

**75.12 ANÁLISIS NUMÉRICO I**  
**Departamento de Computación**  
**FACULTAD DE INGENIERÍA**

**UNIVERSIDAD DE BUENOS AIRES**  
**Primer cuatrimestre 2016**  
**TRABAJO PRÁCTICO 1**

Grupo 12:

Chiesa Docampo, German - 96994 - [german0695@hotmail.com](mailto:german0695@hotmail.com)

Mendez, Agustina - 98338

Vassolo, Juan Daniel - 97846 - [juany\\_6@hotmail.com](mailto:juany_6@hotmail.com)

Irrazabal, Diego - 98125

## **Introducción**

En este trabajo se busca resolver un problema físico, de distribución de temperaturas en la sección transversal de un tubo, mediante métodos numéricos.

Por el interior de un tubo de sección cuadrada (lado de sección interior de 4cm y exterior de 10cm), circula un líquido a 200° C. La mitad inferior del mismo, está sumergida en hielo a 0° C. La cara superior del tubo se mantiene a 100 °C. Se supone que la temperatura en los laterales varía linealmente entre los 0 °C de la parte inferior en contacto con el hielo y los 100 °C de la cara superior.

Primero, se procede a la discretización del problema para obtener el sistema de ecuaciones lineales correspondiente (SEL). El mismo consiste de una matriz "A", con la cual trabajaremos con diferentes métodos directos e iterativos. Resolveremos la ecuación  $Ax=B$ , donde el vector "x" está compuesto por los 56 nodos cuyas temperaturas desconocemos, y el vector "b" conformado por los datos de problema.

Primero se resuelve el problema utilizando el método directo de Gauss con pivoteo parcial. Luego resolvemos el SEL mediante los métodos de Jacobi y Gauss-Seidel, respetando las siguientes condiciones:

- a) La estimación inicial de la temperatura para todos los nodos incógnita es 100°C.
- b) La cantidad de iteraciones está determinada por la cota de  $10^{-3}$ , para la diferencia entre dos estimaciones de la temperatura en cada nodo.

A partir de los resultados, buscamos determinar cuál es el método más apropiado para este problema.

## **Conceptos Teóricos:**

- Sustitución directa o inversa: al resolver un sistema triangular superior llegamos a un sistema con la siguiente forma

$$x_i = (b_i - \sum_{k=i+1}^n u_{i,k} x_k) / u_{i,i}, \quad i = n, n-1, \dots, 1$$

Si el sistema es triangular inferior, las incógnitas se pueden obtener por sustitución directa.

$$x_i = (b_i - \sum_{k=1}^{i-1} l_{i,k} x_k) / l_{i,i}, \quad i = 1, 2, \dots, n$$

### **Sistemas de ecuaciones lineales:**

Un sistema de m ecuaciones lineales con n incógnitas, se expresa de la siguiente forma:

$$\begin{array}{l} a_{1,1} x_1 + a_{1,2} x_2 + \dots + a_{1,n} x_n = b_1 \\ \dots \\ a_{m,1} x_1 + a_{m,2} x_2 + \dots + a_{m,n} x_n = b_m \end{array}$$

También se puede expresar en notación matricial como

$$Ax = B$$

### **Métodos directos para resolver sistemas de ecuaciones lineales:**

Son aquellos que dan una solución exacta de un sistema de ecuaciones lineales (salvo errores de redondeo) luego de un número de pasos de cálculo finito y conocido de antemano.

Para un SEL donde la matriz A es llena (es decir, la mayoría de los valores que la componen son diferentes de cero), los métodos directos son casi siempre lo más efectivos.

En casos donde la matriz es rala (es, decir una gran proporción de los elementos de la misma son nulos), los métodos iterativos ofrecen una mayor ventaja por sobre los directos.

En nuestro caso esperaríamos que los métodos iterativos se ajusten mejor al problema, considerando que tendremos que resolver una matriz rala de 56x56, lo que significara una gran cantidad de operaciones. Dicha cantidad de operaciones se disminuirá si aprovechamos el hecho de que la matriz posee varios ceros con un método iterativo.

El método directo utilizado en este trabajo práctico será el de Gauss con pivoteo parcial.

### **Método iterativos:**

Los métodos iterativos nos permiten construir una secuencia de soluciones aproximadas que converge a la solución exacta o verdadera cuando el número de pasos tiende a infinito. Estos métodos pueden proveernos resultados útiles (a pesar de poseer un error de truncamiento) con menos operaciones aritméticas (esto implica en general, menor propagación de los errores de redondeo) que los métodos directos, aunque solo puedan aplicarse a sistemas con propiedades especiales.

Los métodos iterativos, comienzan con una primera aproximación, que es sucesivamente mejorada por los elementos de una secuencia de números que convergen a la solución exacta. Evidentemente el proceso se trunca, cuando los números obtenidos alcanzan la precisión deseada. Esto genera un error de truncamiento, por lo que la solución del problema numérico, es solo una aproximación de la solución del problema matemático (a diferencia de los métodos directos donde el problema matemático coincide con el numérico).

Los métodos iterativos que utilizaremos en este trabajo práctico serán Jacobi y Gauss-Seidel, explicados con detalle en la próxima sección.

La elección de los métodos directos e iterativos para resolver un problema depende de la proporción, distribución, signo y magnitud de los elementos no nulos de la matriz en cuestión.

### **Desarrollo:**

A) Explicación de los métodos numéricos utilizados.

#### **Método directo:**

##### **Método de Gauss:**

Se basa en la eliminación de incógnitas en forma sistemática, de modo de transformar el problema original a uno equivalente triangular, a través del uso de los elementos pivotantes. En definitiva, esto nos permite disminuir la cantidad de operaciones y obtener el resultado mediante la sustitución inversa.

Recordemos que las operaciones realizadas en este método para simplificar la resolución del SEL no afectan el resultado del mismo. Dichas operaciones consisten en:

- a) Multiplicar una de las ecuaciones por un número
- b) Permutar filas
- c) Hacer una combinación lineal de filas y reemplazar dicha combinación lineal por una fila.

La matriz asociada al SEL sería cuadrada y tendría  $n$  columnas y  $n$  filas. Cualquier sistema de ecuaciones no singular puede ser reducido a un sistema triangular por eliminación de Gauss combinada con intercambio de filas.

El proceso de intercambio de filas se denomina pivoteo parcial. El mismo consiste en elegir  $r$  como el menor entero para el cual:

$$a_{r,k}^k = \max\{|a_{i,k}^k|\}, k \leq i \leq n$$

donde " $r$ " es la primera fila en la cual  $a_{r,k}^k \neq 0$

En otras palabras utilizamos como pivote en el paso  $k$ , el elemento de mayor módulo de la columna  $k$  desde la diagonal para abajo.

En términos generales la eliminación por Gauss directa puede expresarse matricialmente a través de la siguiente igualdad:

$$A = LU,$$

Donde  $L$  es una matriz triangular inferior y  $U$  una triangular superior. Primero se resuelve el sistema equivalente mediante sustitución directa  $LY = B$  y luego mediante sustitución inversa  $UX = Y$ . Así, obtenemos el resultado del sistema  $AX = B$

Recordar que  $U$  representa la matriz que resulta de la eliminación de Gauss y  $L$  se construye con los multiplicadores utilizados en la eliminación. Si conocemos la cantidad de permutaciones utilizadas de antemano, el sistema se vuelve  $PAX = PB$  con  $PA = LU$ , donde  $P$  es una matriz elemental de permutaciones.

En nuestro problema, aprovecharemos estas propiedades para simplificar la resolución. Considerando que  $A$  es una matriz cuadrada  $56 \times 56$ , podemos utilizar la descomposición previamente mencionada.

### **Métodos iterativos:**

A partir de  $X^{(0)}, \{X^{(k)}\}_{k=1}^{\infty}$  mediante  $X^{(k)} = TX^{(k-1)} + C$  que bajo ciertas condiciones converge a un vector  $X$  solución de  $X = TX + C$ , obtenemos un sistema equivalente a  $AX = B$  a partir del cual resolvemos nuestro problema.

Para poder utilizar esto debe existir la convergencia del método. Claramente, no podremos realizar una infinita cantidad de iteraciones por lo que el criterio de parada del sistema estará dado por una tolerancia y una cantidad máxima de iteraciones.

Es decir,  $|X^{(k)} - X^{k-1}| < \varepsilon \quad o \quad H_{iteraciones} \geq N_{max}$ .

**El Método de Jacobi:** consiste en tomar una aproximación inicial  $X^{(0)}$  (usualmente es el vector nulo) y construir una secuencia de aproximaciones, utilizando la expresión:

$$x_i^{(k+1)} = \left( - \sum_{\substack{j \leq n \\ j \neq i}} a_{i,j} x_j^{(k)} + b_i \right) / a_{i,i}, \quad i = 1, 2, \dots, n$$

En el método de Jacobi, no usamos los valores mejorados hasta haber completado la iteración en cuestión.

Para el **Método de Gauss Seidel**, usamos los valores mejorados calculados en los pasos inmediatamente anteriores (lo que en general acelera el proceso de convergencia):

$$x_i^{(k+1)} = \left( - \sum_{j < i} a_{i,j} x_j^{(k+1)} - \sum_{j > i} a_{i,j} x_j^{(k)} + b_i \right) / a_{i,i}, \quad i = 1, 2, \dots, n$$

En otras palabras, Gauss Seidel converge más rápido que Jacobi.

Para analizar, la resolución de estos métodos en forma matricial, primero supongamos que  $A$  es tal que  $a_{i,i} \neq 0$  para todo  $i$ , de donde deducimos que existen tres matrices  $D$ ,  $L$  y  $U$ , tales que  $D$  es diagonal,  $L$  es triangular inferior y  $U$  triangular superior, y se verifica la identidad:  $A=D(L+I+U)$ .

Mediante algunas sustituciones, no es difícil deducir que:

Para el Método de Jacobi:  $T_j = -(L + U)$  ,  $C_j = D^{-1}B$

Para el Método de Gauss Seidel:  $T_{gs} = -(L + I)^{-1}U$  ,  $C_{gs} = (D(L + I))^{-1}B$

**B)** Descripción de las dificultades que se presentaron en la codificación de los métodos numéricos, en la precisión de los cálculos, y en la forma de resolución.

Particularmente, el problema se puede definir por una matriz cuadrada de 11 columnas y 11 filas. Descontando los 40 puntos exteriores y los 25 interiores, cuyos valores conocemos, obtenemos una matriz de 56x56 incógnitas. Dicha matriz debe ser simétrica, dada la simetría en la distribución de temperaturas iniciales. Es decir que, en rigor, tenemos sistema con 28 incógnitas de valores únicos. Por lo tanto, aquellas temperaturas coincidentes deberían estar en posiciones análogas en la matriz. Para la correcta resolución del problema numérico utilizamos la matriz de 56x56, obviando esta simplificación.

Para Gauss con pivoteo parcial el número de operaciones a resolver sería del orden de  $56^3$ . No hubo mayores complicaciones en este método, dado que el mismo era una función incluida en Octave. Esto significa que sólo tuvimos que desarrollar una función para crear las matrices A, b y x a partir de las cuales haríamos los cálculos. Es decir que creamos un programa para generar las matrices y otros para hacer los cálculos y gráficos correspondientes, maximizando la eficiencia del código. Los detalles correspondientes al código están acotados en el mismo.

De esta manera pudimos usar las matrices generadas en el primer script (generar\_matrices) para la aplicación de los métodos de Jacobi y Gauss-Seidel. Estos métodos, al ser iterativos, fueron programados considerando la descomposición de las matrices que propone cada método en la teoría previamente explicada. Es claro que podíamos plantear las 56 ecuaciones una por una, creando un código muy extenso, pero esto es algo que queremos evitar. Por lo tanto, recurrimos a la forma matricial, simplificando el código y minimizando posibles errores.

Para el método de Jacobi y Gauss Seidel tuvimos que tener cuidado con la tolerancia utilizada y la cantidad de iteraciones que consideramos suficiente para obtener un resultado apropiado. Por un lado adquirimos la tolerancia que exigía el enunciado ( $10^{-3}$ ). Por el otro, definimos la cantidad de iteraciones a través de un contador que explicita cuantas iteraciones fueron necesarias para que el error de las 56 incógnitas del SEL, definido como la norma infinito entre dos valores sucesivos, sea menor a  $10^{-3}$ .

En cuanto a la precisión de los cálculos esperamos que el método menos preciso sea el de Gauss con pivoteo, y el más preciso el de Gauss-Seidel. En cuanto a velocidad de convergencia, este patrón se repite siendo el más lento el de Gauss con pivoteo, y el más rápido el de Gauss-Seidel. Esto será mejor analizado en la sección de resultados.

Finalmente, la cantidad de iteraciones nos permite ver la velocidad de convergencia y la cercanía entre la solución de gauss y la solución, más precisa, que proporciona Jacobi o GS. Es claro que a menor cantidad de iteraciones mayor velocidad de convergencia y viceversa, por lo que fue indispensable la creación de un contador de iteraciones.

## **Análisis de resultados:**

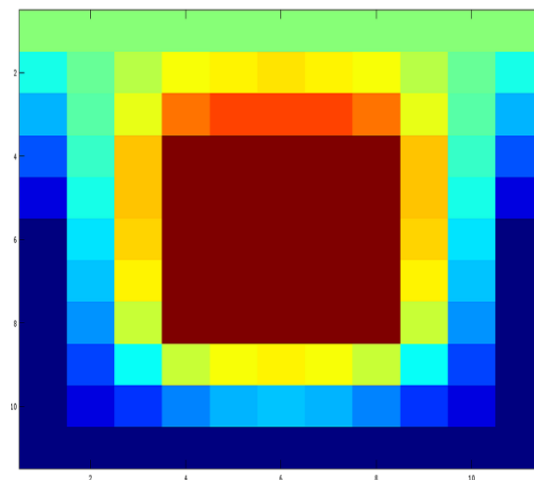
### **Presentación de resultados:**

#### **Metodo de Gauss con pivoteo parcial**

Representación gráfica de las temperaturas en la sección del tubo, donde en orden decreciente, los colores representan: Rojo(200° C)- Amarillo – Verde (100° C) – Celeste – Azul (0° C)

La matriz de valores numéricos obtenida es la siguiente:

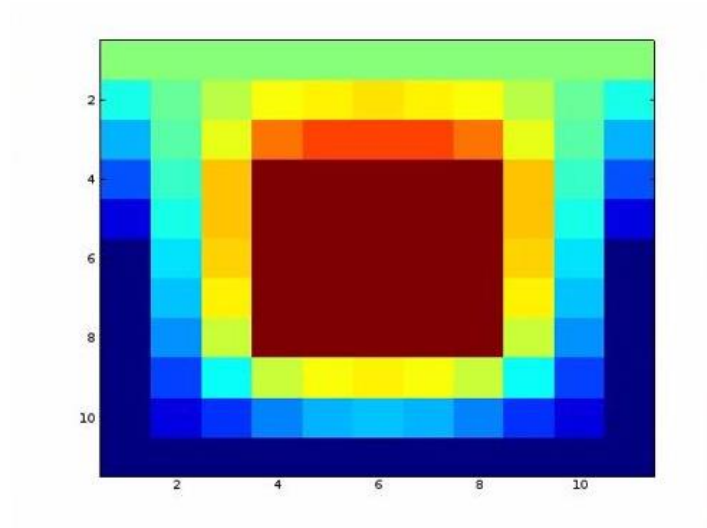
|           |           |           |           |           |           |           |           |           |           |           |
|-----------|-----------|-----------|-----------|-----------|-----------|-----------|-----------|-----------|-----------|-----------|
| 100.00000 | 100.00000 | 100.00000 | 100.00000 | 100.00000 | 100.00000 | 100.00000 | 100.00000 | 100.00000 | 100.00000 | 100.00000 |
| 80.00000  | 95.19289  | 109.89446 | 122.31605 | 128.14450 | 129.74587 | 128.14450 | 122.31605 | 109.89446 | 95.19289  | 80.00000  |
| 60.00000  | 90.87709  | 122.06890 | 151.22526 | 160.51606 | 162.69450 | 160.51606 | 151.22526 | 122.06890 | 90.87709  | 60.00000  |
| 40.00000  | 86.24657  | 136.27881 | 200.00000 | 200.00000 | 200.00000 | 200.00000 | 200.00000 | 136.27881 | 86.24657  | 40.00000  |
| 20.00000  | 77.83040  | 136.79975 | 200.00000 | 200.00000 | 200.00000 | 200.00000 | 200.00000 | 136.79975 | 77.83040  | 20.00000  |
| 0.00000   | 68.27526  | 133.08980 | 200.00000 | 200.00000 | 200.00000 | 200.00000 | 200.00000 | 133.08980 | 68.27526  | 0.00000   |
| 0.00000   | 62.18085  | 127.28418 | 200.00000 | 200.00000 | 200.00000 | 200.00000 | 200.00000 | 127.28418 | 62.18085  | 0.00000   |
| 0.00000   | 53.16394  | 113.86607 | 200.00000 | 200.00000 | 200.00000 | 200.00000 | 200.00000 | 113.86607 | 53.16394  | 0.00000   |
| 0.00000   | 36.60886  | 75.01616  | 113.17726 | 125.31459 | 128.15758 | 125.31459 | 113.17726 | 75.01616  | 36.60886  | 0.00000   |
| 0.00000   | 18.25533  | 36.41245  | 52.37831  | 59.92351  | 62.00115  | 59.92351  | 52.37831  | 36.41245  | 18.25533  | 0.00000   |
| 0.00000   | 0.00000   | 0.00000   | 0.00000   | 0.00000   | 0.00000   | 0.00000   | 0.00000   | 0.00000   | 0.00000   | 0.00000   |





## Método de Jacobi

Representación gráfica de las temperaturas (misma escala previamente mencionada):



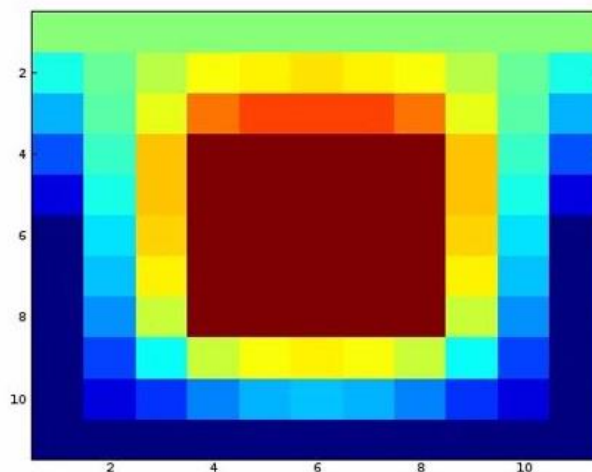
La matriz de valores numéricos obtenida en este caso es:

```
>> resolver_jacobi
Se hicieron 34 iteraciones
```

|           |           |           |           |           |           |           |           |           |           |           |
|-----------|-----------|-----------|-----------|-----------|-----------|-----------|-----------|-----------|-----------|-----------|
| 100.00000 | 100.00000 | 100.00000 | 100.00000 | 100.00000 | 100.00000 | 100.00000 | 100.00000 | 100.00000 | 100.00000 | 100.00000 |
| 80.00000  | 95.19221  | 109.89309 | 122.31477 | 128.14291 | 129.74451 | 128.14291 | 122.31477 | 109.89309 | 95.19221  | 80.00000  |
| 60.00000  | 90.87594  | 122.06752 | 151.22363 | 160.51470 | 162.69289 | 160.51470 | 151.22363 | 122.06752 | 90.87594  | 60.00000  |
| 40.00000  | 86.24595  | 136.27777 | 200.00000 | 200.00000 | 200.00000 | 200.00000 | 200.00000 | 136.27777 | 86.24595  | 40.00000  |
| 20.00000  | 77.82993  | 136.79951 | 200.00000 | 200.00000 | 200.00000 | 200.00000 | 200.00000 | 136.79951 | 77.82993  | 20.00000  |
| 0.00000   | 68.27551  | 133.08978 | 200.00000 | 200.00000 | 200.00000 | 200.00000 | 200.00000 | 133.08978 | 68.27551  | 0.00000   |
| 0.00000   | 62.18127  | 127.28492 | 200.00000 | 200.00000 | 200.00000 | 200.00000 | 200.00000 | 127.28492 | 62.18127  | 0.00000   |
| 0.00000   | 53.16505  | 113.86703 | 200.00000 | 200.00000 | 200.00000 | 200.00000 | 200.00000 | 113.86703 | 53.16505  | 0.00000   |
| 0.00000   | 36.60992  | 75.01815  | 113.17874 | 125.31633 | 128.15902 | 125.31633 | 113.17874 | 75.01815  | 36.60992  | 0.00000   |
| 0.00000   | 18.25629  | 36.41370  | 52.37999  | 59.92493  | 62.00286  | 59.92493  | 52.37999  | 36.41370  | 18.25629  | 0.00000   |
| 0.00000   | 0.00000   | 0.00000   | 0.00000   | 0.00000   | 0.00000   | 0.00000   | 0.00000   | 0.00000   | 0.00000   | 0.00000   |

## Método de Gauss Seidel

Representación gráfica de las temperaturas (escala ídem):



La matriz numérica es la siguiente:

```
Se hicieron 21 iteraciones
100.00000 100.00000 100.00000 100.00000 100.00000 100.00000 100.00000 100.00000 100.00000 100.00000 100.00000
80.00000 95.19283 109.89441 122.31606 128.14462 129.74615 128.14493 122.31660 109.89502 95.19321 80.00000
60.00000 90.87718 122.06900 151.22531 160.51619 162.69475 160.51644 151.22578 122.06960 90.87753 60.00000
40.00000 86.24689 136.27907 200.00000 200.00000 200.00000 200.00000 200.00000 136.27939 86.24700 40.00000
20.00000 77.83093 136.80018 200.00000 200.00000 200.00000 200.00000 200.00000 136.80028 77.83079 20.00000
0.00000 68.27598 133.09038 200.00000 200.00000 200.00000 200.00000 200.00000 133.09028 68.27562 0.00000
0.00000 62.18170 127.28488 200.00000 200.00000 200.00000 200.00000 200.00000 127.28462 62.18117 0.00000
0.00000 53.16486 113.86690 200.00000 200.00000 200.00000 200.00000 200.00000 113.86648 53.16422 0.00000
0.00000 36.60971 75.01716 113.17802 125.31522 128.15813 125.31506 113.17769 75.01656 36.60908 0.00000
0.00000 18.25580 36.41305 52.37885 59.92398 62.00156 59.92386 36.41267 18.25544 0.00000 0.00000
0.00000 0.00000 0.00000 0.00000 0.00000 0.00000 0.00000 0.00000 0.00000 0.00000 0.00000
```

## Análisis de los resultados

Si analizamos el problema trabajado, desde una perspectiva física, se observa que debido a las condiciones de borde planteadas, debería haber una perfecta simetría en cuando a la distribución de temperaturas.

En el caso de Método directo de Gauss, obtenemos resultados que concuerdan perfectamente con esta suposición. Por ejemplo, el valor  $a_{43} = 136.27881$  es idéntico al valor de la posición simétrica de la matriz, la  $a_{49}$ . Esto confirma que nuestra resolución respeta las leyes físicas del problema. Por lo pronto, este método debería ser el menos preciso, debido a la gran cantidad de operaciones utilizadas para el método directo (del orden de  $56^3$ ). Recordemos que cada operación conlleva un error de redondeo, por lo que el resultado final podría verse considerablemente afectado al final de 175616 operaciones.

De la misma manera, vemos que la matriz obtenida mediante el método de Jacobi también perfectamente simétrica. Teóricamente, este método debería llegar al resultado en una menor cantidad de operaciones, dado que el método converge con mayor velocidad. Efectivamente, podemos ver que se llega al resultado, respetando la tolerancia exigida, luego de realizar 34 iteraciones. Esto significa que la cantidad de operaciones totales para Jacobi es menor que la cantidad necesaria para el método de Gauss con pivoteo. En este caso estaríamos hablando de, aproximadamente  $56^2$  operaciones por iteración. Es decir  $34 \cdot 56^2 = 106624$  operaciones totales. (Ver que  $106624 < 175616$ ).

Al analizar los valores de la distribución de temperaturas confirmamos la simetría. Por ejemplo, el valor  $a_{2,2} = 95,19221$  es idéntico al valor de  $a_{2,10}$ , su posición simétrica en la matriz. Este patrón se repite a lo largo de toda la matriz y la simetría se observa claramente en la distribución de colores del gráfico.

Efectivamente este resultado debería ser más preciso que Gauss con pivoteo. Analíticamente, los valores obtenidos por ambos métodos difieren, en su mayoría, en el cuarto decimal. Esto significaría una leve mejoría en la precisión para el método de Jacobi.

Valor de Jacobi  $a_{2,2} = 95,19221$ ,

Valor de Gauss con pivoteo  $a_{2,2} = 95,19289$

Diferencia:  $95,19289 - 95,19221 = 6,8 \times 10^{-3}$

Finalmente, podemos realizar el mismo análisis para Gauss Seidel. Como los resultados no presentan una gran variación respecto de Jacobi o Gauss con pivote, las conclusiones serán las mismas.

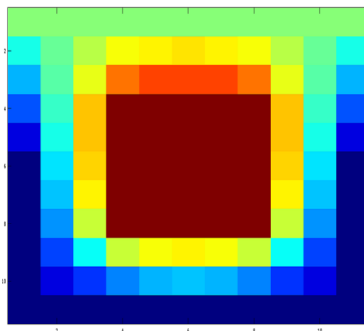
En el análisis gráfico podemos confirmar fácilmente que la matriz es simétrica. Sin embargo, si analizamos los datos específicamente, veremos que la simetría no es perfecta. De hecho valores de posiciones análogas difieren en el cuarto decimal. Por ejemplo, el valor de la posición  $a_{3,2} = 90,87718$  difiere en el cuarto decimal con el valor de la posición análoga  $a_{2,3} = 90,87753$ . Creemos que esta diferencia se debe a la tolerancia utilizada. Justamente, utilizamos una tolerancia de  $10^{-3}$  y la diferencia entre ambos valores es del orden de  $10^{-4}$ .

Claramente,

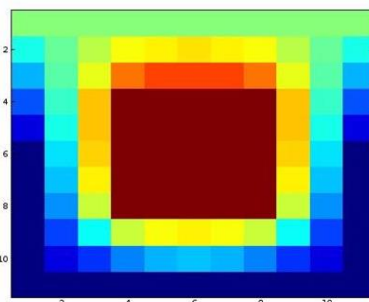
$$90,87753 - 90,87718 = 3,5 \times 10^{-4}$$

En cuanto a la convergencia y precisión del método, el mismo debería ser el más rápido y el más preciso. Se verifica la mayor velocidad de convergencia, dado que se realizaron 21 iteraciones en lugar de las 34 necesarias para Jacobi. Esto, como ya explicamos, resulta en una sustancial disminución en la cantidad de operaciones. Donde tendríamos  $21 \cdot 56^2 = 65856$  operaciones totales, menos de 1,5 veces las operaciones necesarias para Jacobi y menos de 2,6 veces las operaciones de Gauss con pivoteo.

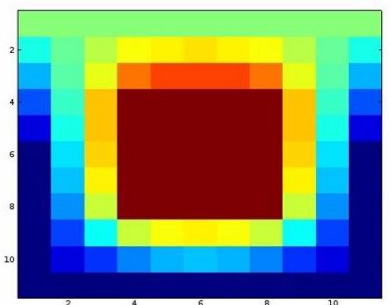
Comparación gráfica de los 3 métodos:



Gauss con pivoteo



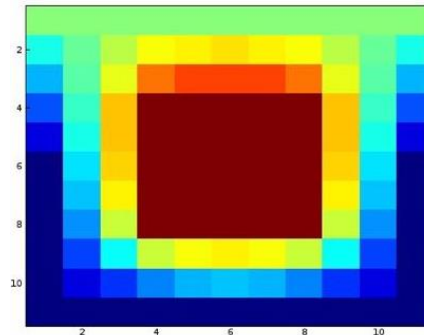
Jacobi



Gauss-Seidel

- Ahora analizaremos los resultados obtenidos por Jacobi y Gauss-seidel usando como solución inicial la propuesta por Gauss con pivoteo.

### Jacobi + Gauss con pivoteo:

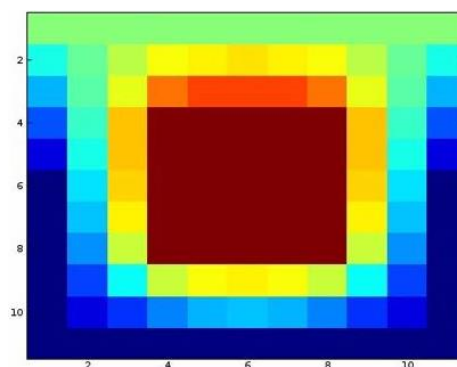


```
>> resolver_Jacobi_con_gauss_directo
Se hicieron 1 iteraciones
```

|           |           |           |           |           |           |           |           |           |           |           |
|-----------|-----------|-----------|-----------|-----------|-----------|-----------|-----------|-----------|-----------|-----------|
| 100.00000 | 100.00000 | 100.00000 | 100.00000 | 100.00000 | 100.00000 | 100.00000 | 100.00000 | 100.00000 | 100.00000 | 100.00000 |
| 80.00000  | 95.19289  | 109.89446 | 122.31605 | 128.14450 | 129.74587 | 128.14450 | 122.31605 | 109.89446 | 95.19289  | 80.00000  |
| 60.00000  | 90.87709  | 122.06890 | 151.22526 | 160.51606 | 162.69450 | 160.51606 | 151.22526 | 122.06890 | 90.87709  | 60.00000  |
| 40.00000  | 86.24657  | 136.27881 | 200.00000 | 200.00000 | 200.00000 | 200.00000 | 200.00000 | 136.27881 | 86.24657  | 40.00000  |
| 20.00000  | 77.83040  | 136.79975 | 200.00000 | 200.00000 | 200.00000 | 200.00000 | 200.00000 | 136.79975 | 77.83040  | 20.00000  |
| 0.00000   | 68.27526  | 133.08980 | 200.00000 | 200.00000 | 200.00000 | 200.00000 | 200.00000 | 133.08980 | 68.27526  | 0.00000   |
| 0.00000   | 62.18085  | 127.28418 | 200.00000 | 200.00000 | 200.00000 | 200.00000 | 200.00000 | 127.28418 | 62.18085  | 0.00000   |
| 0.00000   | 53.16394  | 113.86607 | 200.00000 | 200.00000 | 200.00000 | 200.00000 | 200.00000 | 113.86607 | 53.16394  | 0.00000   |
| 0.00000   | 36.60886  | 75.01616  | 113.17726 | 125.31459 | 128.15758 | 125.31459 | 113.17726 | 75.01616  | 36.60886  | 0.00000   |
| 0.00000   | 18.25533  | 36.41245  | 52.37831  | 59.92351  | 62.00115  | 59.92351  | 52.37831  | 36.41245  | 18.25533  | 0.00000   |
| 0.00000   | 0.00000   | 0.00000   | 0.00000   | 0.00000   | 0.00000   | 0.00000   | 0.00000   | 0.00000   | 0.00000   | 0.00000   |

La matriz contiene exactamente las mismas características que cuando resolvemos el problema con el método de Gauss con pivoteo únicamente. La única diferencia radica en la cantidad de iteraciones que utiliza el método de Jacobi. En este caso se realiza sólo una iteración lo que significa que la precisión del método de Gauss con pivoteo es alta. En otras palabras hemos acelerado ampliamente la velocidad de convergencia del método de Jacobi.

### Gauss-Seidel + Gauss con pivoteo:



```
>> resolver_GS_con_gauss_directo
Se hicieron 1 iteraciones
```

|           |           |           |           |           |           |           |           |           |           |           |
|-----------|-----------|-----------|-----------|-----------|-----------|-----------|-----------|-----------|-----------|-----------|
| 100.00000 | 100.00000 | 100.00000 | 100.00000 | 100.00000 | 100.00000 | 100.00000 | 100.00000 | 100.00000 | 100.00000 | 100.00000 |
| 80.00000  | 95.19289  | 109.89446 | 122.31605 | 128.14450 | 129.74587 | 128.14450 | 122.31605 | 109.89446 | 95.19289  | 80.00000  |
| 60.00000  | 90.87709  | 122.06890 | 151.22526 | 160.51606 | 162.69450 | 160.51606 | 151.22526 | 122.06890 | 90.87709  | 60.00000  |
| 40.00000  | 86.24657  | 136.27881 | 200.00000 | 200.00000 | 200.00000 | 200.00000 | 200.00000 | 136.27881 | 86.24657  | 40.00000  |
| 20.00000  | 77.83040  | 136.79975 | 200.00000 | 200.00000 | 200.00000 | 200.00000 | 200.00000 | 136.79975 | 77.83040  | 20.00000  |
| 0.00000   | 68.27526  | 133.08980 | 200.00000 | 200.00000 | 200.00000 | 200.00000 | 200.00000 | 133.08980 | 68.27526  | 0.00000   |
| 0.00000   | 62.18085  | 127.28418 | 200.00000 | 200.00000 | 200.00000 | 200.00000 | 200.00000 | 127.28418 | 62.18085  | 0.00000   |
| 0.00000   | 53.16394  | 113.86607 | 200.00000 | 200.00000 | 200.00000 | 200.00000 | 200.00000 | 113.86607 | 53.16394  | 0.00000   |
| 0.00000   | 36.60886  | 75.01616  | 113.17726 | 125.31459 | 128.15758 | 125.31459 | 113.17726 | 75.01616  | 36.60886  | 0.00000   |
| 0.00000   | 18.25533  | 36.41245  | 52.37831  | 59.92351  | 62.00115  | 59.92351  | 52.37831  | 36.41245  | 18.25533  | 0.00000   |
| 0.00000   | 0.00000   | 0.00000   | 0.00000   | 0.00000   | 0.00000   | 0.00000   | 0.00000   | 0.00000   | 0.00000   | 0.00000   |

Un simple análisis comparativo nos permite confirmar que no hay diferencia apreciable entre la combinación de G-S con Gauss y Jacobi con Gauss. No hace falta decir que analizar estos resultados sería repetir lo anteriormente dicho. Lo único que merece mención es que al realizar esta combinación de procedimientos, el método arroja una matriz perfectamente simétrica, cosa que no pasaba al aplicar GS únicamente.

### **Conclusiones:**

Por un lado hemos comprobado la efectividad de cualquiera de los tres métodos para resolver este problema. Por el otro, hemos comprobado de manera práctica la teoría explicitada por los libros dado que, el método más veloz y preciso resultó ser el de Gauss Seidel, mientras que el más impreciso y lento es el de Gauss con pivoteo.

Además pudimos confirmar que un análisis analítico del problema resulta mucho mejor que uno gráfico. En el análisis gráfico las variaciones en los resultados, que se percibieron en el análisis analítico, no eran visibles.

En cuanto a qué método es más apto para el problema tuvimos que analizar tres factores:

- Dificultad en la programación del método numérico
- Precisión de los resultados
- Velocidad de convergencia

En nuestra opinión, el mejor método termina siendo el de Jacobi, dada su precisión y velocidad de convergencia. Este método fue el que mejor se ajustó a las condiciones y exigencias del enunciado, dando una matriz simétrica y unos datos más precisos que Gauss con pivoteo. Además es un método que, matricialmente, resulta simple de codificar. El método de Gauss Seidel resultó ineficiente dada la tolerancia exigida por el problema, que condicionó el resultando, dándonos una matriz no simétrica.

Si se desea simplificar el desarrollo del ejercicio, lo mejor será resolverlo con Gauss con pivoteo. Decimos esto porque dicha función se encuentra integrada al Octave, por lo que nos evitaríamos el problema de construir un programa para ejecutar el método. Además, a fin de cuentas, los resultados obtenidos por Gauss presentan variaciones muy pequeñas respecto al de Gauss-Seidel o Jacobi, tal y como lo muestra el análisis de resultados.

Finalmente, si se quiere maximizar la velocidad de convergencia del resultado y la precisión del mismo, deberemos calcular el resultado del problema con Gauss con pivoteo y luego aplicar Jacobi o Gauss Seidel, con una solución inicial  $X^0$  igual a la solución propuesta por Gauss con pivoteo.