Método

NEWTON-RAPHSON

Intagrantes

Diana Cristina Fernández Ramírez
Luis Manuel Hernández Cruz
Priscila Cortés Ramírez
Adrián Elizalde López
Leonel Montalvo Vigi
Ángel Darío Vargas Bautista
Diego Alonso Coronel Vargas

CONTENIDO

01. Introducción

02. Condiciones de aplicaicón

03. Ejemplo práctico

04. Algoritmo

05. Análisis gráfico

06. Extensiones del método

07. Ventajas y desventajas

08. Tabla comparativa

09. Conclusión

INTRODUCCIÓN AL MÉTODO

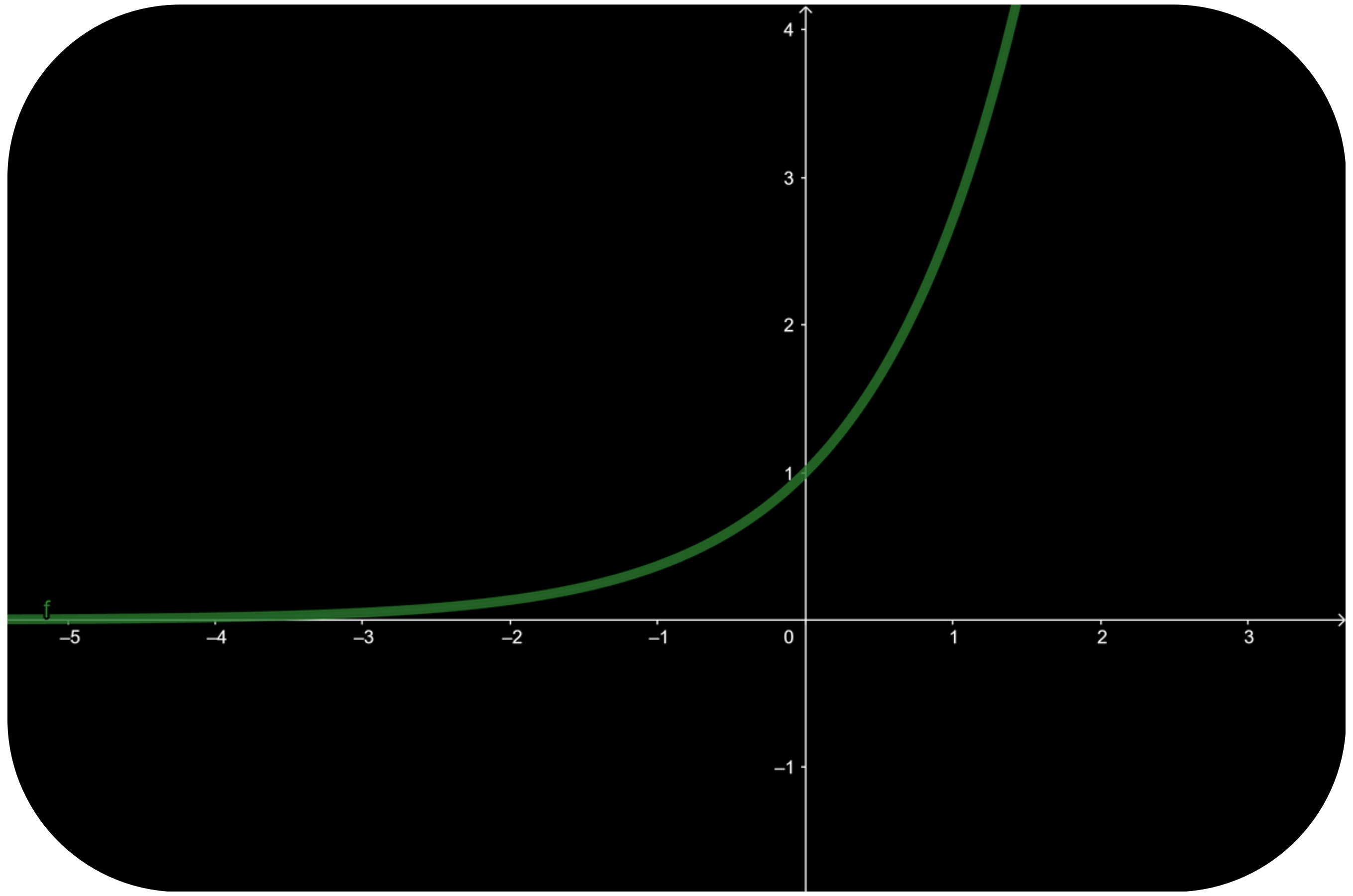
SERIE DE TAYLOR

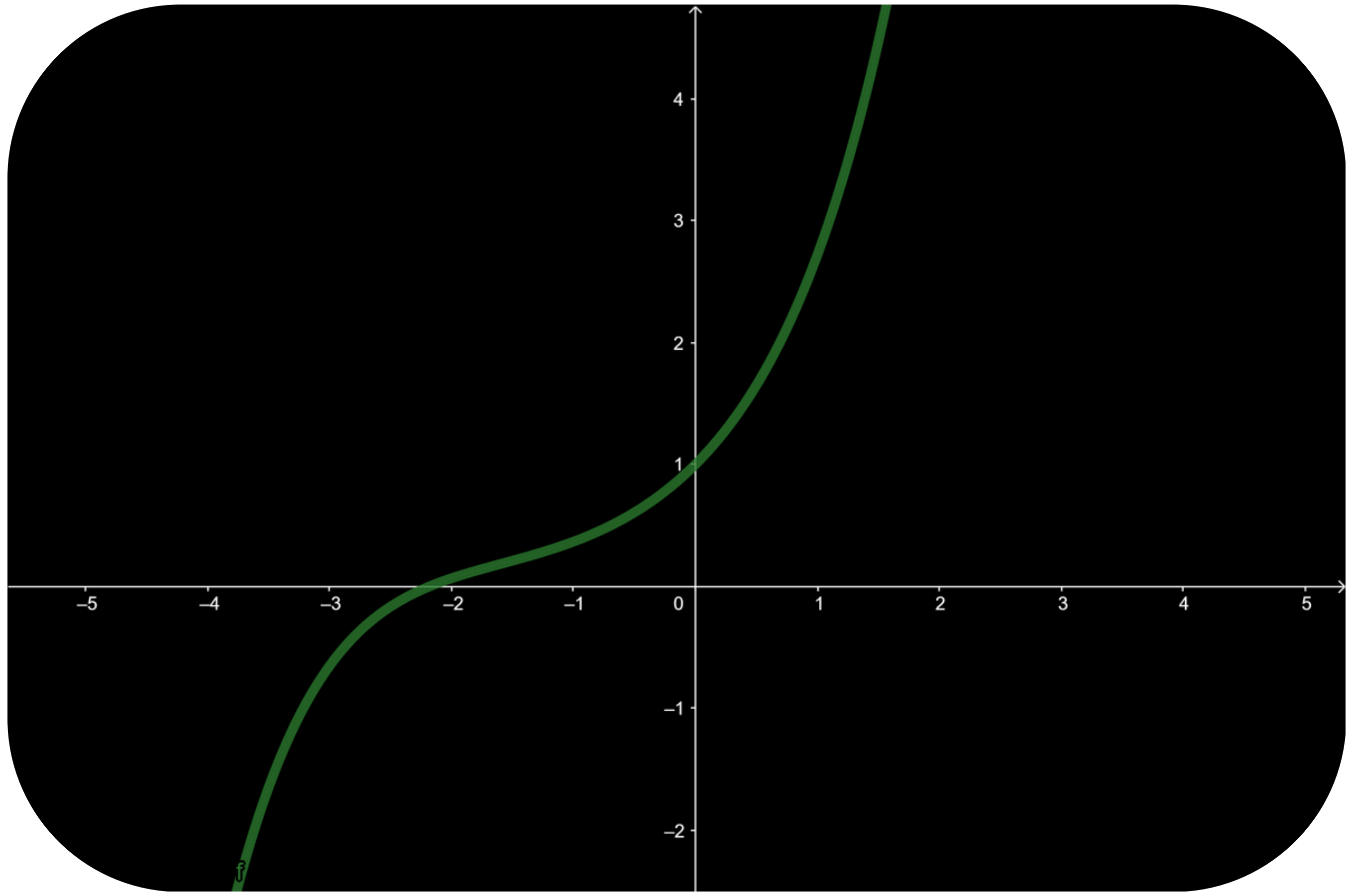
La serie de Taylor descompone una función en una suma de términos más simples basados en sus derivadas.

$$f(x) \approx f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x - x_0)^2 + \frac{f''(x_0)}{3!}(x - x_0)^3 + \cdots$$

$$f(x) = e^x$$

$$e^x \approx 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \frac{x^5}{5!}$$





FÓRMULA DE NEWTON-RAPHSON

Si suponemos que x es la raíz de la función, es decir, f(x)=0, podemos truncar la serie de Taylor después del primer término lineal:

$$0 = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$$

Despejamos x_{i+1}

$$x_{i+1} = x_i - \frac{f(x_i)}{f'(x_i)}$$

CONDICIONES DE APLICACIÓN

CONDICIONES DE APLICACIÓN

$f(x)$ debe ser continua y diferenciable

$f'(x) \neq 0$

Escoger un buen punto inicial x_0

A L G O R I T M O

(BURDEN ET AL., 2017, 50)

ALGORITMO

Entrada:

- Aproximación inicial $\boldsymbol{p_0}$
- Tolerancia ***TOL***
- Número máximo de iteraciones $\boldsymbol{N_0}$

Salida:

- Solución aproximada ***p*** o mensaje de fallo.

1. Inicializar $\boldsymbol{i = 1}$

. . .

ALGORITMO

...

2. Mientras $i < N_0$ hacer:

    1. Si $f'(p_0)=0$ SALIDA ("Método no aplicable.") y PARAR.
    2. Calcular $p = p_0 - [\, f(p_0) / f'(p_0)]$
    3. Si $|p - p_0| < TOL$ entonces:

        SALIDA p (El procedimiento fue exitoso.)

        PARAR.
    4. Incrementar $i = i + 1$
    5. Actualizar $p_0 = p$

3. SALIDA ("El método falló después de N_0 iteraciones.")

PARAR.

ALGORITMO

EJEMPLO

Encontrar la raíz de la función **$f(x)=x^3 - 27$** si:

$p_0 = 3.5$

TOL = 0.001

$N_0 = 10$

Y sabiendo que **$f'(x)=3x^2$**

i	*p_0*	*$p = p_0 - [f(p_0) / f'(p_0)]$*	*$\|p - p_0\|$*	*$\|p - p_0\| < TOL\ (0.001)$*
1	3.5	3.0680272109	0.431	No
2	3.0680272109	3.0014972156	0.066	No
3	3.0014972156	3.00000007467	0.001	No
4	3.00000007467	3	0.000	Si

EJEMPLO PRÁCTICO

EJEMPLO PRÁCTICO

1️⃣ Definir la función y su derivada

- Tomamos la función

$$f(x) = x^2 - 4$$

- Calculamos su derivada

$$f'(x) = 2x$$

2️⃣ Elegir un valor inicial x_0

- Seleccionamos $x_0 = 3$ un valor cercano a la raíz.

3️⃣ Aplicar la fórmula de Newton-Raphson

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$$

EJEMPLO PRÁCTICO

4️⃣ Primera Iteración

$$x_1 = 3 - \frac{3^2 - 4}{2(3)}$$

$$x_1 = 3 - \frac{9 - 4}{6} = 3 - \frac{5}{6} = 2.1667$$

5️⃣ Segunda Iteración

$$x_2 = 2.1667 - \frac{(2.1667)^2 - 4}{2(2.1667)}$$

$$x_2 = 2.1667 - \frac{4.6944 - 4}{4.3333} = 2.1667 - \frac{0.6944}{4.3333} = 2.0064$$

EJEMPLO PRÁCTICO

6 Tercera Iteración

$$x_3 = 2.0064 - \frac{(2.0064)^2 - 4}{2(2.0064)}$$

$$x_3 = 2.0064 - \frac{4.0256 - 4}{4.0128} = 2.0064 - \frac{0.0256}{4.0128} = 2.0000102$$

- Conclusiónes
  - En tres iteraciones, Newton-Raphson encontró la raíz $x \approx 2.0000$ con gran precisión.
  - El método converge rápidamente a la solución.

SOLUCION

$$f(x) = x^3 - 2x - 5$$

$$f'(x) = 3x^2 - 2$$

1

$$f(2) = (2)^3 - 2(2) - 5 = 8 - 4 - 5 = -1$$

$$f'(2) = 3(2)^2 - 2 = 3(4) - 2 = 12 - 2 = 10$$

$$x_1 = 2 - \frac{-1}{10}$$

$$x_1 = 2 + 0.1 = 2.1$$

2

$$f(2.1) = (2.1)^3 - 2(2.1) - 5$$

$$= 9.261 - 4.2 - 5 = 0.061$$

$$f'(2.1) = 3(2.1)^2 - 2$$

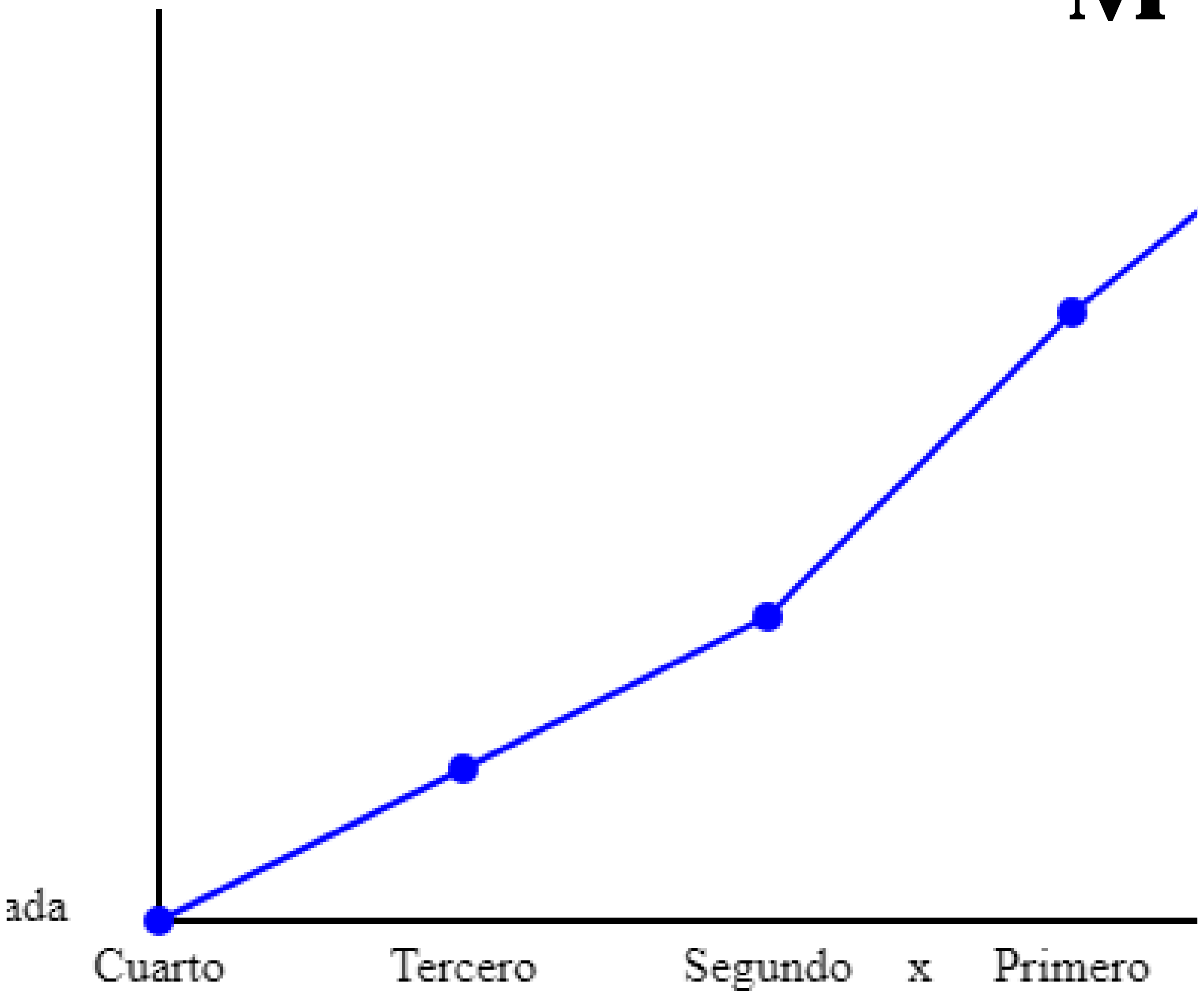
$$= 3(4.41) - 2 = 13.23 - 2 = 11.23$$

$$x_2 = 2.1 - \frac{0.061}{11.23}$$

$$x_2 = 2.1 - 0.0054 = 2.0946$$

ANÁLISIS GRÁFICO

MÉTODO GRAFICO



Procedimiento del método de Newton

1. Adivine una primera aproximación a la solución de la ecuación $f(x) = 0$. Una gráfica de $y = f(x)$ podría ayudarle a hacerlo.
2. Use la primera aproximación para obtener la segunda, la segunda para obte- ner la tercera, y así sucesivamente, usando la fórmula

$x_{+1} = x_{-} f(x) / f'(x)$, si $f'(x) \neq 0$ (1)

EXTENSIONES DEL MÉTODO

EXTENSIONES DEL MÉTODO

Método de Newton de Orden Superior

En lugar de solo usar la primera derivada, este método incorpora la segunda derivada f''(x) para mejorar la precisión:

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)} - \frac{1}{2}\frac{f''(x_n)}{f'(x_n)}$$

EXTENSIONES DEL MÉTODO

Método de Newton Modificado (Newton con Relajación o Damping)

Para evitar oscilaciones o divergencia en ciertas funciones, se introduce un factor de relajación λ:

$$x_{n+1} = x_n - \lambda \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$$

Donde:

$$0 < \lambda \leq 1$$

VENTAJAS Y DESVENTAJAS

V E N T A J A S

- **Convergencia rápida:** Duplica cifras significativas por iteración si la función es adecuada.
- **Eficiente:** Menos iteraciones que bisección o secante.
- **Versátil:** Aplicable a muchos problemas matemáticos e ingenieriles.
- **Detecta raíces múltiples:** Puede ajustarse para manejarlas.

DESVENTAJAS

- **Requiere derivada:** Puede ser difícil o costoso calcularla.
- **Convergencia no siempre asegurada:** Puede fallar en funciones con oscilaciones o raíces múltiples.
- **Problemas en puntos críticos:** Si f'(x)=0f'(x) = 0, puede fallar o generar errores.
- **Depende del valor inicial:** Una mala elección puede causar divergencia o lentitud.

TABLA COMPARATIVA

MÉTODOS DE BÚSQUEDA DE RAÍCES

Método	**Tipo**	**Requisitos**	Ventajas	**Desventajas**	**Convergencia**
Bisección	Cerrado	Intervalo [a, b] con $f(a)*f(b)<$Intervalo [a, b] con $f(a)*f(b)<0$	Siempre converge, fácil de implementar	Lento, requiere intervalo inicial válido	Lineal
Regla falsa	Cerrado	Intervalo [a, b] con $f(a)*f(b)<0$	Más rápido que bisección en algunos casos	Puede oscilar y no converger	Depende del caso
Punto fijo	Abierto	Función g(x) con	Simple y fácil de entender	Requiere que $g'(x)g'(x)g'(x) < 1$ para converger	Lineal
Newton-Raphson	Abierto	$f'(x) \neq 0$ y $f''(x)$ continua	Convergencia rápida (cuadrática)	Requiere derivadas, puede fallar si $f'(x)f'(x)f'(x)$ es 0	Cuadrática
Secante	Abierto	Dos puntos iniciales	No requiere derivadas, más rápido que bisección	Puede fallar si los valores iniciales no son adecuados	Superlineal

COMPARACION CON OTROS METODOS

- Método de Bisección
  - Ventajas: Seguro, siempre converge si hay una raíz.
  - Desventajas: Lento, necesita un intervalo inicial [a, b] donde $f(a) \cdot f(b) < 0$.

- Método de la Secante
  - Ventajas: No necesita derivadas, más rápido que bisección.
  - Desventajas: Puede ser menos estable que Newton-Raphson.

CONCLUSIONES

El método de Newton es una técnica eficiente para hallar raíces de funciones, destacando por su rápida convergencia en condiciones favorables. Sin embargo, su éxito depende de una buena elección del punto inicial y puede fallar si la derivada se anula. En comparación con otros métodos, es más rápido pero menos estable en ciertos casos..

Diana Cristina Fernández Ramírez
Luis Manuel Hernández Cruz
Priscila Cortés Ramírez
Adrián Elizalde López

Método

NEWTON-RAPHSON

Leonel Montalvo Vigi
Ángel Darío Vargas Bautista
Diego Alonso Coronel Vargas