Unidad 4 / Escenario 8

Lectura Fundamental

Cálculo 1

Contenido

Palabras y frases claves: Monotonía, concavidad, optimización, gráficas, criterios.

1. Introducción

Continuando con el estudio de las aplicaciones de la derivada, esta lectura pretende que usted analice y reflexione cómo la derivada permite el trazado de curvas y la optimización de funciones, ésta última es un proceso matemático donde se obtiene un valor mínimo (o máximo) de una función. El proceso de optimización de funciones es importante en nuestra cotidianidad puesto que se usa a diario, por ejemplo, al elegir la ruta de autobus que lo llevará más rápido a su destino o al calcular el tiempo de cocción de varios alimentos, entre otros.

Por tanto lo invito a realizar la lectura cuidadosamente, siguiendo los pasos y preguntándose el ¿por qué? de cada uno de estos y al finalizar realice los ejercicios propuestos para que afiance lo estudiado.

2. Monotonía y concavidad

Continuando con el estudio de las funciones, dos propiedades de estas es la monotonía y la concavidad. Cuando se habla de monotonía se hace referencia a si la función es creciente o decreciente en un intervalo, usted podría pensar en graficar la función para poder precisar visualmente los intervalos donde la función crece o decrece; pero para dibujar dicha función debe hacer una extensa tabla de valores o en el mejor de los casos usar un programa para gráficar, y aún así no puede visualizarla en todo su dominio. Por lo tanto, se definirá primero que significa que la función sea creciente o decreciente en un intervalo:

Definición
Sea f definida en un intervalo I (abierto, cerrado o ninguno de los dos), se dice que:

i. f es **creciente** en I si para toda pareja de números x_1 y x_2 en I,

$$x_1 < x_2 \Longleftarrow f(x_1) < f(x_2)$$

ii. f es **decreciente** en I si para toda pareja de números x_1 y x_2 en I,

$$x_1 < x_2 \Longleftarrow f(x_1) > f(x_2)$$

iii. f es **estrictamente monótona** en I si es creciente en I o es decreciente en I.

Como la primera derivada de una función $f(x)$ es la pendiente de la recta tangente en un punto x, estas pendientes pueden ser positivas o negativas, si $f'(x) > 0$ la recta asciende y si $f'(x) < 0$ la recta desciende, observe la siguiente gráfica:

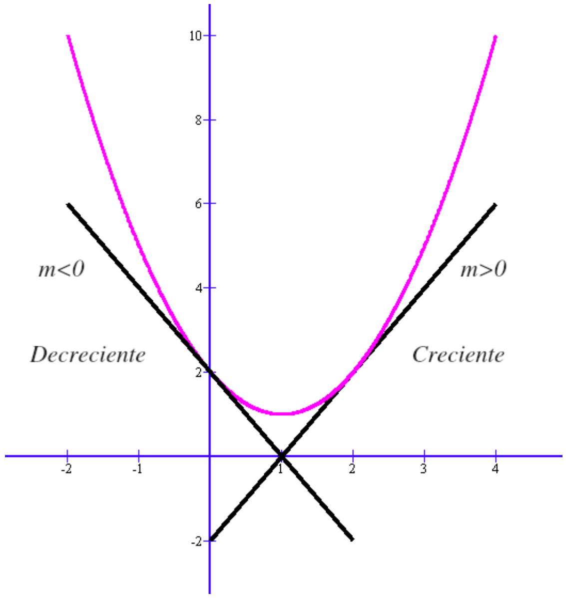

Figura 1: Monotonía

Estas reflexiones sobre el signo de la primera derivada de la función, se enuncian en el siguiente teorema.

Teorema de monotonía
Sea f continua en el intervalo I y derivable en todo punto interior de I.

I. si $f'(x) > 0$ para toda x interior a I, entonces f es creciente en I.

II. si $f'(x) < 0$ para toda x interior a I, entonces f es decreciente en I.

El anterior teorema va a permitir encontrar con precisión los intervalos donde la función es creciente y en donde decreciente, observe el siguiente ejemplo:

Ejemplo 1.

Determine dónde $f(x) = 2x^3 - 9x^2 + 12x$ es creciente y en dónde es decreciente.

Solución

Se iniciará encontrando la derivada de la función

$$f'(x) = 6x^2 - 18x + 12 = 6(x^2 - 3x + 2) = 6(x-2)(x-1)$$

Se necesita saber en dónde

$$(x-2)(x-1) > 0$$

y también en dónde

$$(x-2)(x-1) < 0$$

Por lo tanto, se hace necesario resolver estas desigualdades y analizar los signos sobre la recta numérica de los intervalos determinados por los puntos críticos, que en este caso son $x = 2$ y $x = 1$; los intervalos a considerar son $(-\infty, 1)$, $(1, 2)$ y $(2, \infty)$. Ahora se evaluará la derivada en cualquier punto de cada intervalo y el signo obtenido

Intervalos	$(-\infty, 1)$	$(1, 2)$	$(2, \infty)$
Punto escogido	$x = 0$	$x = \frac{3}{2}$	$x = 3$
Evaluando en $f'(x)$	$f'(0) = 12 > 0$	$f'(\frac{3}{2}) = -\frac{3}{2} < 0$	$f'(3) = 12 > 0$
$f'(x)$ en todo el intervalo	$f'(x) > 0$	$f'(x) < 0$	$f'(x) > 0$
La función	crece	decrece	crece

Tabla 1: Comportamiento de $f'(x)$

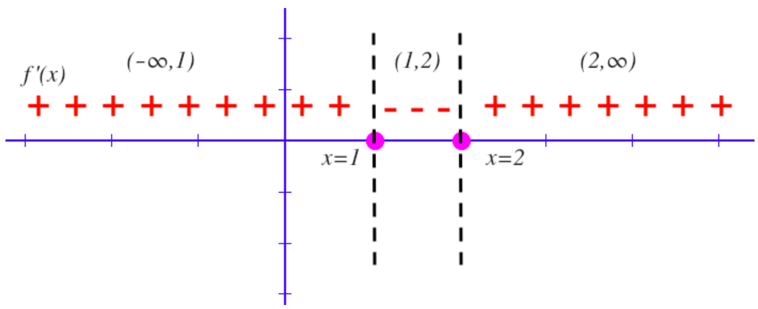

Figura 2: Comportamiento de $f'(x)$

será el de todas las imágenes de la derivada en ese intervalo, observe la siguiente tabla:

Por lo tanto, la función es creciente en $(-\infty, 1) \cup (2, \infty)$ y decreciente en el intervalo $(1, 2)$; por favor verifique estos resultados con la gráfica de la función.

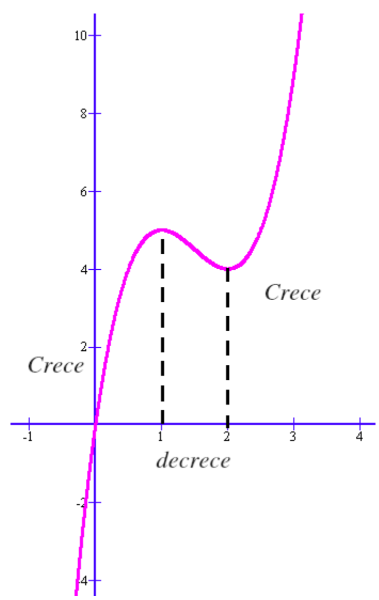

Figura 3: Gráfica $f(x) = 2x^3 - 9x^2 + 12x$

Como se expuso anteriormente, la primera derivada proporciona información sobre el crecimiento y decrecimiento de una función, todavía hay algunas aspectos que hacen falta estudiar con la segunda derivada como lo es la concavidad, por lo tanto, se iniciará con su definición:

Definición
Sea f derivable en un intervalo abierto I, decimos que f (al igual que su gráfica) es **cóncava hacia arriba (cóncava)** en I, si f' es creciente en I; y decimos que f es **cóncava hacia abajo (convexa)** en I, si f' es decreciente en I.

Ilustrando la definición se tiene:

1. Cóncava hacia arriba.

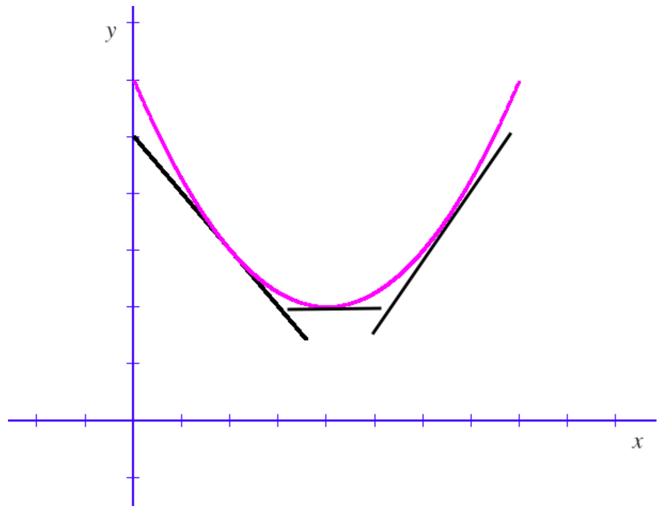

Figura 4: f' creciente: Cóncava hacia arriba

2. Cóncava hacia abajo.

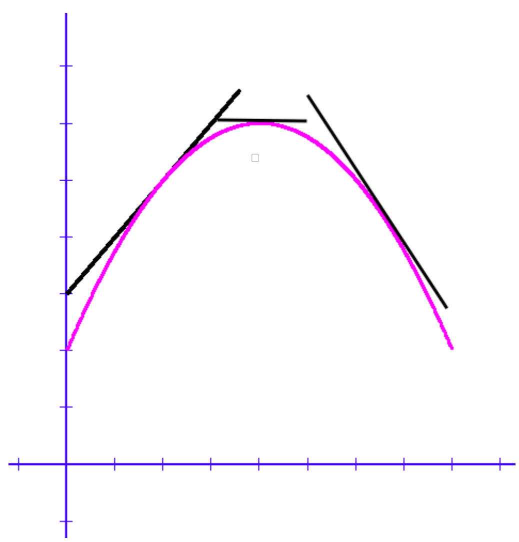

Figura 5: f' decreciente: Cóncava hacia abajo

3. Cóncava hacia arriba y hacia abajo.

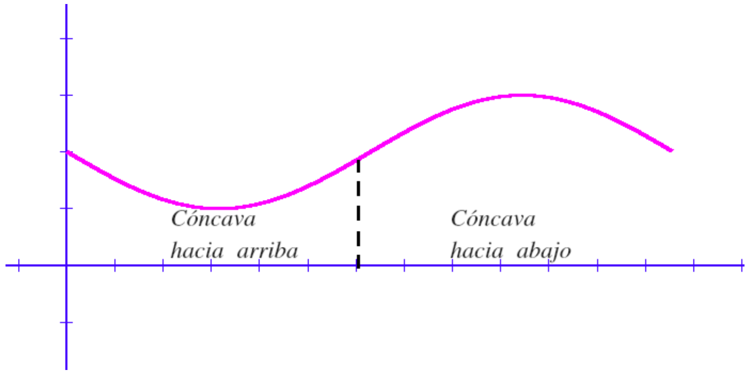

Figura 6: Concavidad

Teniendo en cuenta el teorema de la monotonía, también se tiene un teorema para la concavidad; es decir un criterio que nos permita decidir si la función es cóncava hacia arriba o hacia abajo.

Teorema de concavidad
Sea f dos veces derivable en un intervalo abierto I.

I. Si $f''(x) > 0$ para toda x en I, entonces f es cóncava (hacia arriba) en I.

II. Si $f''(x) < 0$ para toda x en I, entonces f es cóncava hacia abajo (convexa) en I.

Ejemplo 2.

Continuando con el ejemplo 1, dada $f(x) = 2x^3 - 9x^2 + 12x$ determine dónde la función es cóncava hacia arriba y cóncava habia abajo.

Solución

Derivando se tiene

$$f'(x) = 6x^2 - 18x + 12$$

$$f''(x) = 12x - 18$$

Se necesita saber

$$12x - 18 > 0 \qquad y \qquad 12x - 18 < 0$$

Por lo tanto, despejando y simplificando se tiene que $x = \frac{3}{2}$, entonces los intervalos a considerar son $(-\infty, \frac{3}{2})$ y $(\frac{3}{2}, \infty)$, ahora se evaluará la segunda derivada en cualquier punto de cada intervalo y el signo obtenido será el de todas las imágenes de la segunda derivada.

Intervalos	$(-\infty, \frac{3}{2})$	$(\frac{3}{2}, \infty)$
Punto escogido	$x = 0$	$x = 2$
Evaluando en $f''(x)$	$f''(0) = -18 < 0$	$f''(2) = 6 > 0$
$f''(x)$ en todo el intervalo	$f''(x) < 0$	$f''(x) > 0$
La función	Cóncava hacia abajo	Cóncava hacia arriba

Tabla 2: Comportamiento de $f''(x)$

Realizando la gráfica se tiene:

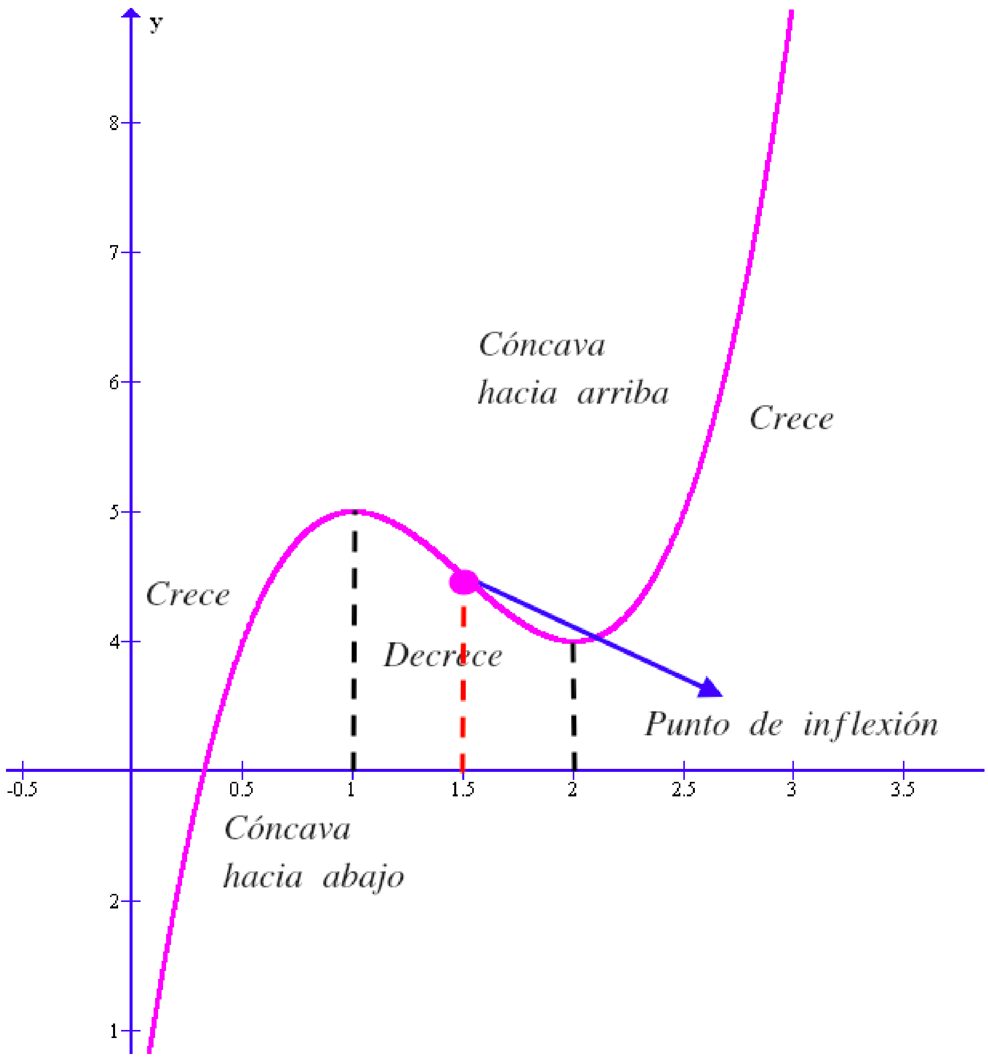

Figura 7: Gráfica de la función $f(x) = 2x^3 - 9x^2 + 12x$

Punto de inflexión
Sea f continua en c, la pareja $(c, f(c))$ se le llama punto de inflexión de la gráfica f, si f es cóncava hacia arriba a un lado de c y cóncava hacia abajo al otro lado de c. (Ver gráfica)

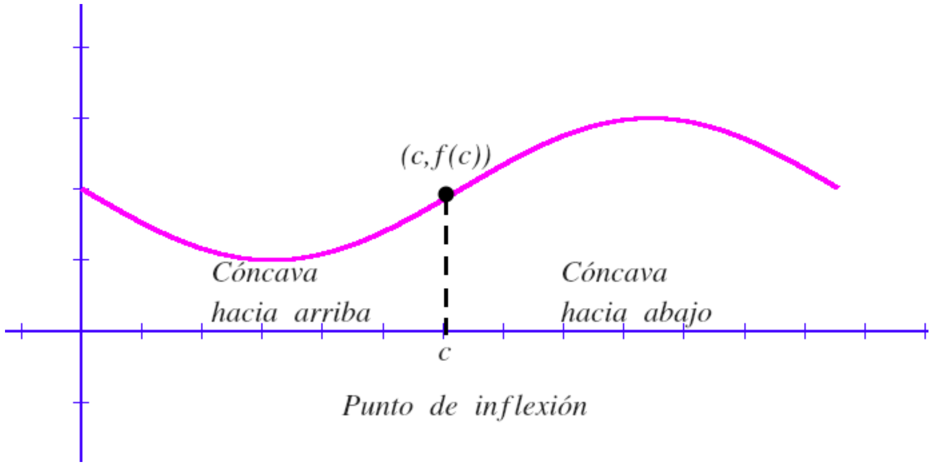

Figura 8: Punto de inflexión

Ejemplo 3.

Determine dónde $f(x) = \dfrac{4x}{x^2+4}$ es creciente, decreciente, cóncava hacia arriba y cóncava hacia abajo

Solución

Se iniciará hallando la primera derivada:

$$f'(x) = \frac{4(x^2+4) - 4x(2x)}{(x^2+4)^2} = \frac{4(4-x^2)}{(x^2+4)^2}$$

Para obtener los puntos críticos se debe analizar la primera derivada, en este caso la derivada siempre existe porque el denominador siempre es diferente de cero, la derivada es cero solo cuando $x = \pm 2$ que hace que el numerador sea cero, por tanto estos son los puntos críticos, realizando la tabla para revisar cómo es el comportamiento de la primera derivada se tiene:

Intervalos	$(-\infty, -2)$	$(-2, 2)$	$(2, \infty)$
Punto escogido	$x = -3$	$x = 0$	$x = 3$
Evaluando en $f'(x)$	$f'(-3) = \frac{-20}{169} < 0$	$f'(0) = 1 > 0$	$f'(3) = \frac{-20}{169} < 0$
$f'(x)$ en todo el intervalo	$f'(x) < 0$	$f'(x) > 0$	$f'(x) < 0$
La función	decrece	crece	decrece

Tabla 3: Comportamiento de $f'(x)$

Por lo tanto:

1. La función f es creciente en el intervalo $(-2, 2)$.
2. La función f es decreciente en los intervalos $(-\infty, 2) \cup (2, \infty)$.

Calculando ahora la segunda derivada para hallar los intervalos de concavidad se tiene:

$$f''(x) = \frac{8x(x^2-12)}{(x^2+4)^3}$$

Para hallar los puntos de inflexión, se tiene que el denominador siempre será mayor que cero, por tanto sólo se debe analizar el numerador y resolver las desigualdades:

$$x(x^2 - 12) > 0 \qquad y \qquad x(x^2 - 12) < 0$$

Resolviendo $x(x^2 - 12) = 0$ se tiene:

$$x(x^2 - 12) = x(x + \sqrt{12})(x - \sqrt{12}) = 0$$

Por lo tanto, los puntos de inflexión son $x = 0$, $x = +\sqrt{12}$ y $x = -\sqrt{12}$

Intervalos	$(-\infty, -\sqrt{12})$	$(-\sqrt{12}, 0)$	$(0, \sqrt{12})$	$(\sqrt{12}, \infty)$
Punto escogido	$x = -4$	$x = -1$	$x = 1$	$x = 4$
Evaluando en $f''(x)$	$f''(-4) = \frac{-2}{125} < 0$	$f''(-1) = \frac{88}{125} > 0$	$f''(1) = -\frac{88}{125} < 0$	$f''(4) = \frac{2}{125} > 0$
$f''(x)$ en todo el intervalo	$f''(x) < 0$	$f''(x) > 0$	$f''(x) < 0$	$f''(x) > 0$
La función	Cóncava-abajo	Cóncava-arriba	Cóncava-abajo	Cóncava-arriba

Tabla 4: Comportamiento de $f''(x)$

1. La función f es cóncava hacia arriba en los intervalos $(-\sqrt{12}, 0) \cup (\sqrt{12}, \infty)$.
2. La función f es cóncava hacia abajo en los intervalos $(-\infty, -\sqrt{12}) \cup (0, \sqrt{12})$.
3. La función $y = f(x)$ tiene puntos de inflexión en $x_1 = -\sqrt{12} = -2\sqrt{3}$, $x_2 = 0$ y en $x_3 = \sqrt{12} = 2\sqrt{3}$. Concretamente en: $P_1(x_1, f(x_1)) = \left(-2\sqrt{3}, -\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$, $P_2(x_2, f(x_2)) = (0, 0)$ y en $P_3(x_3, f(x_3)) = \left(2\sqrt{3}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$.

Realizando la gráfica se tiene:

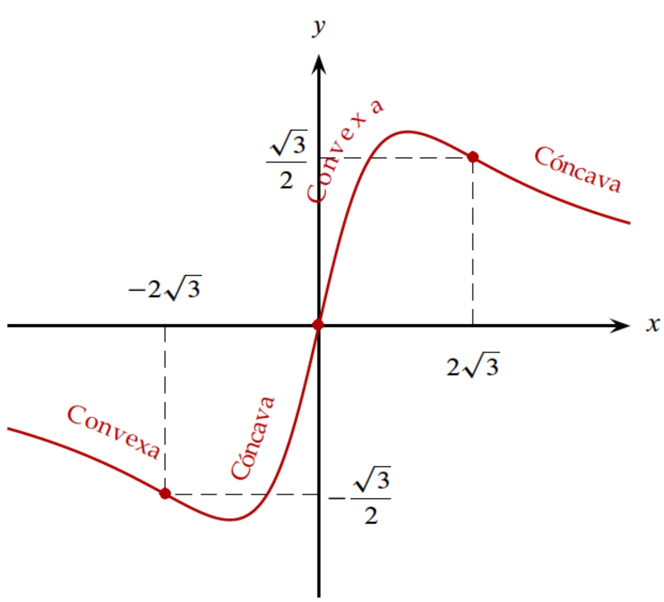

Figura 9: Gráfica de la función $f(x) = \frac{4x}{x^2+4}$

3. Extremos locales y extremos en intervalos abiertos

En una sección anterior se estudiaron los valores extremos de una función en un intervalo cerrado, a estos valores se le conocen como el valor máximo global o valor máximo absoluto de f, por tanto, en esta sección se estudiarán los extremos locales que se definen a continuación:

Definición
Sea S el dominio de f que contiene al punto c decimos que:

I. $f(c)$ es un **valor máximo local** de f si existe un intervalo abierto (a, b) que contiene a c, tal que $f(c)$ es el valor máximo de f en $(a, b) \cap S$;

II. $f(c)$ es un **valor mínimo local** de f si existe un intervalo abierto (a, b) que contiene a c, tal que $f(c)$ es el valor mínimo de f en $(a, b) \cup S$;

III. $f(c)$ es un **valor extremo local** de f, si es un valor máximo local o un valor mínimo local.

Estos valores extremos también se encuentran en los puntos críticos estudiados anteriormente, por tanto se tiene el siguiente criterio o prueba que le permitirá encontrar estos valores:

Prueba de la primera derivada
Sea f continua en un intervalo abierto (a, b) que contiene un punto crítico c.

1. Si $f'(x) > 0$ para toda x en (a, c) y $f'(x) < 0$ para toda x en (c, b), entonces $f(c)$ es un valor máximo local de f.

2. Si $f'(x) < 0$ para toda x en (a, c) y $f'(x) > 0$ para toda x en (c, b) entonces $f(c)$ es una valor mínimo local de f.

3. Si $f'(x)$ tiene el mismo signo en ambos lados de c, entonces $f(c)$ no es un valor extremo de f.

Ejemplo 4.

Dada $f(x) = x^3 - 6x^2 + 4$ use el criterio de la primera derivada para hallar los máximos y mínimos locales.

Solución

Para iniciar con la solución de este ejemplo, se debe verificar la continuidad de la función y cómo esta es una función polinomial, es continua en todas partes y su derivada es

$$f'(x) = 3x^2 - 12x = 3x(x - 4) = 0$$

Por tanto, los puntos críticos son $x = 0$ y $x = 4$; a continuación se estudiarán los cambios de signos:

Observando los signos, se puede afirmar por el criterio de la primera derivada que en $x = 0$ hay un máximo local y en $x = 4$ un mínimo local. Verifíquelo a continuación en la gráfica de la función.

Intervalos	$(-\infty, 0)$	$(0, 4)$	$(4, \infty)$
Punto escogido	$x = -1$	$x = 2$	$x = 5$
Evaluando en $f'(x)$	$f'(-1) = 15 > 0$	$f'(2) = -12 < 0$	$f'(5) = 15 > 0$
Signo de $f'(x)$	$+ + +$	$- - -$	$+ + +$

Tabla 5: Comportamiento de $f'(x)$

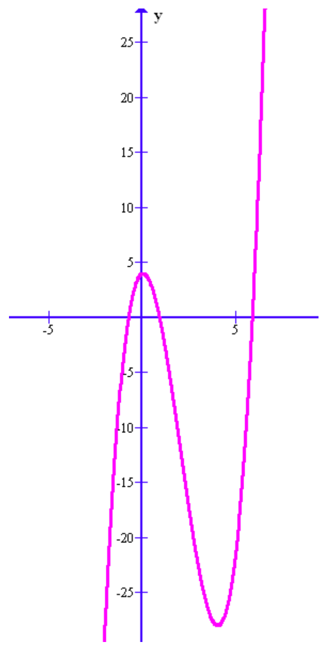

Figura 10: Gráfica de la función $f(x) = x^3 - 6x^2 + 4$

Además, también existe otra prueba para encontrar estos máximos y mínimos locales puesto que a veces es mejor aplicar este criterio que el de la primera derivada, es importante aclarar que este criterio **sólo se cumple para los puntos estacionarios.**

Prueba de la segunda derivada
Supóngase que f' y f'' existen en todo punto de un intervalo abierto (a, b) que contiene a c y suponga que $f'(c) = 0$

1. Si $f''(c) < 0$, $f(c)$ es un valor máximo local de f.
2. SI $f''(c) > 0$, $f(c)$ es un valor mínimo local de f.

Ejemplo 5.

Use la prueba de la segunda derivada para identificar los extremos locales de la función
$f(x) = x^3 - 6x^2 + 4$ (La función del ejemplo anterior).

Solución

Esta es la función del ejemplo anterior, por tanto:

$$f'(x) = 3x(x-4)$$

y los puntos críticos son $x = 0$ y $x = 4$, estos valores hacen que $f'(0) = 0$ y $f'(4) = 0$ que es una condición de la prueba. Ahora calculando la segunda derivada se tiene:

$$f''(x) = 6x - 12$$

y reemplazando $f''(0) = -12 < 0$ y $f''(4) = 12 > 0$; por tanto se puede concluir por el criterio de la segunda derivada que $f(0)$ es un valor máximo local y $f(4)$ es un valor mínimo local.

4. Trazado de curvas usando el cálculo diferencial

Como ha observado, la derivada permite describir las funciones: si son crecientes, decrecientes, cóncavas hacia arriba, cóncavas hacia abajo, hallar los valores extremos y en general lo estudiado en cálculo también permite encontrar el dominio de la función, las raíces o ceros, las asíntotas, entre otras; por tanto el propósito de esta sección es brindarle un proceso para bosquejar estas funciones.

Bosquejo de la gráfica de una función
Para gráficar una función es necesario:

1. Halle el dominio y sus raíces.
2. Calcule la derivada para hallar puntos críticos y encontrar intervalos de monotonía,
3. Halle los máximos y mínimos locales.
4. Halle la segunda derivada para encontrar los puntos de inflexión y así los intervalos de concavidad.
5. Si le es necesario, realice una tabla de valores con algunos puntos adicionales.

Observe el siguiente ejemplo:

Ejemplo 6.

Dibuje la gráfica de la función $f(x) = 3x^5 - 5x^3$.

Solución

El dominio de esta función son todos los reales porque es una función polinomial, además es continua. Ahora se calculará la primera derivada para hallar puntos críticos:

$$f'(x) = 15x^4 - 15x^2 = 15x^2(x^2-1) = 15x^2(x-1)(x+1) = 0$$

Resolviendo las desigualdades:

$$15x^2(x-1)(x+1) > 0 \qquad y \qquad 15x^2(x-1)(x+1) < 0$$

Intervalos	$(-\infty,-1)$	$(-1,0)$	$(0,1)$	$(1,\infty)$
Punto escogido	$x=-2$	$x=-\frac{1}{2}$	$x=\frac{1}{2}$	$x=2$
Evaluando en $f'(x)$	$f'(-2)=180>0$	$f'(-\frac{1}{2})=-2,8<0$	$f'(\frac{1}{2})=-2,8<0$	$f(2)=180>0$
$f'(x)$ en todo el intervalo	$f'(x)>0$	$f'(x)<0$	$f'(x)<0$	$f'(x)>0$
La función	crece	decrece	decrece	crece

Tabla 6: Comportamiento de $f'(x)$

Por tanto, se hace necesario resolver estas desigualdades y analizar los signos sobre la recta numérica de los intervalos determinados por $x=1$, $x=-1$ y $x=0$, puesto que hace que la derivada sea cero; entonces, los intervalos a considerar son $(-\infty,-1)$, $(-1,0)$, $(0,1)$ y $(1,\infty)$ y realizando la tabla se tiene:
Por lo tanto,

1. La función es creciente en los intervalos $(-\infty,-1)\cup(1,\infty)$.
2. La función es decreciente en el intervalo $(-1,1)$.

Teniendo en cuenta que los puntos críticos son $x=0$, $x=-1$ y $x=1$, se aplicará el criterio de la primera derivada:

Intervalos	$(-\infty,-1)$	$(-1,0)$	$(0,1)$	$(1,\infty)$
Punto escogido	$x=-2$	$x=-\frac{1}{2}$	$x=\frac{1}{2}$	$x=2$
Evaluando en $f'(x)$	$f'(-2)=180>0$	$f'(-\frac{1}{2})=-2,8<0$	$f'(\frac{1}{2})=-2,8$	$f'(2)=180>0$
Signo de $f'(x)$	$+\ +\ +$	$-\ -\ -$	$-\ -\ -$	$+\ +\ +$

Tabla 7: Comportamiento de $f'(x)$

Por lo anterior,

1. La función en $x=0$ no tiene máximo ni mínimo, pues no hay cambio de signo.
2. La función en $x=1$ tiene un mínimo local .
3. La función en $x=-1$ tiene un máximo local.

Ahora se calculará la segunda derivada, para estudiar la concavidad de la función:

$$f''(x)=60x^3-30x=30x(2x^2-1)$$

Es así como los puntos de inflexión son $x=0$ y $x=\pm\frac{1}{\sqrt{2}}$ y los intervalos a estudiar son $(-\infty,-\frac{1}{\sqrt{2}})$, $(-\frac{1}{\sqrt{2}},0)$, $(0,\frac{1}{\sqrt{2}})$ y $(\frac{1}{\sqrt{2}},\infty)$ y se tiene:

Intervalos	$(-\infty,-\frac{1}{\sqrt{2}})$	$(-\frac{1}{\sqrt{2}},0)$	$(0,\frac{1}{\sqrt{2}})$	$(\frac{1}{\sqrt{2}},\infty)$
Punto escogido	$x=-1$	$x=-\frac{1}{2}$	$x=\frac{1}{2}$	$x=1$
Evaluando en $f''(x)$	$f''(-1)=-30<0$	$f''(-\frac{1}{2})=7,5>0$	$f''(\frac{1}{2})=-7,5<0$	$f''(1)=30>0$
$f''(x)$ en todo el intervalo	$f''(x)<0$	$f''(x)>0$	$f''(x)<0$	$f''(x)>0$
La función	Cóncava-abajo	Cóncava-arriba	Cóncava-abajo	Cóncava-arriba

Tabla 8: Comportamiento de $f'(x)$

1. La función f es cóncava hacia arriba en los intervalos $(-\frac{1}{\sqrt{2}},0)$ y $(\frac{1}{\sqrt{2}},\infty)$
2. La función f es cóncava hacia abajo en los intervalos $(-\infty,-\frac{1}{\sqrt{2})}$ y $(0,\frac{1}{\sqrt{2}})$

Realizando la gráfica se tiene:

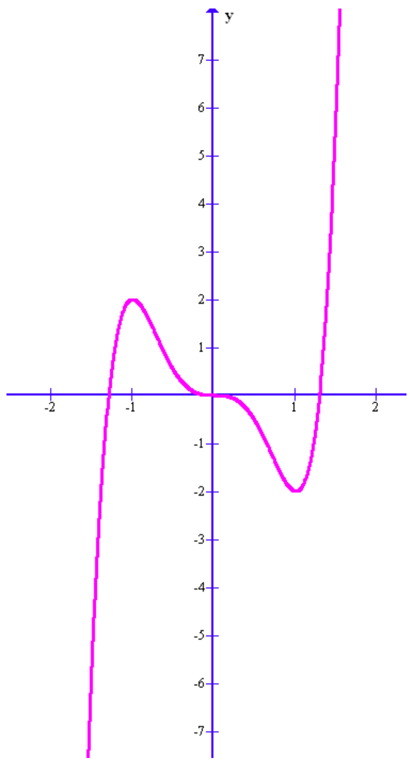

Figura 11: Gráfica de la función $f(x)=3x^5-5x^3$

5. Optimización

Teniendo en cuenta lo estudiado a la fecha en las primeras secciones de esta lectura, se proponen problemas de aplicación de estas teorías como lo es la optimización. A continuación se sugieren las siguientes pautas al momento de realizar estos ejercicios, cabe la pena resaltar que pueden presentarse ocasiones en que se necesite un proceso diferente u omitir pasos:

Pautas para la solución de ejercicios de optimización

1. Realice un dibujo de la situación y asigne variables para las cantidades importantes.
2. Escriba una fórmula para la función objetivo Q que se maximizará o minimizará, en términos de la variables del ítem 1.
3. Utilice las condiciones del problema para eliminar todas, excepto una de estas variables, y por consiguiente expresar Q como una función de una sola variable.
4. Halle los puntos críticos.
5. Sustituya los valores críticos en la función objetivo o use el criterio de la primera derivada o la segunda derivada para determinar el máximo y el mínimo.

Por ejemplo:
Ejemplo 7.

Un granjero tiene 100 metros de cerca de alambre con la cual planea construir dos corrales adyacentes, (Ver figura)¿Cuáles son las dimensiones que encierran el área máxima?

Solución

Teniendo en cuenta las pautas para la solución de ejercicios se tiene la siguiente gráfica:

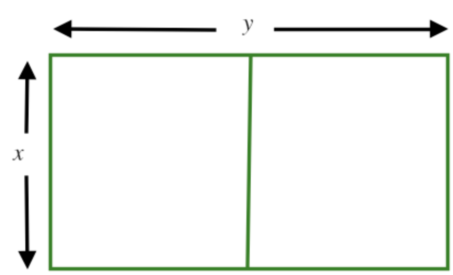

Figura 12: Optimización

Sea x el ancho y y el largo del terreno del área total encerrada, como se tienen 100 metros de alambre para hacer la cerca, entonces el perímetro será:

$$3x + 2y = 100$$

Y despejando y se tiene:

$$y = 50 - \frac{3}{2}x$$

Calculando el área del terreno:

$$A = x \cdot y = x(50 - \frac{3}{2}x) = 50x - \frac{3}{2}x^2$$

Como debe haber 3 lados de x porque se cercarán los dos corrales adyacentes, entonces el dominio es $0 \leq x \leq \frac{100}{3}$ y máximizando la función:

$$\frac{dA}{dx} = 50 - 3x = 0$$

Por lo tanto, un punto crítico es $x = \frac{50}{3}$; y como se esta trabajando en un intervalo cerrado, también se debe probar en los extremos de este intervalo; es así como se tiene los siguientes puntos críticos $x = 0$, $x = \frac{50}{3}$ y $x = \frac{100}{3}$; reemplazando en la función se tiene:

1. $A(0) = 0$
2. $A(\frac{50}{3}) \approx 416,67$
3. $A(\frac{100}{3}) = 0$

Por lo tanto, las dimensiones que máximizan el área son $x = \frac{50}{3}$ y $y = 50 - \frac{3}{2}\left(\frac{50}{3}\right) = 25$

Para finalizar se solicita al lector realizar los ejercicios propuestos para afianzar lo estudiado.

6. Ejercicios

1. En las siguientes funciones, encuentre dónde la función dada es creciente o decreciente:

   a) $f(x) = (x+1)(x-2)$
   b) $g(x) = x^3 + 3x^2 - 12$
   c) $f(x) = \frac{x-1}{x^2}$
   d) $g(x) = \frac{x^4}{4} - \frac{4x^3}{6}$
   e) $f(x) = x^4 - 6x^3 - 24x^2 + 3x + 1$
   f) $g(x) = x^2 - 1$

2. Determine en dónde la gráfica es creciente, decreciente, cóncava hacia arriba y cóncava hacia abajo; con la información dada después bosqueje la gráfica.

   a) $f(x) = x^3 - 12x + 1$
   b) $g(x) = 4x^3 - 3x^2 - 6x + 12$
   c) $f(x) = x^6 - 3x^4$
   d) $g(x) = \frac{x^2}{x^2+1}$

3. Encuentre los puntos críticos y utilice la prueba que elija para decidir cuáles puntos críticos dan un valor máximo local y un valor mínimo local, ¿cuáles son estos valores?

   a) $f(x) = x^3 - 3x$
   b) $g(x) = x^4 - 2x^3$
   c) $f(x) = \frac{x^2}{\sqrt{x^2+4}}$
   d) $g(x) = (x-2)^5$

4. Resolver las siguientes situaciones

   a) Determine el volumen de la mayor caja abierta que pueda fabricarse con una pieza de cartón de 24 pulgadas cuadradas, recortando cuadrados iguales a partir de las esquinas y doblando hacia arriba los lados.

   b) Un granjero tiene 80 pies de malla de alambre con la cual planea encerrar un corral rectangular, un lado de su granero es 100 pies de largo (ver figura), y el lado a lo largo del granero no necesita valla.¿Cuáles son las dimensiones del corral que tiene área máxima?

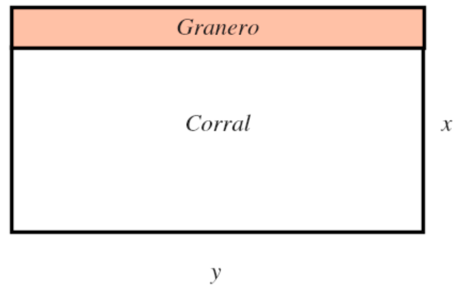

Figura 13: Ejercicio

c) El granjero del problema anterior decide hacer tres corrales idénticos con sus 80 pies de malla de alambre (ver figura) ¿Qué dimensiones de área total encerrada hacen el área de los corrales tan grande como sea posible?

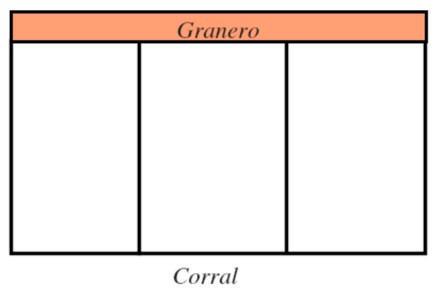

Figura 14: Ejercicio

Referencias

[1] Lizarazo, J. (2012). *Aplicaciones de la Derivada (s)-Cartilla.* Bogotá, Colombia: Institución universitaria politécnico grancolombiano- Educación Virtual.

[2] Purcell, E.; Varberg, D. & Rigdon, S.. (2009). *Cálculo.* Novena Edición. México, México. Pearson Prentice Hall.

[3] Grupo de Modelamiento Matemático. (2017).Facultad de Ingeniería y Ciencias básicas Institución Universitaria Politécnico Grancolombiano.

INFORMACIÓN TÉCNICA

Ingeniería y Ciencias Básicas

Módulo: Cálculo I
Unidad 4: Aplicaciones de la derivada
Escenario 8: Aplicaciones de las derivadas - segunda parte

Autor: Luisa Fernanda Martínez Rojas

Asesor Pedagógico: Diana Marcela Díaz Salcedo
Diseñador Gráfico: Kevin Mauricio Ramírez Correa
Corrector de estilo:
Asistente: Leidy Alejandra Morales