Taller evaluado

Espacios lineales

Seccion 2.1.6 Ejercicio 3

(3) Considere un triangulo equilatero que se muestra en la figura 21.

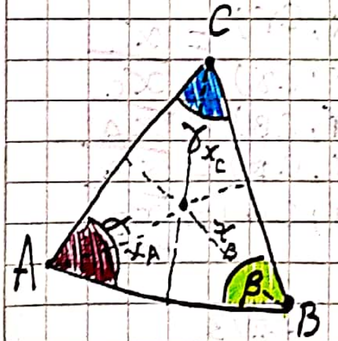
Se pueden identificar operaciones de rotación alrededor de un eje perpendicular a la figura que pasa por su baricentro y, reflexiones respecto a planos, $\mathcal{X}_A$, $\mathcal{X}_B$ y $\mathcal{X}_C$, que dejan invariante la figura del triangulo

Se pueden definir la operacion concatenación de rotaciones y reflexiones que dejan igualmente invariante al triangulo, tal y como mostramos esquematizandose como:

$$(A\alpha, B\beta, C\gamma) \xrightarrow{R_{\frac{2\pi}{3}}} (A\gamma, B\alpha, C\beta) \xrightarrow{\mathcal{X}_1} (A\gamma, B\beta, C\alpha)$$

(a) Construya la tabla de multiplicacion para G_1, donde

$G_1 = \{I, \{R_i\}, \{\overline{R}_j\}, \{\mathcal{X}_k\}\}$ y la operacion es concatenación tal y como mostramos en la figura donde I es la operacion identidad $\{R_i\}$ es un conjunto de rotaciones en sentido horario, mientras que $\{\overline{R}_j\}$ es un conjunto de rotaciones en sentido antihorario y $\{\mathcal{X}_k\}$ el conjunto de las reflexiones que dejan invariante el triangulo



$$G_1 = \{I, R_{\frac{2\pi}{3}}, R_{\frac{4\pi}{3}}, \overline{R}_{\frac{2\pi}{3}}, \overline{R}_{\frac{4\pi}{3}}, \mathcal{X}_A, \mathcal{X}_B, \mathcal{X}_C\}$$

donde $R_{\frac{4\pi}{3}} = \overline{R}_{\frac{2\pi}{3}}$ y $\overline{R}_{\frac{4\pi}{3}} = R_{\frac{2\pi}{3}}$ por ende se reducen

$$G_1 = \{I, R_{\frac{2\pi}{3}}, \overline{R}_{\frac{2\pi}{3}}, \mathcal{X}_A, \mathcal{X}_B, \mathcal{X}_B\}$$

Entonces tenemos que usando el simbolo $\circ$ para las operaciones

- $(A\alpha, B\beta, C\gamma) \xrightarrow{R_{2\pi/3}} (A\beta, B\gamma, C\alpha) \xrightarrow{R_{2\pi/3}} (A\gamma, B\alpha, C\beta)$

$(A\alpha, B\beta, C\gamma) \xrightarrow{\overline{R}_{2\pi/3}} (A\gamma, B\alpha, C\beta$

- $R_{2\pi/3} \circ R_{2\pi/3} = \overline{R}_{2\pi/3}$

D M A

- $R_{2\pi/3} \circ \overline{R}_{2\pi/3} = I$
- $\overline{R}_{2\pi/3} \circ R_{2\pi/3} = I$
- $\overline{R}_{2\pi/3} \circ \overline{R}_{2\pi/3} = R_{2\pi/3}$

$$(A\alpha, B\beta, C\gamma) \xrightarrow{R_{2\pi/3}} (A\beta, B\gamma, C\alpha) \begin{cases} x_A \to (A\beta, B\alpha, C\gamma) \\ x_B \to (A\alpha, B\gamma, C\beta) \\ x_C \to (A\gamma, B\beta, C\alpha) \end{cases}$$

- $R_{2\pi/3} \circ x_A = x_C$
- $R_{2\pi/3} \circ x_B = x_A$
- $R_{2\pi/3} \circ x_C = x_B$

$$(A\alpha, B\beta, C\gamma) \xrightarrow{\overline{R}_{2\pi/3}} (A\gamma, B\alpha, C\beta) \begin{cases} x_A \to (A\gamma, B\beta, C\alpha) \\ x_B \to (A\beta, B\alpha, C\gamma) \\ x_C \to (A\alpha, B\gamma, C\beta) \end{cases}$$

- $\overline{R}_{2\pi/3} \circ x_A = x_B$
- $\overline{R}_{2\pi/3} \circ x_B = x_C$
- $\overline{R}_{2\pi/3} \circ x_C = x_A$

- $(A\alpha, B\beta, C\gamma) \xrightarrow{x_A} (A\alpha, B\gamma, C\beta) \begin{cases} R_{2\pi/3} \to (A\gamma, B\beta, C\alpha) = x_B \\ \overline{R}_{2\pi/3} \to (A\beta, B\alpha, C\gamma) = x_C \end{cases}$
- $(A\alpha, B\beta, C\gamma) \xrightarrow{x_B} (A\gamma, B\beta, C\alpha) \begin{cases} R_{2\pi/3} \to (A\beta, B\alpha, C\gamma) = x_C \\ \overline{R}_{2\pi/3} \to (A\alpha, B\gamma, C\beta) = x_A \end{cases}$
- $(A\alpha, B\beta, C\gamma) \xrightarrow{x_C} (A\beta, B\alpha, C\gamma) \begin{cases} R_{2\pi/3} \to (A\alpha, B\gamma, C\beta) = x_A \\ \overline{R}_{2\pi/3} \to (A\gamma, B\beta, C\alpha) = x_B \end{cases}$

- $(A\alpha, B\beta, C\gamma) \xrightarrow{x_A} (A\alpha, B\gamma, C\beta) \begin{cases} \xrightarrow{x_B} (A\beta, B\gamma, C\alpha) = R_{2\pi/3} \\ \xrightarrow{x_C} (A\gamma, B\alpha, C\beta) = \overline{R}_{2\pi/3} \end{cases}$
- $(A\alpha, B\beta, C\gamma) \xrightarrow{x_B} (A\gamma, B\beta, C\alpha) \begin{cases} x_A \to (A\gamma, B\alpha, C\beta) = \overline{R}_{2\pi/3} \\ x_C \to (A\beta, B\gamma, C\alpha) = R_{2\pi/3} \end{cases}$
- $(A\alpha, B\beta, C\gamma) \xrightarrow{x_C} (A\beta, B\alpha, C\gamma) \begin{cases} x_A \to (A\beta, B\gamma, C\alpha) = R_{2\pi/3} \\ x_B \to (A\gamma, B\alpha, C\beta) = \overline{R}_{2\pi/3} \end{cases}$

$\odot$	$R_{\frac{2\pi}{3}}$	$\bar{R}_{\frac{2\pi}{3}}$	χ_A	χ_B	χ_C	I
$R_{2\pi/3}$	$\bar{R}_{\frac{2\pi}{3}}$	I	χ_C	χ_A	χ	$R_{\frac{2\pi}{3}}$
$\bar{R}_{2\pi/3}$	I	$R_{\frac{2\pi}{3}}$	χ_B	χ	χ_A	$\bar{R}_{\frac{2\pi}{3}}$
χ_A	χ_B	χ_C	I	$R_{\frac{2\pi}{3}}$	$\bar{R}_{\frac{2\pi}{3}}$	χ_A
χ_B	χ_C	χ_A	$\bar{R}_{\frac{2\pi}{3}}$	I	$R_{\frac{2\pi}{3}}$	χ_B
χ_C	χ_A	χ_B	$R_{\frac{2\pi}{3}}$	$\bar{R}_{2\pi/3}$	I	χ_C
I	$R_{\frac{2\pi}{3}}$	$\bar{R}_{\frac{2\pi}{3}}$	χ_A	χ_B	χ_C	I

Reescribiendola cambiando I al inicio

O	I	A	B	C	D	E
I	I	A	B	C	D	E
A	A	B	I	E	C	D
B	B	I	A	D	E	C
C	C	D	E	I	A	B
D	D	E	C	B	I	A
E	E	C	D	A	B	I

ⓑ Muestre que el conjunto de estas operaciones forman el Grupo G_Δ ✓

① Cerrada respecto a $\odot$

Se puede ver a simple vista en la tabla de multiplicacion

② Asociativa respecto a $\odot$

Sea el grupo $\mathbb{P}^3$ con la siguiente tabla de multiplicar

$\odot$	P_0	P_1	P_2	P_3	P_4	P_5
P_0	P_0	P_1	P_2	P_3	P_4	P_5
P_1	P_1	P_0	P_5	P_4	P_3	P_2
P_2	P_2	P_4	P_0	P_5	P_1	P_3
P_3	P_3	P_5	P_4	P_0	P_2	P_1
P_4	P_4	P_2	P_3	P_1	P_3	P_0
P_5	P_5	P_3	P_1	P_2	P_0	P_4

donde

$$\begin{bmatrix} P_0 = I \\ P_1 = E \\ P_2 = D \\ P_3 = C \\ P_4 = A \\ P_5 = B \end{bmatrix}$$

Por isomorfismo al tener la misma tabla de multiplicacion (osea multiplican igual) Se demuestra que el Grupo G_Δ es asosiativa

③ Existencia del elemento Neutro

$g = I$ operacion identidad

D M A

④ Existencia elemento inverso

sea $g = R_{\frac{2\pi}{3}}$ y $g^{-1} = \bar{R}_{\frac{2\pi}{3}}$

$g \circ g^{-1} = R_{\frac{2\pi}{3}} \bar{R}_{\frac{2\pi}{3}} = I$ Cumpliendo que

$g^{-1} \circ g = \bar{R}_{\frac{2\pi}{3}} R_{\frac{2\pi}{3}} = I$ $(\bar{R}_{\frac{2\pi}{3}})^{-1} = R_{\frac{2\pi}{3}}$

ahora sea $g = x_K$ y $g^{-1} = x_K$

$g \circ g^{-1} = x_K \circ x_K = I$

Entonces si existe un $g \in G_\Delta \Rightarrow \exists g^{-1} : g \circ g^{-1} = g^{-1} \circ g = g$

⑤ Comutatividad

Por contra yemplo $x_A \circ \bar{R}_{\frac{2\pi}{3}} = x_C$, pero $\bar{R}_{\frac{2\pi}{3}} \circ x_A = x_B$

$x_C \neq x_B$

y esto hace que G_Δ no sea un grupo abeliano

KeeperMati

(c) Identifique cada una de las R_i y $\bar{R}_i$, y además muestre que forman un subgrupo cíclico de orden 3

De igual modo identifique las reflexiones y muestre que, cada una de las reflexiones y la identidad $\{I, \chi_i\}$. Forman también un subgrupo cíclico, pero de orden 2

Teniendo en cuenta que $H = \{\{R_i\}, \{\bar{R}_j\}\}$ es un subconjunto de G_6 y que solo representa las ~~reflexiones~~ rotaciones en sentido horario y antihorario y manteniendo el triangulo invariante las rotaciones dentro de H son

$$H = \left\{I, R_{\frac{2\pi}{3}}, R_{\frac{4\pi}{3}}, R_{2\pi}, \bar{R}_{\frac{2\pi}{3}}, \bar{R}_{\frac{4\pi}{3}}, \bar{R}_{2\pi}\right\}$$

donde $R_{2\pi} = I = \bar{R}_{\frac{6\pi}{3}}$ y $R_{\frac{4\pi}{3}} = \bar{R}_{\frac{2\pi}{3}}$, $\bar{R}_{\frac{4\pi}{3}} = R_{\frac{2\pi}{3}}$

con

$$(A\alpha, B\beta, C\gamma) \xrightarrow{R_{\frac{4\pi}{3}}} (A\beta, B\gamma, C\alpha)$$

$$\xrightarrow{\bar{R}_{\frac{2\pi}{3}}} (A\beta, B\gamma, C\alpha)$$

$$(A\alpha, B\beta, C\gamma) \xrightarrow{R_{\frac{4\pi}{3}}} (A\gamma, B\alpha, C\beta)$$ Entonces $H = \left\{I, R_{\frac{2\pi}{3}}, \bar{R}_{\frac{2\pi}{3}}\right\}$

$$\xrightarrow{R_{\frac{2\pi}{3}}} (A\gamma, B\alpha, C\beta)$$

donde H tiene la siguiente tabla de multiplicac

$\circ$	I	$R_{\frac{2\pi}{3}}$	$\bar{R}_{\frac{2\pi}{3}}$
I	I	$R_{\frac{2\pi}{3}}$	$\bar{R}_{\frac{2\pi}{3}}$
$R_{\frac{2\pi}{3}}$	$R_{\frac{2\pi}{3}}$	$\bar{R}_{\frac{2\pi}{3}}$	I
$\bar{R}_{\frac{2\pi}{3}}$	$\bar{R}_{\frac{2\pi}{3}}$	I	$R_{\frac{2\pi}{3}}$

(1) Cerrada bajo $\circ$

② Asociativa bajo $\circ$

Sea entonces $(R_i \circ R_j) \circ R_K$

donde $i=j=1$

$R_2 \circ R_K$

con $K=2$

R_1

con $K=1$

I

donde $i=j=2$

$R_1 \circ R_K$

con $K=2$

I

con $K=1$

R_2

donde $i \neq j$

$I \circ R_K$

con $K=1$

R_1

con $K=2$

R_2

y con $R_i \circ (R_j \circ R_K)$

donde $j=K=1$

$R_i \circ R_2$

con $i=2$

R_1

con $i=1$

I

donde $j=K=2$

$R_i \circ R_1$

con $i=2$

I

con $i=1$

R_2

donde $j \neq K$

$R_i \circ I$

con $i=2$

R_2

con $i=1$

R_1

bajo los mismos índices dan igual

③ Existencia de elemento neutro

$\hat{g} = I$

④ Elemento inverso

$(R_{\frac{2\pi}{3}})^{-1} = \overline{R}_{\frac{2\pi}{3}}$

$(\overline{R}_{\frac{2\pi}{3}})^{-1} = R_{2\frac{\pi}{3}}$

⑤ Conmutativa bajo $\circ$

$R_{\frac{2\pi}{3}} \circ \overline{R}_{\frac{2\pi}{3}} = I$

$\overline{R}_{\frac{2\pi}{3}} \circ R_{\frac{2\pi}{3}} = I$

$R_{\frac{2\pi}{3}} \circ I = I \circ R_{\frac{2\pi}{3}} = R_{\frac{2\pi}{3}}$

$\overline{R}_{\frac{2\pi}{3}} \circ I = I \circ \overline{R}_{\frac{2\pi}{3}} = \overline{R}_{\frac{2\pi}{3}}$

Permitiéndole ser cíclico

Sea $A=\{I, x_A\}$ $B=\{I, x_B\}$ $C=\{I, x_C\}$, $K \{A, B, C\}$

① Cerrado

$I \circ x_K = x_A$

② Asociativa

$I \circ (x_K \circ x_K) = I \circ I = I$

$(I \circ x_A) \circ x_A = x_A \circ x_A = I$

③ Neutro

$g = I$

④ Inverso

$g = x_K$ $\quad g \circ g^{-1} = x_A \circ x_A = I$

$g^{-1} = x_A$ $\quad g^{-1} \circ g \quad x_{\cancel{K}A} \circ x_{\cancel{A}} = I$

⑤ Conmutativo

$I \circ x_K = x_K = x_K \circ I$, $x_K \circ x_K = I$

6) Considere las matrices

$$\mathbb{I} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \mathbb{A} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \\ -\frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}, \quad \mathbb{B} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

$$\mathbb{C} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \mathbb{D} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} \\ -\frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}, \quad \mathbb{E} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

Muestre que forman grupo bajo la multiplicación de matrices y que es isomorfo a G_Δ

Entonces sea $M = \{\mathbb{I}, \mathbb{A}, \mathbb{B}, \mathbb{C}, \mathbb{D}, \mathbb{E}\}$

Cerrado

o	I	A	B	C	D	E
I	I	A	B	C	D	E
A	A	B	I	E	C	D
B	B	I	A	D	E	C
C	C	D	E	I	A	B
D	D	E	C	B	I	A
E	E	C	D	A	B	I

Se puede ver que es isomorfo con G_Δ

con $P_0 = I$

O	I	A	B	C	D	E
I	I	A	B	C	D	E
A	A	B	I	E	C	D
B	B	I	A	D	E	C
C	C	D	E	I	A	B
D	D	E	C	B	I	A
E	E	C	D	A	B	I

Asociativa

$A(BC) = (AB)C$ dadas las propiedades de matrices al ser todas 2×2 cumple

3) Elemento neutro

$\hat{g} = \mathbb{I}$

4) inverso

Cada elemento en la tabla tiene una multiplicacion que da $\mathbb{I}$ y cumple

Conmutativa

Por contra ejemplo

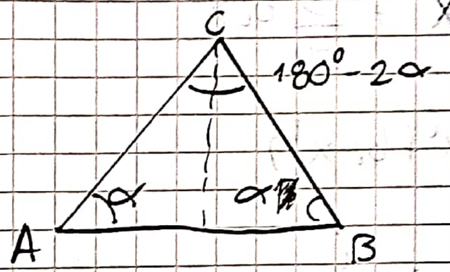
$AC = E$ y $CA = D$

$E \neq C$, No cumple.

(F) ¿Que puede decir de las operaciones simetrias que dejan invariante un triangulo isóceles?

Forman grupo?

y si el triangulo es escaleno, cuales son las operaciones de simetria que lo dejan invariante



$$G_{\Delta 2} = \{I, R_{2\pi}, \overline{R}_{2\pi}, X_c\}$$

$$R_{2\pi} = I = \overline{R}_{2\pi}$$

$$G_{\Delta 2} = \{I, X_c\}$$

Como solo existen 2 operaciones simetricas

D M A

(10) Sea P_n el conjunto de todos los polinomios de grado $n-1$, en x con coeficientes reales:

$$\sum_{i=0}^{n-1} a_i x^i = |P_n\rangle \rightleftharpoons p(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots + a_{n-1} x^{n-1}$$

ⓐ Demostrar que P_n es un espacio vectorial respecto a la suma de polinomios y a la multiplicación de polinomios por un número (número real)

Sean entonces $p(x), g(x) \in P_n$ y $a, b \in \mathbb{R}$

donde $P(x) = \sum_{i=0}^{n-1} a_i x^i$ y $P(x) + g(x)$

$$g(x) = \sum_{i=0}^{n-1} b_i x^i$$

$$\Rightarrow \sum_{i=0}^{n-1} a_i x^i + \sum_{i=0}^{n-1} b_i x^i$$

$$\Rightarrow \sum_{i=0}^{n-1} (a_i x^i + b_i x^i)$$

$$\sum_{i=0}^{n-1} (a_i + b_i) x^i$$

$\downarrow$ con otro número real

$$\sum_{i=0}^{n-1} c_i x^i \rightarrow \in P_n$$

(i) Conmutativa bajo la suma

$$p(x) + g(x) = g(x) + p(x)$$

$$\sum_{i=0}^{n-1} (a_i x^i + b_i x^i) = \sum_{i=0}^{n-1} b_i x^i + \sum_{i=0}^{n-1} a_i x^i$$

$$\sum_{i=0}^{n-1} (a_i x^i + b_i x^i) = \sum_{i=0}^{n-1} (b_i x^i + a_i x^i)$$

$$\sum_{i=0}^{n-1} (a_i + b_i) x^i = \sum_{i=0}^{n-1} (b_i + a_i) x^i$$

al ser reales conmutan lo coeficientes

Asociativa bajo la suma

sea $h(x) \in P_n$

$$(p(x)+g(x))+h(x) = p(x)+(g(x)+h(x))$$

$$\left(\sum_{i=0}^{n-1}(a_i+b_i)x^i\right)+\sum_{i=0}^{n-1}c_i x^i = \sum_{i=0}^{n-1}a_i x^i + \left(\sum_{i=0}^{n-1}(b_i+c_i)x^i\right)$$

$$\sum_{i=0}^{n-1} a_i x^i + b_i x^i + c_i x^i = \sum_{i=0}^{n-1} a_i x^i + \sum_{i=0}^{n-1} b_i x^i + \sum_{i=0}^{n-1} c_i x^i$$

$$\sum_{i=0}^{n-1}(a_i+b_i+c_i)x^i = \sum_{i=0}^{n-1}(a_i+b_i+c_i)x^i \checkmark$$

al ser numeros reales cumplen asociativa

Elemento neutro

dande de $p(x) = 0$ con $\sum_{i=0}^{n-1} 0_i \cancel{x}^i = \cancel{0} = P_{(0)}$

Entonces

$$P_{(0)} + P_{(x)} = P_{(x)}$$

$$\sum_{i=0}^{n-1} 0x^i + \sum_{i=0}^{n-1} a_i x^i = \sum_{i=0}^{n-1} a_i x^i$$

$$\sum_{i=0}^{n-1}(\underset{\text{numero real cero}}{0}+a_i)x^i = \sum_{i=0}^{n-1} a_i x^i \Rightarrow \sum_{i=0}^{n-1} a_i x^i = \sum_{i=0}^{n-1} a_i x^i \checkmark$$

Elemento simetrico

Entonces

$$-p(x) = \sum_{i=0}^{n-1} -a_i x^i$$

$$-p(x) = -\sum_{i=0}^{n-1} a_i x^i$$

con esto

$$p(x) + (-p(x))$$

$$\sum_{i=0}^{n-1} a_i x^i + \left(-\sum_{i=0}^{n-1} a_i x^i\right)$$

$$\sum_{i=0}^{n-1}(a_i x^i - a_i x^i) = \sum_{i=0}^{n-1}(a_i - a_i)x^i = \underbrace{0x^i}_{\text{Elemento Neutro}}$$

D M A

Cerrado bajo el producto α

$$\alpha\, p(x) = \alpha \sum_{i=0}^{n-1} a_i x^i$$

$$\sum_{i=0}^{n-1} \alpha a_i x^i \Rightarrow \sum_{i=0}^{n-1} c_i x^i \; y \in P_n$$

(b) si los coeficientes del polinomio son enteros sera P_n sera espacio?

Por contra ejemplo No esta cerrado bajo la multiplicacion

sea $\frac{1}{\alpha}$

$\frac{1}{\alpha} p(x)$

$$= \frac{1}{\alpha} \sum_{i=0}^{n-1} a_i x^i \Rightarrow \sum_{i=0}^{n-1} \frac{a_i}{\alpha} x^i$$

Este no pertereceria al grupo de los enteros

(c) Cual de los siguientes subconjuntos de P_n es un subespacio vectorial?

I) El polinomio cero y todos los polinomios de grado $n-1$.

II polinomio cero y todos los polinomios de grado par

III Polinomios factores $n > 1$

IV Polinomios con $\lambda - 1$ como factor