1. Considera el modelo Poisson$(x|\lambda)$.

(a) Encuentra la distribución inicial no informativa de Jeffreys para λ, así como la distribución final correspondiente dada una muestra aleatoria de tamaño n.

(b) ¿Qué relación guardan las distribuciones obtenidas en el inciso (a) con la familia conjugada mencionada en el inciso (c) del Problema 2 de la Tarea 3?

a) $$\text{Poisson}(\hat{x}|\lambda) = \prod_{i=1}^{n} \frac{\lambda^{x_i} e^{-\lambda}}{x_i!} = \frac{\lambda^{\sum_{i=1}^{n} x_i} e^{-n\lambda}}{x_1! \cdots x_n!}.$$

Entonces

$$\log p(\hat{x}|\lambda) = \left(\sum_{i=1}^{n} x_i\right)\log\lambda + (-n\lambda) - \sum_{i=1}^{n} \log(x_i!).$$

Entonces $$\frac{d}{d\lambda}\log p(\hat{x}|\lambda) = \left(\sum_{i=1}^{n} x_i\right)\frac{1}{\lambda} - n.$$

Entonces $$\frac{d^2}{d\lambda^2}\log p(\hat{x}|\lambda) = -\frac{\sum_{i=1}^{n} x_i}{\lambda^2}.$$

Entonces

$$I(\lambda) = \mathbb{E}\left[\frac{t}{\lambda^2}\,\Big|\,\lambda\right] = \frac{1}{\lambda^2}\mathbb{E}\left[\sum_{i=1}^{n} x_i \,\Big|\, \lambda\right]$$

$$= \frac{1}{\lambda^2}\sum_{i=1}^{n}\mathbb{E}[x_i|\lambda] = \frac{1}{\lambda^2}n\lambda = \frac{n}{\lambda}.$$

Por lo tanto, $$\pi(\lambda) \propto \frac{1}{\lambda^{1/2}}.$$

$$p(\lambda|\hat{x}) \propto \pi(\lambda)\, p(\hat{x}|\lambda)$$

$$\propto \frac{1}{\lambda^{1/2}} \lambda^{\sum_{i=1}^{n} x_i} e^{-n\lambda}$$

$$= \lambda^{-\frac{1}{2} + \sum_{i=1}^{n} x_i} e^{-n\lambda}$$

$$\propto \text{Gamma}\left(\lambda \,\middle|\, -\frac{1}{2} + \sum_{i=1}^{n} x_i \,,\, n\right)$$

b) Podríamos considerar $\pi(\lambda)$ como una Gamma $(\lambda \mid \alpha = 1/2 \,,\, \beta = 0)$ pero recordando que se necesita $\alpha > 0$, $\beta > 0$ para que esta distribución sea propia.

2. Considera la distribución Exponencial, con función de densidad

$$p(x|\theta) = \theta\, e^{-\theta x} \quad (0 < x; 0 < \theta).$$

(a) Encuentra la distribución inicial de Jeffreys para θ. ¿Es una distribución propia?

(b) ¿Pertenece esta distribución a la familia conjugada mencionada en el inciso (a) del Problema 1 de la Tarea 3?

a) $p(\hat{x}|\theta) = \prod_{i=1}^{n} \theta e^{-\theta x_i} = \theta^n \exp\left(-\theta \sum_{i=1}^{n} x_i\right).$

Entonces $\log p(\hat{x}|\theta) = n \log \theta - \theta \sum_{i=1}^{n} x_i .$

Entonces $\frac{d}{d\theta} \log p(\hat{x}|\theta) = \frac{n}{\theta} - \theta$

Entonces $\frac{d}{d\theta^2} \log p(\hat{x}|\theta) = -\frac{n}{\theta^2} .$

Entonces $I(\theta) = \frac{n}{\theta^2} .$

Por lo tanto, $\pi(\theta) \propto \frac{1}{\theta} .$

Claramente esta distribucion no es propia.

b) Podriamos considerar $\pi(\theta)$ como una Gamma$(\theta \mid \alpha = 0, \beta = 0)$ pero recordando que no es propia.

3. Continuando con el ejercicio anterior:

(a) Encuentra una aproximación normal asintótica para $p(\theta|\mathbf{x})$, la densidad de la distribución final conjugada obtenida en el inciso 1(a) de la Tarea 3.

(b) Sea $\phi = \log(\theta)$. Encuentra $p_\phi(\phi|\mathbf{x})$, la correspondiente función de densidad para ϕ.

(c) Encuentra una aproximación normal asintótica para $p_\phi(\phi|\mathbf{x})$.

(d) ¿Cuál aproximación es mejor, la del inciso (a) o la del inciso (c)? ¿Por qué?

a) Recordemos que

$$p(\theta|\hat{x}) \propto \theta^{\alpha'} \exp\{-\theta\beta'\}.$$

donde $\alpha' = \alpha + n - 1$ y $\beta' := \beta + \sum_{i=1}^{n} x_i \implies$

Entonces,

$$\frac{d}{d\theta} p(\theta|\hat{x})$$

$$\propto \alpha' \theta^{\alpha'-1} \exp\{-\theta\beta'\} - \theta^{\alpha'} \exp\{-\theta\beta'\}\beta'$$

$$= \exp\{-\theta\beta'\}\left[\alpha'\theta^{\alpha'-1} - \beta'\theta^{\alpha'}\right]$$

En particular, $\hat{\theta} = \dfrac{\alpha'}{\beta'}$.

Por otro lado,

$$\log p(\theta \mid \hat{x}) = \log \left(\theta^{\alpha'} e^{-\theta \beta'} \right) = \alpha' \log \theta - \theta \beta'.$$

Entonces $$\frac{d^2}{d\theta^2} \log p(\theta \mid \hat{x}) = -\frac{\alpha'}{\theta^2}.$$

Por lo tanto, $$V(\theta) = \frac{\theta^2}{\alpha'}.$$

En particular, $$V(\hat{\theta}) = \frac{\alpha'}{(\beta')^2}.$$

Finalmente,

$$p(\theta \mid \hat{x}) = N\left(\theta \,\middle|\, \frac{\alpha'}{\beta'}, \frac{\alpha'}{(\beta')^2} \right) \{ 1 + O(n^{-1}) \}.$$

donde $\alpha' = \alpha + n - 1$ y $\beta' = \beta + \sum_{i=1}^{n} x_i$.

b) Claramente, $\theta(\phi) = e^{\phi}$. Entonces

$$p_\phi(\phi \mid \hat{x}) = p(\theta(\phi) \mid \hat{x}) \frac{d}{d\phi} \theta(\phi)$$

$$\propto (e^{\phi})^{\alpha'} e^{-e^{\phi}\beta'} e^{\phi}$$

$$= e^{\phi(\alpha'+1) - e^{\phi}\beta'}$$

c) Calculando directamente.

$$\frac{d}{d\phi} p_\phi(\phi \mid \hat{x}) = e^{\phi(\alpha'+1) - e^{\phi}\beta'} \left((\alpha'+1) - e^{\phi}\beta' \right)$$

De donde, $\hat{\phi} = \log\left(\frac{\alpha'+1}{\beta'}\right)$

Por otro lado,

$$\log p_\phi(\phi \mid \hat{x}) = \phi(\alpha'+1) - e^{\phi}\beta.$$

De donde, $\frac{d^2}{d\phi^2} \log p_\phi(\phi \mid \hat{x}) = -e^{\phi}\beta'.$

Por lo tanto, $V(\phi) = (e^{\phi}\beta')^{-1}$.

En particular, $V(\hat{\phi}) = \left(\frac{\alpha'+1}{\beta'}\beta'\right)^{-1} = \frac{1}{\alpha'+1}$.

Finalmente,

$$p_\phi(\phi \mid \hat{x}) = N\left(\phi \,\middle|\, \log\left(\frac{\alpha'+1}{\beta'}\right), \frac{1}{\alpha'+1}\right).$$

4. Sea $\boldsymbol{X} = \{X_1, \ldots, X_n\}$ una muestra de observaciones i.i.d. de la distribución Poisson$(x|\lambda_1)$ y sea $\boldsymbol{Y} = \{Y_1, \ldots, Y_n\}$ una muestra de observaciones i.i.d. de la distribución Poisson$(y|\lambda_2)$, donde tanto λ_1 como λ_2 son desconocidos. Supón que la distribución inicial de (λ_1, λ_2) está dada por

$$p(\lambda_1, \lambda_2) = p(\lambda_1)\, p(\lambda_2) = \text{Gamma}(\lambda_1|a_1, b_1)\, \text{Gamma}(\lambda_2|a_2, b_2)$$

(a) Encuentra $p(\lambda_1, \lambda_2|\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y})$, la distribución final correspondiente, suponiendo que las muestras $\boldsymbol{X}$ y $\boldsymbol{Y}$ son independientes.

(b) Supón ahora que el parámetro de interés es $\theta = \lambda_1/\lambda_2$. Encuentra su distribución final marginal, $p(\theta|\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y})$.

(c) Finalmente, encuentra la aproximación de Laplace (forma exponencial) para la densidad final marginal de θ.

(d) ¿Cómo se comparan la densidad del inciso (b) y la aproximación del inciso (c)? Argumenta tu respuesta.

a) Por Bayes,

$$p(\lambda_1, \lambda_2 \mid \hat{x}, \hat{y}) \propto p(\hat{x}, \hat{y} \mid \lambda_1, \lambda_2)\, p(\lambda_1, \lambda_2)$$

$$= p(\hat{x} \mid \lambda_1)\, p(\hat{y} \mid \lambda_2)\, p(\lambda_1)\, p(\lambda_2)$$

$$\propto \left\{ \prod_{i=1}^{n} \lambda_1^{x_i} e^{-\lambda_1} \right\} \left\{ \prod_{i=1}^{n} \lambda_2^{y_i} e^{-\lambda_2} \right\}$$

$$\left\{ \lambda_1^{a_1-1} e^{-b_1\lambda_1} \right\} \left\{ \lambda_2^{a_2-1} e^{-b_2\lambda_2} \right\}$$

$$= \left\{ \lambda_1^{a_1-1+\sum_{i=1}^{n} x_i} e^{-(n+b_1)\lambda_1} \right\} \left\{ \lambda_2^{a_2-1+\sum_{i=1}^{n} y_i} e^{-(n+b_2)\lambda_2} \right\}$$

$$\propto \text{Ga}\left(\lambda_1 \,\middle|\, a_1 + \textstyle\sum_{i=1}^{n} x_i,\ n+b_1\right) \text{Ga}\left(\lambda_2 \,\middle|\, a_2 + \textstyle\sum_{i=1}^{n} y_i,\ n+b_2\right).$$

b) Consideremos la transformación

$$(\lambda_1, \lambda_2) \xrightarrow{g} \left(\frac{\lambda_1}{\lambda_2}, \lambda_2\right) = (\eta_1, \eta_2)$$

Entonces, $g^{-1}(\eta_1, \eta_2) = (\eta_1\eta_2, \eta_2)$ y

$$\text{Jac}(g^{-1}) = \det \begin{pmatrix} \eta_2 & \eta_1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \eta_2 .$$

Entonces,

$$p_{g(\lambda_1,\lambda_2)|\hat{x},\hat{y}}(\eta_1, \eta_2 \mid \hat{x}, \hat{y})$$

$$= p_{\lambda_1,\lambda_2|\hat{x},\hat{y}}\Big(\underbrace{g^{-1}(\eta_1, \eta_2)}_{(\eta_1\eta_2,\, \eta_2)} \mid \hat{x}, \hat{y}\Big) \, |\text{Jac}(g^{-1})|$$

$$\propto \text{Ga}\left(\eta_1\eta_2 \mid a_1 + \textstyle\sum_{i=1}^n x_i,\ n+b_1\right) \text{Ga}\left(\eta_2 \mid a_2 + \textstyle\sum_{i=1}^n y_i,\ n+b_2\right) \eta_2$$

Denotemos $a_1' = a_1 + \sum_{i=1}^n x_i$, $b_1' = n+b_1$ y

análogamente para a_2' y b_2'.

Entonces,

$$\mathrm{Gamma}(\eta_1\eta_2 \mid a_1', b_1') \, \mathrm{Gamma}(\eta_2 \mid a_2', b_2') \, \eta_2$$

$$\propto (\eta_1\eta_2)^{a_1'-1} e^{-b_1'(\eta_1\eta_2)} \eta_2^{a_2'-1} e^{-b_2'\eta_2} \eta_2$$

$$= \eta_1^{a_1'-1} \eta_2^{a_1'+a_2'-1} e^{-(b_1'\eta_1+b_2')\eta_2}$$

$$= \eta_1^{a_1'-1} \mathrm{Gamma}(\eta_2 \mid a_1'+a_2', b_1'\eta_1+b_2')$$

Integrando respecto de η_2 obtenemos

$$\eta_1^{a_1'-1} \frac{\Gamma(a_1'+a_2')}{(b_1'\eta_1+b_2')^{a_1'+a_2'}}$$

Pero $\eta_1 = \theta$ y por lo tanto

$$p(\theta \mid \hat{x}, \hat{y}) \propto \frac{\theta^{a_1'-1}}{(b_1'\theta+b_2')^{a_1'+a_2'}} .$$

c) En el inciso anterior vimos que

$$p_{\eta_1,\eta_2|\hat{x},\hat{y}}(\eta_1,\eta_2 \mid \hat{x},\hat{y}) \propto \eta_1^{a_1'-1}\,\eta_2^{a_1'+a_2'-1}\,e^{-(b_1'\eta_1+b_2')\eta_2}$$

Queremos aproximar

$$p(\eta_1 \mid \hat{x},\hat{y}) = \int p_{\eta_1,\eta_2|\hat{x},\hat{y}}(\eta_1,\eta_2 \mid \hat{x},\hat{y})\, d\eta_2$$

$$\propto \eta_1^{a_1'-1} \underbrace{\int \eta_2^{a_1'+a_2'-1}\, e^{-(b_1'\eta_1+b_2')\eta_2}\, d\eta_2}_{\text{Vamos a aproximar esta integral.}}$$

Definimos

$$h(\eta_1,\eta_2) := -(a_1'+a_2'-1)\log\eta_2 + (b_1'\eta_1+b_2')\eta_2$$

Entonces,

$$\frac{\partial}{\partial\eta_2} h(\eta_1,\eta_2) = -\frac{a_1'+a_2'-1}{\eta_2} + (b_1'\eta_1+b_2')$$

Entonces $\hat{\eta}_2 = \dfrac{a_1'+a_2'-1}{b_1'\eta_1+b_2'}$ y

$$h(\eta_1, \hat{\eta}_2) = -(a_1' + a_2' - 1)\log\left(\frac{a_1' + a_2' - 1}{b_1'\eta_1 + b_2'}\right) + (a_1' + a_2' - 1),$$

$$\exp\{-h(\eta_1, \hat{\eta}_2)\} = \left(\frac{a_1' + a_2' - 1}{b_1'\eta_1 + b_2'}\right)^{(a_1'+a_2'-1)} \exp\{-(a_1' + a_2' - 1)\}.$$

Mas aun, $\dfrac{\partial^2}{\partial \eta_2^2} h(\eta_1, \eta_2) = \dfrac{a_1' + a_2' - 1}{\eta_2^2}.$

Por lo tanto,

$$\Sigma(\hat{\eta}_2) = \frac{\hat{\eta}_2^2}{a_1' + a_2' - 1} = \frac{a_1' + a_2' - 1}{(b_1'\eta_1 + b_2')^2}.$$

Entonces

$$\hat{I} = (2\pi)^{1/2} \, |\Sigma(\hat{\eta}_2)|^{1/2} \exp\{-h(\hat{\eta}_2)\}.$$

$$= (2\pi)^{1/2} \frac{(a_1' + a_2' - 1)^{1/2}}{b_1'\eta_1 + b_2'} \left(\frac{a_1' + a_2' - 1}{b_1'\eta_1 + b_2'}\right)^{(a_1'+a_2'-1)} \exp\{-(a_1' + a_2' - 1)\}$$

$$\propto \frac{1}{(b_1'\eta_1 + b_2')^{a_1' + a_2'}}.$$

d) La aproximacion es exacta (basta comparar).