1. Como A es simetrica, por álgebra lineal, es ortogonalmente diagonalizable. Es decir, existen $D = diag(d_1, \ldots, d_n)$ una matriz diagonal y $P = (p_{ij})_{ij}$ una matriz ortogonal tal que

$$A = P^T DP$$

En particular, si denotamos $Px = (P_1 x, \ldots, P_n x)$ entonces,

$$\begin{aligned} x^T Ax &= x^T P^T DPx \\ &= (Px)^T D(Px) \\ &= \sum_{i=1}^{n} (P_i x)^2 d_i \end{aligned}$$

Ahora bien, sean $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ & $g : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ tales que

$$\begin{aligned} f(x) &:= x^T Ax \\ g(x_1, \ldots, x_n) &:= \left(\sqrt{d_1} \cdot P_1 x, \ldots, \sqrt{d_n} \cdot P_n x\right) \end{aligned}$$

Es facil verificar (directo de la definicion) que g es lineal y que su matriz asociada es $(\sqrt{d_j} \cdot p_{ij})_{ij}$. En particular,

$$\begin{aligned} \det(\sqrt{d_j} \cdot p_{ij})_{ij} &= \sqrt{d_1} \ldots \sqrt{d_n} \cdot \det(p_{ij})_{ij} && (n\text{-linealidad del determinante}) \\ &\neq 0 && (P \text{ es invertible}) \end{aligned}$$

Por lo tanto, $(\sqrt{d_j} \cdot p_{ij})_{ij}$ es invertible y mas aun, g es difeo. Por otro lado,

$$\begin{aligned} g^{-1}(B_0(\sqrt{y})) &= \left\{x \in \mathbb{R}^n : f(x) \in B_0(\sqrt{y})\right\} \\ &= \left\{x \in \mathbb{R}^n : \left\|\left(\sqrt{d_1} \cdot P_1 x, \ldots, \sqrt{d_n} \cdot P_n x\right)\right\| = \sqrt{y}\right\} \\ &= \left\{x \in \mathbb{R}^n : \sum_{i=1}^{n} (P_i x)^2 d_i = y\right\} = f^{-1}(\{y\}) \end{aligned}$$

Finalmente, como g es difeo, $f^{-1}(\{y\}) = g^{-1}(B_0(\sqrt{y})) \cong B_0(\sqrt{x}) \cong \mathbb{S}^{n-1}$. $\square$

Nota. Para el ejercicio 2, usaremos el siguiente resultado de las notas 4.8 del curso anterior.

> **Ejemplo 3.** *Si $M \subset \mathbb{R}^n$ es una subvariedad, una curva $\gamma : I \to M$ es una geodésica si y solo si $\forall t\ \gamma''(t) \in (T_{\gamma(t)}M)^\perp$. En efecto,*
>
> $$\frac{D}{dt}\gamma' = (\gamma'')^T = 0 \quad \textit{si y solo si} \quad \gamma''(t) \perp T_{\gamma(t)}M \quad \forall t \in I.$$
>
> *Recordemos que el exponente $(.)^T$ denota la proyección ortogonal sobre el espacio tangente a la subvariedad.*

Lema para el ejercicio 2. Si $u, v, w \in \mathbb{R}^3$ son tales que

1. $u, w \neq 0$
2. $\det(u, v, w) = 0$
3. $\langle u, w\rangle = 0$
4. $\langle u, v\rangle = 0$

entonces, $v||w$.
Demostración. El caso $v = 0$ es evidente; así que supongamos $v \neq 0$. Por (2), $\exists a, b, c \in \mathbb{R}$ no todos 0 tales que

$$au + bv + cw = 0$$

Primero, veamos que $b \neq 0$. Para esto, supongamos lo contrario y procedamos por casos:
Caso 1. $a \neq 0$ & $c \neq 0$. Entonces, $u||w$, contradiciendo (3).
Caso 2. $a \neq 0$ & $c = 0$. Entonces, $u = 0$, contradiciendo (1).
Caso 3. $a = 0$ & $c \neq 0$. Entonces, $w = 0$, contradiciendo (1).
Caso 4. $a = 0$ & $c = 0$. Entonces, a, b, c son todos 0, contradiciendo la segunda oración de la demostración.
Por lo tanto, $b \neq 0$. Ahora si, veamos que $v||w$. Para esto, veamos que el único caso posible es $a = 0$ & $c \neq 0$:
Caso 1. $a \neq 0$ & $c \neq 0$. Entonces, $u||(bv + cw)$. Sin embargo, esto es imposible pues usando la bilinealidad de $\langle\cdot,\cdot\rangle$ y las hipótesis (3) y (4), obtenemos $\langle u, bv + cw\rangle = 0$. Por lo tanto, este caso nunca sucede.
Caso 2. $a \neq 0$ & $c = 0$. Entonces, $u||v$, contradiciendo (4). Por lo tanto, este caso nunca sucede.
Caso 3. $a = 0$ & $c \neq 0$. Entonces, $v||w$, como se quería demostrar.
Caso 4. $a = 0$ & $c = 0$. Entonces, $v = 0$, contradiciendo nuestra suposición inicial. $\square$

2. Sea $\gamma : I \to S$ una curva regular sobre una superficie S de $\mathbb{R}^3$ de normal N.
$\to$) Supongamos que γ puede ser reparametrizada para ser una geodésica de S. Es decir, $\exists \alpha : I' \to I$ difeo; tal que $\gamma \circ \alpha$ es geodesica (aquí I' es otro intervalo). Entonces, por el ejemplo 3 de las notas 4.8, tenemos la primera de la siguiente cadena de implicaciones,

$$\begin{aligned}
\forall t \in I' \ (\gamma \circ \alpha)''(t) \perp T_{\gamma\circ\alpha(t)}M \quad &\Longrightarrow \\
\forall t \in I' \ (\gamma \circ \alpha)''(t) \,||\, N(\gamma \circ \alpha(t)) \quad &\Longrightarrow \\
\forall t \in I' \ \exists \xi_t \in \mathbb{R} \text{ tq } \alpha''(t)\gamma'(t) + (\alpha'(t))^2\gamma''(t) = (\gamma \circ \alpha)''(t) = \xi_t N(\gamma \circ \alpha(t)) \ &\Longrightarrow \\
\forall t \in I' \ \exists \xi_t \in \mathbb{R} \text{ tq } \alpha''(t)\gamma'(t) + (\alpha'(t))^2\gamma''(t) - \xi_t N(\gamma \circ \alpha(t)) = 0 \quad &(*)
\end{aligned}$$

Por otro lado, notemos que como α es difeo entonces, $\forall t \in I' \ \alpha'(t) \neq 0$. De lo contrario, α^{-1} no seria diferenciable en los puntos donde α' se anula. Ahora bien, definamos

$$a_t := \alpha''(t), b_t := (\alpha'(t))^2, c_t := -\xi_t$$

Usando esto y $(*)$, tenemos la primera de la siguiente cadena de equivalencias,

$$\begin{aligned}
\forall t \in I' \ \exists a_t, b_t, c_t \text{ no todos } 0, \text{ tq } a_t\gamma'(t) + b_t\gamma''(t) + c_tN(\gamma \circ \alpha(t)) = 0 \iff \\
\forall t \in I' \ \{\gamma'(\alpha(t)), \gamma''(\alpha(t)), N(\gamma(\alpha(t)))\} \text{ es linealmente dependiente } \iff \\
\forall s \in I \ \{\gamma'(s), \gamma''(s), N(\gamma(s)\} \text{ es linealmente dependiente } \iff \\
\det(\gamma', \gamma'', N) = 0
\end{aligned}$$

Donde la segunda equivalencia se cumple porque α es difeo.
$\leftarrow$) Como γ es regular, podemos escoger $\alpha : I' \to I$ una reparametrizacion de γ por longitud de arco. En particular,

$$\langle (\gamma \circ \alpha)', (\gamma \circ \alpha)'' \rangle = 0$$

Ahora bien, definamos $\forall t \in I'$

$$\begin{aligned}
u &:= (\gamma \circ \alpha)'(t) \\
v &:= (\gamma \circ \alpha)''(t) \\
w &:= N(\gamma \circ \alpha(t))
\end{aligned}$$

Veamos que u, v, w cumplen las hipótesis del lema. Primero notemos que

$$\begin{aligned}
\langle u, v \rangle = \langle (\gamma \circ \alpha)'(t), (\gamma \circ \alpha)''(t) \rangle = 0 \ \ \& \\
\langle u, w \rangle = \langle (\gamma \circ \alpha)'(t), N(\gamma \circ \alpha(t)) \rangle = 0
\end{aligned}$$

Además,

$$\begin{aligned}
\det(u, v, w) &= \det\big((\gamma \circ \alpha)'(t), (\gamma \circ \alpha)'(t), N(\gamma \circ \alpha)(t)\big) \\
&= \det\Big(\gamma'(t) \cdot \alpha'(t), \alpha''(t) \cdot \gamma'(\alpha(t)) + (\alpha'(t))^2 \cdot \gamma''(\alpha(t)), N(\gamma \circ \alpha(t))\Big) \\
&= \alpha'(t) \cdot \alpha''(t) \cdot \det\big(\gamma'(\alpha(t)), \gamma'(\alpha(t)), N(\gamma \circ \alpha(t))\big) + \\
&\quad\ \alpha'(t) \cdot (\alpha'(t))^2 \cdot \det\big(\gamma'(\alpha(t)), \gamma''(t), N(\gamma \circ \alpha(t))\big) \\
&= 0
\end{aligned}$$

Donde la tercera igualdad se cumple por trilinealidad del determinante y en el lado derecho de esta misma igualdad, el primer sumando se anula porque $\det(x, x, y) = 0$ y el segundo se anula por hipótesis. Entonces, u, v, w cumplen las hipótesis del lema y por lo tanto,

$$\forall t \in I' \ (\gamma \circ \alpha)''(t) \,||\, N(\gamma \circ \alpha(t))$$

Entonces, por el ejemplo 3 de las notas 4.8, $\gamma \circ \alpha$ es geodésica. Es decir, existe una reparametrizacion de γ que es geodésica. $\square$

4. Sea $\Phi : \mathbb{R}^n \to \mathbb{T}^n$ tal que

$$\Phi(x_1, \ldots, x_n) = (\exp(ix_1), \ldots, \exp(ix_n))$$

Φ *es supra.* Sea $z \in \mathbb{T}^n$. Por definicion, $\forall j \in \{1, \dots, n\}$ $|z_j| = 1$. Ademas, sabemos que $\forall j$ $\exists x_j \in \mathbb{R}$ $\exp(ix_j) = z_j$. Por lo tanto, $\Phi(x_1, \dots, x_n) = z$.
Φ *es inmersion.* Por una cuenta directa,

$$d\Phi_{(x_1,\dots,x_n)}(u_1, \dots, u_n) = (i\exp(ix_1)u_1, \dots, i\exp(ix_n)u_n)$$

entonces, claramente $\forall x \in \mathbb{R}^n$ $d\Phi_x$ es inyectiva.
Φ *es isometria.* Usando el calculo anterior y evaluando explicitamente,

$$\begin{aligned}
\langle d\Phi_{(x_1,\dots,x_n)}(u_1, \dots, u_n), d\Phi_{(x_1,\dots,x_n)}(v_1, \dots, v_n)\rangle &= \\
\langle (i\exp(ix_1)u_1, \dots, i\exp(ix_n)u_n), (i\exp(ix_1)v_1, \dots, i\exp(ix_n)v_n)\rangle &= \\
\Re\left(\sum_{j=1}^{n} i\exp(ix_j)u_j \cdot \overline{i\exp(ix_j)v_j}\right) &= \\
\Re\left(\sum_{j=1}^{n} u_j\overline{v_j} \cdot i\bar{i} \cdot \exp(ix_j)\overline{\exp(ix_j)}\right) &= \\
\Re\left(\sum_{j=1}^{n} u_j v_j \cdot 1 \cdot 1\right) &= \\
\langle u, v\rangle &
\end{aligned}$$

El toro es plano. Como Φ es inmersión y $\dim \mathbb{R}^n = \dim T_x\mathbb{R}^n$ entonces (por el teorema de la dimensión), $d\Phi_x$ es biyeccion. Luego, por el teorema de la función inversa, Φ es difeo local. Juntando esto con la suprayectividad de Φ, el hecho de que el tensor de curvatura de $(\mathbb{R}^n, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ es 0, y el siguiente lema de las notas 4.12 del curso anterior:

> **Lema 2.** *Si $\varphi : (M, g) \to (N, h)$ es una isometría entonces, para todo $a \in M$ y todo $x, y, z, t \in T_aM$,*
>
> $$R_a^g(x, y, z, t) = R_{\varphi(a)}^h(d\varphi_a(x), d\varphi_a(y), d\varphi_a(z), d\varphi_a(t)).$$

obtenemos lo deseado.
Las geodésicas de $\mathbb{T}^n$. Sabemos que una curva $\gamma : I \to M$ es geodésica en una carta (ϕ, U) $\iff$

$$\frac{d^2x_k}{dt^2} + \sum_{i,j} \Gamma_{ij}^k \frac{dx_i}{dt}\frac{dx_j}{dt} = 0 \qquad (*)$$

Donde $\phi^{-1} \circ \gamma(t) = (x_1(t), \dots, x_n(t))$.
Ahora, notemos que podemos encontrar un atlas de $\mathbb{T}^n$ que consista únicamente de restricciones de Φ a subconjuntos donde Φ es inyectiva. Por eso, basta resolver $(*)$ para (ϕ, U) donde $\phi := \Phi|_U$ y Φ es inyectiva en U. Para esto,

notemos que $\forall j,k \in \{1,\ldots,n\}$

$$\begin{aligned}
g_{jk}(\theta_1,\ldots,\theta_n) &= \left\langle \frac{\partial}{\partial x_j}(\phi(\theta_1,\ldots,\theta_n)), \frac{\partial}{\partial x_k}(\phi(\theta_1,\ldots,\theta_n)) \right\rangle \\
&= \left\langle d\phi_{(\theta_1,\ldots,\theta_n)}(0,\ldots,1,\ldots,0), d\phi_{(\theta_1,\ldots,\theta_n)}(0,\ldots,1,\ldots,0) \right\rangle \\
&= \big\langle (0,\ldots,i\exp(i\theta_j),\ldots,0), (0,\ldots,i\exp(i\theta_k),\ldots,0) \big\rangle \\
&= \delta_{jk} \cdot \Re(i\exp(i\theta_j) \cdot \overline{i\exp(i\theta_k)}) = \delta_{jk}
\end{aligned}$$

Entonces, $\forall i,j,m \in \{1,\ldots,n\}$

$$\Gamma_{ij}^m = \frac{1}{2}\sum_k \left(\frac{\partial}{\partial x_i} g_{jk} + \frac{\partial}{\partial x_j} g_{kl} - \frac{\partial}{\partial x_k} g_{ij} \right) g^{km} = \frac{1}{2}\sum_k (0) g^{km} = 0$$

Donde la segunda igualdad se cumple porque $\forall i,j \in \{1,\ldots,n\}$ g_{ij} es constante y en general, si $f \in C^\infty(M)$ es constante entonces, para todo campo vectorial, $X \in \Gamma(TM)$ tenemos $Xf = 0$.
En resumen, $\gamma : I \to \mathbb{T}^n$ es geodesica en $(\phi, U) \iff$

$$\phi^{-1} \circ \gamma(t) = (x_1(t),\ldots,x_n(t)) \text{ es tal que } \forall k \; \frac{d^2 x_k}{dt^2} = 0$$

$\square$

Lema para el ejercicio 5. Si $\alpha = \sum_{i=1}^n \alpha_i dx_i$ es una 1-forma diferencial cerrada sobre una bola centrada en 0 de $\mathbb{R}^n$ entonces,

1. $\frac{\partial}{\partial x_i}\alpha_j(tx_1,\ldots,tx_n) = \frac{\partial \alpha_j}{\partial x_i}(tx_1,\ldots,tx_n)t$
2. $\forall i,j \in \{1,\ldots,n\}$ $\frac{\partial \alpha_i}{\partial x_j} = \frac{\partial \alpha_j}{\partial x_i}$
3. $\sum_{j=1}^n x_j \frac{\partial \alpha_i}{\partial x_j}(tx_1,\ldots,tx_n) = \frac{d}{dt}\alpha_i(tx_1,\ldots,tx_n)$

Demostracion. Antes de empezar, recordemos que si $\gamma : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$ es una curva suave y $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ es diferenciable entonces,

$$(f \circ \gamma)'(t) = \sum_{k=1}^n \frac{\partial f}{\partial x_k}(\gamma(t)) \cdot \gamma_k'(t) \tag{$*$}$$

1. Es una consecuencia inmediata de la regla de la cadena. Para ver esto, sea $i \in \{1,\ldots,n\}$ fija y sean $t, x_1, \ldots x_{i-1}, x_{i+1}, \ldots, x_n \in \mathbb{R}$ fijos. Mas aun, definamos $\gamma : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$ tal que

$$\gamma(s) = (tx_1,\ldots,tx_{i-1},ts,tx_{i+1},\ldots,tx_n)$$

Entonces,

$$\begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial x_i}\alpha_j(tx_1,\ldots,tx_n) &= \frac{d(\alpha_j\circ\gamma)}{ds}(x_i)\\
&= \sum_{k=1}^{n}\frac{\partial \alpha_j}{\partial x_k}(\gamma(x_i))\cdot\gamma_k'(x_i)\\
&= \sum_{k=1}^{n}\frac{\partial \alpha_j}{\partial x_k}(tx_1,\ldots,tx_n)\cdot\delta_{ij}t\\
&= \frac{\partial \alpha_j}{\partial x_i}(tx_1,\ldots,tx_n)\cdot t
\end{aligned}$$

2. El resultado se sigue de la independencia lineal de $\{dx_j\wedge dx_i\}_{i,j}$ y de la siguente cadena de igualdades,

$$\begin{aligned}
0 &= d\alpha\\
&= \sum_{i=1}^{n} d\alpha_i\wedge dx_i\\
&= \sum_{i=1}^{n}\left(\sum_{j=1}^{n}\frac{\partial\alpha_i}{\partial x_j}dx_j\right)\wedge dx_i\\
&= \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\left(\frac{\partial\alpha_i}{\partial x_j}dx_j\wedge dx_i\right)\\
&= \sum_{1\le j<i\le n}\frac{\partial\alpha_i}{\partial x_j}dx_j\wedge dx_i+\sum_{1\le i<j\le n}\frac{\partial\alpha_i}{\partial x_j}dx_j\wedge dx_i\\
&= \sum_{1\le j<i\le n}\frac{\partial\alpha_i}{\partial x_j}dx_j\wedge dx_i+\sum_{1\le i<j\le n}-\frac{\partial\alpha_i}{\partial x_j}dx_i\wedge dx_j\\
&= \sum_{1\le j<i\le n}\frac{\partial\alpha_i}{\partial x_j}dx_j\wedge dx_i+\sum_{1\le j<i\le n}-\frac{\partial\alpha_j}{\partial x_i}dx_j\wedge dx_i\\
&= \sum_{1\le j<i\le n}\left(\frac{\partial\alpha_i}{\partial x_j}-\frac{\partial\alpha_j}{\partial x_i}\right)dx_j\wedge dx_i
\end{aligned}$$

3. Si $x_1,\ldots,x_n\in\mathbb{R}$ son fijos, y definimos $\beta:\mathbb{R}\to\mathbb{R}^n$ tal que

$$\beta(t) = (tx_1,\ldots,tx_n)$$

entonces, el resultado deseado es consecuencia directa de $(*)$ calculando $(\alpha_i\circ\beta)'(x_i) = \frac{d}{dt}\alpha_i(tx_1,\ldots,tx_n)$. $\square$

5. Calculando directamente,

$$\begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial x_i} f(x_1, \ldots, x_n) &= \frac{\partial}{\partial x_i} \sum_{j=0}^{n} \int_0^1 \alpha_j(tx_1, \ldots, tx_n) x_j dt \\
&= \sum_{j=0}^{n} \int_0^1 \frac{\partial}{\partial x_i} \alpha_j(tx_1, \ldots, tx_n) x_j dt \\
&= \sum_{j=0}^{n} \int_0^1 x_j \frac{\partial}{\partial x_i} \alpha_j(tx_1, \ldots, tx_n) + \alpha_j(tx_1, \ldots, tx_n) \delta_{ij} dt \\
&= \int_0^1 \sum_{j=0}^{n} x_j \frac{\partial}{\partial x_i} \alpha_j(tx_1, \ldots, tx_n) dt + \int_0^1 \sum_{j=0}^{n} \alpha_j(tx_1, \ldots, tx_n) \delta_{ij} dt \\
&= \int_0^1 \sum_{j=0}^{n} x_j \frac{\partial \alpha_j}{\partial x_i}(tx_1, \ldots, tx_n) t dt + \int_0^1 \sum_{j=0}^{n} \alpha_j(tx_1, \ldots, tx_n) \delta_{ij} dt \\
&= \int_0^1 \sum_{j=0}^{n} x_j \frac{\partial \alpha_i}{\partial x_j}(tx_1, \ldots, tx_n) t dt + \int_0^1 \sum_{j=0}^{n} \alpha_j(tx_1, \ldots, tx_n) \delta_{ij} dt \\
&= \int_0^1 t \frac{d}{dt} \alpha_i(tx_1, \ldots, tx_n) dt + \int_0^1 \alpha_i(tx_1, \ldots, tx_n) dt \\
&= \int_0^1 t \frac{d}{dt} \alpha_i(tx_1, \ldots, tx_n) + \alpha_i(tx_1, \ldots, tx_n) dt \\
&= \int_0^1 \frac{d}{dt} t \alpha_i(tx_1, \ldots, tx_n) dt \\
&= (t \alpha_i(tx_1, \ldots, tx_n))\big|_0^1 \\
&= \alpha_i(x_1, \ldots, x_n)
\end{aligned}$$

Donde la quinta, sexta, y séptima igualdades se cumplen por los lemas 1, 2, y 3 respectivamente.

$\square$ Diego Leipen Lara
418002038