1. Mostrar que para cualquier ordinal γ se cumple

$$\mathrm{cf}(\gamma) = \min\{\mathrm{type}(X) \mid X \subset \gamma \ \text{y} \ \sup X = \gamma\}$$

Demostracion.
$\leq$) Como $\{\mathrm{type}(X) \mid X \subset \gamma \ \text{y} \ \sup X = \gamma\} \subset \mathrm{OR}$, tiene minimo i.e., existe x tal que $x \subset \gamma$, $\sup x = \gamma$, y $\mathrm{type}(x) = \min\{\mathrm{type}(X) \mid X \subset \gamma \ \text{y} \ \sup X = \gamma\} =: \alpha$. Por definicion, existe un isomorfismo f de α a x. Veamos que $f' : \alpha \to x$ dada por la misma regla de correspondencia de f, es cofinal. Primero notemos que f' esta bien definida pues $x \subset \gamma$. Ahora, sea $y < \gamma$. Entonces, $\exists z \in x \ (z \geq y)$ (de lo contrario, $\sup x \leq y < \gamma$). Luego, como f es isomorfismo, es supra, de donde, $\exists w \in \alpha \ (f(w) = z)$. Por lo tanto, $\forall y < \gamma$ $\exists w < \alpha \ (f'(w) = f(w) \geq y)$ i.e., f' es cofinal. En particular, $cf(\gamma) \leq \alpha$.
$\geq$) Por Amor.Prop.4.6, existe $f : \mathrm{cf}(\gamma) \to \gamma$ cofinal y estrictamente creciente. Ademas, or Amor.Prop.4.2 y Amor.Prop.4.3, $\bigcup f[\mathrm{cf}(\gamma)] = \gamma$ i.e., $\sup f[\mathrm{cf}(\gamma)] = \gamma$. Mas aun, como f es creciente, la funcion $f' : \mathrm{cf}(\gamma) \to f[\mathrm{cf}(\gamma)]$ dada por la misma regla de correspondencia que f, es un isomorfismo. Luego, $\mathrm{type}(f[\mathrm{cf}(\gamma)]) = \mathrm{cf}(\gamma)$. Por lo tanto, $\mathrm{cf}(\gamma) \geq \alpha$. $\square$

2. Probar que si $\alpha, \beta \in \mathrm{OR}$, $b \neq 0$, entonces, $\mathrm{cf}(\alpha + \beta) = \mathrm{cf}(\beta)$.
Lema. Si $\alpha < \beta$, existe γ_β tal que $\beta = \alpha + \gamma_\beta$.
Por induccion sobre β.
Demostracion.
Veamos que $f : \beta \to \alpha + \beta$ dada por $f(\eta) = \alpha + \eta$ es cofinal. Sea $\delta < \alpha + \beta$. Si $\delta \leq \alpha$, ponemos $\eta = 0$. Si $\delta > \alpha$, por el lema, $\exists \gamma_\delta \in \mathrm{OR} \ (\delta = \alpha + \gamma_\delta)$. Ademas, como $\delta < \alpha + \beta$, debe ser $\gamma_\delta < \beta$. Por lo tanto, $\eta = \gamma_\delta$ funciona. Luego, por Amor.Prop.4.7, $\mathrm{cf}(\beta) = \mathrm{cf}(\gamma)$. $\square$

3. Sean κ y λ cardinales con $\lambda < \mathrm{cf}(\kappa)$. Mostrar que $\kappa^\lambda = \bigcup_{\alpha<\kappa} \alpha^\lambda$.
Demostracion.
Como $\forall \alpha < \kappa \ \alpha^\lambda \leq \kappa^\lambda$, $\bigcup_{\alpha<\kappa} \alpha^\lambda = \sup_{\alpha<\kappa} \alpha^\lambda \leq \kappa^\lambda$. Por otro lado, como $\lambda < \mathrm{cf}(\kappa)$, si $f : \lambda \to \kappa$, f no es cofinal de λ en κ i.e., $\exists \mu_f < \kappa \ \forall \eta < \lambda$ $(\mu_f \geq f(\eta))$. Denotemos por f' a la funcion con la misma regla de correspondencia que f pero con contradominio μ_f. Por lo anterior, la funcion $F : \kappa^\lambda \to \bigcup_{\alpha<\kappa} \alpha^\lambda$ dada por $F(f) = f'$ esta bien definida. Ademas, es inyectiva, pues si $f, g \in \kappa^\lambda$ y $f \neq g$, inclusive cuando $\mu_f = \mu_g$, $f' \neq g'$. Por lo tanto, $\kappa^\lambda \leq \bigcup_{\alpha<\kappa} \alpha^\lambda$. $\square$

4. Demostrar que para cualquier ordinal γ, $\mathrm{cf}(\gamma)$ es un ordinal regular.
Demostracion.

Por Amor.Prop.4.7, si α y β son ordinales, y $f : \alpha \to \beta$ es estrictamente creciente, $\mathrm{cf}(\alpha) = \mathrm{cf}(\beta)$. Ademas, por Amor.Prop.4.6, si γ es un ordinal, existe una fucion $f : \mathrm{cf}(\gamma) \to \gamma$ cofinal y estrictamente creciente. Por lo tanto, $\mathrm{cf}(\mathrm{cf}(\gamma)) = \mathrm{cf}(\gamma)$ i.e., $\mathrm{cf}(\gamma)$ es un ordinal regular. $\square$

5. Mostrar que existen cardinales singulares arbitrariamente grandes es decir, para cualquier cardinal κ existe un cardinal singular $\lambda > \kappa$.
Demostracion.
Caso 1. κ es finito. Por Amor.Prop.4.5.v, $\aleph_\omega$ funciona.
Caso 2. κ es regular infinito. Por Amor.Prop.4.10.i, $\mathrm{cf}(\aleph_\kappa) = \kappa$ en particular, $\aleph_\kappa$ es singular. Luego, como $\aleph_{\aleph_\kappa}$ es un ordinal limite, por Amor.Prop.4.9, $\mathrm{cf}(\aleph_{\aleph_\kappa}) = \mathrm{cf}(\aleph_\kappa) = \kappa$ entonces, $\aleph_{\aleph_\kappa}$ es singular y $\kappa \leq \aleph_\kappa < \aleph_{\aleph_\kappa}$.
Caso 3. κ es singular infinito. Entonces, por Amor.Cor.4.4, κ es limite. Luego, por la Amor.Prop.4.9, $\mathrm{cf}(\aleph_\kappa) = \mathrm{cf}(\kappa)$. Pero como κ es singular, $\mathrm{cf}(\kappa) < \kappa \leq \aleph_\kappa$. De donde, $\aleph_\kappa$ es singular. Luego, por el mismo argumento que el caso anterior, $\aleph_{\aleph_\kappa}$ es singular. $\square$

6. Sea κ debilmente inaccesible. Probar $\forall \alpha < \kappa \, (\aleph_\alpha < \kappa)$.
Demostracion.
Por el Ivorra.Teo.5.60, $\kappa = \aleph_\kappa$. Luego, si $\alpha < \kappa$, $\aleph_\alpha < \aleph_\kappa = \kappa$. $\square$

7. Sea $\mathcal{S}_\kappa$ el conjunto de permutaciones de κ. Muestra que $|\mathcal{S}_\kappa| = 2^\kappa$.
Lema 1. Para todo conjunto A con mas de un elemento existe una permutacion $f : A \to A$ sin puntos fijos.
Lema 2. Si $D = \{\varphi \in 2^\kappa \mid |\varphi^{-1}[\{0\}]| = 1\}$ entonces, $|D| = \kappa$.
La funcion $F : \kappa \to D$ dada por $F(\alpha) = f_\alpha$ donde, $f_\alpha(x) = 0$ si y solo si $x = \alpha$ cumple lo deseado.
Demostracion.
Recordemos que si $2 \leq \kappa \leq \lambda$, $2^\lambda = \kappa^\lambda$ (esto pues, $\kappa^\lambda \leq (2^\kappa)^\lambda \leq (2^\lambda)^\lambda = 2^{\lambda\cdot\lambda} = 2^\lambda$). Luego, como $\mathcal{S}_\kappa \subset \kappa^\kappa$, $|\mathcal{S}_\kappa| \leq \kappa^\kappa = 2^\kappa$. Ahora bien, para todo $\alpha < \kappa$ sea $A_\alpha = \{f \in \mathcal{S}_\kappa \mid f(\alpha) = \alpha\}$, $B_\alpha = \mathcal{S}_\kappa - A_\alpha$. Mas aun, si $D = \{\varphi \in 2^\kappa \mid |\varphi^{-1}[\{0\}]| = 1\}$, para todo $\varphi \in 2^\kappa - D$ sea $C_\varphi = (\bigcap_{\alpha \in \varphi^{-1}[\{1\}]} A_\alpha) \cap (\bigcap_{\alpha \in \varphi^{-1}[\{0\}]} B_\alpha)$. Es decir, C_φ es el conjunto de permutaciones de κ que fijan a todos los elementos que van a dar a 1 bajo φ, y mueve a todos los demas. Veamos que $\forall \varphi \in 2^\kappa - D \, (C_\varphi \neq \phi)$. Por el lema, sabemos que existe una permutacion $g : \varphi^{-1}[\{0\}] \to \varphi^{-1}[\{0\}]$ sin puntos fijos. Entonces, si ponemos $G = g \cup id_{\varphi^{-1}[\{1\}]}$, G esta bien definida pues $\varphi^{-1}[\{0\}] \cap \varphi^{-1}[\{1\}] = \phi$ y claramente, $G \in C_\varphi$. Por otro lado, notemos que si $\varphi_1 \neq \varphi_2$, $C_{\varphi_1} \cap C_{\varphi_2} = \phi$. Por lo tanto, si para cada $\varphi \in 2^\kappa - D$ escogemos una unica funcion $h_\varphi \in C_\varphi$, y definimos $H : (2^\kappa - D) \to \mathcal{S}_\kappa$ dada

por $H(\varphi) = h_\varphi$ entonces, como los C_φ son disjuntos, H es inyectiva. Por lo tanto, $2^\kappa = |2^\kappa - D| \leq \mathcal{S}_\kappa$. Donde la igualdad se cumple por el lema 2, el teorema de Cantor, y el ejercicio 7 de la tarea 2. $\square$

8. Probar que un cardinal regular κ es fuertemente inaccesible sii $\kappa = \beth_\kappa$.
Lema. $\beth$ es un funcional normal.
Veamos que $\beth$ es monotona. Sea $\varphi(\beta) \rightleftharpoons \forall\alpha \in \mathrm{OR}\ (\alpha < \beta \to \beth_\alpha < \beth_\beta)$. Procedamos por induccion sobre β. $\varphi(0)$ se cumple por vacuidad. Ahora, supongamos $\varphi(\beta)$ y veamos $\varphi(\beta+1)$. Sea $\alpha < \beta + 1$ entonces, $\alpha < \beta$ o $\alpha = \beta$. Si $\alpha < \beta$, por hipotesis inductiva, $\beth_\alpha < \beth_\beta < 2^{\beth_\beta} = \beth_{\beta+1}$. Si $\alpha = \beta$, $\beth_\beta < 2^{\beth_\beta} = \beth_{\beta+1}$. Por lo tanto, $\varphi(\beta+1)$. Ahora, sea β un ordinal limite y supongamos que $\forall\alpha < \beta\ \varphi(\alpha)$. Sea $\gamma < \beta = \bigcup_{\alpha<\beta}\alpha$ entonces, $\gamma < \alpha$ para alguna $\alpha < \beta$. Luego, por hipotesis de induccion, $\beth_\gamma < \beth_\alpha \leq \bigcup_{\alpha<\beta}\beth_\alpha = \beth_\beta$. Ademas, por definicion de $\beth$ es inmediato que es continua. Por lo tanto, $\beth$ es normal.
Demostracion.
Supongamos que $\kappa = \beth_\kappa$. Como κ es cardinal en particular, es ordinal limite. Por lo tanto, $\beth_\kappa = \bigcup_{\lambda<\kappa}\beth_\lambda$. Ahora, sea $\mu < \kappa = \bigcup_{\lambda<\kappa}\beth_\lambda$ entonces, $\mu < \beth_\lambda$ para alguna $\lambda < \kappa$. Luego, $2^\mu \leq 2^{\beth_\lambda} < 2^{\beth_{\lambda+1}} < \kappa$. Conversamente, supongamos que κ es fuertemente inaccesible y regular. Por Ivorra.Teo.5.84, $\kappa = \beth_\lambda$ para alguna $\lambda \in \mathrm{OR}$ tal que

$$\lambda \leq \beth_\lambda = \kappa = \mathrm{cf}(\kappa) = \mathrm{cf}(\beth_\lambda) =_{(*)} \mathrm{cf}(\lambda) \leq \lambda$$

Donde $(*)$ se cumple por el lema junto con Ivorra.Teo.5.51. $\square$

9. Probar $\beth_\omega^{\aleph_0} = \beth_{\omega+1}$.
Lema 1. Si $\alpha \in \mathrm{OR}$ y $\mathrm{cf}(\alpha) = n \in \omega$ entonces, α es sucesor.
Supongamos que α es limite. Por hipotesis, existe $f : n \to \alpha$ cofinal. Sea $\xi = \max f[n]$, el cual existe pues $|f[n]| \leq n$. Notemos que como $\xi < \alpha$ y α es limite, $\xi + 1 < \alpha$ pero $\max f[n] = \xi < \xi + 1$. De donde, no existe ningun $m < n$ tal que $f(m) \geq \xi + 1$, contradiciendo la cofinalidad de f.
Lema 2. $\mathrm{cf}(\beth_\omega) = \omega$
Sea $f : \omega \to \beth_\omega$ dada por $f(n) = \beth_n$ entonces, si $x < \beth_\omega$, $x < \beth_n$ para alguna $n \in \omega$ (de lo contrario, contradiccion) de donde, $x < f(n)$. Por lo tanto, f es cofinal y $\mathrm{cf}(\beth_\omega) \leq \omega$. Ademas, por el lema 1, como $\beth_\omega$ es limite, $\mathrm{cf}(\beth_\omega) \geq \omega$. Por lo tanto, $\mathrm{cf}(\beth_\omega) = \omega$.
Lema 3. $\beth_\omega$ es fuerte.
Sea $\mu < \beth_\omega$ entonces, $\mu < \beth_n$ para alguna $n \in \omega$ de donde, $2^\mu \leq 2^{\beth_n} < 2^{\beth_{n+1}} < \beth_\omega$.

Demostracion.

$$
\begin{aligned}
\beth_{\omega+1} &= 2^{\beth_\omega} \\
&= \beth_\omega^{\mathrm{cf}(\beth_\omega)} && \text{(Lema 3 y Amor Prop.4.17.)} \\
&= \beth_\omega^{\omega} && \text{(Lema 2)} \\
&= \beth_\omega^{\aleph_0}
\end{aligned}
$$

□

10. Sea κ un cardinal fuerte mayor que $\aleph_0$. Muestra que κ es debilmente inaccesible si $\kappa = \sum_{\lambda<\kappa} \kappa^\lambda$.
Demostracion.
Supongamos que κ no es debimente inaccesible. Entonces,
Caso 1. κ no es limite. Entonces, es sucesor i.e., $\exists\lambda \in \mathrm{OR}\ (\lambda+1=\kappa)$. Pero como κ es fuerte y $\lambda < \lambda+1 = \kappa$, $2^\lambda < \lambda+1$, una contradiccion.
Caso 2. κ no es regular. Entonces, $\mathrm{cf}(\kappa) < \kappa$. Por otro lado, por la Amor.Prop.4.18.iii, si $\lambda > \mathrm{cf}(\kappa)$, $\kappa^\lambda = \kappa^{\mathrm{cf}(\kappa)}$. Ademas, como κ es fuerte, por la Amor.Prop.4.17, $\kappa^{\mathrm{cf}(\kappa)} = 2^\kappa$. De donde, $\forall\lambda > \mathrm{cf}(\kappa)\ (2^\kappa = \kappa^\lambda)$. Por lo tanto,

$$\kappa < 2^\kappa \leq \sum_{\mathrm{cf}(\kappa)<\lambda<\kappa} 2^\kappa = \sum_{\mathrm{cf}(\kappa)<\lambda<\kappa} \kappa^\lambda \leq \sum_{\lambda<\kappa} \kappa^\lambda.$$

□

11. Probar $\aleph_{\alpha+n}^\lambda = \aleph_\alpha^\lambda \cdot \aleph_{\alpha+n}$.
Demostracion.
Por induccion sobre n. Si $n=0$, como $\aleph_{\alpha+0} \leq \aleph_\alpha^\lambda$,

$$\aleph_\alpha \cdot \aleph_\alpha^\lambda = \aleph_{\alpha+0} \cdot \aleph_\alpha^\lambda = \aleph_{\alpha+0}^\lambda = \aleph_\alpha^\lambda$$

Ahora, supongamos $\aleph_{\alpha+n}^\lambda = \aleph_\alpha^\lambda \cdot \aleph_{\alpha+n}$. Luego,

$$
\begin{aligned}
\aleph_{\alpha+n+1}^\lambda &= ((\aleph_{\alpha+n})^+)^\lambda \\
&= \aleph_{\alpha+n}^\lambda \cdot \aleph_{\alpha+n}^+ && \text{(Formula de Hausdorff.)} \\
&= (\aleph_\alpha^\lambda \cdot \aleph_{\alpha+n}) \cdot \aleph_{\alpha+n}^+ && \text{(Hipotesis inductiva.)} \\
&= \aleph_\alpha^\lambda \cdot (\aleph_{\alpha+n} \cdot \aleph_{\alpha+n}^+) \\
&= \aleph_\alpha^\lambda \cdot \aleph_{\alpha+n}^+ && (\aleph_{\alpha+n} < \aleph_{\alpha+n}^+) \\
&= \aleph_\alpha^\lambda \cdot \aleph_{\alpha+n+1}
\end{aligned}
$$

$\square$

12. Demostrar que un cardinal infinito κ es fuerte sii $\forall \mu, \lambda \leq \kappa$ $(\mu^\lambda < \kappa)$.
Demostracion.
Supongamos κ fuerte. Como $\mu \cdot \lambda = \mu \cup \lambda$, $\mu \cdot \lambda < \kappa$. Luego, como κ es fuerte, $2^{\mu \cdot \lambda} < \kappa$. Por otro lado, como $\mu \cdot \lambda = \mu \cup \lambda$, $\mu^\lambda \leq (\mu \cdot \lambda)^{\mu \cdot \lambda}$. Ademas, sabemos que $(\mu \cdot \lambda)^{\mu \cdot \lambda} = 2^{\mu \cdot \lambda}$. Por lo tanto, $\mu^\lambda \leq (\mu \cdot \lambda)^{\mu \cdot \lambda} = 2^{\mu \cdot \lambda} < \kappa$. $\square$

13. Sea κ fuertemente inaccesible y $\lambda < \kappa$. Demuestra que $\kappa^\lambda = \kappa$.
Demostracion.
Como κ es fuertemente inaccesible, κ es fuerte y $\mathrm{cf}(\kappa) = \kappa$. Luego, de Amor.Prop.4.15, el resultado es inmediato. $\square$

14. Suponiendo HGC demostrar que cada cardinal debilmente inaccesible es fuertemente inaccesible.
Demostracion.
Supongamos HGC, κ debilmente inaccesible y $\mu < \kappa$. En particular, κ es cardinal limite, de donde, $\mu^+ < \kappa$. Pero HGC implica $\mu^+ = 2^\mu$. Luego, $2^\mu < \kappa$ si $\mu < \kappa$. Es decir, κ es fuerte, y como κ es debilmente inaccesible, es regular. Por lo tanto, κ es fuertemente inaccesible. $\square$

Diego Leipen Lara
418002038