Unidad 1 / Escenario 2

Lectura Fundamental

Cinemática 2D

Contenido

Palabras clave

Vectores, representación, leyes de transformación, coordenadas cartesianas, coordenadas polares.

1. Movimiento en dos dimensiones

El movimiento en dos dimensiones hace referencia al caso cuando éste ocurre en un plano, por ejemplo, un disco de hockey sobre una pista de hielo, o un carro moviéndose libre por un parqueadero vacío y sin obstáculos o el de un marciano de un video-juego clásico en la pantalla del monitor, además de los famosos movimientos, de proyectiles y circular uniforme. En el recorrido de un cuerpo en un plano, a medida que se mueve, varía la coordenada x y al mismo tiempo la coordenada y y por lo tanto juntas son funciones del tiempo. La figura 1 muestra la posición y trayectoria de un objeto que se mueve en el plano xy. De forma natural, los vectores expresan de la forma más fácil la descripción del movimiento en 2 y 3 dimensiones. La figura 1 muestra los vectores de posición del objeto en dos instantes de tiempo.

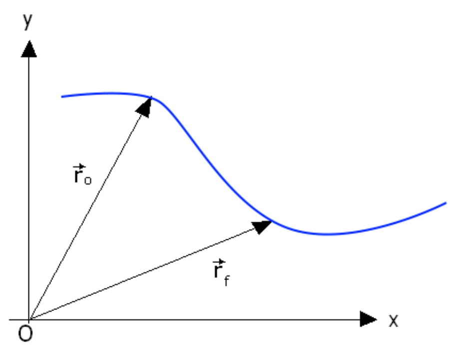

Figura 1. Trayectoria de una partícula que se mueve en el plano xy.
Fuente: Politécnico Grancolombiano. 1

Las magnitudes cinemáticas en 2D se construyen de forma similar a las de una dimensión, por lo tanto, no se repite el trabajo. A continuación se listan las magnitudes cinemáticas para 2D, insistiendo en la definición en coordenadas cartesianas y su representación de pareja ordenada y vectores unitarios para la posición y el desplazamiento.

La posición que indica el lugar donde se encuentra el objeto:

$$\vec{r} = (x(t), y(t)) = x(t)\hat{\mathbf{i}} + y(t)\hat{\mathbf{j}}, \qquad \text{m.}$$

El desplazamiento, que informa en cuanto cambió la posición:

$$\Delta\vec{r} = \vec{r}_f - \vec{r}_0 = (x_f(t) - x_0(t))\,\hat{\mathbf{i}} + (y_f(t) - y_0(t))\,\hat{\mathbf{j}}, \qquad \text{m.}$$

Velocidad Media, que mide que tan rápido se hace un desplazamiento:

$$\bar{\vec{v}} = \frac{\Delta \vec{r}}{\Delta t}, \qquad \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}.$$

Aceleración media, que mide que tan rápido cambia la velocidad:

$$\bar{\vec{a}} = \frac{\Delta \vec{v}}{\Delta t}, \qquad \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}.$$

Velocidad instantánea, que expresa en cuanto cambia la posición cuando transcurre un intervalo de tiempo infinitesimal:

$$\vec{v} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta \vec{r}}{\Delta t} = \frac{d\vec{r}}{dt}, \qquad \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}.$$

Aceleración instantánea, que expresa en cuanto cambia la velocidad cuando transcurre un intervalo de tiempo infinitesimal:

$$\vec{a} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta \vec{v}}{\Delta t} = \frac{d\vec{v}}{dt}, \qquad \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}.$$

Ejemplo 1. *La función posición para una partícula que se mueve en el plano xy, está dada por:*

$$\vec{r}(t) = \left(5t^2 \ \hat{\imath} + \left(8t^2 - 3t^4\right) \ \hat{\jmath}\right) \ m.$$

Encuentre: (a) La velocidad media para el intervalo de tiempo entre 0 y 1 s, (b) La velocidad y aceleración instantáneas en $t = 1$ s.

Solución:

(a) Para calcular la posición inicial, es decir, la posición en $t = 0$ s, y final, posición en $t = 1$ s, se reemplaza en la ecuación de posición la variable t por el valor correspondiente. Así, la posición inicial:

$$\vec{r}(0 \text{ s}) = \left(5 \cdot 0^2 \hat{\mathbf{i}} + \left(8 \cdot 0^2 - 3 \cdot 0^4\right) \hat{\mathbf{j}}\right) \ \mathrm{m} = (0\hat{\mathbf{i}} + 0\hat{\mathbf{j}}) \ \mathrm{m}.$$

y la posición final,

$$\vec{r}(1 \text{ s}) = \left(5 \cdot 1^2 \hat{\mathbf{i}} + \left(8 \cdot 1^2 - 3 \cdot 1^4\right) \hat{\mathbf{j}}\right) \ \mathrm{m} = (5\hat{\mathbf{i}} + 5\hat{\mathbf{j}}) \ \mathrm{m}.$$

Seguido, se calcula la velocidad media. Note que el intervalo de tiempo es $\Delta t = 1$ s, entonces:

$$\bar{\vec{v}} = \frac{\vec{r}(1 \text{ s}) - \vec{r}(0 \text{ s})}{1 \text{ s} - 0 \text{ s}} = \frac{(5\hat{\mathbf{i}} + 5\hat{\mathbf{j}}) \ \mathrm{m} - (0\hat{\mathbf{i}} + 0\hat{\mathbf{j}}) \ \mathrm{m}}{1 \text{ s}} = (5\hat{\mathbf{i}} + 5\hat{\mathbf{j}}) \ \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}.$$

(b) Para calcular la velocidad instatánea se debe derivar la posición, luego:

$$\vec{v}(t) = \left(10t \ \hat{\mathbf{i}} + \left(16t - 12t^3\right) \ \hat{\mathbf{j}}\right) \ \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}.$$

Volviendo a derivar para la aceleración instantánea,

$$\vec{a}(t) = \left(10 \ \hat{\mathbf{i}} + \left(16 - 36t^2\right) \hat{\mathbf{j}}\right) \ \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}.$$

Evaluando en $t = 1$ s,

$$\vec{v}(1 \text{ s}) = (10 \ \hat{\mathbf{i}} + 4\hat{\mathbf{j}}) \ \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}.$$

$$\vec{a}(1 \ s) = (10 \ \hat{\mathbf{i}} - 8\hat{\mathbf{j}}) \ \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}.$$

♢ **Nota 1**: Mientras para calcular la velocidad o aceleración media se requiere de un intervalo, las instantáneas sólo de un instante en el tiempo.

Note 2: Los resultados finales para los vectores de posición, velocidad y aceleración están en coordenadas cartesianas y es posible que en algún ejercicio similar se pida expresar las respuestas en coordenadas polares, por lo que conviene tener destreza en este tipo de transformaciones.

2. Movimiento de proyectiles

El primero que hizo pública la solución correcta al problema del movimiento de proyectiles en ausencia de la fricción del aire fue Galileo, y para esto convirtió un movimiento complejo en dos dimensiones, en dos movimientos simples en una dimensión. Unos años antes, Galileo resolvió correctamente el problema de la caída libre y con experimentos muy elaborados pudo comprobar que sus razonamientos eran correctos, hoy en día la solución es vigente. Animado con lo anterior, decidió enfrentar el problema del movimiento de los proyectiles.

De observaciones muy cuidadosas, Galileo descubrió que el movimiento en la horizontal es un MUR (Movimiento Uniforme Rectilíneo), mientras que en la vertical es una caida libre. Los dos movimientos son independientes pero la combinación deriva en la característica trayactoria parabólica que se observa cuando se lanzan proyectiles.

Si se desea que el objeto en su movimiento describa una trayectoria parabólica, se le debe lanzar con una rapidez inicial y a un ángulo θ por encima de la horizontal como muestra la figura 2.

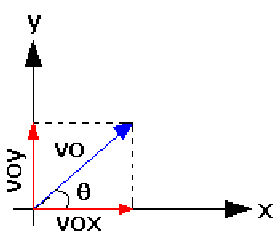

Figura 2. **Vector velocidad inicial en coordenadas polares,** $\vec{v}_0 = (v_0, \theta)$**.**
Fuente: Politécnico Grancolombiano. 1

Note que cuando se da la magnitud de la velocidad (rapidez inicial) y el ángulo de disparo, se está informando la velocidad inicial en coordenadas polares. Para calcular las coordenadas cartesiana, se utilizan las ecuaciones de transformación:

$$\begin{aligned} v_{0x} &= v_0 \cos\theta \\ v_{0y} &= v_0 \sin\theta \end{aligned} \tag{1}$$

El razonamiento de Galileo, se resume en la siguiente tabla:

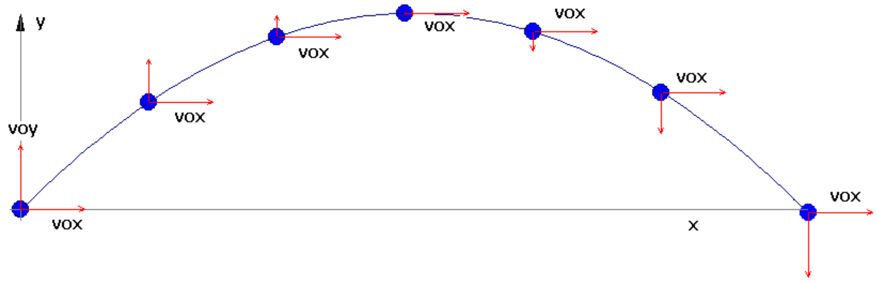

Figura 3. **Componentes rectangulares del vector velocidad en distintos instantes del tiempo.**
Fuente: Politécnico Grancolombiano. 1

Magnitud	Horizontal (MUR)	Vertical (caída libre)
Posición (m)	$x_f = x_0 + v_{0x}t$	$y_f = y_0 + v_{0y}t + \frac{1}{2}gt^2$
Velocidad (m/s)	$v_{fx} = v_{0x}$	$v_{fy} = v_{0y} + gt$
Aceleración (m/s^2)	$a_y = 0$	$a_y = g = -9.8$

Se recalca que las componentes son cartesianas y por lo tanto la velocidad inicial se expresa como $\vec{v}_0 = (v_{0x}, v_{0y})$. Como en la mayoría de ejercicios, la velocidad incial $\vec{v}_0$ viene en coordenadas polares, rapidez inicial v_0, y ángulo de disparo θ, se sugiere que antes de empezar la solución del ejercicio, realice la transformación de coordenadas.

Debido a que la aceleración en x es cero, la velocidad en x no cambia en el tiempo, por esto se denomina Movimiento Uniforme Rectilíneao (MUR). En la vertical la velocidad v_y siempre va disminuyendo de manera uniforme, aceleración negativa y constante, y en el punto más alto de la trayectoria su valor es cero, $v_{0y} = 0$. Juntas situaciones se pueden observar en la figura 3,

Considere un objeto que se dispara desde el origen a un ángulo θ por encima de la horizontal describiendo una trayectoria parabólica. En el mismo tiempo que sube hasta una altura y, ha recorrido una distancia horizontal x, por lo tanto el tiempo es la variable que liga todas las ecuaciones. Si al revisar los datos de un ejercicio se observa que se puede despejar el tiempo de alguna de estas ecuaciones, inmediatamente se puede reemplazar en las otras sin importar que unas correspondan a la coordenada x y otras a las y.

Ejemplo 2. *Desde la parte más alta de un edificio de 50 m se dispara un proyectil con una rapidez inicial de $v_0 = 32$ m/s a un ángulo de 20° arriba de la horizontal. Encuentre:*

(a) El tiempo que tarda en llegar al suelo.

(b) A qué distancia, medida desde la base del edificio, golpea el piso.

(c) La velocidad con que llega al piso.

Solución:

Primero se pasa a coordenadas cartesianas el vector velocidad inicial:

$$v_{0x} = 32 \text{ m/s } \cos 20^\circ \approx 30.1 \ \frac{\text{m}}{\text{s}},$$
$$v_{0y} = 32 \text{ m/s } \sin 20^\circ \approx 10.9 \ \frac{\text{m}}{\text{s}}.$$

Eligiendo el origen en el punto de disparo, se listan las variables cinemáticas, para x y para y,

Coordenada x	Coordenada y
$x_0 = 0$ m	$y_0 = 0$ m
$x_f = ???$	$y_0 =$ -50 m
$v_{0x} = 30.1$ m/s	$v_{0y} = 10.9$ m/s
$v_{fx} = 30.1$ m/s	$v_{fy} = ???$
$a_x = 0$ m/s^2	$a_y =$ -9.8 m/s^2
$t = ????$	

(a) Para calcular el tiempo que tarda en llegar al piso se utiliza la ecuación de posición en y, luego:

$$-50 \text{ m} = 0 \text{ m} + 10.9 \ \frac{\text{m}}{\text{s}} t - 4.9 \frac{\text{m}}{\text{s}^2} t^2,$$

que lleva a la ecuación cuadrática,

$$0 = 50 + 10.9 \ t - 4.9 \ t^2$$

con solución:

$$t_+ \approx -2.27 \text{ s}, \qquad \text{y} \qquad t_2 \approx 4.49 \text{ s}.$$

(b) Se elige el valor positivo. Reemplazando el tiempo hallado en el numeral anterior en la ecuación de posición en x,

$$x_f = 0 \text{ m} + 30.1 \frac{\text{m}}{\text{s}} \cdot 4.50 \text{ s} \approx 135 \text{ m}.$$

(c) La velocidad es un vector y en dos dimensiones tiene componentes cartesianas v_x y $v_y y$, la velocidad en x no cambia y por lo tanto en todo tiempo tiene el mismo valor que en este caso es $v_x = 30.1$ m/s, la componente vertical se calcula con:

$$v_{fy} = 10.9 \ \frac{\text{m}}{\text{s}} + \left(-9.8 \ \frac{\text{m}}{\text{s}^2}\right) \cdot 4.49 \text{ s} \approx -33.1 \ \frac{\text{m}}{\text{s}}.$$

La velocidad de la partícula en el momento que llega al suelo es $\vec{v}_f = (30.1, \ -33.1)$ m/s. El resultado también se expresa en coordenadas polares, la rapidez (norma o magnitud) se calcula con:

$$v_f = \sqrt{v_{fx}^2 + v_{fy}^2} = \sqrt{\left(30.1 \ \frac{\text{m}}{\text{s}}\right)^2 + \left(-33.1 \ \frac{\text{m}}{\text{s}}\right)^2} \approx 44.7 \frac{\text{m}}{\text{s}}.$$

y el ángulo o dirección con:

$$\theta = \tan^{-1}\left(\frac{v_{fy}}{v_{fx}}\right) = \tan^{-1}\left(\frac{-33.1 \text{ m/s}}{30.1 \text{ m/s}}\right) \approx -47.7^\circ.$$

El ángulo polar nunca es negativo, por lo tanto, se debe interpretar la última respuesta. El cuadrante en que se encuentra el vector se identifica con los signos de sus componentes, en este caso, v_{fx} es positivo, mientras que v_{fy} es negativo. Se concluye que está en el cuarto cuadrante, luego el ángulo polar se encuentra con:

$$\theta_{\text{polar}} = 360^\circ + -47.7^\circ = 312.3^\circ.$$

$\diamondsuit$

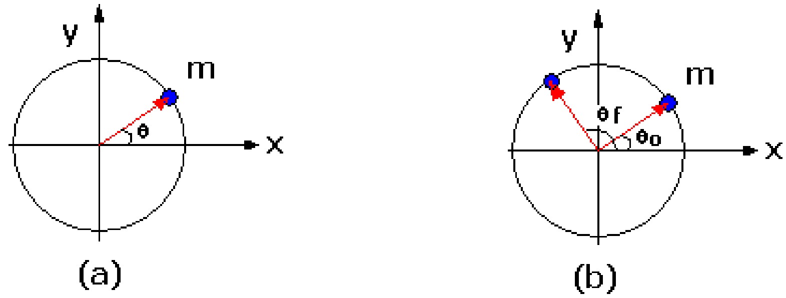

Figura 4. (a) Posición angular. (b) Desplazamiento angular.
Fuente: Politécnico Grancolombiano. l

3. Movimiento circular

Cuando un cuerpo en su movimiento describe un críulo se dice que tiene movimiento circular. Ubicando el origen del sistema coordenado en el centro del círculo, el vector posición en coordenadas polares se expresa con $\vec{r} = (r, \theta_p)$, siendo r, la distancia al origen que en este caso es constante y θ_p el ángulo polar. Arriba se mencionó que la magnitud del vector posición es la misma en todo instante de tiempo, entonces, para dar la ubicación del objeto, basta con decir el ángulo y por lo tanto, éste toma el caracter de coordenada de posición. Por ejemplo, si se estudia la posición del minutero de un reloj de agujas y se declara que el origen está a las XII y se toma el sentido positivo en la dirección que se mueven las manecillas del reloj, entonces, decir que la posición del minutero es 90°, lo ubica inmediatamente a las III. La posición 270° lo ubica a la IX. En la figura 4, se observa un cuerpo que se mueve en trayectoria circular en dos instantes. En el instante inicial tiene posición $\vec{r_i} = (r, \theta_i$, mientras en el final $\vec{r_f} = (r, \theta_f$. La magnitud del vector es igual en ambos casos, sólo los diferencia el ángulo polar.

Se define posición angular θ como la magnitud física que informa la ubicación de un cuerpo que gira en un círculo respecto del centro. Por convención se toma el eje positivo de las equís como el origen de la coordenada angular, con sentido positivo en la dirección contraria al giro de las manecillas del reloj. Su unidad son los radianes (rad), aunque grados (deg), gradianes (grad) y revoluciones también tienen aplicación práctica.

Se sabe que un cuando el cuerpo se mueve cambia de posición, el desplazamiento angular $\Delta\theta$ mide en cuanto cambió la posición angular del cuerpo o partícula y se calcula con:

$$\Delta\theta = \theta_f - \theta_0, \qquad \text{rad}. \tag{2}$$

La construcción de las magnitudes angulares es similar a la de las lineales, por lo tanto sólo se seguirá con las definiciones sin mayores comentarios:

La velocidad angular media $\bar{\omega}$ informa la rapidez con que cambia la posición angular de una partícula. Se calcula con la ecuación:

$$\bar{\omega} = \frac{\Delta\theta}{\Delta t} = \frac{\theta_f - \theta_0}{\Delta t}, \qquad \frac{\text{rad}}{\text{s}}. \tag{3}$$

La aceleración angular media $\bar{\alpha}$ mide la rapidez con que cambia la velocidad angular de una partícula:

$$\bar{\alpha} = \frac{\Delta\omega}{\Delta t} = \frac{\omega_f - \omega_0}{\Delta t}, \qquad \frac{\text{rad}}{\text{s}^2}. \tag{4}$$

La velocidad angular instantánea ω mide la rapidez con que cambia la posición angular de una partícula cuando el intervalo de tiempo de observación tiende a cero:

$$\omega = \lim_{\Delta \to 0} \frac{\Delta\theta}{\Delta t} = \frac{d\theta}{dt}, \qquad \frac{\text{rad}}{\text{s}}. \tag{5}$$

La aceleración angular instantánea α informa la rapidez con que cambia la velocidad angular de una partícula cuando el intervalo de tiempo de observación tiende a cero:

$$\alpha = \lim_{\Delta \to 0} \frac{\Delta\omega}{\Delta t} = \frac{d\omega}{dt}, \qquad frac\text{rads}^2. \tag{6}$$

Y al igual que con las magnitudes lineales se construye el esquema de Newton que se muestra en la figura 5.

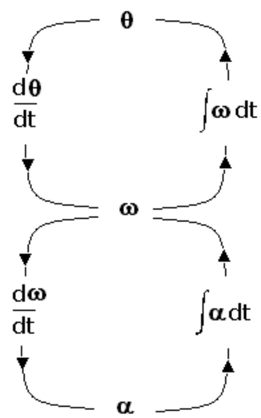

Figura 5. **Esquema de Newton para magnitudes angulares.**
Fuente: Politécnico Grancolombiano. l

En la física de rotaciones se habla de torque en lugar de fuerza. Torque es el efecto rotatorio que produce una fuerza cuando actúa sobre un cuerpo. Por ahora sólo se dirá que un torque neto actuando sobre un cuerpo, produce aceleración angular sobre éste.

3.1. Movimiento circular uniforme. M.C.U

Si el torque neto que actúa sobre un sistema es cero, produce aceleración angular cero, $\alpha = 0\ rad/s^2$. Integrando ésta aceleración dos veces obtenemos, de acuerdo al esquema de la figura 5,

$$\omega_f = \omega_0, \tag{7}$$

$$\theta_f = \theta_0 + \omega_0 t.$$

La aceleración angular α mide como cambia la velocidad angular ω en el tiempo, si alfa es cero quiere decir que la velocidad angular no cambia, ..., es constante, ecuación 7. Siguiendo la definición de velocidad angular 3, lo

anterior implica que siempre barre el mismo
angulo en el mismo intervalo de tiempo y como consecuencia siempre tardará lo mismo dando una vuelta completa.

Periodo T: tiempo que tarda la partícula en dar una vuelta completa cuando se mueve en un M.C.U. Su unidad S.I es el segundo, s.

Existen muchos sistemas que giran tan rápido que no es fácil medir el tiempo que tarda en completar un vuelta. En estos casos es mejor medir el tiempo t que tarda en girar un determinado número de vueltas n, se calcula el periodo con,

$$T = \frac{t}{n}.$$

Recuerde que el periodo sólo tiene sentido cuando se trata del movimiento circular uniforme. En muchas ocasiones es más útil decir cuantas vueltas da el sistema en un determinado tiempo, se define la frecuencia f como el número de vueltas que la partícula da en la unidad de tiempo. Se calcula con la ecuación:

$$f = \frac{n}{t}, \qquad \mathrm{s}^{-1} \quad \mathrm{o} \quad \mathrm{Hz}.$$

Un hertz es igual a una vuelta o revolución por segundo. Como la frecuencia es el recíproco del periodo y la viceversa, entonces:

$$T = \frac{1}{f} \qquad \text{ó} \qquad f = \frac{1}{T}. \tag{8}$$

Al completar una vuelta el desplazamiento angular es de 360° que en radianes corresponde a 2π rad y recordando que gasta un periodo T en barrer este ángulo, se calcula la velocidad angular en el M.C.U con,

$$\omega = \frac{2\pi}{T} = \text{ constante.} \tag{9}$$

La distancia que recorre en una vuelta depende del radio r del círculo y es igual al perímetro $2\pi r$. También el sistema gasta un periodo T en recorrer esta distancia. La rapidez lineal o tangencial es,

$$v_L = \frac{2\pi r}{T} = 2\pi f r = \omega r, \qquad \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}. \tag{10}$$

En caso que se acabara el efecto de la fuerza (fuerza centrípeta) que hace curvar la trayectoria de la partícula para que gire, ésta seguiría en dirección tangente al circulo, con rapidez v_L, en el punto que se libera, luego la direción del vector velocidad es siempre tangente a la circunferencia como se puede apreciar en la figura 6.

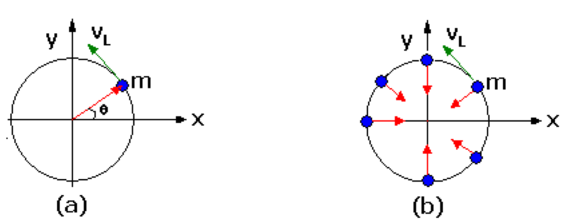

Figura 6. (a) La velocidad de la partícula es tangente a la trayectoria circular. (b) La fuerza que obliga al cuerpo a moverse en trayectoria circular apunta hacia el centro de rotación.
Fuente: Politécnico Grancolombiano. 1

La aceleración centrípeta ó radial se calcula con la ecuación:

$$a_R = \frac{v_L^2}{r} = \omega^2 r, \qquad \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}. \tag{11}$$

4. Movimiento circular uniformemente acelerado, MCUA

Un torque neto constante poduce una aceleración angular constante, $\alpha = $ cte. Aplicando el esquema de Newton, se obtiene:

$$\omega_f = \omega_0 + \alpha t, \tag{12}$$

$$\theta_f = \theta_0 + \omega_0 \cdot t + \frac{1}{2}\alpha \cdot t^2. \tag{13}$$

Note la gran semejanza con el caso lineal; la construcción del modelo fue idéntica, las ecuaciones 12 y 13 del MUCA tienen la misma forma que las del MUA de la cinemática 1D. Aunque se traten de movimientos completamente diferentes, el que se expliquen de la "misma forma" deja el sabor de simplicidad y sencillez que tiene la física. El lector podrá verificar a medida que avanza en el estudio de la física, que las teorías se "reescriben", haciendo un "plagio creativo" como lo menciona Lawrence M Krauss en su libro *Miedo a la física: una guía para perplejos.*

Por lo visto hasta se puede comprobar que por cada magnitud lineal existe la correspondiente angular, creando dos "mundos paralelos": el mundo lineal y el mundo angular. En ocasiones este paralelismo crea confusión y es la fuente de muchos errores por la dificultad de distinguir a que mundo corresponde un dato dado, sin embargo, observando con cuidado se puede comprobar que en las magnitudes angulares aparece la unidad radian, contrario a las lineales donde aparece la unidad metro (m).

4.1. Relación entre magnitudes lineales y angulares

El arco o segmento de arco s se puede calcular, si se sabe el radio y el ángulo subtendido en radianes con:

$$s = r\theta, \qquad \mathrm{m}. \tag{14}$$

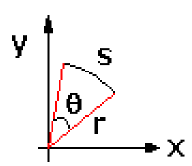

Figura 7. **Segmento de arco.**
Fuente: Politécnico Grancolombiano. 1

s es la medida de la longitud de arco y se mide en metros, al igual que el radio. Recordando que la rapidez media es la distancia dividida entre el tiempo que se tardó en recorrerla, haciendo tender el intervalo de tiempo a cero se vuelve a la noción de derivada y que en este caso es la rapidez instantánea o simplemente rapidez que por ser una magnitud lineal se le llama rapidez lineal, por lo tanto:

$$v_L = \frac{ds}{dt} = \frac{dr\theta}{dt} = r\frac{d\theta}{dt} = r\omega, \qquad \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}. \tag{15}$$

En un movimiento circular el radio se mantiene constante y lo único que varía es el ángulo θ y el cambio de éste en el tiempo es la velocidad angular. Derivando la ecuación anterior se obtiene la aceleración lineal,

$$a_L = \frac{dv_L}{dr} = \frac{dr\omega}{dt} = r\frac{d\omega}{dt} = r\alpha, \qquad \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}. \tag{16}$$

La magnitud que sirve de puente entre el mundo lineal y el angular es el radio. A manera de resumen se presenta la siguiente tabla:

magnitud lineal	r × magnitud angular
longitud de arco	$s = r\theta$
rapidez lineal	$v_L = r\omega$
aceleración lineal	$a_L = r\alpha$

Insistiendo en el paralelo que se puede establecer entre magnitudes lineales y angulares, se lleva estas analogías hasta magnitudes que se verán más adelante:

Magnitud lineal	símbolo	símbolo	Magnitud angular
posición	x	θ	posición
desplazamiento	Δx	$\Delta\theta$	desplazamiento
velocidad	v	ω	velocidad
aceleración	a	α	aceleración
M.U.R	$x_f = x_0 + v_0 t$ $v_f = v_0$	$\theta_f = \theta_0 + \omega_0 t$ $\omega_f = \omega_0$	M.C.U
M.U.A	$x_f = x_0 + v_0 t + \frac{1}{2}at^2$ $v_f = v_0 + at$	$\theta_f = \theta_0 + \omega_0 t + \frac{1}{2}\alpha t^2$ $\omega_f = \omega_0 + \alpha t$	M.C.U.A
fuerza	F	τ	torque
momento	p	L	momento
trabajo	$W = F\Delta x$	$W = \tau\Delta\theta$	trabajo
potencia	$P = Fv$	$P = \tau\omega$	potencia

5. Movimiento circular - tratamiento general

Por la simetría del movimiento circular es conveniente trabajar en coordenadas polares. Recordando que la posición en coordenadas cartesianas se expresa como:

$$\vec{r} = x\,\hat{\mathbf{i}} + y\,\hat{\mathbf{j}}. \tag{17}$$

Para convertir a coordenadas polares se deben hacer los siguientes cambios:

$$x = r\cos\theta, \qquad \text{y} \qquad y = r\sin\theta.$$

Reemplazando en la ecuación 17,

$$\vec{r} = r\left(\cos\theta\,\hat{\mathbf{i}} + \sin\theta\,\hat{\mathbf{j}}\right)$$

donde lo que está en paréntesis corresponde al vector unitario en dirección de la coordenada radial, que en este text se notará con $\hat{\mathbf{u}}_r$. Así, la posición en coordenadas polares se expresa como:

$$\vec{r} = r \; \hat{\mathbf{u}}_r. \tag{18}$$

donde r es constante para el caso de los movimientos circulares. Atendiendo al esquema de Newton, al derivar la posición, ecuación 18 , se obtiene la velocidad, de esta manera,

$$\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt} = \cancelto{0}{\frac{\partial r}{\partial t}} \cdot \hat{\mathbf{u}}_r + r \cdot \frac{\partial \hat{\mathbf{u}}_r}{\partial t}.$$

El primer término se anula debido a que r es constante en los movimientos circulares. La derivada de $\hat{\mathbf{u}}_r$ debe hacerse partiendo de su definición y aplicando la regla de la cadena, luego:

$$\vec{v} = r \left[\frac{\partial \cos\theta}{\partial \theta} \cdot \cancelto{\omega}{\frac{\partial \theta}{\partial t}} \; \hat{\mathbf{i}} + \frac{\partial \sin\theta}{\partial \theta} \cdot \cancelto{\omega}{\frac{\partial \theta}{\partial t}} \; \hat{\mathbf{j}} \right] = r\omega \left[-\sin\theta \; \hat{\mathbf{i}} + \cos\theta \; \hat{\mathbf{j}} \right] = r\omega \; \hat{\mathbf{u}}_\theta,$$

donde lo del paréntesis corresponde al vector unitario de la coordenada angular en polares. Se destaca que el vector velocidad sólo tiene componente angular, lo que indica que la velocidad siempre es tangente a la trayectoria y por esto se le llama velocidad tangencial.

$$\vec{v} = r\omega \; \hat{\mathbf{u}}_\theta. \tag{19}$$

Para obtener el vector aceleración de debe derivar la velocidad, es decir, derivar la ecuación **??**, así:

$$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \cancelto{0}{\frac{\partial r}{\partial t}} \cdot \omega \cdot \hat{\mathbf{u}}_\theta + r \cdot \cancelto{\alpha}{\frac{\partial \omega}{\partial t}} \cdot \hat{\mathbf{u}}_\theta + r\omega \cdot \frac{\partial \hat{\mathbf{u}}_\theta}{\partial t}$$

Como $\hat{\mathbf{u}}_\theta = -\sin\theta \; \hat{\mathbf{i}} + \cos\theta \; \hat{\mathbf{j}}$, al reemplazar y derivar en el último término,

$$\vec{a} = r\alpha \left(-\sin\theta \; \hat{\mathbf{i}} + \cos\theta \; \hat{\mathbf{j}} \right) + r\omega \left(-\omega\cos\theta \; \hat{\mathbf{i}} - \omega\sin\theta \; \hat{\mathbf{j}} \right),$$

agrupando apropiadamente y ordenando

$$\vec{a} = r\alpha \left(\sin\theta \; \hat{\mathbf{i}} + \cos\theta \; \hat{\mathbf{j}} \right) - r\omega^2 \left(\cos\theta \; \hat{\mathbf{i}} + \sin\theta \; \hat{\mathbf{j}} \right) = -r\omega^2 \; \hat{\mathbf{u}}_r + r\alpha \; \hat{\mathbf{u}}_\theta.$$

Es decir,

$$\vec{a} = -r\omega^2 \; \hat{\mathbf{u}}_r + r\alpha \; \hat{\mathbf{u}}_\theta. \tag{20}$$

La ecuación 20 muestra que la aceleración se descompone en aceleración radial o centrípeta a_r que cambia la dirección del vector velocidad. La otra componente se llama aceleración tangencial a_t que cambia la magnitud del vector velocidad.

La figura 8 muestra las componentes radial y tangencial de la aceleración. La aceleración total se calcula con:

$$a = \sqrt{a_r^2 + a_t^2} = r\sqrt{\omega^4 + \alpha^2}, \tag{21}$$

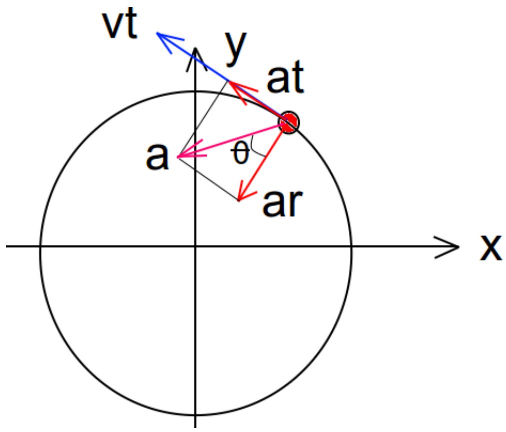

Figura 8. La partícula rota describiendo un circulo, en un instante del tiempo se muestran los vectores, velocidad tangencial, aceleración tangencial, aceleración radial, aceleración total.
Fuente: Politécnico Grancolombiano. l

y el ángulo que forma con el eje radial,

$$\theta = \tan^{-1}\left(\frac{a_r}{a_t}\right) = \tan^{-1}\left(\frac{\omega^2}{\alpha}\right). \tag{22}$$

Si $\alpha = 0$, se obtienen los resultados del movimiento circular uniforme. Si α es distinta de cero, las ecuaciones de los movimientos circulares se deben complementar con 21 y 22, recordando que la magnitud de la aceleración radial es $a_r = r\omega^2$ y de la aceleración tangencial es $a_t = r\alpha$, como indica la ecuación 20.

Bibliografía de apoyo

- SERWAY Raymond. Física I. Mc Graw Hill, Quinta edición, 2004.
- HALLIDAY David. Física, Volumen I. CECSA. Quinta Edición, 2002.
- BENSON Harris. Física Universitaria, Volumen 1. CECSA, 1997.
- EISBERG Robert. Física fundamentos y aplicaciones. Mc Graw Hill, Cuarta Edición, 1990.
- SEARS Francis. Física Universitaria, Volumen 1. Addison Wesley Longman, Quinta edición, 1997.
- GIANCOLI, Física general, Editorial Prentice Hall. Cuarta edición, 1997.

INFORMACIÓN TÉCNICA

Ingeniería y Ciencias Básicas

Módulo: Física I
Unidad 1: El movimiento
Escenario 2: Cinemática 2D

Autor: Miguel Angel Bernal Yermanos

Asesor Pedagógico: Jeimy Lorena Romero Perilla
Diseñador Gráfico: Enderson Johan Colmenares López
Corrector de estilo:
Asistente: María Elizabeth Avilán Forero