Tarea 4

Diego Leipen Lara

Metodos Variacionales

Considera el problema

$$\begin{cases} -\Delta u + u = f(u) & \text{en } \Omega \\ u = 0 & \text{en } \partial\Omega \end{cases} \tag{1}$$

donde Ω es un dominio acotado en $\mathbb{R}^N$, $N \geq 3$, y f tiene las siguientes propiedades:

(f_1) $f \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R})$ y existen $p \in (2, 2^*)$ tales que

$$|f(s)| \leq a_0 s^{p-1} \quad \text{ y } \quad |f'(s)| \leq a_0 s^{p-2} \quad \forall s \in \mathbb{R}.$$

(f_2) $f(s)s < f'(s)s^2$ para todo $s \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$.

(f_3) $\lim_{|s|\to\infty} \frac{f(s)}{s} = \infty$.

Usando la tarea 3 es sencillo comprobar que el funcional $J : H_0^1(\Omega) \to \mathbb{R}$ dado por

$$J(u) := \frac{1}{2}||u||_1^2 - \int_\Omega F(u), \quad \text{ donde } F(s) := \int_0^s f(t)dt$$

esta bien definido, es de clase $\mathcal{C}^1$ y su derivada es

$$J'(u)v = \langle u, v\rangle_1 - \int_\Omega f(u)v. \tag{2}$$

Las soluciones débiles del problema (1) son, por definición, los puntos críticos de J. Las soluciones débiles no triviales pertenecen al conjunto

$$\begin{aligned} \mathcal{N} &:= \{u \in H_0^1(\Omega) \mid u \neq 0, \;\; J'(u)u = 0\} \\ &= \left\{u \in H_0^1(\Omega) \mid u \neq 0, \;\; ||u||_1^2 - \int_\Omega f(u)u = 0\right\} \end{aligned}$$

1. La función $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dada por

$$g(s) := \frac{f(s)}{s} \text{ si } s \neq 0; \quad g(0) = 0,$$

es continua, de clase $\mathcal{C}^1$ en $\mathbb{R}\setminus\{0\}$, estrictamente creciente en $(0, \infty)$, y estrictamente decreciente en $(-\infty, 0)$.

Demostración. Como $f \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R})$, g es continua en $\mathbb{R} \setminus \{0\}$. Además, para todo $s \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$,

$$|g(s)| = \frac{|f(s)|}{|s|} \overset{(f_1)}{\leq} \frac{a_0 s^{p-1}}{|s|} \leq \frac{|a_0 s^{p-1}|}{|s|} = |a_0||s^{p-2}| \xrightarrow{s\to 0} 0$$

Entonces $\lim_{s\to 0} g(s) = 0 = g(0)$ y por lo tanto, g es continua en $\mathbb{R}$. Como $f \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R})$, entonces $g \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}\setminus\{0\})$. Calculando directamente,

$$g'(s) = \frac{f'(s)}{s} - \frac{f(s)}{s^2} \text{ para todo } s \in \mathbb{R} \setminus \{0\}.$$

Por otro lado, sea $s < 0$. Entonces $\frac{1}{s^3} < 0$ y por lo tanto, por (f_2),

$$\frac{f(s)}{s^2} = f(s)s\frac{1}{s^3} > f'(s)s^2\frac{1}{s^3} = \frac{f'(s)}{s} \text{ para todo } s < 0.$$

Por lo tanto, $g'(s) < 0$ para todo $s \in (-\infty, 0)$. En particular, g es estrictamente decreciente en $(-\infty, 0)$. Análogamente, g es estrictamente creciente en $(0, \infty)$. □

Observación 1. g es no negativa.

2. Existe $d_0 > 0$ tal que $||u||_1 \geq d_0$ para todo $u \in \mathcal{N}$. En consecuencia, $\mathcal{N}$ es cerrado en $H_0^1(\Omega)$.

Demostración. Como $p \in (2, 2^*)$, del teorema de encaje de Sobolev, se sigue que existe $C > 0$ tal que

$$|u|_p \leq C||u||_1 \text{ para todo } u \in H_0^1(\Omega).$$

Entonces para todo $u \in \mathcal{N}$

$$\begin{aligned} ||u||_1^2 &= \int_\Omega f(u)u && \text{(pues } u \in \mathcal{N}) \\ &\leq \int_\Omega |a_0||u|^p && \text{(cf. } (f_1)) \\ &= |a_0||u|_p^p \\ &\leq |a_0|C^p||u||_1^p \end{aligned}$$

Por lo tanto, para todo $u \in \mathcal{N}$

$$d_0 := \left(\frac{1}{|a_0|C^p}\right)^{1/(p-2)} \leq ||u||_1.$$

□

Usaremos el siguiente lema para el inciso 3.

Lema 1. Sea $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ abierto, $u \in L^2(\Omega)$ fijo, y $(A_t)_{t>0}$ una familia de subconjuntos medibles de $\mathbb{R}^n$. Si $(A_t)_{t>0}$ es creciente y

$$\bigcup_{t>0} A_t = \Omega \setminus u^{-1}(0),$$

entonces

$$\lim_{t\to\infty} \int_{A_t} u^2 = \int_\Omega u^2.$$

Demostración. Como $(A_t)_{t>0}$ es creciente, y su unión es $\Omega \setminus u^{-1}(0)$, entonces

$$(u^2 \cdot \chi_{A_t})(x) \xrightarrow{t\to\infty} u^2(x) \text{ para todo } x \in \Omega$$

donde $\chi_{A_t} : \Omega \to \{0, 1\}$ es la función característica de A_t. Además, $(u^2 \cdot \chi_{A_t})_{t>0}$ esta acotada por $u^2 \in L^1(\Omega)$. Por lo tanto (por el teorema de convergencia dominada),

$$\lim_{t\to\infty} \int_{A_t} u^2 = \lim_{t\to\infty} \int_\Omega u^2 \cdot \chi_{A_t} = \lim_{t\to\infty} \int_\Omega u^2.$$

□

3. Para cada $u \in H_0^1(\Omega) \setminus \{0\}$ existe $t \in (0, \infty)$ tal que $tu \in \mathcal{N}$. En consecuencia $\mathcal{N} \neq \emptyset$.

Demostración Siguiendo la sugerencia, para cada $u \in H_0^1(\Omega) \setminus \{0\}$ definimos

$$\begin{aligned} \Psi_u(t) &\coloneqq J'(tu)[tu] \\ &= ||u||_1^2 t^2 - \int_\Omega f(tu)tu \\ &= t^2 \left(||u||_1^2 - \int_\Omega g(tu)u^2 \right). \end{aligned}$$

Observa que

$$\Psi_u(t) = 0 \iff J'(tu)[tu] = 0 \iff tu \in \mathcal{N}.$$

Por lo tanto (por el teorema del valor intermedio), basta probar que existen $0 < t_1 < t_2 < \infty$ tales que $\Psi_u(t_1) > 0$ y $\Psi_u(t_2) < 0$. Sea $M > 0$ fijo y arbitrario y sea $t_1 > 0$ tal que

$$t_1^{p-2} < \frac{M}{a_0 |u|_p^p}.$$

Entonces

$$\begin{aligned} \int_\Omega g(t_1 u)u^2 &= \int_\Omega \frac{f(t_1 u)}{t_1} u \\ &\leq \int_\Omega \frac{|a_0||t_1 u|^{p-1}}{|t_1|} |u| && \text{(cf. } (f_1)) \\ &= t_1^{p-2} a_0 \int_\Omega |u|^p && (a_0, t_1 > 0) \\ &< M \end{aligned}$$

Dejando $M = ||u||_1^2$ obtenemos lo deseado. Por otro lado, sea $\epsilon > 0$ fijo tal que $\epsilon < |u|_2^2$ y sea $M > 0$ fijo y arbitrario. Como $\lim_{|s| \to \infty} g(s) \overset{(f_3)}{=} \infty$, existe $s_M > 0$ tal que

$$g(s) \geq \frac{M}{|u|_2^2 - \epsilon} \text{ si } |s| \geq s_M.$$

Ahora bien, para todo $t > 0$ definimos

$$A_t \coloneqq \{x \in \Omega \mid t|u(x)| \geq s_M\}.$$

Entonces

$$g(tu(x)) \geq \frac{M}{|u|_2^2 - \epsilon} \text{ para todo } x \in A_t. \tag{3}$$

Además, A_t es medible[1] para todo $t > 0$ y

$$\bigcup_{t > 0} A_t = \Omega \setminus u^{-1}(0).$$

Entonces (por el lema 1)

$$\lim_{n \to \infty} \int_{A_t} u^2 = \int_\Omega u^2.$$

[1] Pues $A_t = |u|^{-1}[\frac{s_M}{t}, \infty)$ y u es medible.

En particular, para $\epsilon > 0$ existe $t_2 > 0$ tal que

$$|u|_2^2 - \int_{A_{t_2}} u^2 = \left| \int_\Omega u^2 - \int_{A_{t_2}} u^2 \right| < \epsilon. \tag{4}$$

donde la igualdad se cumple porque $A_{t_2} \subset \Omega$ y u^2 es no negativa. Por lo tanto,

$$\begin{aligned}
\int_\Omega g(t_2 u)u^2 &\geq \int_{A_{t_2}} g(t_2 u)u^2 && (g \text{ y } u^2 \text{ son no negativas}) \\
&\geq \int_{A_{t_2}} \frac{M}{|u|_2^2 - \epsilon} u^2 && (\text{cf. } (3)) \\
&= \frac{M}{|u|_2^2 - \epsilon} \int_{A_{t_2}} u^2 \\
&> \frac{M}{|u|_2^2 - \epsilon} (|u|_2^2 - \epsilon) && (\text{cf. } (4)) \\
&= M.
\end{aligned}$$

Dejando $M = ||u||_1^2$ obtenemos lo deseado. □

4. $\mathcal{N}$ es una subvariedad de Hilbert de clase $\mathcal{C}^1$ de $H_0^1(\Omega)$.

Demostración. Sea

$$\begin{aligned}
\Theta : H_0^1(\Omega) \setminus \{0\} &\to \mathbb{R} \\
u &\mapsto ||u||_1^2 - \int_\Omega f(u)u.
\end{aligned}$$

Entonces $\mathcal{N} = \Theta^{-1}(0)$. Para ver que Θ es de clase $\mathcal{C}^1$, sea $G : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dada por $G(t) = f(t)t$. Claramente, $G \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R})$ y $G(0) = 0$. Además,

$$|G'(t)| = |f'(t)t + f(t)| \leq |f'(t)||t| + |f(t)| \overset{(f_2)}{\leq} a_0|t|^{p-2}|t| + a_0|t|^{p-1} = 2a_0|t|^{p-1}.$$

Por lo tanto, G satisface las hipótesis de la tarea 3. Entonces

$$\begin{aligned}
\Phi : L^p(\Omega) &\to \mathbb{R} \\
u &\mapsto \int_\Omega G(u) = \int_\Omega f(u)u.
\end{aligned}$$

esta bien definida, es de clase $\mathcal{C}^1$ y su derivada esta dada por

$$\Phi'(u)v = \int_\Omega G'(u)v = \int_\Omega (f'(u)u + f(u))v = \int_\Omega f'(u)uv + f(u)v.$$

Por lo tanto,

$$\Theta'(u)v = 2\langle u, v\rangle_1 - \int_\Omega f'(u)uv + f(u)v.$$

Por otro lado, notemos que

$$2\int_\Omega f(u)u = 2\int_{\Omega \setminus u^{-1}(0)} f(u)u \overset{(f_2)}{<} \int_{\Omega \setminus u^{-1}(0)} f'(u)u^2 + f(u)u = \int_\Omega f'(u)u^2 + f(u)u \tag{5}$$

donde la primera igualdad se cumple porque $f(u(x))u(x) \neq 0$ implica $x \notin u^{-1}(0)$ y la segunda porque $f'(u(x))u^2(x) \neq 0$ implica $x \notin u^{-1}(0)$.

Entonces para todo $u \in \mathcal{N} = \Theta^{-1}(0)$,

$$\begin{aligned}
\langle \nabla\Theta(u), u\rangle &= \Theta'(u)u \\
&= 2\langle u, u\rangle_1 - \int_\Omega f'(u)u^2 + f(u)u \\
&< 2||u||_1^2 - 2\int_\Omega f(u)u && \text{(cf. (5))} \\
&= 0. && \text{(pues } u \in \mathcal{N})
\end{aligned}$$

En particular,

$$\nabla\Theta(u) \neq 0 \text{ para todo } u \in \mathcal{N} = \Theta^{-1}(0). \tag{6}$$

Es decir, 0 es un valor regular de Θ. Por lo tanto, $\mathcal{N}$ es una subvariedad de clase $\mathcal{C}^1$ de $H_0^1(\Omega)$. Más aun, como $\mathcal{N}$ es cerrado (cf. inciso 2), $\mathcal{N}$ es una subvariedad de Hilbert de $H_0^1(\Omega)$. □

Usaremos el siguiente lema para el inciso 5.

Lema 2. Sea E un espacio vectorial. Si $\ell : E \to \mathbb{R}$ es lineal y $x \notin \ker \ell$, entonces

$$E = \ker \ell \oplus \{tx \mid t \in \mathbb{R}\}.$$

Demostración. Sea $y \in E$ y $t_y :=$[2] $\frac{\ell y}{\ell x}$. Entonces

$$\ell(y - t_y x) = \ell y - t_y \ell x = \ell y - \frac{\ell y}{\ell x}\ell x = 0.$$

Es decir, $y - t_y x \in \ker \ell$. Usando

$$y = (y - t_y x) + t_y x$$

obtenemos lo deseado. □

5. Sea $u \in \mathcal{N}$. Entonces u es un punto critico de J si y solo si u es un punto critico de $J|_{\mathcal{N}}$.

Demostración. Sea $u \in \mathcal{N}$. De la identidad (6) se sigue que $u \notin \ker \Theta'(u) = \mathcal{T}_u\mathcal{N}$. Entonces, por el lema 2,

$$H_0^1(\Omega) = \mathcal{T}_u\mathcal{N} \oplus \{tu \mid u \in \mathbb{R}\} \tag{7}$$

donde la suma directa es en el sentido de espacios vectoriales. Si u es un punto critico de $J|_{\mathcal{N}}$, entonces

$$J'(u)v = 0 \text{ para todo } v \in \mathcal{T}_u\mathcal{N}. \tag{8}$$

Además, para todo $t \in \mathbb{R}$,

$$\begin{aligned}
J'(u)[tu] &= tJ'(u)u \\
&= t\left(||u||_1^2 - \int_\Omega f(u)u\right) && \text{(cf. (2))} \\
&= 0. && \text{(pues } u \in \mathcal{N})
\end{aligned}$$

Usando esto, (7), y (8) obtenemos

$$J'(u)v = 0 \text{ para todo } v \in H_0^1(\Omega),$$

es decir, u es un punto critico de J. □

[2] Bien definido pues $x \notin \ker \ell$.

6. Si $u \in \mathcal{N}$, entonces $t \overset{J_u}{\longmapsto} J(tu)$ es estrictamente creciente en $[0,1]$ y estrictamente decreciente en $[1,\infty)$.

Demostración. Sea $u \in \mathcal{N}$. Entonces

$$\begin{aligned} J_u'(t) &= J'(tu)[u] && \text{(regla de la cadena)} \\ &= \langle tu, u\rangle_1 - \int_\Omega f(tu)u && \text{(cf. (2))} \\ &= t||u||_1^2 - \int_\Omega f(tu)u \\ &= t\int_\Omega f(u)u - \int_\Omega f(tu)u. && \text{(pues } u \in \mathcal{N}\text{)} \end{aligned}$$

Sea $t \in [0,1]$ y $x \in \Omega$. Entonces

$$\begin{cases} u(x) \geq 0 \quad \Longrightarrow \quad tu(x) \leq u(x), \\ u(x) \leq 0 \quad \Longrightarrow \quad tu(x) \geq u(x). \end{cases} \tag{9}$$

Como $g(0) = 0$, g es estrictamente creciente en $(0,\infty)$, y estrictamente decreciente en $(-\infty,0)$, (9) implica

$$g(tu(x)) < g(u(x)) \text{ para todo } x \in \Omega. \tag{10}$$

Entonces

$$\begin{aligned} \frac{1}{t}\int_\Omega f(tu)u &= \int_\Omega \frac{f(tu)}{t}u \\ &= \int_\Omega g(tu)u^2 \\ &< \int_\Omega g(u)u^2 && \text{(cf. (10))} \\ &= \int_\Omega f(u)u. \end{aligned}$$

Entonces

$$0 < t\int_\Omega f(u)u - \int_\Omega f(tu)u = J_u'(t).$$

El caso $t \in [1,\infty)$ es análogo pero con las desigualdades al revés. $\square$