1. Sea $\{(C^\alpha_\bullet, \partial^\alpha)\}_{\alpha\in I}$ una coleccion de complejos.
PD. $(D_\bullet, \partial)$ es complejo (usando la notacion del ejercicio).
Solo resta probar que la composicion de dos derivaciones consecutivas es trivial; es decir, $\forall n \in \mathbb{N}$ $\partial_n\partial_{n+1} = 0$. Por definición tenemos,

$$\partial_n\partial_{n+1} = (\bigoplus_{\alpha\in I}\partial^\alpha_n)(\bigoplus_{\alpha\in I}\partial^\alpha_{n+1}) = \bigoplus_{\alpha\in I}\partial^\alpha_n\partial^\alpha_{n+1} = 0$$

donde la segunda igualdad se cumple porque si $\sum_{\alpha\in I} c^n_\alpha \in D_n$ entonces,

$$\begin{aligned}(\bigoplus_{\alpha\in I}\partial^\alpha_n)(\bigoplus_{\alpha\in I}\partial^\alpha_{n+1})(\sum_{\alpha\in I} c^n_\alpha) = (\bigoplus_{\alpha\in I}\partial^\alpha_n)(\sum_{\alpha\in I}\partial^\alpha_{n+1}(c^\alpha_n)) &= \sum_{\alpha\in I}\partial^\alpha_n\partial^\alpha_{n+1}(c^\alpha_n) \\ &= (\bigoplus_{\alpha\in I}\partial^\alpha_n\partial^\alpha_{n+1})(c^\alpha_n)\end{aligned}$$

Por otro lado, veamos que

$$\bigoplus_{\alpha\in I}(\ker(\partial^\alpha_n))/\bigoplus_{\alpha\in I}(\mathrm{im}(\partial^\alpha_{n+1})) \cong \bigoplus_{\alpha\in I}\ker(\partial^\alpha_n)/\mathrm{im}(\partial^\alpha_{n+1})$$

Sea $f : \bigoplus_{\alpha\in I}(\ker(\partial^\alpha_n)) \to \bigoplus_{\alpha\in I}\ker(\partial^\alpha_n)/\mathrm{im}(\partial^\alpha_{n+1})$ tal que

$$\sum_{\alpha\in I} z^\alpha_n \mapsto \sum_{\alpha\in I}(z^\alpha_n + \mathrm{im}(\partial^\alpha_{n+1})).$$

De la pura definición es claro que $\ker(f) = \bigoplus_{\alpha\in I}(\mathrm{im}(\partial^\alpha_{n+1}))$. Entonces, el resultado se sigue del primer teorema de isomorfismos para módulos. Usando lo anterior obtenemos,

$$\begin{aligned}H_n(D_\bullet) = \ker(\partial_n)/\mathrm{im}(\partial_{n+1}) &= \ker(\bigoplus_{\alpha\in I}\partial^\alpha_n)/\mathrm{im}(\bigoplus_{\alpha\in I}\partial^\alpha_{n+1}) \\ &= \bigoplus_{\alpha\in I}(\ker(\partial^\alpha_n))/\bigoplus_{\alpha\in I}(\mathrm{im}(\partial^\alpha_{n+1})) \\ &\cong \bigoplus_{\alpha\in I}\ker(\partial^\alpha_n)/\mathrm{im}(\partial^\alpha_{n+1}) \\ &= \bigoplus_{\alpha\in I} H_n(C^\alpha_\bullet)\end{aligned}$$

$\therefore H_n(D_\bullet) \cong \bigoplus_{\alpha\in I} H_n(C^\alpha_\bullet)$.
Obs. La tercera igualdad se cumple porque

$$\begin{aligned}\sum_{\alpha\in I} z^\alpha_n \in \ker(\bigoplus_{\alpha\in I}\partial^\alpha_n) \iff (\bigoplus_{\alpha\in I}\partial^\alpha_n)(\sum_{\alpha\in I} z^\alpha_n) = 0 &\iff \sum_{\alpha\in I}\partial^\alpha_n(z^\alpha_n) = 0 \\ &\iff \sum_{\alpha\in I} z^\alpha_n \in \bigoplus_{\alpha\in I}\ker(\partial^\alpha_n)\end{aligned}$$

Análogamente, $\mathrm{im}(\bigoplus_{\alpha\in I}\partial^\alpha_{n+1}) = \bigoplus_{\alpha\in I}(\mathrm{im}(\partial^\alpha_{n+1}))$. $\square$

2. Primero notemos que siempre podemos pensar a un anillo $(R, +, \cdot)$ como un R-modulo con la operación escalar dada por el producto usual, "$\cdot$". Ahora bien, supongamos que tenemos la siguiente sucesión exacta corta de R-módulos

$$1 \to N \xrightarrow{i} M \xrightarrow{\pi} R \to 1$$

Vamos a encontrarle un inverso derecho a π que también es morfismo: Sea $m_1 \in \pi^{-1}(\{1_R\})$ fijo (existe porque π es supra). Definimos $s : R \to M$ tal que $r \in R \mapsto r \cdot m_1 \in M$. De esta manera, s es morfismo inyectivo (tiene inverso izquierdo) y además,

$$\pi(s(r)) = \pi(r \cdot m_1) = r \cdot \pi(m_1) = r$$

Ahora bien, veamos que $f : N \oplus R \to M$ dada por

$$n + r \mapsto i(n) + s(r)$$

es isomorfismo. Claramente f es morfismo y esta bien definida. Veamos,
Inyectividad.

$$\begin{aligned} f(n+r) = f(n'+r') &\implies i(n) + s(r) = i(n') + s(r') \\ &\implies i(n-n') + s(r-r') = 0 \\ &\implies n - n' = 0 \ \&\ r - r' = 0. \end{aligned}$$

Donde la ultima implicación se cumple porque i & s son inyectivas.
Suprayectividad. Sea $m \in M$. Como

$$\pi(m - \pi(m) \cdot m_1) = \pi(m) - \pi(m) \cdot \pi(m_1) = \pi(m) - \pi(m) = 0$$

entonces, $m - \pi(m) \cdot m_1 \in \ker(\pi)$. Como la sucesion es exacta, $\ker(\pi) = \mathrm{im}(i)$. Por lo tanto, existe $n_0 \in N$ tal que $i(n_0) = m - \pi(m) \cdot m_1$. Finalmente, notemos que

$$f(n_0 + \pi(m)) = i(n_0) + s(\pi(m)) = (m - \pi(m) \cdot m_1) + \pi(m) \cdot m_1 = m$$

$\therefore N \oplus R \cong M$ $\square$

Diego Leipen Lara
Estoy inscrito