



UNIVERSIDAD NACIONAL DE COLOMBIA

SEDE BOGOTÁ

FACULTAD DE CIENCIAS
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICAS

TRABAJO DE GRADO:

DINÁMICA DE LA APLICACIÓN DE HENON

Trabajo presentado por **Diego Fernando Fonseca Valero** para obtener el título de
Matemático en la Universidad Nacional de Colombia

Dirigida por:
Profesor. **Serafin Butista Diaz**

Dedicado a mis padres y hermano.

Agradecimientos

A mi familia, les agradezco por su incondicional respaldo y paciencia, además del amor y apoyo que me brindaron en cada momento.

También le agradezco al profesor Serafin Bautista por dirigir este trabajo y haberme presentado este tema que puede ser el punto de partida de grandes satisfacciones y retos.

Adicionalmente les agradezco a los profesores que constituyen el Departamento de Matemáticas de la Universidad Nacional de Colombia por las conocimientos y experiencias transmitidas.

Introducción

Históricamente la aparición del Cálculo diferencial y la Ecuaciones Diferenciales marcan el inicio de los Sistemas Dinámicos, podría decirse que hasta mediados del siglo XX se establecieron los conceptos que fundamentarían el estudio de los Sistemas Dinámicos como una disciplina, en dicha fundamentación intervienen matemáticos como H. Poincare proponiendo un enfoque cualitativo de las situaciones que los sistemas dinámicos exponían. Precisamente, es en la década de los setenta cuando el estudio de los Sistema Dinámicos se establecen como disciplina, esto se da gracias a los resultados expuestos por A. Lyapunov, G. Birkhoff, D. Anosov y S. Smale, este ultimo es de suma importancia en este trabajo gracias al concepto de la hendidura e hiperbolidad. En la actualidad, la escuela brasileña es pionera en esta disciplina gracias a los aportes de matemáticos como J. Palis y M Peixoto.

Una forma de describir un sistema dinámico es pensar en una situación que depende del tiempo donde la variación es dada por una ley que rige dicho comportamiento, para el caso de sistemas dinámicos discretos se considera el tiempo como discreto, la idea es poder describir el comportamiento pasado y el futuro a partir del estado actual. En términos matemáticos, se considera un conjunto y una aplicación que va del conjunto sobre si mismo, dicha aplicación actúa como la ley de comportamiento, el estado en el tiempo m de un punto del conjunto sera la iteración m -ésima de la aplicación sobre el punto, si la aplicación es invertible entonces permite reconstruir el pasado, estudiar la dinámica de dicho punto bajo iteraciones de la aplicación en general no es fácil, por tal razón se recurre a un análisis general donde se buscan propiedades generales que permitan describir la dinámica de ciertos casos particulares, en ese sentido se introducen concepto como la hiperbolidad que es importante en este trabajo.

Como el título del presente trabajo indica, la aplicación de Hénon es un eje principal en el contenido de este texto, esta aplicación fue introducida en [2] por el astrónomo francés Michel Hénon en 1976, esta es una aplicación muy simple que inicialmente fue introducida para explicar las pequeñas oscilaciones que hacen que ciertos cuerpos celestes se desvén levemente de su órbita elíptica, pero en realidad no se ha encontrado un fenómeno físico concreto que se pueda modelar total o parcialmente con esta aplicación, sin embargo, esta aplicación es muy útil para el estudio de diferentes conceptos que se desarrollan en los sistemas dinámicos, como las bifurcaciones homoclinicas. El objetivo de este trabajo es estudiar la dinámica de la aplicación de Hénon para ciertos parámetros, en ese sentido el Capítulo 1 expone nociones preliminares referentes a los sistemas dinámicos discretos, en dicho capítulo encontramos la definición de un sistema dinámico y la introducción a conceptos como la conjugación topológica, los conjuntos invariantes y el caos, además, también se incluye el primer resultado en aras de describir la dinámica de la aplicación, este es la localización del conjunto no-errante que es donde se concentra la dinámica, esto permitirá centrar el estudio en una región determinada. El capítulo 2 aborda el concepto de estabilidad, donde se presenta el concepto de estabilidad estructural y el de estabilidad de puntos, la idea es identificar los parámetros de la aplicación de Hénon para los cuales se pueden evidenciar esos aspectos de la estabilidad, en ese sentido, se introduce el concepto de hiperbolidad de puntos fijos hiperbólicos y de conjuntos invariantes, en el estudio de dichos conceptos se observa que la aplicación de Hénon es de tipo hendidura, situación de la cual se puede mostrar la presencia de caos; en realidad, en el estudio de la estabilidad es donde se obtienen los resultados acerca de la dinámica. Al final del trabajo se incluye un apéndice en el cual contiene nociones básicas de las áreas matemáticas que intervienen en los conceptos descritos en el trabajo, también se encuentran algoritmos computacionales que permiten la visualización de las variedades estable e inestable de la aplicación de Hénon para los puntos fijos

hiperbólicos, en particular para el caso canónico que es el presentado en [2] originalmente.

Indice

Agradecimientos	I
Introducción	II
1. Nociones preliminares de Sistemas Dinámicos	1
1.1. Sistemas dinámicos	1
1.2. Conjugación topológica	3
1.3. Conjuntos invariantes	5
1.3.1. Localización del conjunto no-errante de la aplicación de Hénon	7
1.4. Caos	18
2. Estabilidad	20
2.1. Aspectos de la estabilidad	20
2.1.1. Estabilidad estructural	20
2.1.2. Estabilidad en puntos del domino	21
2.2. Hiperbolicidad en puntos periódicos	21
2.2.1. Hiperbolicidad en el caso lineal	22
2.2.1.1. Regiones de hiperbolicidad de la parte lineal de $H_{a,b}$	22
2.2.2. Hiperbolicidad en el caso no lineal	25
2.2.2.1. Regiones de hiperbolicidad de $H_{a,b}$	27
2.2.3. Variedades invariantes	30
2.3. Conjuntos hiperbólicos	34
2.3.1. Herradura	34
2.3.1.1. La aplicación de Hénon como herradura	36
2.3.1.2. Caracterización de la Herradura en la aplicación de Hénon	44
2.3.1.3. Dinámica de las sucesiones de símbolos	50
2.3.1.4. Conclusiones sobre la Herradura en la aplicación de Hénon	53
2.3.2. Conjuntos hiperbólicos	54
2.3.2.1. Hiperbolicidad de $\Omega(H_{a,b})$	56
A. Hechos básicos usados	60
A.1. Análisis Vectorial	60
A.2. Topología	61
A.2.0.2. Topología producto	62
A.2.0.3. Invariantes topológicos	62
B. Algoritmos	64
B.1. La aplicación de Hénon	64
B.2. Variedad estable de la aplicación de Hénon	66

Capítulo 1

Nociones preliminares de Sistemas Dinámicos

En este capítulo introduciremos conceptos que serán relevantes en el objetivo de este trabajo como lo son la definición de un sistema dinámico en general y su caracterización en el escenario de interés de este trabajo que son los sistemas dinámicos discretos, esto permitirá caracterizar el sistema dinámico que tiene origen en la aplicación de Hénon, aplicación que también sera presentada en esta sección; este recorrido lleva a la indagación de conceptos que permitan describir el comportamiento de los sistemas dinámicos, dicho estudio se hará en los siguientes capítulos pero algunos de los conceptos serán presentados en esta sección.

1.1. Sistemas dinámicos

Definición 1.1.1. Una *sistema dinámico* es una tripla (M, \mathcal{G}, ψ) donde M es un conjunto, \mathcal{G} es un monoide de escalares y ψ es una aplicación de $\mathcal{G} \times M$ en M satisfaciendo las siguientes propiedades:

1. ψ es una aplicación continua.
2. $\psi(0, x) = x$ para todo x en M .
3. $\psi(t, \psi(s, x)) = \psi(t + s, x)$ para todo $t, s \in M$ y $x \in M$.

El conjunto M es un espacio topológico y se le conoce como el *espacio de fase o estado*. En este trabajo consideramos en la mayoría de los casos $M = \mathbb{R}^n$ donde se indicara el valor de n en cada situación, además, si $\mathcal{G} = \mathbb{R}$ diremos que el sistema dinámico es continuo y si $\mathcal{G} = \mathbb{Z}$ o $\mathcal{G} = \mathbb{N}$ diremos que el sistema dinámico es discreto, precisamente, en este trabajo nos enfocamos en los sistemas dinámicos discretos, es decir, en adelante consideramos $\mathcal{G} = \mathbb{Z}$ o \mathbb{N} , sin embargo, veamos un ejemplo de un sistema dinámico continuo:

Ejemplo 1.1.1. Sea $f : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ una función continua lipschitziana, entonces dado $(t_0, x_0) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$, el problema de valor inicial

$$\frac{dx}{dt} = f(t, x), \quad x(t_0) = x_0 \tag{1.1.1}$$

tiene solución única definida en todo \mathbb{R} , este resultado es fácil de probar con base en los resultados expuestos en [1]; teniendo dicha certeza, dado $x_0 \in \mathbb{R}^n$ considere φ_{x_0} la solución de este problema de valor inicial fijando t_0 como $t_0 = 0$, es decir, φ_{x_0} satisface $\frac{d\varphi_{x_0}}{dt} = f(t, \varphi_{x_0})$ y $\varphi_{x_0}(0) = x_0$.

Esta situación nos presenta un *sistema dinámico continuo* en el cual se tiene $M = \mathbb{R}^n$, $\mathcal{G} = \mathbb{R}$ y ψ es dada por:

$$\begin{aligned} \psi : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n &\rightarrow \mathbb{R}^n \\ (t, x_0) &\mapsto \psi(t, x_0) = \varphi_{x_0}(t). \end{aligned}$$

Precisamente, en [1] se puede ver que ψ es continua, además por ser φ_{x_0} solución del problema de valor inicial 1.1.1 con $t_0 = 0$ se tiene $\psi(0, x_0) = x_0$, también se puede ver por lo mencionado al principio que φ_{x_0} y $\varphi_{\varphi_{x_0}(s)}$ deben coincidir en todos sus puntos, es decir, son la misma función, a partir de esto en [1] se prueba que $\varphi_{x_0}(t+s) = \varphi_{\varphi_{x_0}(s)}(t)$ lo que significa $\psi(t, \psi(s, x_0)) = \psi(t+s, x_0)$. Así pues, ψ satisface las condiciones 1, 2 y 3 de la Definición 1.

En el caso de los sistemas dinámicos discretos, estos pueden ser representados por la iteración de una función, es decir, dada $f : M \rightarrow M$ y $x \in M$, llamamos $x_0 = x$, las iteraciones serán

$$x_{t+1} = f(x_t) \quad t \in \mathbb{Z} \text{ o } \mathbb{N}.$$

En este sentido, los sistemas dinámicos discretos pueden ser representados por el par (M, f) . Note que este forma de representar los sistemas dinámicos discretos es coherente con la Definición 1.1.1, en efecto, lo único que no se ha mostrado de la tripla (M, \mathcal{G}, ψ) es ψ , pero esta es dada por

$$\begin{aligned} \psi : \mathcal{G} \times M &\rightarrow M \\ (t, x) &\rightarrow \psi(t, x) = f^t(x) \end{aligned}$$

donde

$$f^t(x) = f(f(\dots(f(x))\dots)) \quad t \text{ veces}$$

En adelante consideraremos únicamente sistemas dinámicos discretos y todos los resultados se refieren a ellos a menos que se indique lo contrario.

Note que para $x \in M$ las iteraciones de f generan una sucesión, en ese sentido, considerando $f^0 = id_M$ definimos la *órbita positiva* de x bajo f como $\mathcal{O}^+(x) = \{f^m(x) | m \in \mathbb{N}\}$. Si f es invertible entonces definimos la *órbita negativa* de x bajo f como $\mathcal{O}^-(x) = \{f^m(x) | m \in \mathbb{Z} \setminus \mathbb{N}\}$ en caso contrario $\mathcal{O}^-(x) = \emptyset$. Por lo tanto, la *órbita* de x bajo f es $\mathcal{O}(x) = \mathcal{O}^-(x) \cup \mathcal{O}^+(x)$. Podría pensarse que la órbita de un punto es un conjunto infinito, sin embargo, existen dos importantes excepciones.

Definición 1.1.2. Un punto $x^* \in M$ es llamado *punto fijo* de f si $f^m(x^*) = x$ para todo $m \in \mathbb{N}$.

Un punto $x^* \in M$ es un *punto periódico* de f si $f^p(x^*) = x^*$ para algún entero $p \geq 1$, el menor valor p satisfaciendo lo anterior es llamado el *periodo* del punto x^* . Denotamos por $\text{Per}(f)$ al conjunto puntos periódicos de f y por $\text{Fix}(f)$ al conjunto de los puntos fijos de f ; también, llamamos $\text{Per}_p(f)$ al conjunto de los puntos periódicos de orden p , es claro que $\text{Per}_p(f) \subseteq \text{Per}(f)$.

Observe que si $x^* \in M$ es un punto fijo de f entonces $\mathcal{O}(x^*) = \{x^*\}$, por otro lado, si x^* es un punto periódico de periodo p entonces para f invertible se tiene

$$\mathcal{O}(x^*) = \{f^{-p+1}(x^*), \dots, f^{-1}(x^*), x^*\} \cup \{x^*, f(x^*), \dots, f^{p-1}(x^*)\}.$$

Para f no invertible se tiene $\mathcal{O}(x^*) = \{x^*, f(x^*), \dots, f^{p-1}(x^*)\}$.

Definición 1.1.3. Un punto $x^* \in M$ es llamado *eventualmente periódico* si x^* no es periódico y existe $m > 0$ tal que $f^m(x^*)$ es periódico.

Los puntos fijos y periódicos se pueden clasificar de acuerdo al comportamiento de las órbitas de puntos en sus vecindades, el siguiente resultado muestra dicha clasificación.

Definición 1.1.4. Un punto fijo $x^* \in M$ es *estable* si para cualquier vecindad U de x^* , existe otra vecindad V de x^* con $V \subseteq U$ tal que si $x \in V$ entonces $f^m(x) \in U$ para todo $m > 0$.

Esta ultima definición lo que dice es que las iteraciones de puntos cercanos a un punto fijo estable permanecen cercanas a dicho punto para $m > 0$. Si un punto fijo x^* es estable y adicionalmente satisface que $\lim_{m \rightarrow \infty} f^m(x) = x^*$ para todo x en alguna vecindad de x^* , entonces el punto fijo es llamado *asintóticamente estable*. Los puntos fijos que son estables pero no asintóticamente son llamados *neutralmente o marginalmente*

estables. Además, los puntos que no satisfacen la Definición 1.1.4 son llamados *inestables*.

Es el momento de presentar el sistema dinámico que aparece en el título de este trabajo, nos referimos al sistema proveniente de la aplicación de Hénon, la cual es

$$h_{a,b}(x, y) = (1 - ax^2 + y, bx)$$

donde $a, b \in \mathbb{R}$ y $M = \mathbb{R}^2$. Esta aplicación fue introducida en [2] por el astrónomo francés Michel Hénon en 1976, esta es una aplicación muy simple que inicialmente fue introducida para explicar las pequeñas oscilaciones que hacen que ciertos cuerpos celestes se desvíen levemente de su órbita elíptica, pero en realidad no se ha encontrado un fenómeno físico concreto que se pueda modelar total o parcialmente con esta aplicación, sin embargo, esta aplicación es muy útil para el estudio de conceptos desarrollados en los sistemas dinámicos como las bifurcaciones homoclinicas, por esta razón es que esta aplicación adquiere importancia. La forma en que se presenta la aplicación corresponde a la presentada inicialmente por Hénon, aunque en otros textos podemos encontrar aplicaciones que se hacen llamar de Hénon que difieren de esta forma, en realidad dichas formas son equivalentes vía una relación de equivalencia llamada conjugación topológica que detallaremos con más detalle en la siguiente subsección.

Veamos algunas características de la aplicación de Hénon, por ejemplo su inversa, en efecto, la aplicación $h_{a,b}$ es invertible cuando $b \neq 0$, la inversa es dada por

$$h_{a,b}^{-1}(z, w) = \left(\frac{w}{b}, z - 1 + \frac{aw^2}{b^2} \right).$$

Cuando $b = 0$ la aplicación $h_{a,0}$ tiene la forma $h_{a,0}(x, y) = (1 - ax^2 + y, 0)$ esto quiere decir que el espacio \mathbb{R}^2 colapsa sobre el eje x , note que esta aplicación se asemeja en su dinámica a la aplicación $f_a(x) = 1 - ax^2$, en la siguiente sección veremos la razón.

1.2. Conjugación topológica

Es el turno de caracterizar la relación de equivalencia que reconoce cuando dos sistemas dinámicos exhiben el mismo comportamiento, esto es de suma importancia cuando nos encontramos con un sistema dinámico que debido a su forma dificulta el análisis de su comportamiento pero que esta relacionado con otro sistema con una forma menos complicada y en el cual el análisis se hace accesible, la noción que permite dicha asociación es la conjugación topológica, a continuación la definición.

Definición 1.2.1. Dos sistemas dinámicos (M, f) y (N, g) son *topológicamente conjugados* si existe un homeomorfismo $\psi : M \rightarrow N$ tal que

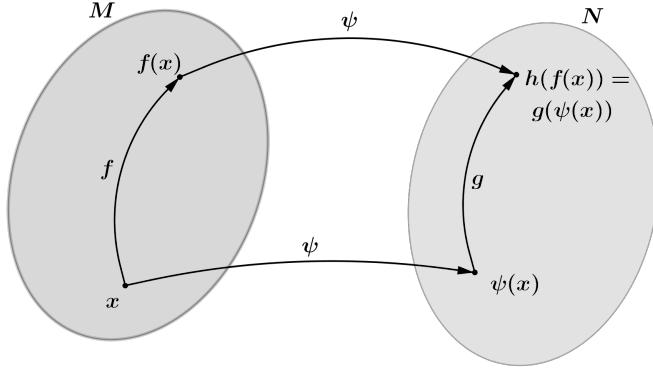
$$\psi \circ f = g \circ \psi$$

donde \circ indica la composición de funciones, al homeomorfismo ψ se le conoce como la *conjugación topológica*.

Esta definición lo que dice es que ψ lleva órbitas en (M, f) sobre órbitas en (N, g) preservando el parámetro m , es decir

$$f^m(x) \xrightarrow{\psi} g^m(\psi(x)) \quad \text{para cada } m \in \mathbb{N} \cup \mathbb{Z}.$$

Esto se ilustra en la Figura 1.2.1.

Figura 1.2.1: Diagrama ilustrando la conjugación de (M, f) y (N, g)

Además, es fácil ver que si $\lim_{m \rightarrow \infty} f^m(x) = x^*$ entonces $\lim_{m \rightarrow \infty} g^m(\psi(x)) = \psi(x^*)$, de esto se puede inferir que h lleva puntos de una región de M donde x^* es asintóticamente estable en una región de N donde $h(x^*)$ es asintóticamente estable.

Intuitivamente se puede pensar en que la dinámica de dos sistemas dinámicos topológicamente conjugados varían solo en el punto de vista en el que son observados, sin embargo, en esta sección aun no podemos demostrar que dos sistemas dinámicos topológicamente conjugados tengan la misma dinámica por que aun no hemos visto todas las características que describen el comportamiento de un sistema dinámico, demostrar esto es probar que bajo la conjugación topológica ciertas características se mantienen invariantes, es decir, si un sistema dinámico posee ciertas características que describen su comportamiento y es topológicamente conjugado a otro sistema dinámico entonces este otro también posee dichas características. A medida que avancemos nos encontraremos con ciertas propiedades e iremos mostrando que se mantiene invariantes bajo conjugación topológica, sin embargo, con lo visto hasta el momento podemos probar el siguiente resultado.

Proposición 1.2.1. *La conjugación topológica es una relación de equivalencia.*

Demuestra. Sea (M, f) un sistema dinámico, entonces es topológicamente conjugado consigo mismo vía la conjugación topológica determinada por la aplicación identidad $id : M \rightarrow M$, de modo que se tiene la propiedad *reflexiva*.

Ahora, suponga que se tiene los sistemas dinámicos (M, f) y (N, g) tales que son topológicamente conjugados, entonces existe el homeomorfismo $\psi : M \rightarrow N$ tal que $\psi \circ f = g \circ \psi$, por tanto, ψ^{-1} también es homeomorfismo tal que $\psi^{-1} \circ g = f \circ \psi^{-1}$, de modo que (N, g) y (M, f) son topológicamente conjugados, esto prueba la *simetría*. Por ultimo, suponga que (M, f) y (N, g) son topológicamente conjugados y considere el sistema dinámico (K, φ) tal que (N, g) y (K, φ) son topológicamente conjugados, entonces existen los homeomorfismos $\psi : M \rightarrow N$ y $\bar{\psi} : N \rightarrow K$ tales que $\psi \circ f = g \circ \psi$ y $\bar{\psi} \circ g = \varphi \circ \bar{\psi}$, entonces $\bar{\psi} \circ \psi$ es un homeomorfismo tal que $(\bar{\psi} \circ \psi) \circ f = \bar{\psi} \circ g \circ \psi = \varphi \circ (\bar{\psi} \circ \psi)$, por lo tanto, (M, f) y (K, φ) son topológicamente conjugados, esto prueba la *transitividad*. \square

Respecto a la aplicación de Hénon $h_{a,b}$, inicialmente con $b = 0$ vemos que $h_{a,0}(\mathbb{R} \times \{0\}) \subset \mathbb{R} \times \{0\}$ y como $h_{a,0}(\mathbb{R}^2) \subset \mathbb{R} \times \{0\}$ entonces solo basta con estudiar $h_{a,0}|_{\mathbb{R} \times \{0\}}$, además, note que $h_{a,0}|_{\mathbb{R} \times \{0\}}$ es topológicamente conjugada a $f_a(x) = 1 - ax^2$ vía el homeomorfismo $\psi : \mathbb{R} \times \{0\} \rightarrow \mathbb{R}$ dado por $\psi(x, 0) = x$, de modo que se estudia f_a en lugar de $h_{a,0}|_{\mathbb{R} \times \{0\}}$; es importante saber que f_a es topológicamente conjugado a la aplicación $F_\mu(x) = \mu x(1 - x)$ para $a = \frac{1}{4}\mu(\mu - 2)$ vía la conjugación $\psi_\mu : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ dada por $\psi_\mu(x) = \frac{1}{4}(\mu - 1)x + \frac{1}{2}$, precisamente, la función F_μ hace parte de la familia cuadrática que es ampliamente estudiada en [3], no obstante, cuando nos refiramos a la aplicación $h_{a,0}$ nos enfocaremos en la función f_a .

Anteriormente mencionamos que la aplicación de Hénon tiene otras representaciones que son equivalentes en el sentido de la conjugación topológica, una de ellas es:

$$H_{a,b}(x, y) = (a + by + x^2, x).$$

La conjugación topológica que permite esta identificación es $\psi : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ dado por $\psi(x, y) = (ax, \frac{ax}{b})$. En adelante, por cuestiones técnicas, trabajaremos con la expresión de la aplicación de Hénon dada por $H_{a,b}$.

1.3. Conjuntos invariantes

La atención se centra en analizar el comportamientos de la órbita de un punto bajo una aplicación f , en especial bajo la aplicación $H_{a,b}$, dentro de dicho análisis se observa que frecuentemente la órbita permanece dentro de regiones particulares, entender la forma y características de dichas regiones constituyen un avance en la intención de captar el comportamiento de la órbita.

Definición 1.3.1. Sea (M, f) un sistema dinámico, un conjunto $\Lambda \subseteq M$ se llama *invariante* bajo la aplicación f si $f(x) \in \Lambda$ para cada $x \in \Lambda$.

Note que si Λ es invariante, entonces $f^m(x) \in \Lambda$ para cada $x \in \Lambda$ y para todo $m \in \mathbb{Z}^+$, es decir, $\mathcal{O}^+(x) \subseteq \Lambda$, si f es invertible y $\mathcal{O}^+(x) \subseteq \Lambda$, para hacer claridad, Λ se dice *positivamente invariante*, y si $\mathcal{O}^-(x) \subseteq \Lambda$, entonces Λ se dice *negativamente invariante*.

El primer ejemplo de un conjuntos invariante que encontramos es precisamente las órbitas de cualquier punto.

En la sección anterior hablamos de la periodicidad, esta concepto permite afirmar que si un punto es periódico entonces su órbita es finita, es de esperar que nos preguntemos por los puntos que tienen órbitas infinitas, para este tipo de puntos se tiene una noción que extiende el concepto de periodicidad.

Definición 1.3.2. Un punto $x \in M$ es un punto *no-errante* para f si dado cualquier abierto $U \subseteq M$ con $x \in U$, existe $m > 0$ tal que $f^m(U) \cap U \neq \emptyset$.

Esta definición lo que expresa es que no importa cuan cerca se este de x siempre se encontrara un punto y cercano a x que después de m iteraciones vuelve a estar cerca de x , esta es en realidad una relación de recurrencia. El *conjunto de los puntos no-errantes de f* es notado por $\Omega(f)$, este conjunto es invariante, esta y otras propiedades se demuestran en la siguiente proposición.

Proposición 1.3.1. Sea (M, f) un sistema dinámico, entonces:

1. $\Omega(f)$ es un conjunto cerrado (puede ser vacío).
2. $f(\Omega(f)) \subset \Omega(f)$, con igualdad cuando f es invertible.
3. $Per(f) \subset \Omega(f)$.

Demostración. .

1. Veamos que $M \setminus \Omega(f)$ es abierto, en efecto, sea x un punto errante, entonces existe un conjunto abierto U con $x \in U$ tal que para todo $n > 0$ se tiene $f^n(U) \cap U = \emptyset$, pero note que esto le ocurre al cualquier elemento de U , entonces $U \subset M \setminus \Omega(f)$, de modo que $M \setminus \Omega(f)$ es abierto.
2. Sea $x \in \Omega(f)$ y U un abierto con $f(x) \in U$, como f es continua entonces $f^{-1}(U)$ es un abierto que contiene a x , y como $x \in \Omega(f)$ entonces existe $n > 0$ tal que $f^n(f^{-1}(U)) \cap f^{-1}(U) \neq \emptyset$, de esto ultimo se sigue que

$$\phi \neq f(f^n(f^{-1}(U)) \cap f^{-1}(U)) \subseteq f^n(f(f^{-1}(U))) \cap f(f^{-1}(U)) \subseteq f^n(U) \cap U.$$

Por lo tanto, $f(x)$ es no-errante.

3. Esta parte es inmediata, ya que si x es periódico con periodo m , entonces para cualquier abierto U contenido x se tiene que $f^m(x) \in f^m(U) \cap U$.

□

El siguiente resultado es de suma importancia para comprender la estructura del conjunto no-errante.

Proposición 1.3.2. Sean (M, f) y (N, g) sistemas dinámico topológicamente conjugados con f y g difeomorfismos y ψ la conjugación topológica. Entonces,

$$\Omega(g) = \psi(\Omega(f)).$$

Demuestra. Sea $x \in \Omega(f)$ y sea U un abierto en N tal que $\psi(x) \in U$. Dado que ψ es continua entonces $\psi^{-1}(U)$ es un abierto en M conteniendo a x , entonces existe $n > 0$ tal que

$$f^n(\psi^{-1}(U)) \cap \psi^{-1}(U) \neq \emptyset.$$

Como ψ es una conjugación topológica entonces

$$\psi^{-1}(g^n(U)) \cap \psi^{-1}(U) \neq \emptyset.$$

En consecuencia, se infiere que

$$g^n(U) \cap U = h(\psi^{-1}(g^n(U)) \cap \psi^{-1}(U)) \neq \emptyset.$$

Por lo tanto, $\psi(x) \in \Omega(g)$. De modo que $\Omega(g) \supseteq \psi(\Omega(f))$. Para probar la otra contenencia se procede la misma manera usando la conjugación ψ^{-1} . \square

La razón de la importancia de esta proposición radica en que se puede hacer el estudio del conjunto no errante de un sistema dinámico por medio del estudio del mismo conjunto pero en otro sistema dinámico, esta propiedad será ampliamente usada en capítulos posteriores, por ejemplo, para mostrar que en determinados valores de a y b se tiene $\Omega(H_{a,b})$ compacto, entre otras propiedades.

La estructura de $\Omega(H_{a,b})$ se analizara con mayor detalle en los capítulos posteriores, sin embargo, podemos reconocer subconjuntos importantes, para tal fin introducimos la siguiente definición.

Definición 1.3.3. Sea (M, f) un sistema dinámico, un punto $y \in M$ se dice un punto ω -límite de x a través de f si existe una sucesión $\{n_i\}_{i=1}^{\infty}$ con $n_i \rightarrow \infty$ como $i \rightarrow \infty$ tal que $\lim_{i \rightarrow \infty} f^{n_i}(x) = y$.

De manera análoga, y se dice un punto α -límite de x a través de f si existe una sucesión $\{n_i\}_{i=1}^{\infty}$ con $n_i \rightarrow -\infty$ como $i \rightarrow \infty$ tal que $\lim_{i \rightarrow \infty} f^{n_i}(x) = y$.

El conjunto de todos los puntos ω -límite de x a través de f es notado por $\omega(x, f)$, y el conjunto de todos los puntos α -límite de x a través de f es notado por $\alpha(x, f)$; cuando no haya lugar a confusión simplemente se notaran por $\omega(x)$ y $\alpha(x)$ respectivamente.

Puede darse el caso en que $\omega(x, f)$ o $\alpha(x, f)$ sean vacíos, otra forma de caracterizar estos conjuntos es la siguiente:

$$\omega(x, f) = \bigcap_{k \geq 0} \overline{\{f^n(x) \mid n \geq k\}} \quad \text{y} \quad \alpha(x, f) = \bigcap_{k \geq 0} \overline{\{f^{-n}(x) \mid n \geq k\}}.$$

Es fácil ver que si M es un espacio métrico compacto entonces $\omega(x, f)$ y $\alpha(x, f)$ serán no vacíos; para $M = \mathbb{R}^2$ no se puede asegurar que estos conjuntos sean no vacíos dado que \mathbb{R}^2 no es un espacio métrico compacto.

Note que para tener puntos α -límite se requiere que f sea invertible, teniendo en cuenta esto, tenemos el siguiente resultado.

Proposición 1.3.3. Sea (M, f) un sistema dinámico, estocen $\omega(x)$ es invariante bajo f ; si f es invertible $\alpha(x)$ también es invariante bajo f .

Demuestra. Veamos inicialmente que $\omega(x)$ es invariante bajo f , en efecto, sea $y \in \omega(x)$, entonces existe $\{n_i\}_{i=1}^{\infty}$ con $n_i \rightarrow \infty$ como $i \rightarrow \infty$ tal que $\lim_{i \rightarrow \infty} f^{n_i}(x) = y$; considerando $z = f(y)$ se tiene la sucesión $\{n_i + 1\}_{i=1}^{\infty}$ la cual claramente satisface $n_i + 1 \rightarrow \infty$ como $i \rightarrow \infty$ y por la continuidad de f se tiene

$$\lim_{i \rightarrow \infty} f^{n_i+1}(x) = \lim_{i \rightarrow \infty} f(f^{n_i}(x)) = f\left(\lim_{i \rightarrow \infty} f^{n_i}(x)\right) = f(y) = z.$$

De modo que $z = f(y) \in \omega(x)$. La prueba para $\alpha(x)$ es análoga. \square

Dos subconjuntos de $\Omega(f)$ son $\omega(x)$ y $\alpha(x)$ el siguiente resultado muestra esto.

Proposición 1.3.4. *Sea (M, f) un sistema dinámico, entonces $\omega(x)$ esta contenida en $\Omega(f)$ para cualquier $x \in M$; si f es invertible se tiene lo mismo para $\alpha(x)$.*

*Demuestra*ción. Suponga que existe $y \in \omega(x)$ tal que $y \notin \Omega(f)$, entonces existe un abierto U con $y \in U$ tal que para todo $n > 0$ se tiene que $f^n(U) \cap U = \emptyset$, pero como U es abierto existe $\varepsilon > 0$ tal que $y \in B_\varepsilon(y) \subseteq U$. Como $y \in \omega(x)$ existe $\{n_i\}_{i=1}^\infty$ con $n_i \rightarrow \infty$ como $i \rightarrow \infty$ tal que $\lim_{i \rightarrow \infty} f^{n_i}(x) = y$, entonces, por definición de límite se tiene que existe $N > 0$ tal que si $i \geq N$ entonces $f^{n_i}(x) \in B_\varepsilon(y)$ que a su vez implica que $f^{n_i}(x) \in U$. De modo que, llamando $z = f^{n_N}(x)$, $f^{n_i-n_N}(z) \in U$ para todo $i > N$, por lo tanto, $f^{n_i-n_N}(U) \cap U \neq \emptyset$ para todo $i > N$, así que no puede darse $f^n(U) \cap U = \emptyset$, y en consecuencia $y \in \Omega(f)$. Para el caso de $\alpha(x)$ la prueba es análoga. \square

Observación 1.3.1. Las ultimas dos proposiciones indican que la dinámica de un sistema dinámico (M, f) esta concentrada en su conjunto no-errante $\Omega(f)$, entendiendo la dinámica como el estudio del comportamiento de las órbitas de cualquier punto en M . En este sentido, entender la dinámica de (M, f) se traduce en entender la geometría de $\Omega(f)$ y la dinámica de $(\Omega(f), f)$.

Volviendo a la aplicación de Hénon, no podemos dejar pasar este capítulo sin mostrar los puntos fijos de $H_{a,b}$, es decir, los puntos $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ tales que $H_{a,b}(x, y) = (x, y)$, estos se obtiene resolviendo el sistema

$$\begin{cases} a + by - x^2 = x \\ x = y \end{cases}.$$

De donde vemos que los puntos fijos existen sí y solo sí $(1-b)^2 + 4a \geq 0$ y son dados por $p_\pm = (x_\pm, x_\pm)$ donde $x_\pm = \frac{b-1 \pm \sqrt{(1-b)^2 + 4a}}{2}$; en adelante usaremos las expresiones p_\pm para referirnos a estos puntos.

Note que de la expresión para los puntos fijos podemos inferir que para $H_{a,b}$ solo pueden existir a lo más 2^n puntos periódicos.

Otro hecho importante sobre $H_{a,b}$ es el siguiente.

Proposición 1.3.5. *Para $b \neq 0$ la aplicación $H_{a,b}$ es un difeomorfismo del plano de clase C^1 .*

*Demuestra*ción. Sea $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, observe que $DH_{a,b}(x, y) = \begin{bmatrix} -2x & b \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$, entonces $\det(DH_{a,b}(x, y)) = -b \neq 0$, de modo que por el Teorema de la función inversa (ver el Apéndice A, Teorema A.1.1) $H_{a,b}$ es un C^1 difeomorfismo local, pero es fácil ver que $H_{a,b}$ es inyectiva, por lo tanto $H_{a,b}$ es un C^1 difeomorfismo global de \mathbb{R}^2 sobre $H_{a,b}(\mathbb{R}^2)$ (ver el Apéndice A, Lema A.1.1), también es posible ver que $H_{a,b}$ es sobreyectiva lo cual garantiza que $H_{a,b}$ es un difeomorfismo del plano de clase C^1 . \square

1.3.1. Localización del conjunto no-errante de la aplicación de Hénon

En esta parte trataremos de localizar el conjunto de los puntos no-errantes de $H_{a,b}$, para tal fin seguiremos algunas de las ideas expuestas en [4]. Inicialmente consideraremos la partición del espacio de parámetros dada por la expresión $a_0 = -\frac{(1+|b|)^2}{4}$ como se muestra en la Figura 1.3.1.

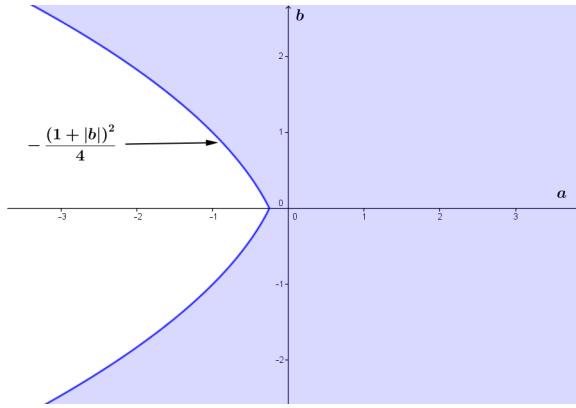


Figura 1.3.1: Partición en el espacio de parámetros

Y establecemos la expresión $R_{a,b}$ dada por

$$R_{a,b} = \frac{1 + |b| + \sqrt{(1 + |b|)^2 + 4a}}{2}.$$

Con estas convenciones nuestro objetivo se centra en demostrar el siguiente teorema.

Teorema 1.3.1. .

1. Para $a < a_0$, $\Omega(H_{a,b}) = \phi$.
2. Para $a \geq a_0$, $\Omega(H_{a,b})$ está contenido en el cuadrado $S = \{(x,y) : |x| \leq R_{a,b}, |y| \leq R_{a,b}\}$, en particular, si $a \geq -\frac{(1-b)^2}{4}$ con certeza $\Omega(H_{a,b}) \neq \phi$.

Antes de realizar la prueba del teorema anterior debemos tener en cuenta los siguientes resultados.

Lema 1.3.1. $R_{a,b}$ es real si y solo si $a \geq a_0$, en este caso, $R_{a,b}$ es positivo e igual a la más grande raíz de $R^2 - (1 + |b|)R - a = 0$.

*Demuestra*ción. Note que $R_{a,b}$ es real si y solo si $(1 + |b|)^2 + 4a \geq 0$, es decir, cuando $a \geq -\frac{(1+|b|)^2}{4} = a_0$ lo que prueba la primera parte, además, es claro que $R_{a,b}$ es positivo. Por otro lado, las raíces de $R^2 - (1 + |b|)R - a = 0$ son $R = \frac{1+|b|\pm\sqrt{(1+|b|)^2+4a}}{2}$ de donde se infiere que $R_{a,b}$ es la raíz más grande. \square

Encontramos conveniente denotar en adelante la imagen de un punto (x, y) bajo $H_{a,b}$ como (x_1, y_1) , y la imagen bajo $H_{a,b}^{-1}$ como (x_{-1}, y_{-1}) , en general, para $n > 0$, consideramos la imagen bajo $H_{a,b}^n$ como (x_n, y_n) y la imagen bajo $H_{a,b}^{-n}$ como (x_{-n}, y_{-n}) . También interpretamos $\min\{k, R_{a,b}\}$ o $\max\{k, R_{a,b}\}$, cuando $R_{a,b}$ es complejo y k cualquier número, como igual a k .

Lema 1.3.2. .

1. Si $x \leq \min\{-|y|, -R_{a,b}\}$, entonces $x_1 \leq x$ con igualdad únicamente cuando $x = -R_{a,b}$ y $y = \pm R_{a,b}$.
2. Si $x \geq -|y|$ y $by \geq \max\{0, |b|R_{a,b}\}$, entonces $by_{-1} \geq by$ y $|y_{-1}| \geq |y|$ con igualdad únicamente cuando $x = -R_{a,b}$ y $y = \pm R_{a,b}$.

*Demuestra*ción. .

1. De $x \leq \min\{-|y|, -R_{a,b}\}$ se infiere que $|b||y| \leq -|b||x|$, y como $x_1 = a + by + x^2$ entonces

$$\begin{aligned} x_1 - x &= a + by - x^2 - x \\ &\leq a + |b||y| - x^2 - x \\ &\leq a - (1 + |b|)x - x^2 \end{aligned}$$

Esta ultima expresión es cero cuando

$$x = \frac{-(1 + |b|) \pm \sqrt{(1 + |b|)^2 + 4a}}{2}. \quad (1.3.1)$$

Note que la expresión 1.3.1 se relaciona con $R_{a,b}$, en efecto, si $R_{a,b}$ es complejo entonces 1.3.1 es complejo, de modo que $a - (1 + |b|)x - x^2$ no cortara el eje x , esto significa $a - (1 + |b|)x - x^2 > 0$ para todo x .

Veamos la situación cuando 1.3.1 es real, de igual manera 1.3.1 es real cuando $R_{a,b}$ es real, observe que $-R_{a,b}$ es la raíz más pequeña $a - (1 + |b|)x - x^2$ entonces se infiere $a - (1 + |b|)x - x^2 < 0$ para todo $x < -R_{a,b}$ incluido los $x \leq -|y|$, es decir, para todo $x \leq \min\{-|y|, -R_{a,b}\}$.

Falta ver cuando se tiene la igualdad, en este caso, si $x = -R_{a,b}$, entonces $-R_{a,b} \leq -|y|$, es decir, $|y| \leq R_{a,b}$, sí $|y| < R$ entonces

$$x_1 - x < a - (1 + |b|)x - x^2 = 0.$$

Por lo tanto, solo se tiene la igualdad cuando $x = -R_{a,b}$ y $y = \pm R_{a,b}$.

2. De manera similar a lo anterior, para la primera desigualdad basta con ver que $b(y_{-1} - y) \geq 0$, para tal fin, como $x \geq -|y|$, $y_{-1} = \frac{x-a+y^2}{b}$ y $-by \geq -|b||y|$ se infiere lo siguiente:

$$\begin{aligned} b(y_{-1} - y) &= x - a + y^2 - by \\ &\geq y^2 - (1 + |b|)|y| - a \\ &= |y|^2 - (1 + |b|)|y| - a. \end{aligned}$$

La ultima expresión es cero cuando

$$|y| = \frac{(1 + |b|) \pm \sqrt{(1 + |b|)^2 + 4a}}{2}. \quad (1.3.2)$$

La expresión 1.3.2 también esta relacionada con $R_{a,b}$, de donde se tiene 1.3.2 compleja cuando $R_{a,b}$ también lo es, entonces $|y|^2 - (1 + |b|)|y| - a$ es positiva o negativa pero no ambas, pero como para $y = 1 + |b|$ se tiene $|y|^2 - (1 + |b|)|y| - a > 0$ entonces $b(y_{-1} - y) > 0$.

Falta por ver el caso en que $R_{a,b}$ es real, en este caso se tendrá que $|y| = R_{a,b}$ es la raíz más grande de $|y|^2 - (1 + |b|)|y| - a$, entonces $|y|^2 - (1 + |b|)|y| - a \geq 0$ para $|y| \geq R_{a,b}$, basta con ver que en realidad $|y| \geq R_{a,b}$, en efecto, esto se tiene ya que $by \geq |b|R_{a,b}$ y $by \leq |b||y|$ de donde $|y| \geq R_{a,b}$. Así pues, concluimos que $by_{-1} \geq by$.

Para la otra parte, como $by \geq \max\{0, |b|R_{a,b}\}$, entonces $by \geq 0$, de modo que sí $b > 0$ entonces $y_{-1} \geq y \geq 0$ de donde $|y_{-1}| \geq |y|$, por otro lado, sí $b < 0$ entonces $y_{-1} \leq y \leq 0$ de donde $|y_{-1}| \geq |y|$, por lo tanto $|y_{-1}| \geq |y|$.

La igualdad en ambas partes se obtiene cuando $x = -|y|$ y $|y| = R_{a,b}$, es decir, cuando $x = -R_{a,b}$ y $y = \pm R_{a,b}$.

□

Ahora, para probar la parte 1 del Teorema 1.3.1, definimos la siguiente partición del espacio:

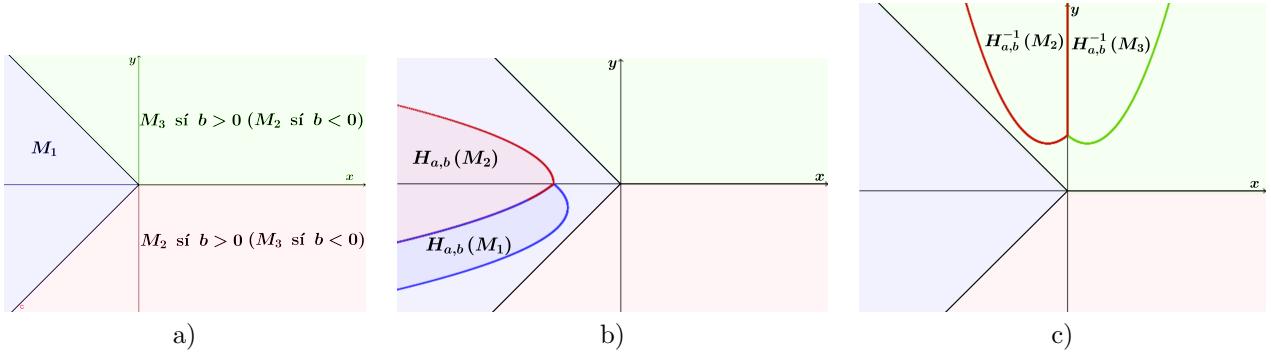


Figura 1.3.2: Las situaciones mostradas en b) y c) valen para $b > 0$; la situación para $b < 0$ es obtenida con una reflexión respecto al eje- x . a) Partición del espacio. b) Imagen bajo $H_{a,b}$. c) Imagen bajo $H_{a,b}^{-1}$.

$$\begin{aligned} M_1 &= \{(x, y) \mid x \leq |y|\} \\ M_2 &= \{(x, y) \mid x \geq -|y| \text{ y } by \leq 0\} \\ M_3 &= \{(x, y) \mid x \geq -|y| \text{ y } by \geq 0\}. \end{aligned}$$

Para tener una percepción de la partición vea la Figura 1.3.2 a). Por convención denotamos al interior de un conjunto M como $\text{int}M$; sobre la partición anterior tenemos el siguiente resultado.

Proposición 1.3.6. *Para $a < a_0$,*

1. $H_{a,b}(M_1 \cup M_2) \subset \text{int}M_1$.
2. $\{x_n\}_{n=0}^{\infty}$ es una sucesión estrictamente decreciente para todo $(x, y) \in M_1$.
3. $H_{a,b}^{-1}(M_2 \cup M_3) \subset \text{int}M_3$.
4. $\{|y_{-n}|\}_{n=0}^{\infty}$ es una sucesión estrictamente creciente para todo $(x, y) \in M_3$.

Demostración. Si $(x, y) \in M_1$ entonces $x \leq -|y|$, pero note que para este caso $R_{a,b}$ es complejo, entonces se tiene las hipótesis del Lema 1.3.2 1), por lo tanto $x_1 < x$ (estricta por que $R_{a,b}$ es complejo). Luego, como $y_1 = x$ entonces $x_1 < y_1$ y como $x \leq -|y| \leq 0$ entonces $y_1 = -|y_1|$, de modo que $x_1 < -|y_1|$, esto muestra que $H_{a,b}(M_1) \subset \text{int}M_1$, note que de la desigualdad $x_1 < x$ y aplicando el mismo razonamiento a (x_1, y_1) y así sucesivamente se prueba la parte 2.

Para probar que $H_{a,b}(M_2) \subset \text{int}M_1$, consideramos la recta $\gamma_y = \{(x, y) \mid x \in \mathbb{R}\}$, note que

$$M_2 \subset \bigcup_{\substack{y \in \mathbb{R} \\ by \leq 0}} \gamma_y.$$

Bastara con mostrar que $H_{a,b}(\gamma_y) \subset \text{int}M_1$ para los $y \in \mathbb{R}$ tales que $by \leq 0$, así pues, fijando y tal que $by \leq 0$ tenemos que $H_{a,b}(\gamma_y) = \{(a + by - x^2, x) \mid x \in \mathbb{R}\}$, entonces debemos probar que $a + by - x^2 > -|x|$, esto es

$$a + by - x^2 < x < -a - by + x^2. \quad (1.3.3)$$

En efecto, como $-by \geq 0$ y $-a_0 > 0$ se infiere que

$$x^2 + x - a - by \geq x^2 + x - a > x^2 + x - a_0 \geq 0.$$

De manera análoga

$$x^2 - x - a - by \geq x^2 - x - a > x^2 - x - a_0 \geq 0.$$

Lo cual prueba 1.3.3 y por lo tanto culmina la prueba de la parte 1.

Sí $(x, y) \in M_3$ entonces $by \geq 0$ y $x \geq -|y|$, como $R_{a,b}$ es complejo, entonces se tiene las hipótesis del Lema 1.3.2 2), por lo tanto $by_{-1} > by \geq 0$ y $|y_{-1}| > |y|$ (estricta por que $R_{a,b}$ es complejo). Luego, como $x_{-1} = y$ entonces $|y_{-1}| > |x_{-1}|$ y como $-x_{-1} \leq |x_{-1}|$ se infiere que $x_{-1} \geq -|y_{-1}|$, y dado que $by_{-1} > 0$ esto muestra que $H_{a,b}^{-1}(M_3) \subset \text{int}M_3$, además, note que de la desigualdad $|y_{-1}| > |y|$ y aplicando el mismo razonamiento a (x_{-1}, y_{-1}) sucesivamente se prueba la parte 4.

Para probar que $H_{a,b}^{-1}(M_2) \subset \text{int}M_3$, considere $c \geq 0$ y la semirecta

$$\gamma_c = \{(x, \text{sign}(b)(x-c)) \mid x \leq c\}$$

donde $\text{sign}(b)$ es el signo de b . Note que

$$M_2 \subset \bigcup_{c \geq 0} \gamma_c.$$

Bastara con mostrar que $H_{a,b}^{-1}(\gamma_c) \subset \text{int}M_3$ para cualquier $c \geq 0$, así pues, tenemos que

$$H_{a,b}^{-1}(\gamma_c) = \left\{ \left(\text{sign}(b)(x-c), \frac{x-a+(x-c)^2}{b} \right) \middle| x \leq c \right\}.$$

entonces se debe probar que $\text{sign}(b)(x-c) > -\left| \frac{x-a+(x-c)^2}{b} \right|$ y que $b \left(\frac{x-a+(x-c)^2}{b} \right) > 0$, esta ultima condición es inmediata ya que

$$b \left(\frac{x-a+(x-c)^2}{b} \right) = x-a+(x-c)^2 > x-a_0+(x-c)^2 \geq 0.$$

De esta ultima se infiere que $-\left| \frac{x-a+(x-c)^2}{b} \right| = -\text{sign}(b) \left(\frac{x-a+(x-c)^2}{b} \right)$, entonces, probar la primera condición es lo mismo que probar

$$\text{sign}(b)(x-c) > -\text{sign}(b) \left(\frac{x-a+(x-c)^2}{b} \right)$$

que es equivalente a probar

$$b(x-c) + x - a + (x-c)^2 > 0. \quad (1.3.4)$$

Así pues, debemos probar 1.3.4, en efecto, por casos, si $b < 0$ y teniendo en cuenta que $x \leq c$ entonces $bx \geq bc$, de modo que

$$\begin{aligned} b(x-c) + x - a + (x-c)^2 &= bx - bc + x - a + (x-c)^2 \\ &\geq x - a + (x-c)^2 > x - a_0 + (x-c)^2 \geq 0. \end{aligned}$$

Si $b > 0$, entonces $a_0 = -\frac{(1+b)^2}{4}$, por lo tanto

$$\begin{aligned} b(x-c) + x - a + (x-c)^2 &> b(x-c) + x - a_0 + (x-c)^2 \\ &= b(x-c) + x + \frac{(1+b)^2}{4} + (x-c)^2 \\ &= \left(x - c + \frac{1+b}{2} \right)^2 + c \geq 0. \end{aligned}$$

En consecuencia, se ha probado $H_{a,b}^{-1}(\gamma_c) \subset \text{int}M_3$, lo que a su vez prueba que $H_{a,b}^{-1}(M_2) \subset \text{int}M_3$ y concluye la parte 3. \square

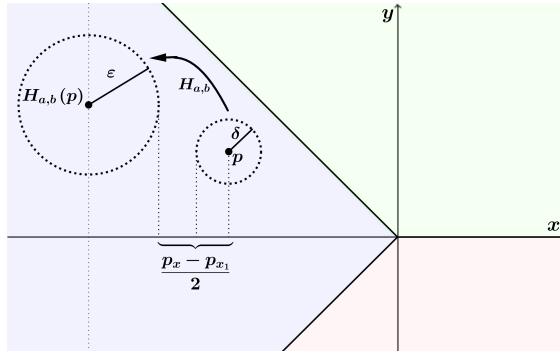


Figura 1.3.3: Idea de la prueba para garantizar que $\Omega(H_{a,b}) \not\subseteq M_1$ en el contexto de la demostración del Teorema 1.3.1 1).

La situación que representa la parte 1 y 3 de la proposición 1.3.6 anterior se puede ver en la Figura 1.3.2 b) y c). La proposición anterior permite demostrar la parte 1 del Teorema 1.3.1.

Demostración del Teorema 1.3.1 parte 1. Suponga que $\Omega(H_{a,b}) \neq \emptyset$ para $a < a_0$, entonces existe $p \in \Omega(H_{a,b})$, de modo que solo se pueden dar tres situaciones que son $p \in M_1$, $p \in M_2$ o $p \in M_3$, debemos analizarlas una por una, para tal fin y por conveniencia consideramos $H_{a,b}^n(p) = (p_{x_n}, p_{y_n})$ y $H_{a,b}^{-n}(p) = (p_{x_{-n}}, p_{y_{-n}})$ para $n \geq 0$ donde $H_{a,b}^0(p) = p = (p_x, p_y)$.

Recordemos que la Proposición 1.3.1 2) garantiza que $\Omega(H_{a,b})$ es invariante bajo $H_{a,b}$, lo que a su vez permite afirmar que $H_{a,b}^n(p) \in \Omega(H_{a,b})$.

Si $p \in M_1$, entonces por la Proposición 1.3.6 1) se infiere que $H_{a,b}^n(p) \in M_1$ para cada $n > 0$, y por esta misma proposición en su parte 2) se tiene que $\{p_{x_n}\}_{n=0}^\infty$ es estrictamente decreciente, es decir

$$p_x > p_{x_1} > p_{x_2} > \cdots > p_{x_n} > \cdots$$

Así pues, por la continuidad de $H_{a,b}$ en p considere $\varepsilon > 0$ tal que $\varepsilon \leq \frac{p_x - p_{x_1}}{2}$ y $B_\varepsilon(H_{a,b}(p)) \subset \text{int}M_1$, por lo tanto, existe $\delta > 0$ con $\delta < \frac{p_x - p_{x_1}}{2}$ tal que si $\mathbf{x} \in B_\delta(p)$ entonces $H_{a,b}(\mathbf{x}) \in B_\varepsilon(H_{a,b}(p))$; por como se tomó ε y δ es claro que $B_\varepsilon(H_{a,b}(p)) \cap B_\delta(p) = \emptyset$, de modo que $H_{a,b}(\mathbf{x}) \notin B_\delta(p)$ (ver Figura 1.3.3), pero podemos garantizar más, en realidad $H_{a,b}^n(\mathbf{x}) \notin B_\delta(p)$ para todo $n > 0$, en efecto, considerando $\mathbf{x} = (x, y)$ y $H_{a,b}^n(\mathbf{x}) = (x_n, y_n)$ para $n > 0$ que es una convención hecha anteriormente, se tiene por la Proposición 1.3.6 1) y 2) que $H_{a,b}^n(\mathbf{x}) \in \text{int}M_1$ para cada $n > 0$, y que $\{x_n\}_{n=0}^\infty$ es estrictamente decreciente, es decir

$$x > x_1 > x_2 > \cdots > x_n > \cdots$$

Por la elección de δ se infiere que $p_x - x_1 > \delta$ y por la cadena de desigualdades anterior se concluye que $p_x - x_n > \delta$ para cada $n > 0$, por lo tanto

$$\delta < p_x - x_n = \sqrt{(p_x - x_n)^2} \leq \sqrt{(p_x - x_n)^2 + (p_y - y_n)^2} = |p - H_{a,b}^n(\mathbf{x})|.$$

En consecuencia, $H_{a,b}^n(\mathbf{x}) \notin B_\delta(p)$, esto significa que se ha encontrado un abierto $B_\delta(p)$ que contiene a p tal que para todo $n > 0$ satisface $H_{a,b}^n(B_\delta(p)) \cap B_\delta(p) = \emptyset$ lo que quiere decir que p no puede ser un punto no-errante, así pues, $p \notin M_1$.

Sí $p \in M_2$, considere cualquier abierto U con $p \in U$, entonces por la Proposición 1.3.6 1) se infiere que $H_{a,b}^n(U) \in \text{int}M_1$ para cada $n > 0$, y como $\text{int}M_1 \cap M_2 = \emptyset$ entonces $H_{a,b}^n(U) \cap U = \emptyset$, de modo que p no puede ser un punto no-errante, así pues, $p \notin M_2$.

Por ultimo, veamos el caso en que $p \in M_3$, asumimos que $p \in \text{int}M_3$ ya que si $p \in \partial M_3$ (frontera) se reduce a los casos anteriores, así pues, inicialmente, por ser $H_{a,b}$ una biyección y de la Proposición 1.3.1 2) se tiene $H_{a,b}(\Omega(H_{a,b})) = \Omega(H_{a,b})$, entonces $\Omega(H_{a,b}) = H_{a,b}^{-1}(\Omega(H_{a,b}))$, por lo tanto, existe $q \in \Omega(H_{a,b})$ tal que

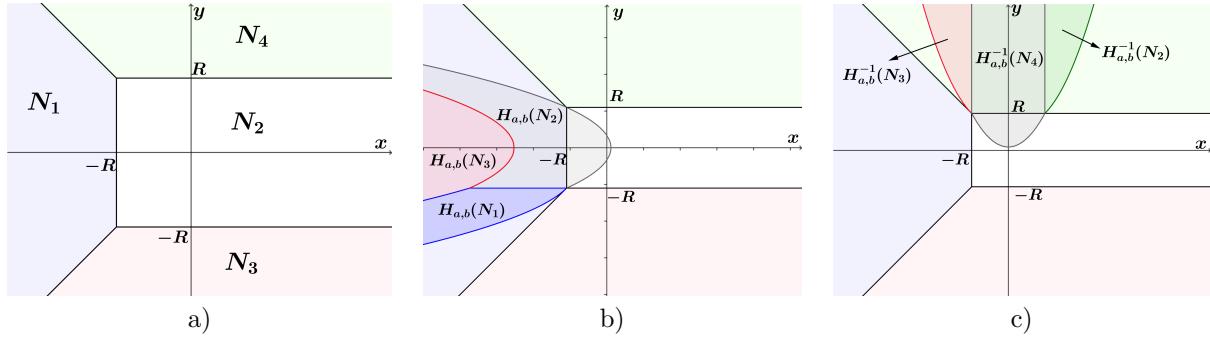


Figura 1.3.4: Las situaciones mostradas en b) y c) valen para $b > 0$; la situación para $b < 0$ es obtenida con una reflexión respecto al eje- x . a) Partición del espacio. b) Imagen bajo $H_{a,b}$. c) Imagen bajo $H_{a,b}^{-1}$.

$H_{a,b}^{-1}(q) = p$, es más, $q = H_{a,b}(p)$, siguiendo las convenciones dadas anteriormente tenemos $q = (p_{x_1}, p_{y_1})$, note que $q \notin M_1 \cup M_2$ ya que si no fuera así entonces por los casos anteriores se infiere que q no sería un punto no-errante lo cual es una contradicción, por lo tanto, $q \in M_3$, entonces, por la Proposición 1.3.6 4) se debe tener $|p_{y_1}| < |p_y|$, de modo que $0 < |p_y| - |p_{y_1}| \leq |p_y - p_{y_1}|$. Luego, haciendo un razonamiento análogo al del primer caso en donde se tenía $p \in M_1$, esto es, usando la continuidad de $H_{a,b}$ se toma $\varepsilon > 0$ tal que $\varepsilon \leq \frac{|p_y - p_{y_1}|}{2}$ y $B_\varepsilon(H_{a,b}(p)) \subset \text{int}M_3$, así que existe $\delta > 0$ con $\delta < \frac{|p_y - p_{y_1}|}{2}$ tal que $H_{a,b}(B_\delta(p)) \subseteq B_\varepsilon(H_{a,b}(p))$; por como se tomó ε y δ es claro que $B_\varepsilon(H_{a,b}(p)) \cap B_\delta(p) = \emptyset$, de modo que $H_{a,b}(\mathbf{x}) \notin B_\delta(p)$ para todo $\mathbf{x} \in B_\delta(p)$, es más, $H_{a,b}^n(\mathbf{x}) \notin B_\delta(p)$ para cada $n > 0$, en efecto, ya tenemos el resultado para $n = 1$, suponga que existe un $n > 1$ tal que $H_{a,b}^n(\mathbf{x}) \in B_\delta(p)$, entonces por la Proposición 1.3.6 4) se tiene

$$|y_n| < |y_{n-1}| < \cdots < |y_2| < |y_1|.$$

En particular, $|y_n| < |y_1|$, note que esta construcción permite inferir que y_n está entre p_{y_1} y y_1 , lo que permite afirmar que $|p_{y_1} - y_1| = |p_{y_1} - y_n| + |y_n - y_1|$, y por la elección de ε y δ se infiere que $|p_{y_1} - y_n| > \varepsilon$, en consecuencia

$$\begin{aligned} |p_{y_1} - y_1| &= |p_{y_1} - y_n| + |y_n - y_1| \\ &> \varepsilon + |y_n - y_1| \geq \varepsilon. \end{aligned}$$

Por lo tanto

$$\varepsilon < |p_{y_1} - y_1| = \sqrt{(p_{y_1} - y_1)^2} \leq \sqrt{(p_{x_1} - x_1)^2 + (p_{y_1} - y_1)^2} = |H_{a,b}(p) - H_{a,b}(\mathbf{x})|.$$

Lo que contradice que $H_{a,b}(B_\delta(p)) \subseteq B_\varepsilon(H_{a,b}(p))$. Así pues, se ha encontrado un abierto $B_\delta(p)$ contenido en p tal que $H_{a,b}^n(B_\delta(p)) \cap B_\delta(p) = \emptyset$ lo que quiere decir que p no puede ser un punto no-errante, así pues, $p \notin M_3$.

Los tres casos demuestran que no se puede dar que $\Omega(H_{a,b}) \neq \emptyset$.

□

Para la demostración de la parte 2 del Teorema 1.3.1, al igual que en la demostración de la parte 1, definimos una partición del espacio dada por las siguientes regiones:

$$\begin{aligned} N_1 &= \{(x, y) | x \leq \min\{-|y|, -R_{a,b}\}\} \\ N_2 &= \{(x, y) | x \geq -R_a, |y| \leq R_{a,b}\} \\ N_3 &= \{(x, y) | x \geq -|y|, by \leq -|b|R_{a,b}\} \\ N_4 &= \{(x, y) | x \geq -|y|, by \geq |b|R_{a,b}\}. \end{aligned}$$

En la Figura 1.3.4 se observa la partición anterior, precisamente sobre estas regiones se tiene el siguiente resultado.

Proposición 1.3.7. *Sea $a \geq a_0$, entonces*

1. $H_{a,b}(N_1) \subset N_1$.
2. $H_{a,b}(N_2 \cup N_3) \subset N_1 \cup N_2$.
3. $\{x_n\}_{n=0}^{\infty}$ es una sucesión decreciente para $(x, y) \in N_1$ (decrece estrictamente excepto en los puntos (x, y) con $x = -|y| = -R_{a,b}$).
4. $H_{a,b}^{-1}(N_3 \cup N_4) \subset N_4$.
5. $H_{a,b}^{-1}(N_2) \subset N_2 \cup N_3 \cup N_4$.
6. $\{|y_n|\}_{n=0}^{\infty}$ es una sucesión creciente para $(x, y) \in N_4$ (crece estrictamente excepto en el punto $(-R_{a,b}, R_{a,b} \text{sign}(b))$).

Demostración. Si $(x, y) \in N_1$, entonces $x \leq \min\{-|y|, -R_{a,b}\}$, de modo que por el Lema 1.3.2 1) se infiere $x_1 \leq x$ que es una desigualdad estricta excepto cuando $x = -R_{a,b}$ y $|y| = R_{a,b}$, y en consecuencia $x_1 \leq -R_{a,b}$, es más, como $y_1 = x$ entonces $y_1 \leq 0$ por lo tanto $y_1 = -|y_1|$ lo que implica $x_1 \leq -|y_1|$; así pues, $x_1 \leq \min\{-|y_1|, -R_{a,b}\}$ de donde se concluye que $(x_1, y_1) \in N_1$ lo que prueba la parte 1; note que procediendo de la misma manera se prueba que $(x_n, y_n) \in N_1$ y se infiere $x_n \leq x_{n-1}$ que es una desigualdad estricta excepto cuando $x = -R_{a,b}$ y $|y| = R_{a,b}$, lo que demuestra la parte 3.

Prosiguiendo con las otras partes, note que $N_2 \subset \{(x, y) | |y| \leq R_{a,b}\}$, esta región es una banda horizontal, para probar que $H_{a,b}(N_2) \subset N_1 \cup N_2$ basta con mostrar que la imagen de $\{(x, y) | |y| \leq R_{a,b}\}$ bajo $H_{a,b}$ esta en $N_1 \cup N_2$, en primer lugar se observa que la imagen de $\{(x, y) | |y| \leq R_{a,b}\}$ bajo $H_{a,b}$ esta en la región

$$\{(x, y) | a - |b|R_{a,b} - y^2 \leq x \leq a + |b|R_{a,b} - y^2\}.$$

En efecto, considere (x, y) en la banda horizontal mencionada, entonces $H_{a,b}(x, y) = (a + by - x^2, x)$, luego, como $|by| \leq |b|R_{a,b}$ se sigue que $-|b|R_{a,b} \leq by \leq |b|R_{a,b}$, por lo tanto

$$a - |b|R_{a,b} - x^2 \leq a + by - x^2 \leq a + |b|R_{a,b} - x^2.$$

Y dado que $y_1 = x$ y $x_1 = a + by - x^2$, entonces $a - |b|R_{a,b} - y_1^2 \leq x_1 \leq a + |b|R_{a,b} - y_1^2$; en consecuencia, $(x_1, y_1) \in \{(x, y) | a - |b|R_{a,b} - y^2 \leq x \leq a + |b|R_{a,b} - y^2\}$. Teniendo esta ultima certeza, el caso se reduce a mostrar que esta ultima región esta contenida en $N_1 \cup N_2$, para esto es suficiente mostrar que los puntos de la forma $(a + |b|R_{a,b} - y^2, y)$ pertenecen a $N_1 \cup N_2$, lo cual es cierto ya que por el Lema 1.3.1 $y = \pm R_{a,b}$ es cero de $a + (|b| + 1)R_{a,b} - y^2$, por lo tanto, $a + |b|R_{a,b} - y^2 \leq -|y|$ para todo y tal que $|y| \geq R_{a,b}$, esto significa que $(a + |b|R_{a,b} - y^2, y) \in N_1$ para y tal que $|y| > R_a$, por otro lado, cuando $|y| \leq R_a$ se tiene $a + |b|R_a - y^2 \geq -R_a$, esto significa que $(a + |b|R_{a,b} - y^2, y) \in N_2$. Por lo tanto, habiendo demostrado las aseveraciones hechas se concluye que $H_{a,b}(N_2) \subset N_1 \cup N_2$.

Para ver que $H_{a,b}(N_3) \subset N_1 \cup N_2$, considere la recta $\gamma_y = \{(x, y) | x \in \mathbb{R}\}$ tal que $by \leq -|b|R_{a,b}$, observe que

$$N_3 \subset \bigcup_{\substack{y \in \mathbb{R} \text{ tales que} \\ by \leq -|b|R_{a,b}}} \gamma_y.$$

Es suficiente mostrar que $\gamma_y \in N_1 \cup N_2$ para todo y tal que $by \leq -|b|R_{a,b}$; así pues, en primer lugar se sigue que $H_{a,b}(\gamma_y) = \{(a + by - x^2, x) | x \in \mathbb{R}\}$ tal que $by \leq -|b|R_{a,b}$, luego, como $-|b|R_{a,b} \leq bR_{a,b} \leq |b|R_{a,b}$ entonces

$$x_1 = a + by - x^2 \leq a - |b|R_{a,b} - x^2 = a - |b|R_{a,b} - y_1^2 \leq a + |b|R_{a,b} - y^2.$$

Esto significa que $H_{a,b}(\gamma_y)$ esta contenido en la región $\{(x,y) | x \leq a + |b|R_{a,b} - y^2\}$, basta con mostrar que los puntos de la forma $(a + |b|R_{a,b} - y^2, y)$ pertenecen a $N_1 \cup N_2$, lo cual se probó párrafos atrás. En consecuencia, $H_{a,b}(N_3) \subset N_1 \cup N_2$, por lo tanto, $H_{a,b}(N_2 \cup N_3) \subset N_1 \cup N_2$, lo que prueba la parte 2.

Si $(x,y) \in N_4$ entonces $x \geq -|y|$ y $by \geq |b|R_{a,b}$, de modo que se tiene las hipótesis del Lema 1.3.2 2), entonces $by_{-1} \geq by \geq |b|R_{a,b}$ y $|y_{-1}| \geq |y|$ con igualdad estricta excepto cuando $x = -R_{a,b}$ y $y = \pm R_{a,b}$, luego, dado que $y = x_{-1}$ entonces $|y_{-1}| \geq |x_{-1}|$, esto es, $-|y_{-1}| \leq x_{-1} \leq |y_{-1}|$; por lo tanto, $(x_{-1}, y_{-1}) \in N_4$. Note que procediendo de la misma manera se prueba que $(x_n, y_n) \in N_4$ y se infiere $x_n \leq x_{n-1}$ que es una desigualdad estricta excepto cuando $x = -R_{a,b}$ y $y = \pm R_{a,b}$, lo que demuestra la parte 6.

Si $(x,y) \in N_3$ entonces $x \geq -|y|$ y $-by \geq |b|R_{a,b}$, note que $H_{a,-b}^{-1}(x,y) = (x_{-1}, -y_{-1})$, y en consecuencia se tienen las hipótesis del Lema 1.3.2 2) en este caso aplicado a $H_{a,-b}^{-1}$, por lo tanto, se sigue $by_{-1} = -b(-y_{-1}) \geq -by \geq |b|R_{a,b}$ y $|y_{-1}| \geq |y|$ con igualdad estricta excepto cuando $x = -R_{a,b}$ y $y = \pm R_{a,b}$, luego, dado que $y = x_{-1}$ entonces $|y_{-1}| \geq |x_{-1}|$, esto es, $-|y_{-1}| \leq x_{-1} \leq |y_{-1}|$; por lo tanto, $(x_{-1}, y_{-1}) \in N_4$. En consecuencia, $H_{a,-b}^{-1}(N_3 \cup N_4) \subset N_4$, lo que prueba la parte 4.

Por ultimo, para probar la parte 5, considere $\gamma_x = \{(x,y) | |y| \leq R_{a,b}\}$, observe que

$$N_2 = \bigcup_{x \geq -R_{a,b}} \gamma_x.$$

Por lo tanto, es suficiente mostrar que $H_{a,b}^{-1}(\gamma_x) \subset N_2 \cup N_3 \cup N_4$ para todo x tal que $x \geq -R_{a,b}$; en efecto, veamos que $H_{a,b}^{-1}(\gamma_x) = \left\{ \left(y, \frac{x-a+y^2}{b} \right) \mid |y| \leq R_{a,b} \right\}$ no esta contenida totalmente en N_1 , esto es inmediato ya que $x_{-1} = y$, entonces $|x_{-1}| \leq R_{a,b}$, esto significa que $H_{a,b}^{-1}(\gamma_x)$ esta contenida en la banda vertical $|x_{-1}| \leq R_{a,b}$, y dado que dicha banda esta contenida en $N_2 \cup N_3 \cup N_4$ esto prueba la parte 5. Pero podemos hacer más aseveraciones al respecto, precisamente esta caracterización de N_2 permite hacerlas, note que $H_{a,b}^{-1}(N_2)$ solo comparte un punto con N_1 que es una de las esquinas derechas de la región, específicamente, comparte el punto $(-R_{a,b}, R_{a,b})$ cuando $b > 0$ y $(-R_{a,b}, -R_{a,b})$ cuando $b < 0$; efectivamente, por la caracterización de N_2 dada en principio se sigue que $H_{a,b}^{-1}$ aplica N_2 en la región $\{(x,y) | by \geq -R_{a,b} - a + x^2 \text{ y } |x| \leq R_{a,b}\}$, de modo que basta con mostrar que puntos de la forma $\left(x, \frac{-R_{a,b}-a+x^2}{b} \right)$ están en N_1 cuando es uno de dos los puntos mencionados, esto es mostrar que

$$\begin{aligned} \frac{-R_{a,b} - a + R_{a,b}^2}{b} &= R_{a,b} \text{ para } b > 0 \\ \frac{-R_{a,b} - a + R_{a,b}^2}{b} &= -R_{a,b} \text{ para } b < 0. \end{aligned}$$

Lo cual es equivalente a probar que $-R_{a,b} - a + R_{a,b}^2 = |b|R_{a,b}$, pero esto esta garantizado por el Lema 1.3.1. \square

En el contexto de la proposición anterior el siguiente resultado es importante para nuestro objetivo.

Proposición 1.3.8. *Todos los puntos en el interior de $N_1 \cup N_4$ son errantes.*

Demostración. Suponga que existe un punto $p = (p_x, p_y) \in \Omega(H_{a,b})$ tal que $p \in \text{int}(N_1 \cup N_4)$.

Si p es tal que pertenece a N_1 , entonces por la proposición 1.3.7 3) se sigue $p_{x_1} < p_x$ (estricta por que $(-R_{a,b}, \pm R_{a,b}) \notin \text{int}(N_1 \cup N_4)$), además, por la misma proposición en la parte 1 se sigue que $H_{a,b}(p) \in N_1$. Así pues, por la continuidad de $H_{a,b}$ en p considere $\varepsilon > 0$ tal que $\varepsilon \leq \frac{p_x - p_{x_1}}{2}$ y $B_\varepsilon(H_{a,b}(p)) \subset \text{int}(N_1 \cup N_4)$, por lo tanto, existe $\delta > 0$ con $\delta < \frac{p_x - p_{x_1}}{2}$ tal que si $\mathbf{x} \in B_\delta(p)$ entonces $H_{a,b}(\mathbf{x}) \in B_\varepsilon(H_{a,b}(p))$; por como se tomó ε y δ es claro que $B_\varepsilon(H_{a,b}(p)) \cap B_\delta(p) = \emptyset$, de modo que $H_{a,b}(\mathbf{x}) \notin B_\delta(p)$, pero podemos garantizar más, en realidad $H_{a,b}^n(\mathbf{x}) \notin B_\delta(p)$ para todo $n > 0$, en efecto, considerando $\mathbf{x} = (x, y)$ y $H_{a,b}^n(\mathbf{x}) = (x_n, y_n)$ para $n > 0$ que es una convención hecha anteriormente, se tiene por la Proposición 1.3.7 1) y 3) que $H_{a,b}^n(\mathbf{x}) \in M_1$ para cada $n > 0$, y que $\{x_n\}_{n=0}^\infty$ es estrictamente decreciente, es decir

$$x > x_1 > x_2 > \cdots > x_n > \cdots$$

Por la elección de δ se infiere que $p_x - x_1 > \delta$ y por la cadena de desigualdades anterior se concluye que $p_x - x_n > \delta$ para cada $n > 0$, por lo tanto

$$\delta < p_x - x_n = \sqrt{(p_x - x_n)^2} \leq \sqrt{(p_x - x_n)^2 + (p_y - y_n)^2} = |p - H_{a,b}^n(\mathbf{x})|.$$

En consecuencia, $H_{a,b}^n(\mathbf{x}) \notin B_\delta(p)$, esto significa que se ha encontrado un abierto $B_\delta(p)$ que contiene a p tal que para todo $n > 0$ satisface $H_{a,b}^n(B_\delta(p)) \cap B_\delta(p) = \emptyset$ lo que quiere decir que p no puede ser un punto no-errante, así pues, $p \notin N_1$.

Sí p es tal que $p \in N_4$, se puede asumir que p no está en la frontera que comparten N_1 y N_4 ya que se reduciría al caso anterior lo que implicaría que p no sería no-errante, esto significa que es posible asumir que $p \in \text{int}N_4$; así pues, por ser $H_{a,b}$ una biyección y de la Proposición 1.3.1 2) se tiene $H_{a,b}(\Omega(H_{a,b})) = \Omega(H_{a,b})$, entonces $\Omega(H_{a,b}) = H_{a,b}^{-1}(\Omega(H_{a,b}))$, por lo tanto, existe $q \in \Omega(H_{a,b})$ tal que $H_{a,b}^{-1}(q) = p$, es más, $q = H_{a,b}(p)$, siguiendo las convenciones dadas anteriormente tenemos $q = (p_{x_1}, p_{y_1})$, la primera pregunta es en qué región del plano esta q , inicialmente se presentan dos opciones que son $q \in N_4$ o $q \in \text{int}(N_1 \cup N_2 \cup N_3)$; el segundo caso no se puede dar, en efecto, sea $\varepsilon > 0$ tal que $B_\varepsilon(q) \in \text{int}(N_1 \cup N_2 \cup N_3)$, entonces, por la continuidad existe $\delta > 0$ con $B_\delta(p) \subset \text{int}N_4$ tal que $H_{a,b}(B_\delta(p)) \subset B_\varepsilon(q)$, esto significa que $H_{a,b}(B_\delta(p)) \subset \text{int}(N_1 \cup N_2 \cup N_3)$, y por la Proposición 1.3.7 1) y 2) se sigue que $H_{a,b}^n(B_\delta(p)) \subset \text{int}(N_1 \cup N_2 \cup N_3)$ para todo $n \geq 1$, y dado que $B_\delta(p) \cap \text{int}(N_1 \cup N_2 \cup N_3) = \emptyset$ entonces $H_{a,b}^n(B_\delta(p)) \cap B_\delta(p) = \emptyset$ lo cual contradice que p es un punto no-errante. En consecuencia, $q \in N_4$, es más, observe que q no está en la frontera que comparten N_1 y N_4 ya que implicaría que q no sería no-errante, esto garantiza que q no es $(-R_{a,b}, R_{a,b}\text{sign}(b))$ de modo que por la Proposición 1.3.7 6) se debe tener $|p_{y_1}| < |p_y|$, de modo que $0 < |p_y| - |p_{y_1}| \leq |p_y - p_{y_1}|$.

Luego, volviendo a recurrir a la continuidad de $H_{a,b}$ se toma $\varepsilon > 0$ tal que $\varepsilon \leq \frac{|p_y - p_{y_1}|}{2}$, así que existe $\delta > 0$ con $\delta < \frac{|p_y - p_{y_1}|}{2}$ tal que $H_{a,b}(B_\delta(p)) \subseteq B_\varepsilon(q)$; por como se tomó ε y δ es claro que $B_\varepsilon(q) \cap B_\delta(p) = \emptyset$, de modo que $H_{a,b}(\mathbf{x}) \notin B_\delta(p)$ para todo $\mathbf{x} \in B_\delta(p)$, es más, $H_{a,b}^n(\mathbf{x}) \notin B_\delta(p)$ para cada $n > 0$, en efecto, ya tenemos el resultado para $n = 1$, suponga que existe un $n > 1$ tal que $H_{a,b}^n(\mathbf{x}) \in B_\delta(p)$, entonces por la Proposición 1.3.7 4) y 6) se tiene

$$|y_n| < |y_{n-1}| < \cdots < |y_2| < |y_1|.$$

En particular, $|y_n| < |y_1|$, note que esta construcción permite inferir que y_n esta entre p_{y_1} y y_1 , lo que permite afirmar que $|p_{y_1} - y_1| = |p_{y_1} - y_n| + |y_n - y_1|$, y por la elección de ε y δ se infiere que $|p_{y_1} - y_n| > \varepsilon$, en consecuencia

$$\begin{aligned} |p_{y_1} - y_1| &= |p_{y_1} - y_n| + |y_n - y_1| \\ &> \varepsilon + |y_n - y_1| \geq \varepsilon. \end{aligned}$$

Por lo tanto

$$\varepsilon < |p_{y_1} - y_1| = \sqrt{(p_{y_1} - y_1)^2} \leq \sqrt{(p_{x_1} - x_1)^2 + (p_{y_1} - y_1)^2} = |q - H_{a,b}(\mathbf{x})|.$$

Lo que contradice que $H_{a,b}(B_\delta(p)) \subseteq B_\varepsilon(q)$. Así pues, se ha encontrado un abierto $B_\delta(p)$ contenido en p tal que $H_{a,b}^n(B_\delta(p)) \cap B_\delta(p) = \emptyset$ lo que quiere decir que p no puede ser un punto no-errante. En conclusión, todos los puntos en el interior de $N_1 \cup N_4$ son errantes. \square

Los anteriores resultados permiten demostrar la parte 2 del Teorema 1.3.1.

Demostración del Teorema 1.3.1 parte 2. De la Proposición 1.3.8 se sigue que $\Omega(H_{a,b}) \subset N_2 \cup N_3$, en primer lugar, por lo invariante de $\Omega(H_{a,b})$ y la Proposición 1.3.7 2) se infiere $H_{a,b}(\Omega(H_{a,b})) \subset N_2$, esto significa que $\Omega(H_{a,b}) \subset H_{a,b}^{-1}(N_2)$.

Por otro lado, observe que $\Omega(H_{a,b}) \cap \text{int}N_3 = \emptyset$, en efecto, suponga que existe $p \in \Omega(H_{a,b})$ tal que $p \in \text{int}N_3$, sea $U \subset \text{int}N_3$ abierto contenido en p , entonces por la Proposición 1.3.7 1) y 2) se sigue que $H_{a,b}^n(U) \subset N_1 \cup N_2$ y dado que $\text{int}N_3 \cap (N_1 \cup N_2) = \emptyset$, entonces $H_{a,b}^n(U) \cap U = \emptyset$ lo que contradice que p es un punto no-errante; Así pues, $\Omega(H_{a,b}) \subset N_2$.

En consecuencia, se concluye que $\Omega(H_{a,b}) \subset N_2 \cap H_{a,b}^{-1}(N_2)$. Es fácil ver que $H_{a,b}^{-1}(N_2)$ esta contenido en la región $\{(x,y) | y \in \mathbb{R} \text{ y } |x| \leq R_{a,b}\}$ que es una banda vertical, por consiguiente

$$\Omega(H_{a,b}) \subset N_2 \cap H_{a,b}^{-1}(N_2) \subset N_2 \cap \{(x,y) | y \in \mathbb{R} \text{ y } |x| \leq R_{a,b}\} = S.$$

Por ultimo, para $a \geq -\frac{(1-b)^2}{4}$ con certeza $\Omega(H_{a,b}) \neq \emptyset$ ya que para estos valores existen puntos fijos.

□

Los siguientes resultados, que no tuvieron influencia en la demostración del teorema principal de esta subsección, son consecuencia de la Proposición 1.3.8 y serán importantes en capítulos posteriores.

- Proposición 1.3.9.**
1. Si $\mathbf{x} \in N_1 \setminus N_2$ entonces $\omega(\mathbf{x}) = \phi$, es más, $H_{a,b}^n(\mathbf{x}) \rightarrow \infty$ cuando $n \rightarrow \infty$.
 2. Si $\mathbf{x} \in N_2 \cup N_4$ con $\mathbf{x} \neq (-R_{a,b}, R_{a,b} \operatorname{sign}(b))$, entonces $\alpha(\mathbf{x}) = \phi$, es más, $H_{a,b}^n(\mathbf{x}) \rightarrow \infty$ cuando $n \rightarrow -\infty$.

Demostración. Para probar la parte 1 supongamos que $\omega(\mathbf{x}) \neq \phi$, entonces existe $p \in \omega(\mathbf{x})$ y una $\{n_i\}_{i=1}^\infty$ con $n_i \rightarrow \infty$ como $i \rightarrow \infty$ tal que $\lim_{i \rightarrow \infty} H_{a,b}^{n_i}(\mathbf{x}) = p$, además por la Proposición 1.3.4 $p \in \Omega(H_{a,b}) \subseteq N_2$. Luego, considerando $\mathbf{x} = (x, y)$, $p = (p_x, p_y)$ y $H_{a,b}^{n_i}(\mathbf{x}) = (x_{n_i}, y_{n_i})$, entonces $(x_{n_i}, y_{n_i}) \rightarrow (p_x, p_y)$ con $n_i \rightarrow \infty$ como $i \rightarrow \infty$, lo cual es una contradicción, esto contradice que $\{x_n\}_{n=0}^\infty$ es una sucesión estrictamente decreciente. La demostración de la parte 2 se procede de la misma manera cambiando ω por α , y ∞ por $-\infty$. □

Considere el subconjunto N_2^\bullet de N_2 dado por (ver Figura 1.3.5)

$$N_2^\bullet = \{(x, y) | x > R_{a,b}, |y| \leq R_{a,b}\}.$$

Se tiene la siguiente proposición.

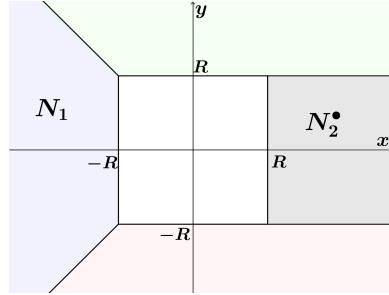


Figura 1.3.5: Ubicación de N_2^\bullet en el plano.

- Proposición 1.3.10.** $H_{a,b}(N_2^\bullet) \subseteq N_1 \setminus \{(x, y) | x = -R_{a,b}\}$.

Demostración. En primer lugar, vemos que

$$H_{a,b}(N_2^\bullet) = \{(x, y) | y > R_{a,b}, -|b|R_{a,b} - y^2 + a \leq x \leq |b|R_{a,b} - y^2 + a\}.$$

Por lo tanto, debemos mostrar $x < \min\{-|y|, -R_{a,b}\}$, pero como $y > R_{a,b}$ entonces $-R_{a,b} = \min\{-|y|, -R_{a,b}\}$, de modo que es suficiente mostrar que $x < -R_{a,b}$, lo cual se tiene, en efecto, del hecho $y > R_{a,b}$ se infiere $-y^2 < -R_{a,b}^2$, y del Lema 1.3.1 se sigue $|b|R_{a,b} - R_{a,b}^2 + a = -R_{a,b}$. Por lo tanto, se infiere

$$x \leq |b|R_{a,b} - y^2 + a < |b|R_{a,b} - R_{a,b}^2 + a = -R_{a,b}.$$

□

De las dos ultimas proposiciones podemos concluir que las órbitas positivas de los puntos en

$$(N_1 \setminus \{(x, y) | x = -R_{a,b}\}) \cup N_2^\bullet$$

no se acumulan en ningún punto del plano y se van alejando de S , lo cual describe la dinámica de estas órbitas. Lo mismo podemos afirmar sobre las órbitas negativas de los puntos en $N_4 \cup N_3$, estas se van alejando de S bajo iteraciones de $H_{a,b}^{-1}$ y no se acumulan en ningún punto.

1.4. Caos

No tener certeza acerca del comportamiento general de un sistema dinámico puede considerarse como un primer encuentro con el caos, dicha situación presenta tres ingredientes: *impredecibilidad*, esto significa que si se toman dos puntos cercanos sus órbitas no se comportan de igual manera, el otro ingrediente es el *no poder descomponer el análisis*, es decir, no se puede encontrar una división del espacio o regiones en el que las órbitas de los puntos en ellas permanezcan allí, lo que no permite restringir el análisis a regiones específicas, y el ultimo ingrediente es un elemento de *regularidad*, esto significa que los puntos periódicos son densos. Estos ingredientes fueron identificados por R.L. Devaney y su formalización es la siguiente.

Definición 1.4.1. Un sistema dinámico (M, f) se dice *topológicamente transitivo* si dados U y V abiertos no vacíos, existe $n \geq 0$ tal que $f^n(U) \cap V \neq \emptyset$.

Esta definición indica el sistema dinámico no puede descomponerse en dos conjuntos abiertos disjuntos que sean invariantes bajo la aplicación. También se observa que para cualesquiera dos puntos x e y en M existen puntos arbitrariamente cercanos a x que bajo cierto numero de iteraciones de f son movidos arbitrariamente cerca a y .

Definición 1.4.2. Un sistema dinámico (M, f) tiene *dependencia sensitiva a condiciones iniciales* si existe $\delta > 0$ tal que para todo $x \in M$ y cualquier abierto $U \subset M$ con $x \in U$, existe $y \in U$ y $n > 0$ tal que $d(f^n(x), f^n(y)) > \delta$, donde d es la métrica en el espacio M .

A δ se le conoce como la *constante de sensitividad*.

Esta definición expresa que existen puntos arbitrariamente cercanos a x que eventualmente se separan de x a una distancia mayor que δ bajo iteraciones de f , lo cual representa la componente de impredecibilidad. Teniendo en cuenta estos conceptos se formaliza el concepto de caos en la siguiente definición.

Definición 1.4.3. Un sistema dinámico (M, f) se dice *caótico* si:

1. (M, f) es topológicamente transitivo.
2. El conjunto de los puntos periódicos de f es denso en M , es decir, $\overline{\text{Per}(f)} = M$.
3. (M, f) tiene dependencia sensitiva a condiciones iniciales.

Recordando la Observación 1.3.1 y en concordancia con el objetivo de este trabajo, la dinámica del sistema se concentra en el conjunto no-errante, de modo que el interés se concentra en dicho conjunto, al igual que el análisis del caos en el sistema, para tal fin es necesario encontrar formulaciones equivalentes a la Definición 1.4.3 que permitan caracterizar el caos en subconjuntos de $\Omega(f)$, específicamente en subconjuntos compactos. En ese sentido, el siguiente teorema muestra otra caracterización de la transitividad.

Teorema 1.4.1. Sea (M, f) un sistema dinámico con M un espacio métrico compacto, entonces, son equivalentes:

1. (M, f) es topológicamente transitivo.
2. Existe $x \in M$ tal que $\overline{\mathcal{O}(x)} = M$.

La demostración de este teorema se puede ver en [5]. En ocasiones es relativamente más conveniente encontrara un punto cuya órbita sea densa que probar la transitividad, precisamente dicha caracterización es la que utilizaremos.

Una técnica para determinar si un sistema dinámico es caótico en el sentido de Devaney es probar la presencia de caos en un sistema topológicamente conjugado, el inconveniente radica en que la dependencia sensitiva no es un invariante topológico, en [9] se presenta un ejemplo de esta situación, mientras que la transitividad y la densidad de puntos periódicos si son invariantes topológicos (ver Apéndice A, Proposición A.2.3), este inconveniente es solventado gracias al siguiente resultado probado en [9].

Teorema 1.4.2. *Sí (M, f) es topológicamente transitivo y los puntos periódicos de f son densos en M , entonces (M, f) tiene dependencia sensitiva a condiciones iniciales.*

Es importante tener en cuenta que existen otras definiciones de caos, en muchos casos la adopción de determinada definición de caos depende de los intereses, además de ser equivalentes en varios contextos, en este trabajo probaremos que $H_{a,b}|_{\Omega(H_{a,b})}$ es caótica en el sentido de la Definición 1.4.3 para ciertos parámetros a y b . Pero podremos ser más exhaustivos, como hemos visto en secciones anteriores existen puntos en M en las cuales no se aprecia un comportamiento caótico, es el caso de la las órbitas de puntos periódicos, para lograr identificar cuales puntos exhiben comportamientos caóticos bajo iteraciones de f es necesario formalizar dicha situación.

Definición 1.4.4. Sea (M, f) un sistema dinámico, dado $x \in M$ se dice que $\mathcal{O}(x)$ es una *órbita caótica* si existe $C > 0$ talque para todo $q \in \omega(x)$ y todo $\varepsilon > 0$ existen $n_1, n_2, n > 0$ tales que $d(f^{n_1}(x), q) < \varepsilon$, $d(f^{n_2}(x), q) < \varepsilon$ y $d(f^{n_1+n}(x), f^{n_2+n}(x)) < C$.

Este tipo de comportamiento también es conocido como dinámica caótica, esta indica que en este tipo de puntos no es posible detectar la órbita de un punto, específicamente, quiere decir que existen puntos, en este caso q , para los cuales es posible encontrar puntos de la órbita de x tan cercanos a q como se quiera pero que eventualmente se separan bajo iteraciones de f , lo que muestra un grado de impredecibilidad ya que no se puede describir la órbita de x a partir de un pedazo de órbita que esta muy cerca de q (ver Figura 1.4.1).

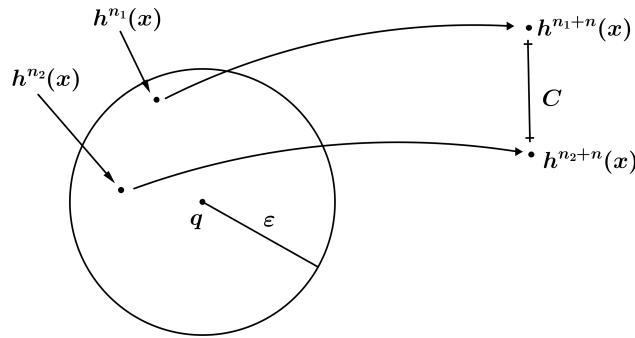


Figura 1.4.1: Órbita caótica.

Esto indica que el interés esta en las regiones en donde se pueda soportar dinámica caótica, en este sentido, y teniendo en cuenta el Teorema 1.4.1 se tiene la siguiente definición de caos:

Definición 1.4.5. Sea (M, f) un sistema dinámico y $X \subset \Omega(f)$ un conjunto invariante ($f(X) = X$) y compacto, se dice que $f|_X$ es caótico si

1. Existe $x \in M$ tal que $\overline{\mathcal{O}(x)} = X$.
2. Existe un conjunto denso en $W^s(X) = \{x \in M : \text{dist}(f^n(x), X) \rightarrow 0 \text{ como } n \rightarrow \infty\}$ tal que todos sus elementos tienen órbitas caóticas.
3. $(X, f|_X)$ tiene dependencia sensitiva a condiciones iniciales.

Capítulo 2

Estabilidad

La estabilidad involucra varios aspectos, uno es la estabilidad estructural, esta se refiere a la estabilidad del sistema dinámico visto como un elemento de un espacio de sistemas dinámicos dotado de una métrica apropiada, la idea es estudiar el comportamiento del sistema al ser sometido a perturbaciones. Otro aspecto es la estabilidad de puntos en los sistemas dinámicos, al igual que en el aspecto anterior la idea es estudiar la variación de las órbitas de un punto al ser sometidos a perturbaciones que en este caso son perturbaciones en los datos iniciales, en primer lugar se indaga sobre la estabilidad de los puntos periódicos del sistema, podemos hablar de estabilidad en los demás puntos del dominio de la función a iterar, sin embargo, los primeros puntos que suscitan interés son los puntos fijos y los periódicos, estudiar su estabilidad da una percepción acerca de los demás puntos, además de tener interés por si mismos. En este capítulo tocamos los dos aspectos de la estabilidad, especialmente la estabilidad de puntos, lo que nos permitirá detectar una región en el espacio de parámetros donde la aplicación de Hénon es caótica.

2.1. Aspectos de la estabilidad

En esta sección hablaremos de los dos aspectos que el concepto “estabilidad” involucra en el contexto de los sistemas dinámicos y que desarrollaremos en mayor detalle en las siguientes secciones.

2.1.1. Estabilidad estructural

Los sistemas dinámicos tiene diversas aplicaciones, tanto físicas como teóricas, es frecuente encontrar fenómenos físicos que son modelados por sistemas dinámicos, de modo que es de esperar que surjan cuestionamientos acerca de la robustez del modelo, esto significa que sus propiedades cualitativas no cambien significativamente cuando el modelo es sometido a pequeñas y admisibles perturbaciones. Para desarrollar estas ideas de manera precisa se debe tener en cuenta alguna clase de perturbación y decidir cuando ellas son pequeñas, para tal fin se considera al sistema dinámico como miembro de algún espacio de sistemas dinámicos el cual se dota de una métrica apropiada, dado que en este trabajo el interés esta en la aplicación de Hénon que es un difeomorfismo del plano que esta incluido dentro de un contexto más general que es el espacio de las aplicaciones $f : U \rightarrow \mathbb{R}^2$ de clase C^r con derivadas acotadas donde $r \geq 1$ y $U \subset \mathbb{R}^2$ abierto, este espacio es denotado por $C^r(U, \mathbb{R}^2)$ en el cual se considera la norma C^r dada por

$$\|f\|_r = \sup_{x \in U} \max \{\|f(x)\|, \|Df(x)\|, \dots, \|D^r f(x)\|\}.$$

Note que este es un espacio de Banach. En este sentido se define la estabilidad estructural como sigue:

Definición 2.1.1. Un sistema dinámico (M, f) con $f \in C^r(M, \mathbb{R}^2)$ es *estructuralmente estable* si y solo si existe una vecindad N de f en $C^r(M, \mathbb{R}^2)$ tal que todo $g \in N$ es topológicamente conjugado a f .

Como mencionamos antes, se puede decir que dos sistemas dinámicos topológicamente conjugados varían solo en el punto de vista en el que son observados, de modo que esta definición dice que un sistema estructuralmente estable es tal que las propiedades topológicas son compartida por todos los sistemas suficientemente cercanos. Los resultados acerca de la estabilidad estructural en la aplicación de Hénon se irán obtenido a lo largo del presente trabajo debido a que estos serán consecuencias de algunos temas que desarrollaremos a continuación.

2.1.2. Estabilidad en puntos del domino

El otro aspecto es la estabilidad de puntos en los sistemas dinámicos, al igual que en el aspecto anterior la idea es estudiar la variación de las órbitas de un punto al ser sometidos a perturbaciones que en este caso son perturbaciones en los datos iniciales, la idea de la estabilidad emerge cuando dicha perturbación no genera mayores cambios en la órbita resultante respecto a la órbita original, esto lleva a indagar sobre las regiones en las cuales las órbitas de dichos puntos tienen comportamientos casi idénticos, esto es, el conjunto estable, de igual forma se puede indagar sobre el conjunto inestable. A continuación la formalización de estos conceptos.

Definición 2.1.2. Sea $f : M \rightarrow M$ un difeomorfismo donde M es un espacio métrico con métrica d y sea $x \in M$. Se define el *conjunto estable* de x como

$$W^s(x) = \{y \in M : d(f^n(y), f^n(x)) \rightarrow 0 \text{ como } n \rightarrow \infty\}$$

y el *conjunto inestable* como

$$W^u(x) = \{y \in M : d(f^n(y), f^n(x)) \rightarrow 0 \text{ como } n \rightarrow -\infty\}.$$

También tenemos la versión local de estos conjuntos, para $\varepsilon > 0$ definimos el *conjunto estable e inestable local* (de tamaño ε) como

$$W_\varepsilon^s(x) = \{y \in M : d(f^n(y), f^n(x)) < \varepsilon \text{ para cada } n \geq 0\},$$

$$W_\varepsilon^u(x) = \{y \in M : d(f^{-n}(y), f^{-n}(x)) < \varepsilon \text{ para cada } n \geq 0\}.$$

Por la continuidad de f y f^{-1} es fácil ver que $W^s(p)$ y $W^u(p)$ son invariantes bajo f para p un punto fijo.

En el estudio de los sistemas dinámicos, en este caso la dinámica de la aplicación Hénon, la estabilidad es un concepto obligado en el estudio de la dinámica, básicamente, los resultados acerca de la dinámica se obtiene en el proceso de estudio de la estabilidad, por ejemplo, estudiar el comportamiento de la órbita de un punto estable permite saber con certeza el comportamiento de las órbitas de puntos en un entorno de este.

En las siguientes secciones se trata de caracterizar estos conjuntos en la aplicación de Hénon, inicialmente se studiará el caso de los puntos periódicos y seguido se estudiará situación para el resto de puntos en ciertos parámetros a y b de la aplicación de Hénon.

2.2. Hiperbolicidad en puntos periódicos

En esta sección dirigimos nuestra atención hacia los puntos fijos y periódicos, en realidad los puntos fijos son un caso particular de los puntos periódicos, en este sentido, el objetivo es, dado un punto periódico, caracterizar las regiones en las cuales estos puntos son atractores y en las que son repulsores, específicamente, en el caso de la aplicación de Hénon veremos que estas regiones son curvas diferenciables tangentes en el punto periódico al espacio estable de la parte lineal de la aplicación, todos estos conceptos también serán definidos; para abordarlos es fundamental el concepto de hiperbolicidad que da una clasificación de los sistemas dinámicos, en primer lugar, lo veremos para aplicaciones lineales.

2.2.1. Hipérbolicidad en el caso lineal

En esta subsección se estudiara el comportamiento de la parte lineal de $H_{a,b}$, en tal sentido se definirá el concepto de hipérbolicidad para aplicaciones lineales invertibles; observe que en la aplicaciones lineales el $\mathbf{0}$ es un punto fijo.

Definición 2.2.1. Un sistema dinámico (\mathbb{R}^2, L) con L lineal e invertible se dice *hiperbólico* si ninguno de sus valores propios tiene modulo igual a uno.

Dado que las aplicaciones lineales de este tipo se pueden representar de manera matricial, y como dicha representaciones se pueden llevar a formas simplificadas como la Forma normal de Jordan, entonces L tiene una de las siguientes formas:

$$\begin{bmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \sigma \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} \lambda & 0 \\ 1 & \lambda \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} \alpha & \beta \\ -\beta & \alpha \end{bmatrix}.$$

Donde λ y σ son valores propios de L en las primeras dos formas, y $\alpha + i\beta$ y $\alpha - i\beta$ los valores propios de L en la tercera forma. En este sentido, se tiene el siguiente resultado.

Lema 2.2.1. Sea (\mathbb{R}^2, L) con L lineal e invertible e hiperbólico, entonces existen subespacios \mathbb{E}^s y \mathbb{E}^u tales que:

1. $\mathbb{R}^2 = \mathbb{E}^s \oplus \mathbb{E}^u$.
2. $L(\mathbb{E}^s) = \mathbb{E}^s$ y $L(\mathbb{E}^u) = \mathbb{E}^u$, esto es, \mathbb{E}^s y \mathbb{E}^u son invariantes bajo L .
3. Existe $0 < \mu < 1$ tal que:

$$\|L^n x\| \leq \lambda^n \|x\|, \quad \text{para todo } n \geq 0, x \in \mathbb{E}^s.$$

y

$$\|L^{-n} x\| \leq \lambda^{-n} \|x\|, \quad \text{para todo } n \geq 0, x \in \mathbb{E}^s.$$

La demostración en detalle del anterior lema puede ser vista en [10]. En la situación que expresa el lema anterior también se puede dar $\mathbb{R}^2 = \mathbb{E}^s$ o $\mathbb{R}^2 = \mathbb{E}^u$, esta situación solo se da cuando todos los valores propios de L tienen modulo menor que uno o todos tienen modulo mayor que uno respectivamente.

Observación 2.2.1. Sea (\mathbb{R}^2, L) con L lineal, invertible e hiperbólico, y sean λ y σ sus valores propios:

1. Si $|\lambda| < 1$ y $|\sigma| < 1$, entonces por el Lema 2.2.1 se infiere $L^n x \rightarrow 0$ comon $\rightarrow \infty$ para cada $x \in \mathbb{R}^2$, en este caso se dice que 0 es un punto fijo *atractor o sumidero*.
2. Si $|\lambda| > 1$ y $|\sigma| > 1$, entonces por el Lema 2.2.1 se infiere $L^n x \rightarrow 0$ comon $\rightarrow -\infty$ para cada $x \in \mathbb{R}^2$, en este caso se dice que 0 es un punto fijo *repulsor o fuente*.
3. Si $|\lambda| < 1$ y $|\sigma| > 1$, entonces por el Lema 2.2.1 se infiere $\mathbb{R}^2 = \mathbb{E}^s \oplus \mathbb{E}^u$, $L^n x \rightarrow 0$ comon $\rightarrow \infty$ para cada $x \in \mathbb{E}^s$ y $L^n x \rightarrow 0$ comon $\rightarrow -\infty$ para cada $x \in \mathbb{E}^u$, en este caso se dice que 0 es un punto fijo *silla*.

2.2.1.1. Regiones de hipérbolicidad de la parte lineal de $H_{a,b}$

Culminamos esta sección analizando la hipérbolicidad de la parte lineal de $H_{a,b}$. Considerando el caso $b \neq 0$, el jacobiano de la aplicación de Hénon es una matriz de tamaño 2×2 invertible, en efecto:

$$DH_{a,b}(x, y) = \begin{bmatrix} -2x & b \\ 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

Donde $\det(DH_{a,b}(x, y)) = -b$, entonces $DH_{a,b}(x, y)$ es invertible, veamos para que valores de x e y esta matriz vista como aplicación lineal es hipérbólica, en primer lugar, halemos los valores propios:

$$\det(\lambda I - DH_{a,b}(x, y)) = \lambda(\lambda + 2x) + b = \lambda^2 + 2\lambda x - b.$$

De modo que los valores propios son:

$$\lambda_1 = -x + \sqrt{x^2 + b} \quad y \quad \lambda_2 = -x - \sqrt{x^2 + b}.$$

Observe que los valores propios son complejos cuando $b < -x^2$ y reales cuando $b \geq -x^2$, además, solo dependen de x y b , teniendo en cuenta esto, el análisis para ver cuando $DH_{a,b}$ es atractor, repulsor o silla se hace de la siguiente forma:

Atractor: Debemos ver para qué valores de x e y se tiene $|\lambda_1| < 1$ y $|\lambda_2| < 1$, desprendemos este análisis en los siguientes dos casos:

▷ $b \geq -x^2$: En primer lugar, se tiene $|\lambda_1| < 1 \iff -1 < -x + \sqrt{x^2 + b} < 1$, esto determina la siguiente región en el plano xb :

$$\{(x, b) \mid x > -1, -x^2 \leq b < 2x + 1 \text{ para } |x| < 1, \text{ y } 1 - 2x < b < 2x + 1 \text{ para } x \geq 1\}.$$

De igual manera se tiene $|\lambda_2| < 1 \iff -1 < -x - \sqrt{x^2 + b} < 1$, esto determina la siguiente región en el plano xb :

$$\{(x, b) \mid x < 1, -x^2 \leq b < 1 - 2x \text{ para } |x| < 1, \text{ y } 2x + 1 < b < 1 - 2x \text{ para } x \leq -1\}.$$

En este caso, la intersección de estas dos regiones es la región donde $DH_{a,b}$ es atractor y es dada por:

$$\{(x, b) \mid |x| < 1, -x^2 < b < 2x + 1, \text{ y } -x^2 < b < 1 - 2x\}.$$

▷ $b < -x^2$: Para esta situación, note que λ_1 y λ_2 se puede expresar de la siguiente forma:

$$\lambda_1 = -x + i\sqrt{-x^2 - b} \quad y \quad \lambda_2 = -x - i\sqrt{-x^2 - b}.$$

Entonces, $|\lambda_1| = |\lambda_2| = \sqrt{-b}$, de modo que $|\lambda_1| < 1$ y $|\lambda_2| < 1$ cuando $\sqrt{-b} < 1$ por lo tanto, para este caso, la región donde $DH_{a,b}$ es atractor es dada por:

$$\{(x, b) \mid |x| < 1, -1 < b < -x^2\}.$$

En conclusión, de la intersección de las regiones finales obtenidas en los dos casos mencionados se obtiene que la región en el plano xb donde $DH_{a,b}$ es atractor, la cual notamos como \mathcal{R}_{At} es dada por:

$$\mathcal{R}_{At} = \{(x, b) \mid -1 < b < 2x + 1, \text{ y } -1 < b < 1 - 2x\}.$$

Repulsor: Debemos ver para qué valores de x e y se tiene $|\lambda_1| > 1$ y $|\lambda_2| > 1$, de manera similar a lo anterior, dividimos este análisis en los siguientes dos casos:

▷ $b \geq -x^2$: En primer lugar, se tiene $|\lambda_1| > 1 \iff -x + \sqrt{x^2 + b} < -1 \text{ o } 1 < -x + \sqrt{x^2 + b}$, esto determina la siguiente región en el plano xb :

$$\left\{ (x, b) \mid \begin{array}{l} x \in \mathbb{R}, b \geq -x^2 \text{ para } x < -1, \text{ y } b > 2x + 1 \text{ para } |x| \leq 1, \text{ y} \\ -x^2 < b < 1 - 2x \text{ o } b > 2x + 1 \text{ para } x > 1. \end{array} \right\}.$$

De igual manera se tiene $|\lambda_2| > 1 \iff -x - \sqrt{x^2 + b} < -1 \text{ o } 1 < -x - \sqrt{x^2 + b}$, esto determina la siguiente región en el plano xb :

$$\left\{ (x, b) \mid \begin{array}{l} x \in \mathbb{R}, b \geq -x^2 \text{ para } x > 1, \text{ y } b > 1 - 2x \text{ para } |x| \leq 1, \text{ y} \\ -x^2 < b < 2x + 1 \text{ o } b > 1 - 2x \text{ para } x < -1. \end{array} \right\}.$$

En este caso, la intersección de estas dos regiones es la región donde $DH_{a,b}$ es repulsor y es dada por:

$$\left\{ (x, b) \mid \begin{array}{l} x \in \mathbb{R}, b > 1 - 2x \text{ y } b > 2x + 1 \text{ para todo } x \in \mathbb{R}, \text{ ó también} \\ -x^2 < b < (\text{sign}(b))(1 - 2x) \text{ para } |x| > 1. \end{array} \right\}.$$

▷ $b < -x^2$: Para esta situación, como vimos en el caso del atractor, se infiere $|\lambda_1| = |\lambda_2| = \sqrt{-b}$, de modo que $|\lambda_1| > 1$ y $|\lambda_2| > 1$ cuando $\sqrt{-b} > 1$ por lo tanto, para este caso, la región donde $DH_{a,b}$ es repulsor es dada por:

$$\{(x, b) \mid x \in \mathbb{R}, b < -x^2 \text{ para } |x| > 1, \text{ y } b < -1 \text{ para } |x| \leq 1\}.$$

En conclusión, de la intersección de las regiones finales obtenidas en los dos casos mencionados se obtiene que la región en el plano xb donde $DH_{a,b}$ es repulsor, la cual notamos como \mathcal{R}_{Rep} es dada por:

$$\mathcal{R}_{\text{Rep}} = \{(x, b) \mid |b| > 1, (\text{sign}(b))b > (\text{sign}(b))(2x + 1), (\text{sign}(b))b > (\text{sign}(b))(1 - 2x)\}.$$

Silla: Debemos ver para que valores de x e y se tiene $|\lambda_1| > 1$ y $|\lambda_2| < 1$, o $|\lambda_1| < 1$ y $|\lambda_2| > 1$, de manera similar a lo anterior, dividimos este análisis en los siguientes dos casos:

▷ $|\lambda_1| < 1$ y $|\lambda_2| > 1$: En primer lugar, dentro del análisis que se hizo en caso atractor se infiere $|\lambda_1| < 1$ para los parámetros x y b dentro de la siguiente región:

$$\{(x, b) \mid x > -1, -1 < b < 2x + 1 \text{ para } |x| < 1, 1 - 2x < b < 2x + 1 \text{ para } x \geq 1\}.$$

De igual manera, dentro del análisis que se hizo en caso repulsor se infiere $|\lambda_2| > 1$ para los parámetros x y b dentro de la siguiente región:

$$\left\{ (x, b) \mid \begin{array}{l} x \in \mathbb{R}, b > 1 - 2x \text{ para todo } x \in \mathbb{R}, \text{ ó tambien} \\ b \leq 1 - 2x \text{ y } b < 2x + 1 \text{ con } b < -1 \text{ para todo } x \in \mathbb{R}. \end{array} \right\}.$$

En este caso, la intersección de estas dos regiones es la región donde $|\lambda_1| < 1$ y $|\lambda_2| > 1$, la cual es dada por:

$$\{(x, b) \mid x > 0, 1 - 2x < b < 2x + 1\}.$$

▷ $|\lambda_1| < 1$ y $|\lambda_2| > 1$: En primer lugar, dentro del análisis que se hizo en caso atractor se infiere $|\lambda_1| > 1$ para los parámetros x y b dentro de la siguiente región:

$$\left\{ (x, b) \mid \begin{array}{l} x \in \mathbb{R}, b > 1 - 2x \text{ para todo } x \in \mathbb{R}, \text{ ó tambien} \\ b < 1 - 2x \text{ y } b \leq 2x + 1 \text{ con } b < -1 \text{ para todo } x \in \mathbb{R}. \end{array} \right\}.$$

De igual manera, dentro del análisis que se hizo en caso repulsor se infiere $|\lambda_2| < 1$ para los parámetros x y b dentro de la siguiente región:

$$\{(x, b) \mid x < 1, -1 < b < 1 - 2x \text{ para } |x| < 1, 2x + 1 < b < 1 - 2x \text{ para } x \leq -1\}.$$

En este caso, la intersección de estas dos regiones es la región donde $|\lambda_1| > 1$ y $|\lambda_2| < 1$, la cual es dada por:

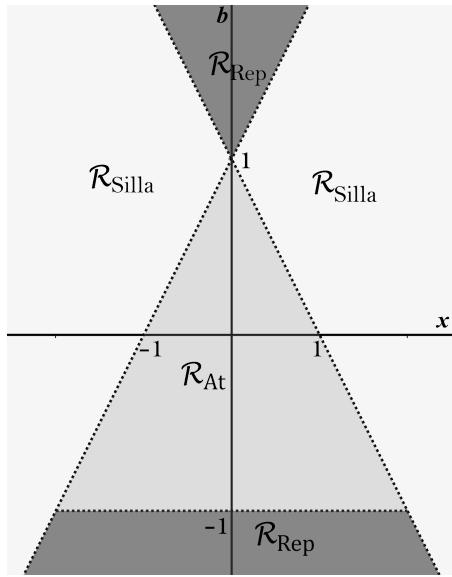
$$\{(x, b) \mid x < 0, 2x + 1 < b < 1 - 2x\}.$$

En conclusión, de la intersección de las regiones finales obtenidas en los dos casos mencionados se obtiene que la región en el plano xb donde $DH_{a,b}$ es silla, la cual notamos como $\mathcal{R}_{\text{Silla}}$ es dada por:

$$\mathcal{R}_{\text{Silla}} = \{(x, b) \mid x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}, 1 - (\text{sign}(x))2x < b < 1 + (\text{sign}(x))2x\}.$$

Donde $(\text{sign}(x))$ signo del x que puede ser 1 o -1.

La Figura 2.2.1 describe las regiones identificadas:

Figura 2.2.1: Hipérbolicidad de la parte lineal de $H_{a,b}$.

2.2.2. Hipérbolicidad en el caso no lineal

En esta subsección se definirá el concepto de hipérbolicidad para aplicaciones no lineales, concepto que será empleado para el estudio de la estabilidad en puntos periódicos de $H_{a,b}$. En adelante, dado un difeomorfismo $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ y $p \in \mathbb{R}^n$, la expresión $Df(p)$ hace referencia a la matriz Jacobiano de f en p .

Definición 2.2.2. Sea $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ un difeomorfismo y p un punto fijo de f . Decimos que p es *hiperbólico* si $Df(p)$ es hiperbólica, es decir, si ninguno de los valores propios de $Df(p)$ tiene módulo igual a uno. Un punto periódico de periodo k se dice hiperbólico si es un punto fijo hiperbólico de f^k .

Observación 2.2.2. Sea f como en la definición anterior y p un punto periódico de periodo k , diremos que p es un punto periódico tipo *silla*, *atractor* o *repulsor* si 0 es respectivamente un punto fijo tipo silla, atractor o repulsor de $Df^k(p)$.

Los primeros casos en los que tenemos conclusiones inmediatas cuyas pruebas no suscitan mayor dificultad son los casos atractor y repulsor.

Teorema 2.2.1. Sea $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ un difeomorfismo y p un punto fijo atractor de f . Entonces existe $U \subseteq \mathbb{R}^2$ abierto contenido a p tal que para cada $x \in U$, $f^n(x) \rightarrow p$ como $n \rightarrow \infty$.

Demuestra. Asumimos $p = 0$, esto es posible ya que la conjugación $\psi(x) = x + p$ asocia f con un sistema que tiene a $\mathbf{0}$ como punto fijo, por conveniencia a dicho sistema también lo notamos por f . Teniendo en cuenta esto, note que $Df(\mathbf{0})$ asume una de las siguientes tres formas:

Sí los valores propios son distintos entonces la forma es

$$\begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \mu \end{pmatrix} \quad \text{donde } |\lambda|, |\mu| < 1.$$

Sí solo se tiene un valor propio el cual sera de multiplicidad algebraica 2 entonces la forma es

$$\begin{pmatrix} \lambda & \epsilon \\ 0 & \mu \end{pmatrix} \quad \text{donde } \epsilon \text{ es arbitrariamente pequeño y } |\lambda| < 1.$$

Sí los valores propios son complejos, entonces la forma es

$$\begin{pmatrix} \alpha & -\beta \\ \beta & \alpha \end{pmatrix} \quad \text{donde } \alpha^2 + \beta^2 < 1.$$

De cada uno de los casos es fácil concluir que si $\mathbf{v} \neq 0$ entonces

$$|Df(\mathbf{0})\mathbf{v}| < |\mathbf{v}|.$$

De modo que $|Df(\mathbf{0})| < 1$, por lo tanto, como Df es continua entonces para $\varepsilon = |Df(\mathbf{0})| - 1$ existe $U \subseteq \mathbb{R}^2$ abierto con $\mathbf{0} \in U$ tal que si $x \in U$ entonces $|Df(x) - Df(\mathbf{0})| < 1 - |Df(\mathbf{0})|$ de donde se infiere $|Df(x)| < 1$, y en consecuencia $|Df(x)\mathbf{v}| < |\mathbf{v}|$.

Como U es abierto elegimos δ tal que si $|x| < \delta$ entonces $x \in U$. Sea $\gamma(t) = t \cdot x$ donde $t \in [0, 1]$, este es un segmento en U que va de 0 a x , entonces $f(\gamma(0)) = \mathbf{0}$ y $f(\gamma(1)) = x$. Por lo tanto

$$\begin{aligned} |f(x)| &= \left| \int_0^1 (f \circ \gamma)'(t) dt \right| \leq \int_0^1 |(f \circ \gamma)'(t)| dt \\ &= \int_0^1 |Df(\gamma(t))\gamma'(t)| dt < \int_0^1 |\gamma'(t)| dt = |x|. \end{aligned}$$

Por lo tanto, $|f(x)| < |x|$. Procediendo de la misma manera se infiere $0 \leq \dots < |f^n(x)| < \dots < |f(x)| < |x|$, de modo que $f^n(x) \rightarrow \mathbf{0}$ como $n \rightarrow \infty$. \square

Corolario 2.2.1. *Sea $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ un difeomorfismo y p un punto fijo repulsor de f . Entonces existe $U \subseteq \mathbb{R}^2$ abierto contenido a p tal que para cada $x \in U$, $f^n(x) \rightarrow p$ como $n \rightarrow -\infty$.*

Demuestra. Se sigue del teorema anterior cambiando f por f^{-1} . \square

El siguiente resultado indica que los puntos fijos hiperbólicos de un difeomorfismo f persisten bajo pequeñas perturbaciones en el espacio $C(\mathbb{R}^2, \mathbb{R}^2)$ de f , siendo más precisos, estamos hablando de estabilidad estructural de f restringida a una entorno del punto fijo hiperbólico, la demostración del siguiente teorema puede ser consultada en [10] y [13].

Teorema 2.2.2. *Sea $f : U \rightarrow \mathbb{R}^2$ un difeomorfismo y p un punto fijo hiperbólico de f . Entonces existe una vecindad de V de p en U y una vecindad N de f en $C(U, \mathbb{R}^2)$ tal que todo $g \in N$ tiene un único punto fijo hiperbólico $q \in V$ del mismo tipo que p , es decir, f y g son topológicamente conjugados restringidos a pequeñas vecindades de p y q respectivamente.*

Teniendo en cuenta el teorema anterior, el estudio de los conjuntos $W^s(p)$ y $W^u(p)$ localmente se simplifica debido al siguiente teorema.

Teorema 2.2.3 (Hartman-Grobman). *Sea p un punto fijo hiperbólico de un difeomorfismo $f : U \rightarrow \mathbb{R}^2$. Entonces existe una vecindad $N \subseteq U$ de p y una vecindad $N' \subseteq \mathbb{R}^2$ conteniendo el origen tal que $f|_N$ es topológicamente conjugado a $Df(p)|_{N'}$.*

Este teorema indica que el comportamiento de f en una vecindad de p es el mismo que el comportamiento de su parte lineal en una vecindad del origen, y dado que el análisis en la parte lineal es más inmediato, entonces este teorema es una herramienta importante en el estudio del comportamiento de órbitas cercanas a p . Una demostración de este teorema puede ser consultada en [10] y [14], para consultar la demostración original vea [11].

2.2.2.1. Regiones de hiperbolidad de $H_{a,b}$

En esta subsección estudiaremos la hiperbolidad de $H_{a,b}$ en sus puntos fijos, recordemos (ver Sección 1.3) que estos existen únicamente cuando $a > -\frac{(b-1)^2}{4}$ y son dados por $p_{\pm} = (x_{\pm}, x_{\pm})$ donde $x_{\pm} = \frac{(b-1) \pm \sqrt{(b-1)^2 + 4a}}{2}$.

Lo que intentaremos es identificar los valores de a y b para los cuales los puntos p_+ y p_- son hiperbólicos y que tipo de hiperbolidad desarrollan, para llevar a cabo esta intención faremos este análisis punto por punto y tendremos en cuenta las regiones delimitadas en la Sección 2.2.1.1, además, “sign” hace referencia a la función signo.

Hiperbolidad de p_+

Veremos para qué valores de a y b el punto p_+ es atractor, repulsor o silla:

Atractor en p_+ : Este caso solo se da cuando $(x_+, b) \in \mathcal{R}_{At}$, esto ocurre cuando $-1 < b < 2x_+ + 1$ y $-1 < b < 1 - 2x_+$, pero esto es equivalente a $-1 < b < 1$ y $\frac{b-1}{2} < x_+ < \frac{1-b}{2}$, teniendo en cuenta estas dos últimas desigualdades, en especial de la última se tiene:

$$\begin{aligned} \frac{b-1}{2} < x_+ < \frac{1-b}{2} &\iff b-1 < (b-1) + \sqrt{(b-1)^2 + 4a} < 1-b \\ &\iff 0 < (b-1)^2 + 4a < 4(b-1)^2 \\ &\iff -\frac{(b-1)^2}{4} < a < \frac{3}{4}(b-1)^2. \end{aligned}$$

Por lo tanto, p_+ es atractor en la la región del plano de parámetros a y b dada por:

$$\left\{ (a, b) \mid -1 < b < 1, -\frac{(b-1)^2}{4} < a < \frac{3}{4}(b-1)^2 \right\}.$$

Repulsor en p_+ : Este caso solo se da cuando $(x_+, b) \in \mathcal{R}_{Rep}$, esto ocurre cuando $|b| > 1$, $(\text{sign}(b))b > (\text{sign}(b))(2x_+ + 1)$ y $(\text{sign}(b))b > (\text{sign}(b))(1 - 2x_+)$, pero esto es equivalente a $|b| > 1$ y $\frac{(\text{sign}(b))(1-b)}{2} < x_+ < \frac{(\text{sign}(b))(b-1)}{2}$, teniendo en cuenta estas dos últimas desigualdades se dependen dos situaciones:

▷ $b > 1$: Para ese caso no existe un parámetro a que satisfaga $\frac{1-b}{2} < x_+ < \frac{b-1}{2}$, en efecto, supongamos que existe tal a , entonces se tendrían las siguientes equivalencias:

$$\begin{aligned} \frac{1-b}{2} < x_+ < \frac{b-1}{2} &\iff 1-b < (b-1) + \sqrt{(b-1)^2 + 4a} < b-1 \\ &\iff 2(b-1) < \sqrt{(b-1)^2 + 4a} < 0. \end{aligned}$$

Lo cual es una contradicción ya que $\sqrt{(b-1)^2 + 4a} > 0$.

▷ $b < -1$: Para ese caso si existen los parámetros a que satisfagan $\frac{b-1}{2} < x_+ < \frac{1-b}{2}$, en efecto, desarrollando esta última desigualdad se sigue:

$$\begin{aligned} \frac{b-1}{2} < x_+ < \frac{1-b}{2} &\iff b-1 < (b-1) + \sqrt{(b-1)^2 + 4a} < 1-b \\ &\iff 0 < \sqrt{(b-1)^2 + 4a} < 2(1-b) \iff -\frac{(b-1)^2}{4} < a < \frac{3}{4}(b-1)^2. \end{aligned}$$

Por lo tanto, para $b < -1$ se sigue que los parámetros a que hacen p_+ un repulsor son los que satisfacen $-\frac{(b-1)^2}{4} < a < \frac{3}{4}(b-1)^2$.

En consecuencia, p_+ es repulsor en la la región del plano de parámetros a y b dada por:

$$\left\{ (a, b) \mid b < -1, -\frac{(b-1)^2}{4} < a < \frac{3}{4}(b-1)^2 \right\}.$$

Silla en p_+ : Este caso solo se da cuando $(x_+, b) \in \mathcal{R}_{\text{Silla}}$, esto ocurre cuando $1 - (\text{sign}(x_+))2x_+ < b < 1 + (\text{sign}(x_+))2x_+$ con $x_+ \neq 0$, pero esto es equivalente a $(\text{sign}(b-1))x_+ < \frac{(\text{sign}(b-1))(1-b)}{2}$ o $(\text{sign}(b-1))x_+ > \frac{(\text{sign}(b-1))(b-1)}{2}$; teniendo en cuenta estas dos ultimas desigualdades se dependen dos situaciones:

▷ $b \geq 1$: Para este caso si existen parámetros a que satisfacen las condiciones mencionadas, en efecto, desarrollando las dos desigualdades se sigue:

$$\begin{aligned} x_+ < \frac{(1-b)}{2} \text{ o } x_+ > \frac{(b-1)}{2} &\iff (b-1) + \sqrt{(b-1)^2 + 4a} < 1-b \text{ o } (b-1) + \sqrt{(b-1)^2 + 4a} > b-1 \\ &\iff \sqrt{(b-1)^2 + 4a} < 2(1-b) \leq 0 \text{ o } -\frac{(b-1)^2}{4} < a. \end{aligned}$$

Note que $\sqrt{(b-1)^2 + 4a} < 2(1-b) \leq 0$ no se puede dar, contradice que $\sqrt{(b-1)^2 + 4a} > 0$; por lo tanto, para $b \geq 1$ se sigue que los parámetros a que hacen p_+ una silla son los que satisfacen $-\frac{(b-1)^2}{4} < a$.

▷ $b < 1$: Para ese caso también existen los parámetros a que satisfacen las condiciones mencionadas, en efecto, desarrollando las dos desigualdades se sigue:

$$\begin{aligned} x_+ > \frac{(1-b)}{2} \text{ o } x_+ < \frac{(b-1)}{2} &\iff (b-1) + \sqrt{(b-1)^2 + 4a} > 1-b \text{ o } (b-1) + \sqrt{(b-1)^2 + 4a} < b-1 \\ &\iff \frac{3(b-1)^2}{4} < a \text{ o } \sqrt{(b-1)^2 + 4a} < 0. \end{aligned}$$

Como lo mencionamos antes $\sqrt{(b-1)^2 + 4a} < 0$ no se puede dar; por lo tanto, para $b < 1$ se sigue que los parámetros a que hacen p_+ una silla son los que satisfacen $\frac{3(b-1)^2}{4} < a$.

En consecuencia, p_+ es silla en la la región del plano de parámetros a y b dada por:

$$\left\{ (a, b) \mid \frac{(b-1)^2}{4} < a \text{ para } b \geq 1, \frac{3}{4}(b-1)^2 < a \text{ para } b < 1 \right\}.$$

La Figura 2.2.2 describe las regiones identificadas:

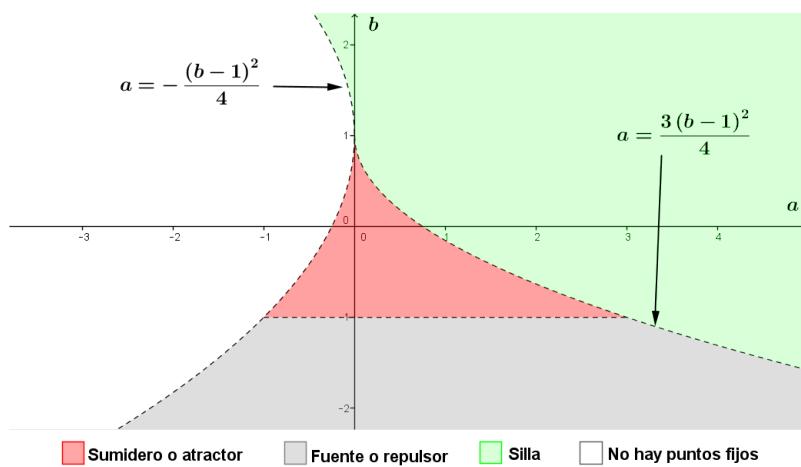


Figura 2.2.2: Tipo de hipérbolicidad de p_+ en el espacio de parámetros.

Hipérbolicidad de p_-

Veremos para que valores de a y b el punto p_- es atractor, repulsor o silla:

Atractor en p_- : Este caso no se puede dar, es decir, p_- nunca es un atractor, en efecto, supongamos que se da, entonces $(x_-, b) \in \mathcal{R}_{\text{At}}$, esto ocurre cuando $-1 < b < 2x_- + 1$ y $-1 < b < 1 - 2x_-$, pero esto es equivalente a $-1 < b < 1$ y $\frac{b-1}{2} < x_- < \frac{1-b}{2}$, teniendo en cuenta estas dos últimas desigualdades, en especial de la última se tiene:

$$\begin{aligned} \frac{b-1}{2} < x_+ < \frac{1-b}{2} &\iff b-1 < (b-1) - \sqrt{(b-1)^2 + 4a} < 1-b \\ &\iff 0 < -\sqrt{(b-1)^2 + 4a} < 2(1-b) \end{aligned}$$

Lo cual es una contradicción ya que $\sqrt{(b-1)^2 + 4a} > 0$. Por lo tanto, p_- nunca es atractor.

Repulsor en p_- : Este caso solo se da cuando $(x_-, b) \in \mathcal{R}_{\text{Rep}}$, recordando lo que se hizo para p_+ , esto ocurre cuando $|b| > 1$, $(\text{sign}(b))b > (\text{sign}(b))(2x_- + 1)$ y $(\text{sign}(b))b > (\text{sign}(b))(1 - 2x_-)$, pero esto es equivalente a $|b| > 1$ y $\frac{(\text{sign}(b))(1-b)}{2} < x_- < \frac{(\text{sign}(b))(b-1)}{2}$, teniendo en cuenta estas dos últimas desigualdades se dependen dos situaciones:

▷ $b > 1$: Para ese caso si existen parámetros a que satisfagan $\frac{1-b}{2} < x_- < \frac{b-1}{2}$, en efecto, desarrollando esta última desigualdad se sigue:

$$\begin{aligned} \frac{b-1}{2} < x_+ < \frac{1-b}{2} &\iff 1-b < (b-1) - \sqrt{(b-1)^2 + 4a} < b-1 \\ &\iff 0 < \sqrt{(b-1)^2 + 4a} < -2(1-b) \iff \frac{-(b-1)^2}{4} < a < \frac{3}{4}(b-1)^2. \end{aligned}$$

Por lo tanto, para $b > -1$ se sigue que los parámetros a que hacen p_- un repulsor son los que satisfacen $\frac{-(b-1)^2}{4} < a < \frac{3}{4}(b-1)^2$.

▷ $b < -1$: Para este caso no existe un parámetro a que satisfaga $\frac{b-1}{2} < x_- < \frac{1-b}{2}$, en efecto, supongamos que existe tal a , entonces se tendrían las siguientes equivalencias:

$$\begin{aligned} \frac{b-1}{2} < x_- < \frac{1-b}{2} &\iff b-1 < (b-1) - \sqrt{(b-1)^2 + 4a} < 1-b \\ &\iff 0 < -\sqrt{(b-1)^2 + 4a} < -2(1-b). \end{aligned}$$

Lo cual es una contradicción ya que $\sqrt{(b-1)^2 + 4a} > 0$.

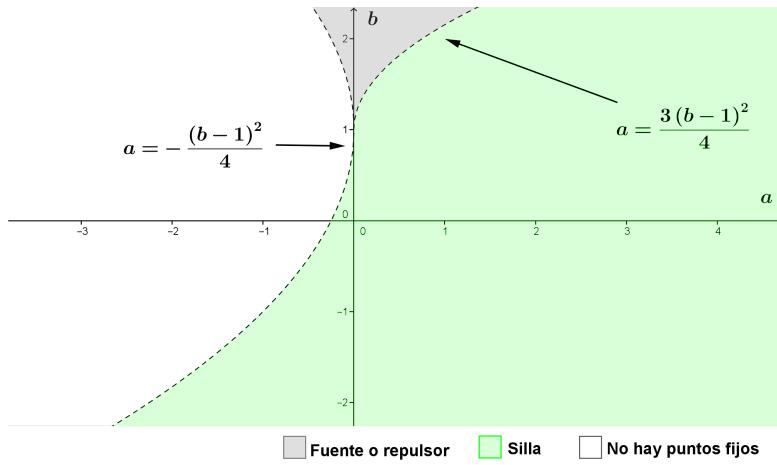
En consecuencia, p_- es repulsor en la la región del plano de parámetros a y b dada por:

$$\left\{ (a, b) \middle| b > 1, -\frac{(b-1)^2}{4} < a < \frac{3}{4}(b-1)^2 \right\}.$$

Silla en p_- : Este caso solo se da cuando $(x_-, b) \in \mathcal{R}_{\text{Silla}}$, esto ocurre cuando $1 - (\text{sign}(x_-))2x_- < b < 1 + (\text{sign}(x_-))2x_-$ con $x_- \neq 0$, pero esto es equivalente a $(\text{sign}(b-1))x_- < \frac{(\text{sign}(b-1))(1-b)}{2}$ o $(\text{sign}(b-1))x_- > \frac{(\text{sign}(b-1))(b-1)}{2}$; teniendo en cuenta estas dos últimas desigualdades se dependen dos situaciones:

▷ $b \geq 1$: Para ese caso si existen los parámetros a que satisfacen las condiciones mencionadas, en efecto, desarrollando las dos desigualdades se sigue:

$$\begin{aligned} x_- < \frac{(1-b)}{2} \text{ o } x_- > \frac{(b-1)}{2} &\iff (b-1) - \sqrt{(b-1)^2 + 4a} < 1-b \text{ o } (b-1) - \sqrt{(b-1)^2 + 4a} > b-1 \\ &\iff \frac{3(b-1)^2}{4} < a \text{ o } -\sqrt{(b-1)^2 + 4a} > 0. \end{aligned}$$

Figura 2.2.3: Tipo de hipérbolicidad de p_- en el espacio de parámetros.

Note que $-\sqrt{(b-1)^2 + 4a} > 0$ no se puede dar, contradice que $\sqrt{(b-1)^2 + 4a} > 0$; por lo tanto, para $b \geq 1$ se sigue que los parámetros a que hacen p_- una silla son los que satisfacen $\frac{3(b-1)^2}{4} < a$.

$\triangleright b < 1$: Para ese caso también existen los parámetros a que satisfacen las condiciones mencionadas, en efecto, desarrollando las dos desigualdades se sigue:

$$\begin{aligned} x_- > \frac{(1-b)}{2} \text{ o } x_- < \frac{(b-1)}{2} &\iff (b-1) - \sqrt{(b-1)^2 + 4a} > 1-b \text{ o } (b-1) - \sqrt{(b-1)^2 + 4a} < b-1 \\ &\iff -\sqrt{(b-1)^2 + 4a} < 0 \text{ o } -\frac{(b-1)^2}{4} < a. \end{aligned}$$

Como lo mencionamos antes $\sqrt{(b-1)^2 + 4a} < 0$ no se puede dar; por lo tanto, para $b < 1$ se sigue que los parámetros a que hacen p_+ una silla son los que satisfacen $-\frac{(b-1)^2}{4} < a$.

En consecuencia, p_- es silla en la la región del plano de parámetros a y b dada por:

$$\left\{ (a, b) \left| \frac{(b-1)^2}{4} < a \text{ para } b < 1, \frac{3}{4}(b-1)^2 < a \text{ para } b \geq 1 \right. \right\}.$$

La Figura 2.2.3 describe las regiones identificadas.

2.2.3. Variedades invariantes

En esta Subsección trataremos de caracterizar $W^s(p_\pm)$ y $W^u(p_\pm)$ para el caso en que p_\pm es hipérbólico tipo silla, mostraremos a partir de un resultado general conocido como el *Teorema de la variedad estable* y que $W^s(p_\pm)$ es una curva diferenciable cuyo espacio tangente en p_\pm es al espacio \mathbb{E}^s asociado a la aplicación lineal $DH_{a,b}(p_\pm)$, un resultado análogo se tiene para $W^u(p_\pm)$. Además, presentamos la idea del algoritmo que permite visualizar estas variedades.

La siguiente proposición fundamenta la idea del algoritmo.

Proposición 2.2.1. *Sea $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ un difeomorfismo y p un punto fijo. Si $\varepsilon > 0$ es suficientemente pequeño se tiene:*

1. $W_\varepsilon^s(p) \subset W^s(p)$ y $W_\varepsilon^u(p) \subset W^u(p)$; es decir, los puntos en una vecindad de p cuyas órbitas positivas (respectivamente negativas) permanecen en la vecindad tienen a p como ω -límite. (respectivamente α -límite).

2. $W_\varepsilon^s(p) = h^{-1}(\mathbb{E}^s \cap U)$ (respectivamente $W_\varepsilon^u(p) = h^{-1}(\mathbb{E}^u \cap U)$) donde $U \subseteq \mathbb{R}^2$ es abierto contenido el origen, h es un homeomorfismo de $B_\varepsilon(p)$ sobre U y \mathbb{E}^s (respectivamente \mathbb{E}^u) es el espacio estable (respectivamente inestable) de $Df(p)$.
3. $W^s(p) = \bigcup_{n \geq 0} f^{-n}(W_\varepsilon^s(p))$ y $W^s(p) = \bigcup_{n \geq 0} f^n(W_\varepsilon^u(p))$. Por lo tanto, existe aplicación inyectiva $\varphi_s : \mathbb{E}^s \rightarrow \mathbb{R}^2$ (respectivamente $\varphi_u : \mathbb{E}^u \rightarrow \mathbb{R}^2$) tal que $\varphi_s(\mathbb{E}^s) = W^s(p)$ (respectivamente $\varphi_u(\mathbb{E}^u) = W^u(p)$)

Demuestra. Considera $A = Df(p)$.

- 1 y 2: Por el Teorema 2.2.3 de Hartman-Grobman existe una vecindad U de 0 en \mathbb{R}^2 y un homeomorfismo $h : B_\varepsilon \rightarrow U$ el cual es una conjugación topológica de f y A donde B_ε es la bola abierta de centro en p y radio ε que abreviamos así para reducir la notación. Como A es un isomorfismo hiperbólico se sigue que si $x \in U$ satisface $A^n(x) \in U$ para todo $n \geq 0$ entonces $x \in \mathbb{E}^s$ y así $A^n(x) \rightarrow 0$ cuando $n \rightarrow \infty$. Sea $q \in W_\varepsilon^s(p)$, entonces $f^n(q) \in B_\varepsilon$ para todo $n \geq 0$, y dado que $hf^n(q) = A^n h(q)$ tenemos que $A^n h(q) \in U$ para $n \geq 0$ así que $A^n h(q) \rightarrow 0$. Por lo tanto, $h(W_\varepsilon^s(p)) \subseteq \mathbb{E}^s \cap U$, además $f^n(q) = h^{-1}A^n h(q)$ converge a $p = h^{-1}(0)$ lo cual muestra que $W_\varepsilon^s(p) \subset W^s(p)$ lo que prueba 1. Por otro lado, si $x \in \mathbb{E}^s$ entonces $A^n(x) \rightarrow 0$ cuando $n \rightarrow \infty$ de donde es fácil ver que $A^n(x) \in \mathbb{E}^s$ para $n \geq 0$, como $f^n h^{-1}(x) = h^{-1}A^n(x)$ entonces $f^n h^{-1}(x) \in B_\varepsilon$ para $n \geq 0$ lo cual muestra $h^{-1}(\mathbb{E}^s \cap U) \subseteq W_\varepsilon^s(p)$. De modo que $W_\varepsilon^s(p) = h^{-1}(\mathbb{E}^s \cap U)$ lo que prueba 2. De manera similar se prueba $W_\varepsilon^u(p) \subset W^u(p)$ y $W_\varepsilon^u(p) = h^{-1}(\mathbb{E}^u \cap U)$.
- 3: Como $W^s(p)$ es invariante bajo f y $W_\varepsilon^s(p) \subset W^s(p)$, tenemos $f^{-n}(W_\varepsilon^s(p)) \subset W^s(p)$ para todo $n \geq 0$ así que $\bigcup_{n \geq 0} f^{-n}(W_\varepsilon^s(p)) \subset W^s(p)$. Por otro lado, si $q \in W^s(p)$ entonces $\lim_{n \rightarrow \infty} f^n(q) = p$ así que existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $f^n(q) \in B_\varepsilon$ para todo $n \geq n_0$. Así, $f^{n_0}(q) \in W_\varepsilon^s(p)$ y en consecuencia $q \in f^{-n_0}(W_\varepsilon^s(p))$, de modo que $W^s(p) \subset \bigcup_{n \geq 0} f^{-n}(W_\varepsilon^s(p))$, entonces $W^s(p) = \bigcup_{n \geq 0} f^{-n}(W_\varepsilon^s(p))$. De manera similar se prueba $W^s(p) = \bigcup_{n \geq 0} f^{-n}(W_\varepsilon^s(p))$. Para la otra parte, si $x \in \mathbb{E}^s$ existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $A^{n_0}(x) \in U$ donde U es la vecindad de 0 considerada antes, es más, $A^{n_0+n}(x) \in U$ para $n \geq 0$. Definimos $\varphi_s(x) = f^{-n_0}h^{-1}A^{n_0}(x)$. Como h^{-1} también es una conjugación topológica de A y f se sigue que φ_s no depende de n_0 ya que $f^{-n_0}h^{-1}A^{n_0} = h^{-1}(x)$. Es fácil ver que φ_s es inyectiva, falta ver que $\varphi_s(\mathbb{E}^s) = W^s(p)$, en efecto, como $A^{n_0+n}(x) \in U$ para $n \geq 0$, entonces $A^{n_0}(x) \in \mathbb{E}^s \cap U$ de donde se sigue $h^{-1}A^{n_0}(x) \in W_\varepsilon^s(p)$, luego, dado que $f^{-n_0}(W_\varepsilon^s(p)) \subset W^s(p)$ entonces $f^{-n_0}h^{-1}A^{n_0}(x) \in W^s(p)$. Así pues, $\varphi_s(\mathbb{E}^s) = W^s(p)$. De manera similar se construye φ_u inyectiva tal que $\varphi_u(\mathbb{E}^u) = W^u(p)$.

□

Esta proporción da una idea de como construir la variedad estable (e inestable) a partir de la variedad estable (e inestable) local, el siguiente teorema indica que forma tiene la variedad estable:

Teorema 2.2.4 (Teorema de la Variedad Estable). *Sea $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ un difeomorfismo de clase C^1 y p un punto fijo hiperbólico tipo silla. Considere \mathbb{E}^s el espacio estable de $A = Df(p)$. Entonces $W^s(p)$ es una curva de clase C^r y el espacio tangente a $W^s(p)$ en el punto p es \mathbb{E}^s .*

La prueba puede ser consultada en [14]. Sea $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ un difeomorfismo de clase C^1 y p un punto fijo hiperbólico tipo silla, considere v_s y v_u los vectores propios de $Df(p)$ correspondientes a los valores propios λ_s y λ_u , $|\lambda_s| < 1 < |\lambda_u|$, respectivamente, entonces $\mathbb{E}^s = \langle v_s \rangle$ y $\mathbb{E}^u = \langle v_u \rangle$. Por otro lado, dado $\varepsilon > 0$ existe una bola abierta B_δ de centro en p y radio δ tal que

$$\|f(x) - f(p) - Df(p)(x - p)\| < \varepsilon$$

para $x \in B_\delta$, esto es, $f(x) \approx f(p) + Df(p)(x - p)$; note que $x \in B_\delta$ puede ser caracterizado v_s y v_u , es decir, $x = p + c_1 v_s + c_2 v_u$, luego, como $D(f^n)(p) = [Df(p)]^n$, se sigue que si $x \in W^s(p)$, entonces para $n > 0$

suficientemente grande se tiene

$$\begin{aligned} f^n(x) &\approx f^n(p) + Df^n(p)(c_1v_s + c_2v_u) \\ &= p + c_1\lambda_s^n v_s + c_2\lambda_u^n v_u \\ &\approx p + c_2\lambda_u^n v_u. \end{aligned}$$

por lo tanto $c_2 \rightarrow 0$ como $n \rightarrow \infty$. De manera similar, $x \in W^u(p)$, entonces para $n > 0$ suficientemente grande se tiene

$$\begin{aligned} f^n(x) &\approx p + c_1\lambda_s^{-n}v_s + c_2\lambda_u^{-n}v_u \\ &\approx p + c_1\lambda_s^{-n}v_s. \end{aligned}$$

por lo tanto $c_1 \rightarrow 0$ como $n \rightarrow \infty$ (ver Figura 2.2.4). Esto reafirma lo expuesto en la Proposición 2.2.1.

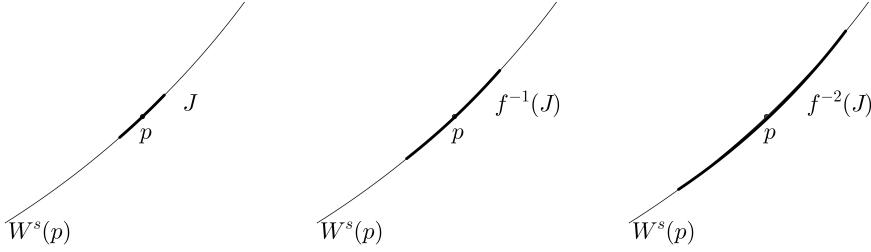


Figura 2.2.4: Generación de la variedad estable de un punto fijo hiperbólico.

La idea del algoritmo es la siguiente: Elegir un segmento J del espacio tangente de $W^s(p)$ en p , dicho espacio es $\{x = p + cv_s \mid c \in \mathbb{R}\}$, el segmento debe ser suficientemente pequeño ya que sabemos que la dinámica de $Df(p)$ en un entorno suficientemente pequeño de 0 es igual a la de $f(p)$ en un entorno de p , así pues, se tiene que

$$W^s(p) \approx \bigcup_{i=0}^n f^{-i}(J)$$

para un $n > 0$ apropiado, la elección de n depende de lo pequeño que sea J , entre mas pequeño J mayor es n y mas aproximación se tiene.

Para el caso de la aplicación de Hénon tenemos los resultados que se muestran en la Figura 2.2.5, el código del algoritmo se puede ver en el Apéndice B, Sección B.2.

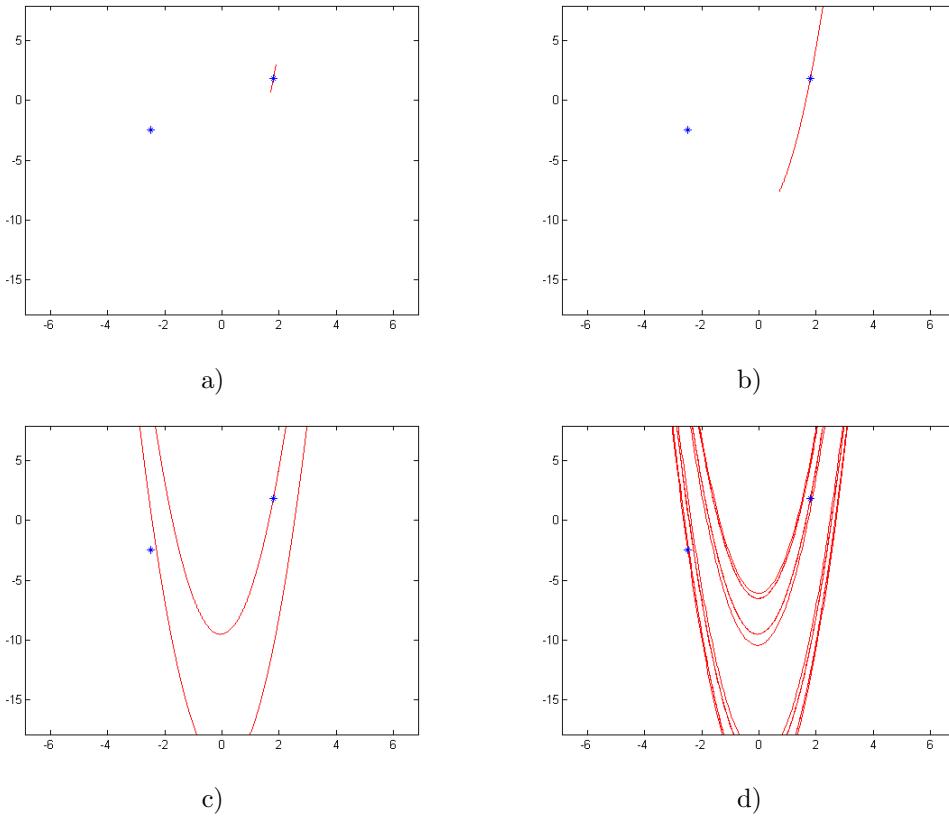


Figura 2.2.5: Iteraciones del algoritmo generador de $W^s(p_+)$ de p_+ para $a = 4,5$ y $b = 0,3$. a) Iteración 4. b) Iteración 5. c) Iteración 7. d) Iteración 9.

Para la variedad inestable la idea es la misma, en este caso se elige un segmento J suficientemente pequeño del espacio tangente de $W^u(p)$ en p , dicho espacio es $\{x = p + cv_u \mid c \in \mathbb{R}\}$, entonces se tiene

$$W^u(p) \approx \bigcup_{i=0}^n f^i(J)$$

para un $n > 0$ apropiado. Hay que tener en cuenta hasta los límites que impone los programas encargados de desarrollar este procedimiento, en este caso MATLAB, ya que esto puede intervenir en la elección de un segmento J suficientemente pequeño.

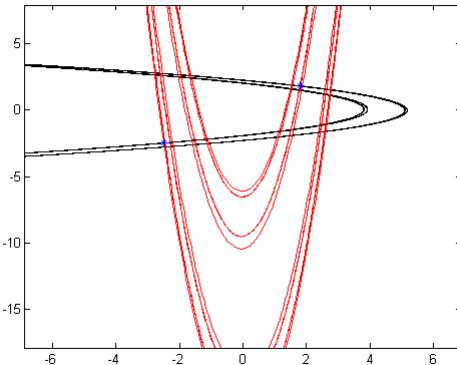


Figura 2.2.6: $W^s(p_+)$ y $W^u(p_+)$ de p_+ para $a = 4,5$ y $b = 0,3$ en la Iteración 9.

2.3. Conjuntos hiperbólicos

Para realizar el estudio de la dinámica de los puntos en $\Omega(H_{a,b})$ es necesario recurrir al concepto de hiperbolicidad de conjuntos invariantes, específicamente al concepto de conjunto hiperbólico, esta puede considerarse como una extensión de la noción de hiperbolicidad mostrada en los puntos periódicos. En esta sección mostraremos inicialmente que la aplicación de Hénon es una aplicación de tipo herradura y que los sistemas dinámicos con aplicaciones de este tipo son topológicamente conjugados a un sistema dinámico formado por un conjunto llamado *secuencia de símbolos* y una aplicación conocida como *left-shift* definida en dicho conjunto, tal sistema en su dinámica presenta resultados más inmediatos los cuales por la conjugación se reflejan en la aplicación de Hénon, esto permitirá concluir que $\Omega(H_{a,b})$ es un conjunto hiperbólico, y sumado a otros resultados permitirá mostrar que para ciertos parámetros a y b en el conjunto $\Omega(H_{a,b})$ la dinámica de $H_{a,b}$ es caótica.

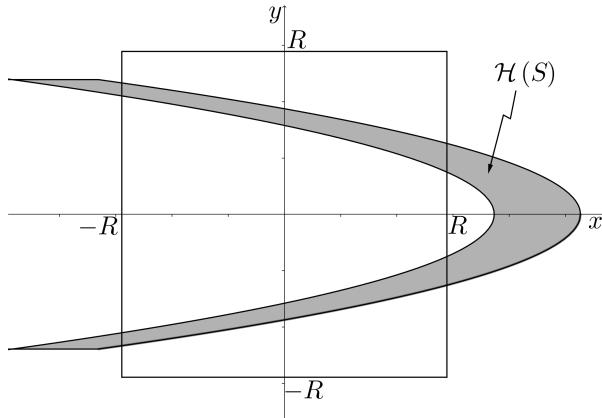
2.3.1. Herradura

Este tipo de aplicaciones surgen del estudio del comportamiento de la herradura de Smale, de manera informal una aplicación de tipo herradura es un homeomorfismo $\mathcal{H} : M \rightarrow M$ con $M \subseteq \mathbb{R}^2$ abierto tal que existe $R > 0$ donde $S = \{(x, y) \mid |x|, |x| \leq R\} \subseteq M$ y tiene el siguiente comportamiento geométrico sobre S : lo estira en dirección horizontal, luego lo encoje en dirección vertical, después desplaza horizontalmente la banda resultante hacia uno de los lados de S , en la situación de la Figura 2.3.1 lo desplaza hacia la derecha, y por último la dobla generando lo que muestra la Figura 2.3.1. No obstante, una función tipo herradura no tiene por qué ser descrita siguiendo estos pasos, es más, dichos pasos pueden ser equivalentes a otros en los que se empleen acciones como reflexiones y rotaciones, por esta razón, como primera medida, en esta subsección daremos una formulación más general de las aplicaciones de tipo herradura, para tal fin se requieren las siguientes definiciones.

Definición 2.3.1. Sea $R > 0$ y $u(x) : [-R, R] \rightarrow \mathbb{R}$ una función monótona continua, una *curva horizontal* para R es el grafo de u , es decir, el conjunto $\{(x, u(x)) \mid -R \leq x \leq R\}$. De manera análoga, sea $v(x) : [-R, R] \rightarrow \mathbb{R}$ una función monótona continua, una *curva vertical* para R es el grafo de v , es decir, el conjunto $\{(v(y), y) \mid -R \leq y \leq R\}$.

Por conveniencia, cuando hagamos referencia a una curva haremos alusión a la función que la genera y su orientación (vertical u horizontal).

Definición 2.3.2. Sea $R > 0$, u_0 y u_1 dos curvas horizontales para R , tales que $-R \leq u_0(x) \leq u_1(x) \leq R$; una *banda horizontal* \mathcal{U} es el conjunto $\mathcal{U} = \{(x, y) \mid -R \leq x \leq R, u_0(x) \leq y \leq u_1(x)\}$. De manera análoga,

Figura 2.3.1: Región S y su imagen $\mathcal{H}(S)$ bajo una aplicación \mathcal{H} tipo herradura.

sean v_0 y v_1 dos curvas verticales para R , tales que $-R \leq v_0(y) \leq v_1(y) \leq R$; una *banda vertical* \mathcal{V} es el conjunto $\mathcal{V} = \{(x, y) \mid -R \leq y \leq R, v_0(y) \leq x \leq v_1(y)\}$.

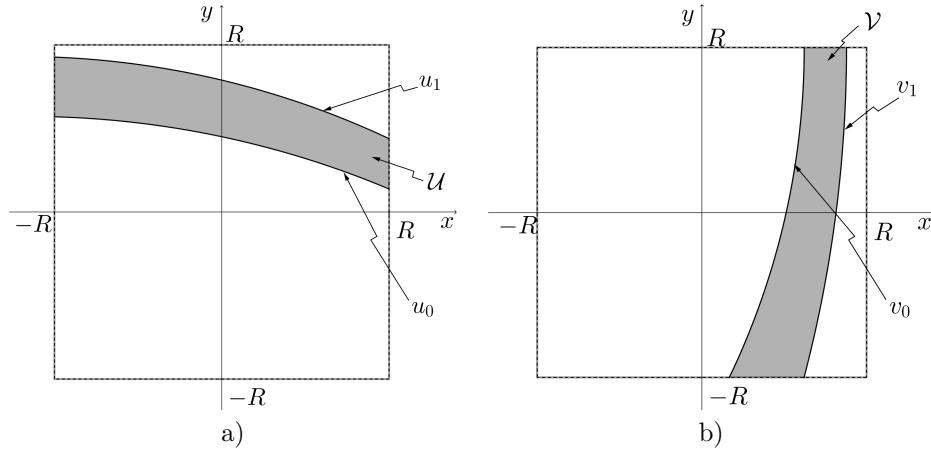


Figura 2.3.2: Ejemplo de bandas a) horizontales y b) verticales.

Para efectos posteriores definimos el diámetro de una banda horizontal \mathcal{U} y una vertical \mathcal{V} como sigue:

$$\text{diam } (\mathcal{U}) = \sup_{-R \leq x \leq R} (u_1(x) - u_0(x)) \quad \text{y} \quad \text{diam } (\mathcal{V}) = \sup_{-R \leq y \leq R} (v_1(y) - v_0(y)).$$

Teniendo en cuenta lo anterior, formalmente definimos una aplicación de tipo herradura como sigue:

Definición 2.3.3. Sea $M \subseteq \mathbb{R}^2$ abierto, y $\mathcal{H} : M \rightarrow M$ un homeomorfismo, decimos que \mathcal{H} es de tipo *herradura* si existe $R > 0$ tal que

$$S = \{(x, y) \mid |x|, |y| \leq R\} \subseteq M.$$

Y además satisface lo siguiente:

1. Existen V_0 y V_1 bandas verticales para R disyuntas, U_0 y U_1 bandas horizontales para R disyuntas tales que $\mathcal{H}(V_i) = U_i$, $\mathcal{H}|_{V_i}$ es homeomorfismo y adicionalmente $\mathcal{H}(\partial V_i) = \partial U_i$ (∂ indica frontera) para cada $i = 0, 1$.

2. $\mathcal{H}(U_j) \cap U_i = \tilde{U}_{i,j}$ es una banda horizontal para cada $i, j = 0, 1$ y adicionalmente

$$\text{diam}(\tilde{U}_{i,j}) \leq \mu(\text{diam}(U_i)) \quad \text{para algún } 0 < \mu < 1, \text{ para cada } i, j = 0, 1.$$

De manera análoga, $\mathcal{H}(V_j) \cap V_i = \tilde{V}_{i,j}$ es una banda horizontal para cada $i, j = 0, 1$ y adicionalmente

$$\text{diam}(\tilde{V}_{i,j}) \leq \mu(\text{diam}(V_i)) \quad \text{para algún } 0 < \mu < 1, \text{ para cada } i, j = 0, 1.$$

La condición 2 en esta definición describe el proceso de contracción en la dirección vertical y expansión en la dirección horizontal.

La mejor forma de explicar este tipo de aplicación es mostrando una aplicación tipo herradura, precisamente la aplicación de Hénon para ciertos parámetros a y b es una de ellas.

2.3.1.1. La aplicación de Hénon como herradura

Debemos hallar parámetros a y b para los cuales la aplicación de Hénon se comporta como una aplicación tipo herradura, esto significa satisfacer la Definición 2.3.3. En este sentido, sea $R = R_{a,b}$ donde $R_{a,b}$ es el dado al principio de la Subsección 1.3.1 y sea

$$S = \{(x, y) \mid |x|, |y| \leq R\}.$$

Precisamente por la Subsección 1.3.1 en S se concentra toda la información de la dinámica de H_{ab} . En este punto se presenta dos situaciones que se representan en la Figura:

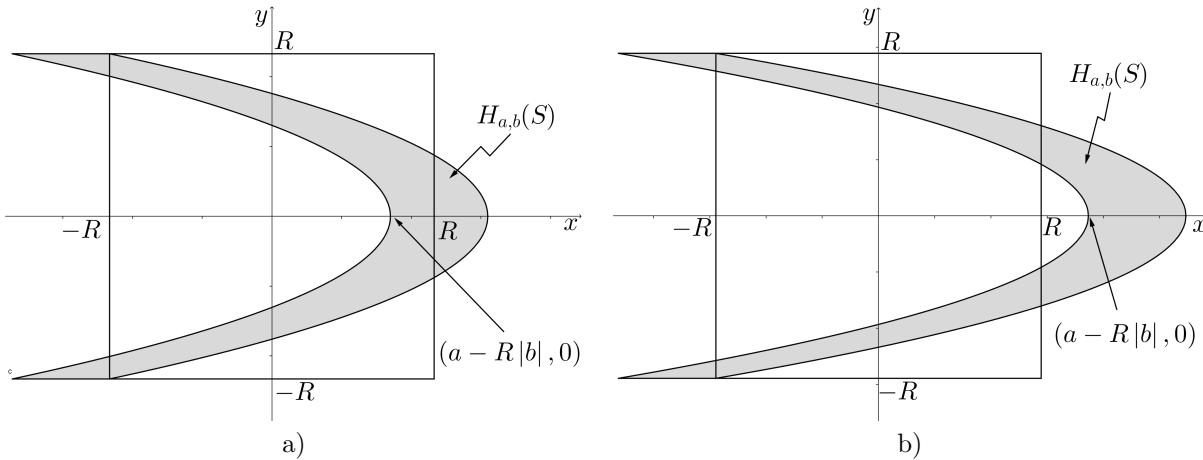


Figura 2.3.3: a) $a \leq 2(1 + |b|)^2$, no hay herradura. b) $a > 2(1 + |b|)^2$, si hay herradura.

Esto indica que para este caso el comportamiento tipo herradura solo se podrá dar cuando el punto $(a - R|b|, 0)$ no está sobre la recta $x = R$, es decir, cuando $a - R|b| > R$, los parámetros a y b que satisfacen esto son dados por el siguiente lema.

Lema 2.3.1. $a - R|b| > R$ si y solo si $a > 2(1 + |b|)^2$.

Demotación. Por el Lema 1.3.1 se tiene $R^2 - (1 + |b|)R - a = 0$, de lo cual se sigue $a - R|b| = R^2 - R - 2R|b|$, de modo que:

$$\begin{aligned} a - R|b| > R &\iff R^2 - R - 2R|b| > R \\ &\iff R^2 > 2R(1 + |b|) \iff R > 2(1 + |b|). \end{aligned}$$

Pero como $R = \frac{1+|b|+\sqrt{(1+|b|)^2+4a}}{2}$, entonces:

$$\begin{aligned} R > 2(1+|b|) &\iff \frac{1+|b|+\sqrt{(1+|b|)^2+4a}}{2} > 2(1+|b|) \\ &\iff \frac{1+|b|+\sqrt{(1+|b|)^2+4a}}{2} > 2(1+|b|) \\ &\iff \sqrt{(1+|b|)^2+4a} > \frac{3}{2}(1+|b|) \\ &\iff (1+|b|)^2+4a > \frac{9}{4}(1+|b|) \iff aa > 2(1+|b|)^2. \end{aligned}$$

□

Así pues, asumiendo $a > 2(1+|b|)^2$, consideremos las bandas verticales V_0 y V_1 dadas por:

$$\begin{aligned} V_0 &= \left\{ (x,y) \mid -R \leq y \leq R, v_0^{(0)}(y) \leq x \leq v_1^{(0)}(y) \right\} \\ V_1 &= \left\{ (x,y) \mid -R \leq y \leq R, v_0^{(1)}(y) \leq x \leq v_1^{(1)}(y) \right\}. \end{aligned}$$

Donde $v_0^{(0)}(y) = -\sqrt{R+a+by}$, $v_1^{(0)}(y) = -\sqrt{a-R+by}$, $v_0^{(1)}(y) = \sqrt{a-R+by}$ y $v_1^{(1)}(y) = \sqrt{R+a+by}$. También consideramos las bandas horizontales U_0 y U_1 dadas por:

$$\begin{aligned} U_0 &= \left\{ (x,y) \mid -R \leq x \leq R, u_0^{(0)}(x) \leq y \leq u_1^{(0)}(x) \right\} \\ U_1 &= \left\{ (x,y) \mid -R \leq x \leq R, u_0^{(1)}(x) \leq y \leq u_1^{(1)}(x) \right\}. \end{aligned}$$

Donde $u_0^{(0)}(x) = -\sqrt{a+|b|R-x}$, $u_1^{(0)}(x) = -\sqrt{a-|b|R-x}$, $u_0^{(1)}(x) = \sqrt{a-|b|R-x}$ y $u_1^{(1)}(x) = \sqrt{a+|b|R-x}$. Estas bandas satisfacen la condición 1 de la Definición 2.3.3, para probarlo, note que $H_{a,b}$ puede verse como la composición de cuatro funciones que son:

$$H_1(x,y) = (x,by), \quad H_2(x,y) = (y,x), \quad H_3(x,y) = (a+x,y) \quad y \quad H_4(x,y) = (x-y^2,y).$$

Esto significa, $H_{a,b} = H_4 H_3 H_2 H_1$. A partir de estas funciones podemos ver como actúa $H_{a,b}$ sobre S , V_0 y V_1 :

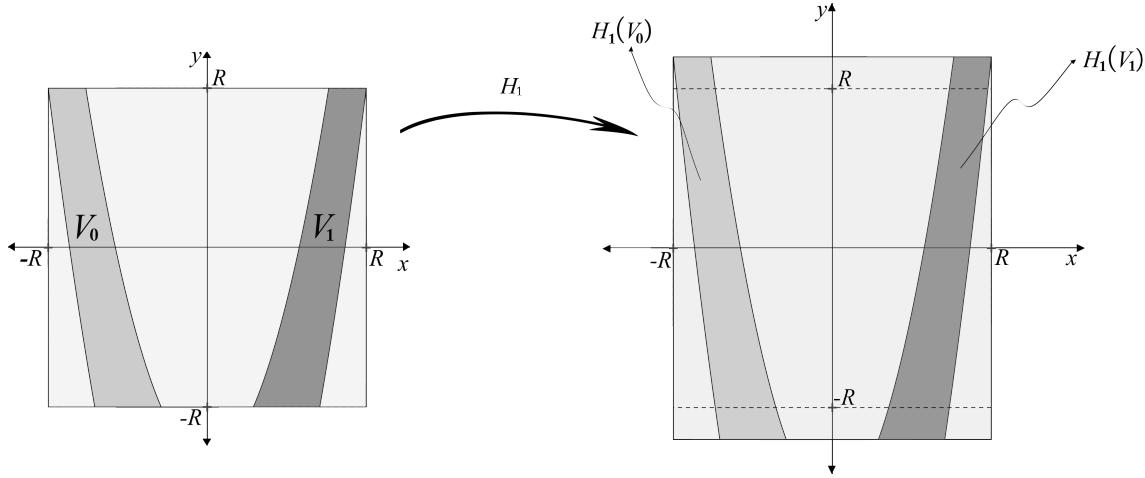
▷ **H_1 :** Esta función realiza una contracción en la dirección vertical cuando $|b| < 1$, o una expansión en la dirección vertical cuando $|b| > 1$, donde $|b|$ sera la constante de contracción o expansión; y no realiza ninguna acción cuando $b = 1$, adicionalmente cuando $b < 1$ también realiza una reflexión respecto al eje x . Por lo tanto, la imagen de V_0 y V_1 bajo H_1 es: (ver Figura 2.3.4)

$$\begin{aligned} H_1(V_0) &= \left\{ (x,y) \mid |y| \leq |b|R, v_0^{(0)}\left(\frac{y}{b}\right) \leq x \leq v_1^{(0)}\left(\frac{y}{b}\right) \right\} \\ &= \left\{ (x,y) \mid |y| \leq |b|R, -\sqrt{R+a+y} \leq x \leq -\sqrt{a-R+y} \right\}, \\ H_1(V_1) &= \left\{ (x,y) \mid |y| \leq |b|R, v_0^{(1)}\left(\frac{y}{b}\right) \leq x \leq v_1^{(1)}\left(\frac{y}{b}\right) \right\} \\ &= \left\{ (x,y) \mid |y| \leq |b|R, \sqrt{a-R+y} \leq x \leq \sqrt{R+a+by} \right\}, \end{aligned}$$

y

$$H_1(S) = \{(x,y) \mid |y| \leq |b|R, |x| \leq R\}.$$

En este caso es claro que $H_1(\partial V_0) = \partial H_1(V_0)$ y $H_1(\partial V_1) = \partial H_1(V_1)$.

Figura 2.3.4: Imagen de V_0 , V_1 y S bajo H_1 cuando $b > 1$.

▷ H_2 : La acción que realiza esta función a las regiones anteriores es una reflexión respecto al eje y y seguido una rotación de 90° en sentido horario, esto lleva a lo siguiente: (ver Figura 2.3.5)

$$\begin{aligned} H_2 H_1 (V_0) &= \left\{ (x, y) \mid |x| \leq |b|R, v_0^{(0)} \left(\frac{x}{b} \right) \leq y \leq v_1^{(0)} \left(\frac{x}{b} \right) \right\} \\ &= \left\{ (x, y) \mid |x| \leq |b|R, -\sqrt{R+a+x} \leq y \leq -\sqrt{a-R+x} \right\}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} H_2 H_1 (V_1) &= \left\{ (x, y) \mid |x| \leq |b|R, v_0^{(1)} \left(\frac{x}{b} \right) \leq y \leq v_1^{(1)} \left(\frac{x}{b} \right) \right\} \\ &= \left\{ (x, y) \mid |x| \leq |b|R, \sqrt{a-R+x} \leq y \leq \sqrt{R+a+x} \right\}, \end{aligned}$$

y

$$H_2 H_1 (S) = \{(x, y) \mid |x| \leq |b|R, |y| \leq R\}.$$

En este caso también es claro que $H_2(\partial H_1(V_0)) = \partial H_2 H_1(V_0)$ y $H_2(\partial H_1(V_1)) = \partial H_2 H_1(V_1)$.

▷ H_3 : Esta función desplaza horizontalmente las regiones anteriores una distancia de valor $|a|$ respecto a la posición original, el desplazamiento siempre es hacia la derecha ya que $a > 2(1+|b|)^2$, esto lleva a lo siguiente: (ver Figura 2.3.6)

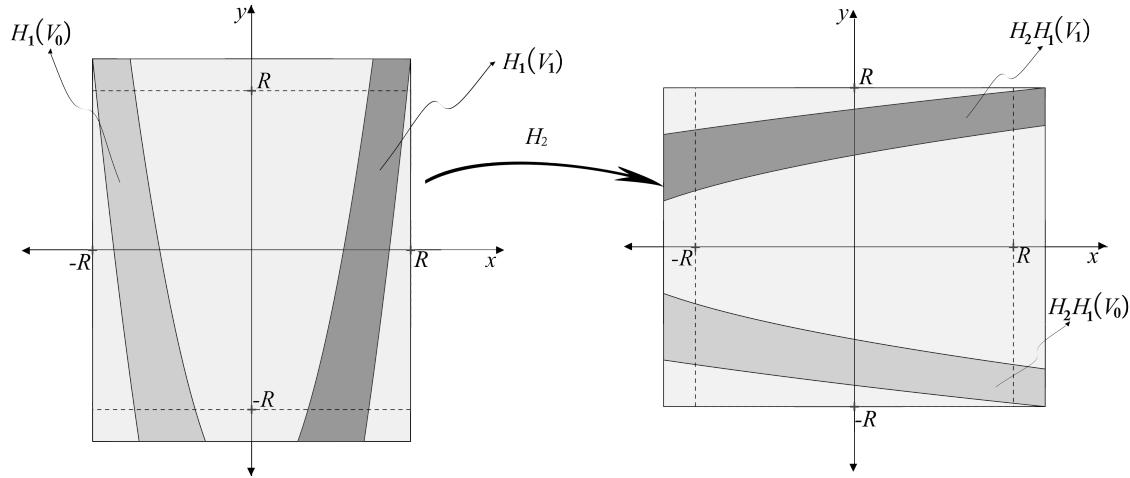
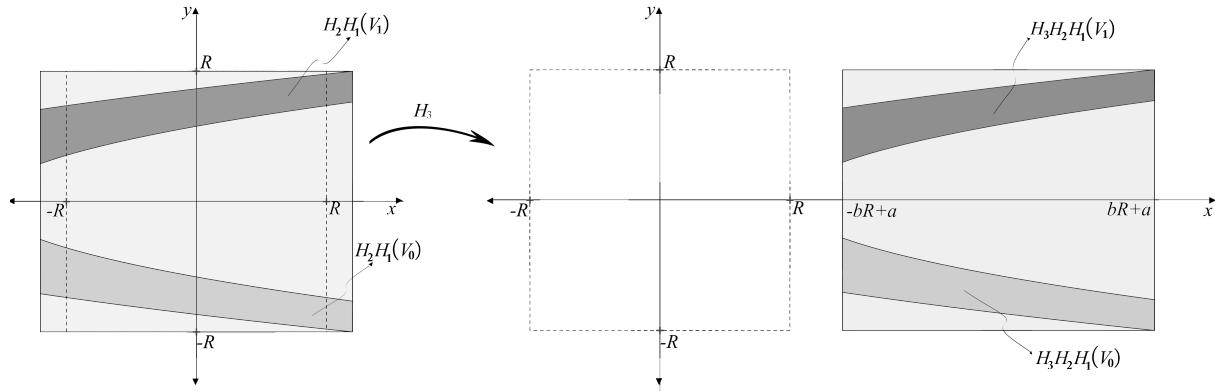
$$\begin{aligned} H_3 H_2 H_1 (V_0) &= \left\{ (x, y) \mid |x-a| \leq |b|R, v_0^{(0)} \left(\frac{x-a}{b} \right) \leq y \leq v_1^{(0)} \left(\frac{x-a}{b} \right) \right\} \\ &= \left\{ (x, y) \mid |x-a| \leq |b|R, -\sqrt{R+x} \leq y \leq -\sqrt{-R+x} \right\}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} H_3 H_2 H_1 (V_1) &= \left\{ (x, y) \mid |x-a| \leq |b|R, v_0^{(1)} \left(\frac{x}{b} \right) \leq y \leq v_1^{(1)} \left(\frac{x}{b} \right) \right\} \\ &= \left\{ (x, y) \mid |x-a| \leq |b|R, \sqrt{-R+x} \leq y \leq \sqrt{R+x} \right\}, \end{aligned}$$

y

$$H_3 H_2 H_1 (S) = \{(x, y) \mid |x-a| \leq |b|R, |y| \leq R\}.$$

En este caso también es claro que $H_3(\partial H_2 H_1(V_0)) = \partial H_3 H_2 H_1(V_0)$ y $H_3(\partial H_2 H_1(V_1)) = \partial H_3 H_2 H_1(V_1)$.

Figura 2.3.5: Imagen de $H_1(V_0)$, $H_1(V_1)$ y $H_1(S)$ bajo H_2 cuando $b > 1$.Figura 2.3.6: Imagen de $H_2H_1(V_0)$, $H_2H_1(V_1)$ y $H_2H_1(S)$ bajo H_3 cuando $b > 1$.

▷ H_4 : Por ultimo, esta función dobla la región $H_3H_2H_1(S)$ hacia la izquierda de manera que $H_4H_3H_2H_1(V_0) = U_0$ y $H_4H_3H_2H_1(V_1) = U_1$, esta descripción se puede ver de mejor manera en la Figura 2.3.7. Probemos que en efecto se tiene lo mencionado:

$$\begin{aligned}
 H_4H_3H_2H_1(V_0) &= \left\{ (x, y) \mid |x + y^2 - a| \leq |b|R, v_0^{(0)} \left(\frac{x + y^2 - a}{b} \right) \leq y \leq v_1^{(0)} \left(\frac{x + y^2 - a}{b} \right) \right\} \\
 &= \left\{ (x, y) \mid |x + y^2 - a| \leq |b|R, -\sqrt{R + x + y^2} \leq y \leq -\sqrt{-R + x + y^2} \right\} \\
 &= \left\{ (x, y) \mid |x + y^2 - a| \leq |b|R, |x| \leq R, y \leq 0 \right\} \\
 &= \left\{ (x, y) \mid -|b|R + a - x \leq y^2 \leq |b|R + a - x, |x| \leq R, y \leq 0 \right\} \\
 &= \left\{ (x, y) \mid -\sqrt{|b|R + a - x} \leq y \leq -\sqrt{-|b|R + a - x}, |x| \leq R \right\} \\
 &= U_0,
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
H_4 H_3 H_2 H_1 (V_1) &= \left\{ (x, y) \mid |x + y^2 - a| \leq |b| R, v_0^{(1)} \left(\frac{x + y^2 - a}{b} \right) \leq y \leq v_1^{(1)} \left(\frac{x + y^2 - a}{b} \right) \right\} \\
&= \left\{ (x, y) \mid |x + y^2 - a| \leq |b| R, \sqrt{-R + x + y^2} \leq y \leq \sqrt{R + x + y^2} \right\} \\
&= \left\{ (x, y) \mid |x + y^2 - a| \leq |b| R, |x| \leq R, y \geq 0 \right\} \\
&= \left\{ (x, y) \mid -|b| R + a - x \leq y^2 \leq |b| R + a - x, |x| \leq R, y \geq 0 \right\} \\
&= \left\{ (x, y) \mid \sqrt{-|b| R + a - x} \leq y \leq \sqrt{|b| R + a - x}, |x| \leq R \right\} \\
&= U_1,
\end{aligned}$$

y

$$H_4 H_3 H_2 H_1 (S) = \left\{ (x, y) \mid |x + y^2 - a| \leq |b| R, |y| \leq R \right\}.$$

Es importante aclarar que los términos $\sqrt{-|b| R + a - x}$ y $\sqrt{|b| R + a - x}$ que aparecen en la definición de las regiones anteriores no son complejos para $|x| \leq R$, para probarlo note que $-|b| R + a - R \leq -|b| R + a - x \leq |b| R + a - x$, entonces es suficiente mostrar que $0 < -|b| R + a - R$, lo cual se tiene por el Lema 2.3.1. Ahora, teniendo en cuenta que las fronteras de $H_3 H_2 H_1 (V_0)$ son:

$$\begin{aligned}
\partial_1^{(0)} &= \left\{ (x, y) \mid |x - a| \leq |b| R, y = -\sqrt{R + x} \right\}, \\
\partial_2^{(0)} &= \left\{ (x, y) \mid x = |b| R + a, -\sqrt{R + x} \leq y \leq \sqrt{-R + x} \right\}, \\
\partial_3^{(0)} &= \left\{ (x, y) \mid |x - a| \leq |b| R, y = -\sqrt{-R + x} \right\}, \text{ y} \\
\partial_4^{(0)} &= \left\{ (x, y) \mid x = -|b| R + a, -\sqrt{R + x} \leq y \leq \sqrt{-R + x} \right\}.
\end{aligned}$$

Es fácil ver que la imagen de estas fronteras bajo H_4 es :

$$\begin{aligned}
H_4 \left(\partial_1^{(0)} \right) &= \left\{ (x, y) \mid x = -R, -\sqrt{a + |b| R + R} \leq y \leq -\sqrt{a - |b| R + R} \right\}, \\
H_4 \left(\partial_2^{(0)} \right) &= \left\{ (x, y) \mid y = -\sqrt{|b| R + a - x}, |x| \leq R \right\}, \\
H_4 \left(\partial_3^{(0)} \right) &= \left\{ (x, y) \mid x = R, -\sqrt{a + |b| R - R} \leq y \leq -\sqrt{a - |b| R - R} \right\} \text{ y} \\
H_4 \left(\partial_4^{(0)} \right) &= \left\{ (x, y) \mid y = -\sqrt{-|b| R + a - x}, |x| \leq R \right\}.
\end{aligned}$$

Donde estas ultimas son las fronteras de $H_4 H_3 H_2 H_1 (V_0)$. Para $H_3 H_2 H_1 (V_1)$ las fronteras son:

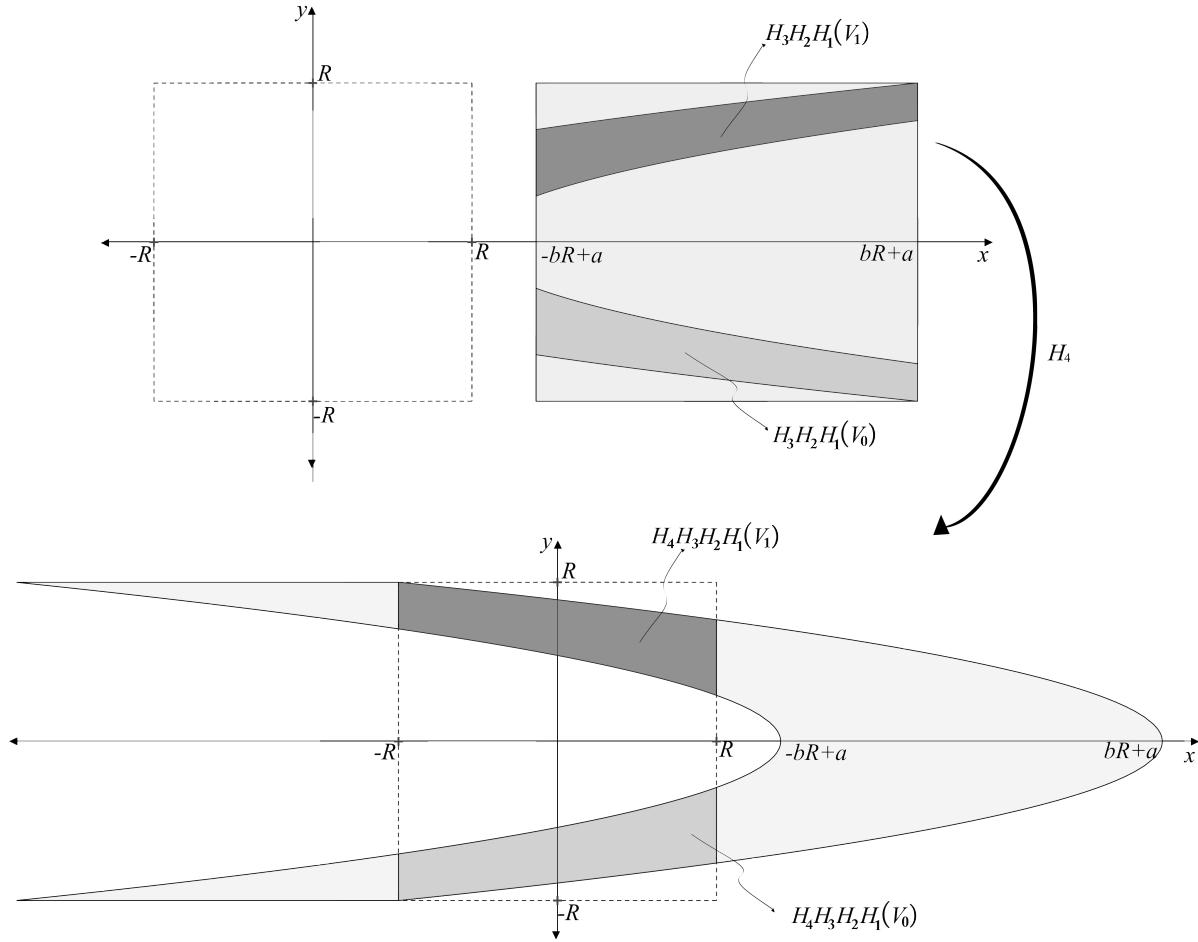
$$\begin{aligned}
\partial_1^{(1)} &= \left\{ (x, y) \mid |x - a| \leq |b| R, y = \sqrt{-R + x} \right\}, \\
\partial_2^{(1)} &= \left\{ (x, y) \mid x = |b| R + a, \sqrt{-R + x} \leq y \leq \sqrt{R + x} \right\}, \\
\partial_3^{(1)} &= \left\{ (x, y) \mid |x - a| \leq |b| R, y = \sqrt{R + x} \right\} \text{ y} \\
\partial_4^{(1)} &= \left\{ (x, y) \mid x = -|b| R + a, \sqrt{-R + x} \leq y \leq \sqrt{R + x} \right\}.
\end{aligned}$$

Es fácil ver que la imagen de estas fronteras bajo H_4 es :

$$\begin{aligned}
H_4 \left(\partial_1^{(1)} \right) &= \left\{ (x, y) \mid x = R, \sqrt{a - |b| R - R} \leq y \leq \sqrt{a + |b| R - R} \right\}, \\
H_4 \left(\partial_2^{(1)} \right) &= \left\{ (x, y) \mid y = \sqrt{|b| R + a - x}, |x| \leq R \right\}, \\
H_4 \left(\partial_3^{(1)} \right) &= \left\{ (x, y) \mid x = -R, \sqrt{a - |b| R + R} \leq y \leq \sqrt{a + |b| R + R} \right\} \text{ y} \\
H_4 \left(\partial_4^{(1)} \right) &= \left\{ (x, y) \mid y = \sqrt{-|b| R + a - x}, |x| \leq R \right\}.
\end{aligned}$$

Donde estas ultimas son las fronteras de $H_4 H_3 H_2 H_1 (V_1)$.

Todo esto prueba que $H_{a,b}$ satisface la condición 1 de la Definición 2.3.3.

Figura 2.3.7: Imagen de $H_3H_2H_1(V_0)$, $H_3H_2H_1(V_1)$ y $H_3H_2H_1(S)$ bajo H_4 cuando $b > 1$.

Ahora, veamos que $H_{a,b}$ satisface la condición 2, esto es, mostrar que $H_{a,b}(U_j) \cap U_i$ es una banda horizontal para cada $i, j = 0, 1$ y adicionalmente

$$\text{diam}(H_{a,b}(U_j) \cap U_i) \leq \mu(\text{diam}(U_i)) \quad \text{para algún } 0 < \mu < 1, \text{ para cada } i, j = 0, 1.$$

Además de mostrar lo mismo para las bandas verticales cambiando $H_{a,b}$ por $H_{a,b}^{-1}$. En primer lugar, veamos los siguientes lemas que serán importantes.

Lema 2.3.2. Para $j = 0, 1$ se tiene $v_0^{(j)}\left(\frac{x+y^2-a}{b}\right) \leq y \leq v_1^{(j)}\left(\frac{x+y^2-a}{b}\right)$ si y solo si $|x| \leq R$ y $(-1)^j y \leq 0$.

Demuestra. Para $j = 0$ se sigue

$$\begin{aligned} v_0^{(0)}\left(\frac{x+y^2-a}{b}\right) \leq y \leq v_1^{(1)}\left(\frac{x+y^2-a}{b}\right) &\Leftrightarrow -\sqrt{R+x-y^2} \leq y \leq -\sqrt{-R+x-y^2} \\ &\Leftrightarrow -R+x-y^2 \leq y^2 \leq R+x-y^2 \quad \text{y} \quad y \leq 0 \\ &\Leftrightarrow |x| \leq R \quad \text{y} \quad y \leq 0. \end{aligned}$$

De manera similar, para $j = 1$ se infiere

$$\begin{aligned} v_0^{(1)}\left(\frac{x+y^2-a}{b}\right) \leq y \leq v_1^{(1)}\left(\frac{x+y^2-a}{b}\right) &\Leftrightarrow \sqrt{-R+x-y^2} \leq y \leq \sqrt{R+x-y^2} \\ &\Leftrightarrow -R+x-y^2 \leq y^2 \leq R+x-y^2 \quad \text{y} \quad y \geq 0 \\ &\Leftrightarrow |x| \leq R \quad \text{y} \quad y \geq 0. \end{aligned}$$

□

Lema 2.3.3. Considerando $\bar{u}_{i,j}(y) = bu_j^{(i)}(y) - y^2 + a$ donde $i = 0, 1$. Existe un único $c_{i,j} \in (-R, R)$ tal que $\bar{u}_{i,j}$ es estrictamente creciente en $[-R, c_{i,j}]$ y estrictamente decreciente en $[c_{i,j}, R]$. Además, $\bar{u}_{i,j}(c_{i,j}) > R$ y $\bar{u}_{i,j}(\pm R) < -R$.

Demuestra. Es claro que $\bar{u}'_{i,j}(y) = \frac{-b}{2u_j^{(i)}(y)} - 2y$ y que esta expresión es cero en $[-R, R]$ en un solo punto que denotaremos por $c_{i,j}$ que no es R ni $-R$. Por otro lado, sabemos que $u_j^{(0)}$ son monótonas crecientes en $[-R, R]$, también se tiene $u_j^{(1)}$ monótonas decrecientes en $[-R, R]$ para $j = 0, 1$, por otro lado, sabemos que $-y^2 + a$ es estrictamente creciente en $[-R, 0]$ y estrictamente decreciente en $[0, R]$, de estas certezas se tienen casos en los cuales se infieren inmediatamente las conclusiones deseadas y la ubicación de $c_{i,j}$, estos casos son:

▷ Sí $b > 0$ entonces $bu_j^{(0)}$ es monótona creciente en $[-R, R]$, por lo tanto, $\bar{u}_{0,j}(y) = bu_j^{(0)}(y) - y^2 + a$ es estrictamente creciente en $[-R, 0]$. Por lo tanto $\bar{u}_{0,j}$ es estrictamente creciente en $[-R, c_{0,j}]$ y estrictamente decreciente en $[c_{0,j}, R]$.

También se tiene $bu_j^{(1)}$ es monótona decreciente en $[-R, R]$, por lo tanto, $\bar{u}_{1,j}(y) = bu_j^{(1)}(y) - y^2 + a$ es estrictamente decreciente en $[0, R]$. Por lo tanto $\bar{u}_{1,j}$ es estrictamente creciente en $[-R, c_{1,j}]$ y estrictamente decreciente en $[c_{1,j}, R]$.

▷ Sí $b < 0$ entonces $bu_j^{(0)}$ es monótona decreciente en $[-R, R]$, por lo tanto, $\bar{u}_{0,j}(y) = bu_j^{(0)}(y) - y^2 + a$ es estrictamente creciente en $[0, R]$. Por lo tanto $\bar{u}_{0,j}$ es estrictamente creciente en $[-R, c_{0,j}]$ y estrictamente decreciente en $[c_{0,j}, R]$.

También se tiene $bu_j^{(1)}$ es monótona creciente en $[-R, R]$, por lo tanto, $\bar{u}_{1,j}(y) = bu_j^{(1)}(y) - y^2 + a$ es estrictamente creciente en $[-R, 0]$. Por lo tanto $\bar{u}_{1,j}$ es estrictamente creciente en $[-R, c_{1,j}]$ y estrictamente decreciente en $[c_{1,j}, R]$.

Lo anterior también muestra que $c_{i,j}$ es un máximo absoluto en $[-R, R]$ de $\bar{u}_{i,j}$. Para probar la otra parte, es claro que $-R < u_j^{(i)}(y) < R$, para $y \in (-R, R)$ de donde se sigue $-|b|R < bu_j^{(i)}(y) < |b|R$ lo que implica $-|b|R - y^2 + a < bu_j^{(i)}(y) - y^2 + a$, en particular $-|b|R + a < bu_j^{(i)}(0) + a$, entonces dado que $c_{i,j}$ es un máximo absoluto en $[-R, R]$ y por el Lema 2.3.1 se concluye $R < \bar{u}_{i,j}(c_{i,j})$.

Por ultimo, no es difícil ver que $-R \leq u_j^{(i)}(\pm R) \leq R$, de donde se infiere $-|b|R \leq bu_j^{(i)}(\pm R) \leq |b|R$, y en consecuencia $\bar{u}_{i,j}(\pm R) = bu_j^{(i)}(\pm R) - R^2 + a \leq |b|R - R^2 + a = -R$, la ultima igualdad se tiene por el Lema 1.3.1.

□

Teniendo en cuenta los dos últimos lemas, por la condición 1 se sigue que $H_{a,b}(U_j) \cap U_i = H_{a,b}(U_j \cap V_i)$, donde

$$H_{a,b}(U_j \cap V_i) = \left\{ (x, y) \left| v_0^{(j)} \left(\frac{x+y^2-a}{b} \right) \leq y \leq v_1^{(j)} \left(\frac{x+y^2-a}{b} \right), u_0^{(j)}(y) \leq \frac{x+y^2-a}{b} \leq u_1^{(j)}(y) \right. \right\}.$$

Dependiendo del valor de b y teniendo en cuenta el Lema 2.3.2 tenemos la siguiente caracterización de $H_{a,b}(U_j \cap V_i)$:

$$H_{a,b}(U_j \cap V_i) = \left\{ (x, y) \left| |x| \leq R, , (-1)^j y \leq 0 \bar{u}_{i,0}(y) \leq x \leq \bar{u}_{i,1}(y) \right. \right\} \text{ si } b > 0,$$

$$H_{a,b}(U_j \cap V_i) = \left\{ (x, y) \left| |x| \leq R, , (-1)^j y \leq 0 \bar{u}_{i,1}(y) \leq x \leq \bar{u}_{i,0}(y) \right. \right\} \text{ si } b < 0.$$

Pero $\bar{u}_{i,j}(y)$ es invertible para $(-1)^k y \leq 0$, dicha inversa la denotamos por $\bar{u}_{i,j(k)}^{-1}$, el indice k es importante ya que indica la región en la que esta definida la inversa; por el Lema 2.3.3 dicha inversa $\bar{u}_{i,j(k)}^{-1}$ puede

considerarse definida en $[-R, R]$, por el mismo lema podemos garantizar que $\bar{u}_{i,j(k)}^{-1}$ es monótona en $[-R, R]$. Por lo tanto, se tiene

$$H_{a,b}(U_j \cap V_i) = \left\{ (x, y) \mid |x| \leq R, \bar{u}_{i,0(j)}^{-1}(x) \leq y \leq \bar{u}_{i,1(j)}^{-1}(x) \right\} \text{ si } b > 0,$$

$$H_{a,b}(U_j \cap V_i) = \left\{ (x, y) \mid |x| \leq R, \bar{u}_{i,1(j)}^{-1}(x) \leq y \leq \bar{u}_{i,0(j)}^{-1}(x) \right\} \text{ si } b < 0.$$

Así pues, $H_{a,b}(U_j) \cap U_i$ es una banda horizontal; por medio una análisis análogo se concluye lo mismo para bandas verticales, lo que prueba la condición 2.

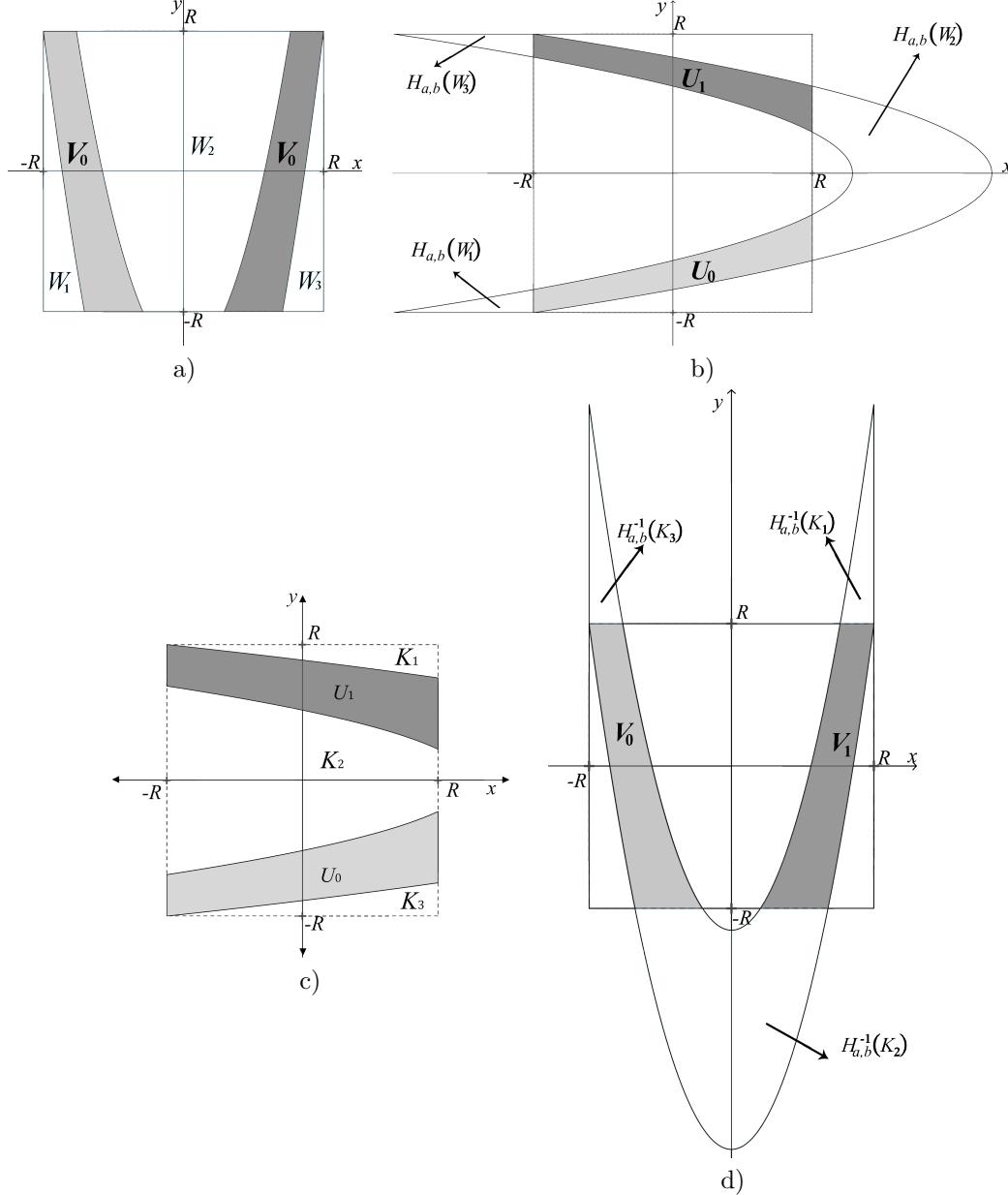


Figura 2.3.8: a) Partición 1 de la región S . b) Imagen de la partición 1. c) Partición 2 de la región S . d) Imagen de la partición 2.

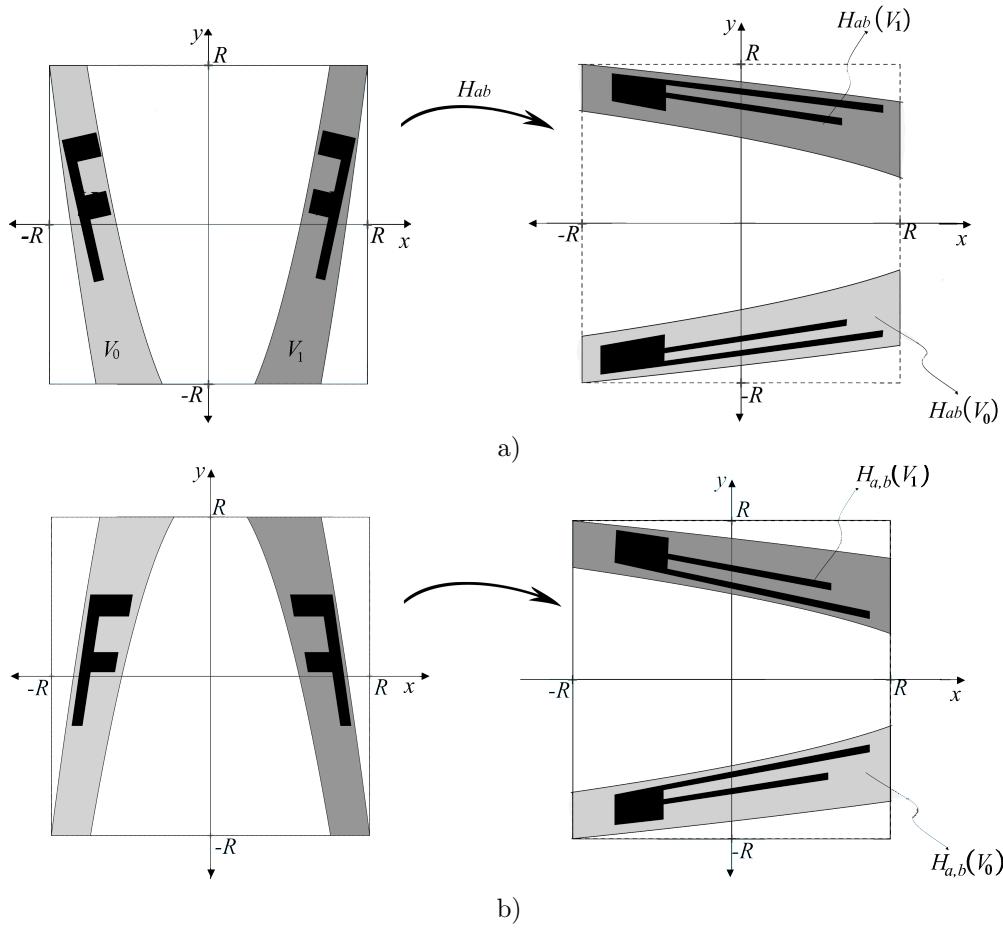
2.3.1.2. Caracterización de la Herradura en la aplicación de Hénon

En esta parte estudiaremos el comportamiento de las órbitas de puntos en S , la idea es describir el comportamiento de estas órbitas, evidenciar las regiones por las que pasan y para qué puntos las órbitas permanecen en S .

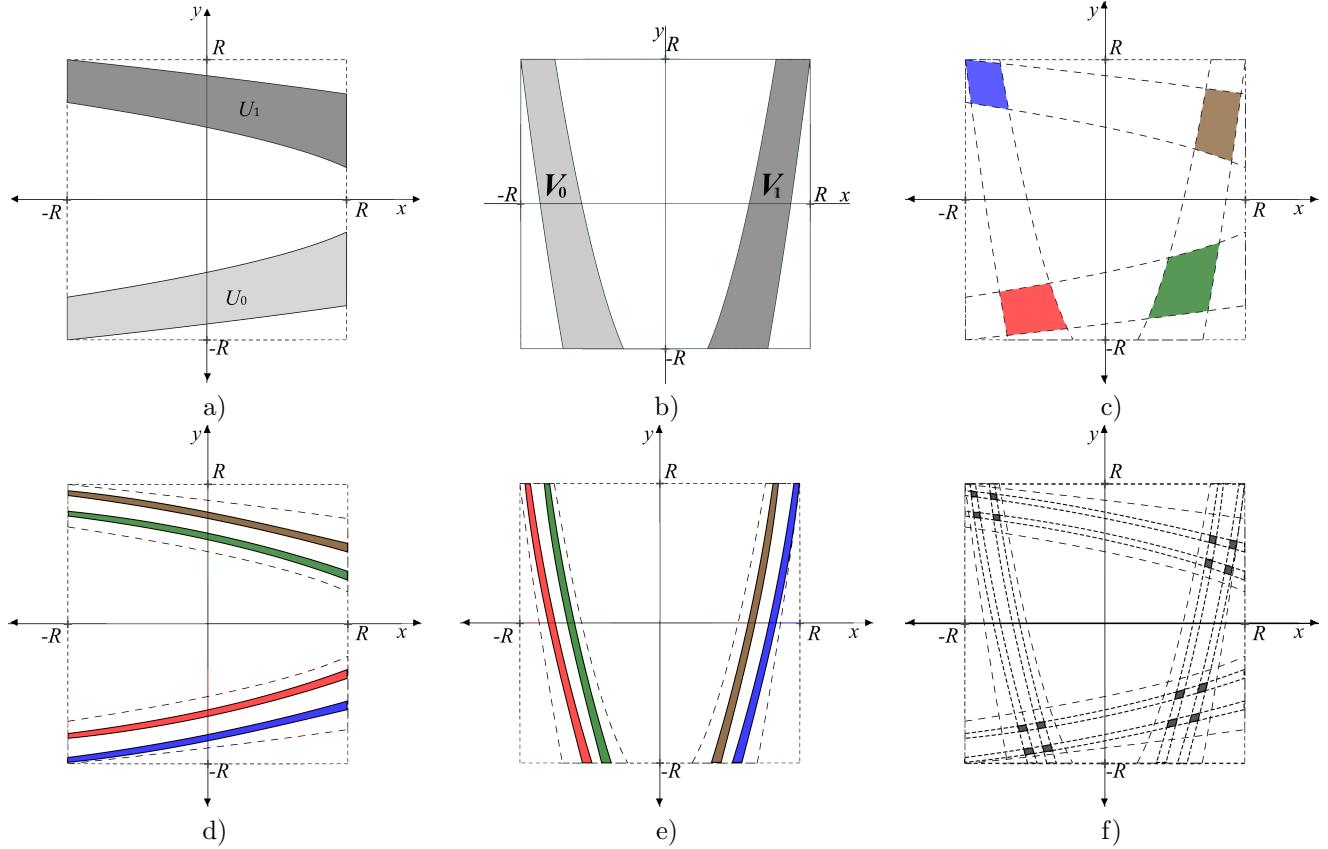
Consideremos la partición de la región S dada en la Figura 2.3.8 a); de acuerdo a lo visto en la Subsubsección 2.3.1.1 y teniendo en cuenta la partición del espacio dada en la Subsección 1.3.1 expresada en la Figura 1.3.5 podemos afirmar que $H_{a,b}(W_1) \cup H_{a,b}(W_3) \subseteq N_1$ y $H_{a,b}(W_2) \subseteq N_2^\bullet$. Por lo tanto, de la Proposición 1.3.7 1) y la Proposición 1.3.10 1) se infiere $H_{a,b}^n(W_1) \cup H_{a,b}^n(W_3) \cup H_{a,b}^n(W_2) \subseteq N_1$ para cada $n > 1$, esto quiere decir que la mayor parte de la órbita de puntos en $W_1 \cup W_3 \cup W_2$ están contenidas en N_1 excepto por el punto inicial o por la primera iteración, de modo que por la Proposición 1.3.9 y la Proposición 1.3.7 3) podemos afirmar acerca de la dinámica de estos puntos que las iteraciones se van alejando de S y que no existen puntos en el que partes de la órbita se acumulen cerca de él ya que en este caso no existen ω -límites. De manera análoga, considerando la partición de la región S dada en la Figura 2.3.8 c) y de acuerdo a la partición del espacio dada en la Subsección 1.3.1 expresada en la Figura 1.3.4 podemos afirmar que $H_{a,b}^{-1}(K_1) \cup H_{a,b}^{-1}(K_3) \subseteq N_4$ y $H_{a,b}^{-1}(K_2) \subseteq N_3$. Por lo tanto, de la Proposición 1.3.7 4) y la Proposición 1.3.10 2) se infiere $H_{a,b}^n(K_1) \cup H_{a,b}^n(K_3) \cup H_{a,b}^n(K_2) \subseteq N_1$ para cada $n < 1$, esto quiere decir que la mayor parte de la órbita negativa de puntos en $K_1 \cup K_3 \cup K_2$ están contenidas en N_1 excepto por el punto inicial o por la primera iteración, de modo que por la Proposición 1.3.9 y la Proposición 1.3.7 6) podemos afirmar acerca de la dinámica de estos puntos que las iteraciones $H_{a,b}^{-1}$ se van alejando de S y que no existen puntos en el que partes de la órbita se acumulen cerca de él ya que en este caso no existen α -límites.

La dinámica de las regiones V_0 y V_1 requiere un poco más de atención, ya que existen puntos que permanecen en S y otros que salen bajo iteraciones de $H_{a,b}$ para los cuales aplica lo anterior, en esta Subsubsección describiremos parte del comportamiento en esta región.

El proceso descrito en la Subsubsección 2.3.1.1 permitió inferir $H_{a,b}(V_0) = U_0$ y $H_{a,b}(V_1) = U_1$, pero si se centra la atención en las acciones que ejecuta cada función H_i con $i = 1, 2, 3, 4$ veremos que $H_{ab}|_{V_0 \cup V_1}$ actúa contrayendo uniformemente curvas monótonas continuas verticales y expandiendo curvas monótonas continuas horizontales, la Figura 2.3.9 da una idea de esta situación. No obstante, es importante tener en cuenta que $H_{ab}|_{V_0 \cup V_1}$ en general no envía curvas monótonas continuas verticales en curvas monótonas continuas horizontales, un caso en donde si se tiene dicha situación es cuando la curva vertical, que notaremos por v , tiene un solo tipo de concavidad (hacia arriba o hacia abajo) en $[-R, R]$, esto es, no existen $y, z \in [-R, R]$ tales que $v''(y) < 0$ y $v''(y) > 0$.

Figura 2.3.9: a) $H_{a,b}(V_0 \cup V_1)$ cuando $b > 0$. b) $H_{a,b}(V_0 \cup V_1)$ cuando $b < 0$

De acuerdo a lo visto hasta ahora es claro que $U_0 \cup U_1 = H_{a,b}(V_0 \cup V_1) = S \cap H_{a,b}(S)$ y $V_0 \cup V_1 = H_{a,b}^{-1}(S) \cap S$, entonces $H_{a,b}^2(V_0 \cup V_1) = H_{a,b}(S \cap H_{a,b}(S))$, pero no todos los puntos de $S \cap H_{a,b}(S)$ bajo la iteración de $H_{a,b}$ y $H_{a,b}^{-1}$ permanecen en S , para los que no permanecen en S ya conocemos su dinámica que fue descrita al inicio de esta Subsección, además ya están determinados, estos son los puntos que están en la intersección de $S \cap H_{a,b}(S)$ y $W_1 \cup W_2 \cup W_3$ para el caso de $H_{a,b}$, los que están en la intersección de $S \cap H_{a,b}(S)$ y $K_1 \cup K_2 \cup K_3$ para el caso de $H_{a,b}^{-1}$, esto permite inferir que los puntos en $H_{a,b}^{-1}(S) \cap S \cap H_{a,b}(S)$ permanecen momentáneamente en S , por lo menos en la primera iteración, siendo este conjunto la intersección de dos bandas verticales con dos bandas horizontales (Ver Figura 2.3.10). El mismo análisis tiene lugar para los conjuntos $S \cap H_{a,b}(S) \cap H_{a,b}^2(S)$ y $H_{a,b}^{-2} \cap H_{a,b}^{-1}(S) \cap S$, el primero es la unión de cuatro bandas horizontales disyuntas y el segundo de cuatro bandas verticales disyuntas, los puntos en la intersección de estos dos conjuntos permanecen en S por lo menos en las primeras dos iteraciones de $H_{a,b}$ o $H_{a,b}^{-1}$.



Dinámica de los puntos en S bajo $H_{a,b}$. a) $S \cap H_{a,b}(S)$.

Figura 2.3.10: b) $H_{a,b}^{-1}(S) \cap S$. c) $H_{a,b}^{-1}(S) \cap S \cap H_{a,b}(S)$. d) $S \cap H_{a,b}(S) \cap H_{a,b}^2(S)$. e) $H_{a,b}^{-2}(S) \cap H_{a,b}^{-1}(S) \cap S$. f) $H_{a,b}^{-2}(S) \cap H_{a,b}^{-1}(S) \cap S \cap H_{a,b}(S) \cap H_{a,b}^2(S)$.

La intención es generalizar este comportamiento, de lo visto podemos asegurar que la órbita de $x \in S$ permanece en S si y solo si $x \in \bigcap_{n \in \mathbb{Z}} H_{a,b}^n(S)$, por lo tanto, la atención se centra en el conjunto $\bigcap_{n \in \mathbb{Z}} H_{a,b}^n(S)$ que notaremos con la letra Λ . Para efectos de simplicidad definiremos inductivamente Λ , primero definimos

$$S^{(n+1)} = H_{a,b} \left(S^{(n)} \right) \cap S, \quad (2.3.1)$$

$n \in \mathbb{Z}^+$, donde $S^{(1)} = S \cap H_{a,b}(S) = U_0 \cup U_1$. De acuerdo a la construcción se puede inferir que $S^{(1)} \supset S^{(2)} \supset \dots \supset S^{(n)} \supset \dots$ (ver Figura 2.3.10), además $S^{(n)}$ consta de 2^n bandas horizontales. De manera análoga, considerando $S^{(0)} = H_{a,b}^{-1}(S) \cap S = V_0 \cup V_1 = H_{a,b}^{-1}(S^{(1)})$ definimos

$$S^{(-n)} = H_{a,b}^{-1} \left(S^{(-(n-1))} \cap S^{(1)} \right) = H_{a,b}^{-1} \left(S^{(-(n-1))} \cap H_{a,b}(S) \right), \quad (2.3.2)$$

para $n \in \mathbb{Z}^+$. Aquí también se infiere $S^{(0)} \supset S^{(-1)} \supset S^{(-2)} \supset \dots \supset S^{(-n)} \supset \dots$, además $S^{(-n)}$ consiste de la unión de 2^{n+1} bandas verticales, note que $H_{a,b}(S^{(0)}) = S^{(1)}$. En este sentido, se tiene

$$\Lambda = \bigcap_{n \in \mathbb{Z}} S^{(n)}.$$

Respecto a este conjunto tenemos la siguiente proposición.

Proposición 2.3.1. *El conjunto Λ es invariante bajo $H_{a,b}$ y $H_{a,b}^{-1}$.*

Demostración. Sea $\mathbf{x} \in \Lambda$, entonces $\mathbf{x} \in S^{(n)}$ para todo $n \in \mathbb{Z}$. Si $\mathbf{x} \in S^{(-n)}$, $n \in \mathbb{N}$, entonces 2.3.2 implica que $H_{a,b}(\mathbf{x}) \in S^{(-(n-1))} \cap H_{a,b}(S) \subseteq S^{(-(n-1))}$, de modo que $H_{a,b}(\mathbf{x}) \in S^{(-(n-1))}$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Si $\mathbf{x} \in S^{(n)}$, $n \in \mathbb{Z}^+$, observe que:

- i) $H_{a,b}(\mathbf{x}) \in H_{a,b}(S^{(n)})$; y
- ii) $H_{a,b}(\mathbf{x}) \in H_{a,b}(S^{(0)}) \subseteq S$, ya que $\mathbf{x} \in S^{(0)}$.

Por lo tanto, de i) y ii) se sigue $H_{a,b}(\mathbf{x}) \in H_{a,b}^n(S^{(n)}) \cap S = S^{(n+1)}$ para cada $n \in \mathbb{Z}^+$. En consecuencia, si $\mathbf{x} \in S^{(n)}$, para todo $n \in \mathbb{Z}$, entonces $H_{a,b}(\mathbf{x}) \in S^{(n+1)}$ para todo $n \in \mathbb{Z}$. Así pues, $H_{a,b}(\mathbf{x}) \in \Lambda$.

Con un argumento similar, revirtiendo los roles de 2.3.1 y 2.3.2, se muestra que Λ es invariante bajo $H_{a,b}^{-1}$. \square

Consideremos $\Lambda^{(N)} = \bigcap_{n=-N-1}^N S^{(n)}$, dado que $\{S^{(n)}\}_{n \in \mathbb{Z}^+}$ y $\{S^{(-n)}\}_{n \in \mathbb{N}}$ son colecciones de bandas anidadas, entonces $\Lambda^{(N)} = S^{(-(N-1))} \cap S^{(N)}$ y además es la unión disyunta de 2^N cuadrados deformes o parches (ver Figura 2.3.10 c) o f)). Claramente, como $N \rightarrow \infty$ el tamaño de estos cuadrados deformes tiende a cero, la cantidad de estos cuadrados deformados se convierte en infinito y $\Lambda^{(N)} \rightarrow \Lambda$. La idea es codificar los puntos de Λ , dicha codificación se sigue del hecho de que cada cuadrado deformado de $\Lambda^{(N)}$ puede ser representado de manera única por una *sucesión de símbolos* finita $\sigma^{(N)} = \{\sigma_{-(N-1)} \dots \sigma_{-1}\sigma_0 \cdot \sigma_1\sigma_2 \dots \sigma_N\}$, $\sigma_n \in \{0, 1\}$, de longitud $2N$.

Veamos dicha representación, cualquier banda en $S^{(n)}$ le puede ser asignado 0 o 1 de la siguiente forma. Considere las bandas verticales V_0 y V_1 . Observe que

$$S^{(1)} = H_{a,b}(V_0) \cup H_{a,b}(V_1) = U_0 \cup U_1$$

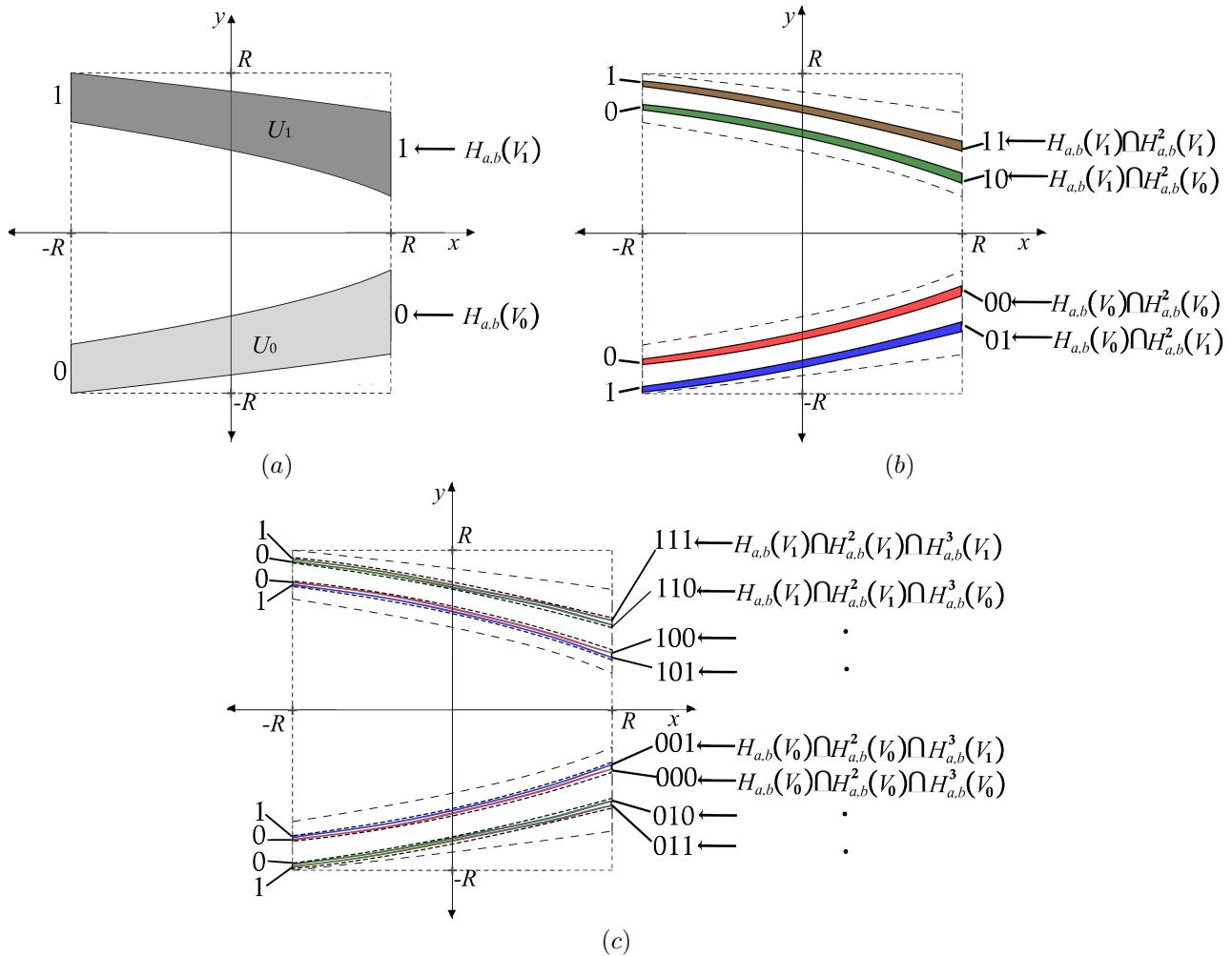
donde $U_0 \cap U_1 = \emptyset$ (ver Subsubsección 2.3.1.1). Es más, también se infiere que

$$S^{(2)} = H_{a,b}^2(V_0) \cup H_{a,b}^2(V_1)$$

con $H_{a,b}^2(V_0) \cap H_{a,b}^2(V_1) = \emptyset$. En general, para $n \in \mathbb{Z}^+$,

$$S^{(n)} \subseteq H_{a,b}^n(V_0) \cup H_{a,b}^n(V_1)$$

y $H_{a,b}^n(V_0) \cap H_{a,b}^n(V_1)$ es siempre vacío ya que $V_0 \cap V_1 = \emptyset$ y $H_{a,b}$ es un difeomorfismo. Por lo tanto, dada una banda horizontal de $S^{(n)}$ esta pertenecerá a $H_{a,b}^n(V_0)$ o a $H_{a,b}^n(V_1)$ no a ambas. El primer paso para la codificación es asignar el símbolo 0 a una banda de $S^{(n)}$ si esta es subconjunto $H_{a,b}^n(V_0)$ y el símbolo 1 si esta es un subconjunto de $H_{a,b}^n(V_1)$. Es claro que esta asignación no da una única caracterización de cada banda horizontal en $S^{(n)}$ para $n \geq 2$, pero es un primer paso en ese sentido, veamos la idea para $S^{(2)}$, esta consiste de cuatro bandas, dos de estas tiene símbolo 0, pero estas dos bandas se pueden diferenciar ya que una esta contenida en $H_{a,b}(V_0)$, es decir, es la banda 0 de $S^{(1)}$, y la otra esta en $H_{a,b}(V_1)$, es decir, es la banda 1 de $S^{(1)}$, esto significa que una banda en $S^{(2)}$ puede ser únicamente etiquetada por dos símbolos, el primer símbolo indica la banda en $S^{(1)}$ y el segundo símbolo indica únicamente la banda en $S^{(2)}$. De manera análoga las bandas en $S^{(3)}$ pueden ser únicamente etiquetadas comenzando por la codificación asignada en $S^{(2)}$ y agregando a la codificación el símbolo que indica la ubicación en $S^{(3)}$ (ver Figura 2.3.11). En general, una banda en $S^{(n)}$ para $n \in \mathbb{Z}^+$ es codificada por una única sucesión de símbolos $\{\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_{n-1}, \sigma_n\}$, $\sigma_i \in \{0, 1\}$, si esta es subconjunto de $H_{a,b}^i(V_{\sigma_i})$ para cada $i = 1, 2, \dots, n$. La idea es similar para el caso de las bandas en S^{-n} con $n \in \mathbb{N}$, en general, para este caso, una banda en $S^{(n)}$ para $n \in \mathbb{N}$ es codificada por una única sucesión de símbolos $\{\sigma_{-(n-1)}, \dots, \sigma_{-1}, \sigma_0\}$, $\sigma_{-i} \in \{0, 1\}$, si esta es subconjunto de $H_{a,b}^i(V_{\sigma_{-i}})$ para cada $i = 0, 1, 2, \dots, n-1$. (ver Figura 2.3.12)

Figura 2.3.11: Codificación de las bandas horizontales en $S^{(n)}$; (a) $n = 1$; (b) $n = 2$; (c) $n = 3$.

Teniendo en cuenta la asignación descrita, es posible asignar una codificación a cada cuadro deformé que conforma $\Lambda^{(N)}$, ya que cada cuadro es la intersección de una de las bandas verticales en $S^{-(N-1)}$ con una de las bandas horizontales de $S^{(N)}$, entonces la banda vertical en $S^{-(N-1)}$ tiene una codificación, supongamos que es $\{\sigma_{-(N-1)}, \dots, \sigma_{-1}, \sigma_0\}$, y la banda horizontal en $S^{(N)}$ tendrá una codificación de la forma $\{\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_{N-1}, \sigma_N\}$, por lo tanto, la sucesión de símbolos correspondiente al cuadro deformé originado por la intersección de estas dos bandas es $\sigma^{(N)} = \{\sigma_{-(N-1)}, \dots, \sigma_{-1}, \sigma_0 \cdot \sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_{N-1}, \sigma_N\}$, por notación y en vista de que no genera confusión podemos suprimir el paréntesis y las comas en la expresión de $\sigma^{(N)}$, el punto “.” no lo omitimos ya que diferencia la codificación de las bandas que se interceptaron; en este sentido se tiene $\sigma^{(N)} = \sigma_{-(N-1)} \dots \sigma_{-1} \sigma_0 \cdot \sigma_1 \sigma_2 \dots \sigma_{N-1} \sigma_N$. Dado que $\Lambda^{(N)} \rightarrow \Lambda$ como $n \rightarrow \infty$ entonces cada punto en Λ se le asigna una única sucesión de símbolos bi-infinita $\sigma = \{\sigma_n\}_{n=-\infty}^{\infty} = \{\dots \sigma_{-2} \sigma_{-1} \sigma_0 \cdot \sigma_1 \sigma_2 \dots\}$, de igual manera podemos omitir el paréntesis y las comas pero el punto “.” no. Por lo tanto, hemos encontrado una asignación h tal que

$$h(x, y) = \dots \sigma_{-2} \sigma_{-1} \sigma_0 \cdot \sigma_1 \sigma_2 \dots$$

donde $h : \Lambda \rightarrow \{0, 1\}^{\mathbb{Z}}$; note que esta relación es una biyección, por lo mencionado antes sabemos que es inyectiva ya que cada punto en Λ tiene una codificación, para ver que es sobreinyectiva considere σ una sucesión de símbolos dada por $\sigma = \{\dots \sigma_{-2} \sigma_{-1} \sigma_0 \cdot \sigma_1 \sigma_2 \dots\}$, en primer lugar vemos que de acuerdo a la construcción se sigue que cualquier cuadro deformé representado por la sucesión de símbolos $\sigma^{(N)} =$

$\{\sigma_{-(n-1)}, \dots, \sigma_{-1}, \sigma_0 \cdot \sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_{N-1}, \sigma_N\}$ es dado por

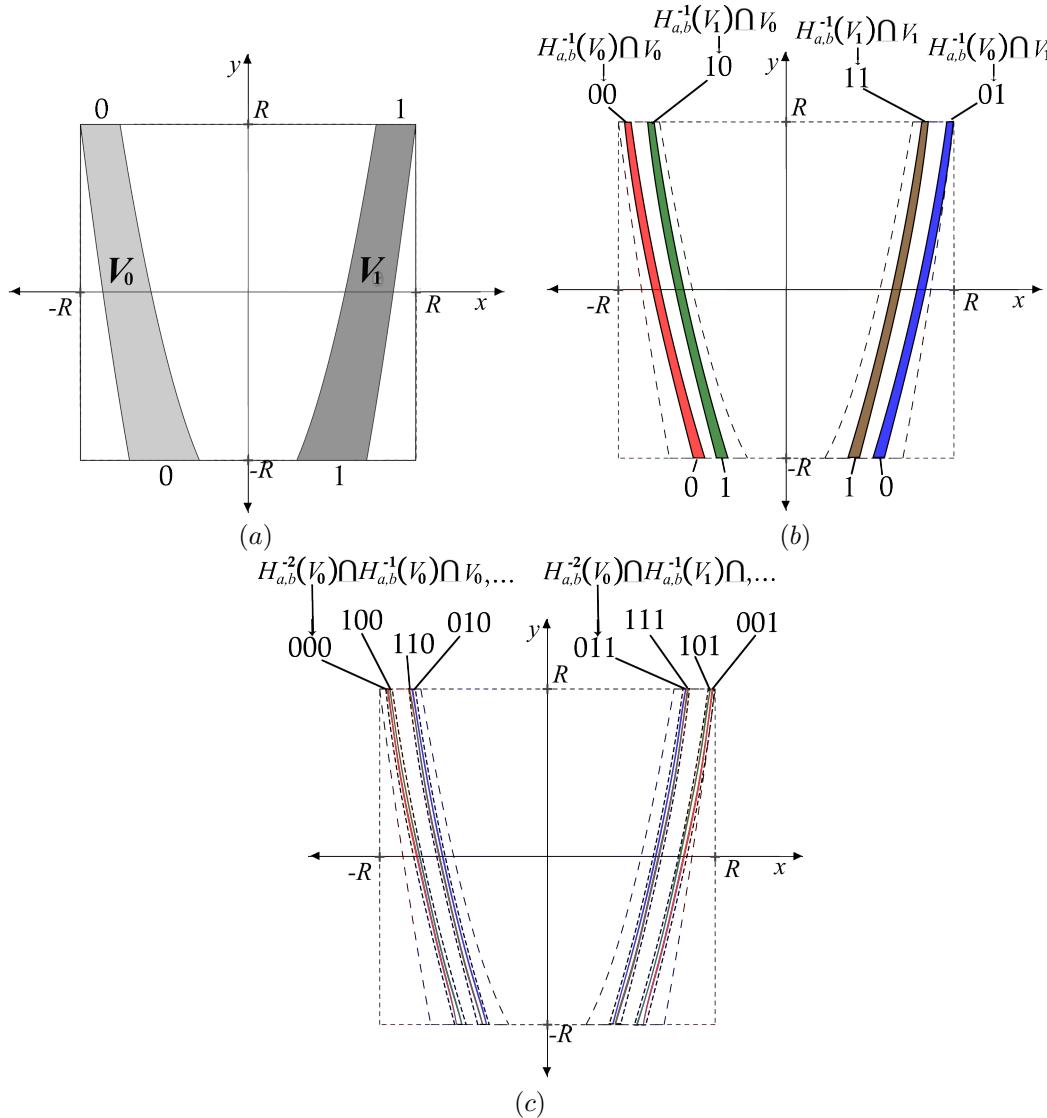
$$\bigcap_{n=-(N-1)}^N H_{a,b}^n(V_{\sigma_n}). \quad (2.3.3)$$

Asumiendo que h^{-1} es continua, lo que probaremos en la Subsubsección 2.3.1.4, se garantiza que $H_{a,b}^n(V_{\sigma_n})$ es cerrado, de modo que 2.3.3 es una intersección de subconjuntos cerrados anidados no vacíos de un conjunto compacto que es S , por lo tanto, cuando $N \rightarrow \infty$ se tiene que 2.3.3 es no vacía, además es un punto. Así pues, considerando

$$\mathbf{x} = \bigcap_{n \in \mathbb{Z}} H_{a,b}^n(V_{\sigma_n})$$

se sigue que $h(\mathbf{x}) = \dots \sigma_{-2}\sigma_{-1}\sigma_0 \cdot \sigma_1\sigma_2 \dots = \sigma$, por lo tanto, h es sobreyectiva.

Es de esperar que h sea una conjugación topológica de $H_{a,b}|_\Lambda$ con alguna aplicación en el espacio $\{0,1\}^\mathbb{Z}$ dotada de alguna topología, esto permitirá estudiar la dinámica $H_{a,b}|_\Lambda$ a partir del estudio de dicha aplicación, en la siguiente Subsubsección presentamos dicha aplicación y su dinámica.

Figura 2.3.12: Codificación de las bandas horizontales en $S^{(n)}$; (a) $n = 0$; (b) $n = -1$; (c) $n = -2$.

2.3.1.3. Dinámica de las sucesiones de símbolos

En las anteriores secciones se evidenció la relación que existe entre las aplicaciones tipo hendidura, en especial la aplicación de Hénon, con el conjunto X de todas las bi-infinitas sucesiones de símbolos binarios $\{0, 1\}$, es decir, $X = \{\sigma | \sigma : \mathbb{Z} \rightarrow \{0, 1\}\}$. Los elementos σ de X son llamados *sucesiones de símbolos*, para especificar y abreviar la notación especificamos $\sigma(n) = \sigma_n$. También escribimos $\sigma = \{\sigma_n\}_{n=-\infty}^{\infty} = \{\dots \sigma_{-2}\sigma_{-1}\sigma_0 \cdot \sigma_1\sigma_2 \dots\}$, es importante tener en cuenta el punto \cdot en la notación anterior, a este punto lo llamamos *punto binario*. El objetivo en esta parte del trabajo es estudiar la dinámica de la aplicación $\Psi : X \rightarrow X$ definida por

$$(\Psi(\sigma))_n = \sigma_{n-1}, \quad n \in \mathbb{Z}.$$

Esta aplicación es conocida como un *desplazamiento lateral izquierdo* o *left-shift* en X ya que esta aplicación desplaza el punto binario en la sucesión de símbolos un símbolo a la izquierda.

El conjunto X se puede dotar de una métrica d dada por

$$d(\alpha, \beta) = \sum_{i \in \mathbb{Z}} \frac{|\alpha_i - \beta_i|}{2^{|i|}}.$$

Respecto a esta métrica tenemos el siguiente resultado.

Proposición 2.3.2. *El espacio métrico (X, d) es compacto.*

Demuestra. En primer lugar, observe que se puede considerar $X = \{0, 1\}^{\mathbb{Z}}$, además $\{0, 1\}$ es un espacio topológico con la topología discreta, es sabido que este último espacio es metrizable con una métrica \bar{d} dada por $\bar{d}(x, y) = 1$ para cualquier $x \neq y$, y $\bar{d}(x, y) = 0$ para $x = y$; en el caso de $\{0, 1\}$ la métrica \bar{d} es dada por $\bar{d}(x, y) = |x - y|$. Por lo tanto, podemos considerar X con la topología producto (ver Apéndice A, Subsección A.2.0.2), es decir $X = \prod_{i \in \mathbb{Z}} X_i$ donde $X_i = \{0, 1\}$ para cada $i \in \mathbb{Z}$, entonces, el objetivo inicial es probar que el espacio topológico conformado por X y la topología producto es igual al espacio generado por X y la métrica d , para tal fin note que una base para la topología generada por d son las bolas abiertas $B_{\varepsilon}^d(x)$ de radio ε y centro en $x \in X$, de igual manera una base de la topología producto es conformada por abiertos básicos U los cuales son de la forma $U = \prod_{n \in \mathbb{Z}} U_n$ donde $U_n = \{0, 1\}$ excepto para finitos n_1, n_2, \dots, n_k donde

$$U_{n_i} = B_{\varepsilon_i}^{\bar{d}}(x_{n_i}) \subseteq \{0, 1\}. \quad (2.3.4)$$

Observe que x_{n_i} solo puede ser 0 o 1 y además $B_{\varepsilon_i}^{\bar{d}}(x_{n_i})$ solo puede ser $\{0\}, \{1\}$ o $\{0, 1\}$, la idea es probar que dado $B_{\varepsilon}^d(x)$ existe U abierto básico en la topología producto tal que $U \subseteq B_{\varepsilon}^d(x)$, y viceversa, es decir, dado U un abierto básico en la topología y $x \in U$ existe un abierto $B_{\varepsilon}^d(x)$ bola abierta en la topología generada por d tal que $B_{\varepsilon}^d(x) \subseteq U$. (Ver Apéndice A, Proposición A.2.1)

Note que la métrica d es acotada, en efecto

$$d(\alpha, \beta) \leq \sum_{i \in \mathbb{Z}} \frac{1}{2^{|i|}} = 3.$$

Primero veamos que la topología generada por d está contenida en la topología producto. Sea $B_{\varepsilon}^d(x)$, considere $p \geq 1$ lo suficientemente grande tal que

$$\sum_{i=p}^{\infty} \frac{1}{2^{|i|}} < \frac{\varepsilon}{4} \quad \text{y} \quad \sum_{i=-p}^{-\infty} \frac{1}{2^{|i|}} < \frac{\varepsilon}{4},$$

es decir

$$\sum_{|i| \geq p} \frac{1}{2^{|i|}} < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Para cada $i \in \mathbb{Z}$ definimos la bola $B_{\varepsilon_i}^{\bar{d}}(x_i) \subseteq X_i$ de la siguiente manera: si $i \in \{-(p-1), -(p-2), \dots, 0, \dots, p-2, p-1\}$ entonces $\varepsilon_i = \frac{\varepsilon}{6}$, en caso contrario $B_{\varepsilon_i}^{\bar{d}}(x_i) = X_i$. Esto determina el abierto básico U que contiene a x dado por

$$U = \cdots \times X_{-p} \times B_{\varepsilon_{-(p-1)}}^{\bar{d}}(x_i) \times \cdots \times B_{\varepsilon_{p-1}}^{\bar{d}}(x_i) \times X_p \cdots.$$

Veamos que $U \subseteq B_{\varepsilon}^d(x)$, en efecto, sea $y \in U$, entonces

$$\begin{aligned} d(x, y) &= \sum_{i \in \mathbb{Z}} \frac{\bar{d}(\alpha_i, \beta_i)}{2^{|i|}} \leq \sum_{-(p-1)}^{p-1} \frac{\bar{d}(\alpha_i, \beta_i)}{2^{|i|}} + \sum_{|i| \geq p} \frac{1}{2^{|i|}} \\ d(x, y) &= \sum_{i \in \mathbb{Z}} \frac{\bar{d}(\alpha_i, \beta_i)}{2^{|i|}} \leq \sum_{-(p-1)}^{p-1} \frac{\bar{d}(\alpha_i, \beta_i)}{2^{|i|}} + \sum_{|i| \geq p} \frac{1}{2^{|i|}} \\ &< \frac{\varepsilon}{6} \sum_{-(p-1)}^{p-1} \frac{1}{2^{|i|}} + \sum_{|i| \geq p} \frac{1}{2^{|i|}} \\ &\leq 3 \left(\frac{\varepsilon}{6} \right) + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon. \end{aligned}$$

Para la otra inclusión, consideramos un abierto básico U en la topología producto, es decir, U es de la forma $U = \prod_{n \in \mathbb{Z}} U_n$ donde $U_n = \{0, 1\}$ excepto para finitos n_1, n_2, \dots, n_k donde U_{n_k} es de la forma dada en 2.3.4. Así pues, sea $\varepsilon = \min \{\varepsilon_i / 2^{|n_1|}, \dots, \varepsilon_i / 2^{|n_k|}\}$, entonces la bola $B_\varepsilon^d(x) \subseteq U$, en efecto, si $y \in B_\varepsilon^d(x)$ entonces $d(y, x) < \varepsilon$, esto implica

$$\bar{d}(x_{n_i}, y_{n_i}) < \varepsilon 2^{|n_i|} \leq \varepsilon_i \quad \text{para cada } i = 1, 2, \dots, k,$$

lo cual implica $y_{n_i} \in B_\varepsilon^{\bar{d}}(x_{n_i})$ para cada $i = 1, 2, \dots, k$; por lo tanto, $y \in U$.

Por último, es claro que el espacio topológico formado por $\{0, 1\}$ y la métrica \bar{d} es un espacio compacto; luego, por el Teorema de Tychonoff (ver Apéndice A, Teorema A.2.3) se infiere que (X, d) es un espacio compacto. \square

Veamos algunas características de Ψ , inicialmente caracterizamos el conjunto $\text{Per}(\Psi)$, sea σ un punto periódico de periodo n de Ψ dado por $\sigma = \dots \sigma_{-2} \sigma_{-1} \sigma_0 \cdot \sigma_1 \sigma_2 \dots$, entonces, como

$$\Psi^n(\sigma) = \{\dots (\Psi^n(\sigma))_{-2} (\Psi^n(\sigma))_{-1} (\Psi^n(\sigma))_0 \cdot (\Psi^n(\sigma))_1 (\Psi^n(\sigma))_2 \dots\}$$

donde $(\Psi^n(\sigma))_i = \sigma_{i-n}$ para cada $i \in \mathbb{Z}$, y dado que σ es periódico entonces σ es tal que $\sigma_i = \sigma_{i-n}$ para cada $i \in \mathbb{Z}$, entonces por convención podemos denotar a dicho punto periódico por $\sigma = \overline{\sigma_1 \sigma_2 \dots \sigma_n}$ aunque no es la única forma, por ejemplo, si el periodo es $2n$ también lo podemos notar como $\sigma = \overline{\sigma_{-(n-1)} \dots \sigma_{-1} \sigma_0 \cdot \sigma_1 \sigma_2 \dots \sigma_n}$. Por lo tanto, se sigue

$$\text{Per}(\Psi) = \{\sigma \mid \sigma = \overline{\sigma_1 \sigma_2 \dots \sigma_n}, n \in \mathbb{Z}^+\}.$$

Por medio de esta caracterización podemos ver que Ψ solo tiene dos puntos fijos que son $\bar{0}$ y $\bar{1}$. Además, esta aplicación tiene la propiedad que se pueden hallar puntos periódicos de todos los periodos, es más, $\text{Per}(\Psi)$ es denso en X .

Proposición 2.3.3. *$\text{Per}(\Psi)$ es denso en X .*

Demuestra. Sea $\sigma \in X$ dado por $\sigma = \dots \sigma_{-2} \sigma_{-1} \sigma_0 \cdot \sigma_1 \sigma_2 \dots$ y $\varepsilon > 0$. Consideremos $B_\varepsilon^x(\sigma)$ la bola abierta en X de radio ε . Dado que

$$\sum_{i \in \mathbb{Z}} \frac{1}{2^{|i|}} = 3.$$

Consideramos $N \geq 1$ lo suficientemente grande tal que

$$\sum_{i=N+1}^{\infty} \frac{1}{2^{|i|}} < \frac{\varepsilon}{2} \quad \text{y} \quad \sum_{i=-N}^{-\infty} \frac{1}{2^{|i|}} < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Para dicho N considere $\hat{\sigma}$ el punto periódico de periodo $2N$ dado por $\hat{\sigma} = \overline{\sigma_{-(N-1)} \dots \sigma_{-1} \sigma_0 \cdot \sigma_1 \sigma_2 \dots \sigma_N}$, note que $\hat{\sigma} \in B_\varepsilon^x(\sigma)$, en efecto:

$$\begin{aligned} d(\sigma, \hat{\sigma}) &= \sum_{i \in \mathbb{Z}} \frac{|\sigma_i - \hat{\sigma}_i|}{2^{|i|}} = \sum_{i=-N}^{-\infty} \frac{|\sigma_i - \hat{\sigma}_i|}{2^{|i|}} + \sum_{i=-(N-1)}^N \frac{|\sigma_i - \hat{\sigma}_i|}{2^{|i|}} + \sum_{i=N+1}^{\infty} \frac{|\sigma_i - \hat{\sigma}_i|}{2^{|i|}} \\ &= \sum_{i=-N}^{-\infty} \frac{|\sigma_i - \hat{\sigma}_i|}{2^{|i|}} + \sum_{i=N+1}^{\infty} \frac{|\sigma_i - \hat{\sigma}_i|}{2^{|i|}} \\ &\leq \sum_{i=-N}^{-\infty} \frac{1}{2^{|i|}} + \sum_{i=N+1}^{\infty} \frac{1}{2^{|i|}} < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon. \end{aligned}$$

En consecuencia, $\hat{\sigma} \in B_\varepsilon^x(\sigma)$. \square

La anterior proposición es una de las condiciones para la existencia de caos en el sentido de Devaney, faltaría probar la transitividad topológica, pero esta es dada por la siguiente proposición.

Proposición 2.3.4. *El sistema dinámico (X, Ψ) es topológicamente transitivo.*

Para una demostración se puede consultar [15].

2.3.1.4. Conclusiones sobre la Herradura en la aplicación de Hénon

Teniendo en cuenta los resultados expuestos acerca de la dinámica de las sucesiones de símbolos, en esta parte mostraremos que dichos resultados se reflejan en la aplicación de Hénon restringida a $\Omega(H_{a,b})$ para $a > 2(1 + |b|)^2$, la razón radica en el siguiente Teorema.

Teorema 2.3.1. *La aplicación de Hénon $H_{a,b}|_{\Omega(H_{a,b})}$ es topológicamente conjugada a la aplicación Ψ , más precisamente, h es un homeomorfismo y $\Lambda = \Omega(H_{a,b})$. (h fue definida al final de la Subsubsección 2.3.1.2)*

Demostración. Vimos al final de la Subsubsección 2.3.1.2 que h era una biyección de Λ sobre $X = \{0,1\}^{\mathbb{Z}}$, de modo que solo resta probar la continuidad de h y h^{-1} , recuerde que dado $\sigma \in X$ se tiene

$$h^{-1}(\sigma) = \bigcap_{n \in \mathbb{Z}} H_{a,b}^n(V_{\sigma_n}). \quad (2.3.5)$$

Considerando lo anterior procedemos con la demostración.

▷: *Continuidad de h :* Sea $x \in \Lambda$ y sea U una vecindad de $h(x)$; elegimos el cilindro

$$Cil(h(x), N) = \{\{\sigma_n\}_{n \in \mathbb{Z}} \mid \sigma_i = (h(x))_i \text{ para } -(N-1) \leq i \leq N \text{ con } i \in \mathbb{Z}\}$$

de manera que $Cil(h(x), N) \subseteq U$, esto es posible ya que $Cil(h(x), N)$ es un abierto en la topología de X (ver Subsubsección anterior). Para el N determinado por $Cil(h(x), N)$ tenemos el cuadrado deformado

$$C = \bigcap_{n=-(N-1)}^N H_{a,b}^n(V_{\sigma_n}),$$

el cual contiene a x , entonces elegimos $\varepsilon > 0$ tal que $B_\varepsilon(x) \subseteq C$, de modo que $B_\varepsilon^\Lambda(x) = \Lambda \cap B_\varepsilon(x)$ es una bola abierta en el espacio Λ cuya topología es la heredada. Así pues, dado $z, y \in B_\varepsilon^\Lambda(x)$ por la construcción se infiere que $(h(z))_n = (h(y))_n$ para cada n entre $-(N-1)$ y N , por lo tanto, $h(B_\varepsilon^\Lambda(x)) \subseteq Cil(h(x), N)$. En consecuencia h es continua.

▷: *Continuidad de h^{-1} :* Sea $\sigma \in X$ dado por $\sigma = \{\dots \sigma_{-2}\sigma_{-1}\sigma_0 \cdot \sigma_1\sigma_2 \dots\}$, y sea U una vecindad de $h^{-1}(\sigma)$ en el espacio Λ con la topología heredada. Si $U = \Lambda$ entonces para cualquier $N > 0$ se tiene $\bigcap_{n=-(N-1)}^N H_{a,b}^n(V_{\sigma_n}) \subseteq U$. Si $U \subset \Lambda$ entonces es fácil ver que existe $N > 0$ tal que $\bigcap_{n=-(N-1)}^N H_{a,b}^n(V_{\sigma_n}) \subseteq U$. En ambos consideramos el cilindro

$$Cil(h(x), N) = \{\{\sigma_n\}_{n \in \mathbb{Z}} \mid \sigma_i = (h(x))_i \text{ para } -(N-1) \leq i \leq N \text{ con } i \in \mathbb{Z}\}.$$

Note que $Cil(h(x), N)$ es un abierto básico en la topología de X (ver Subsubsección anterior). Así pues, dado $\bar{\sigma}, \hat{\sigma} \in Cil(h(x), N)$ por la construcción se infiere

$$\begin{aligned} h^{-1}(\bar{\sigma}) &= \left(\bigcap_{\substack{n \in \mathbb{Z} \\ n \notin [-(N-1), N]}} H_{a,b}^n(V_{\bar{\sigma}_n}) \right) \cap \left(\bigcap_{n=-(N-1)}^N H_{a,b}^n(V_{\sigma_n}) \right) \text{ y} \\ h^{-1}(\hat{\sigma}) &= \left(\bigcap_{\substack{n \in \mathbb{Z} \\ n \notin [-(N-1), N]}} H_{a,b}^n(V_{\hat{\sigma}_n}) \right) \cap \left(\bigcap_{n=-(N-1)}^N H_{a,b}^n(V_{\sigma_n}) \right). \end{aligned}$$

Por lo tanto, $h^{-1}(\bar{\sigma}), h^{-1}(\hat{\sigma}) \in U$, de modo que $h^{-1}(Cil(h(x), N)) \subseteq U$. En consecuencia h^{-1} es continua.

▷: h es conjugación: Teniendo en cuenta 2.3.5 se sigue:

$$\begin{aligned} H_{a,b}(h(\sigma)) &= H_{a,b}\left(\bigcap_{n \in \mathbb{Z}} H_{a,b}^n(V_{\sigma_n})\right) \\ &= \bigcap_{n \in \mathbb{Z}} H_{a,b}^{n+1}(V_{\sigma_n}) \\ &= \bigcap_{n \in \mathbb{Z}} H_{a,b}^n(V_{\sigma_{n-1}}) \\ &= h(\Psi(\sigma)). \end{aligned}$$

Por lo tanto, h exhibe una conjugación de $H_{a,b}$ y Ψ .

▷: $\Lambda = \Omega(H_{a,b})$: En efecto, por la Proposición 1.3.2 se sigue $\Omega(H_{a,b}) = h^{-1}(\Omega(\Psi))$ y como $\Omega(\Psi) = X$ entonces $h^{-1}(\Omega(\Psi)) = \Lambda$.

□

Por lo tanto podemos concluir lo siguiente:

- 1▷ $\Omega(H_{a,b})$ es un conjunto compacto ya que Λ es compacto.
- 2▷ El sistema dinámico $(\Omega(H_{a,b}), H_{a,b}|_{\Omega(H_{a,b})})$ es topológicamente transitivo, esto es consecuencia de la Proposición 2.3.4 y el teorema anterior.
- 3▷ $\text{Per}(H_{a,b}|_{\Omega(H_{a,b})})$ es denso en X , esto es consecuencia de la Proposición 2.3.3 y el teorema anterior.
- 4▷ $(\Omega(H_{a,b}), H_{a,b}|_{\Omega(H_{a,b})})$ tiene sensitividad a las condiciones iniciales, esto es consecuencia de las dos últimas conclusiones.
- 5▷ Existe $x \in \Omega(H_{a,b})$ tal que su órbita bajo $H_{a,b}$ es densa en $\Omega(H_{a,b})$, esto es consecuencia de hecho de que $\Omega(H_{a,b})$ es un conjunto compacto, la conclusión 2 y el Teorema 1.4.1.

En consecuencia, podemos afirmar que $(\Omega(H_{a,b}), H_{a,b}|_{\Omega(H_{a,b})})$ es un sistema dinámico caótico en el sentido de Devaney (ver Definición 1.4.3). La conjugación topológica exhibida también permite inferir que $H_{a,b}$ tiene puntos periódicos en $\Omega(H_{a,b})$ de cualquier orden. Por otro lado, la hendidura de Smale es presentada frecuentemente considerando bandas rectangulares, es decir, se consideran rectas verticales y horizontales en lugar de curvas verticales y horizontales, en el sentido de la Definición 2.3.3 se hace $R = 1$, esto es, se considera el rectángulo $\{(x, y) \mid |x|, |y| \leq 1\}$, de modo que para una hendidura en este contexto se tendrá que Λ es un conjunto de Cantor, dicha hendidura será topológicamente conjugada a $H_{a,b}|_{\Omega(H_{a,b})}$ ya que la conjugación topológica es una relación de equivalencia, por lo tanto, $\Omega(H_{a,b})$ tiene una estructura de conjunto de Cantor.

2.3.2. Conjuntos hiperbólicos

En esta Subsección trataremos de encontrar los parámetros a y b para los cuales los conjuntos $W^s(x)$ y $W^u(x)$ para todo $x \in \Omega(H_{a,b})$ son curvas diferenciables con características análogas a las vistas para los puntos fijos hiperbólicos en el Teorema de la variedad estable, en realidad es una especie de generalización del concepto de hiperbolicidad introducido para puntos periódicos en las secciones anteriores. En este sentido es importante el concepto de conjunto hiperbólico.

Definición 2.3.4. Sea $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ un difeomorfismo. Un conjunto K compacto e invariante se dice **hiperbólico** si para cada $x \in K$ existen subespacios $\mathbb{E}^s(x)$ y $\mathbb{E}^u(x)$ de \mathbb{R}^2 tales que:

1. $\mathbb{R}^2 = \mathbb{E}^s(x) \oplus \mathbb{E}^u(x)$.
2. Existen constantes $C > 0$ y $0 < \lambda < 1$ tales que

- a) $\|Df(\mathbf{x})v\| \leq C\lambda\|v\|$ para todo $v \in \mathbb{E}^s(\mathbf{x})$.
b) $\|Df^{-1}(\mathbf{x})v\| \leq C\lambda\|v\|$ para todo $v \in \mathbb{E}^u(\mathbf{x})$.

Esta definición es una idea análoga a la de hiperbolidad de puntos periódicos expresa secciones atrás. Otro resultado importante cuya demostración puede ser consultada en [10] y [6] es el siguiente:

Proposición 2.3.5. *En el contexto de la definición anterior se tiene:*

1. *La descomposición $\mathbb{R}^2 = \mathbb{E}^s(\mathbf{x}) \oplus \mathbb{E}^u(\mathbf{x})$ es única.*
2. *Las aplicaciones $\mathbf{x} \mapsto \mathbb{E}^s(\mathbf{x})$ y $\mathbf{x} \mapsto \mathbb{E}^u(\mathbf{x})$ son continuas.*

Probar la hiperbolidad de un conjunto directamente en la mayoría de los casos no es sencillo, el camino para simplificar dicha tarea es encontrar condiciones necesarias y suficientes para que un conjunto sea hiperbólico, en ese sentido introducimos el concepto del cono. Sean $\mathbb{E}^{(1)}$ y $\mathbb{E}^{(2)}$ dos subespacios de \mathbb{R}^2 tales que $\mathbb{R}^2 = \mathbb{E}^{(1)} \oplus \mathbb{E}^{(2)}$, así pues, definimos el siguiente conjunto

$$\mathcal{C}^{(1)}(\alpha) = \left\{ v = v^{(1)} + v^{(2)} \mid v^{(1)} \in \mathbb{E}^{(1)}, v^{(2)} \in \mathbb{E}^{(2)}, \|v^{(2)}\| \leq \alpha \|v^{(1)}\| \right\}.$$

De manera análoga también definimos el conjunto

$$\mathcal{C}^{(2)}(\alpha) = \left\{ v = v^{(1)} + v^{(2)} \mid v^{(1)} \in \mathbb{E}^{(1)}, v^{(2)} \in \mathbb{E}^{(2)}, \|v^{(1)}\| \leq \alpha \|v^{(2)}\| \right\}.$$

Estos conjuntos son conos como ilustra la Figura 2.3.13.

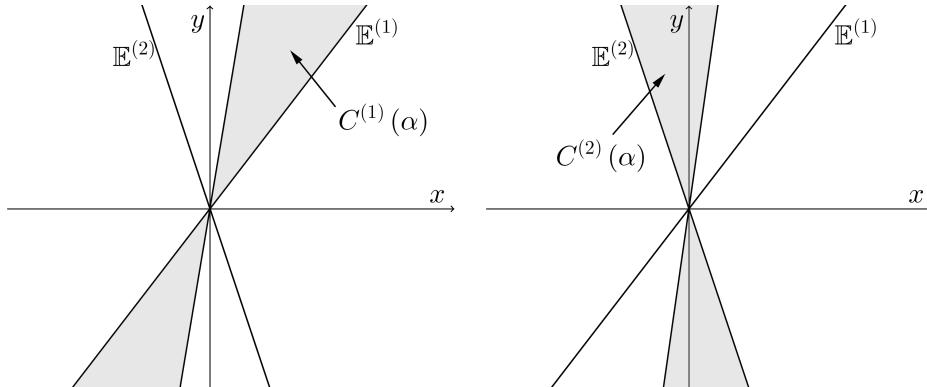


Figura 2.3.13: Conos.

Teniendo presente los anteriores conjuntos se tiene la siguiente proposición.

Proposición 2.3.6. *Sea $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ un difeomorfismo y K un conjunto compacto e invariante. Son equivalentes:*

1. *K es hiperbólico.*
2. *Existen subespacios $\mathbb{E}^{(1)}(\mathbf{x})$ y $\mathbb{E}^{(2)}(\mathbf{x})$ de \mathbb{R}^2 para cada $\mathbf{x} \in K$ tales que $\mathbb{R}^2 = \mathbb{E}^{(1)}(\mathbf{x}) \oplus \mathbb{E}^{(2)}(\mathbf{x})$, un entero $n > 0$, una constante $1 < \lambda$, y unas funciones de valor real $\mu^{(1)} : K \rightarrow \mathbb{R}^+$ $\mu^{(2)} : K \rightarrow \mathbb{R}^+$ tales que para todo $x \in K$ las siguientes condiciones son satisfechas:*
 - i) $Df(\mathbf{x})(\mathcal{C}^{(1)}(\mu^{(1)}(\mathbf{x}))) \subset \mathcal{C}^{(1)}(\mu^{(1)}(\mathbf{x}))$ y $Df^{-1}(\mathbf{x})(\mathcal{C}^{(2)}(\mu^{(2)}(\mathbf{x}))) \subset \mathcal{C}^{(2)}(\mu^{(2)}(\mathbf{x}))$.
 - ii) *Sí $v \in \mathcal{C}^{(1)}(\mu^{(2)}(\mathbf{x}))$, $\|Df^n(\mathbf{x})v\| \geq \lambda \|v\|$.*
 - iii) *Sí $v \in \mathcal{C}^{(2)}(\mu^{(2)}(\mathbf{x}))$, $\|Df^{-n}(\mathbf{x})v\| \geq \lambda \|v\|$.*

La prueba la anterior proposición puede ser consultada en [16]. Esta proposición reduce es importante en la siguiente Subsubsección.

2.3.2.1. Hiperbolicidad de $\Omega(H_{a,b})$

El objetivo es encontrar los parámetros a y b para los cuales $\Omega(H_{a,b})$ es un conjunto hiperbólico, lo cual es equivalente a buscar parámetros a y b para los cuales $\Omega(H_{a,b})$ satisface el ítem 2 de la Proposición 2.3.6. Inicialmente, hemos visto en secciones anteriores que $DH_{a,b}(x,y)$ y $DH_{a,b}^{-1}(x,y)$ tiene las siguiente forma

$$DH_{a,b}(x,y) = \begin{pmatrix} -2x & b \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad DH_{a,b}^{-1}(x,y) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ \frac{1}{b} & \frac{2y}{b} \end{pmatrix}.$$

Se observa que $DH_{a,b}^{-1}(x,y)$ no dependen de x y $DH_{a,b}(x,y)$ no dependen de y , en particular, así pues, para cada $\mathbf{x} = (x,y) \in \Omega(H_{a,b})$ un candidato para ser $\mathbb{E}^{(1)}(\mathbf{x})$ y $\mathbb{E}^{(2)}(\mathbf{x})$ son $\mathbb{E}^{(1)}(\mathbf{x}) = \langle (1,0) \rangle$ y $\mathbb{E}^{(2)}(\mathbf{x}) = \langle (0,1) \rangle$, teniendo en cuenta esto, también consideramos $\mu^{(1)}(\mathbf{x}) = \mu^{(2)}(\mathbf{x}) = \frac{1}{\lambda}$ para cada $\mathbf{x} \in K$, y $n = 1$, la idea es mostrar que con estas consideraciones y una elección apropiada de λ se satisface el ítem 2 de la Proporción 2.3.6, en ese sentido se tiene los conos

$$\begin{aligned} \mathcal{C}^{(1)}\left(\frac{1}{\lambda}\right) &= \left\{ (v,w) \mid v \in \mathbb{E}^{(1)}(\mathbf{x}), w \in \mathbb{E}^{(2)}(\mathbf{x}), \|w\| \leq \frac{1}{\lambda} \|v\| \right\}, \\ \mathcal{C}^{(2)}\left(\frac{1}{\lambda}\right) &= \left\{ (v,w) \mid v \in \mathbb{E}^{(1)}(\mathbf{x}), w \in \mathbb{E}^{(2)}(\mathbf{x}), \|v\| \leq \frac{1}{\lambda} \|w\| \right\}. \end{aligned}$$

Suponga en adelante que para algún $\lambda > 1$, cada $\mathbf{x} = (x,y)$ en $\Omega(H_{a,b})$ y su imagen $H_{a,b}(\mathbf{x}) = (x_{-1},y_{-1})$ satisfacen $|x_{-1}|, |x| \geq \lambda \frac{(1+|b|)}{2}$. Teniendo en cuenta lo anterior tenemos los siguientes resultados.

Lema 2.3.4. $DH_{a,b}(\mathbf{x})(\mathcal{C}^{(1)}\left(\frac{1}{\lambda}\right)) \subset \mathcal{C}^{(1)}\left(\frac{1}{\lambda}\right)$ y $DH_{a,b}^{-1}(\mathbf{x})(\mathcal{C}^{(2)}\left(\frac{1}{\lambda}\right)) \subset \mathcal{C}^{(2)}\left(\frac{1}{\lambda}\right)$.

*Demuestra*ción. Sea $(v,w) \in \mathcal{C}^{(1)}\left(\frac{1}{\lambda}\right)$, entonces $|w| \leq \frac{1}{\lambda} |v|$ y $DH_{a,b}(\mathbf{x})(v,w) = (-2xv + bw, v)$, por conveniencia denotamos $(-2xv + bw, v) = (v_1, w_1)$. Dado que estamos asumiendo $\lambda > 1$ y $|x| \geq \lambda \frac{(1+|b|)}{2}$ se infiere $2|x| - \frac{|b|}{\lambda} > 2|x| - \lambda|b| \geq \lambda$, por lo tanto

$$\begin{aligned} |v_1| &= |-2xv + bw| \geq |-2xv| - |bw| = 2|x||v| - |b||w| \\ &\geq \left(2|x| - \frac{|b|}{\lambda}\right)|v| > \lambda|v| = \lambda|w_1|. \end{aligned}$$

De modo que $|w_1| < \frac{1}{\lambda}|v_1|$ y en consecuencia $(v_1, w_1) \in \mathcal{C}^{(1)}\left(\frac{1}{\lambda}\right)$, esto significa $DH_{a,b}(\mathbf{x})(\mathcal{C}^{(1)}\left(\frac{1}{\lambda}\right)) \subset \mathcal{C}^{(1)}\left(\frac{1}{\lambda}\right)$.

Veamos la ultima parte, sea $(v,w) \in \mathcal{C}^{(2)}\left(\frac{1}{\lambda}\right)$, entonces $\|v\| \leq \frac{1}{\lambda} \|w\|$ y $DH_{a,b}^{-1}(\mathbf{x})(v,w) = (w, \frac{v}{b} + 2x\frac{w}{b})$, note que de $\|v\| \leq \frac{1}{\lambda} \|w\|$ se infiere $-\|v\| \geq -\lambda \|w\|$; por conveniencia denotamos $(w, \frac{v}{b} + 2x\frac{w}{b}) = (v_{-1}, w_{-1})$. Dado que estamos asumiendo $\lambda > 1$ y $|x_{-1}| \geq \lambda \frac{(1+|b|)}{2}$ se infiere $2|x_{-1}| - \lambda|b| > \lambda|b|$, y que $x_{-1} = y$ entonces $2|x_{-1}| - \lambda > \lambda|b|$, por lo tanto

$$\begin{aligned} |w_{-1}| &= \left| \frac{v}{b} + 2y\frac{w}{b} \right| = \frac{|2yw + v|}{|b|} \geq \frac{(2|y||w| - |v|)}{|b|} \\ &\geq \frac{(2|y||w| - \lambda|w|)}{|b|} = \frac{(2|y| - \lambda)|w|}{|b|} \geq \lambda|w| = \lambda|v_{-1}|. \end{aligned}$$

De modo que $|v_{-1}| < \frac{1}{\lambda}|w_{-1}|$ y en consecuencia $(v_{-1}, w_{-1}) \in \mathcal{C}^{(2)}\left(\frac{1}{\lambda}\right)$, esto significa $DH_{a,b}(\mathbf{x})(\mathcal{C}^{(2)}\left(\frac{1}{\lambda}\right)) \subset \mathcal{C}^{(2)}\left(\frac{1}{\lambda}\right)$. \square

Otra consecuencia de la suposición es:

Lema 2.3.5. Si $\mathbf{v} \in \mathcal{C}^{(1)}\left(\frac{1}{\lambda}\right)$, entonces $\|DH_{a,b}(\mathbf{x})\mathbf{v}\| \geq \lambda\|\mathbf{v}\|$. También, si $\mathbf{v} \in \mathcal{C}^{(2)}\left(\frac{1}{\lambda}\right)$, entonces $\|DH_{a,b}^{-1}(\mathbf{x})\mathbf{v}\| \geq \lambda\|\mathbf{v}\|$.

Demostración. Sea $(v, w) \in \mathcal{C}^{(1)}\left(\frac{1}{\lambda}\right)$, considere por conveniencia $DH_{a,b}(\mathbf{x})(v, w) = (-2xv + bw, v) = (v_1, w_1)$, entonces por el lema anterior $|w_1| < \frac{1}{\lambda}|v_1|$, y como $w_1 = v$ se sigue $|v| < \frac{1}{\lambda}|v_1|$, adicionalmente dado que $(v, w) \in \mathcal{C}^{(1)}\left(\frac{1}{\lambda}\right)$ se tiene $|w| \leq \frac{1}{\lambda}|v|$, esto significa, $|w| \leq \frac{1}{\lambda}|w_1|$. Luego, considerando la norma $\|(x, y)\| = \max\{x, y\}$ la cual es equivalente a la euclíadiana, se infiere que $\|(v, w)\| = \max\{|v, w|\} \leq \frac{1}{\lambda} \max\{v_1, w_1\} = \frac{1}{\lambda} \|DH_{a,b}(\mathbf{x})(v, w)\|$.

De manera análoga, sea $(v, w) \in \mathcal{C}^{(2)}\left(\frac{1}{\lambda}\right)$, considere por conveniencia $DH_{a,b}^{-1}(\mathbf{x})(v, w) = \left(w, \frac{v}{b} + 2x\frac{w}{b}\right) = (v_{-1}, w_{-1})$, entonces por el lema anterior $|v_{-1}| < \frac{1}{\lambda}|w_{-1}|$, y como $w = v_{-1}$ se sigue $|w| < \frac{1}{\lambda}|w_{-1}|$, adicionalmente dado que $(v, w) \in \mathcal{C}^{(v)}\left(\frac{1}{\lambda}\right)$ se tiene $|v| \leq \frac{1}{\lambda}|w|$, esto significa, $|v| \leq \frac{1}{\lambda}|v_{-1}|$, de lo cual se infiere que $\|(v, w)\| = \max\{|v, w|\} \leq \frac{1}{\lambda} \max\{|v_{-1}, w_{-1}|\} = \frac{1}{\lambda} \|DH_{a,b}^{-1}(\mathbf{x})(v, w)\|$. \square

Así pues, solo resta encontrar $\lambda > 1$ tal que cada $\mathbf{x} = (x, y)$ en $\Omega(H_{a,b})$ y su imagen $H_{a,b}(\mathbf{x}) = (x_{-1}, y_{-1})$ satisfacen $|x_{-1}|, |x| \geq \lambda \frac{(1+|b|)}{2}$; para como $\Omega(H_{a,b}) \subseteq H_{a,b}^{-1}(S) \cap S$ bastara con mostrarlo para $H_{a,b}^{-1}(S) \cap S$. Por lo visto en la Subsección 2.3.1.1 sabemos que

$$H_{a,b}^{-1}(S) = \left\{ (x, y) \mid |x| \leq R, -\frac{R}{|b|} + \frac{(-a+x^2)}{b} \leq y \leq \frac{R}{|b|} + \frac{(-a+x^2)}{b} \right\}$$

Es más, $H_{a,b}^{-1}(S)$ esta en la parte exterior de la parábola $by = R - a + x^2$, es decir, fuera de la concavidad, esta parábola intersecta el borde de S mas cercano al punto en el que la parábola tiene derivada cero en dos puntos con coordenadas x dadas por $\pm x_*$ (ver Figura)donde

$$x_*^2 = by - R + a = a - (1 + |b|)R$$

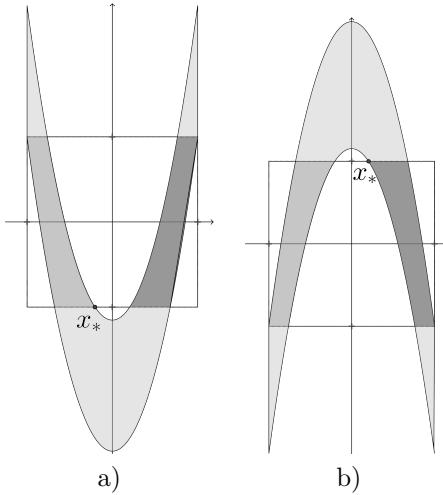
Por lo que hemos visto es claro que $H_{a,b}^{-1}(S) \cap S$ permanece en la región $|x| \geq |x_*|$. Escribimos A en la forma $A = k(1 + |b|)^2/2$ y reemplazamos esta expresión en R obteniendo lo siguiente:

$$R = \left(1 + \sqrt{1 + 2k}\right) (1 + |b|)^2 / 2.$$

De modo que, reemplazando esta expresión de R en x_* se obtiene:

$$x_*^2 = \left(k - 1 - \sqrt{1 + 2k}\right) (1 + |b|)^2 / 2.$$

Analicemos esta ultima igualada, note que para $k > 1$ esta crece como crezca k , y es igual a 1 cuando $2k = 5 + 2\sqrt{5}$ o lo que es lo mismo $A = (5 + 2\sqrt{5})(1 + |b|)^2/4$. Así pues, llamando $\lambda^2 = k - 1 - \sqrt{1 + 2k}$, cuando $A > (5 + 2\sqrt{5})(1 + |b|)^2/4$ tenemos $\lambda^2 > 1$, es decir, $\lambda > 1$; por lo tanto, los lemas anteriores son validos para $A > (5 + 2\sqrt{5})(1 + |b|)^2/4$, lo que demuestra la hiperbolicidad de $\Omega(H_{a,b})$.

Figura 2.3.14: Pre-imagen de S . a) $b > 0$. b) $b > 0$.

La hiperbolicidad abre la puerta a varias conclusiones ya que este tipo de conjuntos han sido ampliamente estudiados, por ejemplo, en [13] se demuestra el siguiente resultado, la prueba emplea herramientas de variedades diferenciales lo que lleva el concepto de hiperbolicidad a un ámbito global.

Teorema 2.3.2. *Los conjuntos invariantes hiperbólicos son estructuralmente estables.*

En secciones anteriores vimos como las variedades estables e inestables de puntos fijos hiperbólicos se podían caracterizar como curvas, la pregunta que surgía era si existían otros puntos aparte de los puntos fijos hiperbólicos en los cuales los conjuntos estable e inestables se pudieran caracterizar de esta forma, la respuesta es si, y este es uno de los casos en los que sea dada dicha característica, el siguiente Teorema lo reafirma.

Teorema 2.3.3 (Teorema de la Variedad Estable para conjuntos hiperbólicos). *Sea K un conjunto hiperbólico invariante de un difeomorfismo $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ de clase C^r . Entonces, para $\varepsilon > 0$ suficientemente pequeño y para cada punto $\mathbf{x} \in K$, lo siguiente se tiene:*

1. $W_\varepsilon^s(\mathbf{x})$ y $W_\varepsilon^u(\mathbf{x})$ es una curva diferenciable de clase C^r tangente a $\mathbb{E}^s(\mathbf{x})$ y $\mathbb{E}^u(\mathbf{x})$ respectivamente, en \mathbf{x} .
2. Existen constantes $C > 0$, $0 < \lambda < 1$, tal que si $\mathbf{x}' \in W_\varepsilon^s(\mathbf{x})$, entonces

$$|f^n(\mathbf{x}) - f^n(\mathbf{x}')| \leq C\lambda^n |\mathbf{x} - \mathbf{x}'|, \quad \text{para } n \geq 0$$

y si $\mathbf{x}' \in W_\varepsilon^u(\mathbf{x})$, entonces

$$|f^{-n}(\mathbf{x}) - f^{-n}(\mathbf{x}')| \leq C\lambda^n |\mathbf{x} - \mathbf{x}'|, \quad \text{para } n \geq 0$$

3.

$$\begin{aligned} f(W_\varepsilon^s(\mathbf{x})) &\subset W_\varepsilon^s(f(\mathbf{x})), \\ f^{-1}(W_\varepsilon^u(\mathbf{x})) &\subset W_\varepsilon^u(f^{-1}(\mathbf{x})). \end{aligned}$$

4. $W_\varepsilon^s(\mathbf{x})$ y $W_\varepsilon^u(\mathbf{x})$ varían continuamente con \mathbf{x} .

Para una demostración ver [13]. Con este teorema finalizamos la descripción de la dinámica de la aplicación de Hénon para ciertos parámetros, quedan regiones que merecen una descripción con mayor profundidad cuyo análisis pasa por una generalización de la aplicación de Hénon, es decir, se puede considerar $H_{a,b}$ como una aplicación de \mathbb{C}^2 sobre \mathbb{C}^2 , al respecto [8] hace un estudio de esta aplicación en dicho contexto. Otro

aspecto que se hizo evidente cuando se expusieron los parámetros para los cuales $H_{a,b}$ es de tipo herradura era el interrogante acerca de los parámetros para los cuales no se tiene la herradura, se podría pensar en descartar la idea como intento por caracterizar la dinámica de $H_{a,b}$, pero varios matemáticos han optado por no descartarla del todo y contemplar para dichos parámetros que presentan inconveniente el concepto de herradura incompleta, de nuevo, dicha idea considera $H_{a,b}$ en un contexto mas general, a este tema de estudio se le conoce como *Theory of Pruning* o *Teoria de Poda* en español, al respecto se puede encontrar mayor información en [20].

Apéndice A

Hechos básicos usados

En este apéndice, recolectamos algunas versiones de las definiciones y teoremas de diferentes áreas matemáticas que interviene en este trabajo, nos remitiremos a temas puntuales de la temática global a la que alude el nombre de cada sección, además, las definiciones y teoremas que enunciaremos a continuación son versiones que están acordes a los resultados de este trabajo, es decir, estas definiciones y teoremas pueden ser formulados en contextos más generales, pero dado que en este trabajo nos limitamos a espacios de dimensión finita (\mathbb{R}^2), entonces las versiones acordes son las que se refieren a este tipo de espacios.

A.1. Análisis Vectorial

Las demostraciones de los siguientes resultados pueden ser consultadas en [17] y [18]. Primero, veamos las siguientes definiciones.

Definición A.1.1. Sean \mathbb{E} y \mathbb{F} espacios de Banach, $A \subset \mathbb{E}$ abierto, $V \subset \mathbb{F}$ abierto. $f : A \rightarrow V$ se dice un difeomorfismo de clase C^k , $k \geq 1$ si

1. f es biyección de A sobre V , de clase C^k y
2. f^{-1} es también de clase C^k .

La anterior definición es coherente con este trabajo ya que todo espacio de dimensión finita es un espacio de Banach.

Definición A.1.2. Sean \mathbb{E} y \mathbb{F} espacios de Banach, $A \subset \mathbb{E}$ abierto, $f : A \rightarrow \mathbb{F}$ una aplicación de clase C^k donde $k \geq 1$, $a \in A$, f de dice un difeomorfismo local en el punto a de clase C^k sí existe V abierto de \mathbb{E} con $a \in V \subset A$ tal que $f : V \rightarrow f(V)$ es difeomorfismo de clase C^k de V sobre el abierto $f(V)$ de \mathbb{F} .

Si para todo $a \in A$, f es difeomorfismo local en a de clase C^k , f se dice difeomorfismo local en A de clase C^k .

Lema A.1.1. Un difeomorfismo local es global si y solo si es inyectivo.

El siguiente teorema es una de las versiones del Teorema de la función inversa, reiteramos que existen planteamientos más generales.

Teorema A.1.1 (de la función inversa). Sean $\mathbb{E} = \mathbb{R}^n = \mathbb{F}$, $A \subset \mathbb{E}$ abierto, $f : A \rightarrow \mathbb{E}$ de clase C^k , $k \geq 1$, $a \in A$ tal que $f'(a)$ es un isomorfismo de \mathbb{E} sobre \mathbb{E} . Entonces, existe $B \subset A$ abierto tal que $a \in B$ y $f : B \rightarrow f(B)$ es difeomorfismo de clase C^k .

Corolario A.1.1. Sea $A \subset \mathbb{R}^n$ abierto, $f : A \rightarrow \mathbb{R}^n$, $f \in C^k(A)$, $k \geq 1$. Una condición necesaria y suficiente para que f sea un C^k difeomorfismo local es que para todo $x \in A$, $f'(x) : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ sea isomorfismo, es decir, $\det(Df(x)) \neq 0$.

En ocasiones una buena aproximación de una función es útil en diferentes situaciones, en ese sentido el siguiente teorema es fundamental.

Teorema A.1.2 (Teorema de Taylor). *Sean \mathbb{E} y \mathbb{F} espacios de Banach, $A \subset \mathbb{E}$ abierto, $f : A \rightarrow \mathbb{F}$ una aplicación m veces diferenciables en $x \in A$ con $m \geq 1$. Entonces, si definimos el resto $R(h)$ como*

$$R(h) = f(x + h) - \left(f(x) + \cdots + \frac{1}{k!} D^k f(x)(h^k) + \cdots + \frac{1}{m!} D^m f(x)(h^m) \right),$$

entonces

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{\|R(h)\|}{\|h\|^m} = 0.$$

Este teorema indica que $G(h) = f(x) + \cdots + \frac{1}{m!} D^m f(x)(h^m)$ es una aproximación de f en x de orden m .

A.2. Topología

En esta sección presentaremos la definición de un espacio topológico y de diferentes conceptos que se derivan de sus estudio y que son importantes en este trabajo. Las demostraciones de los resultados que se presentaran pueden ser consultadas en [7].

Definición A.2.1. Sea X un conjunto. Una *topología* para X es una familia

$$\mathcal{T} = \{U_i \mid i \in I\} \text{ con } U_i \subseteq X$$

tal que:

1. $\phi \in \mathcal{T}$ y $X \in \mathcal{T}$.
2. $\bigcap_{i \in F} U_i \in \mathcal{T}$ para cada F subconjunto finito de I .
3. $\bigcup_{i \in J} U_i \in \mathcal{T}$ para cada $J \subseteq I$.

Los elementos de \mathcal{T} son llamados *abiertos* y ala par (X, \mathcal{T}) es por definición un *espacio topológico*. Los complementos respecto a X de los abiertos se llaman conjuntos *cerrados*.

Definición A.2.2. Sea (X, \mathcal{T}) un espacio topológico, una *base* para \mathcal{T} es una subfamilia $\mathcal{B} \subseteq \mathcal{T}$ con la propiedad de que: dados un abierto U y un punto $x \in U$, existe un $B \in \mathcal{B}$ tal que $x \in B \subseteq U$.

De esta defunción se infiere que cada abierto es unión de elementos en \mathcal{B} . Una topología puede tener varias bases, además siempre tendrá una, ya que \mathcal{T} en si misma es una base. Una pregunta que surge es saber cuando una colección de subconjuntos de X es una base para alguna topología, el siguiente teorema resuelve dicha cuestión.

Teorema A.2.1. *Sea X un conjunto. $\mathcal{B} \subseteq \mathcal{P}(X)$ (partes de X) es base de una topología para X si y solo si se cumple que*

1. $X = \bigcup \{B \mid B \in \mathcal{B}\}$, es decir, \mathcal{B} es un cubrimiento de X .
2. Dados cualesquiera $U, V \in \mathcal{B}$ y $x \in U \cap V$, existe B en \mathcal{B} con $x \in B \subseteq U \cap V$. Esto es, $U \cap V$ es unión de elementos de \mathcal{B} para todo $U, V \in \mathcal{B}$.

Ahora, veamos cuando dos bases son equivalentes.

Definición A.2.3. Sea X un conjunto y $\mathcal{B}_1, \mathcal{B}_2$ dos bases como en la Definición A.2.2. Decimos que \mathcal{B}_1 y \mathcal{B}_2 son dos bases equivalentes - $\mathcal{B}_1 \equiv \mathcal{B}_2$ - si las topologías generadas son iguales, es decir, $\langle \mathcal{B}_1 \rangle = \langle \mathcal{B}_2 \rangle$.

La siguiente proposición ayuda a identificar cuando dos bases son equivalentes.

Proposición A.2.1. $\mathcal{B}_1 \equiv \mathcal{B}_2$ si y solo si dados $B_1 \in \mathcal{B}_1$ y $x \in B_1$ existe $B_2 \in \mathcal{B}_2$ tal que $x \in B_2 \subseteq B_1$, con lo cual $\langle \mathcal{B}_1 \rangle \subseteq \langle \mathcal{B}_2 \rangle$ y viceversa.

Para verificar que dos topologías sobre un mismo conjunto son iguales es suficiente encontrar una base por cada topología y probar que son equivalentes por medio de la proposición anterior.

Otra cuestión importante es si dado un cubrimiento \mathcal{D} de X es posible crear la menor topología sobre X que tenga entre sus abiertos la colección \mathcal{D} .

Teorema A.2.2. Dado un cubrimiento \mathcal{D} de X , existe una única topología \mathcal{T} para la cual los elementos de \mathcal{D} son abiertos y cualquier otra topología \mathcal{H} que contenga a \mathcal{D} es más fina que \mathcal{T} , esto es, $\mathcal{T} \subseteq \mathcal{H}$.

Esto motiva la siguiente definición.

Definición A.2.4. Sea (X, \mathcal{T}) un espacio topológico, una *subbase* para la topología \mathcal{T} es una colección $\mathcal{D} \subseteq \mathcal{T}$ con la propiedad que la familia formada por intersecciones finitas de elementos de \mathcal{D} es una base para \mathcal{T} .

A.2.0.2. Topología producto

Sean $\{(X_i, \mathcal{T}_i)\}_{i \in I}$ una familia de espacios topológicos donde I es una familia de índices que puede ser infinita, la idea es dotar al conjunto $X = \prod_{i \in I} X_i$ de una topología que llamaremos la topología producto. Por lo tanto, definimos la *topología producto* como la generada por las subbase \mathcal{S} dada por

$$\mathcal{S} = \{p_i^{-1}(U_i) \mid U_i \in \mathcal{T}_i, i \in I\}.$$

Donde p_i es la proyección i -ésima. Esto significa que la topología producto es la que hace las proyecciones continuas, en este sentido, un abierto U en este espacio es dado por $U = \bigcap_{k=1}^n p_{i_k}^{-1}(U_{i_k})$ o de manera equivalente

$$U = U_{i_1} \times U_{i_2} \times \cdots \times U_{i_n} \times \prod_{\substack{i \in I \\ i \neq i_k \\ k = 1, 2, \dots, n}} X_i.$$

Esto significa que U es un producto donde todos los espacios coordenados son X_i salvo para un número finito de índices i_k donde se tendrán abiertos propios de cada uno de los espacios indexados. Respecto a este espacio tenemos el siguiente resultado.

Teorema A.2.3 ((Tychonoff)). . Sea $X = \prod_{i \in I} X_i$ un espacio con topología producto. Entonces X es compacto si y solo si cada espacio coordenado X_i es compacto.

A.2.0.3. Invariantes topológicos

Los invariantes topológicos se refieren a las propiedades del espacio que permanecen invariantes cuando el espacio se somete a homeomorfismo. Antes de definir formalmente esta idea debemos hablar de espacios topológicamente equivalentes.

Definición A.2.5. Dados (X, \mathcal{T}) y (Y, \mathcal{H}) espacios topológicos, decimos que X es *homeomorfo* a Y o que X es *topológicamente equivalente* a Y si existe un homeomorfismo $h : X \rightarrow Y$. Esta relación la notamos $X \approx Y$.

En este sentido, definimos formalmente los invariantes topológicos.

Definición A.2.6. Una propiedad P del espacio X se llama invariante topológico si todo espacio Y tal que $X \approx Y$ también satisface a P .

Para el propósito de este trabajo resaltamos dos invariantes topológicos.

Proposición A.2.2. *La compacidad es un invariante topológico.*

Otro resultado importante que se utiliza es el que sigue.

Proposición A.2.3. *Dados (X, \mathcal{T}) y (Y, \mathcal{H}) espacios topológicos tales que $X \approx Y$ donde h es el homomorfismo que determina la equivalencia. Sea $D \subseteq X$ denso en X , es decir, $\overline{D} = X$, entonces $h(D)$ es denso en Y .*

Apéndice B

Algoritmos

En este apéndice presentamos los algoritmos que permiten obtener una representación de las órbitas de un punto, las variedades tanto estable como inestable de los puntos fijos, entre otras cuestiones que se pueden abordar computacionalmente.

B.1. La aplicación de Hénon

El siguiente algoritmo permite iterar la aplicación de Hénon tomando como punto inicial cualquier punto del plano y como parámetros cualquier par a,b .

Se abre el editor en blanco y se define la función de Hénon de la siguiente manera:

```
function [X,Y]=HénonIter(P,m,n,a,b)
```

P indica el punto inicial, se debe considerar $m \leq n$, entonces la función muestra las iteraciones $H_{a,b}^m(p), \dots, H_{a,b}^n(p)$. Después se crean unos vectores provisionales que almacenaran las coordenadas x y y de las primeras m iteraciones ademas del punto P .

```
Xpr=zeros(1,m+1);  
Ypr=zeros(1,m+1);
```

Se le asigna a la primera componente de los vectores provisionales los valores de las coordenadas de P .

```
Xpr(1,1)=P(1,1);  
Ypr(1,1)=P(1,2);
```

Teniendo en cuenta que la aplicación de Hénon es dada por $H_{a,b}(x,y) = (a + by - x^2, x)$, se le asigna al resto de componentes los respectivos valores de las iteraciones de $H_{a,b}$ de la siguiente manera:

```
for i=2:m+1  
    Ypr(1,i)=(Xpr(1,i-1));  
    Xpr(1,i)=a+b*(Ypr(1,i-1))-((Xpr(1,i-1))^2);  
end
```

Se bautizan los vectores definitivos X y Y de manera que tengan longitud $n - m + 1$ y sus componentes en principio solo contienen ceros.

```
X=zeros(1,n-m+1);  
Y=zeros(1,n-m+1);
```

Se le asigna a la primera componente de X y Y los valores de las coordenadas de $H_{a,b}^m(P)$.

```
X(1,1)=Xpr(1,m+1);  
Y(1,1)=Ypr(1,m+1);
```

Se le asigna al resto de componentes los respectivos valores de las iteraciones de $H_{a,b}^{m+1}(p), \dots, H_{a,b}^n(p)$ de la siguiente manera:

```

for i=2:n-m+1
    Y(1,i)=(X(1,i-1));
    X(1,i)=a-((X(1,i-1))^2)+(b*(Y(1,i-1)));
end

```

Por lo tanto, se han generado $n - m + 1$ puntos que representan las iteraciones mencionadas antes. Para gratificar de manera correcta se recomienda utilizar las siguientes instrucciones:

```

[X,Y]=HenonIter(P,n,m,a,b);
plot(X,Y,'.k','LineWidth',.5,'MarkerSize',.5);

```

Por ejemplo, la siguiente instrucción en la ventana *command windows*:

```

>> [X,Y]=HenonIter([0,0],100,5000,1.4,0.3);
>> plot(X,Y,'.k','LineWidth',.5,'MarkerSize',.5);

```

genera la siguiente figura:

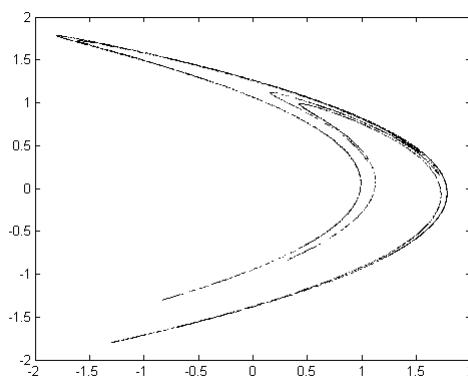


Figura B.1.1: 5000 iteraciones de $P = (0,0)$ bajo $H_{a,b}$ con $a = 1,4$ y $b = 0,3$ omitiendo las primeras 100 iteraciones.

Iteraciones puntuales de $H_{a,b}$.

En ocasiones se requiere una iteración puntual, por ejemplo la iteración m , para tal fin la siguiente función es útil. La programación es similar a lo anterior.

Se define la función donde los parámetros P , m , a y b son iguales que antes la diferencia es que desaparece n .

```
function [X,Y]=Henon(P,m,a,b)
```

Se repiten los mismos pasos que antes hasta cierto punto como se ve a continuación:

```

Xpr=zeros(1,m+1);
Ypr=zeros(1,m+1);

Xpr(1,1)=P(1,1);
Ypr(1,1)=P(1,2);

for i=2:m+1
    Ypr(1,i)=(Xpr(1,i-1));
    Xpr(1,i)=a+b*(Ypr(1,i-1))-((Xpr(1,i-1))^2);
end

```

Se finaliza con la siguiente instrucción que asigna el valor de las coordenadas x y y de la iteración m de $H_{a,b}$ a X y Y respectivamente.

```

X=Xpr(1,m+1);
Y(1,1)=Ypr(1,m+1);

```

De manera similar se programa la iteración m -esima de $H_{a,b}^{-1}$ en un punto P , los detalles son los mismos, a continuación el código:

```
function [X,Y]=HenonInversa(P,m,a,b)
Xpr=zeros(1,m+1);
Ypr=zeros(1,m+1);

Xpr(1,1)=P(1,1);
Ypr(1,1)=P(1,2);
for i=2:m+1
    Ypr(1,i)=(Xpr(1,i-1)-a+(Ypr(1,i-1))^2)/b;
    Xpr(1,i)=Ypr(1,i-1);
end

X=Xpr(1,m+1);
Y=Ypr(1,m+1);
```

B.2. Variedad estable de la aplicación de Hénon

El siguiente algoritmo permite gratificar en el programa computacional MATLAB la variedad estable de la aplicación de Hénon $H_{a,b}$ para el punto fijo p_+ en los parámetros a y b que lo hacen de tipo silla.

Se abre el editor en blanco y se define la función que permite obtener la curva de la siguiente manera:

```
function [X,Y]=VariedadEstablePmas(n,a,b)
```

Se define p_+ de acuerdo a la expresión obtenida en la Subsección 2.2.2.1.

```
pmas=[(b-1+sqrt((b-1)^2+4*a))/2,(b-1+sqrt((b-1)^2+4*a))/2];
```

Es fácil ver que el vector propio estable es dado por la expresión

$$v_s = \left[\left(1 - b - \sqrt{(b-1)^2 + 4a} \right) + \sqrt{4b + \left(b - 1 + \sqrt{(b-1)^2 + 4a} \right)^2}, 1 \right].$$

Se define v_s de la siguiente manera:

```
vectS=[(1-b-sqrt((b-1)^2+4*a)+sqrt(4*b+(b-1+sqrt((b-1)^2+4*a))^2))/2,1];
```

Procedemos a generar el segmento J mencionado en la Subsección 2.2.3, en primer lugar se toma una parte de v_s suficientemente pequeña al rededor de 10^{-11} respecto a la longitud de v_s :

```
N=1000000;
delta1=(0.0001/N)*vectS(1);
delta2=(0.0001/N)*vectS(2);
```

Se procede a generar el segmento J , primero se definen los vectores que almacenan las componentes x y y de los puntos de J , inicialmente se definen almacenando ceros:

```
segmentoJx=zeros(1,N);
segmentoJy=zeros(1,N);
```

Seguido, se almacenen los puntos de J de la siguiente manera:

```
for i=1:N
    segmentoJx(i)=pmas(1)+(i-N/2)*delta1;
    segmentoJy(i)=pmas(2)+(i-N/2)*delta2;
end
```

Para generar la variedad estable se define un vector de puntos que llamamos `Westable`, inicialmente se almacena el segmento J .

```
Westable=[segmentoJx;segmentoJy];
```

Después se almacenan los demás puntos, es decir, los puntos de $H_{a,b}(J)$ hasta $H_{a,b}^{-n}(J)$ de la siguiente forma:

```

for i=1:n
  for j=1:N
    [Westable(1,j+i*N),Westable(2,j+i*N)]=HenonInversa([segmentoJx(j),segmentoJy(j)],i,a,b)
  ;
  end
end

```

Aún no hemos finalizado, **Westable** tiene un problema que radica en que Matlab al graficar une los puntos de acuerdo al orden que los presenta el vector, esto no es conveniente ya que lo que se busca es graficar la unión de una imágenes, para solventar esta situación se dispondrán las coordenadas x de los puntos en una matriz de tamaño $N \times (n + 1)$ y las coordenadas y en otra matriz de tamaño $N \times (n + 1)$, estas matrices son X y Y respectivamente. Inicialmente se definen los siguientes vectores provisionales que almacenan las coordenadas x y y de los puntos en **Westable**:

```

Xprov=estable(1,:);
Yprov=estable(2,:);

```

Luego, se definen X y Y , inicialmente como matrices de ceros:

```

X=zeros(N,n+1);
Y=zeros(N,n+1);

```

Por ultimo se procede a almacenar los datos mencionados antes en X y Y por medio de la siguiente rutina.

```

for j=1:n+1
  for i=1:N
    X(i,j)=Xprov((j-1)*(N)+i);
    Y(i,j)=Yprov((j-1)*(N)+i);
  end
end

```

Para graficar la la variedad estable se puede usar la siguiente rutina en la ventana *command windows*:

```

>> [X,Y]=VariedadEstableHenonPmas(9,1.4,0.3);
>> plot(X,Y,'r'); axis([-R-5,R,-R-10,R+15])

```

donde R es el mencionado en la Subsubsección 2.3.1.1.

Para el caso de la variedad inestable el algoritmo es similar, basta con hacer dos cambios en algoritmo anterior, el primero es reemplazar v_s por v_u que es el vector propio inestable, y el segundo es reemplazar **Henon Inversa** por **Henon**.

Bibliografía

- [1] J. Sotomayor., *Lições de equações diferenciais ordinárias*, IMPA, Brasilia, (1979)
- [2] M. Hénon., *A two-dimensional mapping with a strange attractor*, En: Communications in Mathematical Physics Vol 50, Springer, Nice, (1976)
- [3] R. L. Devaney., *An introduction to Chaotic Dynamical Systems*, second edition, Addison-Wesley, Boston, (1989).
- [4] R.L. Devaney, Z. Nitecki., *Shift Automorphism in the Hénon Mapping*, En: Communications in Mathematical Physics Vol 67, Springer, Massachusetts, (1979)
- [5] J. Vries., *Elements of Topological Dynamics*, Springer, New York, (1982)
- [6] L. Mora, N. Romero., *Introducción a los sistemas dinámicos: via la aplicación de Hénon*, IMCA, Lima, (2000)
- [7] G. Rubiano. *Topología general: un primer curso*, UNAL, Bogota, (2010)
- [8] R. Oberste-Vorth. *Complex horseshoes and the dynamics of mappings of two complex variables*. Tesis Doctoral, Cornell University (1987)
- [9] J. Banks, J. Brooks, G. Cairns, G. Davis, P. Stacey. *On Devaney's Definition of Chaos*, En: The American Mathematical Monthly, Vol. 99, pp 332-334 (1992)
- [10] M. Sambarino. *Hiperbolicidad y Estabilidad*, Instituto Venezolano de investigaciones Científicas, Caracas, (2009)
- [11] P. Hartman. *Ordinary differential equations*, Willey, New York, (1964)
- [12] M. Shub, *Global Stability of Dynamical Systems*, Springer-Verlag, New York, (1978)
- [13] M. Hirsch, C. Pugh, M. Shub, *Invariant Manifolds*, En: Springer Lecture Notes in Mathematics, vol. 583, Springer, New York, (1977)
- [14] J. Palis, W. de Melo, *Geometric Theory of Dynamical Systems: An introduction*. Springer Verlag, New York, (1982)
- [15] D. K. Arrowsmith, C.M. Place, *An introduction to dynamical systems*, Cambridge University Press, New York (1990)
- [16] S. Newhouse, J. Palis, *Bifurcations of Morse-Smale dynamical systems*, En: *Dynamical Systems*, M Peixoto, Academic Press, New York, (1973)
- [17] M. Spivak, *Calculus on Manifolds*, Addison-Wesley, New York, (1965)
- [18] J. Cicedo, *Calculo avanzado: Introducción*, Universidad Nacional de Colombia, Bogotá, (2012)

- [19] G. H. Hhoe, *Computational Ergodic Theory*, Springer, Berlin, (2005)
- [20] J. Mendoza, *Teoria da poda na família da Hénon*, Tesis de doctorado, Universidad de São Paulo, São Paulo, (2011)