

**1º Exercício Programa de PMR 3401**  
**Data de entrega: 30/03/20(até as 17:00hs)**

**Métodos de Runge-Kutta**

- 1) Os reboques, como o da figura abaixo, são comumente utilizados em veículos, porém representam grande perigo na estrada sempre quando não se atende corretamente as distribuições de peso.

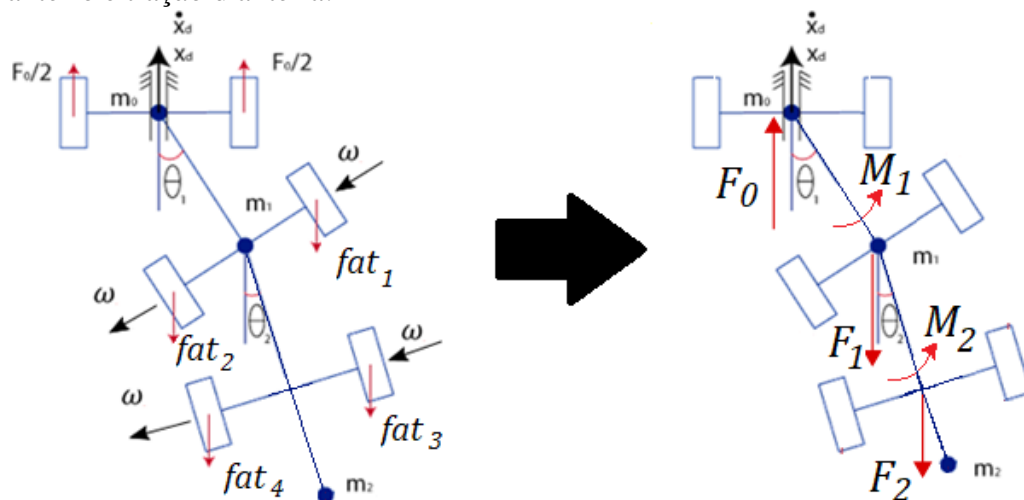


Alguns vídeos que evidenciam o fenômeno podem ser vistos em:

<https://www.youtube.com/watch?v=4jk9H5AB4IM>

<https://www.youtube.com/watch?v=nd-hUX8memY>

Com o intuito de estudar o caso anterior, será utilizada a seguinte modelagem para um veículo de motor dianteiro e tração dianteira:



Foi utilizado mecânica de Lagrange para obter as equações que determinam o comportamento dinâmico do modelo. Considerando um veículo com velocidade constante ( $\dot{x}_d = Vel$ ), temos que as acelerações angulares dos demais graus de liberdade são dadas por:

**Equação 1 ( $\ddot{\theta}_1$ ):**

$$A_0 \ddot{\theta}_1 = A_1 \dot{\theta}_1^2 + A_2 \dot{\theta}_2^2 + A_3 \dot{\theta}_1 + A_4 \dot{\theta}_2 + A_5$$

onde:

$$A_0 = L_1^2 \cdot L_2 \cdot R \cdot [m_2 \cdot \cos(2\theta_1 - 2\theta_2) - 2m_1 - m_2]$$

$$A_1 = L_1^2 \cdot L_2 \cdot R \cdot m_2 \cdot \sin(2\theta_1 - 2\theta_2)$$

$$A_2 = 2L_1 \cdot L_2^2 \cdot R \cdot m_2 \cdot \sin(\theta_1 - \theta_2)$$

$$A_3 = -2L_2 \cdot \mu I_z \cdot Vel$$

$$A_4 = -2L_1 \cdot \mu I_z \cdot Vel \cdot \cos(\theta_1 - \theta_2)$$

$$A_5 = -RL_1 \left[ L_{2\text{eixo}} F_2 \sin(\theta_1 - 2\theta_2) + 2\sin(\theta_1) \left( F_1 L_2 + \frac{L_{2\text{eixo}} F_2}{2} \right) \right]$$

**Equação 2 ( $\ddot{\theta}_2$ ):**

$$B_0 \ddot{\theta}_2 = B_1 \dot{\theta}_1^2 + B_2 \dot{\theta}_1^2 + B_3 \dot{\theta}_2 + B_4$$

onde:

$$B_0 = L_2^2 \cdot R \cdot m_2$$

$$B_1 = -L_1 \cdot L_2 \cdot R \cdot m_2 \cdot \cos(\theta_1 - \theta_2)$$

$$B_2 = L_1 \cdot L_2 \cdot R \cdot m_2 \cdot \sin(\theta_1 - \theta_2)$$

$$B_3 = -\mu I_z \cdot Vel$$

$$B_4 = L_{2\text{eixo}} \sin(\theta_2) \cdot R \cdot F_2$$

Considere:

$$L_1 = 2 \text{ m}; \quad L_2 = 2,5 \text{ m}; \quad L_{2\text{eixo}} = 1,8 \text{ m};$$

$$m_1 = 450 \text{ kg}; \quad m_2 = 650 \text{ kg};$$

$$F_1 = -0,5 \cdot m_1 \cdot g \text{ N}; \quad F_2 = -0,5 \cdot m_2 \cdot g \text{ N}$$

$$\mu I_z = 2,7 \text{ kg} \cdot \text{m}^2; \quad R = 0,3 \text{ m}; \quad g = 9,81 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}; \quad \dot{x}_d = Vel = 80 \text{ km/h},$$

1) Considerando as constantes dadas, resolva as equações para  $0 < t < 60 \text{ s}$ , com as condições iniciais

$$\dot{\theta}_1 = 0,4 \text{ s}^{-1}, \theta_1 = 0^\circ, \dot{\theta}_2 = -0,1 \text{ s}^{-1}, \theta_2 = 0^\circ \text{ usando:}$$

a) Método de Euler .

b) Método de Runge-Kutta de 2ª ordem (Euler modificado)

c) Método de Runge-Kutta de 4ª ordem

Para os três métodos verifique a influência do passo "h" sobre a solução (ou seja, resolva considerando diferentes valores de h). Plote  $\theta_1, \theta_2, \dot{\theta}_1, \dot{\theta}_2, \ddot{\theta}_1, \ddot{\theta}_2$  **num mesmo gráfico**.

Para as condições do item 1:

2.a) Suponha que há um aumento da carga  $m_2$  para 1000 kg e analise o que ocorre com relação a estabilidade do veículo.

2.b) Suponha que há uma redução da carga  $m_2$  para 200 kg e analise o que ocorre com relação a estabilidade do veículo.

2.c) Suponha que o motorista esteja a  $\dot{x}_d = Vel = 120 \text{ km/h}$  e analise o que ocorre com relação a estabilidade do veículo. (Demais condições iguais às do item 1)

2.d) Suponha que o veículo tenha tração traseira impondo  $F_1 = +0,5 \cdot m_1 \cdot g \text{ N}$  e analise o que ocorre com relação a estabilidade do veículo. (Demais condições iguais às do item 1)

## APRESENTAÇÃO DOS RESULTADOS

Os resultados devem ser apresentados da seguinte forma:

- a) Inicialmente, apresente todos os equacionamentos analíticos e numéricos do problema a serem implementados no SCILAB (ou MATLAB);
- b) Deve-se obrigatoriamente implementar o programa de forma a definir um módulo geral com o algoritmo de Runge-Kutta (conforme o caso) que integre qualquer sistema de equações de primeira ordem (sem limitações). A representação de um sistema particular de equações a ser resolvido no programa deve ser feita através da implementação de uma função ("function") no SCILAB (ou MATLAB). O algoritmo de Runge-Kutta deve ser implementado e NÃO será aceita a utilização de comandos prontos do SCILAB (ou MATLAB) para a solução das E.D.Os ou integração numérica;
- c) Use os comandos do SCILAB (ou MATLAB) para as plotagens (coloque título, legendas e unidades nos gráficos); os gráficos devem ser legíveis e de fácil leitura.
- d) NÃO use os comandos de manipulação simbólica do SCILAB (ou MATLAB).
- e) Entregue as listagens dos arquivos \*.sci (ou \*.m), os quais devem estar decentemente comentados;
- f) O relatório deve ser organizado em seções, os resultados devem ser discutidos e no final do relatório deve incluir uma conclusão. O relatório também deve ser entregue na forma impressa. NÃO serão aceitos arquivos em formato digital ou enviados por email;
- g) Qualquer discussão ou comparação deve ser acompanhada de gráficos e/ou outras indicações que o levaram às conclusões.

O trabalho deve ser feito em duplas.