Unidad 2 / Escenario 4

Lectura fundamental

# Método Simplex algebraico

## Contenido



**Palabras clave**: programación lineal, optimización, método simplex

# 1. Método Simplex algebraico

En el Escenario anterior, exploramos un método de solución para problemas lineales con solo dos variables de decisión; desafortunadamente, por razones más que evidentes el método no se puede extender a problemas con más de dos variables, tal vez hasta con tres sería posible, aunque extremadamente complicado; cuando se tienen 4 o más variables, no podemos representar gráficamente la región factible completa (con toda su dimensionalidad). Sin embargo, los principales principios utilizados allí sí serán útiles, aunque necesitaremos extender las definiciones de punto extremo y dirección extrema más allá de las geométricas que usamos en ese caso. Una vez definidos los dos conceptos, procederemos a formular el teorema de representación, el cual será la base del método simplex aquí utilizado.

Para el método Simplex, tendremos dos presentaciones diferentes, su forma algebraica y el formato Tableau. La primera es la forma general y la exploraremos en este espacio; la segunda es una presentación más operativa que nos permitirá realizar los cálculos de manera más eficiente, cuando los hacemos manualmente, para así centrarnos en los aspectos más importantes del método sin que los cálculos tediosos nos distraigan.

Para poder trabajar con el método Simplex de forma correcta, necesitamos de unas cuantas definiciones formales para los objetos con los cuales vamos a tratar. Aunque a primera vista las definiciones sean un poco abstractas, su utilidad se verá enseguida cuando formulemos el teorema de representación. Las definiciones que presentan Bazaraa, Jarvis y Sherall, (2005) son las siguientes:

**Conjunto convexo:** un conjunto $X \in \mathrm{R}^n$ se dice convexo si dados dos puntos del conjunto, digamos $x_1, x_2 \in X$ entonces se cumple que $\lambda x_1 + (1 - \lambda x_2) \in X$ para todo $\lambda \in [0,1]$.

Es decir, todo segmento de línea entre dos puntos del conjunto está contenido en el conjunto. La expresión $\lambda x_1 + (1 - \lambda x_2)$ se llama combinación convexa de los puntos $x_1, x_2$ si $\lambda \in [0,1]$.

**Punto extremo:** un punto $x \in X$ se llama punto extremo de $X$, si $x$ no puede ser representado como una combinación convexa estricta, $\lambda \in (0,1)$, de cualesquiera dos puntos diferentes del conjunto $X$, es decir, si tenemos que $\mathrm{x} = \lambda\, x_1 + (1 - \lambda x_2)$, entonces, se tiene que $x = x_1 = x_2$.

**Rayo:** en un conjunto $X$, un rayo es una colección de puntos de la forma $\{x_0 + \lambda\, d, \lambda \geq 0\}$ donde $d$ es un vector no nulo

**Dirección:** en un conjunto convexo $X$, el vector $d$ es una dirección del conjunto si para todo punto $x_0 \in X$ se tiene que el rayo $\{x_0 + \lambda\, d, \lambda \geq 0\}$ también está contenido en el conjunto $X$.

**Dirección extrema:** una dirección $d$ se llama dirección extrema de $X$ si $d$ no puede ser representada como una combinación convexa estricta, $\lambda \in (0,1)$, de cualesquiera dos direcciones diferentes del conjunto $X$, es decir, si tenemos que $d = \lambda d_1 + (1-\lambda d_2)$, entonces, se tiene que $d_1 = \alpha d_2$, con $\alpha > 0$, es decir, una dirección es un múltiplo positivo de la otra.

Con estas definiciones estamos listos para formular el teorema de representación, el cual nos permitirá establecer las condiciones de optimalidad para el problema lineal y restringir el espacio de búsqueda del algoritmo.

# 2. Teorema de representación

El teorema de representación nos proporciona una manera de definir todos los puntos del espacio de solución como una combinación convexa finita de los puntos extremos, y en el caso de regiones no acotadas también una combinación lineal de las direcciones extremas. Como en el caso de una región acotada, la representación se simplifica al no usar direcciones extremas. Primero, vamos a formular la versión para regiones acotadas; luego, introduciremos una formulación más general. En nuestro caso, el conjunto convexo estará definido por las restricciones del problema, así que lo escribiremos de la forma $X = \{Ax \leq b, x \geq 0\}$, en donde $x, b \in R^n$ y $A$ es una matriz de dimensión $m$ x $n$.

## 2.1. Teorema de representación para conjuntos convexos acotados

Sea $X = \{Ax \leq b, x \geq 0\}$ un conjunto no vacío con un conjunto finito de puntos extremos $x_1, x_2, \ldots, x_k$, entonces, cualquier punto $\bar{x} \in X$ se puede representar como una combinación convexa de los puntos extremos, es decir:

$$\bar{x} = \lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2 + \cdots + \lambda_k x_k$$

con $\lambda_1 + \lambda_2 + \ldots + \lambda_k = 1$, $\lambda_i \geq 0$ para todo $i = 1,2,\ldots, k$ y para todo $\bar{x} \in X$

Para entender mejor la importancia del teorema, ilustrémoslo con un ejemplo; consideremos la región acotada por las siguientes restricciones:

$$X_1 + X_2 \leq 10 \quad (1)$$

$$-X_1 + X_2 \leq 2 \quad (2)$$

$$X_2 \leq 4 \quad (3)$$

$$X_1 \geq 0 \quad (4)$$

$$X_2 \geq 0 \quad (5)$$

La región, que es acotada, se muestra en la figura 1. En ella, identificamos fácilmente los 5 puntos extremos: (0,0), (0,2), (2,4), (6,4) y (10,0). Veamos cómo se usaría el teorema de representación para algunos puntos de la región factible.

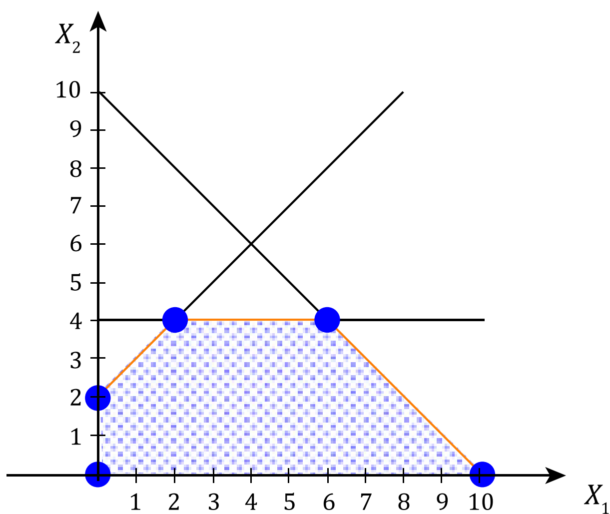


**Figura 1. Región factible para el problema. Se identifican 5 puntos extremos**

*Fuente*: elaboración propia

Consideremos el punto (3,2), la idea es encontrar una combinación convexa de los 5 puntos extremos de la región con la que obtengamos dicho punto, es decir:

$$\begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix} = \lambda_1 \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda_2 \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \end{pmatrix} + \lambda_3 \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \end{pmatrix} + \lambda_4 \begin{pmatrix} 6 \\ 4 \end{pmatrix} + \lambda_5 \begin{pmatrix} 10 \\ 0 \end{pmatrix} \text{ con } \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 + \lambda_4 + \lambda_5 = 1$$

en donde, usamos un vector columna en lugar de un vector fila para facilitar la visualización del sistema a resolver. Una solución está dada por: $\lambda_1 = 0.5, \lambda_2 = 0, \lambda_3 = 0, \lambda_4 = 0.5, \lambda_5 = 0$, la que se puede comprobar fácilmente:

$$\begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix} = 0{,}5 \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} + 0 \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \end{pmatrix} + 0 \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \end{pmatrix} + 0{,}5 \begin{pmatrix} 6 \\ 4 \end{pmatrix} + 0 \begin{pmatrix} 10 \\ 0 \end{pmatrix} = 0{,}5 \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} + 0{,}5 \begin{pmatrix} 6 \\ 4 \end{pmatrix} = 0{,}5 \begin{pmatrix} 6 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix}$$

Esta solución se puede ver en la figura 2. Considere, sin embargo, que existen múltiples combinaciones convexas que son solución.

Ahora, consideremos el punto (5,2), nuevamente debemos encontrar una combinación convexa de los 5 puntos extremos de la región con la que obtengamos éste punto, por lo tanto:

$$\begin{pmatrix} 5 \\ 2 \end{pmatrix} = \lambda_1 \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda_2 \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \end{pmatrix} + \lambda_3 \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \end{pmatrix} + \lambda_4 \begin{pmatrix} 6 \\ 4 \end{pmatrix} + \lambda_5 \begin{pmatrix} 10 \\ 0 \end{pmatrix} \text{ con } \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 + \lambda_4 + \lambda_5 = 1$$

Una solución en este caso está dada por $\lambda_1 = 0.3, \lambda_2 = 0, \lambda_3 = 0, \lambda_4 = 0.5, \lambda_5 = 0.2$, la que podemos comprobar así:

$$\begin{pmatrix} 5 \\ 2 \end{pmatrix} = 0{,}3 \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} + 0 \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \end{pmatrix} + 0 \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \end{pmatrix} + 0{,}5 \begin{pmatrix} 6 \\ 4 \end{pmatrix} + 0{,}2 \begin{pmatrix} 10 \\ 0 \end{pmatrix} = 0{,}5 \begin{pmatrix} 6 \\ 4 \end{pmatrix} + 0{,}2 \begin{pmatrix} 10 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 2 \end{pmatrix}$$

Esta solución la podemos ver en la figura 3, en donde se usan los puntos (0,0) y (10,0) para generar el punto (4,0) y con dicho punto y el punto (6,4) se consigue el punto (5,2).

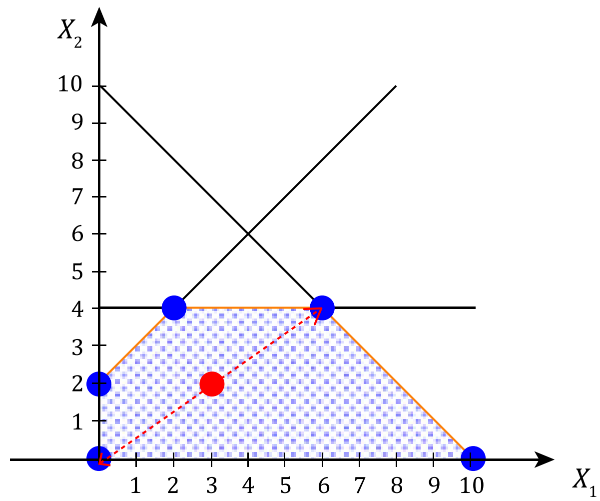


**Figura 2. Representación del punto (3,2) como combinación convexa de los 5 puntos extremos**

*Fuente*: elaboración propia

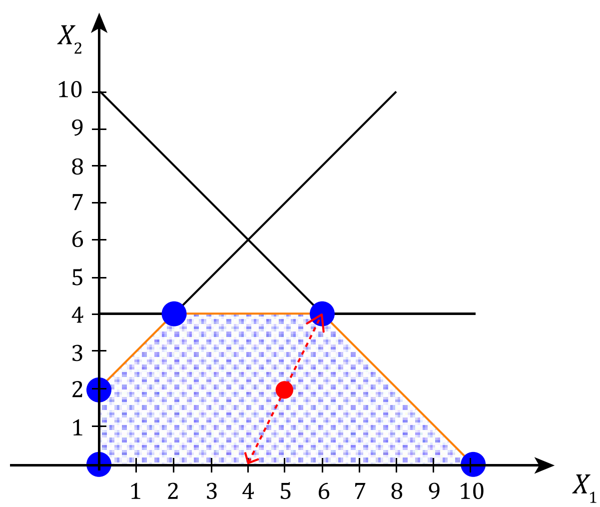


**Figura 3. Representación del punto (5,2) como combinación convexa de los 5 puntos extremos**

*Fuente*: elaboración propia

Ahora, veamos la formulación general del teorema de representación, en donde se considera la posibilidad de que la región sea no acotada y, por lo tanto, se tengan direcciones extremas.

## 2.2. Teorema de representación (versión general)

Sea $X = \{Ax \leq b, x \geq 0\}$ un conjunto no vacío con un conjunto finito de puntos extremos $x_1, x_2, \ldots, x_k$, si además $X$ es no acotado, entonces, posee un conjunto finito de direcciones extremas $d_1, d_2, \ldots, d_h$, entonces, cualquier punto $\bar{x} \in X$ se puede representar como una combinación convexa de los puntos extremos junto con una combinación lineal de las direcciones extremas, es decir:

$$\bar{x} = \lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2 + \ldots + \lambda_k x_k + \mu_1 d_1 + \mu_2 d_2 + \ldots + \mu_h d_h$$

con $\lambda_1 + \lambda_2 + \ldots + \lambda_k = 1$, $\lambda_i \geq 0$ para todo $i = 1, 2, \ldots, k$, $\mu_j \geq 0$ para todo $j = 1, 2, \ldots, h$ y para todo $\bar{x} \in X$

Veamos, ahora, un ejemplo del uso del teorema en una región no acotada, consideremos la región acotada por las siguientes restricciones:

$$-X_1 + X_2 \leq 2 \quad (1)$$

$$X_2 \leq 4 \quad (2)$$

$$X_1 \geq 0 \quad (3)$$

$$X_2 \geq 0 \quad (4)$$

La región se muestra en la figura 4, allí, identificamos 3 puntos extremos: (0,0), (0,2), (2,4) y una dirección extrema, expresada como vector unitario que sería $\vec{d}_1 = (1,0)$. Usemos el teorema de representación para algunos puntos de la región factible.

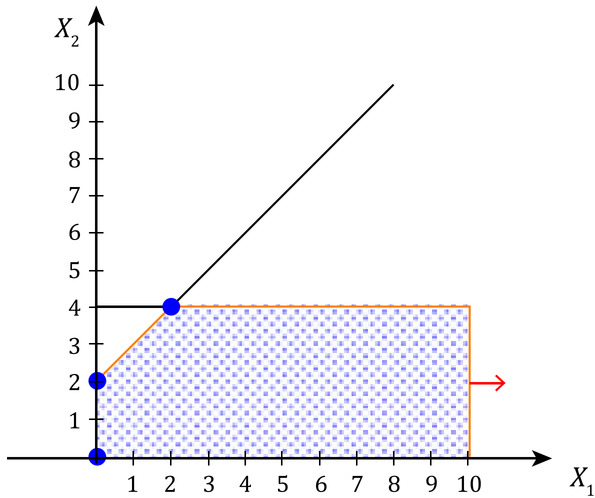


**Figura 4. Región factible para el nuevo problema. Se identifican 3 puntos extremos y una dirección extrema (la flecha roja)**

*Fuente*: elaboración propia

Consideremos el punto (1,2), donde la idea es encontrar una combinación convexa de los 3 puntos extremos de la región que junto con algún múltiplo de la dirección extrema (como solo tenemos una dirección la combinación lineal se convierte en un múltiplo de$^{m}$ ) nos dé como resultado al punto (1,2), es decir:

$$\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix} = \lambda_1 \begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix} + \lambda_2 \begin{pmatrix}0\\2\end{pmatrix} + \lambda_3 \begin{pmatrix}2\\4\end{pmatrix} + \mu_1 \begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix} \text{ con } \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 = 1 \text{ y } \mu_1 \geq 0$$

Una solución está dada por: $\lambda_1 = 0.5, \lambda_2 = 0, \lambda_3 = 0.5$ y $\mu_1 = 0$, la que podemos comprobar así:

$$\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix} = 0{,}5 \begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix} + 0 \begin{pmatrix}0\\2\end{pmatrix} + 0{,}5 \begin{pmatrix}2\\4\end{pmatrix} + 0 \begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix} = 0{,}5 \begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix} + 0{,}5 \begin{pmatrix}2\\4\end{pmatrix} = 0{,}5 \begin{pmatrix}2\\4\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}$$

Esta solución se puede ver en la figura 5. Además, podemos usar una solución que involucre la dirección extrema para el mismo punto, por ejemplo $\lambda_1 = 0, \lambda_2 = 1, \lambda_3 = 0$ y $\mu_1 = 1$, con la que obtenemos:

$$\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix} = 0 \begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix} + 1 \begin{pmatrix}0\\2\end{pmatrix} + 0 \begin{pmatrix}2\\4\end{pmatrix} + 1 \begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\2\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}$$

Esta nueva solución se puede observar en la figura 6.

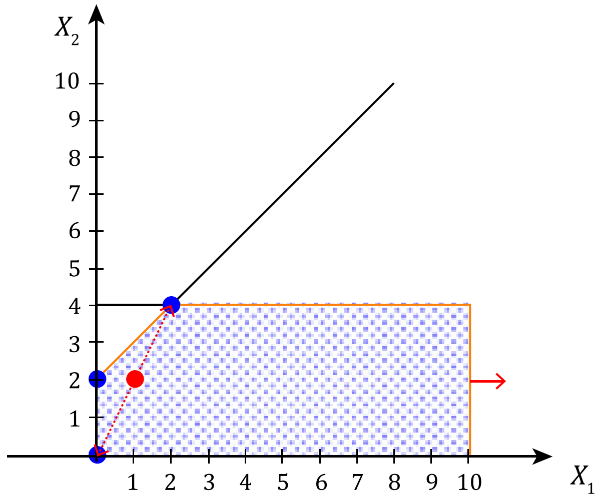


**Figura 5. Representación del punto (3,2) como combinación convexa de los 3 puntos extremos de la región**

*Fuente*: elaboración propia

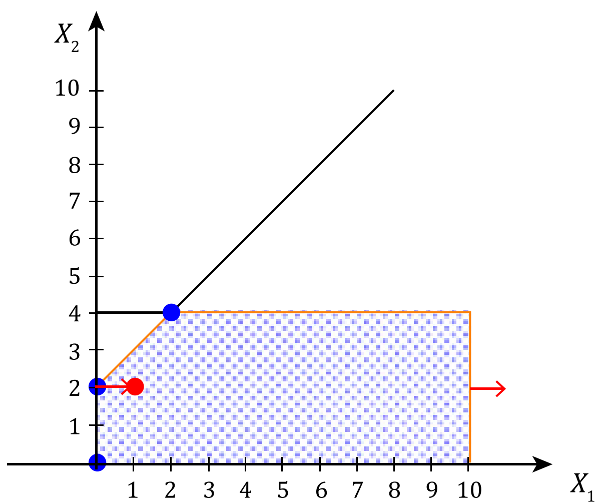


**Figura 6. Representación del punto (3,2) como combinación convexa de los 3 puntos extremos y la dirección extrema de la región**

*Fuente*: elaboración propia

En la región también hay puntos que son accesibles solo a través de la dirección extrema. Consideremos el punto (8,2), nuevamente, la idea es encontrar una combinación convexa de los 3 puntos extremos de la región que junto con un múltiplo de la dirección extrema nos dé como resultado este punto, es decir:

$$\begin{pmatrix} 8 \\ 2 \end{pmatrix} = \lambda_1 \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda_2 \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \end{pmatrix} + \lambda_3 \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \end{pmatrix} + \mu_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \text{ con } \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 = 1 \text{ y } \mu_1 \geq 0$$

Una solución está dada por: $\lambda_1 = 0, \lambda_2 = 1, \lambda_3 = 0$ y $\mu_1 = 8$, con la que obtenemos:

$$\begin{pmatrix} 8 \\ 2 \end{pmatrix} = 0 \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} + 1 \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \end{pmatrix} + 0 \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \end{pmatrix} + 8 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 8 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 \\ 2 \end{pmatrix}$$

En la figura 7, podemos ver la solución, sin embargo, notemos que no hay forma de obtener el punto con solo la combinación convexa de los puntos extremos, es necesario utilizar la dirección extrema para llegar allí.

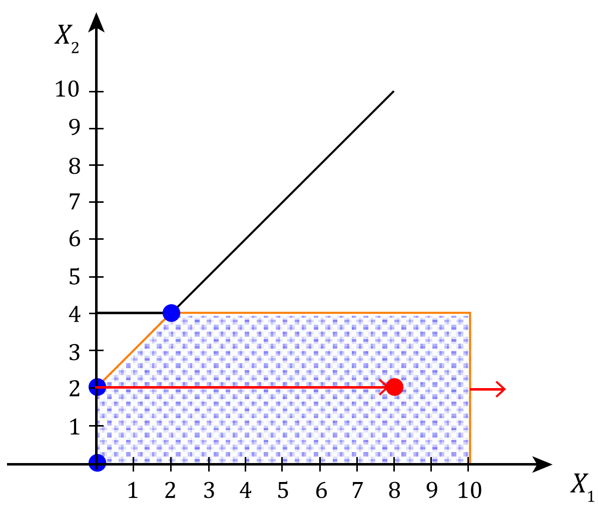


**Figura 7. Representación del punto (8,2) como combinación convexa de los 3 puntos extremos y la dirección extrema de la región**

*Fuente*: elaboración propia

Ahora, estamos listos para introducir el método Simplex formalmente.

## En síntesis...

El teorema de representación nos dice que cualquier punto de la región factible se puede representar como la suma de una combinación convexa de los puntos extremos y, si es el caso, una combinación lineal de direcciones extremas. Es decir, con los puntos extremos y las direcciones extremas podremos encontrar la solución al problema lineal.

## 3. Método simplex

Para describir el algoritmo Simplex de manera sencilla, es recomendable que trabajemos nuestro problema en forma matricial como lo definimos en la cartilla de la semana 2, el problema se puede escribir como:

$$\text{Max } Z = c^T X$$

$$s.a$$

$$AX \leq b$$

$$X \geq 0$$

Donde el vector columna ***X,*** cuyos componentes denotaremos con $X_j$, denota las variables de decisión, allí el índice $j$ estará en el rango de 1 hasta $n$. El vector columna ***c,*** cuyos componentes denotaremos con $c_j$, representa los coeficientes de la función objetivo. El vector columna ***b,*** con componentes $b_i$, se usa para representar los valores del lado derecho de las restricciones, allí el índice $i$ estará en el rango de 1 hasta $m$. Finalmente, para los coeficientes de las diferentes restricciones utilizaremos la matriz $\boldsymbol{A}$ de dimensión $\boldsymbol{m \times n}$, con componentes $a_{ij}$. En todos los casos $m$ representa el número de restricciones y $n$ el número de variables de decisión del problema.

Lo primero que vamos a mostrar es que la solución del problema, si existe y es acotada, se encuentra en un punto extremo del problema. Para ello, usaremos el teorema de representación al definir las variables del problema en función de los puntos extremos y las direcciones extremas, tenemos que para todo $x \in X$

$$x = \lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2 + \dots + \lambda_k x_k + \mu_1 d_1 + \mu_2 d_2 + \dots + \mu_h d_h$$

con $\lambda_1 + \lambda_2 + \dots + \lambda_k = 1, \lambda_i \geq 0$ para todo $i = 1,2, \dots, k$, $\mu_j \geq 0$ para todo $j = 1,2, \dots, h$. Usando la notación de sumatorias tenemos que:

$$x = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i x_i + \sum_{j=1}^{h} \mu_j d_j$$

con $\sum_{i=1}^{n} \lambda_i = 1$, $\lambda_i \geq 0$ y $\mu_j \geq 0$ para todo $i = 1,2,\dots,\mathrm{k}$ y todo $j = 1,2,\dots,h$. Con esta representación, el problema original se puede formular como:

$$\text{Max } Z = \sum_{i=1}^{n} (cx_i)\, \lambda_i + \sum_{j=1}^{h} (cd_j)\, \mu_j$$

$s.a$

$$\sum_{i=1}^{n} \lambda_i = 1$$

$$\lambda_i \geq 0 \quad \forall\, i = 1,2, \dots, k$$

$$\mu_j \geq 0 \ \forall\, j = 1,2, \dots, h$$

Como en el problema anterior, las μ_j pueden ser infinitamente grandes, el problema será acotado solo si $cd_j \leq 0$ para todo $j = 1,2,\dots,h$, de esta forma todas las $\mu_j$ se pueden hacer cero y así el problema se reduce a maximizar la suma $\sum_{i=1}^{n} (cx_i)\, \lambda_i$ donde las variables ahora son las $\lambda_i$; este problema es sencillo porque basta con tomar el mayor de los productos $cx_i$, así la variable asociada a ese producto toma el valor de 1 y las demás $\lambda_i$ se hacen 0. Es decir, hemos seleccionado el punto óptimo escogiendo entre todos los puntos extremos, así hemos probado nuestra afirmación.

Ahora sí, veamos el método Simplex, para lo cual llevemos el problema a lo que se conoce como forma estándar, es decir, llevar todas las desigualdades a igualdades; en el caso de desigualdades de menor o igual el procedimiento es sencillo ya que lo único que debemos hacer es incluir en cada restricción una variable de holgura que absorba la diferencia entre el lado izquierdo y el derecho. Es decir, pasamos de:

$$a_{11} X_1 + a_{12} X_2 + \dots + a_{1n} X_n \leq b_1$$

$$a_{21} X_1 + a_{22} X_2 + \dots + a_{2n} X_n \leq b_2$$

$$a_{m1} X_1 + a_{m2} X_2 + \dots + a_{mn} X_n \leq b_m$$

$$X_1 \geq 0, X_2 \geq 0 , \dots , X_n \geq 0$$

a un conjunto de ecuaciones (todas con igualdad) pero con más restricciones, de la siguiente forma:

$$a_{11} X_1 + a_{12} X_2 + \dots + a_{1n} X_n + S_1 \qquad = b_1$$

$$a_{21} X_1 + a_{22} X_2 + \dots + a_{2n} X_n + S_2 \qquad = b_2$$

$$a_{m1} X_1 + a_{m2} X_2 + \dots + a_{mn} X_n \qquad + S_m = b_m$$

$$X_1 \geq 0, X_2 \geq 0, \dots, X_n \geq 0, S_1 \geq 0, S_2 \geq 0, \dots, S_m \geq 0$$

Las variables de holgura son de nuevo no negativas, pero no afectan la función objetivo, solo se usan en las restricciones, por lo tanto, nuestro problema ahora se escribe de la forma:

$$\text{Max } Z = \boldsymbol{c}^{\boldsymbol{T}} \boldsymbol{X}$$

$$s.a$$

$$\boldsymbol{AX = b}$$

$$\boldsymbol{X \geq 0}$$

Pero ahora en el vector $\boldsymbol{X}$ se incluyen las variables de holgura; por facilidad ahora $n$ denota el número de variables de decisión más las variables de holgura, con lo cual todas las definiciones anteriores siguen siendo válidas, lo único que hay que recordar es que las variables de holgura no afectan la función objetivo, con lo cual los coeficientes $c_j$ correspondientes a dichas variables siempre serán 0.

Al agregar las variables de holgura, nos hemos asegurado que la matriz $\boldsymbol{A}$ siempre tenga más columnas que filas, tenemos más variables que restricciones, por lo tanto, podemos seleccionar un conjunto de columnas para formar una matriz cuadrada, que será la base de nuestra solución y la llamaremos $\boldsymbol{B}$**,** el resto de las columnas las dejaremos por fuera en otra matriz que llamaremos $\boldsymbol{N}$**.** Es decir, hemos descompuesto nuestra matriz $\boldsymbol{A}$ en dos matrices así:

$$\boldsymbol{A = [B:N]}$$

La única condición que impondremos en esta descomposición es que la matriz $\boldsymbol{B}$ sea invertible, así la matriz se denomina *matriz básica*, con los cual $\boldsymbol{N}$ se llamará *matriz no básica*. Las columnas que formas a la matriz básica están asociadas a un conjunto de variables, las cuales denotaremos por $X_B$ y llamaremos *solución básica*, si además tenemos que $X_B \geq \mathbf{0}$, entonces, la solución se denomina *solución básica factible*. Las variables que pertenecen a este conjunto se denominan *variables básicas* o *variables básicas factibles*, respectivamente. Las variables que no hacen parte de este conjunto se denominan *variables no básicas*.

De esta forma, el vector $\boldsymbol{X}$ también se puede descomponer en dos partes como la matriz $\boldsymbol{A}$**,** de la siguiente forma $\boldsymbol{X}=[X_B, X_N]$**,** en donde el orden de las variables en el vector $\boldsymbol{X}$**,** corresponde con el orden de las columnas en la matriz $\boldsymbol{A}$. Además de la relación $\boldsymbol{AX = b}$ podemos obtener los valores de las variables básicas de la siguiente forma:

$$AX=b$$

$$[B:N][X_B,X_N]=b$$

$$BX_B+NX_N=b$$

$$BX_B=b$$

$$X_B=B^{-1}\,b$$

En el tercer paso, hemos usado el hecho de que $X_N = \mathbf{0}$ y en el último paso que la matriz $\boldsymbol{B}$ es invertible. Ahora, debemos calcular el valor de la función objetivo en la solución básica factible $X_B = B^{-1}\, b$, esto es:

$$Z_0 = C \begin{pmatrix} B^{-1} b \\ 0 \end{pmatrix} = (c_B, c_N) \begin{pmatrix} B^{-1} b \\ 0 \end{pmatrix} = c_B\, B^{-1}\, b$$

Una iteración del algoritmo Simplex implica un cambio de la solución básica actual a una nueva solución básica factible, es decir, que alguna de las variables del conjunto $X_N$ deje de ser 0. Veamos cómo afectaría ese cambio al valor de la función objetivo calculado anteriormente; de la ecuación $AX = b$ obtuvimos antes que $b = BX_B + NX_N$, así al multiplicar a ambos lados por $B^{-1}$, tenemos que:

$$B^{-1}\, b = B^{-1}\, BX_B + B^{-1}\, NX_N$$

$$X_B = B^{-1}\, b - B^{-1}\, NX_N$$

$$X_B = B^{-1}\, b - \sum_{j \in N} B^{-1}\, a_j\, X_j$$

Así, al reemplazar dicho valor en nuestro cálculo del valor de la función objetivo obtenemos que:

$$Z = (c_B, c_N) \begin{pmatrix} X_B \\ X_N \end{pmatrix} = c_B\, X_B + c_N\, X_N$$

$$Z = c_B \left( B^{-1}\, b - \sum_{j \in N} B^{-1}\, a_j\, X_j \right) + \sum_{j \in N} c_j\, X_j$$

$$Z = c_B\, B^{-1}\, b + \sum_{j \in N} (-\, c_B\, B^{-1}\, a_j + c_j)\, X_j$$

$$Z = Z_0 - \sum_{j \in N} (z_j - c_j)\, X_j$$

En donde hemos definido $z_j = c_B B^{-1} a_j$. Al vector que contiene los valores $(z_j - c_j)$ se le denota por $\boldsymbol{w}$ y se le llama el vector de costos reducidos. Notemos que el cambio de solución básica factible solo mejorará el valor de la función objetivo si para alguna de las variables no básicas se tiene que $z_j - c_j < 0$, si para todas las variables no básicas tenemos que $z_j - c_j \geq 0$ entonces, nos encontramos en el punto óptimo.

Supongamos que existe una variable no básica con $z_j - c_j < 0$, esa variable deberá ser incluida en el conjunto de variables básicas; sin embargo, como dichas variables están relacionadas con las columnas de la matriz $\boldsymbol{B}$**,** esto implica que debemos agregar una columna a dicha matriz, pero para que esta siga siendo invertible debe ser una matriz cuadrada, es decir, para incluir una nueva variable en la base debemos sacar una variable de la base. Para determinar cuál será la variable que sale de la base, consideremos que $X_B = B^{-1} b - \sum_{j \in N} B^{-1} a_j X_j$, si llamamos $b^{\cdot} = B^{-1} b$ y $y_j = B^{-1} a_j$ entonces, tenemos que el nuevo vector de variables básicas se puede escribir como:

$$\begin{bmatrix} X_{B_1} \\ X_{B_2} \\ \vdots \\ X_{Bm} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Y_{1k} \\ Y_{2k} \\ \vdots \\ Y_{mk} \end{bmatrix} X_k$$

En donde $X_k$ corresponde a la variable que va a entrar a la base. Así, al aumentar el valor de $X_k$ se aumentará también el valor de la función objetivo, porque tenemos la relación:

$$Z = Z_0 - (z_k - c_k)\, X_k$$

El valor se podrá aumentar si se garantiza que la solución sigue siendo básica factible, es decir, mientras cumplamos las restricciones de no negatividad, es decir, debemos garantizar que $X_B \geq 0$. Así, si para un índice $j$ en particular el valor de $y_{jk}$ es negativo, no tendremos problema y la solución seguirá siendo básica factible. El problema estará en los casos en los cuales $y_{jk} > 0$, allí $X_k$ solo podrá aumentar hasta que la componente $j$-ésima llegue a 0, como esto se debe garantizar para todas las componentes tenemos que:

$$X_k = \frac{b_l}{Y_{lk}} = min_{j=1, \dots, m} \left\{ \frac{b_l}{Y_{jk}} \quad , Y_{jk} \geq 0 \right\}$$

Así, la variable que sale de la base será la correspondiente al índice l, es decir, aquella variable que produce la mínima razón $\frac{b_l}{Y_{lk}}$. Además, el nuevo valor que tomará la variable $X_k$ será precisamente esa razón. Obviamente, la variable básica que sale de la base y se convierte en variable no básica tomará el valor de 0.

Este proceso se repetirá hasta que no encontremos ninguna variable no básica que cumpla con la relación $z_j - c_j < 0$, es decir, la condición de optimalidad para el problema será que para todas las variables no básicas tengamos que $z_j - c_j \geq 0$, es decir, necesitamos que $w \geq 0$.

Así, hemos descrito los pasos básicos del algoritmo, aunque partimos del hecho de tener una solución básica para comenzar a iterar; sin embargo, esta puede no ser siempre fácil de hallar, pero ese problema lo abordaremos en la siguiente unidad.

Solo nos falta por definir el procedimiento para un problema de **minimización**, pero para este caso lo único que cambia es la condición de optimalidad, es decir, el problema tendrá solución óptima si para todas las variables básicas tenemos que $z_j - c_j \leq 0$, es decir, $\mathbf{w \leq 0}$

Terminaremos esta cartilla con un ejemplo de la aplicación del método simplex a un problema lineal.

¿Sabía que...?

El método simplex fue diseñado durante la segunda guerra mundial para mecanizar el proceso de planeación de recursos de los aliados en la guerra.

Consideremos el problema lineal dado por:

$$\text{Máx } Z = 3X_1 + 5X_2$$

$$s.a$$

$$X_1 + X_2 \leq 6$$

$$X_2 \leq 3$$

$$X_1 \geq 0$$

$$X_2 \geq 0$$

Lo primero que debemos hacer es llevar el problema a la forma estándar, por lo que agregaremos dos variables de holgura a las dos primeras restricciones, no es necesario agregarlas a las restricciones de no negatividad. Por lo tanto, el problema queda de la siguiente forma:

$$\text{Máx } Z = 3X_1 + 5X_2$$

$$s.a$$

$$X_1 + X_2 + X_3 = 6$$

$$X_2 + X_4 = 3$$

$$X_1 \geq 0$$

$$X_2 \geq 0$$

$$X_3 \geq 0$$

$$X_4 \geq 0$$

De esta forma, la matriz $\boldsymbol{A}$ está dada por $\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$, el vector $\boldsymbol{c} = [3,5,0,0]$ y el vector $\boldsymbol{b} = \begin{bmatrix} 6 \\ 3 \end{bmatrix}$

El vector $\boldsymbol{X}$ tendrá 4 componentes, dadas por las cuatro variables de decisión. Para comenzar el algoritmo necesitamos una solución básica factible inicial, es decir, debemos seleccionar dos de las columnas de la matriz $\boldsymbol{A}$ que formen una matriz invertible; por motivos pedagógicos, veamos las 6 posibilidades explícitamente, sabiendo que tenemos 4 columnas hay 6 posibilidades para seleccionar. Cabe resaltar que esto no es necesario para usar el método Simplex, basta con tener solo una. Las seis posibilidades serían:

Columnas 1-2, $\boldsymbol{B} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ la matriz es invertible, así que genera una solución básica

Columnas 1-4, $\boldsymbol{B} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ la matriz es invertible, así que genera una solución básica

Columnas 2-3, $\boldsymbol{B} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$ la matriz es invertible, así que genera una solución básica

Columnas 3-4, $\boldsymbol{B} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ la matriz es invertible, así que genera una solución básica

Columnas 2-4, $\boldsymbol{B} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$ la matriz es invertible, así que genera una solución básica

Columnas 1-3, $\boldsymbol{B} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ la matriz es no es invertible, así que no genera una solución básica

Así que de las 6 opciones solo tenemos 5 que generan una solución básica, debemos comprobar que la solución generada además sea factible, es decir, garantizar que el vector $\boldsymbol{X}_B$ sea mayor o igual a 0.

columnas 1-2, $\boldsymbol{X_B = B^{-1}b} = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 6 \\ 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ 3 \end{bmatrix}$, como $\boldsymbol{X_B \geq 0}$ la solución es básica factible

columnas 1-4, $\boldsymbol{X_B = B^{-1}b} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 6 \\ 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 \\ 3 \end{bmatrix}$, como $\boldsymbol{X_B \geq 0}$ la solución es básica factible

columnas 2-3, $\boldsymbol{X_B = B^{-1}b} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 6 \\ 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ 3 \end{bmatrix}$, como $\boldsymbol{X_B \geq 0}$ la solución es básica factible

columnas 3-4, $\boldsymbol{X_B = B^{-1}b} = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 6 \\ 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ 3 \end{bmatrix}$, como $\boldsymbol{X_B \geq 0}$ la solución es básica factible

columnas 2-4, $\boldsymbol{X_B = B^{-1}b} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 6 \\ 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ -3 \end{bmatrix}$, como $\boldsymbol{X_B < 0}$ la solución es básica, pero no factible

Así, al final tenemos 4 posibles soluciones básicas factibles. Vamos a usar el método Simplex iniciando con la base generada por las columnas 3 y 4. Primero, debemos calcular la matriz básica, la solución básica factible, el valor de la función objetivo y el vector de costos reducidos, es decir, para todas las variables no básicas, el factor $z_j - c_j$, el cual decidirá si estamos o no en la solución óptima.

$$\boldsymbol{B} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \boldsymbol{X_B = B^{-1}b} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 6 \\ 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ 3 \end{bmatrix}, \boldsymbol{Z_0 = c_B X_B} = [0,0] \begin{bmatrix} 6 \\ 3 \end{bmatrix} = 0$$

$$\boldsymbol{w = c_B B^{-1} N - c_N} = [0,0] \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} - [3,5] = [-3, -5]$$

Como existen variables no básicas con costos reducidos menores a 0, entonces, no estamos en la solución óptima y por lo tanto debemos hacer una iteración del método Simplex. Con base en los costos reducidos la variable a entrar a la base sería la de costo reducido -5, es decir, $X_2$. Ahora debemos definir la variable que sale de la base, para ello calculamos la razón mínima:

$\boldsymbol{y_2 = B^{-1} a_2} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$ así $X_2 = \text{Min} \left\{ \frac{6}{1}, \frac{3}{1} \right\} = 3$, lo que se obtiene con $X_4$, por lo tanto $X_4$ sale de la base y $X_2$ entra a la base, así la nueva base estará formada por las columnas 2 y 3. Para esta nueva base debemos calcular la matriz básica, la solución básica factible, el valor de la función objetivo y el vector de costos reducidos para verificar se la solución es óptima.

$$\boldsymbol{B} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}, \boldsymbol{X_B} = \boldsymbol{B^{-1}b} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 6 \\ 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ 3 \end{bmatrix}, \boldsymbol{Z_0} = \boldsymbol{c_B X_B} = [5,0] \begin{bmatrix} 3 \\ 3 \end{bmatrix} = 15$$

$$\boldsymbol{w} = \boldsymbol{c_B B^{-1} N} - \boldsymbol{c_N} = [5,0] \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} - [3,0] = [-3,5]$$

Como hay una variable no básica con costo reducidos menor a 0, entonces, no estamos en la solución óptima y por lo tanto debemos hacer una iteración del método Simplex.

La variable a entrar a la base es la de costo reducido -3, es decir, $X_1$. Ahora, debemos definir la variable que sale de la base, para ello calculamos la razón mínima:

$\boldsymbol{y_2} = \boldsymbol{B^{-1} a_2} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$ así $X_2 = \text{Min} \left\{ \frac{3}{0}, \frac{3}{1} \right\} = 3$ lo que se obtiene con $X_3$, por lo tanto $X_3$ sale de la base y $X_1$ entra a la base, así la nueva base estará formada por las columnas 1 y 2. Para esta nueva base debemos calcular la matriz básica, la solución básica factible, el valor de la función objetivo y el vector de costos reducidos para verificar se la solución es óptima.

$$\boldsymbol{B} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}, \boldsymbol{X_B} = \boldsymbol{B^{-1}b} = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 6 \\ 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ 3 \end{bmatrix}, \boldsymbol{Z_0} = \boldsymbol{c_B X_B} = [3,5] \begin{bmatrix} 3 \\ 3 \end{bmatrix} = 24$$

$$\boldsymbol{w} = \boldsymbol{c_B B^{-1} N} - \boldsymbol{c_N} = [3,5] \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} - [0,0] = [3,2]$$

Como todos los costos reducidos son mayores que 0, nos encontramos en la solución óptima, es decir:

$$X_1^* = 3, X_2^* = 3 \text{ y } Z^* = 24$$

# Referencias

Bazaraa, M, Jarvis, J., Sherall, H. (2005). Programación lineal y flujo en redes (2a ed.). México: Limusa Editores.

# INFORMACIÓN TÉCNICA

FACULTAD DE
INGENIERÍA, DISEÑO
E INNOVACIÓN

**Módulo:** Investigación de Operaciones

**Unidad 2:** Métodos de solución de problemas lineales

**Escenario 4:** Método Simplex algebraico

**Autor:** Juan Carlos Gutiérrez Vanegas

**Asesor Pedagógico:** Amparo Sastoque

**Diseñador Gráfico:** Juan Rodríguez

**Asistente:** Eveling Peñaranda