Cálculo 1.
Lectura No. 19. Aplicaciones de la Derivada (2)

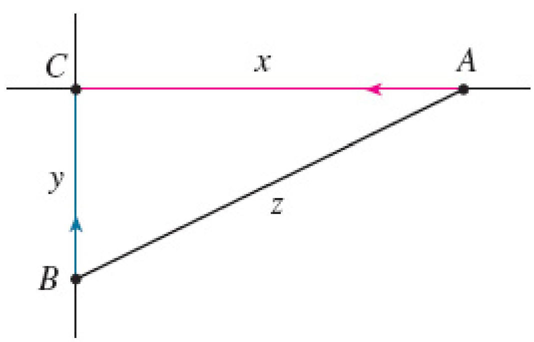
Julio Lizarazo Osorio

Índice

Sección 1: Razones relacionadas

En los siguientes ejercicios, lo común es la aparición de dos variables que presentan alguna relación, y se desea conocer la variación de una de ellas conociendo la variación de la otra, ésto se hace usualmente mediante la regla de la cadena.

Ejemplo 1. *Un automóvil A se desplaza de este a oeste con una velocidad de $60km/h$ y un auto B se desplaza de sur a norte a una velocidad de $40km/h$. Ambos se dirigen a un intersección C que se encuentra a una distancia de $30km$ de A y $50km$ de B, como en la figura.*



¿Cuál es la razón a la que cambia la distancia entre los dos vehículos?

Empezamos identificando las variables que describen el problema. x según el gráfico representa la distancia entre el automóvil A y la intersección C y claramente no es una constante ya que si el vehículo se mueve la distancia disminuye, luego $x(t)$ es una función del tiempo, la misma consideración se hace para y.

Podemos entonces escribir

$$x(t) = distancia\ de\ A\ a\ C en\ el\ tiempo\ t$$

y

$$y(t) = distancia\ de\ B\ a\ C en\ el\ tiempo\ t$$

pero nos preguntan es sobre la variación que tiene la distancia entre A y B, y ésta esta dada según el teorema de Pitagoras por

$$z(t) = \sqrt{(x(t))^2 + (y(t))^2}$$

o también se puede usar

$$(z(t))^2 = (x(t))^2 + (y(t))^2,$$

ésta es más fácil de derivar solo que se debe hacer de forma implícita, al derivar de ambos lados con respecto a la variable t tenemos

$$\frac{d}{dt}\left((z(t))^2\right) = \frac{d}{dt}\left((x(t))^2 + (y(t))^2\right)$$

que nos da

$$2z(t)\frac{d}{dt}(z(t)) = 2x(t)\frac{d}{dt}(x(t)) + 2(y(t))\frac{d}{dt}(y(t))$$

Si suponemos que el tiempo en cual se realizo toda la observación fue el tiempo $t = 0$, lo que se nos pregunta es por la variación de la distancia entre los vehículos en ese instante de tiempo, en ése mismo tiempo se tiene que $x(0) = 30km$, y $y(0) = 50km$, por ende según Pitagoras $z(0) = \sqrt{x(0)^2 + y(0)^2} = \sqrt{30^2 + 50^2} \approx 58{,}30951895$. Al reemplazar en nuestra ecuación diferencial tenemos

$$2(58{,}30951895)\frac{d}{dt}(z(t)) = 2(30)\frac{d}{dt}(x(t)) + 2(50)\frac{d}{dt}(y(t))$$

usando la información inicial tenemos que $\frac{d}{dt}(x(t)) = -60km/h$ y $\frac{d}{dt}(y(t)) = -40km/h$ en ése instante de tiempo $t = 0$, son negativas porque las distancias están decreciendo, y al reemplazar en la ecuación anterior tenemos

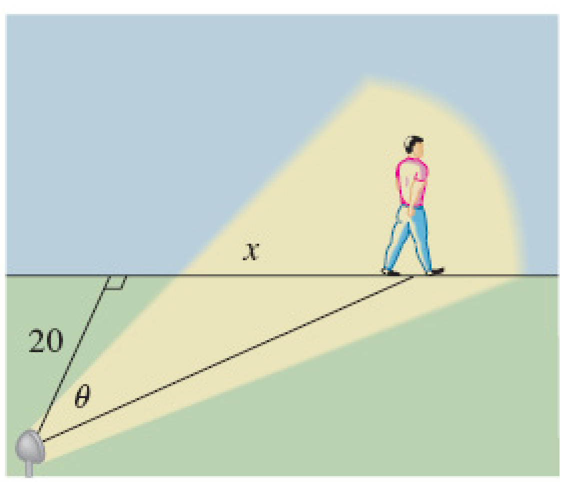
$$2(58{,}30951895)\frac{d}{dt}(z(t)) = 2(30)(-60) + 2(50)(-40)$$

que al despejar nos da

$$\frac{d}{dt}(z(t)) = \frac{-7600}{116{,}6190379} = -65{,}16946235$$

Nos da negativo porque z está decreciendo.

Ejemplo 2. *Un hombre camina en linea recta a una velocidad de $4m/s$ una lampara está localizada en el piso a $20m$ de la trayectoria que sigue el hombre y siempre lo está enfocando. ¿Con que rapidez está girando la lampara cuando el hombre está $15m$ de punto de su trayectoria que está más cerca a la lampara?.*



Nuevamente empezamos identificando las cantidades que el ejercicio ofrece y las que pregunta. Según la gráfica tenemos un triángulo rectángulo con vértices en la lampara, el hombre y el punto de la trayectoria que está más cerca de la lampara. Ésto nos hace pensar nuevamente en Pitagoras y las funciones trigonométricas para buscar las relaciones que se nos piden.

Tenemos una cantidad x que depende del tiempo porque el hombre se está moviendo luego $x(t)$ es función del tiempo, es sobre ésta que nos dan información en un instante de tiempo $t = 0$, aquí nos dicen que $x(0) = 15m$ y $\frac{d}{dt}(x(t)) = 4m/s$ en $t = 0$.

Pero nos piden es la variación del ángulo θ, la relación entre el ángulo y las cantidades que nos dan esta dada por la función tangente ya que ésta es cateto opuesto sobre cateto adyacente. Tenemos entonces que

$$\tan(\theta(t)) = \frac{x(t)}{20}$$

y al derivar de forma implícita tenemos

$$\frac{d}{dt}(\tan(\theta)) = \frac{d}{dt}\left(\frac{x}{20}\right)$$

aquí no escribo explícita mente la relación que tienen sobre t pero ya se conoce, luego

$$\sec^2(\theta)\frac{d}{dt}(\theta) = \frac{1}{20}\frac{d}{dt}(x)$$

recordando que

$$\tan^2(\theta) + 1 = \sec^2(\theta)$$
$$(1 + \tan^2(\theta))\frac{d}{dt}(\theta) = \frac{1}{20}\frac{d}{dt}(x)$$

igualdad que nos interesa principalmente en $t = 0$, y como $\tan(\theta(0))) = \frac{15}{20} = 0{,}75$ y $\frac{d}{dt}(x) = 4ft/s$ en el tiempo cero, tenemos

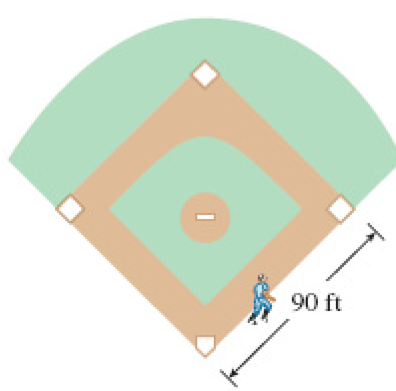
$$(1 + 0{,}75^2)\frac{d}{dt}(\theta) = \frac{1}{20}(4)$$

que al despejar da

$$\frac{d}{dt}(\theta) = \frac{0{,}2}{1{,}5625} = 0{,}128$$

1.1: Ejercicios

1. Un diamante de béisbol es un cuadrado de lado $90ft$. Un bateador golpea la bola y corre hacia primera base a $24ft/s$



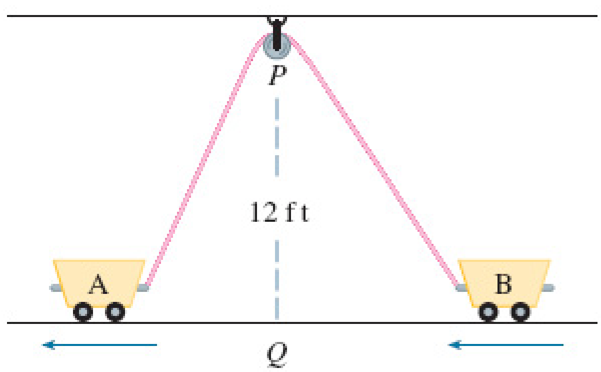
a) ¿A que taza está cambiando la distancia del corredor a segunda base cuando éste se encuentra en la mitad del camino a primera base?

b) ¿A que taza está cambiando la distancia a tercera base en ese mismo momento?

2. Juan está tratando de amarrar su bote. Y está halando de la cuerda que amarra su bote a una taza de $4mt/min$.

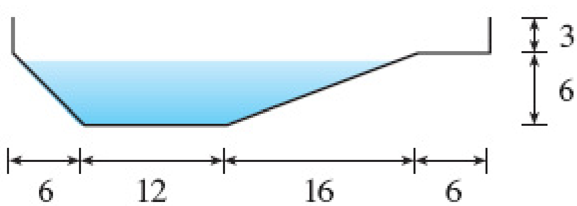
Si el muelle tiene una altura de $3mt$ sobre el nivel del agua y el bote está a $15mt$ del muelle. ¿A que velocidad está acercándose el bote al muelle?

3. Dos carritos A y B están conectados por una cuerda de $39ft$ de longitud que pasa por un punto P como en la gráfica



El punto Q está en el piso directamente debajo de de P a $12ft$ y entre los dos carritos. El carrito A es entonces alejado de Q a una velocidad de $2ft/s$. A que velocidad se mueve el carrito B hacia Q en el instante en que A está a $5ft$ de Q.

4. Una piscina de $20m$ de ancho, $3m$ en la parte no profunda y $9m$ en la parte más profunda. En la figura se ve una sección transversal de la piscina. La piscina se está llenando a una velocidad de $0{,}8m^3/min$ cuan rápido está subiendo el nivel en la piscina cundo éste presenta una altura de $5m$.



Una aplicación importante de las derivadas es al cálculo de límites indeterminados mediante el uso de una regla llamada Regla de L'Hopital Consideramos indeterminaciones de la forma

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)} \text{ donde } \lim_{x\to a} f(x)=0=\lim_{x\to a} g(x)$$

o también

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)} \text{ donde } \lim_{x\to a} f(x)=\infty=\lim_{x\to a} g(x)$$

donde $a\in\mathbb{R}\cup\{-\infty,\infty\}$

algunos de éstos son

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin(x)}{\ln(x+1)}$$

o también

$$\lim_{x\to\infty}\frac{e^x}{x^2+3x-1}$$

Para estos se tiene

REGLA DE L'HOPITAL

Si f y g son derivables y

$$\lim_{x\to a} f(x)=0=\lim_{x\to a} g(x)$$

o

$$\lim_{x\to a} f(x)=\infty=\lim_{x\to a} g(x)$$

donde $a\in\mathbb{R}\cup\{-\infty,\infty\}$, entonces

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim_{x\to a}\frac{f'(x)}{g'(x)}$$

Estos límites también puede ser laterales. veamos como se usa

Ejemplo 3. *Encontrar*

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin(x)}{\ln(x+1)}$$

que en una rápida inspección se puede verificar las condiciones de la regla de L'Hopital y luego según la regla de L'Hopital se tiene

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin(x)}{\ln(x+1)}=\lim_{x\to 0}\frac{\cos(x)}{\frac{1}{1+x}}=\lim_{x\to 0}(x+1)\cos(x)=1$$

veamos el otro propuesto

Ejemplo 4. *Encontrar*

$$\lim_{x\to\infty}\frac{e^x}{x^2+3x-1}$$

que en una rápida inspección se puede verificar las condiciones de la regla de L'Hopital y luego según la regla de L'Hopital se tiene

$$\lim_{x\to\infty}\frac{e^x}{x^2+3x-1}=\lim_{x\to 0}\frac{e^x}{2x+3}=\lim_{x\to 0}\frac{e^x}{2}=\infty$$

Observe que la regla de L'Hopital no necesita la existencia del límite del cociente y tampoco debe confundirse con una regla de derivación del cociente.

Ésta regla también puede ser aplicada a otras indeterminaciones como por ejemplo 0∞, 1^{∞}, ∞^0, 0^0 o $\infty - \infty$ ya que si $f \to 0$ y $g \to \infty$, entonces $\frac{1}{g} \to 0$ y $fg = \frac{f}{\frac{1}{g}}$ que es de la forma $\frac{0}{0}$.

Si $f \to 1$, y $g \to \infty$, entonces f^g tiende a 1^{∞}, y $f^g = e^{\ln(f^g)} = e^{g\ln(f)}$ en donde usando la continuidad de la exponencial, el limite que interesa es $g\ln(f)$ que tiende a $\infty \times 0$.

veamos un ejemplo de alguno de ellos.

Ejemplo 5. *Calculemos*

$$\lim_{x\to\infty} \sqrt{x^2+x} - \sqrt{x^2+1},$$

que es una indeterminación del tipo $\infty - \infty$, racionalizando la expresión, tenemos

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to\infty} \left(\sqrt{x^2+x} - \sqrt{x^2+1}\right) \frac{\sqrt{x^2+x} + \sqrt{x^2+1}}{\sqrt{x^2+x} - \sqrt{x^2+1}} &= \lim_{x\to\infty} \frac{x^2+x-x^2-1}{\sqrt{x^2+x} - \sqrt{x^2+1}} \\
&= \lim_{x\to\infty} \frac{x-1}{\sqrt{x^2+x} - \sqrt{x^2+1}}
\end{aligned}$$

que es una indeterminación del tipo infinito sobre infinito, pero al aplicar L'Hopital, obtenemos

$$= \lim_{x\to\infty} \frac{1}{\frac{2x+1}{2\sqrt{x^2+x}} - \frac{2x}{2\sqrt{x^2+1}}}$$

simplificando

$$= \lim_{x\to\infty} \frac{2\sqrt{x^2+1}\sqrt{x^2+x}}{(2x+1)\sqrt{x^2+1} - 2x\sqrt{x^2+x}}$$

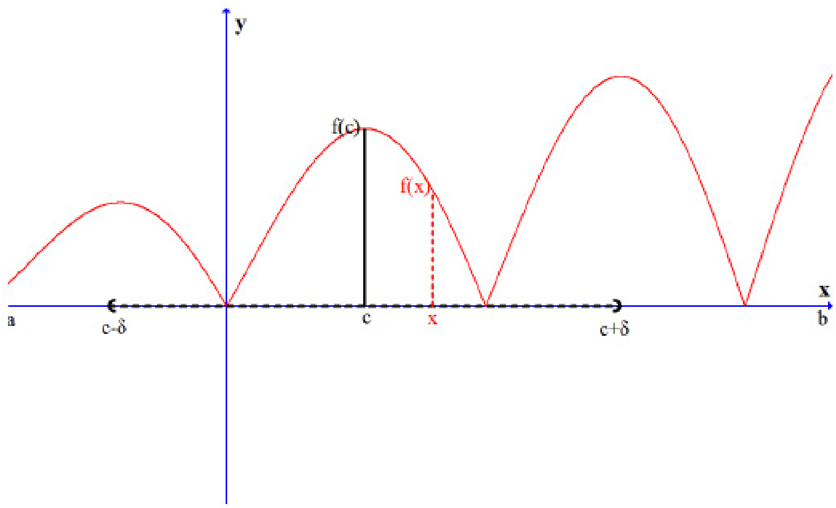
que es una expresión incluso más compleja a la original. Esto solo demuestra que L'Hopital es una poderosa herramienta pero no siempre es útil. De su curso de calculo 1, puede establecer que el limite es infinito.

2.1: Ejercicios

1. Encuentre $\lim\limits_{x\to\infty} x^4e^{-x}$
2. Encuentre $\lim\limits_{x\to\pi/2} \frac{\cos(x)}{x-\pi/2}$
3. Demuestre que $\lim\limits_{x\to 0}(1+x)^x = e$
4. Encuentre $\lim\limits_{x\to 0}(\sin(x))^x$
5. Encuentre $\lim\limits_{x\to 0} \frac{x}{\arctan(4x)}$

Empezaremos dando algunas definiciones

Definición 3.1. *si $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ es una función real donde a y b son números reales extendidos, es decir también sirve que sean $-\infty$ o $+\infty$, a cualquier número real c que esté entre a y b se le llama máximo local estricto si existe un intervalo al rededor de c, y para cada numero en dicho intervalo la imagen mediante f que es menor a la imagen generada por c. En la gráfica se ilustra el número c que está entre a y b y se ve que para cada x que se toma en el intervalo $(c - \delta, c + \delta)$ $f(x) < f(c)$*



En una función constante ésta definición no permite encontrar un máximo ya que todas las imágenes tienen la misma altura, entonces aparece una definición menos restrictiva y es la de máximo local no estricto en la que $f(x) \leq f(c)$, permite que cerca muy cerca del punto la función se comporte como constante. La definición estricta en cambio pide que la función posea un pico en c y a $f(c)$ se le llama valor máximo local

Si para todo el dominio de la función f se tiene que $f(x) < f(c)$ para todo x distinto de c, a c se le llama Máximo global estricto y a $f(c)$ Valor máximo global

Las mismas definiciones se pueden enunciar para mínimos cambiando simplemente el orden de las desigualdades $f(x) < f(c)$ por $f(c) < f(x)$.

Se tiene el siguiente teorema que resulta muy útil a la hora de buscar los puntos en donde una función tiene sus máximos y mínimos

Teorema 3.1. *Si f posee un máximo o un mínimo en c y es derivable en éste punto entonces $f'(c) = 0$*

Éste teorema es muy importante ya que si queremos buscar los puntos en los cuales una función es derivable salvo en un número finito de puntos, buscaremos primero los puntos en donde la derivada se hace cero. Éste es el camino más corto ya que la otra opción es graficar la función y al tanteo encontrar los máximos y mínimos, trabajo muy extenso. Solo quedaría la posibilidad de encontrar máximos y mínimos en los puntos en los que la derivada no existe por eso si éstos son finitos el trabajo es realizable.

Empezaremos entonces buscando máximos y mínimos locales de funciones reales.

Tenemos pues

Definición 3.2. *Para una función real f y derivable salvo en un número finito de puntos, los puntos del dominio en donde su derivada no existe o ésta es cero se llaman puntos críticos y éstos son los únicos puntos en donde la función posee máximos y mínimos*

Ésta definición no es nueva, ya la conocíamos cuando tratamos de graficar funciones. Demos un ejemplo de máximos y mínimos locales

Ejemplo 6. *Encontremos los máximos y mínimos locales estrictos de la función* $f(x) = x^3 + 3x^2 - 9x + 1$. *Comenzamos buscando los puntos críticos para lo cual calculamos la derivada de* f.

$$f'(x) = 3x^2 + 6x - 9$$

que posee dominio en todos los reales luego los puntos críticos deben ser raíces de la derivada, es decir raíces de la ecuación

$$3x^2 + 6x - 9$$

al usar la formula cuadrática por ejemplo encontramos que las raíces son solo dos y éstas son $x = 1$ *y* $x = -3$.

Para saber si éstos puntos críticos son máximos o mínimos podemos encontrar los intervalos de crecimiento y decrecimiento, recordemos que esto es averiguar cuando f' *es positiva o negativa y para ésto fraccionábamos el dominio de* f *y evaluamos en cada intervalo la derivada.*

Los intervalos son $(-\infty, -3)$, $(-3, 1)$ *y* $(1, \infty)$ *al evaluar* f' *tenemos* $f'(-4) = 3(16) + 6(-4) - 9 = 15 > 0$, *lo que quiere decir que* $(-\infty, -3)$ *es un intervalo en el que crece a función* f. *Evaluando en* $(-3, 1)$ *tenemos* $f'(0) = -9 < 0$ *luego éste es un intervalo en el que* f *decrece o intervalo de decrecimiento. Evaluando en* $(1, \infty)$ *tenemos* $f'(2) = 3(4) + 6(2) - 9 = 35 > 0$ *por lo que* $(1, \infty)$ *es un intervalo de crecimiento.*

Por el criterio de la primera derivada, la función va creciendo hasta que llega al punto $x = -3$ *y luego de éste punto empieza a decrecer luego allí hay un punto máximo local, luego en* $x = 1$ *la función* f *que venía decreciendo empieza a crecer por lo tanto en* $x = 1$ *la función tiene un mínimo local.*

Veamos la gráfica de la función para corroborar ésto.

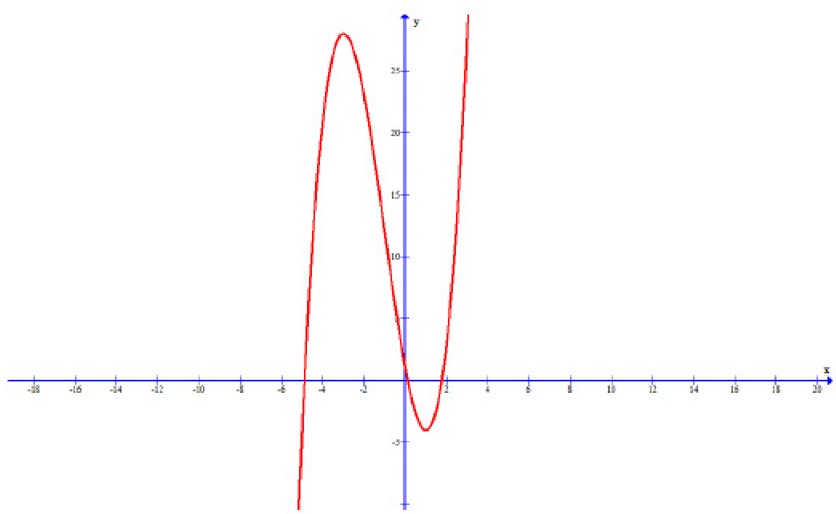


Figura 1: gráfica de $x^3 + 2x^2 - 9x + 1$

Éste ultimo análisis no está mal, solo que estamos casi repitiendo el proceso de graficado de la función. Podemos entonces acudir a la segunda derivada que no otorga un criterio más ágil

CRITERIO DE LA SEGUNDA DERIVADA PARA MÁXIMOS Y MÍNIMOS LOCALES

Si c es un punto crítico de la función f y ésta es derivable dos veces en c entonces:

- Si $f''(c) > 0$ se tiene que c es un mínimo local.
- Si $f''(c) < 0$ se tiene que c es un máximo local.
- y si $f''(c) = 0$ el criterio no es concluyente.

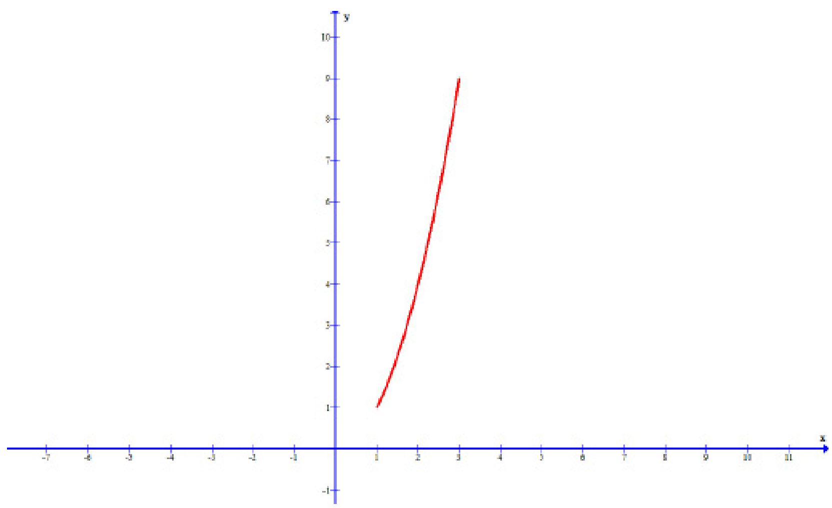
Usemos pues éste criterio en el ejercicio anterior. La función era $f(x) = x^3 + 3x^2 - 9x + 1$, la derivada es $f'(x) = 3x^2 + 6x - 9$ y los puntos críticos son $\{-3, 1\}$. Al calcular f'' tenemos

$f''(x) = 12x + 6$, que al evaluarse en $x = -3$ da $f''(-3) = -36 + 6 = -30 < 0$ luego tenemos un máximo en éste punto. Al evaluarse en $x = 1$ tenemos $f''(1) = 12 + 6 = 18 > 0$, por lo tanto tenemos un mínimo en éste punto.

Si la segunda derivada no existe o da cero la única forma de saber si estamos en un mínimo o máximo local es averiguando los intervalos de crecimiento de la función.

Ejemplo 7. *La función $f(x) = |x|$ posee un mínimo local en $x = 0$, pero el criterio de la segunda derivada no es aplicable a dicha función.*

Ejemplo 8. *Si consideramos la función $f : [1, 3] \to \mathbb{R}$ dada por $f(x) = x^2$, tenemos que ésta función por definición solo está definida en el intervalo $[1, 3]$ luego al considerar su derivada $f'(x) = 2x$ solo es cero si $x = 0$ pero éste punto no está en el dominio que nos dieron y éste no es correcto extenderlo. Luego la función no tiene máximos ni mínimos locales en apariencia. Pero si vemos la gráfica tenemos*



aquí vemos que la función si tiene un máximo y un mínimo, éstos son alcanzado en $x = 3$ y $x = 1$ respectivamente, solo que están en los extremos.

Si el dominio de la función fuera $(1, 3)$ entonces ésta función no tendría ni máximo ni mínimo ya que éstos se encontrarían en puntos que no están en el dominio

Éstos valores máximo y mínimo respectivamente son globales quiere ésto decir que en ningún otro punto del dominio la función alcanza un valor mas alto o uno más bajo, podría eso si alcanzar éstos mismos como en una función constante.

Se tiene un teorema muy importante que nos permite con certeza realizar el procedimiento del ejemplo anterior.

Teorema 3.2. *Toda función real, continua y con dominio un intervalo cerrado $[a, b]$, con a y b en los reales; alcanza máximo y mínimo global en el dominio*

Ésto quiere decir que si la función es continua entonces existe en el intervalo cerrado puntos c y C, en los cuales $f(c)$ es la imagen más pequeña de todas y $f(C)$ es la más grande de todas.

Si la función no es continua o si el dominio no es cerrado éste teorema no se cumple, vea los ejercicios.

Bajo éste teorema buscaremos ahora máximos y mínimos globales de funciones con dominio un intervalo cerrado y acotado.

Ejemplo 9. *Encontremos los máximos y mínimos globales de la función* $f(x) = x + \sin(x)$ *de dominio en* $[0, 2\pi]$.

Comenzamos pues buscando los máximos y mínimos locales de la función, tenemos que $f'(x) = 1 + \cos(x)$ *que nos por puntos críticos los puntos donde* $1 + \cos(x) = 0$*, ésto pasa en* $x = \pi$ *en ése dominio.*

Si evaluamos ahora la función en los extremos del dominio y en los puntos críticos tenemos $f(0) = 0 + \sin(0) = 0$*,* $f(\pi) = \pi + \sin(\pi) = \pi$ *y* $f(2\pi) = 2\pi + \sin(2\pi) = 2\pi$ *de donde el valor más pequeño es 0 y la función lo alcanza en* $x = 0$ *y el valor más grande está en* $x = 2\pi$ *y es* 2π

Siempre que estemos en presencia de funciones que cumplan con el teorema anterior éste ejemplo contiene el procedimiento estándar para encontrar los máximos y los mínimos globales de la función

PROCEDIMIENTO PARA ENCONTRAR MÁXIMOS Y MÍNIMOS GLOBALES EN FUNCIONES DERIVABLES EN CASI TODO PUNTO CON DOMINIOS CERRADOS Y ACOTADOS

- Encuentre los puntos críticos de la función
- Evalúe la función en los extremos del dominio y en los puntos críticos
- Escoja el mínimo y el máximo de entre éstos valores.

Si el dominio de la función es abierto en algún extremo, se debe tener cuidado con la existencia de posibles asíntotas de la función sobre las cuales la función no es acotada si son verticales o si son horizontales puede se la cota de la función

Presentamos para terminar un ejemplo de máximos y mínimos globales de una función con asíntotas.

Ejemplo 10. *Encontremos los máximos y mínimos locales y globales de la función* $f(x) = \frac{\ln(x)}{x}$ *que tiene por dominio* $(0, \infty)$.

Empezamos calculando los puntos críticos usando para ésto la derivada de la función que es $f'(x) = \frac{1-\ln(x)}{x^2}$*, los puntos críticos son aquellos* x *donde* $\frac{1-\ln(x)}{x^2} = 0$ *y como ésto es un cociente, solo ocurre si el numerador es cero. Tenemos entonces que los puntos críticos son aquellos en los que* $\ln(x) = 1$ *y ésto solo pasa en* $x = e$

Tenemos entonces solo un punto crítico en el dominio de la función, si queremos saber si éste es máximo o mínimo local podemos usar el criterio de la segunda derivada que es

$$f''(x) = \frac{2\ln(x) - 3}{x^3}$$

y al evaluarlo en $x = e$*, da* $-0{,}049787068367864$ *y al ser negativa dice que estamos en presencia de un máximo local.*

Como no podemos evaluar en los extremos del dominio ya que éstos no están incluidos en el mismo lo que hacemos es evaluar los limites de la función en esos extremos con el objetivo de encontrar las asíntotas si las tiene.

Entonces tenemos

$$\lim_{x \to 0} \frac{\ln(x)}{x}$$

como el numerador tiende a $-\infty$ *y el denominador tiende a cero entonces todo el cociente tiende a* $-\infty$ *(ésto no es una indeterminación). Como el límite cuando* x *se acerca a un número nos dio* $-\infty$ *tenemos en ese número una asíntota vertical de la función. Y por último*

$$\lim_{x\to\infty}\frac{\ln(x)}{x}$$

es una indeterminación del tipo $\frac{\infty}{\infty}$ *luego podemos usar L'Hopital de donde tenemos*

$$\lim_{x\to\infty}\frac{\ln(x)}{x}=\lim_{x\to\infty}\frac{\frac{1}{x}}{1}=0$$

por lo tanto la función posee una asíntota horizontal en $y=0$

De lo observado podemos concluir que la función no es acotada inferior mente es decir no posee mínimo global y a pesar de poseer una asíntota horizontal en $y=0$*, la evaluación de la función en el punto crítico da* $0{,}3678794411171442$*, que es mayor a cero luego si posee máximo global y lo alcanza en* $x=e$*.*

Veamos la gráfica para terminar de convencernos.

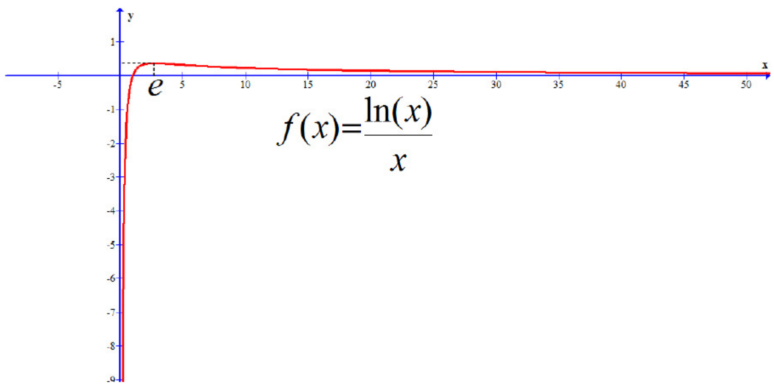


Figura 2: función $\frac{\ln(x)}{x}$

El ejemplo anterior ilustra el procedimiento estándar de búsqueda de máximos y mínimos globales para una función que sea derivable salvo quizá en un número finito de puntos del dominio y tiene por dominio un conjunto que nos es cerrado o no es acotado.

PROCEDMIENTO ESTANDAR PARA ENCONTRAR MÁXIMOS Y MÍNIMOS GLOBALES DE UNA FUNCIÓN DERIVABLE SALVO EN UN NÚMERO FINITO DE PUNTOS Y TIENE DOMINIO NO CERRADO O NO ACOTADO

- Encuentre la derivada de la función
- Encuentre los puntos críticos de la función
- Evalúe la función en los extremos del dominio en los que se puede y en los otros encuentre el limite cuando x tiende a ese extremo
- Evalúe la función en los puntos críticos. Use los criterios de derivadas
- Si todos los límites dieron finitos escoja el máximo entre las evaluaciones de la función y los límites calculados, igualmente para el mínimo.
- si algún límite le dio ∞ significa que la función no posee máximo global, y si le dio $-\infty$ significa que la función no posee mínimo global

1. Encuentre los máximos y mínimos locales de la función $f(x) = x^3 + 6x^2 + 15x - 3$
2. Encuentre los máximos y mínimos locales de la función $f(x) = \frac{1}{x^2+1}$
3. Encuentre los máximos y mínimos locales de la función $f(x) = \frac{x^2+2x-3}{x-3}$
4. Encuentre los máximos y mínimos locales de la función $f(x) = |x^2 - 1|$
5. Encuentre los máximos y mínimos globales de la función $f(x) = \frac{x^2+2x-3}{x-3}$ en $(3, 10]$
6. Encuentre los máximos y mínimos globales de la función $f(x) = e^x + x$ en $(-3, 1]$
7. Encuentre los máximos y mínimos globales de la función $f(x) = \frac{x^2+2x-3}{x-3}$ en $[4, 10]$
8. Encuentre los máximos y mínimos globales de la función $f(x) = e^x + x$ en $[-3, 1]$

Sección 4: Optimización

Ejemplo 11. *Supongamos que desean encerrar una finca rectangular de área* $100{,}000m^2$*. ¿que dimensión debe tener ésto para que el material usado en el cerramiento sea mínimo?*

podríamos tener fincas de las siguientes dimensiones.

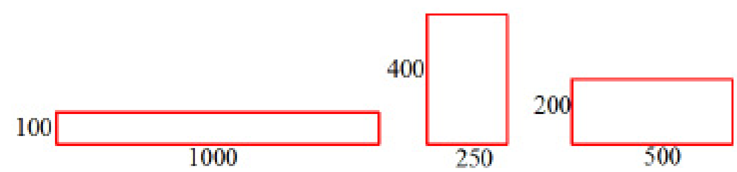


Figura 3: Diferentes dimensiones de fincas con área $A = 100{,}000$

todas tienen la misma área pero sus perímetros son 2200*,* 1300 *y* 1400 *respectivamente. Si pudiéramos elegir únicamente de éstas 3 diríamos que la finca de área* $100{,}000mt^2$ *que necesita la menor cantidad de material para encerrarla es la segunda, pero la cantidad de opciones no son solo esas tres.*

Si x *es al ancho de la finca y* y *el largo tenemos que el área de la finca es* xy *que como sabemos siempre debe ser* $100{,}000$*, luego* $xy = 100{,}000$ *que al despejar da* $y = \frac{100{,}000}{x}$*.*

Por otro lado lo que deseamos minimizar es el perímetro de la finca, éste esta dado por $P = 2x+2y$ *pero como ya sabemos* y *no es una cantidad que se pueda escoger libremente,* y *siempre depende de* x *en la forma* $y = \frac{100{,}000}{x}$*. Luego* $p = 2x + 2\frac{100{,}000}{x}$*, ademas sabemos que* x *representa un longitud luego no puede ser negativa ni cero.*

Queremos entonces minimizar $p(x) = 2x + \frac{200{,}000}{x}$ *sobre el intervalo* $(0, \infty)$*. Buscaremos pues los mínimos locales de la función y los compararemos con las asíntotas (ésto porque el intervalo no es acotado ni cerrado por lo que se pueden presentar asíntotas) para saber si tiene mínimo o no.*

Calculamos la derivada de la función P *que es* $P'(x) = 2 - \frac{200{,}000}{x^2} = \frac{2(x^2-100{,}000)}{x^2}$*, que al igualarla a cero solo pasa cuando el numerador sea cero es decir cuando* $x^2 = 100{,}000$ *y ésto pasa si* $x = -\sqrt{100{,}000} = -316{,}227766016838$ *o cuando* $x = \sqrt{100{,}000} = 316{,}227766016838$*, pero como* x *no puede ser negativo solo nos sirve* $316{,}227766016838$*. Por cual tenemos solo un punto crítico y la función en dicho punto crítico da* $P(\sqrt{100{,}000}) = 4\sqrt{100{,}000} = 1264{,}91106406735$*.*

Como los extremos del dominio no están incluidos en él mismo tenemos que revisar los límites cuando x se acerca a éstos.

$$\lim_{x \to 0^+} 2x + \frac{200{,}000}{x} = \infty$$

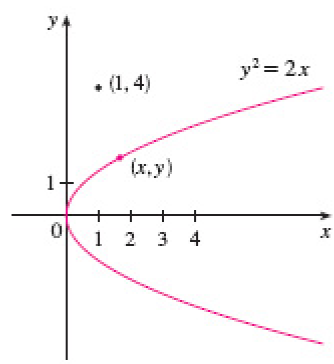
y

$$\lim_{x \to \infty} 2x + \frac{200{,}000}{x} = \infty$$

por lo que la función no es acotada superiormente pero inferior mente sí por el valor $1264{,}91106406735$ *que es alcanzado en* $x = \sqrt{100{,}000}$.

Luego la finca debe ser cuadrada de lado $316{,}227766016838$ *y el perímetro en ése caso es* $P = 4\sqrt{100{,}000} \approx 1265$ *cantidad que es inferior a los que dimos en las gráficas anteriores como alternativa.*

Ejemplo 12. *Encuentre el punto sobre la parábola* $y^2 = 2x$ *que se encuentre mas cerca del punto* $(1, 4)$



En éste ejemplo listaremos el procedimiento.

1. *Encontramos la función a maximizar o minimizar:*

   Ésta debe medir la distancia del punto (x, y) *que está en la parábola y el el punto* $(1, 4)$*, como* (x, y) *esta en la parábola entonces* $x = \frac{y^2}{2}$ *. la función* t^2 *en* $[a, \infty)$ *es creciente porque su derivada es positiva si* $a \geq 0$*, por lo que ésta función alcanza mínimo cuando* t *sea mínimo, si* t *representa una distancia, que por definición de distancia es positiva, estamos diciendo que la distancia al cuadrado se minimiza solo si la distancia es mínima. Ésta observación nos permite trabajar con la función distancia al cuadrado en ves de la función distancia.*

   La distancia l *se encuentra usando el teorema de Pitagoras, construyendo un triángulo rectángulo cuya hipotenusa sea el segmento que conecta a* (x, y) *con* $(1, 4)$ *y* l *es precisamente esa hipotenusa, que según Pitagoras es* $l = \sqrt{(x-1)^2 + (4-y)^2}$*. Para evitar la raíz trabajamos con la distancia al cuadrado que esta dada por* $l^2 = (x-1)^2 + (y-4)^2$*, aquí* l^2 *es el nombre de la función para no general confusión la llamaré* $L = l^2$*. Al reemplazar* x *por* $\frac{y^2}{2}$ *tenemos la función a minimizar que es*

   $$L(y) = \left(\frac{y^2}{2} - 1\right)^2 + (y-4)^2$$

   el dominio de la función son todos los reales.

2. *Encontramos ahora los puntos críticos de la función objetivo.*

   Derivamos y tenemos

   $$L'(y) = 2\left(\frac{y^2}{2} - 2\right)y + 2(y-4)$$

que al igualarla a cero obtenemos los puntos críticos de

$$2\left(\frac{y^2}{2}-2\right)y+2(y-4)=0$$

ésta ecuación es equivalente a

$$y^3-8=0$$

cuya única solución es $y=2$

3. *Verificamos si nuestros puntos críticos son máximos o mínimos locales, usando la segunda derivada* $L''(y)=3y^2$ *vemos que estamos en un mínimo local.*

4. *como el dominio no es cerrado y ninguno de los extremos está incluido en él revisamos los limites cuando* y *se acerca a los extremos del dominio.*

$$\lim_{y\to-\infty}\left(\frac{y^2}{2}-1\right)^2+(y-4)^2=\infty$$

y también

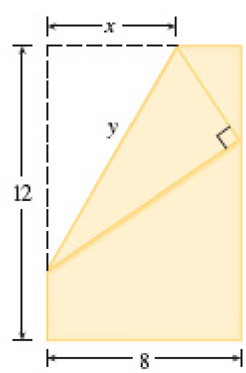
$$\lim_{y\to+\infty}\left(\frac{y^2}{2}-1\right)^2+(y-4)^2=\infty$$

5. *Concluimos.*

   Que la función es no acotada superiormente, pero si posee mínimo global y está dado por $y=2$ *y* $x=\frac{2^2}{2}=2$ *en donde* $L=5$ *o sea* $l=\sqrt{5}$

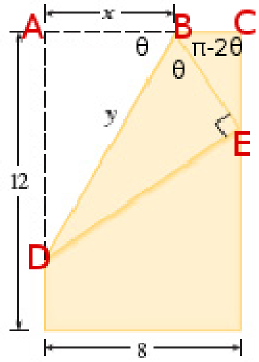
Luego el punto sobre la parábola que se encuentra más cerca del punto $(1,4)$ *es el punto* $(2,2)$ *y la distancia es* $\sqrt{5}$

Ejemplo 13. *La esquina superior derecha de una pieza de papel de 8cm de ancho por 12cm de alto es doblada sobre el borde derecho como en la figura. ¿ Cuánto debe doblar para minimizar la longitud del plegado?. En otras palabras cuanto debe medir* x *para minimizar* y.



1. *Primero encontramos la función a maximizar o minimizar.*

   Para ésto introducimos en la gráfica las letras A, B, C, D, y E las cuales nos sirven para describir los triángulos presentes en la misma



Observe que el triángulo $\triangle ABD$ *y el triángulo* $\triangle BED$ *son exactamente los mismos. y que el angulo* $\angle B$ *es el mismo en ambos triángulos, si a éste lo llamamos* θ*, tendríamos que el ángulo* $\angle B$ *en el triángulo* $\triangle BCE$ *corresponde a* $\pi - 2\theta$ *ya que la suma de los tres ángulos* $\angle B$ *de los tres triángulos forman un ángulo llano de* π

Además se ve que los tres triángulos son rectos y si suponemos que conocemos x*, ésta corresponde a* $\overline{AB}$ *y* $\overline{BE}$*. El vínculo entre* x *y* y *se da mediante* θ *por las funciones trigonométricas ya que* y *es en dos de los triángulos la hipotenusa, tenemos*

$$\cos(\theta) = \frac{x}{y}$$

y en triángulo $\triangle BCE$ *tenemos*

$$\cos(\pi - 2\theta) = \frac{\overline{BC}}{\overline{BE}} = \frac{8 - x}{x}$$

explorando ésta última relación mediante la identidad trigonométrica de suma de ángulos en el coseno ($\cos(\alpha + \beta) = \cos(\alpha)\cos(\beta) - \sin(\alpha)\sin(\beta)$)*, tenemos*

$$\cos(\pi - 2\theta) = \cos(\pi)\cos(-2\theta) - \sin(\pi)\sin(-2\theta)$$

como $\cos(\pi) = -1$, $\sin(\pi) = 0$ *y el coseno es par*

$$\begin{aligned}
\cos(\pi - 2\theta) &= -\cos(2\theta) \\
\cos(\pi - 2\theta) &= -(\cos(\theta)\cos(\theta) - \sin(\theta)\sin(\theta)) \\
\cos(\pi - 2\theta) &= -\cos^2(\theta) + \sin^2(\theta)
\end{aligned}$$

usando que $\cos^2(\theta) + \sin^2(\theta) = 1$

$$\begin{aligned}
\cos(\pi - 2\theta) &= -\cos^2(\theta) + (1 - \cos^2(\theta)) \\
\cos(\pi - 2\theta) &= 1 - 2\cos^2(\theta)
\end{aligned}$$

usando ahora que para el triángulo $\triangle ABD$*, se tiene* $\cos(\theta) = \frac{x}{y}$

$$\cos(\pi - 2\theta) = 1 - 2\frac{x^2}{y^2}$$

Al juntar éste resultado con la ecuación anterior tenemos

$$\begin{aligned}\frac{8-x}{x} &= \cos(\pi - 2\theta)\\ &= 1 - 2\frac{x^2}{y^2}\end{aligned}$$

de donde podemos despejar y^2 como

$$y^2 = \frac{x^3}{x-4}$$

o también

$$y = \sqrt{\frac{x^3}{x-4}}.$$

En principio se pide que $0 \leq x \leq 8$, pero de la ecuación anterior se ve que $4 < x$, y como y debe menor a 12 se encuentra que $x > 4{,}739170123616380$ (número encontrado mediante el método de Newton)

Este número, que se convierte en el extremo izquierdo del dominio de la función y que queremos minimizar no se necesita considerar ya que geométrica mente sabemos que allí y es 12.

2. *Calculamos entonces los puntos críticos de la función $y = \sqrt{\frac{x^3}{x-4}} = \left(\frac{x^3}{x-4}\right)^{1/2}$*

$$\begin{aligned}y' &= \frac{1}{2}\left(\frac{x^3}{x-4}\right)^{-1/2}\left(\frac{3x^2(x-4) - x^3(1)}{(x-4)^2}\right)\\ &= \frac{1}{2}\left(\frac{x-4}{x^3}\right)^{1/2}\left(\frac{3x^3 - 12x^2 - x^3}{(x-4)^2}\right)\\ &= \frac{1}{2}\left(\frac{x-4}{x^3}\right)^{1/2}\left(\frac{2x^2(x-6)}{(x-4)^2}\right)\\ &= \frac{(x-4)^{1/2}}{x^{3/2}}\frac{x^2(x-6)}{(x-4)^2}\\ &= \frac{x^2(x-6)}{x^{3/2}(x-4)^{3/2}}\end{aligned}$$

luego los puntos críticos son aquellos en los que $x^2(x-6) = 0$, ya que la derivada es un cociente solo tomamos el numerador y lo igualamos a cero. Entonces los puntos críticos se reducen a solo $x = 6$ ya que el cero no sirve por no estar en el dominio de y.

3. *Evaluamos entonces en los extremos del dominio, en el izquierdo sabemos que la función da 12 y en el derecho que es 8 y da*

$$y(8) = \sqrt{\frac{8^3}{8-4}} = \sqrt{128} = 11{,}3137085$$

Y también evaluamos en el punto crítico $x = 6$ en donde

$$y(6) = \sqrt{\frac{6^3}{6-4}} = \sqrt{108} = 10{,}39230485$$

4. *Decidimos que el mínimo de la función se presenta en* $x = 6$ *y el valor mínimo es* $y = 10{,}39230485$ *como se ve en la gráfica*

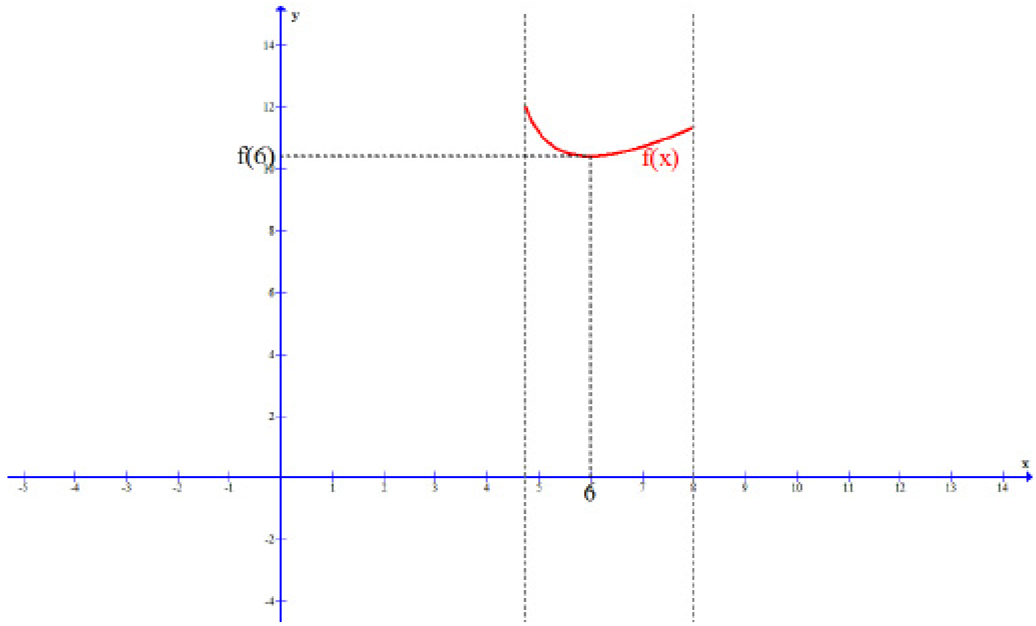
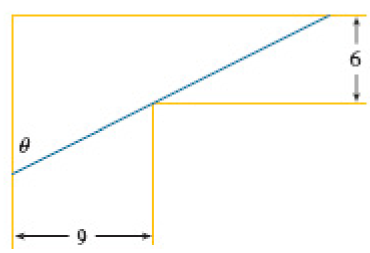


Figura 4: Gráfica de $\sqrt{\frac{x^3}{x-4}}$ en $[4{,}739170123616380\ \ ,8]$

4.1: Ejercicios

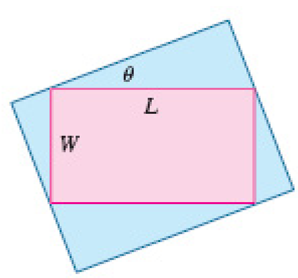
1. Encuentre dos numero cuya diferencia es 100 y su producto es máximo.

2. En un pasillo de $9m$ de ancho se esta trasladando un tubo metálico. El pasillo se conecta con otro de $6mt$ formando una esquina como se muestra en la gráfica. ¿Cual es la longitud del tubo mas largo que se puede transportar por el pasillo y girar en la esquina sin doblarlo?

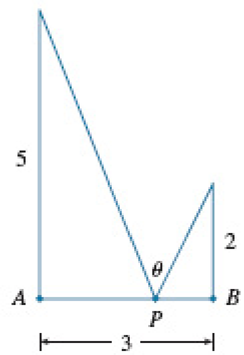


3. Una caja con base cuadrada y sin tapa debe contener un volumen de $32000cm^3$ Encuentre las dimensiones de la caja que minimice el material usado

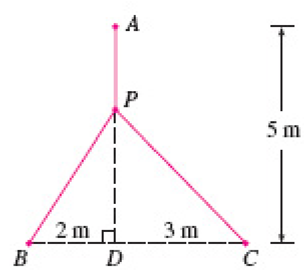
4. Encuentre el área máxima de un rectángulo que puede ser circunscrito sobre un rectángulo dado con longitud L y ancho W



5. ¿Donde se puede ubicar el punto P sobre el segmento AB para que maximice el ángulo θ?



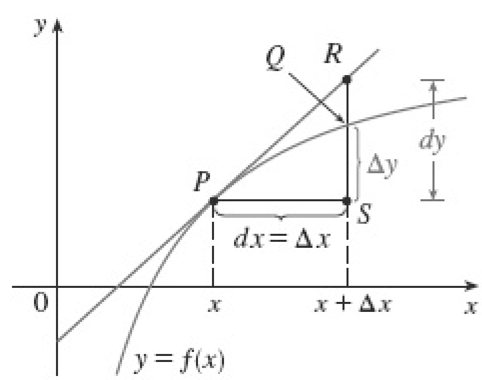
6. Un punto P debe ser localizado sobre la linea AD para que la longitud total L de cables conectando P a los puntos A, B y C sea mínima



Encuentre la ecuación que se debe minimizar para resolver el problema

Sección 5: Diferenciales

En secciones anteriores habíamos tratado la linealización de una función, abordamos ahora un concepto que esta bastante ligado y es el de diferencial, Definimos la diferencial de la variable independiente x por dx y de la variable dependiente y por $dy = y'dx$. El significado geométrico de las diferenciales es explicado en la siguiente gráfica



Dado $P(x, f(f))$ y $Q(x + \Delta x, f(x + \Delta x))$ son puntos de la gráfica de f y si tomamos $dx = \Delta x$. El correspondiente cambio en y es

$$\Delta y = f(x + \Delta x) - f(x)$$

La pendiente de la recta tangente $\overline{PR}$ es la derivada $f'(x)$. Entonces la distancia entre S y R es $f'(x)dx = dy$. Por lo tanto dy representa la cantidad en la que la recta tangente pasa(El cambio en la linealización), mientras que Δy representa la cantidad en la cual cambia la función cuando x cambia debido a un incremento dx. Note en la figura que las dos cantidades $dy \approx \Delta y$ cuando dx es bastante pequeño. Si escribimos $dx = x - a$ entonces $x = a + dx$ y podemos reescribir la aproximación lineal($f(x) \approx f'(a)(x-a) + f(a)$) en la notación de diferenciales

$$f(a + dx) \approx f(a) + dy$$

Ejemplo 14. *si* $y = \frac{x+1}{x-1}$ *entonces* dy *esta dado por*

$$dy = \frac{1(x-1) - (x+1)1}{(x-1)^2}dx = \frac{-2}{(x-1)^2}dx$$

y si $a = 2$ *y* $dx = \Delta x = 0{,}05$

$$dy = \frac{-2}{(2-1)^2}0{,}05 = -0{,}1$$

y

$$\frac{3{,}05}{1{,}05} = f(2{,}05) \approx f(2) + dy = 3 - 0{,}1 = 2{,}9$$

5.1: Ejercicios

1. Para $y = \sqrt{x}$
   a) Encuentre la diferencial dy
   b) Evalúe dy y Δy si $x = 1$ y $\Delta x = dx = 1$
   c) Realice un gráfica como la anterior usando estas cantidades.
2. Para la función $y = e^{x/10}$
   a) Encuentre la diferencial dy
   b) Evalue dy y Δy si $x = 0$ y $dx = 0{,}1$