Unidad 1 / Escenario 1

Lectura fundamental

Funciones trascendentes e inversas

Contenido

Palabras clave: logaritmo, exponencial, logaritmo natural, función inversa, derivada de logaritmo.

Funciones trascendentes e inversas

En este espacio se habla de las funciones trascendentes, sus propiedades y, especialmente, de su uso en actividades cotidianas, abordando el contenido mínimo para estudiantes de ingeniería.

Los matemáticos del siglo XVI hasta el XVIII, como, por ejemplo, Euler y Briggs, se ocuparon de establecer relaciones funcionales entre variables que eran solo de orden geométrico; la idea era eliminar el uso de figuras. De allí, se generaron otras funciones que trascienden al álgebra porque no satisfacen una ecuación polinómica o porque tienen coeficientes polinómicos, las cuales reciben el nombre de **funciones trascendentes**. Entre estas se encuentran las funciones exponenciales, logarítmicas, trigonométricas, hiperbólicas y sus inversas, estas últimas puede estudiarlas en el tercer apartado de esta lectura.

¿Sabía que...?

Antes de que los logaritmos se estudiaran o analizaran como funciones, ellos se usaban en la resolución de ecuaciones. Algo análogo ocurría con las exponenciales y, en general, con las que posteriormente se llamaron trascedentes. Es necesario recordar la relación fundamental de los exponentes y los logaritmos (no las funciones) establecida en la época escolar básica, la cual indica que:

Para todo $\boldsymbol{a} > 0$, $\boldsymbol{a}^{\boldsymbol{x}} = \boldsymbol{y}$ si y solo si $\log_{\boldsymbol{a}} \boldsymbol{y} = \boldsymbol{x}$. Por ejemplo, $\log_2 8 = 3$ porque $2^3 = 8$

Observe que el logaritmo encuentra el exponente al que estaba elevada una base para que se obtenga como resultado un número; en este ejemplo, se dice que el logaritmo en base 2 de 8 es 3 porque el exponente al que se debe elevar la base 2, para que su resultado sea 8, es 3.

A partir de dicha relación, históricamente se pasan a resolver ecuaciones buscando determinar el valor que debe tener un exponente para satisfacer una igualdad determinada. Parte de la aplicación de los logaritmos en la solución de ecuaciones la pueden encontrar en el material de apoyo “Una aplicación de las propiedades de los logaritmos”.

1. Funciones exponenciales y logarítmicas

Después de la resolución de ecuaciones de tipo exponencial y logarítmico se ahondó en el estudio de estos conceptos a través de funciones, las cuales buscaban analizar el comportamiento de una base cuando se variaba su exponente; el objetivo era ver cómo cambiaba la potencia de una base cuando el exponente tomaba diferentes valores. Esta misma idea se desarrolló con los logaritmos cuyo objeto de estudio era definir el comportamiento del logaritmo de una base dada, es decir, analizar qué valores tomaba el exponente de una base cuando su potencia cambiaba.

De acuerdo con esto, la **función exponencial** se define como:

$f(x) = ka^x$, donde k es cualquier real, $a > 0$ y $a \neq$

Tenga en cuenta que la variable está en el exponente. Si $a = e = 2{,}7182\ldots$, la función exponencial se transforma en $f(x) = ke^x$.

Igualmente, la función logarítmica se define como:

$f(x) = \log_a x$, donde $a > 0, a \neq 1$ y $x > 0$

Si $a = e = 2{,}7182\ldots$, la función logarítmica se escribe como $f(x) = \ln x$ y se llama la función logaritmo natural. Si $a = 10$, la función logarítmica se escribe como $f(x) = \log x$ y se denomina logaritmo decimal o común. Estos dos logaritmos son los que maneja la calculadora.

Cómo mejorar...

Ingrese al siguiente link y observe las características de estas dos funciones; seleccione la función exponencial dando clic solo sobre la expresión que dice a^x y manipule el deslizador para que vea el comportamiento de la potencia al variar el exponente. De igual manera, maneje el deslizador de la función $\log_a x$, visualice el comportamiento de juntas funciones y cómo ambas son una la inversa de la otra: **https://www.geogebra.org/m/pXfHPKvH**

Hasta aquí se han definido estas dos funciones, la exponencial y la logarítmica; a continuación, aparecen situaciones en donde se hace uso de ellas:

1.1. Aplicación de la función exponencial

En Colombia, las sanciones por conducir vehículos en estado de embriaguez van desde la suspensión por algunos años de la licencia de conducción hasta pagos millonarios, que en algunas ocasiones llevan a la pérdida del vehículo. La pregunta que surge es, ¿cómo es posible medir el nivel de alcohol en la sangre de una persona? Estudios realizados han establecido que el riesgo, en porcentaje, de provocar un accidente de tránsito, llamémoslo y, está modelado por la función: $y = 6e^{kx}$, donde x representa la cantidad de alcohol presente en la sangre y k es una constante.

Figura 1. Infracción por alcohol

Observe que la función que va a permitir determinar el riesgo de provocar un accidente por embriaguez es exponencial, ya que la variable se encuentra en el exponente. Eso indica que el riesgo crece muy rápido, dependiendo de cualquier mínima variación en el consumo de alcohol. Con la relación que expone la función dada, es posible resolver interrogantes como los siguientes:

A. Si se sabe que hay un riesgo del 15 % de sufrir un accidente de tránsito cuando en la sangre hay una concentración de 0,07 de alcohol, ¿cuál es el valor de la constante k?, ¿cómo queda definida la función de riesgo con esta constante?

Solución:

De acuerdo con los datos entregados, se sabe que $y=15,\ x=0,07$ y se pide encontrar el valor de k.

Se debe solucionar la ecuación:

$$15=6e^{0,07k}$$

$$\frac{15}{6}=e^{0,07k}$$ Se deja la exponencial sola y positiva

$$\frac{5}{2}=e^{0,07k}$$ Se simplifica la anterior fracción

$$ln\left(\frac{5}{2}\right)=ln\left(e^{0,07k}\right)$$ Se aplica logaritmo natural a cada lado

$$ln\left(\frac{5}{2}\right)=0,07k$$ Se aplican propiedades de logaritmos

$$\frac{ln\left(\frac{5}{2}\right)}{0,07}=k$$ Se despeja el valor de k

$k\approx 13,08986$ aproximadamente

Por lo que la función se transforma en $y=6e^{13,08986x}$

B. Con la función de riesgo obtenida en el ítem anterior, ¿cuál es el riesgo de sufrir un accidente si la concentración de alcohol es de 0,13?

Solución:

Se sabe que $x = 0{,}13$ y se pide hallar el valor de y, por lo que se sustituye dicho valor en la expresión que representa la función.

$$y = 6e^{13{,}08986(0{,}13)}$$

$$y = 6e^{1{,}7016818}$$

$$y = 32{,}89\ \%$$

Por tanto, el riesgo de sufrir un accidente es del 32,89 %.

C. Legalmente, las sanciones por alcohol se presentan cuando se detecta en la sangre un riesgo de sufrir un accidente del 20 % o más. De acuerdo con esto, ¿cuál es la concentración mínima de alcohol que debe tener un conductor para ser sancionado?

Para encontrar la concentración mínima de alcohol se debe identificar cuándo $y \geq 20.$ La ecuación a resolver es:

$6e^{13{,}08986x} \geq 20$	Se plantea la inecuación
$e^{13{,}08986x} \geq \frac{10}{3}$	Se deja la exponencial sola y positiva
$lne^{13{,}08986x} \geq ln\left(\frac{10}{3}\right)$	Se aplica logaritmo natural a cada lado
$13{,}08986x \geq ln\left(\frac{10}{3}\right)$	Se aplican propiedades de logaritmos
$x \geq \dfrac{ln\left(\frac{10}{3}\right)}{13{,}08986}$	Se despeja la variable x

$x \geq 0{,}0919$ **de concentración de alcohol**

1.2. Aplicación de la función logarítmica

Figura 2. Instrumentos de vuelo

Los aviones, para garantizar un viaje seguro, poseen múltiples instrumentos de vuelo. Uno de ellos relaciona la altitud (a) en metros sobre el nivel del mar con la temperatura del aire (T) medida en grados Celsius, la presión atmosférica (P_0) al nivel del mar y la presión atmosférica (P) a la altitud a, medidas en cm de mercurio, mediante la expresión matemática: $a = (30T + 8000)\ln\left(\frac{P_0}{P}\right)$

A. Si a cierta altura de vuelo la presión atmosférica es de $32{,}3$ cm de mercurio, la temperatura es de $-2°\mathrm{C}$ y la presión atmosférica al nivel del mar es de $76\ cm$ de mercurio, determine dicha altura.

SOLUCIÓN

Se conocen los siguientes datos:

$$P_0 = 76\,cm,\quad P = 32{,}3\,cm,\quad T = -2$$

Por lo que:

$$a = (30(-2) + 8000)\ln\left(\frac{76}{32{,}3}\right)$$

Se sustituye en la ecuación

$a=(-60+8000)\ln(2,35294)$	Se opera el coeficiente del logaritmo
$a=7940\ln(2,35294)$	Se opera el coeficiente del logaritmo
$a=6793,98$	Se calcula el logaritmo y se multiplica por el coeficiente

De acuerdo con esto, la altura a la que se encuentra el vuelo es de 6793,98 metros.

B. Si se mantienen las condiciones para la temperatura y la presión a nivel del mar del numeral anterior, ¿qué presión atmosférica marca el instrumento si en ese instante la altitud es de 12000m?

Solución

En este caso se conocen

$$P_0=76\,cm,\quad a=12000m,\quad T=-2^{\circ}\mathrm{C}$$

Por lo que:

$12000=(30(-2)+8000)\ln\left(\frac{76}{P}\right)$	Se sustituye en la ecuación
$\frac{12000}{7940}=\ln\left(\frac{76}{P}\right)$	Se deja el logaritmo solo y positivo
$e^{\frac{600}{397}}=\frac{76}{P}$	Se escribe el logaritmo como una potencia
$P=\frac{76}{e^{\frac{600}{397}}},$	Se despeja P dado que la función exponencial no es cero
$P=16,76$	Se realizan operaciones

Lo que significa que, con esas condiciones, la presión atmosférica es de $16,76$ cm de mercurio.

2. Derivadas de las funciones exponenciales y logarítmicas

Cuando se revisan los problemas anteriores surgen algunas inquietudes como ¿qué tanto aumenta el riesgo de sufrir un accidente al realizar un mínimo aumento en el nivel de alcohol?, o, en el caso de los vuelos, ¿qué tanto cambia la presión atmosférica cuando se hace una mínima variación en la altura?

Para dar solución a esos interrogantes es necesario revisar el concepto de derivada en las funciones exponenciales y logarítmicas, ya que con ellas se establece cómo ocurren las variaciones infinitesimales.

En síntesis...

- Para la función $f(x)=a^{g(x)}$, la derivada se define como $f'(x)=a^{g(x)}(g'(x))(lna)$

Un caso particular de esta ocurre cuando $f(x)=e^{g(x)}$, cuya derivada es $f'(x)=e^{g(x)}(g'(x))$

- Para la función $f(x)=log_a(g(x))$, la derivada es $f'(x)=\dfrac{g'(x)}{g(x)(lna)}$

Un caso particular de esta ocurre cuando $f(x)=\ln(g(x))$, cuya derivada es $f'(x)=\dfrac{g'(x)}{g(x)}$

Antes de dar respuesta a las preguntas planteadas, vea algunos ejemplos en donde se aplican esas reglas de derivación. En cada caso se derivará y simplificará completamente.

Ejemplo 1. $f(x)=(x-4)e^{3x-2}$

Solución

$f'(x)=(x-4)e^{3x-2}(3)+e^{3x-2}(1)$	Se aplica la regla del producto para derivar
$f'(x)=e^{3x-2}(3(x-4)+1)$	Se saca factor común
$f'(x)=e^{3x-2}(3x-11)$	Se realizan las operaciones dentro del paréntesis

Ejemplo 2. $g(x)=\dfrac{2x-3}{\log_4\left(x^2-1\right)}$

Solución

$g'(x)=\dfrac{\log_4\left(x^2-1\right)(2)-(2x-3)\left(\dfrac{2x}{\left(x^2-1\right)ln4}\right)}{\left(\log_4\left(x^2-1\right)\right)^2}$	Se aplica la regla del cociente y del logaritmo
$g'(x)=\dfrac{2\log_4\left(x^2-1\right)\left(x^2-1\right)ln4-2x(2x-3)}{\left(\log_4\left(x^2-1\right)\right)^2\left(x^2-1\right)ln4}$	Se hacen las operaciones que estaban indicadas

Ejemplo 3. $y=2^{3x-4}$

Solución

$y'=2^{3x-4}(3)ln(2)$	Se deriva la función exponencial
$y'=3ln(2)(2^{3x-4})$	Se organiza el resultado

Ejemplo 4. $y=\left(x^2+1\right)^{ln(x)}$

Solución

Para derivar este tipo de funciones, que se caracterizan por ser una función elevada a otra, se puede usar cualquiera de los dos métodos presentados a continuación:

Método 1. Dado que la base de la exponencial es positiva, se aplica logaritmo natural a ambos lados de la función y se deriva implícitamente.

$y=\left(x^2+1\right)^{ln(x)}$	Enunciado del ejercicio
$ln(y)=ln\left(x^2+1\right)^{ln(x)}$	Se aplica logaritmo natural a ambos lados

$ln(y)=ln(x).ln\left(x^2+1\right)$	Se aplican las propiedades de los logaritmos
$\frac{y'}{y}=ln(x)\left(\frac{2x}{x^2+1}\right)+ln\left(x^2+1\right)\left(\frac{1}{x}\right)$	Se deriva implícitamente con respecto a x a ambos lados
$y'=y\left[\frac{2xln(x)}{x^2+1}+\frac{ln\left(x^2+1\right)}{x}\right]$	Se despeja y'
$y'=\left(x^2+1\right)^{ln(x)}\left[\frac{2xln(x)}{x^2+1}+\frac{ln\left(x^2+1\right)}{x}\right]$	

Se sustituye a y por $\left(x^2+1\right)^{ln(x)}$

Método 2. Con las funciones inversas de la función exponencial y la logarítmica se usa el hecho de que , $e^{In(x)}=x$ y que $In(e)^x=x$ (Revisar en el material complementario la sección 6.3, donde se muestra la función exponencial y su inversa)

$y=\left(x^2+1\right)^{ln(x)}$	Enunciado del ejercicio
$y=e^{\ln\left(x^2+1\right)^{ln(x)}}$	Se reescribe a $\left(x^2+1\right)^{ln(x)}$ como $e^{\ln\left(x^2+1\right)^{ln(x)}}$
$y=e^{\ln(x)\bullet\ln\left(x^2+1\right)}$	Se aplican las propiedades de logaritmos
$y'=e^{\ln(x)\bullet\ln\left(x^2+1\right)}\left[ln(x)\left(\frac{2x}{x^2+1}\right)+ln\left(x^2+1\right)\left(\frac{1}{x}\right)\right]$	Se deriva la función exponencial
$y'=\left(x^2+1\right)^{ln(x)}\left[\frac{2xln(x)}{x^2+1}+\frac{ln\left(x^2+1\right)}{x}\right]$	

Se vuelve a aplicar la inversa de la función y se reescribe la respuesta de forma abreviada.

2.1. Ejercicios propuestos para practicar

Derive y simplifique completamente cada una de las siguientes funciones:

1. $f(x) = x^x, \quad x > 0$
2. $y = x^{sen(x)}, \quad x > 0$
3. $g(x) = 2^{tan(t)}$
4. $h(x) = \ln(x^2)^{2x+3}$

Para profundizar un poco más en la noción de funciones inversas, en la siguiente sección se abordará este tema.

3. Función inversa

El concepto de función inversa requiere de condiciones para su existencia, las cuales se presentarán a continuación. Tenga presente que antes de determinar una función de este tipo deberá verificar que se cumplan dichas condiciones.

3.1. Condiciones para la existencia de la función inversa:

Observe la gráfica de las dos funciones presentadas a continuación y note que en la gráfica de $f(x)$ la imagen del punto 1 es la misma del punto -1. Se dice que dos puntos distintos de su dominio tienen la misma imagen. De otra parte, en la gráfica de $g(x)$ no existen puntos distintos del dominio que tengan la misma imagen. Se dice que g es una función inyectiva o uno a uno, en tanto que f no lo es.

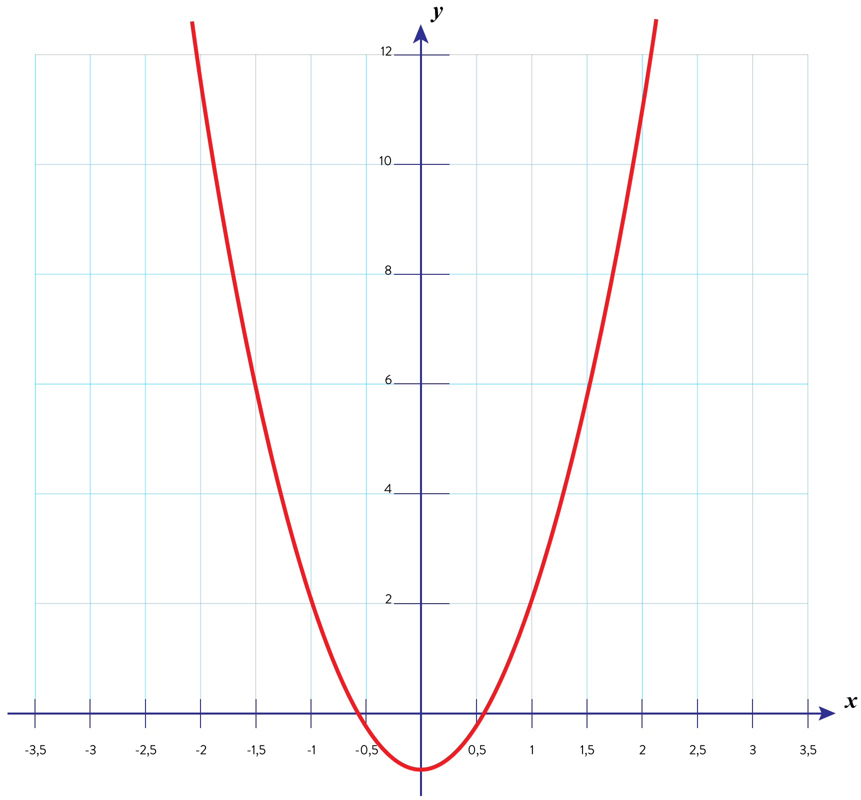

Figura 3. Gráfica de $f(x) = 3x^2 - 1$

Fuente: elaboración propia

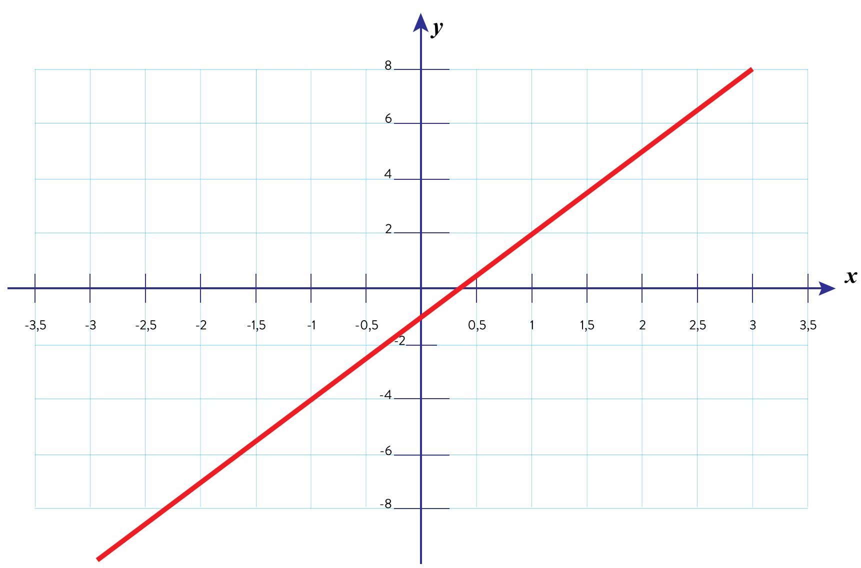

Figura 4. Gráfica de $g(x) = 3x - 1$

Fuente: elaboración propia

Para que exista la inversa de una función, esta debe ser uno a uno; en caso contrario, no tiene inversa. Una forma práctica de verificar si la función es uno a uno es trazar una recta horizontal y si esta corta a la gráfica de la función una sola vez, se dice que esa función es uno a uno. Sin embargo, en algunos casos se restringe el dominio de ciertas funciones, de modo que sea posible hablar de la inversa; esto ocurre, por ejemplo, con las funciones trigonométricas, que se analizarán más adelante.

3.2. Inversa de una función

Sea f una función inyectiva con dominio A y rango B, tal que a cada $x \in A$ le asigna una imagen $y \in B$, se define la función g, inversa de f, a la función con dominio B y rango A, tal que $g\left(f\left(x\right)\right)=x$, y $f\left(g\left(x\right)\right)=x$. Se dice que g es la **inversa** de f y se escribe $g\left(x\right)=f^{-1}\left(x\right)$. Como f es uno a uno se garantiza que g es una función.

Para encontrar la inversa de una función se siguen los siguientes pasos:

A. Se demuestra que la función es uno a uno (en caso contrario se dice que no existe la inversa).

B. En la función dada se intercambian las variables x por y y viceversa.

C. Se despeja la variable y; la función que queda es $f^{-1}\left(x\right)$.

D. Verificar que la función obtenida sea la inversa de la función dada (opcional).

Ejemplo 1. Encuentre la función inversa de $g\left(x\right)=3x-1$. Demuestre que sí es la inversa y realice en un mismo plano las gráficas de g y de g^{-1}.

Solución

Al seguir los pasos dados, se tiene que:

A. Aunque se podría elaborar la gráfica para identificar si la función es uno a uno, en algunos casos puede ser muy dispendioso, por lo que hay un proceso algebraico que permite identificar la inyectividad o no de las funciones; reconózcalo y aplíquelo siempre que requiera determinarla.

$g(a)=g(b)$	Se parte de este supuesto
$3a-1=3b-1$	Se halla la imagen de a y b por medio de la función $g(x)$
$a=b$	Se realizan operaciones algebraicas y se despeja una de las variables, puede ser a o b; en este caso, se despeja a.

Lo anterior indica que, si se toman imágenes iguales, las preimágenes son, asimismo, iguales; es decir, es única, lo que indica que la función es uno a uno.

B. Como $y=3x-1$, al intercambiar variables, queda: $x=3y-1$

C. Al despejar a y, se tiene: $\frac{x+1}{3}=y=g^{-1}(x)$

D. Para verificar que la función obtenida es la inversa de la función dada, se hace la composición de estas. En otras palabras, se debe constatar que $g\left(g^{-1}(x)\right)=x$ y que $g^{-1}\left(g(x)\right)=x.$ Si esto se cumple, entonces la función obtenida es la inversa. Observe:

$$g\left(g^{-1}(x)\right)=g\left(\frac{x+1}{3}\right)=3\left(\frac{x+1}{3}\right)-1=x+1-1=x$$

Se deja al lector verificar que $g^{-1}\left(g(x)\right)=x$

Gráficamente, toda función es simétrica con su inversa, con eje de simetría en la recta $y=x.$ La funciones g y g^{-1} representadas en la siguiente gráfica permiten evidenciar esa simetría.

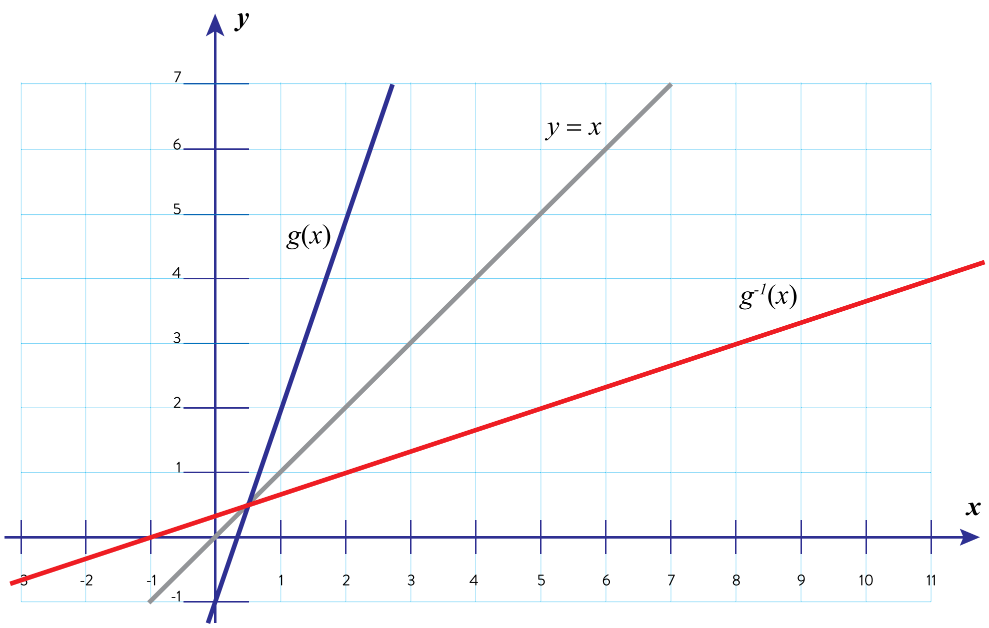

Figura 5. Las funciones g y g^{-1} son simétricas con respecto a la recta $y=x$

Fuente: elaboración propia

Ejemplo 2. Encuentre la función inversa de $f(x)=3x^2-1$. En caso de no existir, restrinja el dominio para que exista y encuéntrela.

Solución

A. Como se mostró anteriormente y según la gráfica, $f(x)$ no es inyectiva; sin embargo, si se siguen los pasos para encontrar la inversa, se tiene que:

$f(a)=f(b)$	Se parte de este supuesto
$3a^2-1=3b^2-1$	Se halla la imagen de a y b por medio de la función $g(x)$
$3a^2=3b^2$	Se pasa el -1 a adicionar y se anula
$a^2=b^2$	Se pasa el 3 a dividir y se simplifica
$a^2-b^2=0$	Se pasa a sustraer b^2
$(a+b)(a-b)=0$	Se factoriza la diferencia de cuadrados que queda
$(a+b)=0 \text{ o } (a-b)=0$	Se aplica la propiedad de los productos nulos

De lo cual se obtienen dos soluciones: $a=-b$ o $<a=b.$ Razón por la que f no es inyectiva. Pese a esto, si se toman solo los valores positivos (también se pueden tomar únicamente los valores negativos, en ese caso $x'' 0$,es inyectiva), la función $f(x)=3x^2-1$, con $x\geq 0$ es inyectiva y se puede encontrar su inversa.

B. Se Intercambia x con y: $x=3y^2-1$

C. Se despeja y : $\pm\sqrt{\frac{x+1}{3}}=y$ Debido a que se tomó el dominio positivo, se asumirá el signo positivo de la raíz para la inversa de f, por lo que $f^{-1}(x)=\sqrt{\frac{x+1}{3}}$ Gráficamente, se observa que las funciones f y f^{-1} son simétricas con respecto a la recta $y=x,$ lo que verifica que son inversas la una de la otra.

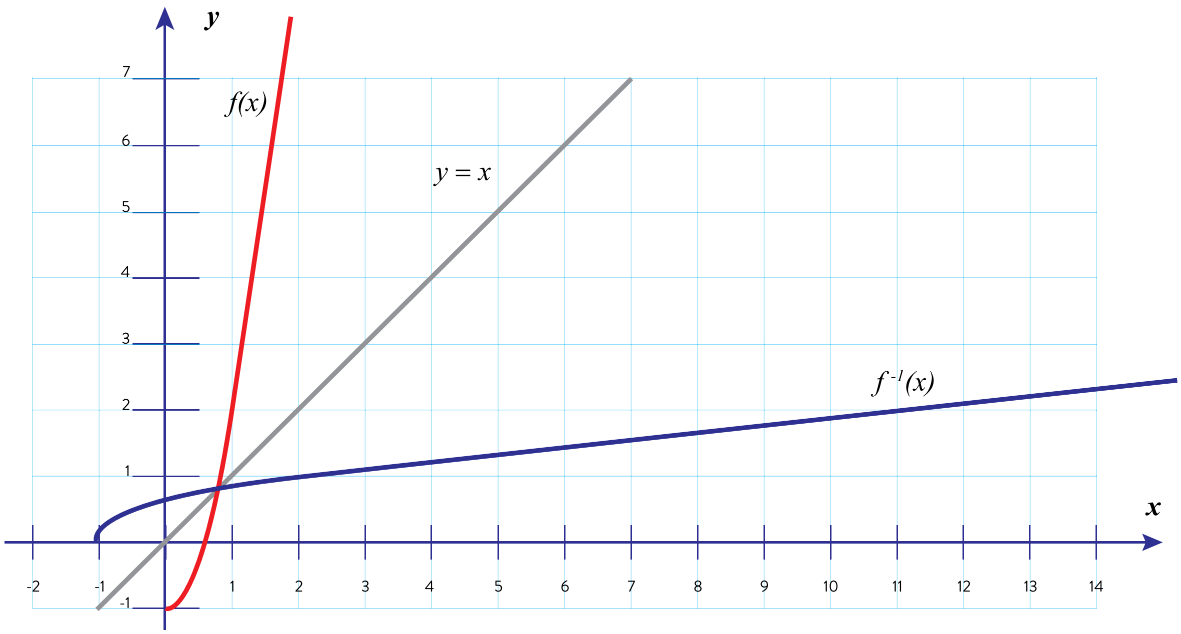

Figura 6. Las funciones son simétricas con respecto a la recta $y = x$

Fuente: elaboración propia

Con lo trabajado hasta aquí, es posible determinar la función inversa de una función dada, ya sea de forma algebraica, mostrando que la composición de las funciones da el valor x o gráficamente, y que las dos funciones son simétricas con respecto a la recta $y = x$. A continuación, se exponen algunos ejercicios para practicar lo aprendido.

3.3. Ejercicios propuestos para practicar

1. Encuentre la función inversa, si existe, de cada una de las siguientes funciones (en donde sea necesario, restrinja el dominio para encontrar la inversa):

   a. $f(x) = x^3 + 2$

   b. $g(x) = \frac{2}{3}x + 8c$, donde c es un número real

   c. $h(x) = \frac{2-x}{2+x}$

   d. $i(x) = 2 - x^4$

2. Compruebe que $f^{-1}(f(x)) = x$, y, que $f(f^{-1}(x)) = x$, donde $f(x) = 4x - 10,$ y, $f^{-1}(x) = \frac{1}{4}x + \frac{5}{2}$

3. Trace la gráfica de f^{-1} a partir de la gráfica de f que aparece a continuación:

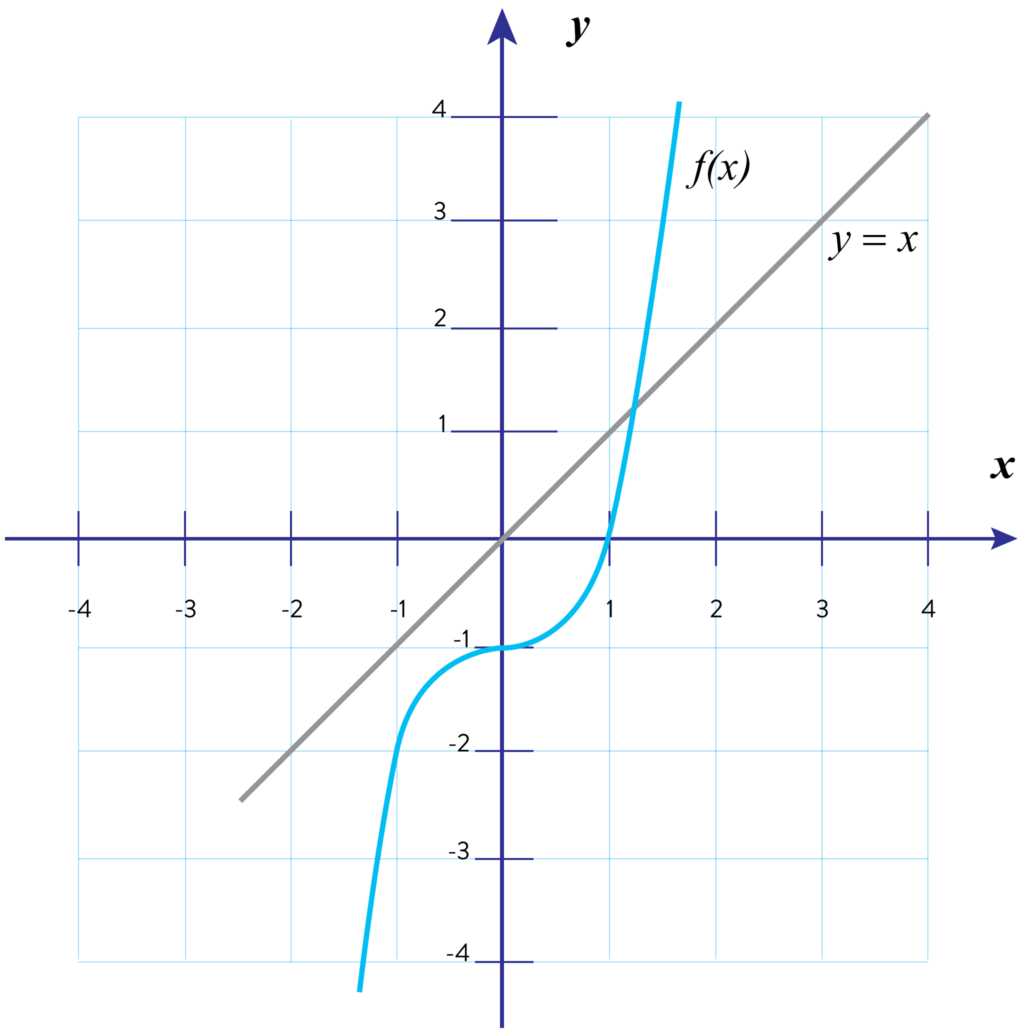

Figura 7. Ejemplo de la gráfica de *f*

Fuente: elaboración propia

Referencias

Purcell, E. J., Varberg, D. y Rigdon, S. (2007). *Cálculo.* México: Pearson Educación.

INFORMACIÓN TÉCNICA

FACULTAD DE
INGENIERÍA, DISEÑO E INNOVACIÓN

Módulo: Cálculo II

Unidad 1: Funciones trascendentes

Escenario 1: Funciones trascendentes e inversas

Autor: Martha Helena Zambrano Valentín

Asesor Pedagógico: Jeiner Velandia

Diseñador Gráfico: Carlos Montoya

Asistente: Ginna Paola Quiroga