



Unidad 3 / Escenario 6

Lectura Fundamental

Transformaciones lineales

Contenido

- 1 Palabras claves
- 2 Introducción
- 3 Interpretaciones de transformaciones entre espacios vectoriales
- 4 Núcleo e Imagen de una transformación lineal
- 5 Lista de referencias de figuras

1. Palabras claves

Transformaciones lineales, matriz asociada, núcleo, imagen.

2. Introducción

En la vida cotidiana el hombre se enfrenta a un mundo que experimenta cambios constantes sobre objetos o situaciones, algunos producidos naturalmente y otros provocados por el mismo ser humano en busca de satisfacer sus necesidades. Todas las personas en algún momento de la vida han tenido que hacer alguna actividad que implique un cambio y sobre estos han tenido que analizar sus efectos. Vea los siguientes ejemplos:

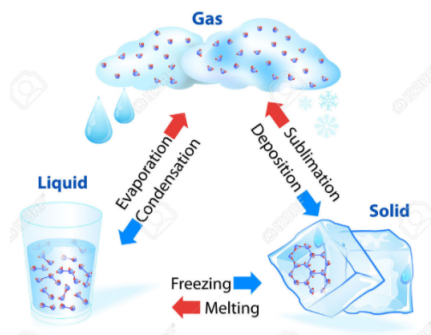


Figura 1: **Estados del agua.** Fuente: Recuperado de <https://goo.gl/b6wixt>



Figura 2: **Estados del agua.** Fuente: Recuperado de <https://goo.gl/gwwkQ4>

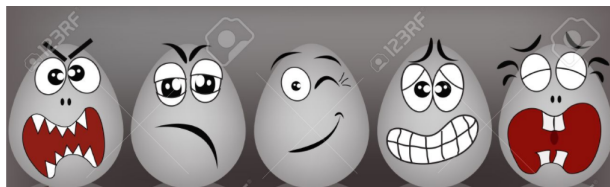
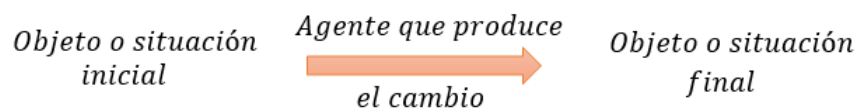


Figura 3: **Cambios estado de ánimo.** Fuente: Recuperado de <https://us.123rf.com/450wm/ykononova/ykononova1204/ykononova120400453/13402098-establecer-los-huevos-grises-expresando-la-emoci-n-sobre-un-fondo-gris.jpg?ver=6>

Al observar la información que exponen las figuras 1,2 y 3 se indentifican las siguientes preguntas respecto a los cambios que en ellos aparecen:

Figura	1	2	3
¿Cuál es el objeto que está cambiando?	Agua	Arcilla	Estado de ánimo
¿Qué produce el cambio?	Temperatura	Manipulación	Situación
¿Qué se obtiene del cambio?	Otro estado del agua	Escultura	Otro estado de ánimo

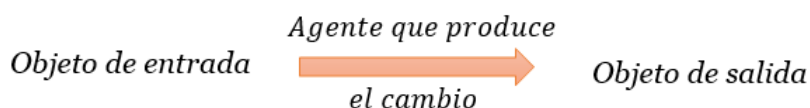
Con las anteriores preguntas se puede definir un proceso mediante el cual se modifica el estado o las características de un objeto o una situación como consecuencia de un agente de cambio, esto se denomina **Transformación**.



Este proceso de transformación no es ajeno al área de las matemáticas, en el campo del álgebra lineal se observa en situaciones en las que:

- La información se representa como un sistema de ecuaciones en la forma $Ax = b$. El objeto de entrada es un vector x , el agente de cambio la matriz A y el objeto de salida en un vector b .
- A un vector (objeto de entrada) se le hace corresponder un polinomio o una función (objeto de salida) que arroje información sobre su comportamiento en otro espacio vectorial. Por ejemplo, en las situaciones de productos de insumos representados como n-uplas, se aplica una operación (agente de cambio) para obtener el polinomio costo.
- A un vector u se le asocia otro vector v como resultado de aplicar una rotación, reflexión, dilatación.

El esquema del proceso de transformación en matemáticas sería el siguiente:



3. Interpretaciones de transformaciones entre espacios vectoriales

Matemáticamente, en los procesos de transformación los objetos de entrada y de salida pertenecen a espacios vectoriales y el agente de cambio es el que define la transformación. La notación matemática que representa este proceso corresponde a la siguiente:

- $T : V \rightarrow W$ hace referencia a los espacios vectoriales implicados en la transformación. V corresponde al conjunto de objetos de la entrada y W al conjunto de objetos de salida.
- Si A es una matriz, $T(A)$ representa la transformación de la matriz, objeto de salida.
- Si u es un vector, $T(u)$ representa el objeto de salida debido a la transformación del vector.
- Si f es una función, $T(f)$ representa el objeto de salida producto de la transformación de la función que puede ser su derivada, integral o cualquier otro operador que se pueda establecer en ella.

Para comprender esta idea se analizará la siguiente imagen que representa gráficamente una transformación aplicada a un vector de \mathbb{R}^2 .

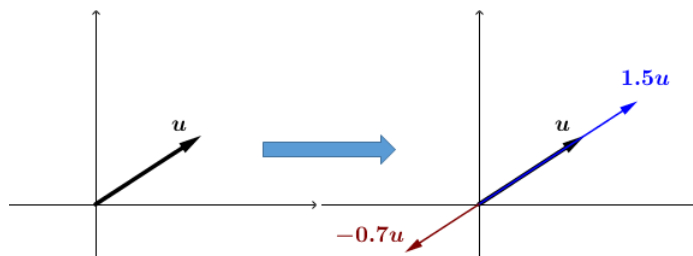


Figura 4: Múltiplos escalares de un vector. *Fuente:*Elaboración propia.

En la figura 4 se observa que el objeto de entrada es el vector $u \in \mathbb{R}^2$. La transformación aplicada muestra cambios en la dirección y en la magnitud del vector, los vectores $-0.7u, 1, 5u$ en la imagen son los objetos de salida; es decir, es una transformación del espacio del vectorial \mathbb{R}^2 en el mismo espacio por medio de una multiplicación escalar, lo cual se denota como $T : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$, tal que $T(u) = ku$. Nótese que los vectores de salida del ejemplo anterior son colineales con el objeto de entrada.

Si las transformaciones se establecen entre espacios vectoriales, surgen interrogantes sobre las características de las transformaciones, como por ejemplo: ¿las características de los espacios vectoriales correspondientes a las operaciones de multiplicación por escalar y suma del espacio vectorial de entrada son heredadas a través de la transformación lineal en el espacio vectorial de salida?, observe el siguiente ejemplo.

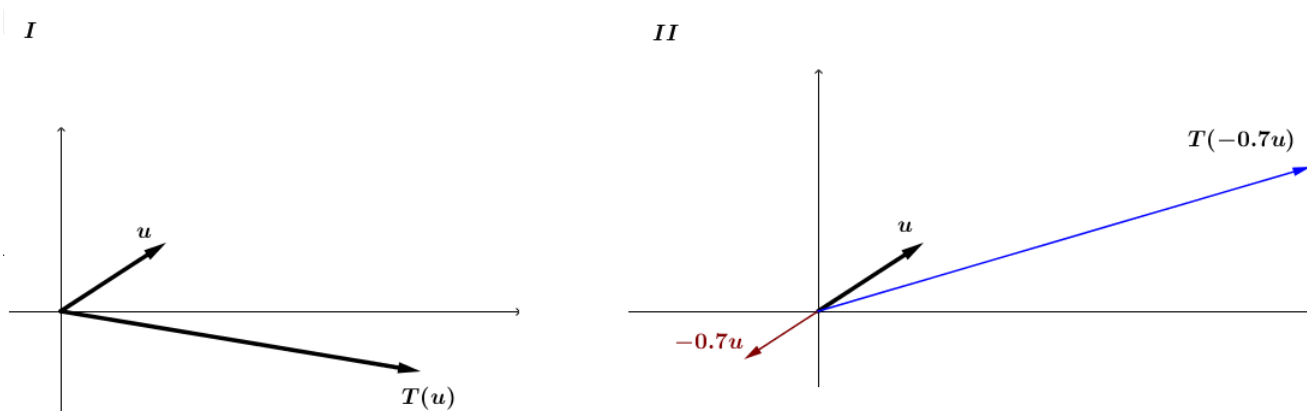


Figura 5: Transformación de múltiplos escalares de un vector. *Fuente:*Elaboración propia.

De acuerdo con las imágenes de la figura 5:

- La imagen I tiene como objeto de entrada el vector u , la transformación aplicada muestra cambios en la dirección y magnitud del vector y lo que se observa como $T(u)$ en la imagen es el vector de salida.
- La imagen II tiene como objeto de entrada el vector $-0.7u$, la transformación aplicada muestra cambios en la dirección y magnitud del vector y lo que se observa como $T(-0.7u)$ en la imagen es el vector de salida.
- Los vectores de entrada u y $-0.7u$ en las dos imágenes son colineales, pero los objetos de salida $T(u)$ y $T(-0.7)$ no lo son, por tanto esta característica no se hereda a través de la transformación.

Ahora, en la figura 6, note que los múltiplos escalares de la transformación $T(u)$ si son colineales.

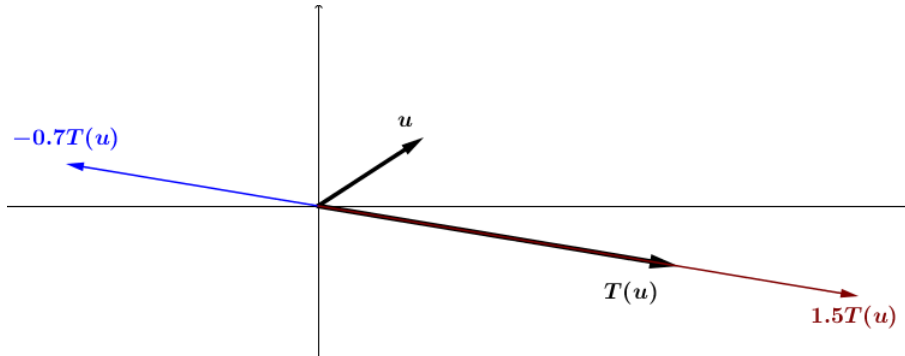


Figura 6: Múltiplos escalares de una transformación. *Fuente:*Elaboración propia.

En el ejemplo anterior, aunque $T(ku)$ y $kT(u)$ involucran el mismo agente de cambio, la transformación T no comparte las mismas características, y en el primer caso no se hereda la característica de linealidad de los múltiplos escalares del espacio vectorial de entrada, es decir $T(ku) \neq kT(u)$.

Ahora, observe otro ejemplo de una transformación.

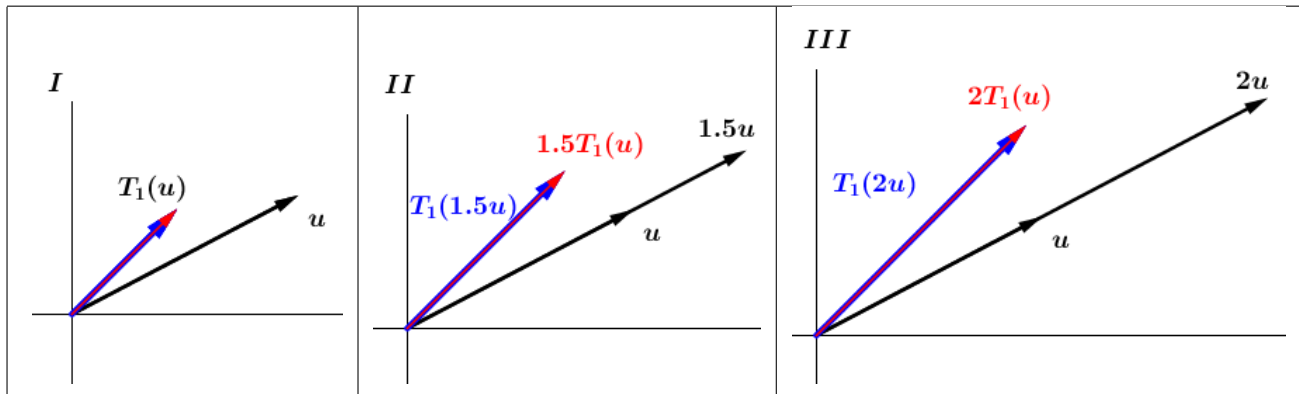


Figura 7: Secuencia transformación T_1 . *Fuente:*Elaboración propia.

De acuerdo con las imágenes de la figura 7:

- La imagen I tiene como objeto de entrada el vector u , la transformación aplicada muestra cambios en la dirección y magnitud del vector y lo que se observa como $T_1(u)$ en la imagen es el vector de salida.
- La imagen II tiene como objeto de entrada el vector $1.5u$ y su objeto de salida $T_1(1.5u)$. Se observa que $T_1(1.5u) = 1.5T_1(u)$

- La imagen III tiene como objeto de entrada el vector $2u$ y su objeto de salida $T_1(2u)$; además $T_1(2u) = 2T_1(u)$.

Lo anterior es un ejemplo de una transformación que conserva la propiedad de linealidad de la multiplicación escalar del espacio vectorial inicial, en notación matemática esto es $T(ku) = kT(u)$.

Ahora observe qué sucede cuando se aplica la transformación T_1 a otro objeto.

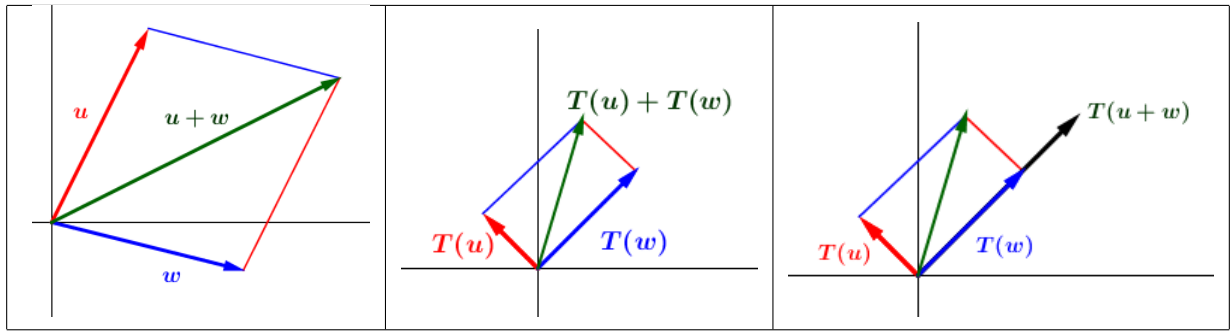


Figura 8: Transformación T_1 de un paralelogramo. Fuente: Elaboración propia.

En este caso, el objeto de entrada es el paralelogramo construido a partir de los vectores u y w , cuya diagonal es la suma de los dos vectores. En la segunda imagen se observa que el objeto de salida es un paralelogramo con dirección y magnitud diferente al inicial y cuya diagonal es el vector resultante $T(u)+T(w)$. No obstante, esta diagonal no corresponde con la transformación de la diagonal del paralelogramo inicial, es decir, $T(u)+T(w) \neq T(u+w)$.

A diferencia de la primera transformación, T_1 conserva las características del producto escalar pero no el de la suma, lo que conlleva a que los objetos iniciales al transformarlos pierdan ciertas características. Aquellas transformaciones que preservan la suma y el producto escalar se denominan **Transformaciones lineales**.

Definición 3.1. Transformación Lineal: Sean V y W espacios vectoriales, una transformación Lineal T de V en W es una función que asigna a cada elemento $v \in V$ un vector único $T(v) \in W$ y que satisface, para cada u, v en V y un escalar λ :

$$\begin{aligned} T(\lambda u) &= \lambda T(u) \\ T(u + v) &= T(u) + T(v) \end{aligned}$$

¿Sabías que...?

- Toda transformación lineal transforma el vector 0 del espacio de entrada en el vector 0 del espacio vectorial de salida.
- En el contexto geométrico, la propiedad $T(\lambda u) = \lambda T(u)$ implica, además de la colinealidad, la proporcionalidad de las magnitudes de los objetos.

En las transformaciones los agentes de cambio están definidos a partir de unas reglas denominadas operaciones y con ellas se verifica si la transformación es lineal o no. Observe en los siguientes ejemplos el proceso que permite identificar si una transformación es lineal:

Ejemplo 1. Proyección de un objeto en \mathbb{R}^3 sobre un plano \mathbb{R}^2 .

La transformación de \mathbb{R}^3 a \mathbb{R}^2 significa que se está pasando de dimensión 3 a dimensión 2, el objeto que antes se veía en un espacio tridimensional, ahora se visualiza, de acuerdo con la transformación, en un espacio bidimensional; esto ocurre por ejemplo cuando se hace la proyección de un objeto en un plano que se obtiene al fijar una de las tres variables y se le asigna el valor de 0. Un caso de esto se observa en la figura 9, donde se desea hacer la proyección del objeto sobre el plano x, y ; para ello se debe fijar y asignar el valor de 0 la variable z . La representación algebraica de esta transformación sería $T : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2$ donde $T(x, y, z) = (x, y)$.

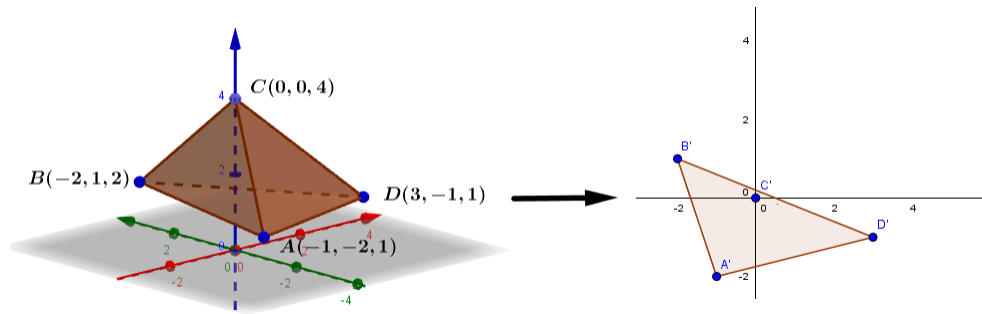


Figura 9: Transformación proyección sobre el plano x, y . Fuente: Elaboración propia.

Comprobar si la transformación es lineal.

- Paso 1. Verificar la propiedad $T(\lambda u) = \lambda T(u)$. Para esto se escoge un vector general en \mathbb{R}^3 , se aplican las transformaciones indicadas a cada lado de la igualdad y se prueba si los resultados son iguales, en cuyo caso se cumpliría la igualdad. Observe:

Sean $u = (a, b, c) \in \mathbb{R}^3$, $\lambda \in \mathbb{R}$ y $T(x, y, z) = (x, y)$. Primero se aplica la transformación al lado izquierdo de la igualdad $T(\lambda u) = \lambda T(u)$.

$$\begin{aligned}
 T(\lambda u) &= T(\lambda(a, b, c)) && \text{Se reemplazó el vector } u \text{ por sus componentes.} \\
 &= T(a\lambda, b\lambda, c\lambda) && \text{Se resolvió el producto escalar.} \\
 &= (a\lambda, b\lambda) && \text{Se aplicó la transformación que indica que la tercera componente se elimina.} \\
 T(\lambda u) &= (a\lambda, b\lambda)
 \end{aligned}$$

Ahora se aplica la transformación al lado de derecho de la igualdad $T(\lambda u) = \lambda T(u)$

$$\begin{aligned}
 \lambda T(u) &= \lambda T(a, b, c) && \text{Se reemplazó el vector } u \text{ por sus componentes.} \\
 &= \lambda(a, b) && \text{Se aplicó la transformación.} \\
 \lambda T(u) &= (a\lambda, b\lambda) && \text{Se resolvió el producto escalar} \\
 \lambda T(u) &= (a\lambda, b\lambda)
 \end{aligned}$$

Al comparar los resultados obtenidos al aplicar la transformación $T(\lambda u)$ y $\lambda T(u)$, se verificó la propiedad $T(\lambda u) = (a\lambda, b\lambda) = \lambda T(u)$.

- Paso 2. Probar la propiedad $T(u + v) = T(u) + T(v)$. Note que aquí están involucrados dos elementos del espacio vectorial inicial, por lo cual se deben seleccionar dos elementos generales de este espacio para luego hacer un proceso similar al realizado en la comprobación de la primera propiedad, observe.

Sea $u = (a, b, c), v = (d, e, f) \in \mathbb{R}^3$, probar que $T(u + v) = T(u) + T(v)$.

$T(u + v) = T((a, b, c) + (d, e, f))$	Se reemplazaron los vectores u y v .
$= T(a + d, b + e, c + f)$	por sus componentes.
$T(u + v) = (a + d, b + e)$	Se resolvió la suma de vectores.
$T(u) + T(v) = T(a, b, c) + T(d, e, f)$	Hallar la transformación.
$= (a, b) + (d, e)$	Aplicar la transformación indicada.
$T(u) + T(v) = (a + d, b + e)$	al lado derecho de la igualdad.
	Se aplicó la transformación.
	Se resolvió la suma de vectores

De aquí se verifica que la segunda propiedad se cumple, por tanto, se concluye que la transformación de proyección de un objeto es una transformación lineal

Cabe resaltar que esta proyección se puede realizar a cualquiera de los tres planos; en cuyo caso, si se desea proyectar sobre el plano x, z se elimina la componente y , si se desea proyectar sobre el plano y, z se elimina la componente x .

Ejemplo 2. Transpuesta de una matriz. Esta transformación se define como $T : M_{mn} \rightarrow M_{nm}$, donde $T(A) = A^t$. En este caso el objeto de entrada es una matriz de tamaño $m \times n$ el agente de cambio es el intercambio de filas por columnas y el objeto de salida es una matriz de tamaño $n \times m$. Para comprobar que es una transformación lineal se deben tener en cuenta las propiedades de la matriz transpuesta.

- Paso 1. Probar que $T(\lambda u) = \lambda T(u)$. Sea $A \in M_{mn}$ y $\lambda \in \mathbb{R}$.

$T(\lambda u) = T(\lambda A)$	Aplicando la transformación indicada al lado izquierdo de la igualdad.
$= (\lambda A)^t$	Hallar la transformación.
$T(\lambda u) = \lambda A^t$	Aplicando la propiedad $(kA)^t = kA^t$.
$\lambda T(u) = \lambda T(A)$	Aplicando la transformación indicada al lado derecho de la igualdad.
$= \lambda A^t$	Se aplicó la transformación.
$\lambda T(u) = \lambda A^t$	

De lo anterior se concluye que $T(\lambda A) = \lambda T(A)$

- Paso 2. Probar la propiedad $T(u + v) = T(u) + T(v)$. Para ello, se deben tomar dos matrices cualesquiera de tamaño $m \times n$. Sean $u = A_{mn}$ y $v = B_{mn}$, probar que $T(A + B) = T(A) + T(B)$.

$T(A + B) = (A + B)^t$	Se aplicó la transformación $T(A) = A^t$.
$T(A + B) = A^t + B^t$	Se aplicó la propiedad $(A + B)^t = A^t + B^t$.
$T(A) + T(B) = A^t + B^t$	Aplicando la transformación indicada al lado derecho de la igualdad.

Luego se cumple que $T(A + B) = T(A) + T(B)$.

Por lo que la transformación que asigna a cada matriz su transpuesta resulta ser lineal.

¿Sabías que...?

¿Una transformación lineal se puede interpretar como una función?. Tal vez el lector estará familiarizado con expresiones como $y = f(x)$ o $f : A \rightarrow B$, donde $x \in A$ y $y \in B$. En este caso, el objeto de entrada serían todos los valores de x , el objeto de salida es y o $f(x)$ a los cuales se les denomina el valor de la función f en x o la imagen de x bajo la función f (Valle, 2012).

En la sección de material de apoyo encontrará la descripción de transformaciones lineales usuales, revíselas, tal vez le serán de utilidad en situaciones futuras.

3.1. Representación matricial de una transformación lineal

En la lectura del escenario anterior se estableció que la base de un espacio vectorial permite caracterizarlos y por tanto, ser más eficiente en los procesos. En este caso, de nuevo las representaciones matriciales son un instrumento adecuado para organizar la información y ofrece una manera eficiente y sintética de interpretar las transformaciones lineales entre espacios vectoriales a partir de sus bases. En este sentido, a continuación se expondrá cómo construir la representación matricial de espacios vectoriales de dimensión finita.

Antes de iniciar recuerde que:

- Dada una base B de un espacio vectorial V , todo vector $v \in V$ se puede expresar como una combinación lineal de los elementos de la base, esto es $v = c_1b_1 + c_2b_2 + \dots + c_nb_n$.
- El vector $v_B = (c_1, c_2, \dots, c_n)$ es el vector que representa las coordenadas del vector v en la base B ; es decir, existe una correspondencia entre cualquier espacio vectorial V y \mathbb{R}^n en términos de la base B .

Cuando se hace uso de las bases canónicas o estandar de un espacio vectorial, hallar la matriz de una transformación lineal es un proceso sencillo, observe los ejemplos:

Ejemplo 3. Matriz de transformación realtiva a la base estandar. Hallar la representación matricial de la transformación $T : P_2 \rightarrow P_3$ definida como $T(a_2x^2 + a_1x + a_0) = a_0x^3 - a_1x + a_2$.

Antes de hallar la representación matricial, siempre es pertinente reconocer los elementos que componen la transformación.

Objeto de entrada	Agente de cambio	Objeto de salida
Subespacio vectorial de los polinomios de grado 2: $a_2x^2 + a_1x + a_0$	Se puede describir como $a_0 \rightarrow a_0x^3$ $a_1x \rightarrow -a_1x$ $a_2x^2 \rightarrow a_2$	Subespacio vectorial de los polinomios de grado 3: $a_0x^3 - a_1x + a_2$

Teniendo claro el proceso de transformación, se procede a hallar su representación matricial.

- Paso 1. Hallar la transformación de los elementos de la base estandar del espacio inicial. Es este caso, la base estandar de P_2 es $B = \{1, x, x^2\}$.

$$\begin{array}{ll} T(1) = 1x^3 & \text{Siendo } a_0 = 1 \text{ se aplica } T(a_0) = a_0x^3 . \\ T(x) = -x & \text{Siendo } a_1x = x \text{ se aplica } T(a_1x) = -a_1x . \\ T(x^2) = 1 & \text{Siendo } a_2x^2 = x^2 \text{ se aplica } T(a_2x^2) = a_2 . \end{array}$$

- Paso 2. Construir la representación matricial asociada a la transformación, donde las columnas serán los

coeficientes de los polinomios grado 3 resultantes, observe: $1x^3 \rightarrow \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$; $-x \rightarrow \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$; $1 \rightarrow \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

Luego, la representación matricial es $A_T = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

En este caso la transformación $T(a_2x^2 + a_1x + a_0) = a_0x^3 - a_1x + a_2$ se puede representar como:

$$A_T = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_0 \\ 0 \\ -a_1 \\ a_2 \end{pmatrix}$$

Lo anterior indica que para hallar la transformación lineal de algún elemento del subespacio vectorial P_2 basta con realizar la multiplicación de matrices, por ejemplo la transformación lineal de $3x^2 + 5x - 4$ es

$$A_T = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -4 \\ 5 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 \\ 0 \\ -5 \\ 3 \end{pmatrix}, \text{ que corresponde al polinomio } -4x^3 - 5x + 3.$$

En algunas situaciones resulta más eficiente definir este producto matricial en algún software de manera que solo sea necesario ingresar el objeto de entrada para obtener el objeto de salida, y así simplificar los procesos.

Ahora, observe que las columnas de la matriz de transformación constituyen una base para el subespacio vectorial de polinomio de grado 3 cuya forma es $a_0x^3 + 0x^2 - a_1x + a_2$, puesto que con ellas todo vector de la salida se puede escribir como una combinación lineal de ellos $(a_0, 0, -a_1, a_2) = a_0(1, 0, 0, 0) + a_1(0, 0, -1, 0) + a_2(0, 0, 0, 1)$ y además son linealmente independientes.

Ejemplo 4. Matriz de transformación relativa a bases no estandar. Hallar la representación matricial de la transformación $T: R^2 \rightarrow R^3$ definida como $T(x, y) = (x - y, 2x + y, y)$ relativa a las bases $B_1 = \{(2, 1), (1, 2)\}$; $B_2 = \{(1, -1, 0), (0, 2, 0), (0, 2, 5)\}$ (Grossman, 2012, p.505).

- Hallar la transformación de los vectores de la base $B_1 = \{(2, 1), (1, 2)\}$ de espacio vectorial \mathbb{R}^2 .
 $T(x, y) = (x - y, 2x + y, y)$

$$\begin{array}{l} T(2, 1) = (2 - 1, 2(2) + 1, 1) = (1, 5, 1) \\ T(1, 2) = (1 - 2, 2(1) + 2, 2) = (-1, 4, 2) \end{array}$$

- Expresar cada vector resultante de la transformación como una combinación lineal de la base del espacio vectorial final.

$$(1, 5, 1) = 1(1, -1, 0) + \frac{14}{5}(0, 2, 0) + \frac{1}{5}(0, 2, 5) \quad \text{Luego, su vector de coordenadas en la base } B_2 \text{ es } \left(1, \frac{14}{5}, \frac{1}{5}\right).$$

$$(-1, 4, 2) = 1(1, -1, 0) + \frac{21}{10}(0, 2, 0) + \frac{2}{5}(0, 2, 5) \quad \text{Luego, su vector de coordenadas en la base } B_2 \text{ es } \left(1, \frac{21}{10}, \frac{2}{5}\right).$$

- Construir la matriz de transformación, cuyas columnas son los vectores de coordenadas $[T(2, 1)]_{B_2} = \left(1, \frac{14}{5}, \frac{1}{5}\right)$, $[T(1, 2)]_{B_2} = \left(1, \frac{21}{10}, \frac{2}{5}\right)$ en la base del espacio final.

$$[(A_T)_{B_1}]_{B_2} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ \frac{14}{5} & \frac{21}{10} \\ \frac{1}{5} & \frac{2}{5} \end{pmatrix}$$

De acuerdo a la lectura del escenario anterior, en ocasiones resulta ser más sencillo trabajar con bases diferentes a las canónicas y es aquí donde resulta de gran utilidad emplear diferentes bases. Al igual que en los espacios vectoriales, el uso de las bases en la construcción de la matriz de transformación permitirá determinar algunas características del espacio resultante de la transformación. Este será el tema de la siguiente sección.

4. Núcleo e Imagen de una transformación lineal

Una de las propiedades de las transformaciones lineales es que el vector 0 del espacio vectorial inicial lo transforma en el vector 0 del espacio vectorial final, en notación matemática esto es $T(0) = 0$. No obstante, en el espacio vectorial inicial pueden haber elementos cuya transformación sea el vector 0; al conjunto de vectores que cumplen esta condición se le denomina **núcleo de la transformación o Kernel de T** . En notación matemática es como se indica a continuación:

Definición 4.1. Núcleo de una transformación lineal. Sean V y W dos espacios vectoriales y $T : V \rightarrow W$ una transformación lineal, el conjunto de vectores en V cuya transformación es el vector 0 de W , se denomina núcleo y se denota por $\text{nu}T$.

$$\text{nu}T = \{v \in V : T(v) = 0\}$$

Retomando la transformación lineal de proyección sobre el plano xy , definida por $T : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2$ donde $T(x, y, z) = (x, y)$. Observe que el vector 0 en \mathbb{R}^2 es $(0, 0)$, es decir, $x = 0$ y $y = 0$, por tanto, todos los vectores en \mathbb{R}^3 de la forma $(0, 0, z)$ forman parte del núcleo de T , lo cual se denota como $\text{nu}T = \{v \in \mathbb{R}^3 : x = 0, y = 0\}$.

Para hallar el núcleo de una transformación lineal se pueden emplear dos procesos:

- Aplicar la transformación a un vector general e igualar el resultado a cero y resolver el sistema de ecuaciones resultante.

Ejemplo 5. Sea $T : \mathbb{R}^2 \rightarrow P_1$ donde $T(a, b) = a + (a + b)x$ determinar el núcleo de T .

En este caso se deben encontrar aquellos valores de a y b para los cuales $a + (a + b)x = 0 + 0x$, de lo cual se obtiene el sistema de ecuaciones $a = 0$ y $(a + b)x = 0x$ del cual se obtiene como resultado que el único vector cuya transformación es el polinomio cero es $(0, 0)$, por tanto, $\text{nu}T = \{0\}$.

b. Hacer uso de la matriz de transformación y resolver el sistema $A_T x = 0$.

Ejemplo 6. Sea $A_T = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 4 & 3 \\ 1 & 0 & 6 & 6 \end{pmatrix}$ la representación matricial de la transformación $T : \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}^3$. Hallar el núcleo de T .

En este caso, se resuelve el sistema $\begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 4 & 3 \\ 1 & 0 & 6 & 6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, cuya matriz aumentada es $\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & 2 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 4 & 3 & 0 \\ 1 & 0 & 6 & 6 & 0 \end{array} \right)$, y su matriz escalonada reducida $\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 6 & 6 & 0 \\ 0 & 1 & 4 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right)$. Para determinar el núcleo, se determina la solución del sistema homogéneo asociado a la matriz escalonada reducida.

$$\begin{aligned} x + 6z + 6w &= 0 \implies x = -6z - 6w \\ y + 4z + 3w &= 0 \implies y = -4z - 3w \end{aligned}$$

Por tanto, cualquier vector en \mathbb{R}^4 cuya transformación es el vector 0 en \mathbb{R}^3 se puede escribir en términos de z, w .

$(x, y, z, w) = (-6z - 6w, -4z - 3w, z, w)$. Por tanto, es posible obtener el siguiente conjunto generador para dicho vector.

$$(x, y, z, w) = (-6z - 6w, -4z - 3w, z, w) = z(-6, -4, 1, 0) + w(-6, -3, 0, 1)$$

Es decir, $\text{nu}T = \text{gen} \{(-6, -4, 1, 0), (-6, -3, 0, 1)\}$

Otra de las características que se puede obtener del resultado de una transformación lineal es el tipo de conjunto que se adquiere al aplicarla, es decir, la imagen.

Definición 4.2. Imagen de una transformación. Sean V y W dos espacios vectoriales y $T : V \rightarrow W$ una transformación lineal. La imagen de una transformación, denotada por $\text{Im}T$, esta dada por

$$\text{Im}T = \{w \in W : w = T(v)\}$$

para algún $v \in V$.

El rango de la matriz de transformación es la dimensión de la imagen de A_T y se denota $\rho(A_T)$ o $\rho(T)$.

En el ejemplo 6, la imagen de T es el conjunto de vectores $w = (a, b, c)$ resultantes de aplicar $A_T x = w$. La imagen de una transformación lineal puede obtenerse como el espacio generado de aquellas columnas de la matriz de

transformación que contienen pivotes cuando ésta se encuentra en su forma escalonada reducida. En este caso, los pivotes están ubicados en las dos primeras columnas, luego la $ImT = \text{gen} \{(1, 0, 1), (-1, 1, 0)\}$. Dado que ImT tiene dos elementos, el rango de la transformación es $\rho(T) = 2$.

Con los conceptos y procesos abordados en esta lectura se espera que el lector haya reconocido los elementos que intervienen en un proceso de transformación, tanto en situaciones cotidianas como en el área de las matemáticas. Además, se espera que reconozca a las transformaciones lineales como un instrumento que permite establecer y explicar relaciones entre espacios vectoriales que sean de interés en las aplicaciones.

Referencias

- [1] Grossman, S. (2012). *Álgebra lineal*. (7a. ed.) McGraw-Hill Interamericana. Tomado de <http://www.ebooks7-24.com>
- [2] Valle, S. J. C. D. (2012). *Álgebra lineal para estudiantes de ingeniería y ciencias*. España: McGraw-Hill España. Tomado de <https://goo.gl/gbVv1A>.

5. Lista de referencias de figuras

1. Designua. (2017). *Estados del agua*. [Imagen]. Recuperado de <https://previews.123rf.com/images/designua/designua1411/designua141100025/34011312-Estado-de-la-materia-Cuando-un-estado-de-la-materia-es-o-pierde-calor-que-sufre-un-cambio-F-sica-y-c-Foto-de-archivo.jpg>.
2. Guenette, P. (2017). *Arcilla*. [Imagen]. Recuperado de <https://goo.gl/gwwkQ4>.
3. Yana Kononova. (2017). *Cambios estado de ánimo*. [Imagen]. Recuperado de <https://us.123rf.com/450wm/ykononova/establecer-los-huevos-grises-expresando-la-emoci-n-sobre-un-fondo-gris.jpg?ver=6>.

INFORMACIÓN TÉCNICA



Módulo: Álgebra Lineal

Unidad 3: Transformaciones entre espacios vectoriales

Escenario 6: Transformaciones lineales

Autor: Sandra Milena Rojas Tolosa

Asesor Pedagógico: Diana Marcela Diaz Salcedo

Diseñador Gráfico: Kevin Mauricio Ramírez Corredor

Corrector de estilo: Angélica del Pilar Parra

Asistente: Leidy Alejandra Morales

*Este material pertenece al Politécnico Gran Colombiano.
Por ende, son de uso exclusivo de las Instituciones
adscritas a la Red Ilumino. Prohibida su reproducción
total o parcial.*