierda, la matriz de la derecha es la matriz inversa de A. Esto es:

$$\begin{pmatrix} -\dfrac{9}{40} & 1 & 0 \\ -\dfrac{1}{1} & 1 & -\dfrac{1}{2} \\ \dfrac{22}{35} & -1 & \dfrac{5}{14} \end{pmatrix}$$

¿Sabías qué. . . ?

Hay otro método para hallar la inversa de una matriz. ¡Conócelo!

Matriz inversa por medio de la matriz adjunta

$$A^{-1} = \frac{1}{|A|} Adj(A)$$

Donde:
$|A|$, es la notación usada para nombrar el determinante de A. La explicación de cómo calcular este valor se ubica en la siguiente sección pero puede consultarla en la lectura complementaria 1.
$Adj(A)$, es la notación para indicar la matriz adjunta de A. Esta matriz es la transpuesta de una matriz conocida como la matriz de cofactores.
En la sección 2.4 de la lectura complementaria se encuentra la descripción y los ejemplos de cómo hallar la matriz adjunta de una matriz. ¡Estúdiala!
El proceso para hallar la matriz inversa puede requerir de comprobación y existen herramientas matemáticas como software gratuito y no gratuito que lo permiten. Uno de esos software se ubica en el enlace www.wolframalpha.com; allí al ingresar el código invert matrix $\{\{80, 50, 70\}\{76, 45, 63\}, \{72, 38, 56\}\}$ se puede comprobar que la matriz A^{-1} del contexto es la obtenida y puede ser un apoyo para garantizar que los procesos fueron bien elaborados.

Teniendo la matriz inversa de A, basta hallar el producto A^{-1} B para solucionar el sistema. Al hacerlo se obtiene que:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{9}{40} & 1 & 0 \\ -\frac{1}{1} & 1 & -\frac{1}{2} \\ \frac{22}{35} & -1 & \frac{5}{14} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 540 \\ 494 \\ 444 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix}$$

¿Sabías qué...?

También se pueden usar los siguientes métodos para resolver sistemas de ecuaciones.

Eliminación	Gauss	Regla de Cramer
Consiste en reducir el sistema de ecuaciones en un nuevo sistema de manera que se obtenga una ecuación con el menor número posible de incógnitas	Se construye una matriz aumentada conformada por la matriz de coeficientes y la matriz columna de términos independientes.	Implica el cálculo de determinantes.
El proceso se realiza multiplicando una o varias ecuaciones por un escalar de modo que los coeficientes de alguna de las incógnitas pueda ser eliminada al sumar dos ecuaciones.	Se transforma la matriz aumentada en una matriz escalonada a partir de operaciones entre filas de la matriz aumentada.	Se calcula el determinante de la matriz de coeficientes A, $\|A\|$. Si $\|A\| \neq 0$. Se continua el proceso.
	Cuando la matriz aumentada se transforma en escalonada reducida, se dice que es el método de Gauss Jordan.	En la matriz $\|A\|$ se cambia la columna de los coeficientes x_i por la de los términos independientes, obteniendo una nueva matriz $\|A_i\|$.
		El Valor de cada variable x_i, se determina por medio del cociente $x_i = \dfrac{\|A_i\|}{\|A\|}$

En la lectura complementaria 1 se encuentra una descripción más detallada del método de Gauss, Gauss-Jordan y el método de la Regla de Cramer.

5. Interpretar los resultados obtenidos al resolver problemas con condiciones

Como se vio en la sección Cumplir condiciones establecidas, al resolver un sistema de ecuaciones lineales se puede presentar alguna de las tres situaciones siguientes.

- El sistema tiene única solución. Se obtiene un único valor para cada una de las incógnitas.
- El sistema tiene infinitas soluciones. Cuando existen infinitos valores que satisfacen las condiciones del sistema de ecuaciones.
- El sistema tiene no tiene solución (inconsistente). No existen valores que satisfagan el sistema de ecuaciones.

A continuación se explicarán estos casos para identificar cuándo pueden aparecer.

Sistema con única solución. Estos sistemas se presentan cuando la información dada es suficiente para determinar un único valor para cada una de las incógnitas del sistema. El sistema resuelto en la sección anterior es un ejemplo de un sistema de ecuaciones lineales con única solución, dado que para cada incógnita se halló un solo valor numérico.

Sistema con infinitas soluciones. Estos sistemas se presentan cuando la información dada es incompleta o vaga en ciertos aspectos y plantear el sistema de ecuaciones que la representa, se llega a un sistema con más incógnitas que ecuaciones, obteniendo variables libres.

Por ejemplo, ¿qué pasaría y cómo quedaría el sistema si no se cuenta con la información de los costos de hospedaje para la acomodación de cinco personas? Para este caso se tendría que el sistema estaría conformado por dos ecuaciones con tres incógnitas:

$$\begin{gathered} 80000x + 50000y + 70000z = 540000. \\ 76000x + 45000y + 63000z = 494000 \end{gathered}$$

que en forma matricial se representaría así:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 80000 & 50000 & 70000 & 540000 \\ 76000 & 45000 & 63000 & 494000 \end{array}\right)$$

Aquí como la matriz de coeficientes no es cuadrada, no es posible determinar su inversa, por lo cual habría que emplear otro de los métodos mencionados, note cómo se emplea el método de Gauss que revisó en la lectura completaría mencionada y consiste en transformar la matriz aumentada en una matriz escalonada.

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 80000 & 50000 & 70000 & 540000 \\ 76000 & 45000 & 63000 & 494000 \end{array}\right)$$

$$19F1 - 20F_2 \to F_2 \Rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & \frac{5}{8} & \frac{7}{8} & \frac{54}{8} \\ \\ 0 & 1 & \frac{7}{5} & \frac{38}{5} \end{array}\right)$$

De acuerdo con esto, el sistema de ecuaciones asociado a la matriz reducida es:

$$x + \frac{5}{8}y + \frac{7}{8}z = \frac{54}{8}$$

$$y + \frac{7}{5}z + = \frac{38}{5}$$

Y en él, al intentar despejar cada incógnita se observa que siempre una depende de las otras, por lo que se afirma que el sistema tiene infinitas soluciones. Esto se aprecia a continuación.

Al despejar y en la segunda ecuación se tiene:

$$y = \frac{38}{5} - \frac{7}{5}z = \frac{38 - 7z}{5}$$

Y al reemplazar este resultado en la primera ecuación para despejar a x o a z se obtiene:

$$x + \frac{5}{8}y + \frac{7}{8}z = \frac{54}{8}$$

$$x + \frac{5}{8}\left(\frac{38}{5} - \frac{7}{5}z\right) + \frac{7}{8}z = \frac{54}{8}$$

$$x + \frac{38}{8} - \frac{7}{8}z + \frac{7}{8}z = \frac{54}{8}$$

$$x + \frac{38}{8} = \frac{54}{8}$$

$$x = \frac{54}{8} - \frac{38}{8}$$

$$x = 2$$

Con lo cual la solución del sistema es:

$$\begin{pmatrix} x \\ \\ y \\ \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ \\ \frac{38}{8} - \frac{7}{5}z \\ \\ z \end{pmatrix}$$

Luego para cada valor que se dé a la incógnita z habrá una solución para el sistema y como z es un número natural, por representar las noches de estadía en una ciudad, existen infinitos valores que se le pueden asignar, así que el sistema tendrá infinitas soluciones y cualquiera de ellas podrá ser considerada por los interesados en el viaje.

Adicional a lo anterior, haya que reconocer que z solo puede tomar valores positivos mayores que cero y menores que cinco para que la variable y no tome valores negativos (porque también representan noches de estadía). De acuerdo con esto, la solución del contexto se expresaría así:

$$x = \frac{54 - (5y + 7z)}{8}; y = \frac{38 - 7z}{5}; z = k \text{ donde } k \in N \text{ y } 0 \leq k \leq 5$$

Para casos como el anterior a la incógnita a la que se le pueden asignar infinitos valores se le denomina **variable libre**.

Sistema inconsistente. Estos sistemas se pueden presentan cuando la información dada es incompleta o vaga en ciertos aspectos, por ejemplo, ¿qué pasaría si no se cuenta con los costos de hospedaje para la ciudad de Cartagena? En este caso el sistema de ecuaciones queda determinado como

$$\begin{aligned} 80000x + 50000y &= 540000 \\ 76000x + 45000y &= 494000 \\ 72000x + 38000y &= 444000 \end{aligned}$$

Cuya matriz es $\left(\begin{array}{cc|c} 80000 & 50000 & 540000 \\ 76000 & 45000 & 494000 \\ 72000 & 38000 & 444000 \end{array}\right)$, que al transformarla en su forma escalonada reducida por el método de Gauss se obtiene:

$$\left(\begin{array}{cc|c} 80 & 50 & 540 \\ 76 & 45 & 494 \\ 72 & 38 & 444 \end{array}\right) \begin{array}{c} 9F_1 - 10F_3 \to F_3 \\ 19F_1 - 20F_2 \to F_2 \end{array} \Rightarrow \left(\begin{array}{cc|c} 80 & 50 & 540 \\ 0 & 50 & 380 \\ 0 & 0 & -80 \end{array}\right) F_1 - F_2 \to F_1 \Rightarrow \left(\begin{array}{cc|c} 80 & 0 & 160 \\ 0 & 50 & 380 \\ 0 & 0 & -80 \end{array}\right)$$

$$\begin{array}{c} 2F_3 + F_1 \to F_1 \\ 19F_3 + 4F_2 \to F_2 \end{array} \Rightarrow \left(\begin{array}{cc|c} 80 & 0 & 0 \\ 0 & 200 & 0 \\ 0 & 0 & -80 \end{array}\right) \frac{F_1}{80} \to F_1; \frac{F_2}{200} \to F_2; -\frac{F_3}{80} \to F_3 \Rightarrow \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

Dando como resultado la matriz escalonada reducida:

$$\left(\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

Tenga en cuenta que la primera columna representa los coeficientes de la variable x, la segunda los coeficientes de la variable y y la tercera, los valores independientes por lo que el sistema de ecuaciones asociado quedaría escrito así:

$$\begin{array}{c} x + 0 = 0 \\ 0 + y = 0 \\ 0 + 0 = 1 \end{array}$$

Y como la tercera igualdad es falsa puesto que $0 \neq 1$, el sistema resulta ser inconsistente, lo cual se interpreta como que no posible establecer el número de noches de hospedaje para la ciudad de Santa Marta y Barranquilla con las condiciones establecidas por los interesados.

Nótese que en este caso, el sistema de ecuaciones lineales tenía más ecuaciones que incógnitas por lo que la matriz de coeficientes no era cuadrada, este tipo de sistemas de ecuaciones lineales se les llama sobredeterminados y pueden ser consistentes (el sistema tiene almenos una solución) o inconsistentes (el sistema no tiene solución).

Con lo descrito anteriormente se pueden presentar los tres tipos de casos que se mencionaron en la sección cumplir condiciones establecidas, estos son:

I. Un sistema con igual número de ecuaciones que incógnitas.

II. Un sistema en el que el número de ecuaciones es mayor que el número de incógnitas.

III. Un sistema en el que el número de ecuaciones es menor que el número de incógnitas.

En el primer caso se puede presentar los tres tipos de solución. En los otros, se puede presentar los casos de infinitas soluciones o sistema inconsistente. Pero en caso de existir solución, ¿será que existe alguna manera sencilla para determinar si el sistema es inconsistente para evitar realizar todo el proceso de solución y concluir cuando no hay solución? La respuesta es ¡sï! y el proceso que lo permite es el cálculo del determinante de la matriz de coeficientes del sistema.

Determinante de una matriz. Función que asigna un número real a una matriz cuadrada A_n.

Se denota como $det(A)$ o $|A|$.

La importancia de este valor en el estudio de un sistema de ecuaciones es la siguiente:

- Si $det(A) \neq 0$, entonces A^{-1} existe
- El sistema de ecuaciones $AX = B$ tiene única solución si $det(A) \neq 0$
- Si $|A| \neq 0$ la solución del sistema homogéneo $AX = 0$ es la solución trivial $(X = 0)$

Cabe mencionar que si $|A| = 0$ lo único que se puede decir del sistema de ecuaciones $AX = B$ es que puede tener infinitas soluciones o no tiene solución.

El cálculo manual del determinante de una matriz de tamaño 2 $times$2 o 3×3 resulta sencillo, pero en el de matrices de mayor tamaño, el número de operaciones aumenta significativamente, por lo que se recomienda usar herramientas tecnológicas como las mencionadas en la sección anterior. A continuación se presenta el proceso para el cálculo manual de matrices 2×2 y 3×3.

Proceso	Ejemplo
Matriz 2×2. Sea $A_2 = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$, $\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = ad - cb$ o $Det(A) = ad - cb$	• $A = \begin{pmatrix} -2 & 5 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$, $Det(A) = -2(1) - 3(5) = -17$ • $B = \begin{pmatrix} 4 & 6 \\ -7 & 1 \end{pmatrix}$, $\lvert B \rvert = 4(1) - [-7(6)] = 46$
Matriz 3×3. Sea $A_3 = \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ h & g & i \end{pmatrix}$, $\begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix} = (aei + bfg + dhc) - (ceg + bdi + fha)$	• $D = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 3 \\ 4 & 0 & 9 \\ -5 & 6 & 7 \end{pmatrix}$ $\begin{vmatrix} -1 & 2 & 3 \\ 4 & 0 & 9 \\ -5 & 6 & 7 \end{vmatrix} =$ -1(0)(7)+2(9)(-5)+3(4)(6)-[3(0)(-5)+(-1)(9)(6)+2(4)(7)]=-20 $\begin{matrix} -1 & 2 & 3 & -1 & 2 \\ 4 & 0 & 9 & 4 & 0 \\ -5 & 6 & 7 & -5 & 6 \end{matrix}$

Si desea conocer el proceso para el cálculo del determinante de matrices de tamaños superiores y las propiedades de los determinantes, puede consultar la lectura complementaria 1. Para reforzar, intente hallar el determinante de la matriz A del contexto y verifique con el resultado si se cumplía la existencia de una solución.

¿Cómo mejorar?

En la infografía que se encuentra en el material de apoyo, aparece un esquema en el que se presenta el proceso a realizar para determinar el tipo de solución de un sistema de ecuaciones lineales. ¡Revíselo! para mejorar en su proceso de aprendizaje.

Referencias

[1] Grossman,S. (2012). *ï¿½lgebra lineal*. (7a. ed.) McGraw-Hill Interamericana. Tomado de http://www.ebooks7-24.com

INFORMACIÓN TÉCNICA

Módulo: Álgebra Lineal
Unidad 1: Objetos del álgebra lineal y sus relaciones
Escenario 2: Determinando lo desconocido

Autor: Sandra Milena Rojas Tolosa

Asesor Pedagógico: Diana Marcela Diaz Salcedo
Diseñador Gráfico: Kevin Mauricio Ramírez Corredor
Corrector de estilo: Angélica del Pilar Parra
Asistente: Leidy Alejandra Morales