Grupos resolubles

Facultad de Ciencias UNAM

Introducción

En esta sección introduciremos un concepto que nos permitirá ocupar nuestros conocimientos de teoría de Galois para entender mejor a las extensión radicales. Específicamente, definiremos el concepto de grupo resoluble. Como veras, este concepto es mas o menos similar al concepto de extensión radical. En este momento a lo mejor te estas preguntando ¿porque no cambiamos el nombre a "grupo radical"? La razón es con la terminología que escogimos, tenemos el siguiente resultado (el cual sera demostrado en la sección 2.28):

Si L/F es Galois, entonces

$$L/F \text{ es resoluble} \iff \mathrm{Gal}(L/F) \text{ es resoluble.}$$

Recordando la utilidad del concepto de extensión resoluble se vuelve evidente este resultado conocido como el *teorema de Galois*. Por eso, las secciones 2.26, 2.27, y 2.28 están completamente dedicadas a demostrar el teorema de Galois.

Recordatorios de teoría de grupos

Como estudiaremos grupos, es buena idea recordar un par de cosas:

Si G es un grupo, entonces

$$|G| \text{ es primo} \iff G \text{ es cíclico de orden primo}$$

y en este caso los únicos subgrupos de G son los triviales. Para ver porque el enunciado anterior es cierto, recuerda que por el teorema de Lagrange, si $H \leq G$, entonces $|H|$ divide a $|G|$. Por eso, si $|G| = p$ con p primo y $H \leq G$, entonces $|H| = 1, p$. Equivalentemente, $H = \{e_G\}, G$.

Grupos resolubles

Definición

Supongamos que G es un grupo. Decimos que G es **resoluble** si G es finito y existen $G_0, G_1, \ldots, G_n$ subgrupos de G tales que

1. $G_n \subset G_{n-1} \subset G_{n-2} \subset \cdots \subset G_2 \subset G_1 \subset G_0$ donde $G_0 = G$ y $G_n = \{e_G\}$.
2. G_i es normal en G_{i-1} para toda $i = 1, \ldots, n$.
3. $[G_{i-1} : G_i]$ es un numero primo para toda $i = 1, \ldots, n$.

Por ejemplo, el lector podrá fácilmente verificar que los grupos cíclicos de orden primo son resolubles.

Como $[G_{i-1} : G_i] = |G_{i-1}/G_i|$, el recordatorio implica que podemos reemplazar la condición 3 de la definición de grupo resoluble por la siguiente (equivalente) condición: G_{i-1}/G_i es un grupo cíclico de orden primo.

S_3 es un grupo resoluble

Considera la siguiente cadena de subgrupos

$$\{e\} \subset A_3 \subset S_3.$$

Como A_3 es normal en S_3 (c.f. sección 2.15) y los índices

$$[A_3 : \{e\}] = |A_3| = 3 \quad \text{y} \quad [S_3 : A_3] = 2$$

son primos, entonces S_3 es un grupo resoluble.

S_4 y A_4 son grupos resolubles

En lo que sigue, veremos que S_4 y A_4 son grupos resolubles.

Para esto, considera los siguientes subgrupos de A_4

$$H_1 = \left\{e, (12)(34), (13)(24), (14)(23)\right\} \quad \text{y} \quad H_2 = \left\{e, (12)(34)\right\}.$$

Es fácil (pero tedioso) verificar que H_1 es un subgrupo normal de A_4 y que H_2 es un subgrupo normal de H_1.

Por otro lado, como $S_4 = 24$, entonces $A_4 = 12$ y por lo tanto,

$$[A_4 : H_1] = |A_4|/|H_1| = 12/4 = 3 \quad \text{y} \quad [H_1 : H_2] = 4/2 = 2.$$

Por lo tanto, las siguientes cadenas de subgrupos demuestran (respectivamente) que A_4 y S_4 son resolubles.

$$\begin{gathered}\{e\} \subset H_2 \subset H_1 \subset A_4 \quad \text{y} \\ \{e\} \subset H_2 \subset H_1 \subset A_4 \subset S_4.\end{gathered}$$

G resoluble y $H \leq G \implies H$ resoluble

Proposición 1

Supongamos que G es un grupo resoluble. Si H es un subgrupo de G, entonces H también es resoluble.

Demostración. Supongamos que G es un grupo resoluble y que H es un subgrupo de G. Por definición, existen $G_0, G_1, \ldots, G_n$ subgrupos de G tales que

1. $G_n \subset G_{n-1} \subset G_{n-2} \subset \cdots \subset G_2 \subset G_1 \subset G_0$ donde $G_0 = G$ y $G_n = \{e_G\}$.
2. G_i es normal en G_{i-1} para toda $i = 1, \ldots, n$.
3. $[G_{i-1} : G_i]$ es un numero primo para toda $i = 1, \ldots, n$.

Para ver que H es resoluble, definimos

$$H_i := G_i \cap H \text{ para cada } i \in \{0, 1, \ldots, n\}.$$

Veamos que $H_0, H_1, \ldots, H_n$ satisfacen las 3 condiciones de la definición de grupo resoluble para H (en realidad, demostraremos que la sucesión obtenida a partir de eliminar las repeticiones[1] en $H_0, H_1, \ldots, H_n$ es la sucesión deseada).

[1] Por la forma en la que definimos las H_i, es posible que $H_i = H_j$ con $i \neq j$.

1. $H_n \subset H_{n-1} \subset H_{n-2} \subset \cdots \subset H_2 \subset H_1 \subset H_0$ donde $H_0 = H$ y $H_n = \{e_H\}$:
   Por definición,

   $$H_0 = G_0 \cap H = G \cap H = H, \quad H_n = G_n \cap H = \{e\} \cap H = \{e\}, \quad \text{y}$$
   $$H_i = G_i \cap H \subset G_{i-1} \cap H = H_{i-1} \text{ para toda } i \in \{1, \ldots, n\}.$$

2. H_i es normal en H_{i-1} para toda $i = 1, \ldots, n$:
   Veremos que H_i es el kernel de un homomorfismo de grupos con dominio H_{i-1}. Considera

   $$\begin{aligned} \pi : H_{i-1} &\to G_{i-1}/G_i \\ h &\mapsto hG_i \end{aligned}$$

   entonces para cada $h \in H_{i-1}$ tenemos que

   $$h \in \ker \pi \iff hG_i = G_i \iff h \in G_i \iff h \in H_{i-1} \cap G_i = H_i.$$

   donde la ultima equivalencia se cumple porque $h \in H_{i-1}$.

3. $[H_{i-1} : H_i]$ es un numero primo para toda $i = 1, \ldots, n$:

   Antes de empezar, recordemos que esta condición es equivalente a que H_{i-1}/H_i sea un grupo cíclico de orden primo. Sin embargo, en lo que sigue demostraremos que para cada $i \in \{1, \ldots, n\}$ existen dos posibilidades: H_{i-1}/H_i es un grupo cíclico de orden primo ó $H_{i-1} = H_i$.

   En caso de que $H_{i-1} = H_i$, "eliminaremos la repetición" y consideraremos la sucesión de subgrupos $H_n, H_{n-1}, \ldots, H_{i+1}, H_{i-1}, \ldots, H_1, H_0$. Haremos esto tantas veces como suceda $H_{i-1} = H_i$ de manera que cada uno de los H_i en consideración sean distintos. El resultado sera la sucesión que demuestre que H es un grupo resoluble. El lector podrá fácilmente verificar las demostraciones de las condiciones 1 y 2 siguen siendo validas para esta sucesión.

Ahora si, veamos que para cada $i \in \{1, \ldots, n\}$ tenemos que H_{i-1}/H_i es un grupo cíclico de orden primo ó $H_{i-1} = H_i$.

De nuevo, considera

$$\begin{aligned} \pi : H_{i-1} &\to G_{i-1}/G_i \\ h &\mapsto hG_i \end{aligned}$$

Por el primer teorema de isomorfismos obtenemos que

$$H_{i-1}/H_i = H_{i-1}/\ker\pi \cong \operatorname{im}\pi \subset G_{i-1}/G_i$$

Como G_{i-1}/G_i es cíclico de orden primo, entonces[2] H_{i-1}/H_i es isomorfo a G_{i-1}/G_i ó a $\{e\}$. Equivalentemente, H_{i-1}/H_i es un grupo cíclico de orden primo ó $H_{i-1} = H_i$.

$\square$

[2] Recuerda un cíclico de orden primo solo tiene subgrupos triviales

Comentario

En la proposición anterior demostramos que

$$G \text{ resoluble y } H \leq G \implies H \text{ resoluble.}$$

En la siguiente proposición demostraremos que

$$G \text{ resoluble y } H \lhd G \implies G/H \text{ resoluble.}$$

Para esto, necesitaremos un par de lemas de teoría de grupos.

$\varphi : G \to G'$ supra y $H \lhd G \implies \varphi(H) \lhd G'$

Lema 2

Supongamos que $\varphi : G \to G'$ es un homomorfismo suprayectivo de grupos. Si $H \lhd G$, entonces $\varphi(H) \lhd G'$.

Demostración. Para ver que $\varphi(H) \lhd G'$, (por definición) necesitamos ver que

$$\forall x \in G' \ \forall y \in \varphi(H) \left(xyx^{-1} \in \varphi(H) \right).$$

Por definición de $\varphi(H)$ lo anterior es si y solo si

$$\forall x \in G' \ \forall h \in H \left(x\varphi(h)x^{-1} \in \varphi(H) \right).$$

Por eso, supongamos que $x \in G'$ y que $h \in H$. Como $\varphi : G \to G'$ es suprayectivo, existe $g \in G$ tal que $\varphi(g) = x$. Entonces

$$x\varphi(h)x^{-1} = \varphi(g)\varphi(h)\varphi(g)^{-1} = \varphi(ghg^{-1}) \in \varphi(H).$$

donde la ultima pertenencia se cumple porque $ghg^{-1} \in H$, y esta pertenencia se cumple porque $H \lhd G$. $\square$

Lema 3

Supongamos que $\varphi : G \to G'$ es un homomorfismo suprayectivo de grupos. Si $|G| = p$ con p primo, entonces $|G'| \in \{1, p\}$.

Demostración. Como $\varphi : G \to G'$ es un homomorfismo suprayectivo de grupos, el primer teorema de isomorfismos de grupos implica que

$$G/\ker\varphi \cong G'.$$

En particular,

$$|G'| = |G/\ker\varphi| = |G| / |\ker\varphi| . \tag{1}$$

Pero como $|G| = p$ con p primo, entonces G solo tiene subgrupos triviales. Por lo tanto, $|\ker\varphi| \in \{1, p\}$. Juntando esto con (1), obtenemos lo deseado. $\square$

G resoluble y $H \lhd G \implies G/H$ resoluble

Proposición 4

Supongamos que G es un grupo resoluble. Si H es un subgrupo normal de G, entonces G/H también es resoluble.

Demostración. Supongamos que G es resoluble y que H es un subgrupo normal de G. Por definición, existen $G_0, G_1, \ldots, G_n$ subgrupos de G tales que

1. $G_n \subset G_{n-1} \subset G_{n-2} \subset \cdots \subset G_2 \subset G_1 \subset G_0$ donde $G_0 = G$ y $G_n = \{e_G\}$.
2. G_i es normal en G_{i-1} para toda $i = 1, \ldots, n$.
3. $[G_{i-1} : G_i]$ es un numero primo para toda $i = 1, \ldots, n$.

Para ver que G/H es resoluble, considera

$$\pi : G \to G/H$$
$$g \mapsto gH$$

y para cada $i \in \{0, 1, \ldots, n\}$, sea

$$\tilde{G}_i = \pi(G_i).$$

Veamos que $\tilde{G}_0, \tilde{G}_1 \ldots, \tilde{G}_n$ satisfacen las 3 condiciones de la definición de grupo resoluble para G/H.

1. $\tilde{G}_n \subset \tilde{G}_{n-1} \subset \cdots \subset \tilde{G}_1 \subset \tilde{G}_0$ donde $\tilde{G}_0 = G/H$ y $\tilde{G}_n = \{e_{G/H}\}$:

   Por definición,

$$\tilde{G}_0 = \pi(G_0) = \pi(G) = \{\pi(g) \mid g \in G\} = \{gH \mid g \in G\} = G/H,$$
$$\tilde{G}_n = \pi(G_n) = \pi(\{e_G\}) = \{\pi(e_G)\} = \{e_G H\} = \{H\} = \{e_{G/H}\}, \text{ y}$$
$$\tilde{G}_i = \pi(G_i) \subset \pi(G_{i-1}) = \tilde{G}_{i-1} \text{ para toda } i \in \{1, \ldots, n\}$$

2. $\tilde{G}_i$ es normal en $\tilde{G}_{i-1}$ para toda $i = 1, \ldots, n$:

   Como π es un homomorfismo suprayectivo y $\tilde{G}_i = \pi(G_i)$, esto es una consecuencia inmediata del lema 2.

3. $[\tilde{G}_{i-1} : \tilde{G}_i]$ es un numero primo para toda $i = 1, \ldots, n$:

   De la misma manera que en la proposición anterior, demostraremos que $\tilde{G}_{i-1} = \tilde{G}_i$ o $\tilde{G}_{i-1}/\tilde{G}_i$ es un grupo cíclico de orden primo. Recuerda que esto no presenta ningún problema pues borrando los duplicados de la sucesión $\tilde{G}_0, \tilde{G}_1, \ldots, \tilde{G}_n$, obtenemos una sucesión que implica la resolubilidad de G/H. Considera

$$\begin{aligned} \Phi : G_{i-1}/G_i &\to \tilde{G}_{i-1}/\tilde{G}_i \\ gG_i &\mapsto \pi(g)\tilde{G}_i \end{aligned}$$

   El lector podrá fácilmente verificar que es una función bien definida y también es un homomorfismo suprayectivo.

   Como $[G_{i-1} : G_i] = |G_{i-1}/G_i|$ es primo, entonces la existencia de este homomorfismo suprayectivo y el lema 3 implica que $|\tilde{G}_{i-1}/\tilde{G}_i| = [\tilde{G}_{i-1} : \tilde{G}_i]$ es 1 o primo. Equivalentemente, $\tilde{G}_{i-1} = \tilde{G}_i$ o $\tilde{G}_{i-1}/\tilde{G}_i$ es un grupo cíclico de orden primo.

$\square$

Comentario

En las proposiciones anteriores, demostramos que si G es un grupo y H es un subgrupo normal de G, entonces

$$G \text{ resoluble} \implies H \text{ y } G/H \text{ resolubles.}$$

En lo que sigue, demostraremos que el converso también es cierto. Para esto, de nuevo necesitaremos un par de lemas de teoría de grupos.

La imagen inversa preserva normalidad

Lema 5

Supongamos que $\varphi : G \to G'$ es un homomorfismo de grupos. Si $A, B \leq G'$ son tales que $A \lhd B$, entonces $\varphi^{-1}(A) \lhd \varphi^{-1}(B)$.

Demostración. Para ver que $\varphi^{-1}(A) \lhd \varphi^{-1}(B)$, necesitamos ver que

$$\forall x \in \varphi^{-1}(B)\ \forall y \in \varphi^{-1}(A)\ \left(xyx^{-1} \in \varphi(A)\right).$$

Por eso, supongamos que $x \in \varphi^{-1}(B)$ y que $y \in \varphi^{-1}(A)$. Entonces

$$\varphi(xyx^{-1}) = \varphi(x)\varphi(y)\varphi(x)^{-1} \in A$$

donde la pertenencia se cumple porque $x \in \varphi^{-1}(B)$, $y \in \varphi^{-1}(A)$, y $A \lhd B$. $\square$

$\pi^{-1}(\mathcal{B})/\pi^{-1}(\mathcal{A}) \cong \mathcal{B}/\mathcal{A}$ si π es la proyección canónica

Lema 6

Supongamos que G es un grupo, que $H \lhd G$, y que $\pi : G \to G/H$ es la proyección canónica. Si $\mathcal{A}, \mathcal{B} \leq G/H$ son tales que $\mathcal{A} \lhd \mathcal{B}$, entonces

$$\pi^{-1}(\mathcal{B})/\pi^{-1}(\mathcal{A}) \cong \mathcal{B}/\mathcal{A}$$

Demostración. Considera

$$\begin{aligned} \phi : \pi^{-1}(\mathcal{B}) &\to \mathcal{B}/\mathcal{A} \\ x &\mapsto (xH)\mathcal{A} \end{aligned}$$

Como $x \in \pi^{-1}(\mathcal{B}) \iff xH = \pi(x) \in \mathcal{B}$, entonces ϕ es una función bien definida. Mas aun, el lector podrá fácilmente verificar que ϕ es un homomorfismo suprayectivo con kernel igual a $\pi^{-1}(\mathcal{A})$. Usando esto y el primer teorema de isomorfismos, obtenemos lo deseado. $\square$

H y G/H resolubles $\implies$ G resoluble

Proposición 7

Supongamos que G es un grupo. Si existe un subgrupo normal H de G tal que H y G/H son resolubles, entonces G también es resoluble.

Demostración. Supongamos que $H \lhd G$ es tal que H y G/H son resolubles. Como G/H es resoluble, por definición existen $\tilde{G}_0, \tilde{G}_1, \ldots, \tilde{G}_{m-1}$ subgrupos de G/H tales que

1. $\tilde{G}_m \subset \tilde{G}_{m-1} \subset \cdots \subset \tilde{G}_1 \subset \tilde{G}_0$ donde $\tilde{G}_0 = G/H$ y $\tilde{G}_m = \{e_{G/H}\}$.
2. $\tilde{G}_i$ es normal en $\tilde{G}_{i-1}$ para toda $i = 1, \ldots, m$.
3. $[\tilde{G}_{i-1} : \tilde{G}_i]$ es un numero primo para toda $i = 1, \ldots, m$.

Como H es resoluble, por definición, existen $H_0, H_1, \ldots, H_l$ subgrupos de H tales que

1. $H_l \subset H_{l-1} \subset H_{l-2} \subset \cdots \subset H_2 \subset H_1 \subset H_0$ donde $H_0 = H$ y $H_l = \{e_H\}$.
2. H_i es normal en H_{i-1} para toda $i = 1, \ldots, l$.
3. $[H_{i-1} : H_i]$ es un numero primo para toda $i = 1, \ldots, l$.

Para ver que G es resoluble, denotemos por $\pi : G \to G/H$ a la proyección canónica $g \mapsto gH$ y notemos que tenemos la siguiente cadena de subgrupos

$$\pi^{-1}(\tilde{G}_m) \subset \pi^{-1}(\tilde{G}_{m-1}) \subset \cdots \subset \pi^{-1}(\tilde{G}_1) \subset \pi^{-1}(\tilde{G}_0) \tag{2}$$

y como

$$\begin{aligned}
&\pi^{-1}(\tilde{G}_0) = \pi^{-1}(G/H) = \{g \in G \mid \pi(g) \in G/H\} = G \quad \text{y} \\
&\pi^{-1}(\tilde{G}_m) = \pi^{-1}(\{e_{G/H}\}) = \pi^{-1}(\{H\}) = \{g \in G \mid \pi(g) \in \{H\}\} \\
&= \{g \in G \mid gH = H\} = H,
\end{aligned}$$

entonces (2) se convierte en

$$H \subset \pi^{-1}(\tilde{G}_{m-1}) \subset \cdots \subset \pi^{-1}(\tilde{G}_1) \subset G.$$

Recordando que (por hipótesis) también tenemos una sucesión

$$\{e_G\} = \{e_H\} = H_l \subset H_{l-1} \subset H_{l-2} \subset \cdots \subset H_2 \subset H_1 \subset H_0 = H,$$

es natural "pegar" estas sucesiones para demostrar que G es resoluble.

Al hacer esto, obtenemos

$$\{e_G\} \subset H_{l-1} \subset \cdots \subset H_1 \subset H \subset \pi^{-1}(\tilde{G}_{m-1}) \subset \cdots \subset \pi^{-1}(\tilde{G}_1) \subset G.$$

Específicamente, considera

$$G_i = \begin{cases} \pi^{-1}(\tilde{G}_i) & \text{si } 0 \leq i \leq m \\ H_{i-m} & \text{si } m \leq i \leq m+l \end{cases}$$

Claramente, la primera condición de la definición de G resoluble se satisface por las G_i y por lo tanto, solo resta probar las otras dos condiciones.

2. G_i es normal en G_{i-1} para toda $i = 1, \ldots, m+l$:

   Por hipótesis, esto se satisface para $i \in \{m, m+1, \ldots, m+l\}$. Resta probarlo para $i \in \{1, \ldots, m\}$. Específicamente, queremos ver que $\pi^{-1}(\tilde{G}_i) = G_i \lhd G_{i-1} = \pi^{-1}(\tilde{G}_{i-1})$. Sin embargo, como π es un homomorfismo suprayectivo, esto es consecuencia inmediata del lema 5.
3. $[G_{i-1} : G]$ es un numero primo para toda $i = 1, \ldots, m+l$:

   De nuevo, solo resta probarlo para $i \in \{1, \ldots, m\}$. Por el lema 6,

   $$G_{i-1}/G_i = \pi^{-1}(\tilde{G}_{i-1})/\pi^{-1}(\tilde{G}_i) \cong \tilde{G}_{i-1}/\tilde{G}_i$$

   y por lo tanto, G_{i-1}/G_i es un grupo cíclico de orden primo.

Teorema 8

Un grupo G es resoluble si y solo si existe un subgrupo normal H de G tal que H y G/H son resolubles.

Demostración. Es consecuencia inmediata de las tres proposiciones anteriores. $\square$

Finalizamos esta sección dando una aplicación importante de este teorema. Para esto, necesitaremos el siguiente teorema de teoría de grupos.

Mas recordatorios de teoría de grupos

Antes de enunciar el teorema, recordemos una definición.

El orden de un elemento:

Supongamos que G es un grupo y que $g \in G$. El *orden de* g es el menor entero positivo n tal que $g^n = e$.
Si el orden de g es finito, entonces es igual a $\big|\langle g\rangle\big|$, la cardinalidad del grupo (cíclico) generado por g.

El teorema de Cauchy:

Supongamos que G es un grupo finito. Si $p \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ es un numero primo tal que p divide a $|G|$, entonces existe $g \in G$ con orden p.

Todo grupo finito abeliano es resoluble

Teorema 9

Si G es un grupo finito abeliano, entonces G es resoluble.

Demostración. Procedemos por inducción sobre $|G|$. Como el caso $n = 1$ es trivial, supongamos que $n > 1$, que G es un grupo abeliano con $|G| = n$, y que el resultado es cierto para todo grupo abeliano con cardinalidad $< n$.

Como $n > 1$, existe p primo tal que $p|n$. Si $|G| = p$, entonces G es cíclico de orden p y por lo tanto, es resoluble. Si $p < |G|$, entonces por el teorema de Cauchy, existe $g \in G$ de orden p. Mas aun, como G es abeliano, entonces $\langle g \rangle$ es normal en G y claramente,

$$\big|\langle g \rangle\big| = p < n \quad \text{y} \quad \big|G/\langle g \rangle\big| = |G| \,/\, \big|\langle g \rangle\big| = |G|/p < |G| = n.$$

Usando la hipótesis de inducción y el teorema anterior, obtenemos lo deseado.

$\square$

Una caracterización de resolubilidad

Proposición 10

Supongamos que G es un grupo finito. Entonces G es resoluble si y solo si existen $G_0, G_1, \ldots, G_n$ subgrupos de G tales que

1. $G_n \subset G_{n-1} \subset G_{n-2} \subset \cdots \subset G_2 \subset G_1 \subset G_0$ donde $G_0 = G$ y $G_n = \{e_G\}$.
2. G_i es normal en G_{i-1} para toda $i = 1, \ldots, n$.
3. G_{i-1}/G_i es resoluble.

Antes de ver la demostración, es buena idea comparar las 3 condiciones de la proposición con las 3 condiciones de la definición de grupo resoluble: Un grupo finito G es resoluble si

1. $G_n \subset G_{n-1} \subset G_{n-2} \subset \cdots \subset G_2 \subset G_1 \subset G_0$ donde $G_0 = G$ y $G_n = \{e_G\}$.
2. G_i es normal en G_{i-1} para toda $i = 1, \ldots, n$.
3. $[G_{i-1} : G_i]$ es un numero primo para toda $i = 1, \ldots, n$.

Con esto en mente, continuemos a la demostración.

Demostración.

$\Longleftarrow$) Como G_{i-1}/G_i es resoluble, existen $H_0^i, H_1^i, \ldots, H_{n_i}^i$ subgrupos de G_{i-1}/G_i tales que

1. $H_{n_i}^i \subset H_{n_i-1}^i \subset \cdots \subset H_1^i \subset H_0^i$ donde $H_0^i = G_{i-1}/G_i$ y $H_{n_i}^i = \{e_{G_{i-1}/G_i}\}$.
2. H_j^i es normal en H_{j-1}^i para toda $j = 1, \ldots, n_i$.
3. $[H_{j-1}^i : H_j^i]$ es un numero primo para toda $j = 1, \ldots, n_i$.

Para ver que G es resoluble, denotemos por $\pi_i : G_{i-1} \to G_{i-1}/G_i$ a la proyección canónica y considera la sucesión

$$G_i = \pi_i^{-1}(H_{n_i}^i) \subset \pi_i^{-1}(H_{n_i-1}^i) \subset \cdots \subset \pi_i^{-1}(H_1^i) \subset \pi_i^{-1}(H_0^i) = G_{i-1}$$

Usando los métodos de la proposición 7, el lector podrá fácilmente verificar que las sucesión resultante de pegar todas estas sucesiones demuestra que G es resoluble.

$\Longrightarrow$) Recordemos que la condición 3 de la definición de grupo resoluble es equivalente a que G_{i-1}/G_i sea un grupo cíclico de orden primo. Usando el hecho de que todo grupo cíclico de orden primo es resoluble, el lector podrá fácilmente obtener lo deseado.

$\square$

Proposición 11

Supongamos que G es un grupo finito. Entonces G es resoluble si y solo si existen $G_0, G_1, \ldots, G_n$ subgrupos de G tales que

1. $G_n \subset G_{n-1} \subset G_{n-2} \subset \cdots \subset G_2 \subset G_1 \subset G_0$ donde $G_0 = G$ y $G_n = \{e_G\}$.
2. G_i es normal en G_{i-1} para toda $i = 1, \ldots, n$.
3. G_{i-1}/G_i es abeliano.

Demostración. Es consecuencia inmediata de la proposición anterior y del hecho de que todo grupo finito abeliano es resoluble. $\square$