

**75.12 ANÁLISIS NUMÉRICO I**  
**Departamento de Computación**  
**FACULTAD DE INGENIERÍA**

**UNIVERSIDAD DE BUENOS AIRES**  
**Primer cuatrimestre 2016**  
**TRABAJO PRÁCTICO 2**

Grupo 12:

Chiesa Docampo, German - 96994 - [german0695@hotmail.com](mailto:german0695@hotmail.com)

Mendez, Agustina - 98338

Vassolo, Juan Daniel - 97846 - [juanv\\_6@hotmail.com](mailto:juanv_6@hotmail.com)

Irrazabal, Diego - 98125

## Introducción

En este trabajo se busca estudiar el comportamiento de distintos métodos numéricos en la resolución de un Problema de Valores Iniciales (P.V.I).

El problema físico planteado es el de un circuito de tipo RLC, el cual incluye un elemento resistivo que posee comportamiento no lineal. Más precisamente, este elemento es un par de diodos de efecto túnel.

Este problema lleva a una ecuación diferencial de segundo orden, denominada “Ecuación de Van der Pol (1926)”:

$$\begin{aligned}v'' - \varepsilon \cdot (1 - v^2) \cdot v' + \delta \cdot v &= 0 \\v(0) &= \alpha \\v'(0) &= \beta\end{aligned}$$

Donde:

- El tiempo se encuentra adimensionalizado como  $\tau = t / \sqrt{L \cdot C}$ .
- El valor de las derivadas son todas respecto de dicho tiempo adimensionalizado.
- El valor de  $\varepsilon = \sqrt{L/C}$ .
- El valor de  $i = h(v) = -v + \frac{v^3}{3}$  del circuito resistivo.
- El valor de  $\delta = 1$ .

Se procederá a la resolución de dicha ecuación mediante el método de Euler, Runge-Kutta de orden 2 y 4, el método de Nyström, ode23 y ode45, con el objetivo de analizar su comportamiento, comparando errores en los resultados, debidos a la consistencia de los métodos y a la estabilidad.

## Conceptos teóricos

Al estudiar un fenómeno físico con frecuencia no es posible hallar de inmediato las leyes que enlazan las magnitudes que caracterizan dicho fenómeno. Por el otro lado, es más sencillo establecer la dependencia entre dichas magnitudes con sus derivadas o diferenciales. De esta forma obtenemos ecuaciones que contienen las funciones desconocidas, bajo el signo de derivada o de diferencial. Estas ecuaciones se llaman diferenciales. Al resolver dichas ecuaciones diferenciales, mediante diversos métodos, determinamos las relaciones entre las magnitudes implicadas.

En este trabajo práctico trabajaremos con ecuaciones diferenciales ordinarias, dado que las funciones desconocidas son de una variable. Se denomina orden de la ecuación diferencial al orden de la derivada máxima de la función desconocida que figura en la ecuación. En este caso las ecuaciones son de orden 2. Por último, llamamos solución de la ecuación diferencial a toda función que al ser reemplazada en la misma la convierte en una identidad.

Sea la ecuación diferencial

$$\frac{dy}{dx} = f(x, y)$$

Con  $f(x, y)$  continua en el rectángulo  $D = (x_0 - a, x_0 + a) \times (y_0 - b, y_0 + b)$ .

También  $f(x, y)$  satisface en D la siguiente condición de Lipschitz:

$$|f(x, y_1) - f(x, y_0)| \leq N |y_1 - y_0| \text{ con } N = \text{cte};$$

Entonces existe una única solución de la ecuación diferencial:  $y = y(x)$  definida sobre  $(x_0 - H, x_0 + H)$  que satisface la condición  $y(x_0) = y_0$  donde:  $M = \max|f(x, y)|$  con

$$(x, y) \text{ en } D, H < \min\left\{a, \frac{b}{M}, \frac{1}{N}\right\}$$

A un problema de este tipo, en donde la unicidad surge de fijar el valor de la incógnita para el x inicial, se denomina Problema de valor Inicial (PVI). Este tipo de problemas tienen solución única cuando  $f$  es continua en  $D$  y satisface la condición de Lipschitz en  $D$  en la variable  $y$ .

Métodos de paso simple:

Dado un problema matemático de la forma

$$\begin{cases} y' = f(x, y) \\ y(x_0) = y_0 \end{cases}$$

cuyos datos de entrada son  $f(x, y)$  y  $(x_0, y_0)$ ;

Toda expresión de la forma:

$$u_0 = y_0, \quad u_{k+1} = u_k + h \phi(x_k, u_k, u_{k+1}; h; f)$$

constituye un método de paso simple para aproximar numéricamente a  $y(x)$ .

### Consistencia en métodos de paso simple:

Teniendo definido un dominio D donde se cumplen las condiciones de existencia de la solución, tomando un  $(x, y)$  arbitrarios en D y siendo  $z(t)$  la solución exacta del PVI.

$$\begin{cases} z' = f(t, z) \\ z(x) = y \end{cases}$$

Definimos ahora la función incremento para  $z(t)$ :

$$\Delta(x, y; h; f) = \begin{cases} \frac{z(x+h) - z(x)}{h}, & \text{si } h \neq 0 \\ f(x, y), & \text{si } h = 0 \end{cases}$$

Definamos ahora la diferencia

$$p(x, y; h; f) = \Delta(x, y; h; f) - \phi(x, y; z(x+h); f)$$

Decimos que el sistema es consistente de orden P, sí y sólo sí

$$p(x, y; h; f) = O(h^P)$$

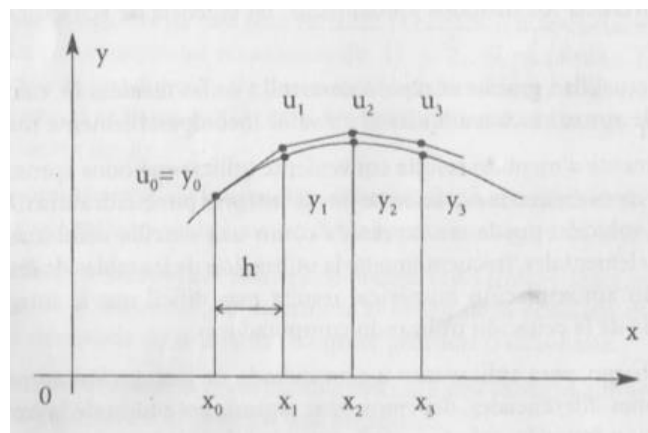
## Métodos de paso simple

### 1) Método de Euler:

Toma  $u_0 = y_0$ ; una vez que aproximó  $y(x_n)$  por  $u_n$ , avanza sobre la tangente a la solución de la ecuación diferencial que pasa por el punto  $(x_n, u_n)$ :

$$u_{n+1} = u_n + hf(x_n, u_n)$$

Esta es la ecuación de diferencias asociada al método de Euler. El mismo es explícito y de orden 1. La idea de éste método consiste en sustituir la curva integral buscada, solución de la ecuación diferencial de primer orden por una quebrada constituida por segmentos lineales, cada uno de los cuales es tangente a una curva integral de la ecuación diferencial:



En la práctica no obtendremos una aproximación continua a la solución  $y(t)$ ; sino que se generarán aproximaciones a esa solución en varios valores, llamados puntos de red, en el intervalo  $[a, b]$ . Una vez obtenida la aproximación podemos obtener, por interpolación, la solución aproximada en otros puntos del intervalo. Cuanto menor sea el "h" elegido mayor será la precisión del método.

Primero, definimos que los puntos de red tienen una distribución uniforme en todo el intervalo. Esta condición la garantizamos al seleccionar un entero positivo N y los puntos de red

$$t_i = a + ih, \text{ para cada } i = 0, 1, 2, 3, \dots, N.$$

La distancia común entre puntos, o distancia de cada segmento,  $h = \frac{(b-a)}{N}$  recibe el nombre de tamaño de paso.

Por último podemos decir que Euler es un método consistente de orden 1.

$$T = \left| \frac{h}{2} \cdot y''(t_n) + O(h^2) \right| \leq Mh^1 \quad \text{con } M = \frac{1}{2} \max\{|y''(\xi)|\}$$

Método de Runge-Kutta de orden 2:

Toma  $u_0 = y_0$ ; una vez que aproximó  $y(x)_n$  por  $u_n$ , avanza sobre una recta cuya pendiente es el promedio de las pendientes de las rectas tangentes a las soluciones que pasan por los puntos

$$\begin{aligned} & (x_n, u_n), \quad (x_{n+1}, u_n + h f(x_n, u_n)); \\ & q_1 = h f(x_n, u_n); \quad q_2 = h f(x_{n+1}, u_n + q_1); \\ & u_{n+1} = u_n + \frac{q_1 + q_2}{2} \end{aligned}$$

Método Runge Kutta orden 4

Toma  $u_0 = y_0$ ; una vez que aproximamos  $y(x)_n$  por  $u_n$ , hacemos:

$$\begin{aligned} & q_1 = h f(x_n, u_n), \quad q_2 = h f\left(x_{n+1/2}, u_n + \frac{q_1}{2}\right), \\ & q_3 = h f\left(x_{n+1/2}, u_n + \frac{q_2}{2}\right), \quad q_4 = h f(x_{n+1}, u_n + q_3); \end{aligned}$$

la solución avanza sobre una recta cuya pendiente es el promedio pesado de las pendientes de las rectas tangentes a las soluciones que pasan por los puntos:

$$\begin{aligned} & (x_n, u_n), \quad (x_{n+1/2}, u_n + \frac{q_1}{2}), \quad (x_{n+1/2}, u_n + \frac{q_2}{2}), \quad (x_{n+1}, u_n + q_3); \\ & u_{n+1} = u_n + \frac{q_1 + 2q_2 + 2q_3 + q_4}{6} \end{aligned}$$

Los métodos utilizados en este T.P no producen una aproximación continua a la solución del problema de valor inicial. Por el contrario, se obtienen las aproximaciones en algunos puntos específicos y, a menudo, igualmente espaciados. Si se requieren valores intermedios se debería utilizar un método de interpolación, que generalmente es el del Hermite, cosa que no haremos.

### Estabilidad de un método de paso simple:

Como la cantidad de pasos para evaluar un cierto  $u_n$ , con un error de discretización razonable puede llegar a ser grande, nos interesa que una cierta perturbación en un paso no se propague al siguiente, creciendo de forma tal que no se pueda controlar con un ajuste del valor de  $h$ .

Diremos que un Método es estable, sí y sólo sí existe una función de orden  $h$ ,  $O(h)$ , tal que:

$$\varepsilon_{k+1} = (1 + O(h)) \varepsilon_k \text{ para todo } k.$$

siendo  $(1 + O(h))$  el factor de amplificación.

Para valores suficientemente chicos de  $h$  implica:

$$|\varepsilon_{k+1}| \leq (1 + O(h)) |\varepsilon_k|.$$

Entonces es claro que las propagaciones de los errores las maneja la función  $O(h)$  que aparece en la definición de estabilidad a través del factor de amplificación. La condiciones óptimas se darán con un  $O(h)$  negativo, para ciertos valores de  $h$ , para que el factor de amplificación tenga módulo menor o igual a 1.

Por el otro lado, si la función  $O(h)$  es positiva, tendremos que trabajar con valores de  $h$  que la hagan muy pequeña, y no podremos avanzar mucho en la solución sin que los errores propagados sean notables y arruinen el resultado.

**Error local de truncamiento:** mide la cantidad en que la solución exacta de la ecuación diferencial no satisface la ecuación de diferencias con que se obtiene la aproximación. Este error se basa en el tamaño de paso, en la ecuación diferencial y en el paso particular de la aproximación.

Análisis de resultados:

Comparar formas de graficos luego de  $n$  ciclos. Unos quedan dentro de otros, otros por fuera. USAR de referencia el método ode 23 (RK 2) o el ode 45 (viene del RK orden 4). Elegir uno de los dos a partir de un criterio justificado.

Comparar resultados finales a partir de tiempo final con cada método. Donde  $n$  es el mismo para todos. Determinar un  $N$  y un  $h$  (paso) a partir de un criterio propio. Con un  $h$  menor (mas preciso) voy a tener que hacer muchas mas cuentas.

La ecuación diferencial a resolver tiene orden mayor que uno. Para poder aplicar los métodos explicados anteriormente necesitamos "renombrar" las variables para reducir una ecuación diferencial de orden superior (dos) a un sistema de ecuaciones

diferenciales de orden uno. En nuestro caso si: 
$$\begin{cases} u_1(t) = v(t) \\ u_2(t) = v'(t) \end{cases}$$

Entonces la ecuación diferencial de segundo orden se transforma en:

$$\begin{cases} u_1'(t) = u_2(t) \\ u_2'(t) - \varepsilon \cdot (1 - u_1(t)^2) \cdot u_2(t) + \delta \cdot u_1(t) = 0 \end{cases}$$

con  $u_1(0) = \alpha$  y  $u_2(0) = \beta$

### **Análisis de resultados:**

Realizamos todos los cálculos con cada método tomando un tiempo final común a todos.

$$t_f = t_0 + n \cdot h = 0 + 350 \cdot 0,1$$

### **Justificación de la elección de h y tf:**

El tiempo final se eligió en base a las exigencias de la consigna. Este debía ser el mismo para todos los métodos para así facilitar la comparación de los resultados que nos brindaba cada uno. Por un lado, necesitábamos un mínimo de 3 períodos al menos con cada método. Por el otro, se consideró que a medida que aumentaba el tiempo final, (con un paso constante) aumentaba la cantidad de ciclos. Como ya lo explicamos antes, con cada ciclo aumenta la fluctuación del resultado de cada método respecto del resultado patrón (el obtenido por ode23). Así concluimos que el mejor tiempo posible sería 35.

En cuanto al paso consideramos que 0,1 sería una buena opción. A medida que h tiende a cero, el resultado será cada vez más preciso. Por esta razón debíamos elegir el paso más pequeño posible. Sin embargo, al disminuir el paso aumentamos la cantidad de ciclos y con ello el error en el resultado final. Por ello el paso no debía ser ni muy chico ni muy grande. Además al introducir pasos mayores a 0,12 en nuestro programa el método de RK2 no podía ser calculado dado que los datos obtenidos superaban el "float capacity" del software.

### **Qué método utilizamos como referencia y por qué:**

Definidos el paso y el tiempo final decidimos usar como referencia para comparar los resultados el método Ode23. Este método está basado en RK de orden 2. Por lo tanto, dicho método posee un orden de consistencia de dos y comparte la misma estabilidad que Rk2. Teniendo esto en cuenta, consideramos que un paso igual a  $1 \times 10^{-2}$  sería suficiente para que el error de truncamiento local ( $T$ ) sea considerablemente bajo y no arruine nuestros resultados finales. Es claro que  $T \leq M \cdot (1 \times 10^{-2})^2$  es un valor suficientemente chico como para obtener un resultado preciso.

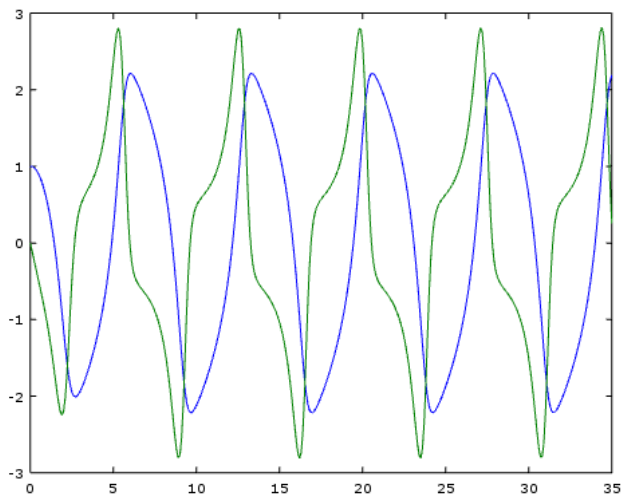
En cuanto a su estabilidad, el método Ode23 es considerablemente mejor que el Ode45, dada la menor cantidad de cuentas que debe realizar por ciclo para obtener los puntos de la curva. Como ya sabemos a mayor cantidad de cuentas aritméticas realizadas por el programa, mayor será el error de propagación y peores serán nuestros resultados. El método Ode45 nos daría una precisión aún mayor si consideramos su consistencia únicamente, pero dado el tiempo final elegido (35) y la gran cantidad de ciclos (350), su resultado final sería más impreciso.

## Euler:

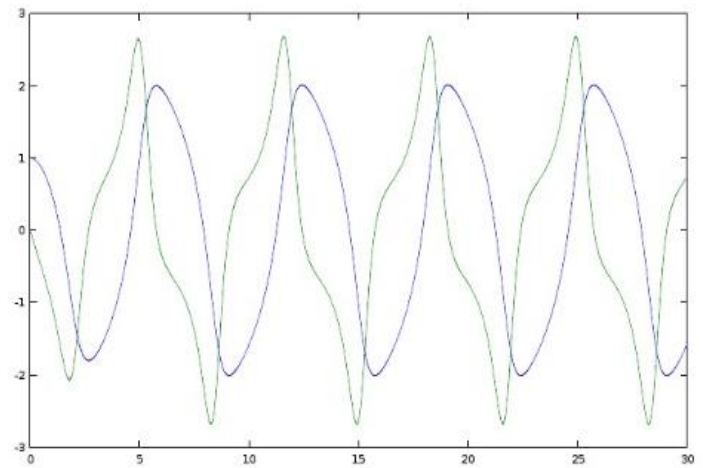
Para el método de Euler sabemos que el error crece a medida que aumenta el tiempo final. El crecimiento controlado del error es consecuencia de la estabilidad del método de Euler, el cual implica que en el peor de los casos el error aumente de forma lineal con el tamaño del paso. Al mismo tiempo al disminuir el paso debe haber mayor exactitud en las aproximaciones del resultado.

Gráficos de  $V(t)$  (color azul) y  $V'(t)$  (color verde) en función del tiempo dados los diferentes  $\varepsilon$ .

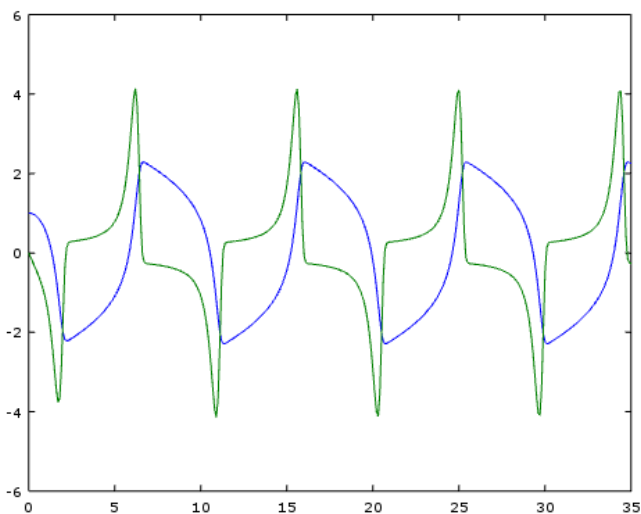
$\varepsilon = 1$  Euler



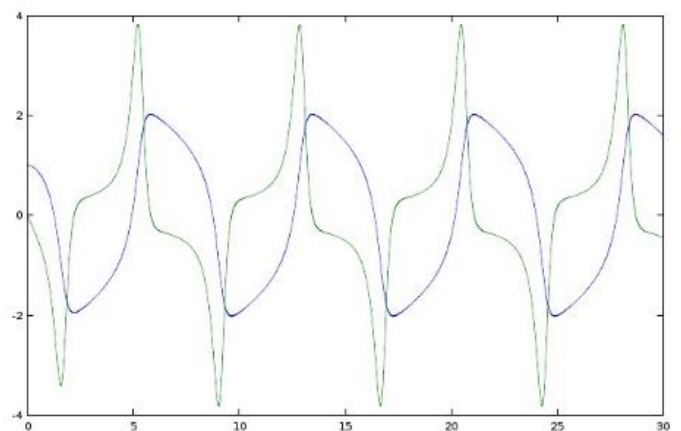
$\varepsilon = 1$  Ode 23



$\varepsilon = 2$

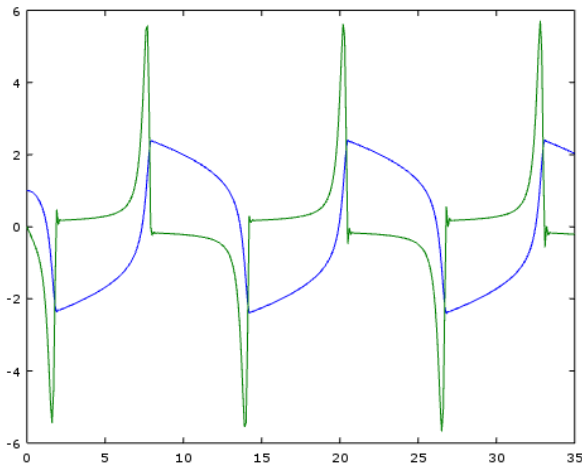


$\varepsilon = 2$  Ode 23

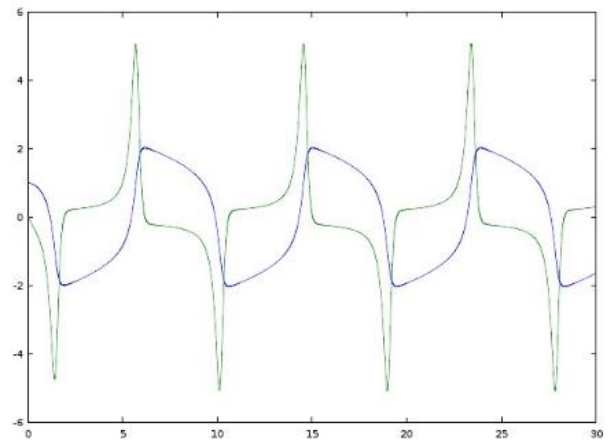




$\varepsilon = 3$



$\varepsilon = 3$  Ode 23



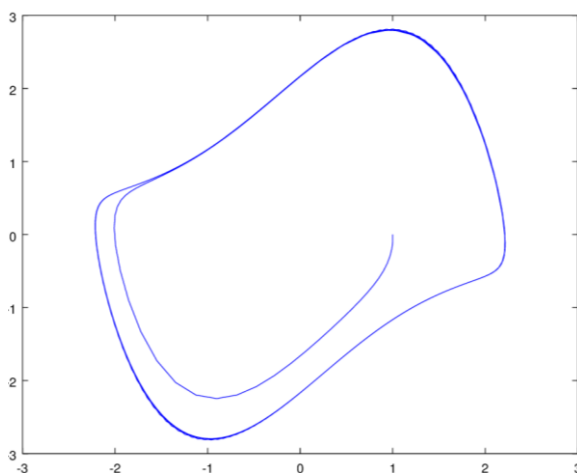
$\varepsilon = 4$

$\varepsilon = 5$

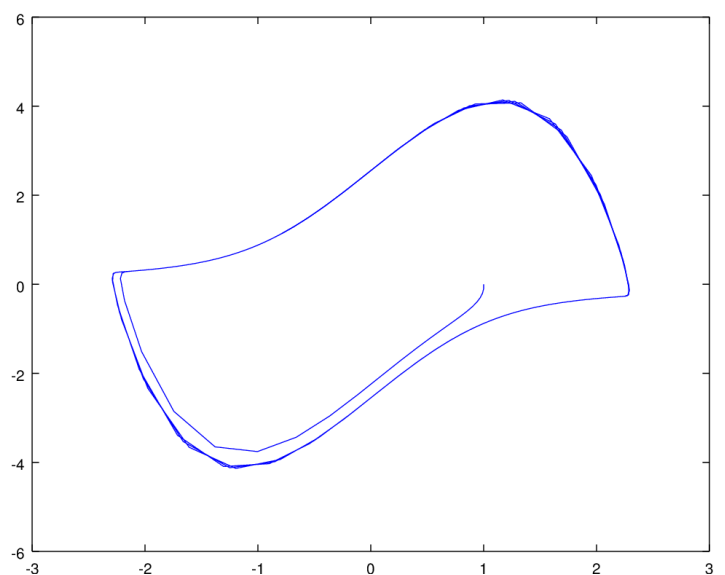
Con estos ultimos dos valores de epsilon el método de Euler no proporciona un resultado aplicable, puesto que los valores que devuelve se vuelven exponencialmente oscilantes, al punto no solo de hacerse imposible su graficación, si no también la comparación de los resultados con otros métodos.

A medida que aumenta el epsilon disminuye el tiempo adimensionalizado. Esto se traduce en una menor cantidad de períodos graficados. El error o la diferencia entre los resultados de cada método aumenta a medida que aumenta el tiempo. En otras palabras el método de Euler es más impreciso a medida que disminuye el epsilon. Esto se debe a que para Euler el error proveniente de la consistencia del método aumenta a medida que aumenta el tiempo final.

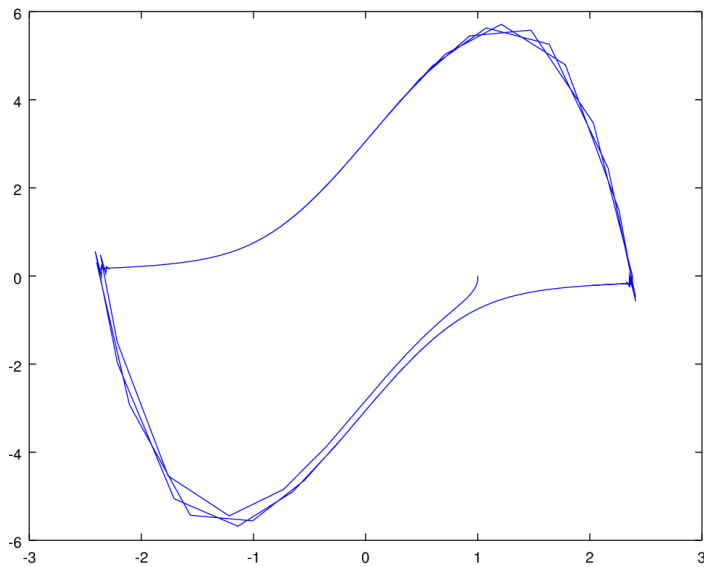
$\varepsilon = 1$  Euler: V vs V'



$\varepsilon = 2$  Euler: V vs V'



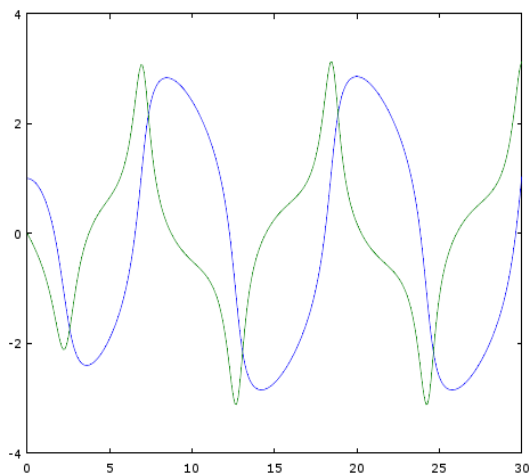
$\varepsilon = 3$  Euler v vs  $V'$



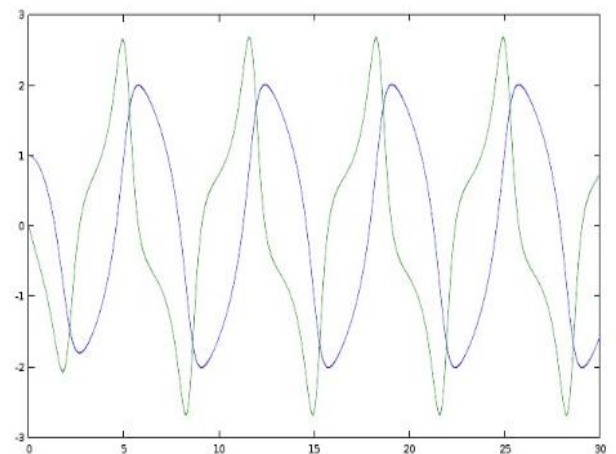
**Runge-Kutta 2:** El orden de consistencia de éste método es 2, entonces el error local de truncamiento es  $O(h^2)$ . El costo de mejorar el orden de consistencia, es un mayor esfuerzo de cálculo, ya que se deben realizar dos evaluaciones funcionales por paso. Esto implica una mayor cantidad de cuentas, por ende, un probable aumento del error relacionado con la estabilidad de método.

Gráficos de  $V(t)$  (color azul) y  $V'(t)$  (color verde) en función del tiempo dados los diferentes  $\varepsilon$ .

$\varepsilon = 1$



$\varepsilon = 1$  Ode 23



$\varepsilon = 2$

$\varepsilon = 3$

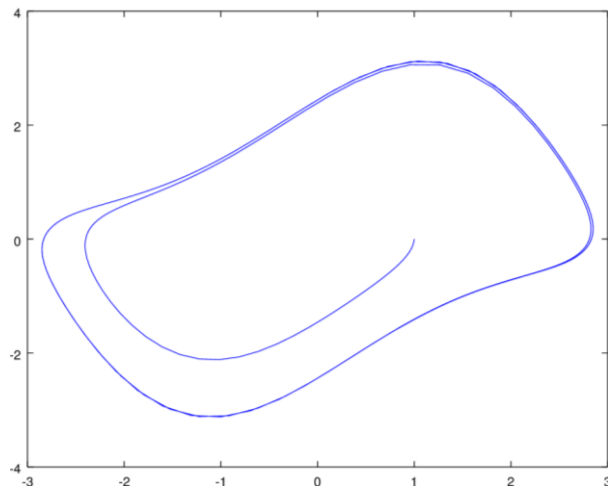
$\varepsilon = 4$

$\varepsilon = 5$

Para estos últimos valores de  $\varepsilon$ , como ocurrió en algunos casos con el método de Euler, no se puede aplicar el método.

Pudiendo solo comparar un gráfico obtenido con éste método, se observa una importante diferencia en cuanto al período de la solución y los picos en la derivada, muy probablemente debido a un gran error relacionado con la estabilidad del método (siendo este error mayor para  $\varepsilon$  chicos, ya que hay un alto valor de tiempo adimensionalizado, por ende mayor cantidad de ciclos y de cuentas).

$\varepsilon = 1$  RK2: V vs V'



**RungeKutta 4:** El error local de truncamiento de este método es de orden cuatro,  $O(h^4)$ .

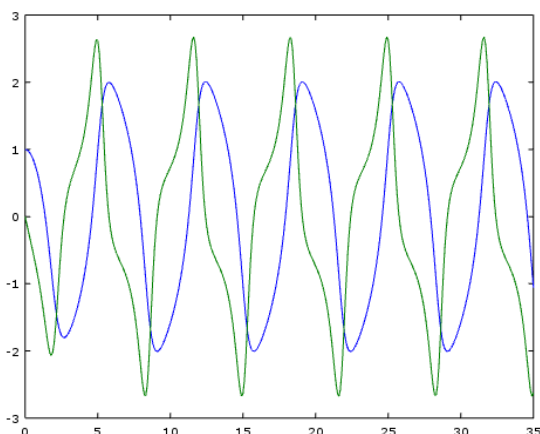
El costo de este método es el de realizar cuatro evaluaciones por paso o ciclo. Sin embargo, a mayor cantidad de evaluaciones por paso menor es el error relacionado a la consistencia del método.

Por el otro lado, no olvidemos que el otro tipo de error, el relacionado a la aritmética o estabilidad del método, aumentará a mayor cantidad de cuentas y aproximaciones.

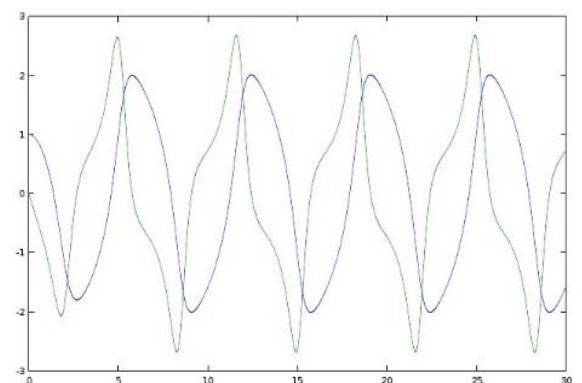
Analicemos los gráficos obtenidos,

Gráficos de  $V(t)$  (color azul) y  $V'(t)$  (color verde) en función del tiempo dados los diferentes  $\varepsilon$ .

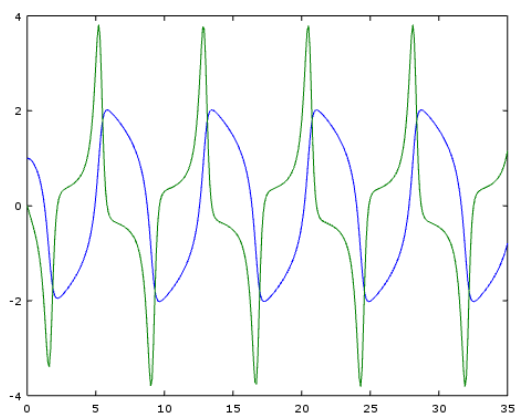
$\varepsilon = 1$  RK4



$\varepsilon = 1$  Ode 23

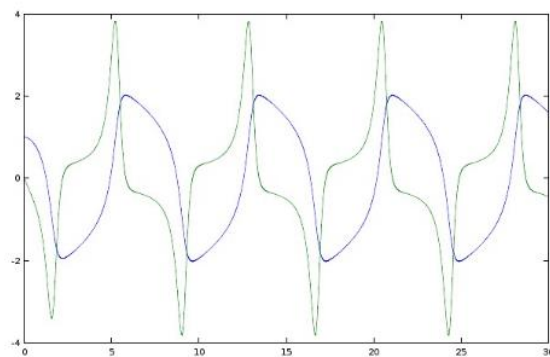


$\varepsilon = 2$

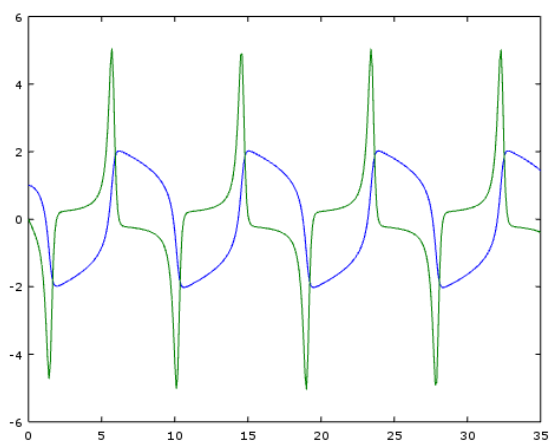


$\varepsilon = 2$

Ode 23

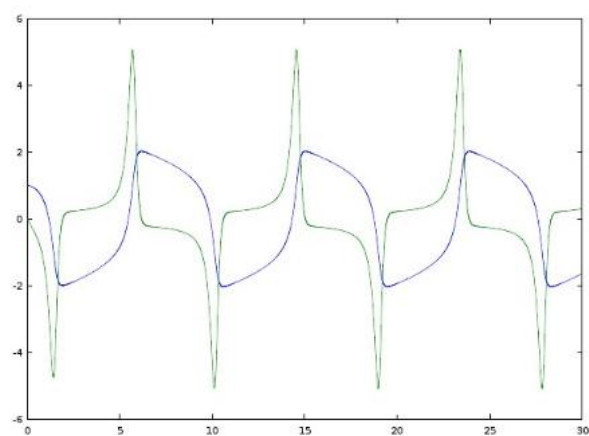


$\varepsilon = 3$

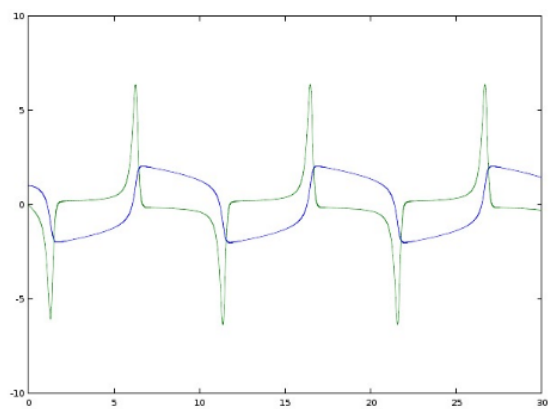


$\varepsilon = 3$

Ode 23

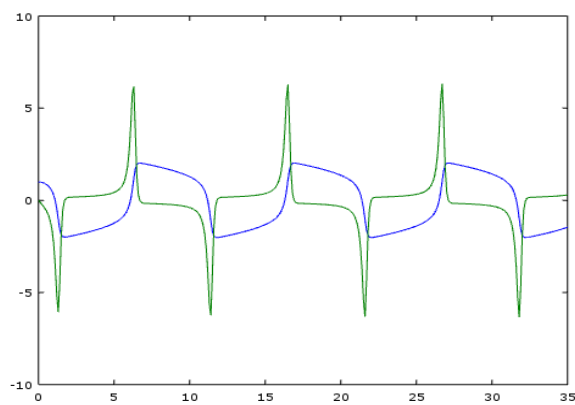


$\varepsilon = 4$

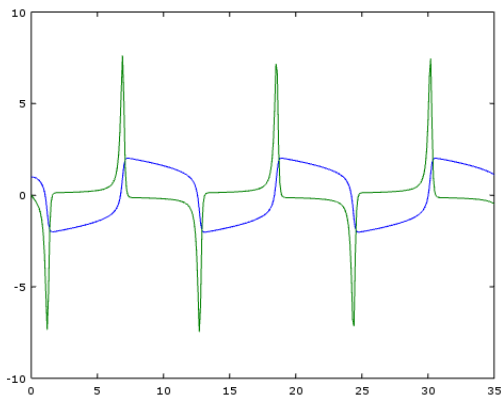


$\varepsilon = 4$

Ode 23

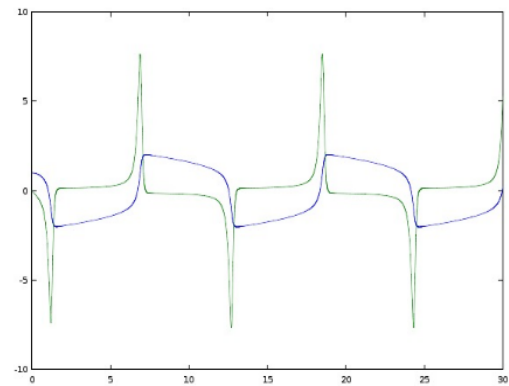


$\varepsilon = 5$



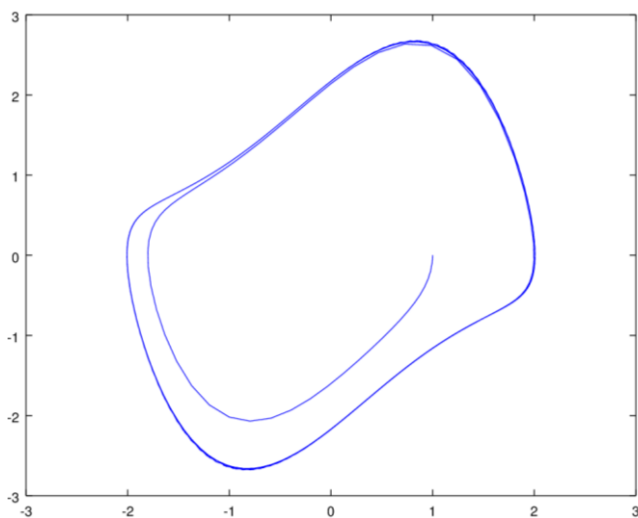
$\varepsilon = 5$

Ode 23

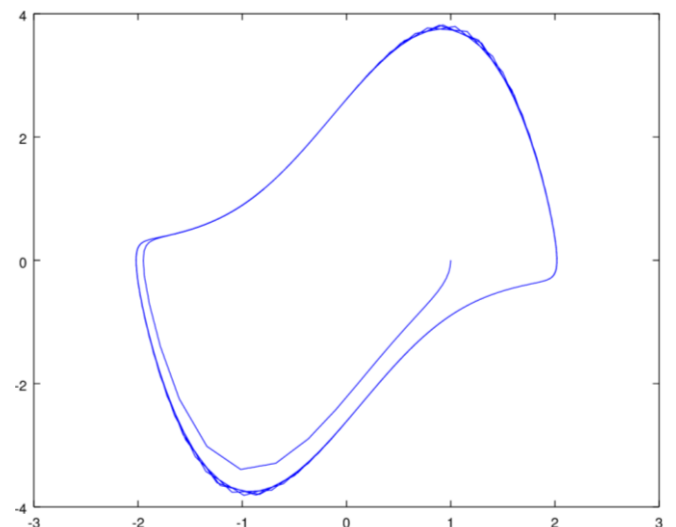


A medida que disminuyo el tiempo, o aumento el epsilon, disminuye la cantidad de períodos graficados. Este método resulta claramente muy preciso a la hora de la comparación. Para todos los epsilon los resultados obtenidos son muy similares y esto se debe al alto grado de consistencia del método. A medida que aumentamos el epsilon, disminuimos el tiempo, es decir la cantidad de ciclos a realizar. Esto se traduce en un aumento en la precisión del resultado, dado que a menor cantidad de ciclos menor cantidad de cuentas (menor error proveniente de la estabilidad). Además a medida que aumenta el epsilon, aumentaba la similitud de resultados. Contrario a lo que creíamos que iba a pasar este método no presentó un gran error proveniente de su estabilidad. En un principio, pensamos que la gran cantidad de ciclos y cuentas aritméticas del método generaría un gran error en el resultado, pero esto no fue así.

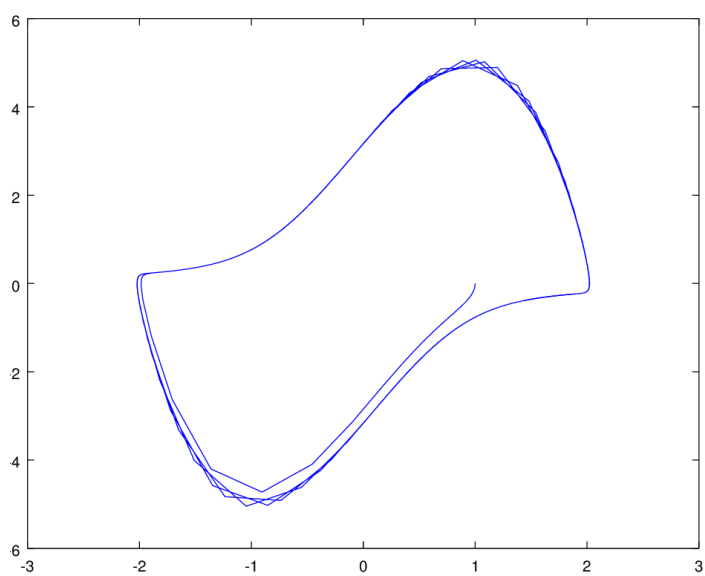
$\varepsilon = 1$  RK4: V vs V'



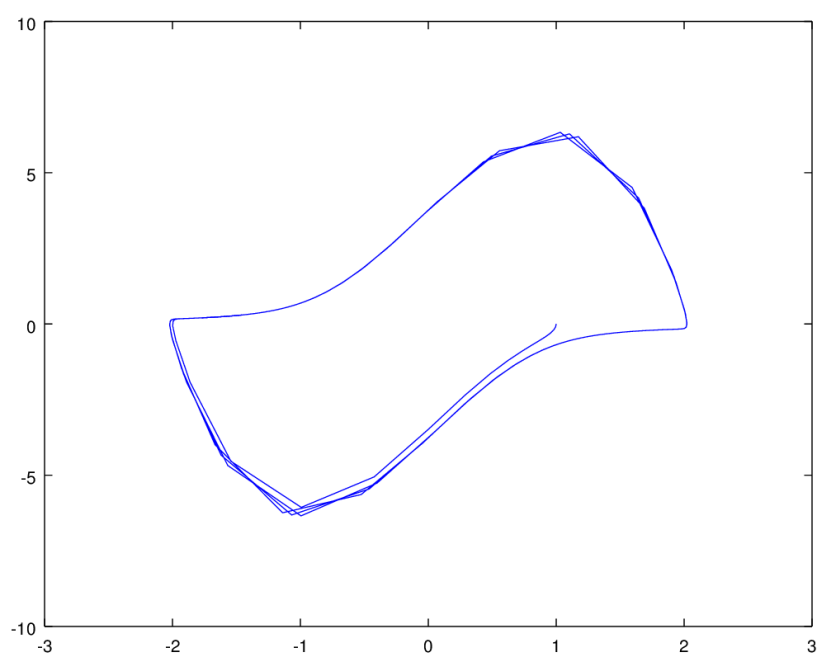
$\varepsilon = 2$  RK4: V vs V'



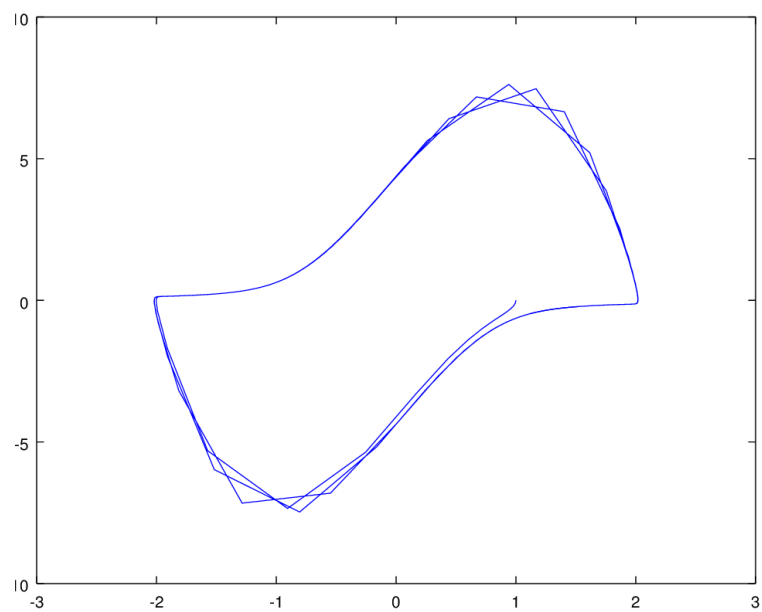
$\varepsilon = 3$  RK4: V vs V'



$\varepsilon = 4$  RK4: V vs V'



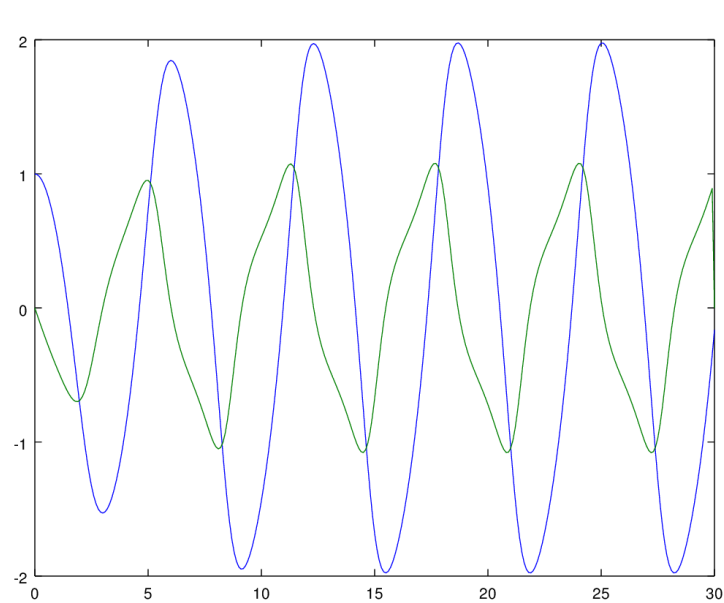
$\varepsilon = 5$  RK4: V vs V'



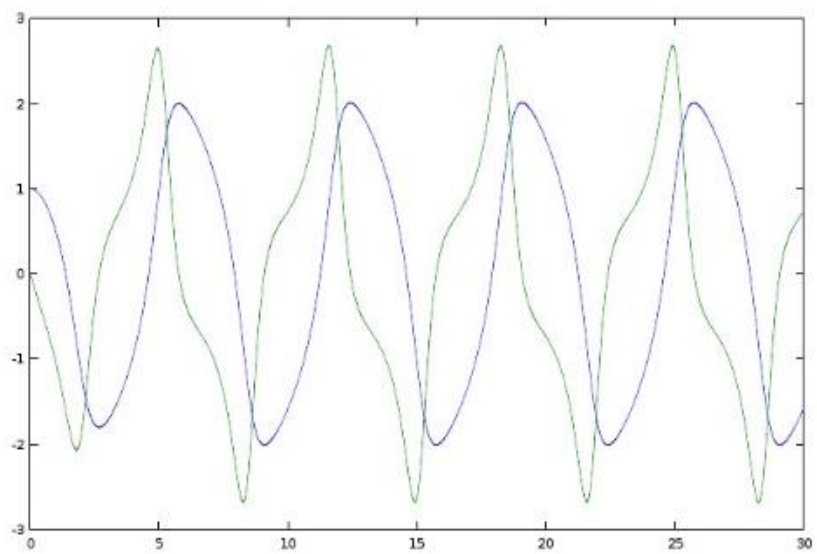
**Nystrom:** el método de Nystrom para la resolución de ecuación diferenciales ordinarias difiere de los anteriores en que este es un método multipaso. Los métodos multipaso requieren el previo cálculo de otros valores con la utilización de otros métodos (ya que el mismo no podría ser utilizado por requerir otro valor previo no calculado). Más aún, para este trabajo, este método se implementó dentro de un esquema predictor-corrector. Así, primero se calcula un valor predictivo, y luego se lo corrige con la fórmula del método de Nystrom. Como dijimos antes, este método requiere un valor previo calculado. Se utilizó el método Taylor para calcularlo, previo comienzo de la iteración.

En este trabajo, solo se pidió trabajar con  $\epsilon = 1$ . Observamos su comparación de los resultados de  $v$  y  $v'$  respecto del tiempo con los métodos de Runge-Kutta de orden 2 y ode23, con el mismo valor:

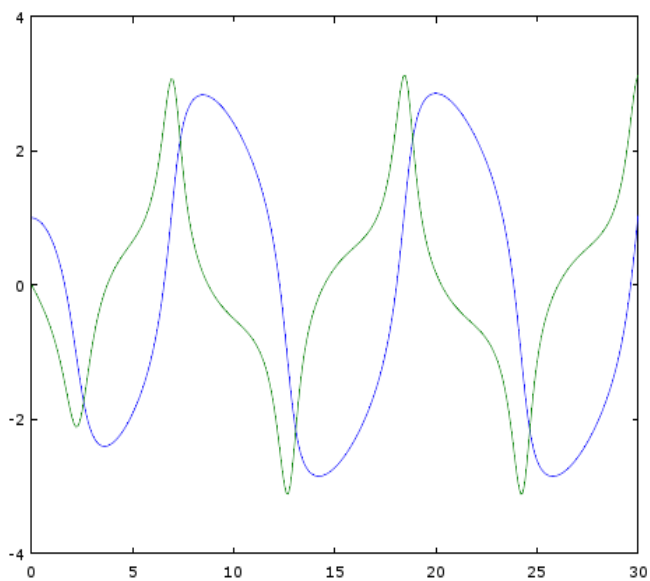
Nystrom



Ode23



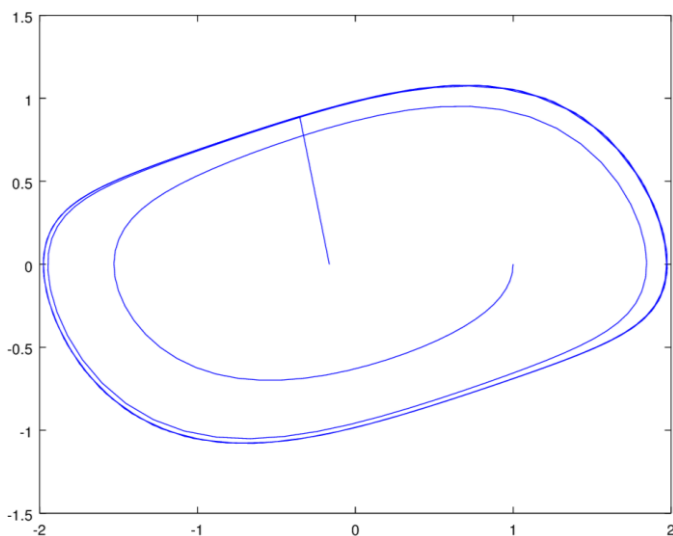
Runge Kutta 2



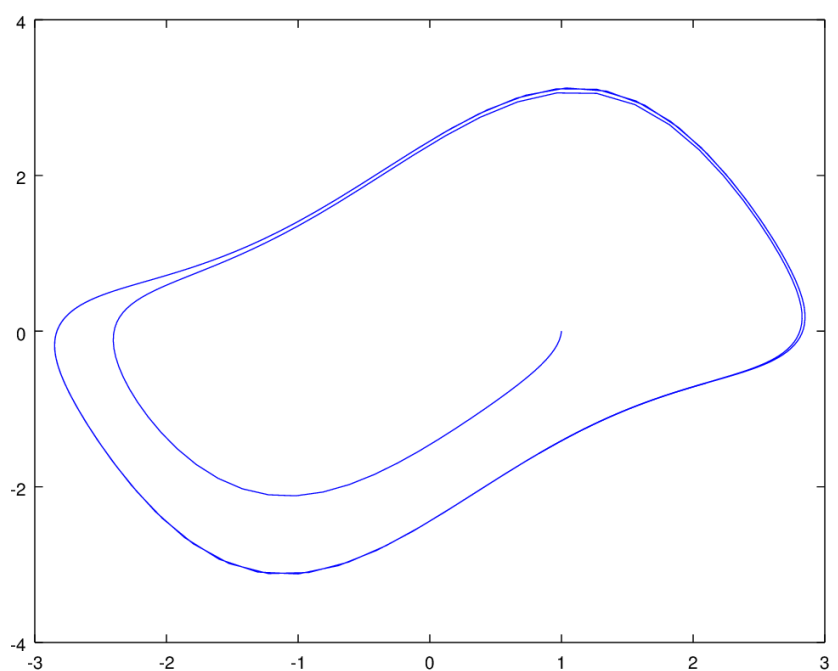
Rápidamente notamos que estos métodos poseen variaciones observables a simple vista. En primer lugar, el método de Nystrom se comprueba más oscilante que los otros. En particular para la gráfica de  $v(t)$  en la cual la amplitud de la función es mucho mayor que en las otras. A su vez, vemos que este método produce mayor período que Runge kutta, abarcando 5 periodos en Nystrom contra a penas 3 de RK. La siguiente mayor diferencia entre estos métodos es en la continuidad de  $v(t)$ . Si bien para ambas funciones las gráficas son continuas, el método de Runge kutta muestra claros puntos de inflexión, mientras que las graficas de Nystrom se asemejan más a las de las funciones trigonométricas.

Al comparar estos resultados con los de la función de ode23 de *Octave* podemos notar que ambos métodos tienen sus similitudes. Por un lado, como se ha marcado, la forma de la continuidad y la amplitud de los valores obtenidos por RK2 son más similares a los gráficos que devuelve ode23. Sin embargo, son los valores de Nystrom los que más cerca se ubican respecto a las funciones graficadas en ode23, notoriamente observable en los períodos de ambas. Esto se debe a que el método de Nystrom, y en particular los métodos esquematizados por predictor-corrector tiene menor error a lo largo de la función. En nuestro caso, el método de Nystrom ‘toma’ los valores de Runge Kutta y los corrige para asemejarse más a los valores reales (tomados como el ode23 para este trabajo). Sin embargo, al aproximarse a los extremos, para ambas funciones, esta corrección no es del todo buena, ya que los errores en estos puntos son muy grandes, a pesar de que matienen la similitud en el periodo y el resto de las funciones.

Nystrom:  $V$  vs  $V'$



RK2:  $V$  vs  $V'$





## **Conclusión:**

Una manera de seleccionar los métodos de la ecuación de diferencias para resolver ecuaciones diferenciales ordinarias, es hacerlo de manera que sus errores locales de truncamiento sean  $O(h^p)$  con el valor de  $p$  más grande posible; sin que el número y la complejidad de los cálculos de los métodos rebasen una cota razonable.

Como ya sabemos un método es consistente cuando la ecuación en diferencias tiende a la ecuación diferencial cuando el tamaño de paso tiende a cero. Es decir el error local de truncamiento se aproxima a cero cuando el tamaño de paso tiende a cero. A medida que aumenta el orden de consistencia mayor será la precisión de la solución al disminuir el paso. Por esta razón el método más preciso será el RK4 y el menos preciso el de Euler.

Si consideramos sólo la consistencia de los métodos el método más preciso será el de RK4 y el menos preciso el de Euler. Para igualar la precisión del método de Euler al de RK4 necesitare que el paso utilizado en el primer método sea  $1/4$  del usado en el segundo. Para RK2, por el otro lado, el paso deberá ser  $1/2$  del usado en RK4.

El otro tipo de cota de error presente ocurre dado que, al resolver una ecuación diferencial numéricamente, no estamos utilizando resultados exactos. Durante la resolución se realizan varias cuentas por ciclo (350 ciclos en nuestro caso) lo que conlleva a un error de redondeo asociado a la aritmética de dígitos finitos. Aquí juega un rol importante la estabilidad del método. Un método será fuertemente estable si sus resultados se basan continuamente en los datos iniciales. Además, para los métodos multipaso (como RK2 o 4), los errores asociados a la consistencia y estabilidad empeoran, dada la gran cantidad de aproximaciones y cuentas que debemos efectuar al resolver un problema. En nuestro caso, dados los tiempos y pasos elegidos los métodos multipaso con epsilon grandes se vieron favorecidos.

A medida que aumenta el valor de epsilon disminuye el valor tiempo adimensionalizado. Por lo tanto, disminuye la cantidad de ciclos lo que conlleva a una menor cantidad de cuentas. Esto favorece los métodos con consistencias altas y estabilidades bajas. A menor cantidad de cuentas menos error aritmético y más peso tiene el error proveniente de la consistencia del método. En estas condiciones, los mejores métodos serán los que tengan consistencias de alto grado, por ejemplo: RK4. Por último cabe mencionar que, en todos los métodos aplicados, la relación entre  $V(t)$  y  $V'(t)$  es la misma. Es decir, a medida que aumenta el valor de epsilon, aumentan la cantidad de puntos de contacto entre ambos gráficos.

**Bibliografía:**

Hernan González, "Análisis Numérico, Primer curso", Nueva Librería,

Richard L. Burden, J Douglas Faires, "Análisis Numérico", Math Learning, Séptima Edición.

"Solución Numérica de ecuaciones diferenciales" de Guillermo Marshall – ed. Reverté