Lema 1. Si $f : M \to N$ y $g : M \to N'$ son funciones diferenciables y $f \times g : M \to N \times N'$ es tal que $x \mapsto \big(f(x), g(x)\big)$, entonces

$$d\,(f \times g)_x = df_x \times dg_x$$

Demostración. Sea $x \in M$ y $\alpha : I \to M$ una curva suave tal que $\alpha(0) = x$. Entonces, $(f \times g) \circ \alpha = \big((f \circ \alpha)\,, (g \circ \alpha)\big)$ y por lo tanto,

$$\big((f \times g) \circ \alpha\big)'\,(0) = \Big((f \circ \alpha)'\,(0), (g \circ \alpha)'\,(0)\Big)$$

De donde,

$$\begin{aligned} d\,(f \times g)_x\,\big([\alpha]\big) &= \big((f \times g) \circ \alpha\big)'\,(0) \\ &= \Big((f \circ \alpha)'\,(0), (g \circ \alpha)'\,(0)\Big) \\ &= \Big(df_x\,\big([\alpha]\big)\,, dg_x\,\big([\alpha]\big)\Big) \end{aligned}$$

Es decir, $d\,(f \times g)_x = df_x \times dg_x$. □

1. Sea M una variedad diferenciable y $f : M \to \mathbb{R}$ una función de clase C^∞. Considere la función $F : M \to M \times \mathbb{R}$ dada por $F(x) = (x, f(x))$. Demuestre que F es un encaje.

Demostración. Usando la notación del lema 1, es claro que $F = \mathrm{id} \times f$. Por lo tanto, para toda $x \in M$, $dF_x = \mathrm{id}_M \times df_x$. Para ver que es inyectiva, supongamos que $u, v \in T_xM$ son tales que $dF_x(u) = dF_x(v)$. Entonces,

$$\big(u, df_x(u)\big) = \big(v, df_x(v)\big)$$

En particular, $u = v$. Por lo tanto F es inmersión.
Veamos que es homeomorfismo sobre su imagen. Primero notemos que $F(M) = M \times f(M)$. Sea $\pi : M \times f(M) \to M$ la proyección canónica $(x, t) \mapsto x$. Claramente, π es un homeomorfismo y $\pi = F^{-1}$. En efecto,

$$\begin{aligned} F \circ \pi(x, f(x)) &= F(x) = (x, f(x)) \\ \pi \circ F(x) &= \pi(x, f(x)) = x \end{aligned}$$

Por lo tanto, F es homeomorfismo en su imagen. □

3. Sea M una variedad diferenciable dotada de una métrica riemanniana g y $c > 0$ una constante. Sea $\tilde{g}$ la métrica riemanniana en f definida por $\tilde{g} \coloneqq c \cdot g$. Pruebe que (M, g) y $(M, \tilde{g})$ tienen la misma conexión de Levi-Civita y el mismo tensor de curvatura, pero que las curvaturas secciónales K en (M, g) y $\tilde{K}$ en $(M, \tilde{g})$ están relacionadas por

$$\tilde{K}(x, y) = c^{-1} K(x, y) \tag{1}$$

para cada p en M y $x, y \in T_pM$ linealmente independientes.

Demostración. Para ver que tienen el mismo tensor de curvatura, basta demostrar que tienen la misma conexión de Levi-Civita; y para ver que tienen la misma conexión de Levi-Civita, basta demostrar que tienen los mismos símbolos de Christoffel. Supongamos que Γ_{ij}^k y $\tilde{\Gamma}_{ij}^k$ son los símbolos de Christoffel asociados a (M, g) y $(M, \tilde{g})$ respectivamente. Entonces,

$$\begin{aligned}
\tilde{\Gamma}_{ij}^k &= \frac{1}{2}\sum_l \left\{\partial_i \tilde{g}_{jl} + \partial_j \tilde{g}_{li} - \partial_l \tilde{g}_{ij}\right\} \tilde{g}^{lk} \\
&= \frac{1}{2}\sum_l \left\{c \cdot \partial_i g_{jl} + c \cdot \partial_i g_{li} - c \cdot \partial_l g_{ij}\right\} \frac{1}{c} g^{lk} \\
&= \frac{1}{2}\sum_l \left\{\partial_i g_{jl} + \partial_i g_{li} - \partial_l g_{ij}\right\} g^{lk} \\
&= \Gamma_{ij}^k
\end{aligned}$$

Ahora, veamos que (1) se satisface. Para esto, sea $p \in M$ y $x, y \in T_pM$ linealmente independientes. Entonces, por definición

$$\begin{aligned}
\tilde{K}(x, y) &= \frac{\tilde{g}_p\left(\tilde{R}_p(x, y, x), y\right)}{\left(\tilde{g}_p(x, x)\tilde{g}_p(y, y) - \tilde{g}_p(x, y)\right)^2} \\
&= \frac{c \cdot g_p\left(R_p(x, y, x), y\right)}{\left(c \cdot g_p(x, x)\right)\left(c \cdot g_p(y, y)\right) - \left(c \cdot g_p(x, y)\right)^2} \\
&= \frac{c}{c^2} \cdot \frac{g_p\left(R_p(x, y, x), y\right)}{g_p(x, x) \cdot g_p(y, y) - g_p(x, y)^2} \\
&= c^{-1} K(x, y)
\end{aligned}$$

□

4. Sea M una variedad Riemanniana. Muestre que dado un punto $p \in M$, existe una carta (φ, U) en p tal que todos los símbolos de Christoffel se anulan en p. Es decir, $\Gamma_{ij}^k(p) = 0$ para toda i, j, k.

Demostración. Este resultado se demostró en el teorema 1 de las notas 4.9 del semestre pasado, pero lo escribimos por completud.
Veamos que la carta exponencial cumple lo deseado. Recordemos que para $\epsilon > 0$ suficientemente pequeño, la aplicación

$$\begin{aligned}
\exp_p : B(0_p, \epsilon) \subset T_pM &\to M \\
v &\mapsto \gamma_v(1)
\end{aligned}$$

es un difeomorfismo en su imagen, digamos V (aquí, γ_v es la geodésica tal que $\gamma(0) = p$ y $\gamma'(0) = v$). En particular, $\exp_p$ es una carta local en p. Fijemos una base ortonormal $(e_1, \ldots, e_n)$ de T_pM. Usaremos las siguientes observaciones.

Observación 1. Si $\lambda \in \mathbb{R}$, $p \in M$, $v \in T_pM$, y $v' = \lambda v$, entonces $\gamma_{v'}(t) = \gamma_v(\lambda t)$: Claramente, $\gamma_v(\lambda t)$ es geodésica y por una cuenta directa, $\gamma'_{v'}(0) = \lambda\gamma'_v(t) = \lambda v$.
Fin de observación 1.

Observación 2. Para todo $v \in B(0_p, \epsilon)$ y todo t en el intervalo de definición de γ_v, $\exp_p(tv) = \gamma_v(t)$: Es consecuencia inmediata del lema anterior.
Fin de observación 2.

Observación 3. Para todo $p \in M$, $d\left(\exp_p\right)_{0_m} = \mathrm{id}_{TmM}$.
Por el lema anterior,

$$d\left(\exp_p\right)_{0_m}(v) = \underbrace{\frac{d}{dt}\Big|_{t=0}\left(\underbrace{\exp_m(tv)}_{\gamma_v(t)}\right)}_{v}$$

Fin de observación 3.

Ahora si, veamos que los símbolos de Christoffel de la carta $\exp_p$ se anulan en p. Tenemos por definición de la base $\frac{\partial}{\partial x_i}$, que para toda $v \in T_pM$

$$\begin{aligned} g\left(\frac{\partial}{\partial x_i}, \frac{\partial}{\partial x_j}\right)(\exp_p(v)) &= g_{\exp_p(v)}\left(d\left(\exp_p\right)_v(e_i), d\left(\exp_p\right)_v(e_j)\right) \\ &= g_p\left(e_i, e_j\right) \qquad \text{(por la observación 3)} \\ &= \delta_{ij} \end{aligned}$$

Por otro lado, notemos que si $v = (v_1, \ldots, v_n)$, entonces

$$\left(\exp_p^{-1} \circ \gamma_v\right)(t) = \exp_p^{-1}\left(\gamma_v(t)\right) = \exp_p^{-1}\left(\gamma_{t\cdot v}(1)\right) = t \cdot v = t \cdot (v_1, \ldots, v_n)$$

Si denotamos $\exp_p^{-1} \circ \gamma_v = (x_1, \ldots, x_n)$ entonces, para toda i, $\dot{x}_i = v_i$ y $\ddot{x}_i = 0$
Como γ_v es geodésica, entonces para toda t en el intervalo de definición de γ_v, se satisface la ecuación de las geodésicas y por lo tanto para toda k,

$$0 = \ddot{x}_k + \sum_{i,j} \Gamma_{ij}^k\left(\gamma_v(t)\right)\dot{x}_i\dot{x}_j = 0 + \sum_{i,j} \Gamma_{ij}^k\left(\gamma_v(t)\right)v_iv_j$$

En particular, para $t = 0$

$$\sum_{i,j} \Gamma_{ij}^k(p)v_iv_j = 0$$

Como esto es para toda $v \in B\left(0_p, \epsilon\right)$, (escogiendo las v's adecuadas) lo anterior implica que $\Gamma_{ij}^k(p) = 0$ para toda i, j, k. $\square$

5. Sea $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^+$ una función de clase C^∞

$$S := \Big\{ \big(x, f(x)\cos\theta, f(x)\operatorname{sen}\theta\big) \mid x, \theta \in \mathbb{R} \Big\}$$

una superficie de revolución.

1. Determine en forma explicita las ecuaciones de las geodésicas de S.
2. Calcule la curvatura seccional de S en un punto arbitrario $p \in S$.

Demostración. Empecemos por calcular la métrica inducida por $\mathbb{R}^3$ en S. Para esto, sea $\varphi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ tal que

$$(x, \theta) \mapsto \big(x, f(x)\cos\theta, f(x)\operatorname{sen}\theta\big)$$

Claramente, φ es un difeomorfismo local en S y por lo tanto, para todo $p \in U$, existe $U_p \subset M$ vecindad de p tal que

$$\varphi^{-1}|_{U_p} : U_p \to \varphi^{-1}(U_p)$$

es carta de S en p. Además, la base inducida en $T_{(x,\theta)}S$ por esta carta, esta dada por

$$\begin{aligned}
\partial_\theta &= \varphi_\theta = \big(0, -f(x)\sin\theta, f(x)\cos\theta\big)\\
\partial_x &= \varphi_x = \big(1, f'(x)\cos\theta, f'(x)\sin\theta\big)
\end{aligned}$$

Entonces,

$$\begin{aligned}
g_{\theta\theta} &= \langle \partial_\theta, \partial_\theta \rangle_{\mathbb{R}^3} = \big(-f(x)\sin\theta\big)^2 + \big(f(x)\cos\theta\big)^2 = f(x)^2\\
g_{x\theta} &= \langle \partial_x, \partial_\theta \rangle = 0 - \big(f(x)\sin\theta\big)\big(f'(x)\cos\theta\big) + \big(f(x)\cos\theta\big)\big(f'(x)\sin\theta\big) = 0\\
g_{xx} &= \langle \partial_x, \partial_x \rangle_{\mathbb{R}^3} = 1 + \big(f'(x)\cos\theta\big)^2 + \big(f'(x)\sin\theta\big)^2 = 1 + f'(x)^2
\end{aligned}$$

Ahora si, supongamos que $\gamma : I \to S$ es una curva y $t \in I$. Denotemos

$$\Big(\varphi^{-1}|_{U_p}\Big) \circ \gamma(t) = \big(x(t), \theta(t)\big)$$

De esta manera, γ es geodésica en t si y solo si se satisfacen las siguientes ecuaciones

$$\begin{aligned}
&\ddot{\theta} + \Gamma^\theta_{\theta\theta}\dot{\theta}\dot{\theta} + \Gamma^\theta_{xx}\dot{x}\dot{x} + 2\cdot\Gamma^\theta_{\theta x}\dot{\theta}\dot{x} = 0\\
&\ddot{x} + \Gamma^x_{\theta\theta}\dot{\theta}\dot{\theta} + \Gamma^x_{xx}\dot{x}\dot{x} + 2\cdot\Gamma^x_{x\theta}\dot{\theta}\dot{x} = 0 \qquad (2)
\end{aligned}$$

Por eso, calculamos los símbolos de Christoffel. Usando la siguiente formula.

$$\Gamma^m_{ij} = \frac{1}{2}\sum_k \left\{ \frac{\partial}{\partial x_i} g_{jk} + \frac{\partial}{\partial x_j} g_{ki} - \frac{\partial}{\partial x_k} g_{ij} \right\} g^{km}$$

$$
\begin{aligned}
\Gamma^{\theta}_{\theta\theta} &= \frac{1}{2}\left\{\left(\partial_\theta g_{\theta\theta} + \partial_\theta g_{\theta\theta} - \partial_\theta g_{\theta\theta}\right) g^{\theta\theta} + \left(\partial_\theta g_{\theta x} + \partial_\theta g_{x\theta} - \partial_x g_{\theta\theta}\right) g^{x\theta}\right\} \\
&= \frac{1}{2}\left\{\left(\partial_\theta \left(f(x)^2\right) g^{\theta\theta}\right) + 0\right\} = 0 \\
\Gamma^{x}_{\theta\theta} &= \frac{1}{2}\left\{\left(\partial_\theta g_{\theta x} + \partial_\theta g_{x\theta} - \partial_x g_{\theta\theta}\right) g^{xx} + \left(\partial_\theta g_{\theta\theta} + \partial_\theta g_{\theta\theta} - \partial_\theta g_{\theta\theta}\right) g^{\theta x}\right\} \\
&= \frac{1}{2}\left\{\left(0 + 0 - \partial_x \left(f(x)^2\right)\right) \frac{1}{1+f'(x)^2} + 0\right\} = \frac{f(x)f'(x)}{1+f'(x)^2} \\
\Gamma^{\theta}_{\theta x} &= \frac{1}{2}\left\{\left(\partial_\theta g_{x\theta} + \partial_x g_{\theta\theta} - \partial_\theta g_{\theta x}\right) g^{\theta\theta} + \left(\partial_\theta g_{xx} + \partial_x g_{x\theta} - \partial_x g_{\theta x}\right) g^{x\theta}\right\} \\
&= \frac{1}{2}\left\{\left(0 + \partial_x \left(f(x)^2\right) - 0\right) \frac{1}{f(x)^2} + 0\right\} = \frac{f(x)f'(x)}{f(x)^2} = \frac{f'(x)}{f(x)} \\
\Gamma^{x}_{\theta x} &= \frac{1}{2}\left\{\left(\partial_\theta g_{xx} + \partial_x g_{x\theta} - \partial_\theta g_{\theta x}\right) g^{xx} + \left(\partial_\theta g_{xx} + \partial_x g_{\theta\theta} - \partial_\theta g_{\theta x}\right) g^{\theta x}\right\} \\
&= \frac{1}{2}\left\{\left(\partial_\theta \left(1+f'(x)^2\right) + 0 - 0\right) g^{xx} + 0\right\} = 0 \\
\Gamma^{\theta}_{xx} &= \frac{1}{2}\left\{\left(\partial_x g_{xx} + \partial_x g_{xx} - \partial_x g_{xx}\right) g^{x\theta} + \left(\partial_x g_{x\theta} + \partial_x g_{\theta x} - \partial_\theta g_{xx}\right) g^{\theta\theta}\right\} \\
&= \frac{1}{2}\left\{0 + \left(0 + 0 - \partial_\theta \left(1+f'(x)^2\right)\right)\right\} = 0 \\
\Gamma^{x}_{xx} &= \frac{1}{2}\left\{\left(\partial_x g_{xx} + \partial_x g_{xx} - \partial_x g_{xx}\right) g^{xx} + \left(\partial_x g_{x\theta} + \partial_x g_{\theta x} - \partial_\theta g_{xx}\right) g^{\theta x}\right\} \\
&= \frac{1}{2}\left\{\left(\partial_x \left(1+f'(x)^2\right)\right) \frac{1}{1+f'(x)^2} + 0\right\} = \frac{f'(x)f''(x)}{1+f'(x)^2}
\end{aligned}
$$

Sustituyendo en (2) obtenemos

$$
\begin{aligned}
\ddot{\theta} + 2 \cdot \frac{f'(x)}{f(x)} \dot{\theta}\dot{x} &= 0 \\
\ddot{x} + \left(\frac{f(x)f'(x)}{1+f'(x)^2}\right) \dot{\theta}\dot{\theta} + \left(\frac{f'(x)f''(x)}{1+f'(x)^2}\right) \dot{x}\dot{x} &= 0
\end{aligned}
$$

Ahora calculemos la curvatura seccional en T_pS para cualquier $p = (x, \theta)$. Por definición y las cuentas anteriores ya tenemos que

$$
\begin{aligned}
K(\partial_\theta, \partial_x) &= \frac{(\partial_\theta, \partial_x, \partial_\theta, \partial_x)}{\|\partial_\theta\|^2 \|\partial_x\|^2 - g_p(\partial_\theta, \partial_x)^2} \\
&= \frac{\langle R_p(\partial_\theta, \partial_x)\partial_\theta, \partial_x\rangle}{\left(f(x)^2\right)\left(1+f'(x)^2\right)^2 - 0}
\end{aligned} \tag{3}
$$

Como por definición,

$$
R_p\left(\partial_\theta, \partial_x\right)\partial_\theta = R^{x}_{\theta x\theta}\partial_x + R^{\theta}_{\theta x\theta}\partial_\theta
$$

y (en general) tenemos las expresiones locales

$$R^s_{ijk} = \sum_{\ell} \Gamma^{\ell}_{ik}\Gamma^s_{j\ell} - \sum_{\ell} \Gamma^{\ell}_{jk}\Gamma^s_{i\ell} + \frac{\partial}{\partial x_j}\Gamma^s_{ik} - \frac{\partial}{\partial x_i}\Gamma^s_{jk}.$$

Figura 1: Do Carmo p93

entonces, (en nuestro caso particular)

$$\begin{aligned}
R^{\theta}_{\theta x\theta} &= \partial_{\theta}\Gamma^{\theta}_{x\theta} - \partial_x\Gamma^{\theta}_{\theta\theta} + \left(\Gamma^{x}_{x\theta}\Gamma^{\theta}_{\theta x} - \Gamma^{x}_{\theta\theta}\Gamma^{\theta}_{xx}\right) + \left(\Gamma^{\theta}_{x\theta}\Gamma^{\theta}_{\theta\theta} - \Gamma^{\theta}_{\theta\theta}\Gamma^{\theta}_{x\theta}\right) \\
&= 0 - 0 + (0-0) + (0-0) \\
R^{x}_{\theta x\theta} &= \partial_{\theta}\Gamma^{x}_{x\theta} - \partial_x\Gamma^{x}_{\theta\theta} + (\Gamma^{x}_{x\theta}\Gamma^{x}_{\theta x} - \Gamma^{x}_{\theta\theta}\Gamma^{x}_{xx}) + \left(\Gamma^{\theta}_{x\theta}\Gamma^{x}_{\theta\theta} - \Gamma^{\theta}_{\theta\theta}\Gamma^{x}_{x\theta}\right) \\
&= 0 - \partial_x\left(\frac{f(x)f'(x)}{1+f'(x)^2}\right) + \left(0 - \left(\frac{f(x)f'(x)}{1+f'(x)^2}\right)\left(\frac{f(x)f''(x)}{1+f'(x)^2}\right)\right) + \left(\left(\frac{f'(x)}{f(x)}\right)\left(\frac{f(x)f'(x)}{1+f'(x)^2}\right) - 0\right) \\
&= -\left(\underbrace{\partial_x\left(f(x)f'(x)\right)}_{f'(x)^2+f(x)f''(x)}\left(\frac{1}{1+f'(x)^2}\right) + \left(f(x)f'(x)\right)\underbrace{\partial_x\left(\frac{1}{1+f'(x)^2}\right)}_{-\frac{1}{(1+f'(x)^2)^2}}\right) \\
&\quad - \left(\frac{f(x)f'(x)}{1+f'(x)^2}\right)\left(\frac{f(x)f''(x)}{1+f'(x)^2}\right) + \left(\frac{f'(x)}{f(x)}\right)\left(\frac{f(x)f'(x)}{1+f'(x)^2}\right) \\
&= -\left(\frac{f'(x)^2 + f'(x)^4 + f(x)f''(x) - f(x)f'(x)^2f''(x)}{\left(1+f'(x)^2\right)^2}\right) \\
&\quad - \left(\frac{f(x)f'(x)}{1+f'(x)^2}\right)\left(\frac{f(x)f''(x)}{1+f'(x)^2}\right) + \left(\frac{f'(x)}{f(x)}\right)\left(\frac{f(x)f'(x)}{1+f'(x)^2}\right) \\
&= -\left(\frac{f'(x)^2 + f'(x)^4 + f(x)f''(x)}{\left(1+f'(x)^2\right)^2}\right) + \left(\frac{f'(x)}{f(x)}\right)\left(\frac{f(x)f'(x)}{1+f'(x)^2}\right) \\
&= -\left(\frac{f(x)f'(x)^2 + f(x)f'(x)^4 + f(x)^2f''(x)}{f(x)\left(1+f'(x)^2\right)^2}\right) + \left(\frac{f(x)f'(x)^2 + f(x)f'(x)^4}{f(x)\left(1+f'(x)^2\right)^2}\right) \\
&= -\frac{f(x)^2f''(x)}{f(x)\left(1+f'(x)^2\right)^2} \\
&= -\frac{f(x)f''(x)}{\left(1+f'(x)^2\right)^2}
\end{aligned}$$

De donde,

$$\begin{aligned}
R_p(\partial_\theta, \partial_x)\partial_\theta &= R^x_{\theta x\theta}\partial_x \\
&= -\frac{f(x)f''(x)}{\left(1+f'(x)^2\right)^2}\partial_x
\end{aligned}$$

Luego,

$$\begin{aligned}
\langle R_p(\partial_\theta, \partial_x)\partial_\theta, \partial_x\rangle &= \left\langle -\frac{f(x)f''(x)}{\left(1+f'(x)^2\right)^2}\partial_x, \partial_x \right\rangle \\
&= -\frac{f(x)f''(x)}{\left(1+f'(x)^2\right)^2}\langle \partial_x, \partial_x\rangle \\
&= -\frac{f(x)f''(x)}{\left(1+f'(x)^2\right)^2} \cdot \left(1+f'(x)^2\right)^2 \\
&= -f(x)f''(x)
\end{aligned}$$

Finalmente, sustituyendo en (3)

$$K(\partial_\theta, \partial_x) = \frac{-f(x)f''(x)}{\left(f(x)^2\right)\left(1+f'(x)^2\right)^2} = -\frac{f''(x)}{f(x)\left(1+f'(x)^2\right)^2}$$

□

Diego Leipen Lara
418002038