Tarea 7

Diego Leipen Lara

Metodos Variacionales

Sea H un espacio vectorial de dimensión ≥ 2, $\mathcal{S} := \{u \in H : \|u\| = 1\}$ la esfera unitaria en H y $u_0 \in \mathcal{S}$. Denotamos por $P : H \to \mathbb{R}u_0$ a la proyección ortogonal de H sobre el subespacio vectorial generado por u_0 y definimos $J : H \to \mathbb{R}$ como

$$J(u) = \langle u_0, Pu \rangle.$$

1. Prueba que $J : H \to \mathbb{R}$ es de clase $\mathcal{C}^\infty$ y que está acotada en $\mathcal{S}$.

Demostración. Por definición,

$$Pu = \frac{\langle u, u_0 \rangle}{\|u_0\|^2} u_0.$$

Entonces

$$J(u) = \langle u_0, Pu \rangle = \left\langle u_0, \frac{\langle u, u_0 \rangle}{\|u_0\|^2} u_0 \right\rangle = \langle u, u_0 \rangle.$$

Como J es lineal, en particular es de clase $\mathcal{C}^\infty$. Además, para todo $u \in \mathcal{S}$

$$|J(u)| = |\langle u, u_0 \rangle| \leq \|u\| \|u_0\| = 1$$

pues $u, u_0 \in \mathcal{S}$. $\square$

2. Para cada $u \in \mathcal{S}$ calcula explícitamente $\nabla_{\mathcal{S}} J(u)$.

Demostración. Como J es lineal,

$$\langle \nabla J(u), v \rangle = J'(u)v = Jv = \langle v, u_0 \rangle \text{ para todo } u, v \in H.$$

Por lo tanto,

$$\nabla J(u) = u_0 \text{ para todo } u \in H. \tag{1}$$

Por otro lado, sea $\Psi : H \to \mathbb{R}$ dada por $\Psi(u) = \frac{1}{2}\|u\|^2$. En la Proposición 1.41. de las notas se demuestra que Ψ es de clase $\mathcal{C}^\infty$ y que

$$\langle \nabla \Psi(u), v \rangle = \Psi'(u)v = \langle u, v \rangle \text{ para todo } u, v \in H.$$

Entonces

$$\nabla \Psi(u) = u \text{ para todo } u \in H. \tag{2}$$

En particular, $\nabla \Psi(u) \neq 0$ para todo $u \in \Psi^{-1}(1/2)$. Esto demuestra que $1/2$ es un valor regular de Ψ. Como $\mathcal{S} = \Psi^{-1}(1/2)$, entonces para todo $u \in \mathcal{S}$

$$\begin{aligned}
\nabla_{\mathcal{S}} J(u) &= \nabla J(u) - \frac{\langle J(u), \nabla \Psi(u) \rangle}{\|\nabla \Psi(u)\|^2} \nabla \Psi(u) \\
&= u_0 - \frac{\langle u_0, u \rangle}{\|u\|^2} u && \text{(cf. (1) y (2))} \\
&= u_0 - \langle u_0, u \rangle u. && (u \in \mathcal{S})
\end{aligned}$$

3. Calcula los puntos críticos de $J|_{\mathcal{S}}$.

Demostración. Por el inciso anterior, u es punto crítico de $J|_{\mathcal{S}}$ si y solo si $u_0 = \langle u_0, u\rangle u$. Como $u, u_0 \in \mathcal{S}$, esto implica que $\pm u_0$ son los únicos punto críticos de $J|_{\mathcal{S}}$. $\square$

4. Prueba que J satisface la condición de Palais-Smale sobre $\mathcal{S}$.

Demostración. Sea $c \in \mathbb{R}$ fijo y arbitrario y sea (u_k) una sucesión que cumple

$$\begin{aligned} u_k &\in \mathcal{S}, \\ J(u_k) &\to c, \\ \nabla_{\mathcal{S}} J(u_k) &\to 0. \end{aligned}$$

Como $u_k \in \mathcal{S}$, podemos reescribir los límites como

$$\begin{aligned} \langle u_0, u_k\rangle &\to c, \\ \langle u_0, u_k\rangle u_k &\to u_0. \end{aligned} \tag{3}$$

Caso 1. ($c \neq 0$) Entonces existe (u_j) subsucesión de (u_k) tal que $\langle u_0, u_j\rangle \neq 0$ para todo j. En particular,

$$\frac{1}{\langle u_0, u_j\rangle} \to \frac{1}{c}. \tag{4}$$

Por (3) y (4),

$$\lim_{j\to\infty} \left(\frac{1}{\langle u_0, u_j\rangle} \left(\langle u_0, u_j\rangle u_j\right) \right) = \lim_{j\to\infty} u_j \text{ existe}$$

y además, $u_j \to \frac{u_0}{c}$. Por lo tanto, J satisface la condición $(PS)_{\mathcal{S},c}$ para todo $c \neq 0$.

Caso 2. ($c = 0$) Como $u_k \in \mathcal{S}$,

$$|\langle u_0, u_k\rangle u_k - 0| = |\langle u_0, u_k\rangle| \to 0.$$

Entonces por (3), $u_0 = 0$. Contradiciendo $u_0 \in \mathcal{S}$. Por lo tanto, no existe ninguna sucesión de Palais-Smale para J sobre $\mathcal{S}$ en el nivel 0. Por vacuidad, J satisface la condición $(PS)_{\mathcal{S},0}$. $\square$

5. Compara tus respuestas con el enunciado del Teorema 3.34. de las notas.

Respuesta. Este caso particular no contradice el enunciado porque J no es par:

$$\begin{aligned} J(u_0) &= \langle u_0, u_0\rangle = 1, \\ J(-u_0) &= \langle -u_0, u_0\rangle = -\langle u_0, u_0\rangle = -1. \end{aligned}$$

Por lo tanto, la paridad es necesaria en el enunciado del Teorema 3.34.