Tarea 6

Análisis Real (2025-2)
Dr. Javier Fernando Rosenblueth Laguette

Diego Leipen Lara

4. a) Como (i) una función de variación acotada es una suma de funciones monótonas y (ii) el limite izquierdo de una suma es la suma de los límites izquierdos (dado que estos existan), entonces basta demostrar que el límite izquierdo de una función monótona siempre existe. Si f es creciente, veremos que

$$\lim_{x\to c^-} f(x) = \sup\{f(x) \mid a \leq x < c\}. \tag{1}$$

Análogamente, si f es decreciente se puede demostrar que

$$\lim_{x\to c^-} f(x) = \inf\{f(x) \mid a \leq x < c\}.$$

Sea f creciente y sea $\epsilon > 0$. Por definición de supremo, existe $x_0 \in [a, c)$ tal que

$$\sup\{f(x) \mid a \leq x < c\} - \epsilon < f(x_0).$$

Sea $\delta = c - x_0 > 0$. Si $c - x < \delta = c - x_0$, entonces $x < x_0$, de donde, $f(x) \leq f(x_0)$ y

$$\left|\sup\{f(x) \mid a \leq x < c\} - f(x)\right| = \sup\{f(x) \mid a \leq x < c\} - f(x) \leq \sup\{f(x) \mid a \leq x < c\} - f(x_0) < \epsilon.$$

Esto demuestra (1). La demostración de que el límite derecho de una función monótona existe es completamente análoga. Resta ver que una función monótona puede tener a lo mas una cantidad numerable de discontinuidades. Sea f monótona y denotemos por A a su conjunto de discontinuidades. Por lo anterior, para cada $a \in A$, los límites unilaterales de f en x existen. Pero como f no es continua en a, estos límites unilaterales son distintos. Denotemos por I_a al intervalo cuyos extremos son estos límites unilaterales. Por el axioma de elección (y por la densidad de $\mathbb{Q}$ en $\mathbb{R}$) podemos escoger para cada I_a, un racional $q_a \in I_a$. La función $a \mapsto q_a$ es inyectiva pues los I_a son disjuntos (pues f es monótona). Por lo tanto, A es numerable.

b) Sea $\mathbb{Q} = \{q_n \mid n \in \mathbb{N}\}$ una enumeración de $\mathbb{Q}$. Definimos $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ por

$$f(x) = \sum_{q_n \leq x} \frac{1}{2^n}.$$

Como la serie $\sum \frac{1}{2^n}$ es absolutamente convergente, cualquier reacomodo también converge (cf. Baby Rudin Theorem 3.55) y por lo tanto, f esta bien definida. Es creciente pues si $x < y$, existe $q_{n_0} \in \mathbb{Q}$ tal que $x < q_{n_0} < y$ y por lo tanto,

$$f(x) = \sum_{q_n \leq x} \frac{1}{2^n} < \sum_{q_n \leq x} \frac{1}{2^n} + \frac{1}{2^{n_0}} < \sum_{q_n \leq y} \frac{1}{2^n} = f(y).$$

Es discontinua en cada racional q pues

$$\lim_{x\to q^-} f(x) = \sum_{q_n < q} \frac{1}{2^n} < \sum_{q_n \leq q} \frac{1}{2^n} = f(q).$$

□

5. Sea $a = x_0 < x_1 < \cdots < x_k = b$ cualquier partición de $[a, b]$. Sin perdida de generalidad, supongamos que $x_i \neq c$ para todo i y sea $k_0 = \max\{i \mid x_i < c\}$. Entonces (i) $a = x_0 < x_1 < \cdots < x_{k_0} = c$ es una partición de $[a, c]$ y (ii) $c = x_{k_0} < x_{k_0+1} < \cdots < x_k = b$ es una partición de $[c, b]$. Denotemoslas por P_1 y P_2 respectivamente. Entonces

$$\sum_{i=1}^{k} |f(x_i) - f(x_{i-1})| \leq V(f, P_1) + V(f, P_2) \leq T_a^c(f) + T_c^b(f)$$

donde la primera desigualdad es porque $|f(x_{k_0+1}) - f(x_{k_0})| \leq |f(x_{k_0+1}) - f(c)| + |f(c) - f(x_{k_0})|$. Como esto es para cualquier partición de $[a, b]$, entonces $T_a^b(f) \leq T_a^c(f) + T_c^b(f)$. Conversamente, sea $\epsilon > 0$. Por definición de supremo, existen particiones P_1 y P_2 de $[a, c]$ y $[c, b]$ respectivamente tales que

$$T_a^c(f) - \frac{\epsilon}{2} < V(f, P_1) \qquad \text{y} \qquad T_c^b(f) - \frac{\epsilon}{2} < V(f, P_2).$$

Entonces $P_1 \cup P_2$ es una partición de $[a, b]$ y

$$T_a^c(f) - T_b^c(f) - \epsilon < V(f, P_1) + V(f, P_2) = V(f, P_1 \cup P_2) \leq T_a^b(f).$$

Como esto es para cualquier $\epsilon > 0$, entonces $T_a^c(f) - T_b^c(f) \leq T_a^b(f)$. □

6. Sea $a = x_0 < x_1 < \cdots < x_k = b$ cualquier partición de $[a, b]$. Entonces

$$\sum_{i=1}^{k} |(f+g)(x_i) - (f+g)(x_{i-1})| \leq \sum_{i=1}^{n} |f(x_i) - f(x_{i-1})| + \sum_{i=1}^{k} |g(x_i) - g(x_{i-1})| \leq T_a^b(f) + T_a^b(g).$$

Por lo tanto, $T_a^b(f+g) \leq T_a^b(f) + T_a^b(g)$. Por otro lado,

$$\sum_{i=1}^{n} |(cf)(x_i) - (cf)(x_{i-1})| = |c| \sum_{i=1}^{n} |f(x_i) - f(x_{i-1})| \leq |c| T_a^b(f).$$

De donde, $T_a^b(cf) \leq |c| T_a^b(f)$. Conversamente,

$$|c| \sum_{i=1}^{n} |f(x_i) - f(x_{i-1})| = \sum_{i=1}^{n} |(cf)(x_i) - (cf)(x_{i-1})| \leq T_a^b(cf).$$

De donde, $|c| T_a^b(f) \leq T_a^b(cf)$. □

7. Sea $a = x_0 < x_1 < \cdots < x_k = b$ cualquier partición de $[a, b]$. Como $f_n(x) \to f(x)$ para todo x,

$$\sum_{i=1}^{k} |f(x_i) - f(x_{i-1})| = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{k} |f_n(x_i) - f_n(x_{i-1})| = \liminf_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{k} |f_n(x_i) - f_n(x_{i-1})| \leq \liminf_{n\to\infty} T_a^b(f_n).$$

Por lo tanto, $T_a^b(f) \leq \liminf_{n\to\infty} T_a^b(f_n)$. □

8. a) Denotemos $x_0 = 0$ y para cada $i \in \mathbb{Z}_{\geq 1}$, definimos

$$x_i := \sqrt{\frac{2}{i\pi}}.$$

Entonces

$$|f(x_i)| = \left| \frac{2}{i\pi} \sin\left(\frac{i\pi}{2}\right) \right| = \begin{cases} 0 & \text{si } i \text{ es par,} \\ \frac{2}{n\pi} & \text{si } i \text{ es impar.} \end{cases}$$

En particular, si i es impar,

$$|f(x_{i+1}) - f(x_i)| + |f(x_i) - f(x_{i-1})| = 2|f(x_i)| = \frac{2}{i\pi}.$$

Sea $k \in \mathbb{Z}_{\geq 1}$ par. Consideramos la partición $0 = x_0 < x_k < x_{k-1} < \cdots < x_1$ de $[0, x_1]$. Entonces

$$\sum_{i=1}^{k} |f(x_i) - f(x_{i-1})| = \sum_{j=1}^{k/2} \big(|f(x_{2j}) - f(x_{2j-1})| + |f(x_{2j-1}) - f(x_{2j-2})|\big) = \sum_{j=1}^{k/2} \frac{2}{(2j-1)\pi}.$$

Pero $\sum_{j=1}^{\infty} \frac{1}{2j-1}$ diverge. Por lo tanto, f no es de variación acotada.

b) Para todo $x \in [-1, 1] \setminus \{0\}$,

$$g'(x) = 2x \sin(1/x) - \cos(1/x).$$

Además,

$$g'(0) = \lim_{h \to 0} \frac{h^2 \sin(1/h)}{h} = \lim_{h \to 0} h \sin(1/h) = 0$$

donde la convergencia se cumple porque $|h \sin(1/h)| \leq h$. Por otro lado, sea $h(x) = g(x) + 3x$. Entonces

$$h'(x) = 2x \sin(1/x) - \cos(1/x) + 3 \geq 0.$$

Donde la desigualdad se cumple porque $|2x \sin(1/x)| \leq 2$ y $-\cos(1/x) \geq -1$. Por lo tanto, $g(x) = h(x) - 3x$ es una suma de funciones monótonas. □

Lema 1. Sea $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ diferenciable. Si $|f'(x)| \leq M$ para todo $x \in [a, b]$, entonces f es Lipschitz.

Demostración. Es consecuencia inmediata del teorema del valor medio. □

16. a) Supongamos que $|f(x) - f(y)| \leq M|x - y|$ y sea $\epsilon > 0$. Definimos $\delta := \epsilon/M$. Si $\{(x_i, x_i')\}$ es una colección finita de intervalos disjuntos con $\sum_{i=1}^{n} |x_i' - x_i| < \delta$, entonces

$$\sum_{i=1}^{n} |f(x_i') - f(x_i)| \leq \sum_{i=1}^{n} M|x_i' - x_i| = M \sum_{i=1}^{n} |x_i' - x_i| < M\delta = \epsilon.$$

b) Si $|f'|$ es acotada, f es Lipschitz (la continuidad absoluta no es necesaria, cf. Lema 1). Conversamente, si f es absolutamente continua, para cualesquiera $x \leq y$,

$$f(x) - f(y) = \int_y^x f'(t)\, dt \leq M(x - y). \qquad \text{(cf. Corollary 14)}$$

Más aun, si f' es acotada, digamos $|f'| \leq M$, entonces

$$|f(x) - f(a)| = \left| \int_a^x f'(t)\, dt \right| \leq \int_a^x M\, dt = M|x - a|.$$

□

9. Sea $f(0) = 0$ y $f(x) = x^2 \sin(1/x^2)$ si $x \in (0, 1]$. f es continua en 0 pues $|x^2 \sin(1/x^2)| \leq |x^2| \xrightarrow{x \to 0} 0$. Además, para todo $x \in (0, 1]$,

$$f'(x) = 2x \sin(1/x^2) - 2(1/x) \cos(1/x^2).$$

En particular, f' es acotada en $[\epsilon, 1]$ para todo $\epsilon > 0$. Por lo tanto, f es Lipschitz en $[\epsilon, 1]$ (cf. Lema 1) y más aun f es absolutamente continua en $[\epsilon, 1]$ (cf. Ejercicio 16a). Sin embargo, f no es de variación acotada en $[0, 1]$ (cf. Ejercicio 8a) y por lo tanto, tampoco es absolutamente continua. □

10. Supongamos que f es absolutamente continua en $[a,b]$. En particular, f es de variación acotada en $[a,x]$ para todo $x \in [a,b]$. Por lo tanto, si denotamos $P(x) = P_a^x(f)$ y $N(x) = N_a^x(f)$, entonces

$$f(x) - f(a) = P(x) - N(x). \qquad \text{(cf. Lemma 3)}$$

Como $P(x)$ y $N(x)$ son crecientes, sus derivadas existen (cf. Theorem 2) y por lo tanto,

$$f'(x) = P'(x) - N'(x).$$

De donde,

$$\begin{aligned}
\int_a^b |f'| &\leq \int_a^b P' + \int_a^b N' \\
&\leq (P(b) - P(a)) + (N(b) - N(a)) && \text{(cf. Theorem 2)} \\
&= P(b) + N(b) \\
&= T_a^b(f). && \text{(cf. Lemma 3)}
\end{aligned}$$

Conversamente, sea $a = x_0 < \cdots < x_k = b$ cualquier partición de $[a,b]$. Como f es absolutamente continua,

$$f(x_{i+1}) - f(x_i) = \int_{x_i}^{x_{i+1}} f'. \qquad \text{(cf. Corollary 14)}$$

En particular,

$$|f(x_{i+1}) - f(x_i)| \leq \int_{x_i}^{x_{i+1}} |f'|.$$

Sumando obtenemos,

$$\sum_{i=1}^{k} |f(x_{i+1}) - f(x_i)| \leq \int_a^b |f'|.$$

Por lo tanto,

$$T_a^b(f) \leq \int_a^b |f'|.$$

Resta ver que $P_a^b(f) = \int_a^b [f']^+$. Veamos que este es un caso particular de la igualdad que acabamos de demostrar. En efecto,

$$\begin{aligned}
\int_a^b [f']^+ &= \int_a^b |[f']^+| \\
&= \int_a^b |f' \chi_{\{x|f'(x) \geq 0\}}| \\
&= \int_a^b |(f \chi_{\{x|f'(x) \geq 0\}})'| \\
&= T_a^b(f \chi_{\{x|f'(x) \geq 0\}}) \\
&= P_a^b(f)
\end{aligned}$$

□

11. Sea C el conjunto de Cantor y sea f la función ternaria de Cantor. Como f es constante en $[0,1] \setminus C$, entonces $f' = 0$ en $[0,1] \setminus C$. Más aun, como $mC = 0$, entonces $f' = 0$ casi donde sea. Pero f no es constante y por lo tanto f no es absolutamente continua (cf. Lemma 12). □

12. a) Supongamos que f es creciente. Definimos

$$g(x) = \int_a^b f'(t)\,dt + g(a),$$
$$h(x) = f(x) - g(x).$$

Entonces (i) $f = g+h$, (ii) g es absolutamente continua (pues es una integral indefinida), y (iii) $h' = f'-g' = 0$ donde la última igualdad es consecuencia del Lemma 9.

Lema 3. f es absolutamente continua en $[a,b]$ si y solo si para todo $\epsilon > 0$ existe $\delta > 0$ tal que para cualquier colección *numerable* de intervalos disjuntos $\{(x_i, x_i')\}$ se satisface que

$$\sum |x_i' - x_i| < \delta \implies \sum |f(x_i') - f(x_i)| < \epsilon.$$

Demostración. Supongamos que f es absolutamente continua. Sea $\epsilon > 0$ y sea $\delta > 0$ el inducido por la definición de continuidad absoluta para $\epsilon/2$. Ahora bien, sea $\{(x_i, x_i')\}$ cualquier colección numerable de intervalos disjuntos con

$$\sum |x_i' - x_i| < \delta.$$

En particular, para todo $n \geq 0$,

$$\sum_{i=1}^n |x_i' - x_i| < \delta.$$

De donde,

$$\sum_{i=1}^n |f(x_i') - f(x_i)| < \epsilon/2.$$

Por lo tanto,

$$\sum |f(x_i') - f(x_i)| = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^n |f(x_i') - f(x_i)| \leq \epsilon/2 < \epsilon.$$

La implicación conversa es trivial. $\square$

14. Supongamos que f es creciente. El argumento para f decreciente es análogo. Sea $\epsilon > 0$. Como f es absolutamente continua, existe $\delta > 0$ tal que para cualquier colección numerable de intervalos disjuntos $\{(x_i, x_i')\}$ se satisface que

$$\sum |x_i' - x_i| < \delta \implies \sum |f(x_i') - f(x_i)| < \epsilon. \tag{2}$$

Por otro lado, como $mE = 0$, existe una sucesión de intervalos disjuntos $\big((a_n, b_n)\big)$ tales que

$$E \subset \bigcup (a_n, b_n), \tag{3}$$
$$\sum |b_n - a_n| < \delta. \tag{4}$$

La ecuación (3) implica que

$$f[E] \subset f\left[\bigcup (a_n, b_n)\right] = \bigcup f[(a_n, b_n)] = \bigcup (f(a_n), f(b_n))$$

donde la última igualdad es consecuencia de que f es monótona. Las ecuaciones (4) y (2) implican que

$$\sum |f(b_n) - f(a_n)| < \epsilon.$$

Por lo tanto,

$$mf[E] \leq \sum |f(b_n) - f(a_n)| < \epsilon.$$

Como esto es para todo $\epsilon > 0$, entonces $mf[E] = 0$. $\square$

15. a) Sea G el complemento del conjunto de Cantor generalizado de medida $1-\alpha$ y sea

$$g(x) = \int_0^x \chi_G.$$

Por el Theorem 13, g es absolutamente continua. Por otro lado, sean $x, x' \in [0,1]$ tales que $x < x'$. Como G es abierto y denso en $[0,1]$ (cf. Ejercicio 3.14b), existe $y \in G$ y existe $r > 0$ tales que

$$(y - r/2, y + r/2) \subset G \cap (x, x').$$

De donde,

$$g(x') - g(x) = \int_x^{x'} \chi_G = m(G \cap (x, x')) \geq r > 0.$$

Por lo tanto, $g(x) < g(x')$, es decir, g es estrictamente creciente en $[0,1]$. Además, $g'(x) = \chi_G(x)$ para casi todo $x \in [0,1]$ (cf. Theorem 9). En particular, $g'(x) = 0$ para casi todo $x \in [0,1] \setminus G$, el cual tiene medida $1 - \alpha > 0$.

b) No me salio pero una idea es la siguiente. Sea C el conjunto de Cantor. Entonces $G \subset [0,1] \setminus C$ y por lo tanto $mg(C) > 0$. Sea $E \subset g(C)$ no medible. Entonces $g^{-1}(E) \subset g^{-1}(g(C)) = C$ tiene medida 0. La igualdad se cumple porque g es inyectiva pues es estrictamente creciente. Alternativamente, si $mg(C) > 0$ no es cierto, el argumento sigue sirviendo para cualquier conjunto de medida 0 cuya imagen directa tenga medida estrictamente mayor a 0. $\square$