Grafos dirigidos y los problemas de máximo flujo y mínimo flujo

Diego F. Fonseca V. & Juan Sebastian Osorio ⋆

Resumen. Este proyecto consiste en establecer la relación entre los problemas de máximo flujo y mínimo corte en una red, además se presentaran un algoritmo para solucionarlo y se finaliza con dos aplicaciones, una referente a la elección de una *correspondencia bipartita máxima* y la otra referente a la *segmentación de imágenes.*

Palabras clave: Grafo, red ,máximo flujo, mínimo corte.

1 Introducción

Las redes en el sentido de la teoría de grafos modelan diferentes situaciones en diversos contextos, a partir de este objeto emergen diferentes preguntas acerca de este, la primera vez que se expuso una red como el objeto matemático que definiremos en este proyecto fue a mediados de los años 50's en pleno inicio de la guerra fría, la fuerza aérea norteamericana publicó un reporte estudiando la red de rieles que conectaba Unión Soviética con sus ciudades satélite que se encontraban en el este de Europa, dicha red fue modelada como un grafo con 44 vértices que representan las regiones y 105 aristas que representan las conexiones entre dichas regiones, cada arista tenia un peso que correspondía a la velocidad máxima en la cual el material podía ser enviado de una región a otra. La pregunta es ¿cual es la cantidad máxima de material que puede ser enviado desde Rusia hasta Europa? el intento por responder esta pregunta dio origen al concepto de máximo flujo en un grafo pesado y en concreto al problema de máximo flujo que analizaremos en este proyecto. En la Sección 1 definiremos el concepto de grafo dirigido y red, luego, en la Sección 2 se establece la relación entre *el problema de máximo flujo* (max flow) y otro problema importante llamado *el problema de mínimo corte (min cut)*, en la Sección 3 se presentan dos algoritmos para abordar el problema de máximo flujo, y finalmente, en la Sección 4 se exponen algunas aplicaciones del concepto de red.

2 Grafos dirigidos

Para poner en contexto el área en el que se desarrollará este proyecto es importante establecer que el principal objeto de estudio serán las *redes*, para definirlas se requiere del concepto de *grafo dirigido*, en ese sentido tenemos lo siguiente:

Definición 1. *Un grafo G es un par $G = (V, E)$ donde V es un conjunto finito de nodos ó vértices y E tiene como elementos subconjuntos de V de cardinalidad dos llamados* ***aristas****. Un* ***grafo dirigido*** *o* ***digrafo*** *es un grafo con direcciones asignadas a sus vértices, formalmente, un grafo dirigido D es un par $D = (V, A)$ donde $A \subseteq V \times V$ es un conjunto de* ***pares ordenados*** *llamados* ***arcos****. Dado un vértice v en un grafo dirigido llamamos* ***grado interno*** *al numero de aristas que ingresan al vértice y* ***grado externo*** *al numero de aristas que salen del vértice.*

Finalmente, definimos el concepto de *red* como sigue:

Definición 2. *Una red $R = (s, t, V, A, c)$ es un grafo dirigido (V, A) junto con un vértice $s \in V$ de grado interno 0 que llamamos fuente, un vértice $t \in V$ de grado externo 0 que llamamos terminal y una capacidad $c(u, v) \in \mathbb{Z}_+$ para cada $(u, v) \in A$.*

⋆ Universidad de los Andes, Bogotá, Colombia.

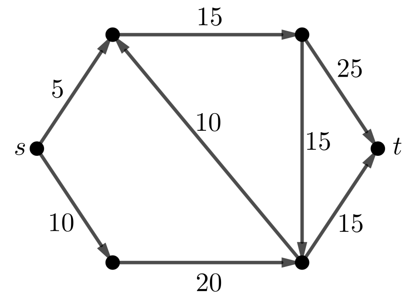


Fig. 2.1. Ejemplo de una red.

3 El problema de máximo flujo/mínimo corte

En el contexto de los grafos dirigidos y redes debemos establecer algunos conceptos que permitirán formular el problema de de máximo flujo/mínimo corte, dichos conceptos son *flujo* y *s-t corte* en un red.

Definición 3. *Un* ***flujo*** *en R es un vector en $\mathbb{R}^{|A|}$ (una componente $f(u,v)$ para cada arco $(u,v) \in A$) tal que:*

1. $0 \leq f(u,v) \leq c(u,v)$ *para todo* $(u,v) \in A$.
2. $\displaystyle\sum_{(u,v)\in A} f(u,v) = \sum_{(v,u)\in V} f(v,u)$ *para todo* $v \in V \setminus \{s,t\}$. *(ley de conservación)*

El ***valor*** *del flujo f es* $|f| := \displaystyle\sum_{(s,u)\in A} f(s,u)$.
Una arista (u,v) se dice ***saturado*** *si* $f(u,v) = c(u,v)$.

Definición 4. *Un* ***s-t corte*** *en N es una partición $(\mathcal{S},\mathcal{T})$ de V en dos conjuntos tales que $s \in \mathcal{S}$ y $t \in \mathcal{T}$. Considerando el conjunto $A' := \{(u,v) \in A \mid u \in \mathcal{S},\ v \in \mathcal{T}\}$ se define la* ***capacidad*** *de un s-t corte como*

$$C(\mathcal{S},\mathcal{T}) := \sum_{(u,v)\in A'} c(u,v).$$

Dada una red R como en la sección anterior, el ***problema de máximo flujo*** consiste en encontrar un flujo f de N tal que su valor $|f|$ sea lo máximo posible, esto significa encontrar f tal que sea la solución óptima del problema de optimización

$$\max_{f \text{ flujo en } R} |f|\,. \tag{1}$$

Por otro lado, el ***problema de mínimo corte*** consiste en encontrar un *s-t corte* $(\mathcal{S},\mathcal{T})$ en R de tal manera que la capacidad $C(\mathcal{S},\mathcal{T})$ sea lo menor posible, es decir, encontrar un *s-t corte* $(\mathcal{S},\mathcal{T})$ que sea solución óptima del problema de optimización

$$\min_{(\mathcal{S},\mathcal{T})\ s-t \text{ corte en } R} C(\mathcal{S},\mathcal{T}). \tag{2}$$

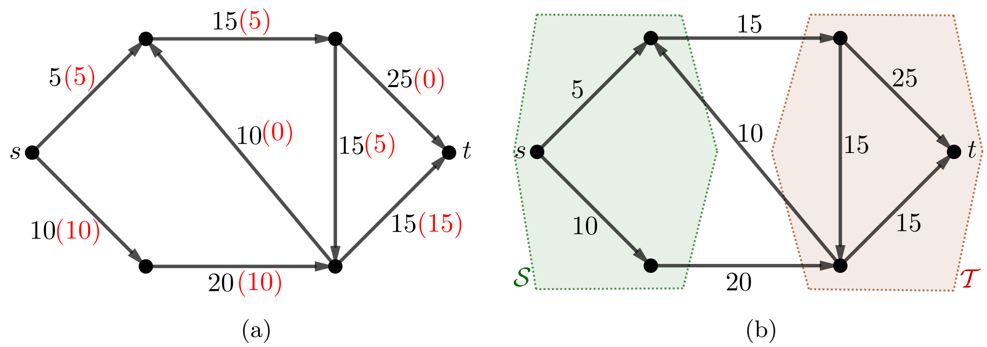


Fig. 3.1. (a) Ejemplo de una red cuyas capacidades están en negro y el flujo en rojo. (b) Ejemplo de un *s-t corte* en una red.

Los problemas (1) y (2) están estrictamente relacionados, relación que es establecida y demostrada en el siguiente teorema enunciado y demostrado por L.R. Ford, Jr. & D.R. Fulkerson en [1].

Teorema 1 (Theorema Max flow/min cut). *Sea $R = (s, t, V, A, c)$ una red con nodos y fuente s y t respectivamente, y capacidad c. Entonces el valor máximo que puede tener un flujo en R es igual a el mínimo valor que puede tener un $s - t$ corte en R.*

Para desarrollar la demostración del teorema anterior se requiere establecer algunos conceptos y resultados previos. En ese sentido, en una red $R = (s, t, V, A, c)$ dado un subconjunto de vértices $U \subseteq V$ se definen los conjuntos de **aristas salientes** y **aristas entrantes** de U respectivamente como

$$\alpha_+(U) := \{(u, v) \in A \,|\, u \in U,\ v \in V \setminus U\} \quad \text{y} \quad \alpha_-(U) := \{(v, u) \in A \,|\, u \in U,\ v \in V \setminus U\}.$$

Estos conjuntos permiten reescribir el valor de un flujo f y la capacidad de un *s-t coste* $(\mathcal{S}, \mathcal{T})$ como

$$|f| = \sum_{e \in \alpha_+(\{s\})} f(e) \quad \text{y} \quad C(\mathcal{S}, \mathcal{T}) = \sum_{e \in \alpha_+(\mathcal{S})} c(e). \tag{3}$$

Además, también permiten inferir $\alpha_+(\mathcal{T}) = \alpha_-(\mathcal{S})$. El siguiente lema establece una relación entre un flujo y un corte cualesquiera.

Lema 1. *Sea f un flujo en la red $R = (s, t, V, A, c)$. Si $(\mathcal{S}, \mathcal{T})$ es un s-t corte en R, entonces se tiene lo siguiente:*

$$|f| = \sum_{e \in \alpha_+(\mathcal{S})} f(e) - \sum_{e \in \alpha_-(\mathcal{S})} f(e).$$

El siguiente corolario establece que el flujo de mayor valor posible es menor que la capacidad del *s-t corte* de menor capacidad posible.

Corolario 1. *Los valores del máximo flujo y el mínimo corte en una red R son acotados por*

$$\max_{f \text{ flujo en } R} |f| \leq \min_{(\mathcal{S},\mathcal{T})\ s-t \text{ corte en } R} C(\mathcal{S}, \mathcal{T}). \tag{4}$$

La distracción del Teorema 1 consiste en probar que la desigualdad propuesta en (4) es en realidad una igualdad, para tal fin es suficiente con demostrar que para cualquier flujo que tenga el valor máximo posible existe un corte que tiene la capacidad mínima posible y dicha capacidad del corte es igual al valor del flujo. Antes de proceder con la demostración requerimos del siguiente concepto.

Definición 5 (Red residual). *Dada una red $R = (s, t, V, A, c)$ y un flujo f en esta red, se define la* ***red residual*** *de R como $R_f = (s, t, V_f, A_f, c_f)$ donde*

- $V_f = V$.
- *Llamando $A_{\leftarrow} := \{(v, u) \mid (u, v) \in A\}$ y $A_{\rightarrow} := A$ se define $A_f := A_{\rightarrow} \cup A_{\leftarrow}$.*
- *Si $e = (u, v) \in A$ y $f(e) \leq c(e)$ entonces existe una arista $e_{\rightarrow} := (u, v) \in A_{\rightarrow}$ y $c_f(e_{\rightarrow}) = c(e) - f(e)$.*
- *Si $e = (u, v) \in A$ y $f(e) > 0$ entonces existe una arista $e_{\leftarrow} := (v, u) \in A_{\leftarrow}$ y $c_f(e_{\leftarrow}) = f(e)$.*

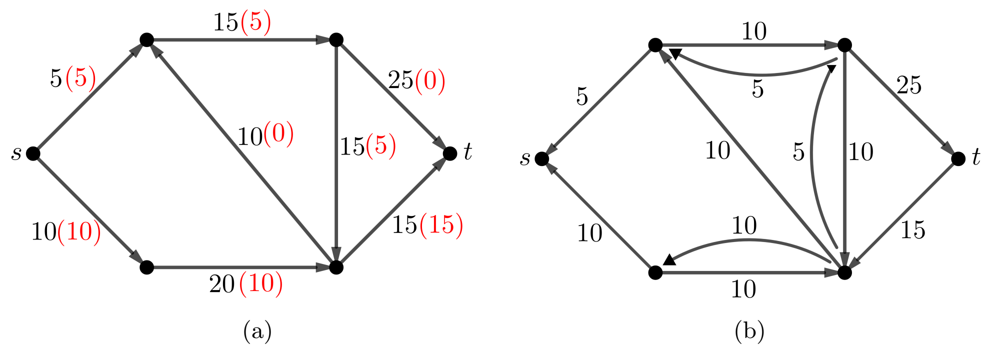


Fig. 3.2. Ejemplo de una red con un flujo y su red residual. (a) La red con el flujo cuyas capacidades están en negro y el flujo en rojo. (b) La red residual correspondiente.

Ahora estamos en capacidad de demostrar el Teorema 1.

*Demostración (**Demostración del Teorema 1 Max flow/min cut**).* Sea f^* un flujo máximo, es decir

$$f^* \in \underset{f \text{ flujo en } R}{\arg\max} \, |f| \, .$$

Llamamos un ***s-t camino residual*** a un camino en R_f que conecta a s con t tal que no repite aristas y si $(u, v) \in P$ entonces $(v, u) \notin P$.
En primer lugar vamos a demostrar que para este flujo f^* ***no existe un camino residual que conecta** s **con** t **en la red residual*** R_{f^*}, en efecto, por contradicción, supongamos que existe un camino que conecta a s con t en R_f y que no repite aristas, asumamos que dicho camino es el siguiente

$$P : \; s = v_0 \to v_1 \to \cdots \to v_{n-1} \to v_n = t. \tag{5}$$

Sea $r = \min_{i=0,\ldots,n} c_{f^*}(v_i)$ el cual denota la maxima cantidad de flujo que puede ser enviada desde s a t por el camino en (5) de R_f, a partir de esto último definimos un nuevo flujo f' en R el cual para $(u, v) \in A$ es dado por

$$f'(u, v) := \begin{cases} f^*(u, v) + r & \text{si } (u, v) \in P, \\ f^*(u, v) - r & \text{si } (v, u) \in P, \\ f^*(u, v) & \text{en otro caso.} \end{cases}$$

Debemos verificar que f' es un flujo factible, es decir, verificar las condiciones 1 y 2 de la Definición 3 para la red R, en ese sentido, sea $(u, v) \in A$, entonces tenemos que analizar dos casos, el primero es si $(u, v) \in P$, en este caso por como se definió f' se sigue $0 \leq f^*(u, v) \leq f'(u, v)$ y además

$$f'(u, v) = f^*(u, v) + r$$

$$
\begin{aligned}
&\leq f^*(u,v) + c_{f^*}(u,v) && \text{por definición de } r\\
&= f^*(u,v) + c(u,v) - f^*(u,v) && \text{por definición de } c_{f^*}\\
&= c(u,v).
\end{aligned}
$$

El otro caso es cuando $(v,u) \in P$, entonces por como se definió f' se sigue $f'(u,v) \leq f^*(u,v) \leq c(u,v)$ y además

$$
\begin{aligned}
f'(u,v) &= f^*(u,v) - r\\
&\leq f^*(u,v) - c_{f^*}(u,v) && \text{por definición de } r\\
&= f^*(u,v) - f^*(u,v) && \text{por definición de } c_{f^*}\\
&= 0.
\end{aligned}
$$

Por lo tanto, hemos demostrado que $0 \leq f'(u,v) \leq c(u,v)$ que es la condición 1 de la Definición 3, para la condición 2 consideramos los conjuntos

$$
\begin{aligned}
\alpha_+^{P_{\text{in}}}(\{v\}) &:= \{(v,u) \in \alpha_+(\{v\}) |\, (v,u) \in P\}, \quad \alpha_-^{P_{\text{in}}}(\{v\}) := \{(u,v) \in \alpha_-(\{v\}) |\, (u,v) \in P\},\\
\alpha_+^{P_{\text{out}}}(\{v\}) &:= \{(v,u) \in \alpha_+(\{v\}) |\, (u,v) \in P\}, \quad \alpha_-^{P_{\text{out}}}(\{v\}) := \{(u,v) \in \alpha_-(\{v\}) |\, (v,u) \in P\},\\
\alpha_+^{P_\phi}(\{v\}) &:= \left\{ (v,u) \in \alpha_+(\{v\}) \;\middle|\; \begin{matrix} (v,u) \notin P, \\ (u,v) \notin P \end{matrix} \right\} \quad \text{y} \quad \alpha_-^{P_\phi}(\{v\}) := \left\{ (u,v) \in \alpha_-(\{v\}) \;\middle|\; \begin{matrix} (v,u) \notin P, \\ (u,v) \notin P \end{matrix} \right\}.
\end{aligned}
$$

Entonces se tiene $\alpha_+(\{v\}) = \alpha_+^{P_{\text{in}}}(\{v\}) \sqcup \alpha_+^{P_{\text{out}}}(\{v\}) \sqcup \alpha_+^{P_\phi}(\{v\})$ y $\alpha_-(\{v\}) = \alpha_-^{P_{\text{in}}}(\{v\}) \sqcup \alpha_-^{P_{\text{out}}}(\{v\}) \sqcup \alpha_-^{P_\phi}(\{v\})$, además también se puede inferir que

$$
\left|\alpha_+^{P_{\text{in}}}(\{v\})\right| = \left|\alpha_-^{P_{\text{in}}}(\{v\})\right|, \quad \left|\alpha_+^{P_{\text{out}}}(\{v\})\right| = \left|\alpha_-^{P_{\text{out}}}(\{v\})\right| \quad \text{y} \quad \left|\alpha_+^{P_\phi}(\{v\})\right| = \left|\alpha_-^{P_\phi}(\{v\})\right|. \tag{6}
$$

Por lo tanto, de lo inmediatamente anterior y del hecho que f^* es un flujo se sigue

$$
\begin{aligned}
\sum_{e \in \alpha_+(\{v\})} f'(e) &= \sum_{e \in \alpha_+^{P_{\text{in}}}(\{v\})} f'(e) + \sum_{e \in \alpha_+^{P_{\text{out}}}(\{v\})} f'(e) + \sum_{e \in \alpha_+^{P_\phi}(\{v\})} f'(e)\\
&= \sum_{e \in \alpha_+^{P_{\text{in}}}(\{v\})} (f^*(e) + r) + \sum_{e \in \alpha_+^{P_{\text{out}}}(\{v\})} (f^*(e) - r) + \sum_{e \in \alpha_+^{P_\phi}(\{v\})} f^*(e)\\
&= \sum_{e \in \alpha_+^{P_{\text{in}}}(\{v\})} f^*(e) + \sum_{e \in \alpha_+^{P_{\text{out}}}(\{v\})} f^*(e) + \sum_{e \in \alpha_+^{P_\phi}(\{v\})} f^*(e) + r\left|\alpha_+^{P_{\text{in}}}(\{v\})\right| - r\left|\alpha_+^{P_{\text{out}}}(\{v\})\right|\\
&= \sum_{e \in \alpha_+(\{v\})} f^*(e) + r\left|\alpha_+^{P_{\text{in}}}(\{v\})\right| - r\left|\alpha_+^{P_{\text{out}}}(\{v\})\right|\\
&= \sum_{e \in \alpha_-(\{v\})} f^*(e) + r\left|\alpha_-^{P_{\text{in}}}(\{v\})\right| - r\left|\alpha_-^{P_{\text{out}}}(\{v\})\right| \quad \leftarrow \text{por (6) y ser } f^* \text{ un flujo.}\\
&= \sum_{e \in \alpha_-^{P_{\text{in}}}(\{v\})} f^*(e) + \sum_{e \in \alpha_-^{P_{\text{out}}}(\{v\})} f^*(e) + \sum_{e \in \alpha_-^{P_\phi}(\{v\})} f^*(e) - r\left|\alpha_-^{P_{\text{out}}}(\{v\})\right|\\
&= \sum_{e \in \alpha_-^{P_{\text{in}}}(\{v\})} (f^*(e) + r) + \sum_{e \in \alpha_-^{P_{\text{out}}}(\{v\})} (f^*(e) - r) + \sum_{e \in \alpha_-^{P_\phi}(\{v\})} f^*(e)\\
&= \sum_{e \in \alpha_-^{P_{\text{in}}}(\{v\})} f'(e) + \sum_{e \in \alpha_-^{P_{\text{out}}}(\{v\})} f'(e) + \sum_{e \in \alpha_-^{P_\phi}(\{v\})} f'(e)
\end{aligned}
$$

$$= \sum_{e\in\alpha_-(\{v\})} f'(e).$$

Lo que demuestra la condición 2 de la Definición 3. Ahora calcularemos el valor del flujo f', en efecto, notemos que (s, v_1) es la única arista de P que también pertenece a $\alpha_+(\{s\})$, entonces se tiene

$$\begin{aligned}
|f'| &= \sum_{e\in\alpha_+(\{s\})} f'(e) \\
&= \sum_{e\in\alpha_+(\{s\})\setminus\{(s,v_1)\}} f'(e) + f'(s, v_1) \\
&= \sum_{e\in\alpha_+(\{s\})\setminus\{(s,v_1)\}} f^*(e) + f^*(s, v_1) + r \\
&= \sum_{e\in\alpha_+(\{s\})} f^*(e) + r \\
&= |f^*| + r.
\end{aligned}$$

Por lo tanto $|f'| > |f^*|$, lo que contradice que f^* es un flujo de valor máximo.
Hemos demostrado que para f^* *no existe un camino residual que conecta* s *con* t *en la red residual* R_{f^*}, con esta certeza en mente vamos a construir un *s-t corte* cuya capacidad sea igual al valor de f^*, en efecto, sea $\mathcal{S}$ el conjunto de vértices que son alcanzables[1] por s en R_f, de este conjunto tenemos las siguientes consecuencias:

(*i*) $t \notin \mathcal{S}$.
(*ii*) Las aristas en $\alpha_+(\mathcal{S})$ son saturadas.
(*iii*) Las aristas en $\alpha_-(\mathcal{S})$ no llevan ningún flujo.

La consecuencia (*i*) se sigue de la definición de $\mathcal{S}$ y de lo certeza que demostramos en la primera parte de esta prueba. Para demostrar (*ii*) supongamos que no se tiene, entonces existe una arista $(u, v) \in \alpha_+(\mathcal{S})$ que no es saturada, es decir, $f(u, v) \leq c(u, v)$, $v \in \mathcal{S}$ y $v \notin \mathcal{S}$, esto implica que $c_f(u, v) > 0$ en R_f, entonces v es alcanzable por s, lo que significa que $v \in \mathcal{S}$ lo cual es una contradicción.
De manera análoga para demostrar (*iii*) supongamos que no se tiene, entonces existe $(v, u) \in \alpha_-(\mathcal{S})$ con flujo no nulo, es decir, $f(v, u) > 0$, $v \notin \mathcal{S}$ y $u \in \mathcal{S}$, esto implica que la arista (u, v) esta en R_f y tiene capacidad residual $c_f(u, v) = f(u, v) > 0$, esto implica que v es alcanzable por s en R_f, de donde se sigue $v \in \mathcal{S}$ lo cual es una contradicción.
Por lo tanto, el *s-t corte* propuesto es $(\mathcal{S}, \mathcal{T})$ donde $\mathcal{T} = V \setminus \mathcal{S}$, y por (*i*), (*ii*) y (*ii*) y el Lema 1 se concluye

$$|f| = \sum_{e\in\alpha_+(\mathcal{S})} f(e) - \sum_{e\in\alpha_-(\mathcal{S})} f(e) = \sum_{e\in\alpha_+(\mathcal{S})} c(e) = C(\mathcal{S}, \mathcal{T}).$$

Entonces, por el Corolario 1 se obtiene

$$\max_{f \text{ flujo en } R} |f| = \min_{(\mathcal{S},\mathcal{T})\ s-t \text{ corte en } R} C(\mathcal{S}, \mathcal{T}).$$

Siendo esto último lo que se quería demostrar. □

El Teorema 1 tiene como consecuencia que es suficiente con solucionar uno de los problemas para solucionar ambos. En las siguientes subsecciones abordamos dos algoritmos que se encargan de aproximar una solución de dichos problemas.

[1] "Alcanzable" se refiere a que existe un camino desde s a dicho vértice en R_{f^*}.

3.1 Algoritmo de Ford-Fulkerson

Bajo ciertas condiciones impuestas en la capacidad de la red R la siguiente rutina conocida como el Algoritmo de Ford-Fulkerson (ver Algoritmo 1) permite obtener el flujo de valor máximo y el $s-t$ corte de capacidad mínima, este algoritmo se basa en la idea de la demostración del Teorema1 que presentamos en este documento.

Algorithm 1: Algoritmo de Ford-Fulkerson

```
Input: Una red R = (s, t, V, A, c)
Output: El flujo máximo f
Inicialización;
f(e) ← 0 para todas las aristas en R.
Construya la red residual R_f.
while mientras exista un s-t camino residual P en R_f do
    r ← ∞
    for para cada arista (u, v) en P do
        r ← min {r, c_f(u, v)}
    end
    for para cada arista (u, v) en P do
        if (u, v) ∈ A then
            f(u, v) ← f(u, v) + r
        else
            f(v, u) ← f(v, u) − r
        end
    end
    Actualice el grafo residual R_f.
end
return f
```

En el algoritmo de Ford-Fulkerson se observa que en cada iteración del ***while*** se debe elegir un *s-t camino residual*[2] en R_f, en ese punto pueden existir varios *s-t camino residual* en R_f y se debe elegir uno, asumiendo que esta garantizado que el algoritmo para se tiene que independientemente de la opción de *s-t camino residual* que se tome el algoritmo de Ford-Fulkerson siempre terminara retornando el mismo flujo, esto es evidenciado con un ejemplo en la Figura 3.3 en donde el algoritmo solo requirió de 2 iteraciones.

Sin embargo, el algoritmo de Ford-Fulkerson no es perfecto, solo se tiene garantía que este parará si la capacidad de la red R solo toma valores racionales, para demostrar esto último es suficiente con garantizarlo para capacidades enteras.

Teorema 2. *Si las capacidades de la red $R = (s, t, V, A, c)$ son valores enteros, entonces el algoritmo de Ford-Fulkerson encontrará un flujo de valor máximo en un tiempo finito.*

Si R es una red con capacidades racionales creamos un nuevo grafo R^* en donde lo único que se cambia respecto a R es la capacidad c por una nueva capacidad c^* la cual se define como $c^* = Kc$ donde K es un numero grande elegido de tal manera que haga $kc(e)$ entero para cualquier arista e en la red. Esta nueva red tiene capacidades enteras de modo que el algoritmo de Ford-Fulkerson converge y arrojara un flujo de valor máximo $\widetilde{f}$ para R^*, esto implica que $\frac{1}{K}\widetilde{f}$ es un flujo de valor máximo para R. Una observación importante es que por lo general el algoritmo de Ford-Fulkerson con capacidades enteras corre a una taza $\mathcal{O}(|A| \cdot U)$ donde $U = \max_e c(e)$ y el algoritmo con capacidades racionales corre $\mathcal{O}(|A| \cdot K \cdot U)$ lo que significa que tarda mas en terminar el proceso cuando la red

[2] En la literatura de este tema a los *caminos residuales* también se les suele llamar *caminos aumentados.*

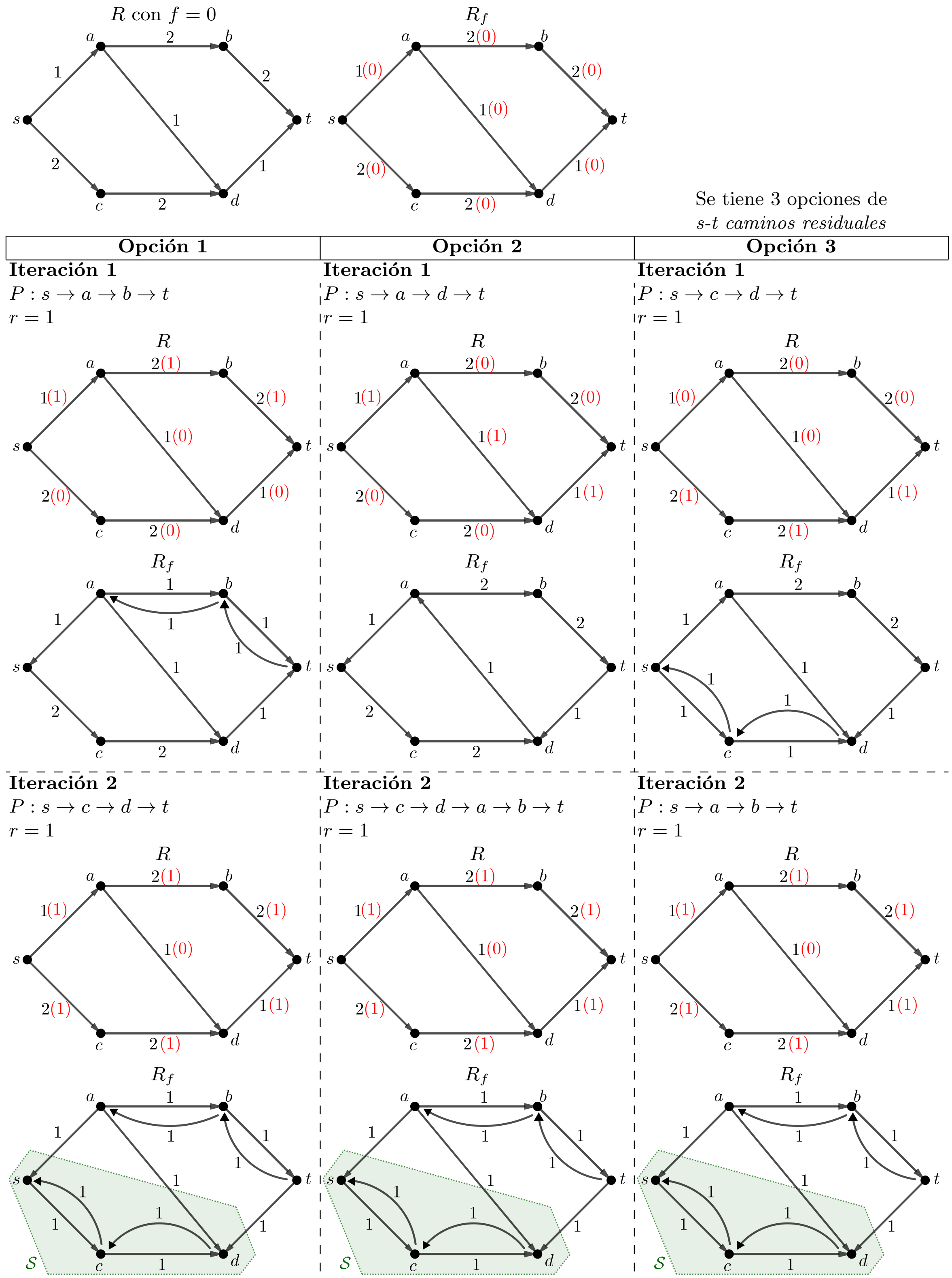


Fig. 3.3. Ejecución del algoritmo de Ford-Fulkerson en una red R dada mostrando las opciones que pude tomar el algoritmo. Este ejemplo solo tardo 2 iteraciones de ***while***.

tiene capacidades racionales. En la practica la taza $\mathcal{O}(|A| \cdot U)$ hace del algoritmo de Ford-Fulkerson un algoritmo no muy eficiente sobretodo cuando se esta trabajando con imágenes.

3.2 Algoritmo de Edmonds y Karp

En el algoritmo de Ford-Fulkerson es altamente probable que no funcione correctamente para redes con capacidades irracionales, esto en la practica no es un inconveniente tan determinante ya que computacionalmente los ordenadores no admiten números irracionales, los ordenadores redondean dichos números con números racionales, sin embargo, este nuevo algoritmo llamado el algoritmo de Edmonds y Karp solventa este inconveniente, este es una variación del algoritmo de Ford-Fulkerson con la diferencia que en Edmonds y Karp se intenta realizar una elección del camino residual mas coherente, en este caso se elige el *s-t camino residual* mas corto, elegir este camino requiere de otro algoritmo llamado *Búsqueda de amplitud* (Breadth-first search).

Algorithm 2: Algoritmo de Edmonds-Karp

```
Input: Una red R = (s, t, V, A, c)
Output: El flujo máximo f
Inicialización;
f(e) ← 0 para todas las aristas en R.
Construya la red residual R_f.
P ← Breadth-first search(R_f, s, t).
while P ≠ φ do
    r ← ∞
    for para cada arista (u, v) en P do
        r ← min {r, c_f(u, v)}
    end
    for para cada arista (u, v) en P do
        if (u, v) ∈ A then
            f(u, v) ← f(u, v) + r
        else
            f(v, u) ← f(v, u) − r
        end
    end
    Actualice el grafo residual R_f.
    P ← Breadth-first search(R_f, s, t).
end
return f
```

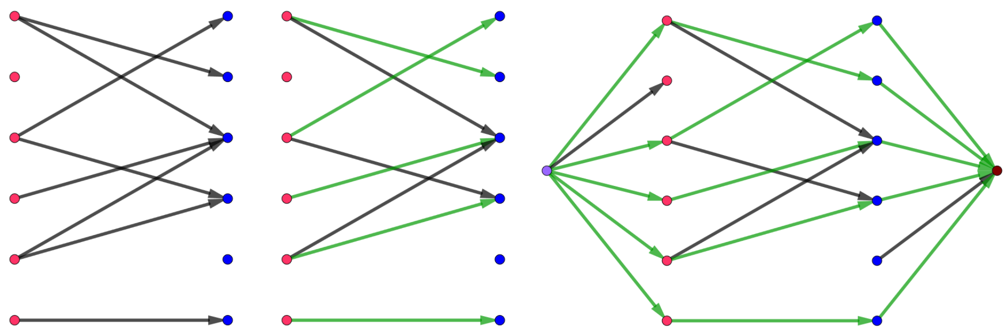
Este algoritmo corre a una taza $\mathcal{O}(|V| \cdot |A|^2)$, lo cual no es sorpresivo ya que el algoritmo de Breadth-first search le adiciona complejidad a Edmonds-Karp respecto a Ford-Fulkerson, en este último el paso de elegir P se hace aleatoriamente.

4 Aplicaciones

4.1 Correspondencia bipartita

Un *grafo bipartito* es un grafo cuyo conjunto de vértices esta divididos en dos conjuntos disjuntos U y V de tal manera que para toda arista (u, v) se tiene que $u \in U$ y $v \in V$, ó $v \in U$ y $u \in V$.
Una ***correspondencia*** en un Grafo bipartito es un conjunto de aristas elegidas de tal manera que ningún par de aristas comparten su punto final. Una *correspondencia máxima* es una correspondencia de máximo tamaño, es decir, con un máximo numero de aristas. Por lo tanto, el problema consiste en determinar dicha correspondencia máxima, un ejemplo de una situación que se puede modelar desde

esta perspectiva es imaginar dos grupos, uno de n hombres, y uno de n mujeres. Para cada mujer, hay un subconjunto de hombres, con cualquiera de estos ella se casaría felizmente; y cualquier hombre estaría feliz de casarse con una mujer que quiera casarse con él. Considere si es posible asociar (en matrimonio) a hombres y mujeres de tal manera que el mayor numero de personas sean felices. Este problema se puede formular como un problema de máximo flujo.



(a) (b) (c)

Fig. 4.1. En rojo mujeres y azul hombres. (a) Posibles emparejamientos. (b) En verde la correspondencia máxima, (c) Red que modela el problema, todas las capacidades son 1 y las aristas verdes corresponden a las aristas en donde el flujo máximo no es nulo.

Como se evidencia Figura 4.1 la formulación del problema de correspondencia bipartita máxima como un problema de máximo lujo consiste en adicionar al grafo de la correspondencia bipartita un nodo fuente y un nodo terminal, además se establece una capacidad de valor 1 en cada arista resultante, dado que la red resultante es un a red con capacidades enteras igual a 1 entonces por el algoritmo de Ford-Fulkerson el flujo de valor máximo solo toma valores enteros y valdrá en cada arista a los mas 1 y a lo menos 0, en ese sentido, la correspondencia bipartita máxima esta conformada por las aristas en la red que no están conectadas con la fuente ni con el terminal y en los cuales el flujo de valor máximo es no nulo.

4.2 Segmentación de imágenes

Dada una imagen a escala de grises el objetivo es segmentar la imagen en dos partes, una parte debe contener el fondo de la imagen y la otra el objetivo de la imagen, por ejemplo, en una imagen de un león en la jungla el objetivo es el león y el fondo es la jungla.

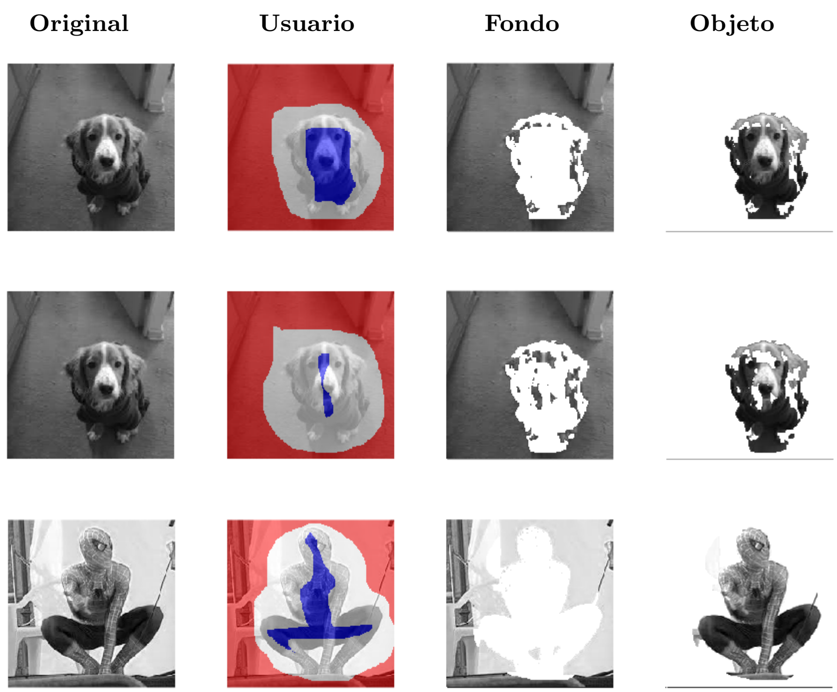


Fig. 4.2. En la primera columna la imagen original a segmenta. En la segunda columna el usuario determina lo que es fondo (rojo) y lo que es el objeto (azul) en la imagen. En la tercera y cuarta columna se encuentra el resultado del algoritmo de segmentación.

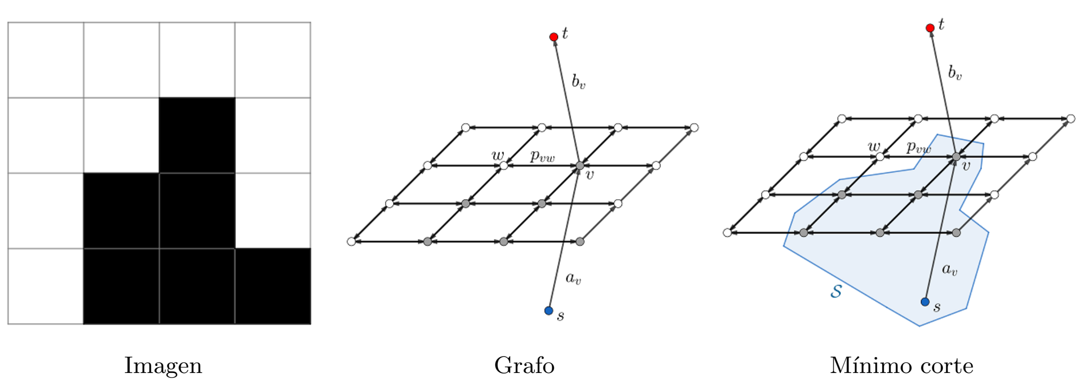


Fig. 4.3. Esquema segmentación.

Referencias

1. L. R. Ford, D. R. Fulkerson, *Flows in Networks*,Princeton, Princeton University Press, (1962)
2. C. H. Papadimitriou, K. Steiglitz, *Combinatorial Optimization: Algorithms and Complexity*, Dover publications Inc, (1998)
3. Y.Y. Boykov, M.P. Jolly, *Interactive graph cuts for optimal boundary & region segmentation of objects in N-D images*, Proceedings Eighth IEEE International Conference on Computer Vision. (2001)