Los teoremas de isomorfismos

Facultad de Ciencias UNAM

Introducción

En esta sección presentamos los teoremas de isomorfismos de anillos. Veremos todos son consecuencia de los respectivos teoremas de isomorfismos de grupos y también de la adecuada definición del concepto de ideal.

La proyección canónica

Definición

Supongamos que R es un anillo y que I es un ideal de R. La **proyección natural** de R en R/I es la función

$$\begin{aligned} R &\to R/I \\ r &\mapsto r + I. \end{aligned}$$

Es fácil verificar que la proyección canónica de R en R/I es un homomorfismo suprayectivo de anillos con kernel I. En particular, todo ideal es el kernel de un homomorfismo.

El primer teorema de isomorfismos

Teorema 1

1. Si $\varphi : R \to S$ es un homomorfismo de anillos y I es un ideal de R que esta contenido en $\ker \varphi$, entonces

$$\begin{aligned} \overline{\varphi} : R/I &\to S \\ r + I &\mapsto \varphi(r) \end{aligned}$$

   esta bien definida y es un homomorfismo.

2. Si $\varphi : R \to S$ es un homomorfismo de anillos, entonces

$$R/\ker \varphi \cong \operatorname{im} \varphi.$$

Demostración.

1. Veamos que $\overline{\varphi} : R/I \to S$ esta bien definida.

$$\begin{aligned} r + I = r' + I &\implies r - r' \in I \subset \ker\varphi \\ &\implies \varphi(r - r') = 0 \\ &\implies \varphi(r) = \varphi(r') \end{aligned}$$

   El hecho de que $\overline{\varphi}$ es homomorfismo es consecuencia inmediata de la definición de las operaciones en R/I y de que φ es homomorfismo. Su verificación la dejamos al lector.

2. Veamos que $\overline{\varphi} : R/\ker\varphi \to S$ es inyectiva.

$$\begin{aligned} \varphi(r) = \varphi(r') &\implies \varphi(r - r') = 0 \\ &\implies r - r' \in \ker\varphi \\ &\implies r + \ker\varphi = r' + \ker\varphi \end{aligned}$$

   Usando que el dominio de un homomorfismo inyectivo es isomorfo a la imagen de este homomorfismo (c.f. proposición 1.6.2), obtenemos lo deseado.

$\square$

Aplicaciones del primer teorema de isomorfismos

- Supongamos que $n \in \mathbb{Z}_{>1}$. Es fácil ver que $n\mathbb{Z}$ es un ideal (bilateral) de $\mathbb{Z}$. Más aún, la proyección canónica $\mathbb{Z} \to \mathbb{Z}_n$ tiene kernel igual a $n\mathbb{Z}$ y por lo tanto,

  $$\mathbb{Z}/n\mathbb{Z} \cong \mathbb{Z}_n$$

  Por supuesto, esto no debería ser ninguna sorpresa. Recordemos que

  $$\overline{a} = \overline{b} \in \mathbb{Z}/n\mathbb{Z} \iff a - b \in n\mathbb{Z} \iff [a]_n = [b]_n.$$

- Supongamos que A es un anillo y X es un conjunto no vacío. Para toda $c \in X$ sea $E_c : A^X \to A$ tal que $f \mapsto f(c)$. El kernel de E_c es $\{f \in A^X \mid f(c) = 0\}$ y como E_c es suprayectiva, entonces $A^X / \ker E_c \cong A$.

En particular,

$$\mathbb{R}^{[0,1]}/\{f : \mathbb{R} \to [0,1] \mid f(c) = 0\} \cong \mathbb{R}$$

De hecho, si restringimos $E_c : \mathbb{R}^{[0,1]} \to \mathbb{R}$ a $\mathcal{C}([0,1])$, entonces un argumento completamente análogo demuestra que

$$\mathcal{C}\left([0,1]\right)/\{f \in \mathcal{C}([0,1]) \mid f(c) = 0\} \cong \mathbb{R}$$

Regresando al caso general, cabe recalcar que para toda $f \in A^X$ tenemos $f + \ker E_c = \kappa_{f(c)} + E_c$, donde $\kappa_{f(c)} \in A^X$ es la función constante $f(c)$. Por lo tanto, el conjunto de las funciones constantes en A^X forma un conjunto de representantes de $A^X/\ker E_c$.

- Supongamos que R es un anillo y $n \in \mathbb{Z}_{\geq 2}$. Si I es un ideal bilateral de R, es fácil ver que $M_n(I)$ es un ideal bilateral de $M_n(R)$. Este ideal es el kernel del homomorfismo $M_n(R) \to M_n(R/I)$ dado por $\left(a_{ij}\right)_{ij} \mapsto \left(\overline{a_{ij}}\right)_{ij}$. Como este homomorfismo es suprayectivo, el primer teorema de isomorfismos nos dice que

$$M_n(R)/M_n(I) \cong M_n(R/I).$$

El segundo teorema de isomorfismos

Teorema 2

Supongamos que R es un anillo. Si A es un subanillo de R y B es un ideal de R, entonces

1. $A + B = \{a + b \mid a \in A,\ b \in B\}$ es un subanillo de R
2. $A \cap B$ es un ideal de A
3. $(A + B)/B \cong A/(A \cap B)$

Demostración.

1. Supongamos que $a, a' \in A$ y $b, b' \in B$. Como A es subanillo de R y B es ideal de R, entonces

$$
\begin{aligned}
(a+b) - (a'+b') &= (a - a') + (b - b') \in A + B \\
(a+b) \times (a'+b') &= \underbrace{a \times a'}_{\in A} + \underbrace{a \times b'}_{\in B} + \underbrace{b \times a'}_{\in B} + \underbrace{b \times b'}_{\in B} \in A + B
\end{aligned}
$$

Donde $a \times b', b \times a' \in B$ porque B es ideal de R. Por lo tanto, $A + B$ es cerrado bajo resta y multiplicación. Es decir, $A + B$ es subanillo de R.

2. Es muy sencillo y por eso se lo dejamos al lector.
3. Sea $\varphi : A \to (A+B)/B$ tal que $a \mapsto a+B$. Usando la pura definición de las operaciones en $(A+B)/B$ y el hecho de que para toda $b \in B$, $(a+b)+B = (a+B)+(b+B) = a+B$, vemos que φ es un homomorfismo suprayectivo de anillos. Mas aun, como

$$\varphi(a) = 0_{(A+B)/B} \iff a+B = B \iff a \in B,$$

entonces $\ker \varphi = A \cap B$. Por lo tanto, (por el primer teorema de isomorfismos) $A/(A \cap B) \cong (A+B)/B$.

$\square$

El tercer teorema de isomorfismos

Teorema 3

Supongamos que R es un anillo. Si I, J son ideales de R tales que $I \subset J$, entonces

1. J/I es un ideal de R/I
2. $(R/I)/(J/I) \cong R/J$

Demostración.

1. Antes que nada, notemos que el cociente J/I esta bien definido porque si I, J son ideales de R y $I \subset J$, entonces I es ideal de J. Ahora bien, supongamos que $j, j' \in J$ y $r \in I$. Como I, J son ideales de R, entonces

$$(j + I) - (j' + I) = (j - j') + I \in J/I \qquad \text{(es cerrado bajo resta)}$$
$$(r + I) \times (j + I) = (r \times j) + I \in J/I \qquad \text{(es ideal izquierdo)}$$
$$(j + I) \times (r + I) = (j \times r) + I \in J/I \qquad \text{(es ideal derecho)}$$

   Por lo tanto, J/I es ideal de R/I.

2. Sea $\varphi : R/I \to R/J$ tal que $r + I \mapsto r + J$. Como para toda $r, r' \in I$ tenemos

$$\begin{aligned} r + I = r' + I &\implies r - r' \in I \\ &\implies r - r' \in J && \text{(pues } I \subset J) \\ &\implies r + J = r' + J, \end{aligned}$$

entonces φ esta bien definida. Claramente es suprayectiva, y como para toda $r \in R$ tenemos

$$\varphi(r + I) = 0_{R/J} \iff r + J = J \iff r \in J \iff r + I \in J/I,$$

entonces $\ker \varphi = J/I$. Por lo tanto, (por el primer teorema de isomorfismos) $(R/I)/(J/I) \cong R/J$.

$\square$

El cuarto teorema de isomorfismos

Teorema 4

Supongamos que R es un anillo. Si I es un ideal de R,

$$\begin{aligned} \mathfrak{U} &= \{A \subset R/I \mid A \text{ es subanillo no nulo de } R/I\}, \\ \mathfrak{U}' &:= \{A \subset R/I \mid A \text{ es ideal no nulo de } R/I\}, \\ \mathfrak{V} &= \{B \subset R \mid B \text{ es subanillo de } R \text{ y } I \subset B\}, \\ \mathfrak{V}' &:= \{B \subset R \mid B \text{ es ideal de } R \text{ y } I \subset B\}, \end{aligned}$$

entonces

1. Hay una biyección natural $\mathfrak{F}$ entre $\mathfrak{U}$ y $\mathfrak{V}$.
2. La restricción de $\mathfrak{F}$ a $\mathfrak{U}'$ es una biyección natural entre $\mathfrak{U}'$ y $\mathfrak{V}'$.
3. Para todo $B \in \mathfrak{V}$,

$$B \text{ es un ideal de } R \iff B/I \text{ es un ideal de } R/I.$$

Demostración. Demostraremos los incisos 1 y 2 simultáneamente.

Explícitamente, escribiremos solo la demostración del inciso 1 pero como fácilmente verificaras, si cada vez que aparezca “subanillo” o “$\mathfrak{U}$” o “$\mathfrak{V}$” lo cambiamos por “ideal” o “$\mathfrak{U}'$” o “$\mathfrak{V}'$” (respectivamente), entonces obtenemos una demostración para el inciso 2.

Ahora si, supongamos que $\pi : R \to R/I$ es la proyección canónica.

1&2. Sea $\mathfrak{F} : \mathfrak{U} \to \mathfrak{V}$ tal que $A \mapsto \pi^{-1}(A)$. Como $\pi^{-1}(A)$ es la imagen inversa de un subanillo bajo un homomorfismo, entonces $\mathfrak{F}(A) = \pi^{-1}(A)$ es un subanillo de R. Para ver que $I \subset \pi^{-1}(A)$, notemos que si $x \in I$, entonces $\pi(x) = 0 \in A$ y por lo tanto, $x \in \pi^{-1}(A) = \mathfrak{F}(A)$. Por lo tanto, $\mathfrak{F}(A) \in \mathfrak{V}$ y $\mathfrak{F}$ esta bien definida. Veamos que es biyectiva.

$\mathfrak{F}$ *es inyectiva:*

Supongamos que $A, A' \in \mathfrak{U}$ son tales que $\mathfrak{F}(A) = \mathfrak{F}(A')$. Por definición, $\pi^{-1}(A) = \pi^{-1}(A')$. Como π es suprayectiva, es fácil verificar que esto implica que $A = A'$.

$\mathfrak{F}$ *es suprayectiva:*

Supongamos que $B \in \mathfrak{V}$. Como $\pi(B)$ es la imagen directa de un subanillo bajo un homomorfismo de anillos, entonces $\pi(B) \in \mathfrak{U}$. Veamos que $\mathfrak{F}(\pi(B)) = B$, es decir veamos que $\pi^{-1}(\pi(B)) = B$.

$\subset$) $x \in \pi^{-1}(\pi(B)) \implies \pi(x) \in \pi(B) \implies \exists b \in B$ tal que $\pi(x) = \pi(b) \implies x + I = b + I \implies x - b \in I \implies x - b \in B$ (pues $B \in \mathfrak{V}$ implica $I \subset B$) $\implies x = (x - b) + b \in B$.

$\supset$) $x \in B \implies \pi(x) \in \pi(B) \implies x \in \pi^{-1}(\pi(B))$.

3. Supongamos que $B \in \mathfrak{V}$.

$\Longrightarrow$) Si B es ideal de R, entonces (como π es un homomorfismo suprayectivo de anillos) $\pi(B) = B/I$ es un ideal de R/I.

$\Longleftarrow$) Supongamos que B/I es ideal de R/I. Como $B \in \mathfrak{V}$, entonces B es subanillo de R y por lo tanto basta verificar que B es cerrado bajo multiplicación por elementos arbitrarios en R. Para esto, supongamos que $r \in R$ y $b \in B$, entonces como B/I es ideal de R/I,

$$rb + I = (r + I)(b + I) \in B/I$$

Por lo tanto, existe $b' \in B$ tal que $rb + I = b' + I$. En particular, $rb - b' \in I \subset$[1] B. Por lo tanto, como B es subanillo, $rb = (rb - b') + b' \in B$. Análogamente, $br \in B$.

$\square$

[1]Pues $B \in \mathfrak{V}$