Tarea 1

Análisis Real (2025-2)
Dr. Javier Fernando Rosenblueth Laguette

Diego Leipen Lara

4. Demuestra que el principio del buen orden implica el principio de inducción.

Demostración. Supongamos el principio del buen orden. Para demostrar el principio de inducción, sea $P(n)$ una propiedad definida para todo $n \in \mathbb{N}$ y supongamos lo siguiente.

(i) $P(1)$ es verdadera.

(ii) Para todo $n \in \mathbb{N}$, $P(n)$ verdadera implica $P(n+1)$ verdadera.

Siguiendo la sugerencia, sea $A = \{n \in \mathbb{N} \mid P(n) \text{ es falso }\}$. Veamos que $A = \emptyset$. De lo contrario, por el principio del buen orden, A tiene un elemento mínimo $n_0 \in A$. Por (i), $n_0 \neq 1$. En particular, $n_0 > 1$. Más aun, $n_0 - 1 \notin A$, o equivalentemente, $P(n_0 - 1)$ es verdadero. Juntando esto con (ii) obtenemos que $P(n_0)$ es cierto, o equivalentemente, $n_0 \notin A$. Una contradicción. Por lo tanto, $A = \emptyset$. □

5. Usa inducción matemática para demostrar el principio del buen orden.

Demostración. Supongamos el principio de inducción. Para demostrar el principio del buen orden, sea $\emptyset \neq S \subset \mathbb{N}$. Siguiendo la sugerencia, sea $P(n)$ la proposición "si $n \in S$, entonces S tiene un mínimo elemento". Veamos por inducción que $P(n)$ es verdadera para todo $n \in \mathbb{N}$.

(i) *Paso base.* Si $1 \in S$, entonces 1 es el mínimo elemento de S. Es decir, $P(1)$ es verdadera.

(ii) *Paso inductivo.* Sea $n \in \mathbb{N}$ y supongamos que $P(n)$ es verdadera. Para demostrar que $P(n+1)$ es verdadera, supongamos que $n+1 \in S$. Si $1 \in S$, entonces 1 es el mínimo. Por eso, supongamos que $1 \notin S$. Consideremos $S' := \{m - 1 \mid m \in S\}$. Notemos que $n \in S' \subset \mathbb{N}$ pues $1 \notin S$ y $n+1 \in S'$. Como $P(n)$ es cierta, esto implica que S' tiene un elemento mínimo $n_0 \in S'$. Por definición, $n_0 \leq k$ para todo $k \in S'$. Es fácil ver que $n_0 + 1$ es el mínimo elemento de S. Por lo tanto, $P(n+1)$ es verdadera.

□

6. Sea $f : X \to Y$ una función de un espacio no vacío X a Y. Demuestra que f es inyectiva si y solo si existe una función $g : Y \to X$ tal que $g \circ f$ es la identidad en X, es decir, $g(f(x)) = x$ para todo $x \in X$.

Demostración. Supongamos que f es inyectiva. Como $X \neq \emptyset$, existe $x_0 \in X$. Sea $g : Y \to X$ dada por

$$g(y) = \begin{cases} x & \text{si } y = f(x), \\ x_0 & \text{si } y \neq f(x) \text{ para todo } x. \end{cases}$$

Veamos que g esta bien definida. Sean $y_1, y_2 \in Y$ tales que $g(y_1) \neq g(y_2)$. Para demostrar que $y_1 \neq y_2$ primero notemos que $y_1 \in f[X]$ o $y_2 \in f[X]$. En efecto, de lo contrario, $g(y_1) = x_0$ y $g(y_2) = x_0$, contradiciendo $g(y_1) \neq g(y_2)$. Más aun, si uno de los y_i pertenece a $f[X]$ y el otro no, entonces claramente $y_1 \neq y_2$. Por eso, supongamos que ambos pertenecen a $f[X]$. Entonces existen $x_1, x_2 \in X$ tales que $f(x_i) = y_i$, $i = 1, 2$. Evaluando en g obtenemos, $x_1 = g(y_1) \neq g(y_2) = x_2$. Como f es inyectiva, esto implica que $y_1 = f(x_1) \neq f(x_2) = y_2$. Por lo tanto, g esta bien definida y claramente $g \circ f = \mathrm{id}_X$.

Conversamente, supongamos que existe $g : Y \to X$ tal que $g \circ f = \mathrm{id}_X$. Para ver que f es inyectiva, supongamos que $f(x_1) = f(x_2)$. Entonces $x_1 = g(f(x_1)) = g(f(x_2)) = x_2$ y por lo tanto, f es inyectiva. □

7. Sea $f : X \to Y$ una función de X a Y. Demuestra que f es sobre si existe $g : Y \to X$ tal que $f \circ g$ es la identidad en Y, es decir, $f(g(y)) = y$ para todo $y \in Y$.

Demostración. Sea $y \in Y$. Entonces $y = f(g(y)) \in f[X]$ pues $g(y) \in X$. $\square$

Lema 1. Sea $f : X \to Y$ una función.

1. Si $A_1 \subset A_2 \subset X$, entonces $f[A_1] \subset f[A_2]$.
2. Si $B_1 \subset B_2 \subset Y$, entonces $f^{-1}[B_1] \subset f^{-1}[B_2]$.

Demostración.

1. Supongamos que $A_1 \subset A_2 \subset X$ y sea $y \in f[A_1]$. Entonces $y = f(x)$ para alguna $x \in A_1$. Pero $A_1 \subset A_2$ y por lo tanto, $x \in A_2$. De donde, $y = f(x)$ para alguna $x \in A_2$. Es decir, $y \in f[A_2]$.
2. Supongamos que $B_1 \subset B_2 \subset Y$ y sea $x \in f^{-1}[B_1]$. Entonces $f(x) \in B_1$. Pero $B_1 \subset B_2$ y por lo tanto, $f(x) \in B_2$. Es decir, $x \in f^{-1}[B_2]$.

$\square$

16. Demuestra que:

(a) $f\left[\bigcup A_\lambda\right] = \bigcup f[A_\lambda]$.

(b) $f\left[\bigcap A_\lambda\right] \subset \bigcap f[A_\lambda]$.

(c) Da un ejemplo donde $f\left[\bigcap A_\lambda\right] \neq \bigcap f[A_\lambda]$.

Demostración.

(a) $\subset$) Sea $y \in f\left[\bigcup A_\lambda\right]$. Entonces existe $x \in \bigcup A_\lambda$ tal que $y = f(x)$. Entonces existe λ_0 y existe $x \in A_{\lambda_0}$ tales que $y = f(x)$. Entonces $y = f(x) \in f[A_{\lambda_0}] \subset \bigcup f[A_\lambda]$.
$\supset$) Por el Lema 1.1, $f[A_{\lambda_0}] \subset f\left[\bigcup A_\lambda\right]$ para todo λ_0. Entonces $\bigcup f[A_\lambda] \subset f\left[\bigcup A_\lambda\right]$.

(b) Por el Lema 1.1, $f\left[\bigcap A_\lambda\right] \subset f[A_{\lambda_0}]$ para todo λ_0. Entonces $f\left[\bigcap A_\lambda\right] \subset \bigcap f[A_\lambda]$.

(c) Sea $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ la función constante 0. Denotemos $A_0 = \{0\}$ y $A_1 = \{1\}$. Entonces $f[A_0 \cap A_1] = f[\emptyset] = \emptyset$ pero $f[A_0] \cap f[A_1] = \{0\} \cap \{0\} = \{0\}$.

$\square$

17. Demuestra que:

(a) $f^{-1}\left[\bigcup B_\lambda\right] = \bigcup f^{-1}[B_\lambda]$.

(b) $f^{-1}\left[\bigcap B_\lambda\right] = \bigcap f^{-1}[B_\lambda]$.

(c) $f^{-1}[B^c] = (f^{-1}[B])^c$.

Demostración.

(a) $\subset$) Sea $x \in f^{-1}\left[\bigcup B_\lambda\right]$. Entonces $f(x) \in \bigcup B_\lambda$. Entonces $f(x) \in B_{\lambda_0}$ para algun λ_0. Entonces $x \in f^{-1}[B_{\lambda_0}] \subset \bigcup f^{-1}[B_\lambda]$.
$\supset$) Por el Lema 1.2, $f^{-1}[B_{\lambda_0}] \subset f^{-1}\left[\bigcup B_\lambda\right]$ para todo λ_0. Entonces $\bigcup f^{-1}[B_\lambda] \subset f^{-1}\left[\bigcup B_\lambda\right]$.

(b) $\subset$) Por el Lema 1.2, $f^{-1}\left[\bigcap B_\lambda\right] \subset f^{-1}[B_{\lambda_0}]$ para todo λ_0. Entonces $f^{-1}\left[\bigcap B_\lambda\right] \subset \bigcap f^{-1}[B_\lambda]$.
$\supset$) Sea $x \in \bigcap f^{-1}[B_\lambda]$. Entonces $x \in f^{-1}[B_{\lambda_0}]$ para todo λ_0. Entonces $f(x) \in B_{\lambda_0}$ para todo λ_0. Entonces $f(x) \in \bigcap B_\lambda$. Entonces $x \in f^{-1}\left[\bigcap B_\lambda\right]$.

(c) $x \in f^{-1}[B^c] \iff f(x) \in B^c \iff f(x) \notin B \iff x \notin f^{-1}[B] \iff x \in (f^{-1}[B])^c$.

$\square$

18. Sea $f : X \to Y$ una función.

(a) Si $A \subset X$ y $B \subset Y$, entonces $f[f^{-1}[B]] \subset B$ y $f^{-1}[f[A]] \supset A$.

(b) Da ejemplos para demostrar que no necesariamente tenemos las igualdades.

(c) Demuestra que si f es suprayectiva y $B \subset Y$, entonces $f[f^{-1}[B]] = B$.

Demostración.

(a) Sea $y \in f[f^{-1}[B]]$. Entonces $y = f(x)$ con $x \in f^{-1}[B]$. Entonces $y = f(x)$ con $f(x) \in B$. Entonces $y \in B$. Por lo tanto, $f[f^{-1}[B]] \subset B$.
Sea $x \notin f^{-1}[f[A]]$. Entonces $f(x) \notin f[A]$. Entonces $x \notin A$. Por lo tanto, $f^{-1}[f[A]] \supset A$.

(b) Sea $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ la función constante 0. Sea $B = \mathbb{R}$. Entonces

$$f[f^{-1}[B]] = f[\mathbb{R}] = \{0\} \neq \mathbb{R} = B.$$

Sea $A = \{0\}$. Entonces

$$f^{-1}[f[A]] = f^{-1}[\{0\}] = \mathbb{R} \neq \{0\} = A.$$

(c) Sea $f : X \to Y$ sobre y sea $B \subset Y$. Resta probar $B \subset f[f^{-1}[B]]$. Sea $y \in B$. Como f es sobre, existe $x \in X$ tal que $f(x) = y$. De donde, $x \in f^{-1}[B]$. En particular, $f(x) = y$ con $x \in f^{-1}[B]$. Por lo tanto, $y \in f[f^{-1}[B]]$.

□

Lema 2. Si $\mathfrak{F}$ es una familia de σ-álgebras (de subconjuntos de X), entonces $\bigcap\{\mathcal{B} \mid \mathcal{B} \in \mathfrak{F}\}$ es una σ-álgebra.

Demostración. Sea $\{A_n\} \in \bigcap\{\mathcal{B} \mid \mathcal{B} \in \mathfrak{F}\}$. Entonces $A_n \in \mathcal{B}$ para todo n y todo $\mathcal{B} \in \mathfrak{F}$. Como cada $\mathcal{B}$ es una σ-álgebra, $\bigcup A_n \in \mathfrak{B}$ para todo $\mathfrak{B} \in \mathfrak{F}$. Equivalentemente, $\bigcup A_n \in \bigcap\{\mathcal{B} \mid \mathcal{B} \in \mathfrak{F}\}$. Análogamente, se puede demostrar que $A \in \{\mathcal{B} \mid \mathcal{B} \in \mathfrak{F}\}$ implica $A^c \in \{\mathcal{B} \mid \mathcal{B} \in \mathfrak{F}\}$. □

19. Dada una colección $\mathcal{C}$ de subconjuntos de X, demuestra que existe una σ-álgebra $\mathcal{A}$ que contiene a $\mathcal{C}$ y tal que si $\mathcal{B}$ es cualquier otra σ-álgebra que contiene a $\mathcal{C}$, entonces $\mathcal{A} \subset \mathcal{B}$.

Demostración. Sea $\mathfrak{F}$ la familia de todas las σ-álgebras (de subconjuntos de X) que contienen a $\mathcal{C}$. Definimos $\mathcal{A} := \bigcap\{\mathcal{B} \mid \mathcal{B} \in \mathfrak{F}\}$. Esta intersección esta bien definida pues el conjunto potencia de X pertenece a $\mathfrak{F}$. Además, por el Lema 2, $\mathcal{A}$ es una σ-álgebra y contiene a $\mathcal{C}$ pues cada $\mathcal{B} \in \mathfrak{F}$ lo contiene. Ahora bien, sea $\mathcal{B}$ cualquier otra σ-álgebra que contiene a $\mathcal{C}$. Por definición, $\mathcal{B} \in \mathfrak{F}$ y por lo tanto, $\mathcal{A} = \bigcap\{\mathcal{B} \mid \mathcal{B} \in \mathfrak{F}\} \subset \mathcal{B}$. □

20. Si $f : X \to Y$ es sobre, entonces existe una función $g : Y \to X$ tal que $f \circ g$ es la identidad en Y.

Demostración. Sea $\mathcal{C} = \{f^{-1}[\{y\}] \mid y \in Y\}$. Como f es sobre, $\mathcal{C}$ es una colección de conjuntos no vacíos. Entonces por el axioma de elección existe una función F definida en $\mathcal{C}$ que asigna a cada $A \in \mathcal{C}$ un elemento $F(A) \in A$. Sea $g : Y \to X$ dada por

$$g(y) := F\left(f^{-1}[\{y\}]\right).$$

Entonces

$$f \circ g(y) = f\left(F\left(f^{-1}[\{y\}]\right)\right) = y$$

donde la última igualdad se cumple porque $F(f^{-1}(\{y\}) \in f^{-1}(\{y\})$. □

21. Demuestra que todo subconjunto de un conjunto finito es finito.

Demostración. Sea E un conjunto finito. Sin perdida de generalidad, supongamos $E \neq \emptyset$. Por definición, existe una $n \in \mathbb{N}$ y una función suprayectiva $f : \{1, \dots, n\} \to E$. Ahora si, sea A un subconjunto de E. Si A es vació, A es finito por definición. Si A no es vacío, sea $a \in A$. Definimos $g : \{1, \dots, n\} \to E$ por

$$g(k) = \begin{cases} f(k) & \text{si } f(k) \in A, \\ a & \text{si } f(k) \notin A. \end{cases}$$

Entonces $g[\{1, \dots, n\}] = A$ y por lo tanto, A es finito. $\square$

22. Demuestra que el conjunto de todos los números racionales es contable.

Demostración. Consideremos el conjunto

$$A = \big\{(p, q, 1) \mid p, q \in \mathbb{N}\big\} \cup \big\{(p, q, 2) \mid p, q \in \mathbb{N}\big\} \cup \big\{(1, 1, 3)\big\}.$$

Es contable pues es un subconjunto de el conjunto de sucesiones finitas en $\mathbb{N}$ (cf. Proposiciones 4 y 5). Sea $f : A \to \mathbb{Q}$ dada por

$$\begin{aligned} &(p, q, 1) \mapsto p/q, \\ &(p, q, 2) \mapsto -p/q, \\ &(1, 1, 3) \mapsto 0 \end{aligned}$$

Claramente f es sobre y por lo tanto, $\mathbb{Q}$ es contable. $\square$

23. Demuestra que el conjunto E de sucesiones en $\{0, 1\}$ no es contable.

Demostración. Sea $f : \mathbb{N} \to E$ una función. Basta ver que f no es sobre. Denotemos por $f(n)_m$ al m-ésimo elemento de la sucesión $f(n)$. Considera la sucesión

$$b_n \coloneqq 1 - f(n)_n.$$

En particular, la sucesión $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ difiere de la sucesión $f(k)$ en el k-ésimo lugar para todo k. De donde, $(b_n)_{n\in\mathbb{N}} \neq f(k)$ para todo k. Equivalentemente, $(b_n)_{n\in\mathbb{N}} \notin f[A]$. Es decir, f no es sobre. $\square$

24. Sea $\mathcal{P}(X)$ la colección de todos los subconjuntos de X y sea $f : X \to \mathcal{P}(X)$ una función. Demuestra que f no es sobre.

Demostración. Sea $E = \{x \mid x \notin f(x)\}$. Veamos por contradicción que $E \notin f[X]$. De lo contrario, existe $x_0 \in X$ tal que $f(x_0) = E$.
Caso 1. Si $x_0 \notin f(x_0)$, entonces $x_0 \in \{x \mid x \notin f(x)\} = f(x_0)$. Una contradicción.
Caso 2. Si $x_0 \in f(x_0)$, entonces $x_0 \notin \{x \mid x \in f(x)\} = f(x_0)$. Una contradicción.
Por lo tanto, $E \notin f[X]$. $\square$

29. Da un ejemplo de un conjunto parcialmente ordenado que tiene un único elemento minimal pero que no tenga elemento mínimo.

Demostración. Considera

$$\big\{\{1\}, \mathbb{N}, \mathbb{N} \setminus \{1\}, \mathbb{N} \setminus \{1, 2\}, \dots\big\}$$

ordenado por la inclusión de conjuntos usual. Claramente, $\{1\}$ es minimal y es el único minimal pues para cualquier otro elemento, hay un elemento menor. Además, no hay elemento mínimo pues $\{1\} \not\subset \mathbb{N} \setminus \{1\}$ y (de nuevo) para cualquier otro elemento, hay un elemento menor. $\square$