Unidad 3 / Escenario 5

Lectura Fundamental

Cálculo I

Contenido

Palabras y frases claves: Límites, continuidad, propiedades, función, tendencia.

1. Introducción

Continuando con el estudio de las funciones, en esta sección se expondrá el concepto de límite; la idea de este concepto es la de acercarse lo más posible a un valor, es decir, si nos dan una función f se quiere estudiar el comportamiento de las imágenes de esta función, cuando los valores del dominio se acercan suficientemente a un valor real a, este valor no necesariamente hace parte del dominio.

Para estudiar este comportamiento, se tienen varias opciones: inicialmente se determinarán los límites por aproximación, luego gráficamente y finalmente en forma algebraica.

2. Aproximación al concepto de límite

Para iniciar la aproximación al concepto de límites, se iniciará por estudiar el comportamiento de la función $f(x)$ definida por:

$$f(x) = x^2 + 3x + 2$$

para valores cercanos a 1; tenga en cuenta que son valores cercanos a 1 no iguales, por tanto se tienen las siguientes tablas de valores; note que las tablas tienen valores alrededor de 1.

x	$f(x)$
0	2
0.5	3.75
0.8	5.04
0.9	5.51
0.95	5.7525
0.99	5.9501
0.995	5.975025
0.999	5.995001

Tabla 1: Aproximación por izquierda

x	$f(x)$
2	12
1.5	$8,75$
1.2	$7,04$
1.1	$6,51$
1.05	$6,2525$
1.01	$6,0501$
1.005	$6,025025$
1.001	$6,005001$

Tabla 2: Aproximación por derecha

Observando la gráfica de la función (Figura 1), se aprecia que cuando x se acerca a 1 por cualquier lado (izquierda y derecha), $f(x)$ está cerca de 6; tenga en cuenta que usted puede acercarse tanto como quiere a 1, esto se puede escribir en símbolos de la siguiente manera

$$\lim_{x \to 1} (x^2 + 3x + 2) = 6$$

y se expresa: el límite de la función $f(x) = x^2 + 3x + 2$ cuando x se aproxima a 1 es igual a 6.

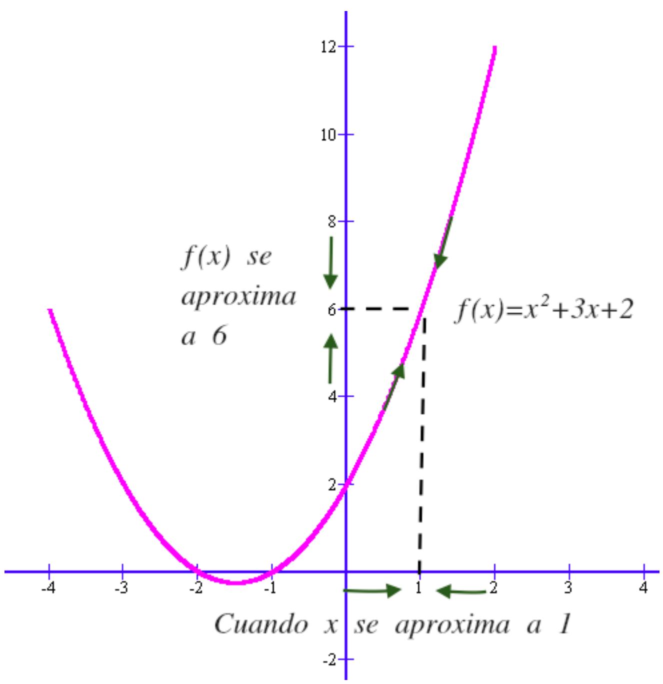

Figura 1: Idea intuitiva de límite

Por lo tanto, se puede definir el límite de una función así:

Definición del límite de una función

Se escribe

$$\lim_{x \to a} f(x) = L$$

y se dice que: el límite de $f(x)$, cuando x tiende a a, es igual a L. Si es posible hacer que los valores de $f(x)$ se aproximen de manera arbitraria a L (tan cerca como se quiera) al tomar x suficientemente próxima a a, pero no igual a a.

Tenga en cuenta, que los valores de $f(x)$ se aproximan cada vez más al número L, cuando x se acerca al número a (por izquierda y derecha) pero $x \neq a$; por lo tanto, se hace necesario estudiar algunas técnicas para hallar valores exactos de los límites; no sin antes estudiar la definición de límites laterales.

2.1. Límites laterales

Como ha podido observar en las tablas de valores, nos acercamos a un punto por los dos lados, es decir, por izquierda y por derecha; esta situación se puede expresar en símbolos así:

Definición de los límites laterales

1. El $\lim_{x \to a^+} f(x) = L$ límite por derecha, es igual a L si es posible hacer los valores de $f(x)$ arbitrariamente cercanos a L al tomar x suficientemente cerca a a y mayor que a.
2. El $\lim_{x \to a^-} f(x) = L$ límite por izquierda; es igual a L si es posible hacer los valores de $f(x)$ arbitrariamente cercanos a L al tomar x suficientemente cerca a a y x menor que a.

Teniendo en cuenta la definición de límites laterales, es posible reescribir la definición de límite teniendo en cuenta esta definición así:

$$\lim_{x \to a} f(x) = L \qquad \textbf{si y solo si} \qquad \lim_{x \to a^-} f(x) = L \quad \textbf{y} \quad \lim_{x \to a^+} f(x) = L$$

Es decir, que si los límites por la izquierda y por la derecha son diferentes, el límite no existe. Observe el siguiente ejemplo:

Ejemplo 1.

Dada la función definida a trozos

$$f(x) = \begin{cases} x^2 + 3, & \text{si } -2 \leq x < 1 \\ 1, & \text{si } x = 1 \\ x - 3, & \text{si } 1 < x \leq 3 \end{cases}$$

calcular el límite $\lim_{x \to 1} f(x)$.

Solución

Observando la gráfica de esta función se calcularán los límites laterales

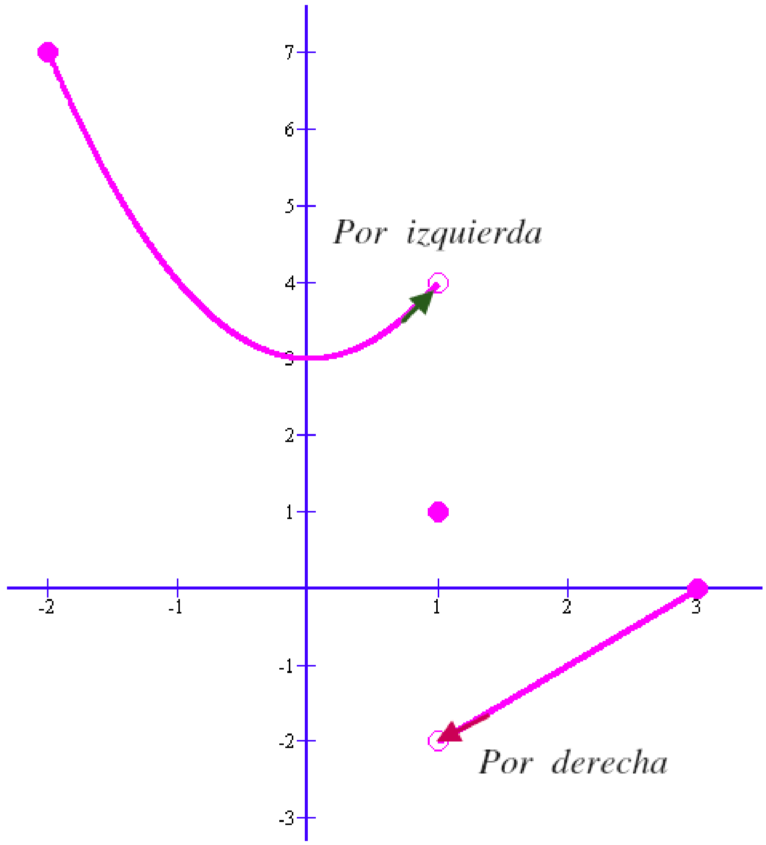

Figura 2: Ejemplo límite lateral

1. Calculando el límite por la derecha, se puede apreciar en la gráfica que es -2
2. Ahora el límite por izquierda, se aprecia que tiende a 4

Entonces

$$\lim_{x \to 1^-} f(x) \neq \lim_{x \to 1^+} f(x)$$

Por lo tanto se concluye que $\lim_{x \to 1} f(x)$ **no existe**.

3. Cálculo de límites

En esta sección se estudiarán métodos algebraicos para resolver límites, por lo tanto, se exponen las siguientes propiedades:

Propiedades de los límites

Si $\lim\limits_{x\to a} f(x)$ y $\lim\limits_{x\to a} g(x)$ existen, se cumplen la siguientes propiedades:

1. $\lim\limits_{x\to a} x = a$ (Observe que se puede solucionar el límite reemplazando el valor de x por a)
2. $\lim\limits_{x\to a} k = k$ (Aquí,la función es la función constante de valor k, es decir $f(x) = k$)
3. $\lim\limits_{x\to a} c \cdot f(x) = c \lim\limits_{x\to a} f(x)$, en donde c es un número real.
4. $\lim\limits_{x\to a}(f(x) \pm g(x)) = \lim\limits_{x\to a} f(x) \pm \lim\limits_{x\to a} g(x)$
5. $\lim\limits_{x\to a}(f(x) \cdot g(x)) = \lim\limits_{x\to a} f(x) \cdot \lim\limits_{x\to a} g(x)$
6. $\lim\limits_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \dfrac{\lim\limits_{x\to a} f(x)}{\lim\limits_{x\to a} g(x)}$
   a. **Caso 1.** Si $\lim\limits_{x\to a} f(x) = L \neq 0$ y $\lim\limits_{x\to a} g(x) = M \neq 0$ entonces $\lim\limits_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{L}{M}$
   b. **Caso 2.** Si $\lim\limits_{x\to a} f(x) = 0$ y $\lim\limits_{x\to a} g(x) = M \neq 0$ entonces $\lim\limits_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{0}{M} = 0$
   c. **Caso 3.** Si $\lim\limits_{x\to a} f(x) = L \neq 0$ y $\lim\limits_{x\to a} g(x) = 0$ entonces $\lim\limits_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{L}{0}$ el límite no existe, es indeterminado.
7. $\lim\limits_{x\to a}[f(x)]^n = [\lim\limits_{x\to a} f(x)]^n$ donde n es un entero positivo
8. $\lim\limits_{x\to a} \sqrt[n]{f(x)} = \sqrt[n]{\lim\limits_{x\to a} f(x)}$ donde n es un entero positivo.(Si n es par, se supone que $\lim\limits_{x\to a} f(x) > 0$)

Observe los siguientes ejemplos, donde se aplican algunas propiedades de los límites:

Ejemplo 2.

Calcular si existe $\lim\limits_{x\to -7}(3x^3 - 4x + 16)$

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to -7}(3x^3 - 4x + 16) &= \lim_{x\to -7} 3x^3 - \lim_{x\to -7} 4x + \lim_{x\to -7} 16 \\
&= 3 \cdot \lim_{x\to -7} x^3 - 4 \cdot \lim_{x\to -7} x + \lim_{x\to -7} 16 \\
&= 3(-7)^3 - 4(-7) + 16 \\
&= -985
\end{aligned}$$

Ejemplo 3.

Calcular $\lim\limits_{x\to \frac{1}{2}}(x-1)(x+2)$. Aplicando la propiedad tenemos

$$\lim_{x\to \frac{1}{2}}(x-1)(x+2) = \lim_{x\to \frac{1}{2}}(x-1) \cdot \lim_{x\to \frac{1}{2}}(x+2)$$

$$= \left(\frac{1}{2} - 1\right) \cdot \left(\frac{1}{2} + 2\right) = \left(-\frac{1}{2}\right) \cdot \left(\frac{5}{2}\right) = \frac{-5}{4}$$

Límites por sustitución directa

Si f es una función polinomial o racional y a está en el dominio de f, entonces

$$\lim_{x \to a} f(x) = f(a)$$

Ejemplo 4.

Calcular $\lim_{x \to \frac{1}{2}} (x-1)(x+2)$. Aplicando la sustitución directa se tiene:

$$\lim_{x \to \frac{1}{2}} (x-1)(x+2) = \left(\frac{1}{2} - 1\right) \cdot \left(\frac{1}{2} + 2\right) = \left(-\frac{1}{2}\right) \cdot \left(\frac{5}{2}\right) = \frac{-5}{4}$$

Los siguientes ejemplos requieren un poco más de trabajo para evaluar el límite; pues no todo los límites se pueden resolver por sustitución directa.

Ejemplo 5.
Calcular si existe: $\lim_{x \to 7} \frac{\sqrt{x+2}-3}{x-7}$.
Aplicando sustitución directa se tiene

$$\lim_{x \to 7} \frac{\sqrt{x+2}-3}{x-7} = \lim_{x \to 7} \frac{\sqrt{7+2}-3}{7-7} = \frac{0}{0}$$

En este caso se dice que el límite es indeterminado, para esto hay dos forma de resolverlo: por factorización o por el conjugado; en este caso se hará usando el conjugado del numerador; por lo tanto, se multiplicará numerador y denominador por $\sqrt{x+2}+3$. **Note que el conjugado de la expresión se obtuvo cambiando el signo que hay entre los términos.**

$$\begin{aligned}
\lim_{x \to 7} \frac{\sqrt{x+2}-3}{x-7} &= \lim_{x \to 7} \left(\frac{\sqrt{x+2}-3}{x-7}\right)\left(\frac{\sqrt{x+2}+3}{\sqrt{x+2}+3}\right) \\
&= \lim_{x \to 7} \frac{(\sqrt{x+2}-3)(\sqrt{x+2}+3)}{(x-7)(\sqrt{x+2}+3)} \\
&= \lim_{x \to 7} \frac{(x+2)-9}{(x-7)(\sqrt{x+2}+3)} \\
&= \lim_{x \to 7} \frac{(x-7)}{(x-7)(\sqrt{x+2}+3)} \\
&= \lim_{x \to 7} \frac{1}{\sqrt{x+2}+3)} = \frac{1}{6}
\end{aligned}$$

Luego, $\lim_{x \to 7} \frac{\sqrt{x+2}-3}{x-7} = \frac{1}{6}$.

Ejemplo 6.
Calcular si existe: $\lim_{x \to 2} \dfrac{x^2+x-6}{x-2}$.

Realizando sustitución directa se tiene

$$\lim_{x\to 2}\frac{x^2+x-6}{x-2}=\frac{2^2+2-6}{2-2}=\frac{0}{0}$$

Nuevamente el límite es indeterminado, en este caso se hará factorización, si observa el enunciado, notará que el numerador se puede factorizar (trinomio), por tanto se tiene:

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 2}\frac{x^2+x-6}{x-2}&=\lim_{x\to 2}\frac{(x+3)(x-2)}{x-2}\\&=\lim_{x\to 2}(x+3)=5\end{aligned}$$

Luego, $\lim_{x\to 2}\frac{x^2+x-6}{x-2}=5$

A continuación, se sugiere una método para resolver límites.

Esquema para el cálculo de límites

1. Evalúe la función dada en el punto en el cual se pide calcular el límite, si le es posible hacer dicha evaluación, es decir, si obtiene un número real como respuesta, este será entonces el límite buscado.
2. En el caso que no es posible evaluar la función en el punto indicado, entonces se procede a factorizar y/o multiplicar por el conjugado la expresión, con la intención de quitar la indeterminación. Una vez hecho esto, se vuelve a evaluar la función que resulta en el punto indicado, y si obtiene un número real como respuesta, éste es entonces el límite; de lo contrario, se dice que el límite no existe.
3. También se sugiere hacer la gráfica de la función para calcular y/o comprobar el límite.

4. Continuidad

La idea intuitiva en matemáticas de la continuidad de una función tiene que ver con poder dibujar la gráfica de dicha función de un solo trazo. Es decir, una función es continua si su gráfica no presenta "'huecos" ni saltos.

La continuidad es una característica importante de las funciones, puesto que es esencial para muchos procesos matemáticos que más adelante se estudiarán. Observa las siguientes imagénes:

- Ejemplo de una función no continua, puesto que el límite no existe.

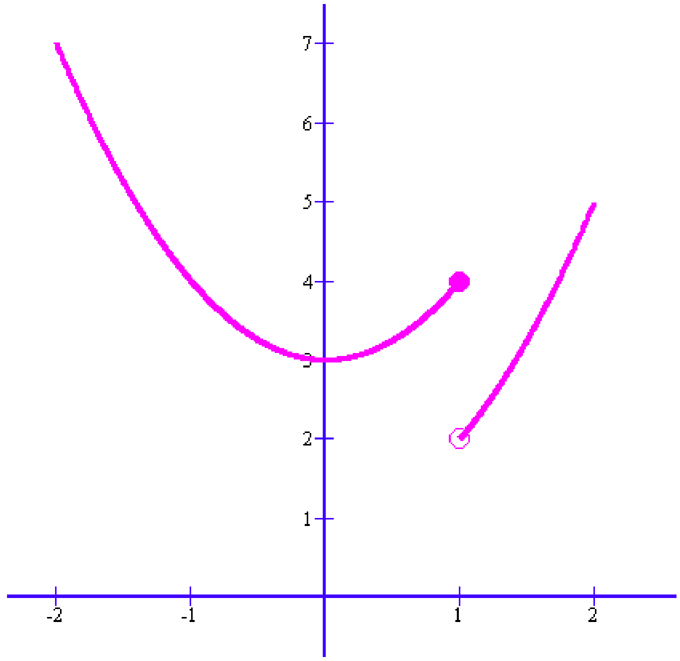

Figura 3: $\lim_{x\to 1} f(x)$ no existe

- Ejemplo de una función no continua, puesto que el valor del límite no coincide con la imagen de la función.

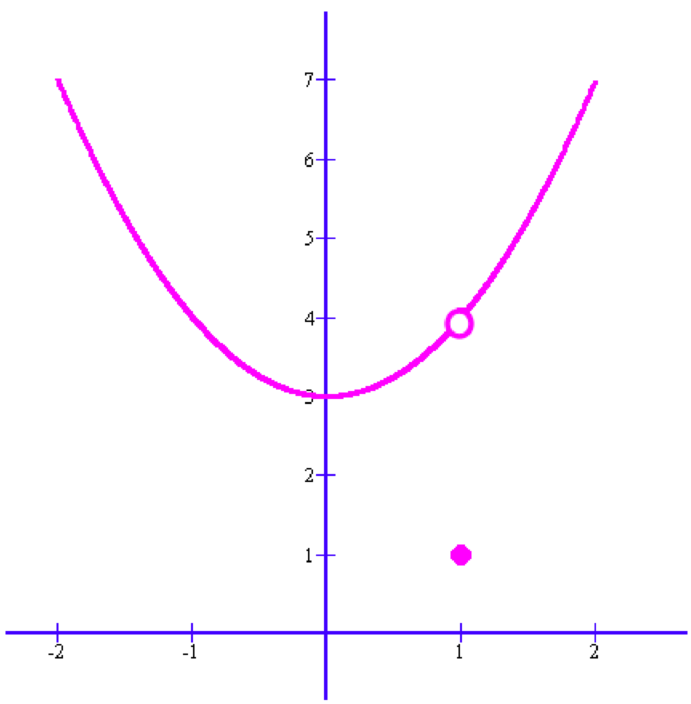

Figura 4: $\lim_{x\to 1} f(x)$ existe pero $\lim_{x\to 1} f(x) \neq f(1)$

- Ejemplo de una función continua.

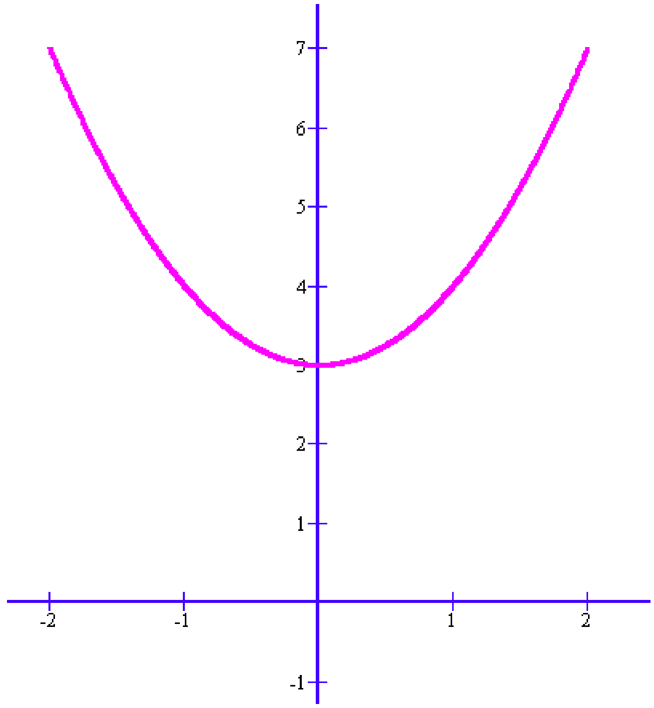

Figura 5: $\lim_{x \to 1} f(x) = f(1)$

Observe la definición formal de continuidad de una función en un punto.

Definición: sea f definida en un intervalo abierto que contiene a a, decimos que f es continua en a si

$$\lim_{x \to a} f(x) = f(a)$$

Esta definición implica tres cosas que usted debe tener en cuenta:

Una función f es continua en $x = a$, si se cumplen todas y cada una de las siguientes condiciones:

1. $f(a)$ esta definida.
2. $\lim_{x \to a} f(x)$ existe.
3. $\lim_{x \to a} f(x) = f(a)$.

En caso de que no se cumpla por lo menos una de estas condiciones, la función se dice que es discontinua

Observe el siguiente ejemplo:

Ejemplo 7.

Determine si la función

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x^3-27}{x-3}, & \text{si } x \neq 3 \\ 27, & \text{si } x = 3 \end{cases}$$

es continua en $x = 3$. Si no es continua, diga ¿por qué?

Solución

Teniendo en cuenta la definición de continuidad, se probarán las tres condiciones, en caso que las cumpla, la función es continua; veamos:

1. $f(3) = 27$ existe la imagen, por definición de la función.
2. Resolviendo el límite se tiene:

$$\begin{aligned} \lim_{x \to 3} \frac{x^3-27}{x-3} &= \lim_{x \to 3} \frac{(x-3)(x^2+3x+9)}{(x-3)} \\ &= \lim_{x \to 3} (x^2+3x+9) = 27 \end{aligned}$$

3. Como $\lim_{x \to 3} f(x) = f(3) = 27$ la función es continua en $x = 3$.

Para finalizar, una aplicación de la continuidad es el teorema del valor intermedio:

Teorema del valor intermedio
Sea f una función definida en $[a, b]$ y sea W un número entre $f(a)$ y $f(b)$. Si f es continua en $[a, b]$, entonces existe al menos un número c entre a y b, tal que $f(c) = W$

5. Ejercicios

Para afianzar y verificar lo estudiado en la presente sección realice lo siguiente: Hallar los siguientes límites si existen.

1. Calcular si existe el límite de cada una de las siguientes funciones:

   a) $\lim_{x \to 3} (2x - 3)$

   b) $\lim_{x \to -2} \frac{x^2-4}{x-2}$

   c) $\lim_{x \to 1} \frac{x^2-4x+3}{x^2-1}$

   d) $\lim_{x \to 1} h(x)$ siendo

   $$h(x) = \begin{cases} 3x - 2, & \text{si } x \leq 1 \\ x^2 + 5, & \text{si } x > 1 \end{cases}$$

   Sugerencia: Debe calcular los límites laterales.

   e) $\lim_{x \to 9} \frac{x-9}{\sqrt{x}-3}$

   f) $\lim_{h \to 0} \frac{(x+h)^2-x^2}{h}$

   g) $\lim_{x \to 5} \frac{x-5}{x^2-25}$

   h) $\lim_{x \to -5} \frac{x^2+3x-10}{x+5}$

i) $\lim\limits_{t\to 5} \dfrac{t^2+t-2}{t^2-1}$

j) $\lim\limits_{x\to -2} \dfrac{-2x-4}{x^3+2x^2}$

k) $\lim\limits_{u\to 1} \dfrac{u^4-1}{u^3-1}$

l) $\lim\limits_{x\to 9} \dfrac{\sqrt{x}-3}{x-9}$

m) $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{x-1}{\sqrt{x+3}-2}$

n) $\lim\limits_{h\to 0} \dfrac{3h}{\sqrt{3h+1}+1}$

ñ) $\lim\limits_{x\to 2} \dfrac{x+3}{x+6}$

o) $\lim\limits_{y\to -3} (5-y)^{4/3}$

p) $\lim\limits_{h\to 0} \dfrac{\sqrt{h^2+4h+5}-\sqrt{5}}{h}$

q) $\lim\limits_{y\to -0.5} \sqrt{\frac{x+2}{x+1}}$

r) $\lim\limits_{x\to 4} \dfrac{\sqrt{x}-2}{x-4}$

2. Bosqueje la gráfica de

$$f(x) = \begin{cases} -x, & \text{si } x \leq 0 \\ x, & \text{si } 0 \leq x < 1 \\ 1+x & \text{si } x \geq 1 \end{cases}$$

Luego determine cada uno de los siguientes o establezca que no existen

a) $\lim\limits_{x\to 0} f(x)$

b) $\lim\limits_{x\to 1} f(x)$

c) $\lim\limits_{x\to 1^+} f(x)$

d) $f(1)$

3. Para la función f determine el límite que se indica o el valor de función, establezca que el límite o el valor de la función no existen.

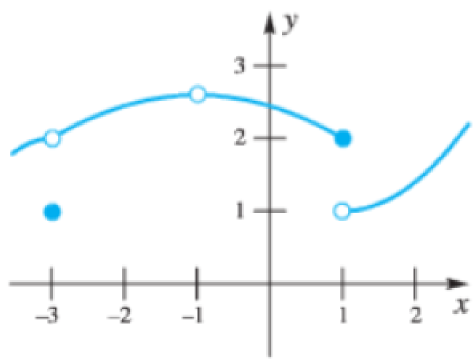

Figura 6: Ejercicios
Fuente: Cálculo de una Variable. Editorial Pearson

a) $\lim\limits_{x\to -3} f(x)$

b) $f(-3)$

c) $f(-1)$

d) $\lim\limits_{x\to -1} f(x)$

e) $f(1)$

f) $\lim\limits_{x\to 1} f(x)$

g) $\lim\limits_{x\to 1^-} f(x)$

h) $\lim\limits_{x\to 1^+} f(x)$

i) $\lim\limits_{x\to -1^+} f(x)$

4. Determinar si cada una de las siguientes funciones es continua en el punto indicado:

a)

$$h(x) = \begin{cases} 3x-2, & \text{si } x \leq 1 \\ x^2+5, & \text{si } x > 1 \end{cases}$$

en el punto $x = 1$.

b) Trazar un bosquejo de la gráfica $h(x)$

c)

$$t(x) = \begin{cases} 3-x, & \text{si } x \geq 3 \\ x-2, & \text{si } x \in (0,3) \\ x-1, & \text{si } x \in (-\infty, 0) \end{cases}$$

en el punto $x = 3$ y $x = 0$.

d) Trazar un bosquejo de la gráfica $t(x)$

e) Determinar en qué punto es discontinua la función $f(x) = \frac{5}{x-3}$. Justifique su respuesta.

f) Determinar en qué puntos es discontinua la función $g(x) = \frac{x}{3-\sqrt{x^2+5}}$

Referencias

[1] Zamora, H. (2010). *Límites. Ideas fundamentales-Cartilla.* Bogotá, Colombia: Institución universitaria politécnico grancolombiano- Educación Virtual.

[2] Stewart, J; Redlin, L & Watson, S. (2001).*Precalculo.* México. Thomson Learning.

[3] Grupo de Modelamiento Matemático. (2017).Facultad de Ingeniería y Ciencias básicas Institución Universitaria Politécnico Grancolombiano.

INFORMACIÓN TÉCNICA

Ingeniería y
Ciencias Básicas

Módulo: Cálculo I
Unidad 3: Límites y derivadas
Escenario 5: Límites y continuidad

Autor: Luisa Fernanda Martínez Rojas

Asesor Pedagógico: Diana Marcela Díaz Salcedo
Diseñador Gráfico: Kevin Mauricio Ramírez Correa
Corrector de estilo:
Asistente: Leidy Alejandra Morales