1. Si $f : X \to Y$ es continua, entonces $\pi_0(f)$ esta bien definida y π_0 es un funtor.

Proof. Si $[x] = [x']$, entonces (por definición) existe $\gamma : I \to X$ continua tal que $\gamma(0) = x$ y $\gamma(1) = x'$. Entonces $f \circ \gamma : I \to X$ es una función continua tal que $f \circ \gamma(0) = f(\gamma(0)) = f(x)$ y $f \circ \gamma(1) = f(\gamma(1)) = f(x')$. Entonces $[f(x)] = [f(x')]$. Es decir, f esta bien definida. Por otro lado,

1. $\pi_0(\mathrm{id}_X)([x]) = [\mathrm{id}_x(x)] = [x] = \mathrm{id}_{\pi_0(X)}([x])$.
2. $\pi_0(g \circ f)([x]) = \big[(g \circ f)(x)\big] = \big[g(f(x))\big] = \pi_0(g)\left([f(x)]\right) = \pi_0(g)\Big(\pi_0(f)\left([x]\right)\Big) = \pi_0(g) \circ \pi_0(f)\left([x]\right)$.

□

2. $\simeq$ rel$(0,1)$ es una relación de equivalencia en $\Omega(X, x_0)$.

Proof.

1. *Reflexividad.* Supongamos que $\sigma \in \Omega(X, x_0)$. Sea
$$H(s,t) = \sigma(s)$$
entonces H es continua y
   (a) $H(0,t) = \sigma(0) = x_0$ para todo t.
   (b) $H(1,t) = \sigma(1) = x_0$ para todo t.
   (c) $H(s,0) = \sigma(s)$ para todo s.
   (d) $H(s,1) = \sigma(s)$ para todo s.

   Por lo tanto, H es una homotopía rel$(0,1)$ de σ a σ.
2. *Simetría.* Supongamos que $\sigma \simeq_H \tau$. Sea
$$G(s,t) = H(s, 1-t)$$
entonces G es continua y
   (a) $G(0,t) = H(0,1-t) = x_0$ para todo t.
   (b) $G(1,t) = H(1,1-t) = x_0$ para todo t.
   (c) $G(s,0) = H(s,1) = \tau(s)$ para todo s.
   (d) $G(s,1) = H(s,0) = \sigma(s)$ para todo s.

   Por lo tanto, G es una homotopía rel$(0,1)$ de τ a σ.
3. *Transitividad.* Supongamos que $\sigma \simeq_H \tau$ y $\tau \simeq_G \eta$. Sea
$$F(s,t) = \begin{cases} H(s,2t) & \text{si } 0 \le t \le 1/2 \\ G(s,2t-1) & \text{si } 1/2 \le t \le 1 \end{cases}$$
Como $H(s,1) = \tau(s) = G(s,0)$, entonces (por el lema de pegado) F es continua. Además,
   (a) $F(0,t) = H(0,2t) = x_0$ si $0 \le t \le 1/2$ y $F(0,t) = G(0,2t-1) = x_0$ si $1/2 \le t \le 1$.
   (b) $F(1,t) = H(1,2t) = x_0$ si $0 \le t \le 1/2$ y $F(0,t) = G(1,2t-1) = x_0$ si $1/2 \le t \le 1$.
   (c) $F(s,0) = H(s,0) = \gamma(s)$ para todo s.
   (d) $F(s,1) = G(s,1) = \eta(s)$ para todo s.

   Por lo tanto F es una homotopía rel$(0,1)$ de σ a η.

□

3. π_1 es una invariante topológica.

Proof.

1. Supongamos que (X, x_0) es un espacio topológico basado. Entonces para todo $\sigma \in \Omega(X, x_0)$

$$(\mathrm{id}_X)_\#([\sigma]) = [\mathrm{id}_X \circ \sigma] = [\sigma] = \mathrm{id}_{\pi_1(X,x_0)}([\sigma])$$

   es decir, $(\mathrm{id}_X)_\# = \mathrm{id}_{\pi_1(X,x_0)}$.

2. Supongamos que $f : (X, x_0) \to (Y, y_0)$ y $g : (Y, y_0) \to (Z, z_0)$ son continuas. Entonces

$$(g \circ f)_\#([\sigma]) = [(g \circ f) \circ \sigma] = [g \circ (f \circ \sigma)] = g_\# \big([f \circ \sigma]\big) = g_\# \circ f_\#([\sigma]) \text{ para todo } \sigma \in \Omega(X, x_0),$$

   es decir, $(g \circ f)_\# = g_\# \circ f_\#$.

$\square$

4. $\simeq$ es una relación de equivalencia en $\mathrm{Map}(X, Y)$.

Proof.

1. *Reflexividad.* Supongamos que $f \in \mathrm{Map}(X, Y)$. Sea

$$\begin{aligned} H : X \times I &\to Y \\ (x, t) &\mapsto f(x) \end{aligned}$$

   entonces H es continua y

   (a) $H(x, 0) = f(x)$ para todo x.
   (b) $H(x, 1) = f(x)$ para todo x.

   Por lo tanto H es una homotopía de f a f.

2. *Simetría.* Supongamos que $f \simeq_H g$. Sea

$$\begin{aligned} G : X \times I &\to Y \\ (x, t) &\mapsto H(x, 1 - t) \end{aligned}$$

   entonces G es continua y

   (a) $G(x, 0) = H(x, 1) = g(x)$ para todo x.
   (b) $G(x, 1) = H(x, 0) = f(x)$ para todo x.

   Por lo tanto, G es una homotopía de g a f.

3. *Transitividad.* Supongamos que $f \simeq_H g$ y que $g \simeq_G h$. Sea

$$\begin{aligned} F : X \times I &\to Y \\ (x, t) &\mapsto \begin{cases} H(x, 2t) & \text{si } 0 \leq t \leq 1/2 \\ G(x, 2t - 1) & \text{si } 1/2 \leq t \leq 1 \end{cases} \end{aligned}$$

   Como $H(x, 1) = g(x) = G(x, 0)$, entonces (por el lema de pegado) F es continua. Además,

   (a) $F(x, 0) = H(x, 0) = f(x)$ para todo x.
   (b) $F(x, 1) = G(x, 1) = h(x)$ para todo x.

   Por lo tanto F es una homotopía de f a h.

$\square$

5. 1. La siguiente función es continua.

$$\begin{aligned} S : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n &\to \mathbb{R}^n \\ (x, y) &\mapsto x + y. \end{aligned}$$

2. La siguiente función es continua.

$$\begin{aligned} P : (\mathbb{R} \times \mathbb{R}^n) \times (\mathbb{R} \times \mathbb{R}^n) &\to \mathbb{R}^n \\ ((t, x), (t', x')) &\mapsto (tx, t'x'). \end{aligned}$$

Proof. Sea $|| \cdot ||$ la norma en $\mathbb{R}^p$ dada por $||(x_1, \ldots, x_p)|| \coloneqq \max\{|x_1|, \ldots, |x_p|\}$. Se puede demostrar que $|| \cdot ||$ induce la topologia usual en $\mathbb{R}^p$. Por lo tanto, basta demostrar que S y P son continuas respecto a esta norma.

1. Supongamos que $(x, y), (x', y') \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$. Entonces

$$||(x, y) - (x', y')|| = ||(x - x', y - y')|| = \max\{|x_1 - x_1'|, \ldots, |x_n - x_n'|, |y_1 - y_1'|, \ldots, |y_n - y_n'|\}$$

Entonces

$$\begin{aligned} ||S(x, y) - S(x', y')|| &= ||(x + y) - (x' + y')|| \\ &= \max_i\{|(x_i + y_i) - (x_i' + y_i')|\} \\ &= \max_i\{|(x_i - x_i') + (y_i - y_i')|\} \leq \max_i\{|x_i - x_i'|\} + \max_i\{|y_i - y_i'|\} \\ &\leq ||(x, y) - (x', y')|| + ||(x, y) - (x', y')|| \\ &= 2||(x, y) - (x', y')|| \end{aligned}$$

Por lo tanto, S es continua.

2. Si $p : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ es tal que $(t, x) \mapsto tx$, entonces $P = (p, p)$. Por lo tanto, basta ver que p es continua. Para esto, supongamos que $(t, x), (s, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$. Entonces

$$||(t, x) - (s, y)|| = ||(t - s, x - y)|| = \max\{|t - s|, |x_1 - y_1|, \ldots, |x_n - y_n|\}$$

Sea $\epsilon > 0$ arbitrario y

$$\delta \coloneqq \left\{\frac{\epsilon}{2||x||}, \frac{\epsilon}{2(1 + |t|)}, 1\right\}.$$

Supongamos que $||(t, x) - (s, y)|| < \delta$. Por un lado, $|t - s| \leq ||(t, x) - (s, y)|| < \delta \leq 1$ y por lo tanto $|s| \leq 1 + |t|$. Entonces

$$\begin{aligned} ||p(t, x) - p(s, y)|| &= ||tx - sy|| \\ &= \max_i\{|tx_i - sy_i|\} \\ &= \max_i\{|tx_i - sx_i + sx_i + sy_i|\} \\ &= \max_i\{|(t - s)x_i + s(x_i - y_i)|\} \\ &\leq \max_i\{|t - s||x_i| + |s||x_i - y_i|\} \\ &\leq \max_i\left\{\frac{\epsilon}{2||x||}|x_i| + (1 + |t|)\frac{\epsilon}{2(1 + |t|)}\right\} \\ &\leq \max_i\left\{\frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2}\right\} = \epsilon \end{aligned}$$

$\square$

6. Supongamos que $f : I \to I$ es la función afín por partes que satisface $f(0) = 0$, $f(1/2) = r_0/n$, y $f(1) = 1$. Si $\alpha_1, \ldots, \alpha_n \in \Omega(X, x_0)$, entonces

$$(\alpha_1 * \cdots * \alpha_n) \circ f = (\alpha_1 * \cdots * \alpha_{r_0}) * (\alpha_{r_0+1} * \cdots * \alpha_n).$$

Proof. Se puede verificar que

$$f(t) = \begin{cases} \frac{2r_0}{n} t & \text{si } 0 \leq t \leq 1/2 \\ \frac{2(n-r_0)}{n} t + \frac{2r_0 - n}{n} & \text{si } 1/2 \leq t \leq 1 \end{cases}$$

satisface lo deseado. Recordemos que $\alpha_1 * \cdots * \alpha_p : I \to X$ esta dada por

$$(\alpha_1 * \cdots * \alpha_p)(s) = \alpha_r(ps - r + 1) \text{ si } \frac{r-1}{p} \leq s \leq \frac{r}{p}.$$

Si $0 \leq t \leq 1/2$, entonces

$$\begin{aligned} (\alpha_1 * \cdots * \alpha_n) \circ f(t) &= (\alpha_1 * \cdots * \alpha_n)\left(\frac{2r_0}{n} t\right) \\ &= \alpha_r \left(n\left(\frac{2r_0}{n} t\right) - r + 1\right) \text{ si } \frac{r-1}{n} \leq \frac{2r_0}{n} t \leq \frac{r}{n} \\ &= \alpha_r \left(2r_0 t - r + 1\right) \text{ si } r - 1 \leq 2r_0 t \leq r \end{aligned}$$

y

$$\begin{aligned} (\alpha_1 * \cdots * \alpha_{r_0}) * (\alpha_{r_0+1} * \cdots * \alpha_n)(t) &= (\alpha_1 * \cdots * \alpha_{r_0})(2t) \\ &= \alpha_r(r_0(2t) - r + 1) \text{ si } \frac{r-1}{r_0} \leq 2t \leq \frac{r}{r_0}. \end{aligned}$$

Por lo tanto, $(\alpha_1 * \cdots * \alpha_n) \circ f(t) = (\alpha_1 * \cdots * \alpha_{r_0}) * (\alpha_{r_0+1} * \cdots * \alpha_n)(t)$ si $0 \leq t \leq 1/2$.
Si $1/2 \leq t \leq 1$, entonces

$$\begin{aligned} (\alpha_1 * \cdots * \alpha_n) \circ f(t) &= (\alpha_1 * \cdots * \alpha_n)\left(\frac{2(n-r_0)}{n} t + \frac{2r_0 - n}{n}\right) \\ &= \alpha_r \left(n\left(\frac{2(n-r_0)}{n} t + \frac{2r_0 - n}{n}\right) - r + 1\right) \text{ si } \frac{r-1}{n} \leq \frac{2(n-r_0)}{n} t + \frac{2r_0 - n}{n} \leq \frac{r}{n} \\ &= \alpha_r \Big(\big(2(n-r_0)t + 2r_0 - n\big) - r + 1\Big) \text{ si } r - 1 \leq 2(n-r_0)t + 2r_0 - n \leq r \\ &= \alpha_{r+r_0} \Big(\big(2(n-r_0)t + 2r_0 - n\big) - (r + r_0) + 1\Big) \text{ si } (r + r_0) - 1 \leq 2(n-r_0)t + 2r_0 - n \leq r + r_0 \\ &= \alpha_{r+r_0} \Big(\big(2(n-r_0)t + r_0 - n\big) - r + 1\Big) \text{ si } r - 1 \leq 2(n-r_0)t + r_0 - n \leq r \end{aligned}$$

y

$$\begin{aligned} (\alpha_1 * \cdots * \alpha_{r_0}) * (\alpha_{r_0+1} * \cdots * \alpha_n)(t) &= (\alpha_{r_0+1} * \cdots * \alpha_n)(2t - 1) \\ &= \alpha_{r_0+r} \big((n - r_0)s - r + 1\big) \text{ si } \frac{r-1}{n-r_0} \leq 2t - 1 \leq \frac{r}{n-r_0}. \end{aligned}$$

Por lo tanto, $(\alpha_1 * \cdots * \alpha_n) \circ f(t) = (\alpha_1 * \cdots * \alpha_{r_0}) * (\alpha_{r_0+1} * \cdots * \alpha_n)(t)$ si $1/2 \leq t \leq 1$. $\square$

7. $\hat{\sigma}$ esta bien definido y es un isomorfismo.

Proof. Para todo $\alpha, \alpha' \in \Omega(X, x_0)$

$$\begin{aligned}
\hat{\sigma}([\alpha])\hat{\sigma}([\alpha']) &= [\overline{\sigma} * \alpha * \sigma][\overline{\sigma} * \alpha' * \sigma] \\
&= \Big[(\overline{\sigma} * \alpha * \sigma) * \big(\overline{\sigma} * \alpha' * \sigma\big)\Big] \\
&= [\overline{\sigma} * \alpha]\,[\sigma * \overline{\sigma}]\,\big[\alpha' * \sigma\big] \\
&= [\overline{\sigma} * \alpha]\,[c_{x_0}]\,\big[\alpha' * \sigma\big] \\
&= [\overline{\sigma} * \alpha]\,\big[\alpha' * \sigma\big] \\
&= \big[\overline{\sigma} * \alpha * \alpha' * \sigma\big] \\
&= \hat{\sigma}([\alpha * \alpha'])
\end{aligned}$$

Análogamente, $\hat{\overline{\sigma}}\left([\beta * \beta']\right) = \hat{\overline{\sigma}}([\beta])\hat{\overline{\sigma}}([\beta'])$ para todo $\beta, \beta' \in \Omega(X, x_1)$. Por otro lado, para todo $\alpha \in \Omega(X, x_0)$

$$\begin{aligned}
\hat{\overline{\sigma}} \circ \hat{\sigma}([\alpha]) &= \hat{\overline{\sigma}}\left(\hat{\sigma}([\alpha])\right) \\
&= \hat{\overline{\sigma}}\left([\overline{\sigma} * \alpha * \sigma]\right) \\
&= \big[\overline{\overline{\sigma}} * (\overline{\sigma} * \alpha * \sigma) * \overline{\sigma}\big] \\
&= \big[(\sigma * \overline{\sigma}) * \alpha * (\sigma * \overline{\sigma})\big] && (\overline{\overline{\sigma}} = \sigma) \\
&= [\sigma * \overline{\sigma}]\,[\alpha]\,[\sigma * \overline{\sigma}] \\
&= [c_{x_0}][\alpha][c_{x_0}] \\
&= [\alpha]
\end{aligned}$$

Análogamente, $\hat{\sigma} \circ \hat{\overline{\sigma}}([\beta]) = [\beta]$ para todo $\beta \in \Omega(X, x_1)$. Por lo tanto, $\hat{\sigma}$ y $\hat{\overline{\sigma}}$ son homomorfismos inversos. En particular, $\hat{\sigma}$ es un isomorfismo. $\square$

8. Si

$$\begin{aligned}
\hat{p} : \pi_q(X, x_0) &\to [(I^q/\partial I^q, *), (X, x_0)] \\
[\alpha] &\mapsto [\hat{\alpha}]
\end{aligned}$$

y

$$\begin{aligned}
\tilde{p} : [(I^q/\partial I^q, *), (X, x_0)] &\to \pi_q(X, x_0) \\
[\gamma] &\mapsto [\gamma \circ p]
\end{aligned}$$

entonces $\hat{p}$ y $\tilde{p}$ están bien definidas, son homomorfismos, y son mutuamente inversas.

Proof. Veamos que $\hat{p}$ esta bien definida. Supongamos que $[\alpha], [\beta] \in \pi_q(X, x_0)$. Si $[\alpha] = [\beta]$, entonces existe $H : I^q \times I \to X$ tal que

1. $H(x, 0) = \alpha(x)$ para todo $x \in I^q$
2. $H(x, 1) = \beta(x)$ para todo $x \in I^q$
3. $H(x, t) = x_0$ si $x \in \partial I^q$.

Como p es la proyección canónica de I^q en $I^q/\partial I^q$ y id_I es la proyección canónica de I en I, entonces (p, id_I) es la proyección canónica de $I^q \times I$ en $(I^q/\partial I) \times I$. Por la propiedad universal de las proyecciones canónicas, existe una única función continua $\hat{H} : (I^q/\partial I^q, *) \to (X, x_0)$ tal que el siguiente diagrama conmuta

$$\begin{tikzcd}
I^q \times I \arrow[r, "H"] \arrow[d, "{(p, \mathrm{id}_I)}"'] & X \\
(I^q/\partial I) \times I \arrow[ur, "\hat{H}"']
\end{tikzcd}$$

Ahora bien, si $y \in I^q/I$, entonces existe $y' \in I^q$ tal que $p(y') = y$. Entonces

1. $\tilde{H}(y,0) = \tilde{H}(p(y'),0) = \tilde{H} \circ (p, \mathrm{id}_I)(y',0) = H(y',0) = \alpha(y') = \hat{\alpha} \circ p(y') = \hat{\alpha}(y)$.
2. $\tilde{H}(y,1) = \tilde{H}(p(y'),1) = \tilde{H} \circ (p, \mathrm{id}_I)(y',1) = H(y',1) = \beta(y') = \hat{\beta} \circ p(y') = \hat{\beta}(y)$.
3. Por otro lado, como $(0,0) \in \partial I^q$, entonces $p(0,0) = *$, entonces
$$\tilde{H}(*,t) = \tilde{H}(p(0,0),t) = H((0,0),t) = x_0.$$

Por lo tanto, $\hat{H}$ es una homotopía de $\hat{\alpha}$ a $\hat{\beta}$. En particular, $[\hat{\alpha}] = [\hat{\beta}]$ y por lo tanto, $\hat{p}$ esta bien definida.

Veamos que $\tilde{p}$ esta bien definida. Supongamos que $[\gamma], [\delta] \in [(I^q/\partial I^q, *), (X, x_0)]$. Si $[\gamma] = [\eta]$, entonces existe una homotopía $F : I^q/\partial I^q \times I \to X$ tal que

1. $F(z,0) = \gamma(z)$ para todo $z \in I^q/\partial I^q$.
2. $F(z,1) = \eta(z)$ para todo $z \in I^q/\partial I^q$.
3. $F(*,t) = x_0$ para todo $t \in I$.

Sea $\tilde{F} = F \circ (p, \mathrm{id}_I)$. Entonces

1. $\tilde{F}(z,0) = F \circ (p, \mathrm{id}_I)(z,0) = F(p(z),0) = \gamma(p(z)) = (\gamma \circ p)(z)$ para todo $z \in I^q$.
2. $\tilde{F}(z,1) = F \circ (p, \mathrm{id}_I)(z,1) = F(p(z),1) = \eta(p(z)) = (\eta \circ p)(z)$ para todo $z \in I^q$.
3. $\tilde{F}(z,t) = F \circ (p, \mathrm{id}_I)(z,t) = F(p(z),t) = F(*,t) = x_0$ si $z \in \partial I^q$.

Por lo tanto, $\hat{H}$ es una homotopía de $\gamma \circ p$ a $\eta \circ p$. En particular, $[\gamma \circ p] = [\eta \circ p]$ y por lo tanto, $\tilde{p}$ esta bien definida.

Veamos que $\hat{p}$ y $\tilde{p}$ son mutuamente inversas. Para todo $[\alpha] \in \pi_q(X, x_0)$
$$\tilde{p} \circ \hat{p}([\alpha]) = \tilde{p}([\hat{\alpha}]) = [\hat{\alpha} \circ p] = [\alpha].$$

Si $\gamma \in [(I^q/\partial I^q, *), (X, x_0)]$, y $\Gamma \coloneqq \gamma \circ p$, entonces (por unicidad de la propiedad universal del cociente) $\hat{\Gamma} = \gamma$. Por lo tanto,
$$\hat{p} \circ \tilde{p}([\gamma]) = \hat{p}([\gamma \circ p]) = \hat{p}([\Gamma]) = [\hat{\Gamma}] = [\gamma].$$

□

9. Si $f : (X, x_0) \to (Y, y_0)$ es continua, entonces el siguiente diagrama conmuta

$$\begin{tikzcd}
\pi_0(X, x_0) \arrow[r, "f_\#"] \arrow[d, "\overline{\varphi}_X"] & \pi_0(Y, y_0) \arrow[d, "\overline{\varphi}_Y"] \\
\pi_0(X) \arrow[r, "f_*"] & \pi_0(Y)
\end{tikzcd}$$

donde $f_\#([\alpha]) = [f \circ \alpha]$ y $f_*(\langle x \rangle) = \langle f(x) \rangle$.

Proof. Si $[\alpha] \in \pi_0(X, x_0)$, entonces para todo $[\alpha] \in \pi_0(X, x_0)$
$$\overline{\varphi}_Y \circ f_\#([\alpha]) = \overline{\varphi}_Y \left([f \circ \alpha]\right) = \langle f \circ \alpha(1) \rangle$$

Por otro lado,
$$f_* \circ \overline{\varphi}_X([\alpha]) = f_*(\langle \alpha(1) \rangle) = \langle f(\alpha(1)) \rangle.$$

□

10. Si X y Y son homeomorfos, entonces tienen el mismo tipo de homotopía.

Proof. Si X y Y son homeomorfos, entonces existen funciones continuas $f : X \to Y$ y $g : Y \to X$ tales que $g \circ f = \mathrm{id}_X$ y $f \circ g = \mathrm{id}_Y$. En particular, $g \circ f \simeq \mathrm{id}_X$ y $f \circ g \simeq \mathrm{id}_Y$. Por lo tanto, $X \simeq Y$. $\square$

11.
1. X es contraible si y solo si existe un punto $x^* \in X$ y una homotopía $H : X \times I \to X$ tal que $H(x, 0) = x$ y $H(x, 1) = x^*$ para todo $x \in X$.
2. (X, x_0) es contraible basado si y solo si existe una homotopía $H : X \times I \to X$ tal que $H(x, 0) = x$, $H(x, 1) = x_0$ para todo $x \in X$, y además $H(x_0, t) = x_0$ para todo $t \in I$.

Proof. Denotamos $\mathrm{pt} = \{*\}$.

1. Recordemos que X es contraible si y solo si $X \simeq \mathrm{pt}$ si y solo si existen funciones continuas $f : X \to \mathrm{pt}$ y $g : \mathrm{pt} \to X$ tales que $g \circ f \simeq \mathrm{id}_X$ y $f \circ g \simeq \mathrm{id}_{\mathrm{pt}}$.
$\Longrightarrow$) Supongamos que X es contraible. Entonces existen funciones continuas $f : X \to \mathrm{pt}$ y $g : \mathrm{pt} \to X$ tales que $g \circ f \simeq \mathrm{id}_X$ y $f \circ g \simeq \mathrm{id}_{\mathrm{pt}}$. Denotemos $g(*) = x^*$. Si H es la homotopía de id_X a $g \circ f$, entonces $H(x, 0) = \mathrm{id}_X(x) = x$ y $H(x, 1) = g \circ f(x) = x^*$.
$\Longleftarrow$) Supongamos que existe un punto $x^* \in X$ y una homotopía $H : X \times I \to X$ tal que $H(x, 0) = x$ y $H(x, 1) = x^*$ para todo $x \in X$. Sea $f : X \to \mathrm{pt}$ la única función posible de X en pt. Sea $g : \mathrm{pt} \to X$ tal que $g(*) = x^*$. Entonces $H(x, 0) = x = \mathrm{id}_X(x)$ y $H(x, 1) = x^* = g \circ f(x)$ para todo $x \in X$. Es decir, $g \circ f \simeq \mathrm{id}_X$. Veamos que $f \circ g \simeq \mathrm{id}_Y$. Por otro lado, $f \circ g(*) = f(x^*) = * = \mathrm{id}_{\mathrm{pt}}$. Por lo tanto, $X \simeq \mathrm{pt}$ y X es contraible.

2. Recordemos que (X, x_0) es contraible basado si y solo si $(X, x_0) \simeq (\mathrm{pt}, *)$ si y solo si existen funciones continuas $f : (X, x_0) \to (\mathrm{pt}, *)$ y $g : (\mathrm{pt}, *) \to (X, x_0)$ tales que $\mathrm{id}_X \simeq_H g \circ f$, $\mathrm{id}_{\mathrm{pt}} \simeq_{H'} f \circ g$, $H(x_0, t) = x_0$, y $H'(*, t) = *$ para todo $t \in I$.
$\Longrightarrow$) La homotopía de id_X a $g \circ f$ cumple lo deseado.
$\Longleftarrow$) Sea $H : X \times I \to X$ una homotopía tal que $H(x, 0) = x$, $H(x, 1) = x_0$ para todo $x \in X$, y además $H(x_0, t) = x_0$ para todo $t \in I$. Sea $f : X \to \mathrm{pt}$ la única función posible. Sea $g : \mathrm{pt} \to X$ tal que $g(*) = x_0$. Entonces H es una homotopía basada de id_X a $g \circ f$ y como $f \circ g = \mathrm{id}_{\mathrm{pt}}$, entonces $H' : \mathrm{pt} \times I \to \mathrm{pt}$ dada por $H'(*, t) = *$ cumple lo deseado y por lo tanto, $(X, x_0) \simeq (\mathrm{pt}, *)$ y X es contraible basado.

$\square$

12. Supongamos que X es la unión de segmentos que unen al punto $(0, 1) \in \mathbb{R}^2$ con el punto $(t, 0) \in \mathbb{R}^2$ donde $t \in \{1/n \mid n \in \mathbb{Z}_{\geq 1}\} \cup \{0\}$. Se puede demostrar que X es contraible pero $(X, (0, 0))$ no es contraible basado.

Proof. Si $(X, (0, 0))$ fuera contraible basado, entonces existiría una función continua $H : X \times I \to X$ tal que $H(x, 0) = x$, $H(x, 1) = (0, 0)$, y $H((0, 0), t) = (0, 0)$ para todo t. En particular, si U es cualquier subconjunto abierto de X tal que $(0, 0) \in U$, entonces

$$\{(0, 0)\} \times I \subset H^{-1}(U).$$

Sea U_0 un subconjunto abierto de X tal que $(0, 0) \in U_0$ y $(0, 1) \notin U_0$. Por el lema del tubo, existe V_0 subconjunto abierto de X tal que

$$\{(0, 0)\} \times I \subset V_0 \times I \subset H^{-1}(U_0).$$

Entonces

$$H(V_0 \times I) \subset H(H^{-1}(U_0)) \subset U_0.$$

Ahora bien, como V_0 es abierto en X, entonces existe W_0 abierto en $\mathbb{R}^2$ tal que $V_0 = W_0 \cap X$. En particular, debe existir $n \in \mathbb{Z}_{\geq 1}$ tal que $V_0 \cap [(0, 1), (\frac{1}{n}, 0)] \neq \emptyset$. Sea $x_1 \in V_0 \cap [(0, 1), (\frac{1}{n}, 0)]$. Notemos que

$$\gamma : I \to X t \mapsto H(x_1, t)$$

es una trayectoria de x_1 a $(0,0)$ que satisface

$$\gamma(I) = H(\{x_1\} \times I) \subset H(V_0 \times I) \subset U_0.$$

Esto es imposible porque γ debe pasar por $(1,0)$ y pedimos que U_0 fuera tal que $(1,0) \notin U_0$. Por lo tanto, $(X,(0,0))$ no es contraible basado. $\square$

13. Para todo α sea $(X_\alpha, x_\alpha) = (I, 0)$. Sea $*$ es el punto base natural de $\bigvee X_\alpha$, es decir, $*$ es el elemento de $\bigvee X_\alpha$ que es la preimagen de $\{(0,\alpha)\}_\alpha$ bajo la proyección canónica. Entonces $\left(\bigvee_\alpha X_\alpha, *\right)$ es contraible basado.

Proof. Sea

$$\begin{aligned} H : \left(\coprod_\alpha X_\alpha\right) \times I &\to \coprod_\alpha X_\alpha \\ ((x,\alpha),t) &\to ((1-t)x, \alpha) \end{aligned}$$

Como $p : \coprod_\alpha X_\alpha \to \bigvee_\alpha X_\alpha$ es una identificación, entonces (p, id) es una identificación. Por otro lado, si $((x,\alpha),t) \sim ((y,\beta),s)$ en $(\bigvee_\alpha X_\alpha) \times I$, entonces $((x,\alpha),t) = ((y,\beta),s)$ o $x = 0$ y $y = 0$. En el primer caso, claramente $p \circ H((x,\alpha),t) = p \circ H((y,\beta),s)$. En el segundo caso

$$\begin{aligned} H((x,\alpha),t) = H((0,\alpha),t) = ((1-t)0,\alpha) = (0,\alpha) \\ H((y,\beta),s) = H((0,\beta),s) = ((1-s)0,\beta) = (0,\beta). \end{aligned}$$

y por lo tanto, $p \circ H((x,\alpha),t) = p \circ H((y,\beta),s)$. Entonces podemos aplicar la propiedad universal del cociente a la función $p \circ H$ para obtener una función continua (única) $\overline{H}$ tal que el siguiente diagrama conmuta.

$$\begin{tikzcd} (\coprod_\alpha X_\alpha) \times I \arrow[r, "H"] \arrow[d, "(p,\mathrm{id})"] & \coprod_\alpha X_\alpha \arrow[d, "p"] \\ (\bigvee_\alpha X_\alpha) \times I \arrow[r, "\overline{H}"] & \bigvee_\alpha X_\alpha \end{tikzcd}$$

Sea $\theta \in \bigvee_\alpha X_\alpha$. Entonces $\theta = p(x,\alpha)$ para algun $(x,\alpha) \in (\coprod_\alpha X_\alpha) \times I$, entonces

$$\begin{aligned} \overline{H}(\theta, 0) &= \overline{H}(p(x,\alpha), 0) \\ &= \overline{H}((p,\mathrm{id})((x,\alpha),0) \\ &= \overline{H} \circ (p,\mathrm{id})((x,\alpha),0) \\ &= p \circ H((x,\alpha),0) \\ &= p\left((1-0)x,\alpha)\right) \\ &= p(x,\alpha) \\ &= \theta \end{aligned}$$

Análogamente,

$$\overline{H}(\theta,1) = p((1-1)x,\alpha) = p(0,\alpha) = *.$$

Finalmente,

$$\overline{H}(*,t) = \overline{H}(p(0,\alpha),t) = \overline{H}((p,\mathrm{id})((0,\alpha),t)) = p \circ H((0,\alpha),t) = p\,(0,\alpha) = *.$$

Por lo tanto, $\left(\bigvee_\alpha X_\alpha, *\right)$ es contraible basado. $\square$

14. Sea $p_j : \prod_j X_j \to X_j$ la proyección canónica y $(p_j)_\# : \pi_q\left(\prod_j X_j\right) \to \pi_q(X_j)$ la función inducida en grupos fundamentales. Sea $\rho_j : \prod_j \pi_Q(X_j, x_j) \to \pi_Q(X_j, x_j)$ la proyección canónica. Por la propiedad universal del producto de grupos, existe un único homomorfismo F que satisface el siguiente diagrama.

$$\begin{tikzcd}
\prod_j \pi_q(X_j, x_j) \arrow[r, "\rho_j"] & \pi_q(X_j, x_j) \\
\pi_q\left(\prod_j (X_j, x_j)\right) \arrow[u, "F"] \arrow[ur, "(p_j)_\#"'] &
\end{tikzcd}$$

Es decir, $\rho_j \circ F = (p_j)_\#$. Como ρ_j es la proyección canónica, esto significa que si $\beta \in \pi_q\left(\prod_j (X_j, x_j)\right)$, entonces la j-ésima entrada de $F([\beta])$ es $(p_j)_\#([\beta])$. Por lo tanto, para todo $\beta \in \pi_q\left(\prod_j (X_j, x_j)\right)$

$$F([\beta]) = \big((p_j)_\#([\beta])\big)_j = \big([p_j \circ \beta]\big)_j .$$

Ver que F es inyectiva en el caso $q = 0$.

Proof. Supongamos que $\beta_1, \beta_2 \in \pi_0\left(\prod_j (X_j, x_j)\right)$ son tales que $F([\beta_1]) = F([\beta_2])$. Entonces

$$\big([p_j \circ \beta_1]\big)_j = \big([p_j \circ \beta_2]\big)_j$$

Por lo tanto, $p_j \circ \beta_1 \simeq p_j \circ \beta_2$ para todo j. Entonces para todo j existe $H_j : \mathbb{S}^0 \times I \to X_j$ tal que

1. $H_j(z, 0) = p_j \circ \beta_1(z)$ para todo $z \in \mathbb{S}^0$.
2. $H_j(z, 1) = p_j \circ \beta_2(z)$ para todo $z \in \mathbb{S}^0$.
3. $H(z_0, t) = x_j$ para todo $t \in I$.

Por la propiedad universal del producto, existe una única función H que satisface el siguiente diagrama para todo j.

$$\begin{tikzcd}
\prod_j (X_j, x_j) \arrow[r, "p_j"] & (X_j, x_j) \\
(\mathbb{S}^q, *) \arrow[u, "H"] \arrow[ur, "H_j"'] &
\end{tikzcd}$$

Es decir, $p_j \circ H = H_j$. Por lo tanto,

1. $p_j \circ H(z, 0) = H_j(z, 0) = p_j \circ \beta_1(z)$ para todo $z \in \mathbb{S}^0$.
2. $p_j \circ H(z, 1) = H_j(z, 1) = p_j \circ \beta_2(z)$ para todo $z \in \mathbb{S}^0$.
3. $p_j \circ H(z_0, t) = H(z_0, t) = x_j$ para todo $t \in I$.

Como p_j es la proyección canónica, podemos reescribir esto como

1. $H(z, 0) = \big(p_j \circ \beta_1(z)\big)_j = \beta_1(z)$ para todo $z \in \mathbb{S}^0$.
2. $H(z, 1) = \big(p_j \circ \beta_2(z)\big)_j = \beta_2(z)$ para todo $z \in \mathbb{S}^0$.
3. $H(z_0, t) = \big(x_j\big)_j = *$ para todo $t \in I$.

Por lo tanto, H es una homotopía (basada) de β_1 a β_2. En particular, $[\beta_1] = [\beta_2]$. Por lo tanto, F es inyectiva. $\square$

15. Si X, Y, Z son conjuntos arbitrarios y

$$\Phi : \mathrm{Fun}(X \times Z, Y) \to \mathrm{Fun}(X, \mathrm{Fun}(Z, Y))$$

es tal que $\Phi(F)(x)(z) = F(x, z)$ para todo $F \in \mathrm{Fun}(X \times Z, Y)$, $x \in X$, y $z \in Z$, entonces Φ es una biyección.

Proof. Veamos que Φ es inyectiva. Supongamos que $F, G \in \mathrm{Fun}(X \times Z, Y)$ son tales que $\Phi(F) = \Phi(G)$. Entonces para todo $x \in X$ y $z \in Z$

$$F(x, z) = \Phi(F)(x)(z) = \Phi(G)(x)(z) = G(x, z)$$

Por lo tanto $F = G$. Veamos que Φ es suprayectiva. Sea $\alpha \in \mathrm{Fun}(X, \mathrm{Fun}(Z, Y))$. Sea $F \in \mathrm{Fun}(X \times Z, Y)$ tal que $F(x, z) = \alpha(x)(z)$. Veamos que F esta bien definida. Supongamos que $(x, z) = (x', z')$. Entonces $x = x'$. Entonces (como $\alpha \in \mathrm{Fun}(X, \mathrm{Fun}(Z, Y))$ $\alpha(x) = \alpha(x')$. También $z = z'$. Entonces (como $\alpha(x), \alpha(x') \in \mathrm{Fun}(Z, Y)$ $\alpha(x)(z) = \alpha(x)(z') = \alpha(x')(z')$. Por lo tanto, $F(x, z) = F(x', z')$ y F esta bien definida. Además, $\Phi(F) = \alpha$ y por lo tanto, Φ es suprayectiva. $\square$

16. Si Z es localmente compacto, entonces $E : \mathrm{Map}(Z, Y) \times Z \to Y$ dada por $E(f, z) = f(z)$ es continua (donde $\mathrm{Map}(Z, Y)$ tiene la topologia compacto abierta).

Proof. Antes de empezar, un poco de notación. Si X y Y son espacios topológicos, $A \subset X$ y $B \subset Y$, entonces denotamos $V(A, B) = \{f \in \mathrm{Map}(X, Y) \mid f(A) \subset B$. La topologia compacto abierta de $\mathrm{Map}(X, Y)$ es la topologia con subbase

$$\{V(K, U) \mid K \subset X \text{ es compacto y } U \subset Y \text{ es abierto}\}.$$

Ahora si, supongamos que U es abierto en Y. Queremos ver que $E^{-1}(U)$ es abierto en $\mathrm{Map}(Z, Y)$. Para esto, sea $(f, z) \in E^{-1}(U)$. Encontraremos vecindades V y W de f y z respectivamente tales que $V \times W \subset E^{-1}(U)$. Primero notemos que como Z es localmente compacto y f es continua, entonces existe una vecindad A de z tal que $\overline{A} \subset f^{-1}(U)$ y $\overline{A}$ es compacto. Sean $V = V(\overline{A}, U)$ y $W = A$. Notemos que V es vecindad de f porque $\overline{A} \subset f^{-1}(U)$ implica $f(\overline{A}) \subset U$ o equivalentemente, $f \in V(\overline{A}, U)$. También W es vecindad de z por definición de A. Ahora veamos que $V \times W \subset E^{-1}(U)$. Si $(g, z_1) \in V \times W$, entonces $g \in V(\overline{A}, U)$ y $z_1 \in A$. Por lo tanto, $g(z_1) \in U$. Equivalentemente, $(g, z_1) \in E^{-1}(U)$. $\square$

17. Si (X, x_0) es un espacio basado y

$$\Phi : \mathrm{Map}_\bullet\big((SX, *), (Y, y_0)\big) \to \mathrm{Map}_\bullet\Big((X, x_0), \big(\Omega(Y, y_0), c_{y_0}\big)\Big)$$

esta dada por $\Phi(F)(x)(t) = F(x, t)$, entonces Φ es una biyección.

Proof. Veamos que Φ esta bien definida. Sea $F \in \mathrm{Map}_\bullet\big((SX, *), (Y, y_0)\big)$. Como $(x, 0) = (x, 1) = (x_0, t) = *$ en SX, entonces

1. $\Phi(F)(x)(0) = F(x, 0) = F(*) = y_0$.
2. $\Phi(F)(x)(0) = F(x, 1) = F(*) = y_0$.
3. $\Phi(F)(x_0)(t) = F(x_0, t) = F(*) = y_0$.

Por lo tanto, $\Phi(F)(x) \in \mathrm{Fun}_\bullet\Big((X, x_0), \big(\Omega(Y, y_0), c_{y_0}\big)\Big)$. Resta probar que $\Phi(F)(x)$ es continua, sin embargo, esto es consecuencia inmediata de la definición de $\Phi(F)(x)$ y de que F es continua.

Veamos que Φ es inyectiva. Supongamos que $\Phi(F_1) = \Phi(F_2)$. Entonces

$$F_1(x, t) = \Phi(F_1)(x)(t) = \Phi(F_2)(x)(t) = F_2(x, t)$$

y por lo tanto, $F_1 = F_2$.

Veamos que Φ es suprayectiva. Supongamos que $G \in \mathrm{Map}_\bullet\Big((X, x_0), \big(\Omega(Y, y_0), c_{y_0}\big)\Big)$ es arbitrario. Definimos $F \in \mathrm{Map}_\bullet\big((SX, *), (Y, y_0)\big)$ por $F(x, t) = G(x)(t)$. Cabe recalcar que F esta bien definida porque G es continua y $G(x)$ es un lazo basado en y_0. Es claro que $\Phi(F) = G$. Por lo tanto, Φ es una biyección. $\square$

18. Considera el diagrama

$$\begin{array}{ccc}
\mathrm{Map}_\bullet\big((SX,*),(Y,y_0)\big) & \xrightarrow{\Phi} & \mathrm{Map}_\bullet\Big((X,x_0),\big(\Omega(Y,y_0),c_{y_0}\big)\Big) \\
\downarrow & & \downarrow \\
\big[(SX,*),(Y,y_0)\big] & \xrightarrow{\overline{\Phi}} & \Big[(X,x_0),\big(\Omega(Y,y_0),c_{y_0}\big)\Big]
\end{array}$$

Ver que si

$$\Phi : \mathrm{Map}_\bullet\big((SX,*),(Y,y_0)\big) \to \mathrm{Map}_\bullet\Big((X,x_0),\big(\Omega(Y,y_0),c_{y_0}\big)\Big)$$

esta dada por $\Phi(F)(x)(t) = F(x,t)$, entonces Φ pasa a las clases de homotopía y define la biyección $\overline{\Phi}$.

Proof. Primero veamos que pasa al cociente. Sean $F, G \in \mathrm{Map}_\bullet\big((SX,*),(Y,y_0)\big)$ tales que $F \simeq_H G$. Entonces $H : SX \times I \to Y$ es tal que $H((x,t),0) = F(x,t)$ y $H((x,t),1) = G(x,t)$ para todo $(x,t) \in SX$. Sea $H' : X \times I \to \Omega(Y,y_0)$ tal que $H'(x,s)(t) = H(x,t,s)$. Entonces H' es continua y $H'(x,0)(t) = H((x,t),0) = F(x,t) = \Phi(F)(x)(t)$, es decir $H'(x,0) = \Phi(F)(x)$ y análogamente, $H'(x,1) = \Phi(G)(x)$. Por lo tanto, $\Phi(F) \simeq_{H'} \Phi(G)$. En resumen, Φ pasa al cociente. Más aun, en el ejercicio anterior vimos que Φ es biyectiva y por lo tanto, tiene inversa Φ^{-1}. Es facil verificar que la aplicación

$$[F] \in \mathrm{Map}_\bullet\Big((X,x_0),\big(\Omega(Y,y_0),c_{y_0}\big)\Big) \mapsto [\Phi^{-1}(F)] \in \mathrm{Map}_\bullet\big((SX,*),(Y,y_0)\big)$$

es inversa de $\overline{\Phi}$ y por lo tanto, $\overline{\Phi}$ es una biyección. $\square$

19. Sea (X,x_0) es un espacio basado. Ver que $SX \cong X \wedge S^1$ dando el homeomorfismo donde $S^1 \cong I/\partial I$.

Proof. Antes que nada, recordemos que

$$SX = (X \times I)/(X \times \{0\}) \cup (X \times \{1\}) \cup (\{x_0\} \times I)$$

y

$$\begin{aligned}
X \wedge S^1 &= X \wedge (I/\partial I) \\
&= X \times (I/\partial I)/\big(X \vee (I/\partial I)\big) \\
&= X \times (I/\partial I)/\big(\{(a,*) \mid a \in X\} \cup \{(x_0,\overline{r}) \mid \overline{r} \in I/\partial I\}\big)
\end{aligned}$$

Denotemos por $\langle x,\overline{t}\rangle$ a la clase de equivalencia de $(x,\overline{t})$ en $X \wedge S^1$ y por $[x,t]$ a la clase de equivalencia de (x,t) en SX. Ahora si, sea

$$\begin{aligned}
f : X \wedge S^1 &\to SX \\
\langle x,\overline{t}\rangle &\mapsto [x,t].
\end{aligned}$$

Veamos que f esta bien definida. Supongamos que $\langle x,\overline{t}\rangle = \langle y,\overline{s}\rangle \in X \wedge S^1$. Entonces $(x,\overline{t}) = (y,\overline{s})$ o

$$(x,\overline{t}),(y,\overline{s}) \in \{(a,*) \mid a \in X\} \cup \{(x_0,\overline{r}) \mid \overline{r} \in I/\partial I\}.$$

Si $(x,\overline{t}) = (y,\overline{s})$, entonces $x = y$ y $t = s$ o $t,s \in \{0,1\}$. Si $x = y$ y $t = s$, entonces $[x,t] = [y,s]$. Si $x = y$ y $t,s \in \{0,1\}$, entonces $[x,t] = * = [y,s]$. Si

$$(x,\overline{t}),(y,\overline{s}) \in \{(a,*) \mid a \in X\} \cup \{(x_0,\overline{r}) \mid \overline{r} \in I/\partial I\}.$$

entonces consideremos varios subcasos. Si $(x,\overline{t}) = (a,*)$ para alguna $x \in X$, entonces $t = 0,1$, entonces $(x,t) \in (X \times \{0\}) \cup (X \times \{1\})$ y por lo tanto, $f(x,\overline{t}) = [x,t] = *$. Si $(x,\overline{t}) = (x_0,\overline{r})$ para alguna $\overline{r} \in I/\partial I$, entonces $(x,t) \in \{x_0\} \times I$ y por lo tanto, $f(x,\overline{t}) = [x,t] = *$. Análogamente (en cualquier subcaso), $f(y,\overline{s}) = *$. Por lo tanto, $f(x,\overline{t}) = f(y,\overline{s})$.

Veamos que f es inyectiva. Si $f(x,\overline{t}) = f(y,\overline{s})$, entonces $[x,t] = [y,s]$, entonces $(x,t) = (y,s)$ o

$$(x,t),(y,s) \in (X \times \{0\}) \cup (X \times \{1\}) \cup (\{x_0\} \times I)$$

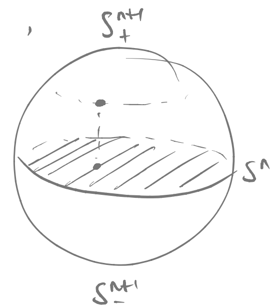
Si $(x,t) = (y,s)$, entonces claramente $\langle x,\overline{t}\rangle = \langle y,\overline{s}\rangle$. Si

$$(x,t),(y,s) \in (X \times \{0\}) \cup (X \times \{1\}) \cup (\{x_0\} \times I)$$

entonces consideremos varios subcasos. Si $(x,t) \in X \times \{0\}$, entonces $\overline{t} = *$ y por lo tanto, $\langle x,\overline{t}\rangle = *$. Si $(x,t) \in X \times \{1\}$, entonces $\overline{t} = *$ y por lo tanto, $\langle x,\overline{t}\rangle = *$. Finalmente, si $(x,t) \in \{x_0\} \times I$, entonces $x = x_0$ y por lo tanto $\langle x,\overline{t}\rangle = *$. Análogamente (en cualquier subcaso), $\langle y,\overline{s}\rangle = *$. Por lo tanto, $\langle x,\overline{t}\rangle = \langle y,\overline{s}\rangle$.

La suprayectividad de f es clara y por lo tanto, f es un homeomorfismo. $\square$

(20) Definimos $D^{n+1} = \{ x \in \mathbb{R}^{n+2} \mid |x| \leq 1 \,,\ x_{n+2} = 0 \}$,



$S^{n+1}_+ = \{ x \in \mathbb{R}^n \mid |x| = 1 \,,\ x_{n+2} \geq 0 \}$,

$S^{n+1}_- = \{ x \in \mathbb{R}^n \mid |x| = 1 \,,\ x_{n+2} \leq 0 \}$.

Sea $p_\pm : (D^{n+1}, S^n) \to (S^{n+1}_\pm, S^n)$

$$p_\pm (x_1, \dots, x_{n+1}, 0) = (x_1, \dots, x_{n+1}, \pm\sqrt{1 - \textstyle\sum_{i=1}^{n+1} x_i^2})$$

Ejercicio: Ver que $p_\pm$ es un homeomorfismo con inverso

$$p(x_1, \dots, x_{n+1}, x_{n+2}) = (x_1, \dots, x_{n+1}, 0).$$

Dem. $\forall\, (x_1, \dots, x_{n+1}, x_{n+2}) \in S^{n+1}_\pm$,

$$\begin{aligned} p_\pm \circ p\,(x_1, \dots, x_{n+1}, x_{n+2}) &= p_\pm (x_1, \dots, x_{n+1}, 0) \\ &= (x_1, \dots, x_{n+1}, \pm\sqrt{1 - \textstyle\sum_{i=1}^{n+1} x_i^2}) \\ &= (x_1, \dots, x_{n+1}, \pm x_{n+2}) \end{aligned}$$

Donde la ultima igualdad se cumple porque

$(x_1, \dots, x_{n+1}, x_{n+2}) \in S^{n+1}_\pm$ & $\therefore$ $1 = \sum_{i=1}^{n+2} x_i^2$.

Por otro lado, $\forall\, (x_1, \dots, x_{n+1}, 0) \in D^{n+1}$

$$\begin{aligned} p \circ p_\pm (x_1, \dots, x_{n+1}, 0) &= p\left(x_1, \dots, x_{n+1}, \sqrt{1 - \textstyle\sum_{i=1}^{n+1} x_i^2}\right) \\ &= (x_1, \dots, x_{n+1}, 0). \end{aligned}$$

$\therefore$ (como p y $p_\pm$ son claramente continuas) $p_\pm$ es un homeomorfismo con inversa p. $\square$

(21) Sea $h: I \times S^n \to S^{n+1}$ donde $s_0 = (1, 0, \dots, 0)$

$$h(t,x) = \begin{cases} p_-(2tx + (1-2t)s_0) & \text{si } 0 \leq t \leq 1/2 \\ p_+(2(1-t)x + (2t-1)s_0) & \text{si } 1/2 \leq t \leq 1/2 . \end{cases}$$

Entonces h es continua y como $h(0,x) = p_-(s_0) = s_0$ y $h(1,x) = p_+(s_0) = s_0$, entonces h pasa al cociente y tenemos

$$\begin{tikzcd} (I/\partial I) \times S^n \arrow[r, "\hat{h}"] \arrow[d] & S^{n+1} \\ S^1 \wedge S^n \arrow[ur, dashed, "\bar{h}"'] & \end{tikzcd}$$

Ver que $\hat{h}$ pasa al cociente y define $\bar{h}$ que es un homeomorfismo.

Dem. Por def, $S^1 \wedge S^n = {S^1 \times S^n}/{S^1 \vee S^n}$. Por lo tanto, para ver que $\hat{h}$ pasa al cociente, hay que ver que $\hat{h}$ es constante en $S^1 \vee S^n$. El punto base de $S^1 \cong I/\partial I$ es $[0] = [1]$, el punto base de S^n es $s_0 = (1, 0, \dots, 0)$.

Recordemos que $S^1 \vee S^n = \{ ([t], s_0) \mid [t] \in I/\partial I \} \cup \{ ([0], x) \mid x \in S^n \}$.

Entonces para todo $x \in S^n$,

$$\hat{h}([0], x) = p_-(s_0) = p_+(s_0)$$

Denotemos por c a la constante $c = p_-(s_0) = p_+(s_0)$.

Por otro lado, para todo $[t] \in I/\partial I$,

$$\tilde{h}([t], s_0) = \begin{cases} \rho_-(2t s_0 + (1-2t) s_0) & \text{si } 0 \leq t \leq 1/2 \\ \rho_+(2t(1-s_0) + (2t-1) s_0) & \text{si } \frac{1}{2} \leq t \leq 1 \end{cases}$$

$$= \begin{cases} \rho_-(s_0) \\ \rho_+(s_0) \end{cases}$$

$$= c$$

$\therefore$ $\tilde{h}$ es constante en $S^1 \vee S^n$.

(22) Definimos un producto

$\Omega(X, x_0) \times \Omega(X, x_0) \xrightarrow{\mu} \Omega(X, x_0)$

y un inverso $\Omega(X, x_0) \xrightarrow{j} \Omega(X, x_0)$

$\mu(\alpha, \beta) = \alpha * \beta$, $j(\alpha) = \overline{\alpha}$.

Ver que μ y j son cont. donde $\Omega(X, x_0)$ tiene la topología compacto abierta.

Dem. Primero vemos que μ es continua. Sup que $K \subseteq I$ es compacto y que $U \subseteq X$ es abierto.

Como $\Omega(X, x_0)$ tiene la topología compacto abierta, basta ver que $\mu^{-1}(V(K, U))$ es abierto donde

$V(K, U) := \{ \sigma \in \Omega(X, x_0) \mid \sigma(K) \subseteq U \}$. Sea

$(\sigma_1, \sigma_2) \in \mu^{-1}(V(K, U))$. Queremos encontrar $K_1, K_2 \subseteq I$ compactos y $U_1, U_2 \subseteq X$ abiertos tales que

$(\sigma_1, \sigma_2) \in V(K_1, U_1) \times V(K_2, U_2) \subseteq \mu^{-1}(V(K, U))$.

Como $(\sigma_1, \sigma_2) \in \mu^{-1}(V(K, U))$, entonces,

$\underbrace{\mu(\sigma_1, \sigma_2)}_{\sigma_1 * \sigma_2} \in V(K, U)$. Esto significa que

$\sigma_1 * \sigma_2 (K) \subseteq U$. Ahora bien, como por def,

$$\sigma_1 * \sigma_2 (t) = \begin{cases} \sigma_1(2t) & \text{si} \quad t \in [0, 1/2] \\ \sigma_2(2t-1) & \text{si} \quad t \in [1/2, 1] \end{cases}$$

Entonces, $\sigma_1 * \sigma_2 (K) \subseteq \mathcal{U}$ implica que

$\sigma_1(2t)$ $\forall t \in K \cap [0, 1/2]$ & $\sigma_2(2t-1)$ $\forall t \in K \cap [1/2, 1]$.

Sea $f_1 : [0, 1/2] \longrightarrow [0,1]$ $\ni$ $t \longmapsto 2t$ &

$f_2 : [1/2, 1] \longmapsto [0,1]$ $\ni$ $t \longmapsto 2t-1$

Pongamos $K_1 \underset{\wedge}{=} f_1(K \cap [0, 1/2])$, $K_2 \underset{\wedge}{=} f_2(K \cap [1/2, 1])$ y

la imagen de un compacto bajo una funcion continua es compacta

$\mathcal{U}_1 = \mathcal{U}_2 = \mathcal{U}$. Claramente,

$(\sigma_1, \sigma_2) \in V(K_1, \mathcal{U}_1) \times V(K_2, \mathcal{U}_2)$.

Veamos que $V(K_1, \mathcal{U}_1) \times V(K_2, \mathcal{U}_2) \subseteq \mu^{-1}(V(K, \mathcal{U}))$.

Sea $(\tau_1, \tau_2) \in V(K_1, \mathcal{U}_1) \times V(K_2, \mathcal{U}_2)$. Veamos que

$\tau_1 * \tau_2 (K) \subseteq \mathcal{U}$. Sea $x \in \tau_1 * \tau_2 (K)$.

<u>Caso 1</u> $x = \tau_1(2t)$, p.a. $t \in K \cap [0, 1/2]$. Como

$\tau_1 \in V(K_1, \mathcal{U}_1)$ y $K_1 = f_1(K \cap [0, 1/2])$, entonces

$x = \tau_1(2t) \in \mathcal{U}$.

<u>Caso 2</u> $x = \tau_2(2t-1)$, p.a. $t \in K \cap [1/2, 1]$. Es analogo.

$\therefore$ μ es continua.

Ahora veamos que j es continua. Sea $K \subseteq I$ compacto y $\mathcal{U} \subseteq X$ abierto. De nuevo, basta ver que $j^{-1}(V(K, \mathcal{U}))$ es abierto. Sea $\sigma \in j^{-1}(V(K, \mathcal{U}))$. Entonces $\bar{\sigma}(K) \subseteq \mathcal{U}$. Equivalentemente,

$$\sigma(1-t) \in \mathcal{U} \quad \forall t \in K \quad \cdots \quad (1)$$

Sea $f : [0,1] \to [0,1]$ y $t \mapsto 1-t$.

Veamos que

$$\sigma \in V(f(K), \mathcal{U}) \subseteq j^{-1}(V(K, \mathcal{U}))$$

La pertenencia es consecuencia inmediata de (1). Para la inclusión, sea $\tau \in V(f(K), \mathcal{U})$. Entonces, $\tau(f(K)) \subseteq \mathcal{U}$. Equivalentemente, $\tau(1-t) \in \mathcal{U}$ $\forall t \in K$. Equivalentemente $\bar{\tau}(t) \in \mathcal{U}$ $\forall t \in K$. Es decir, $j(\tau) \in V(K, \mathcal{U})$.

$\therefore$ j es continua. $\square$

(23) Ver que se tienen homeomorfismos

$$\text{Map}((S^0,-1),(Y,y_0)) \cong \text{Map}(pt, Y) \cong Y$$

Primero veamos que $\text{Map}((S^0,-1),(Y,y_0)) \cong Y$. Sea

$$\varphi : \text{Map}((S^0,-1),(Y,y_0)) \longrightarrow Y$$
$$f \longmapsto f(1)$$

Como $S^0 = \{-1,1\}$ y todo elemento de $\text{Map}((S^0,-1),(Y,y_0))$ satisface $-1 \longmapsto y_0$, entonces φ es una biyección con inversa

$$\varphi^{-1} : Y \longrightarrow \text{Map}((S^0,-1),(Y,y_0))$$
$$y \longmapsto f_y$$

Donde $f_y(x) = \begin{cases} y_0 & \text{si } x = -1 \\ y & \text{si } x = 1 \end{cases}$

Veamos que φ es continua. Sea $U \subseteq Y$ abto. Entonces

$$\varphi^{-1}(U) = \{ f_y \mid y \in U \} = V(\{1\}, U)$$

es abto porque $\{1\}$ es compacto, y la familia de los

$V(K,W) = \{ f \in \text{Map}((S^0,-1),(Y,y_0)) \mid f(K) \subseteq W \}$ con K compacto & W abierto

es subbase de la topología compacto abierta. $\therefore \varphi$ es continua.

Veamos que φ^{-1} es continua. Basta ver que

$\varphi(V(K,W))$ es abierto para todo $K \subseteq S^0$ compacto

y todo $W \subseteq Y$ abierto. Sea $W \subseteq Y$ abierto. Como

$S^0 = \{-1, 1\}$, basta ver que

$\varphi(V(K,W))$ es abierto con $K = S^0, \{-1\}, \{1\}$.

<u>Caso 1</u> $y_0 \in W$

$\varphi(V(S^0, W)) = W$

$\varphi(V(\{-1\}, W)) = Y$

$\varphi(V(\{1\}, W)) = W$

<u>Caso 2</u> $y_0 \notin W$

$\varphi(V(S^0, W)) = \phi$

$\varphi(V(\{-1\}, W)) = \phi$

$\varphi(V(\{1\}, W)) = W$

$\therefore$ φ es continua.

$\therefore$ $\mathrm{Map}((S^0, \{-1\}), (Y, y_0)) \cong Y$.

Ahora veamos que $\mathrm{Map}(pt, Y) \cong Y$. Denotemos $pt = \{*\}$

y sea $\phi : \mathrm{Map}(pt, Y) \longrightarrow Y$ $\text{-}\!\!/$ $\phi(g) = g(*)$.

Claramente ϕ es una biyeccion con inversa

$$\phi^{-1} : Y \longrightarrow Map(pt, Y)$$
$$y \longmapsto g_y$$

Donde $g_y(*) = y$. Veamos que ϕ es continua. Sea $\mathcal{U} \leq Y$ abierto. Entonces

$$\phi^{-1}(\mathcal{U}) = \{ g_y \mid y \in \mathcal{U} \} = V(\{*\}, \mathcal{U}) \quad \text{es abierto}$$

porque $\{*\}$ es compacto & $Map(pt, Y)$ tiene la topologia compacto abierta. Veamos que φ^{-1} es continua. Basta ver que $\phi(V(K, W))$ es abierto $\forall V(K, W)$. Pero como estamos en $Map(pt, Y)$, entonces todo $V(K, W)$ es de la forma $V(\{*\}, W)$. Como $\phi(V(\{*\}, W)) = W$, obtenemos lo deseado. $\square$

(25) Sea $f:(D^n, S^{n-1}, *) \longrightarrow (X, A, a_0)$ continua.

a) Supongamos que $[f]=0=[C_{a_0}]$. Entonces existe

$G:(D^n\times I, S^{n-1}\times I, \{*\}\times I) \longrightarrow (X, A, a_0)$ homotopía

entre f y C_{a_0}. Definimos

$H: D^n\times I \longrightarrow X$ por

$$H(s,t) = \begin{cases} G\left(\frac{2s}{2-t}, t\right) & \text{si } 0\leq |s| \leq 1-t/2 \\ G\left(\frac{s}{|s|}, 2-2|s|\right) & \text{si } 1-t/2 \leq |s| \leq 1 \end{cases}.$$

Ver que $\exists g$ / $f \simeq_H g$ rel S^{n-1} donde $g(D^n)\subseteq A$.

b) Conversamente, si $f\simeq_H g$ rel S^{n-1} con $g(D^n)\subseteq A$ definimos

$$G(s,t) = \begin{cases} H(s,2t) & \text{si } 0\leq t\leq 1/2 \\ g((2-2t)s + 2(t-1)*) & \text{si } \frac{1}{2}\leq t\leq 1 \end{cases}$$

Ver que $[f]=0=[C_{a_0}]$.

Dem. a) Sea $g: D^n \longrightarrow X$ dada por $g(s)=H(s,1)$.

Veamos que $f\simeq_H g$ rel S^{n-1}. La continuidad de g es consecuencia inmediata de la continuidad de H. Además, como

evaluando directamente & ocupando que $|s|=1$

$$H(s,0) = G(s,0) = f(s) \quad \forall s\in S^{n-1}$$

porque G es homotopía de f a C_{a_0}.

entonces, $f\simeq_H g$. Resta ver que esta homotopía es rel S^{n-1}.

Si $s \in S^{n-1} \implies |s| = 1 \implies$ estamos en el 2^{do} caso de la def de H y por lo tanto,

$$H(s,t) = G\left(\frac{s}{|s|}, 2-2|s|\right)$$

$$= G(s,0) \quad (\text{pues } |s| = 1)$$

$$= f(s) \quad (\text{pues } G \text{ es homotopía de } f \text{ a } c_{a_0}).$$

$\therefore$ Como $f(s)$ no depende de t, entonces H es relativa a S^{n-1}.

Ahora veamos que $g(D^n) \subseteq A$. Sea $s \in D^n \implies$

$$g(s) = H(s,1)$$

$$= \begin{cases} G(2s, 1) & \text{si } 0 \leq |s| \leq 1 - t/2 \\ G\left(\frac{s}{|s|}, 2-2|s|\right) & \text{si } 1 - t/2 \leq |s| \leq 1. \end{cases}$$

Si $0 \leq |s| \leq 1 - t/2$, entonces,

$$g(s) = G(2s, 1) \underset{f \simeq_G c_{a_0}}{=} c_{a_0}(2s) = a_0 \in A$$

Si $1 - t/2 \leq |s| \leq 1$, entonces

$$g(s) = G\left(\frac{s}{|s|}, 2-2|s|\right) \in A$$

pues $G(S^{n-1} \times I) \subseteq A$ por hip & $\frac{s}{|s|} \in S^{n-1}$.

$\therefore g(D^n) \subseteq A$.

b) Veamos que G es homotopía de f a C_{a_0}

Recordemos que

$$G(s,t) = \begin{cases} H(s,2t) & \text{si } 0 \leq t \leq 1/2 \\ g\left((2-2t)s + (2t-1)*\right) & \text{si } \frac{1}{2} \leq t \leq 1 \end{cases}$$

Entonces, $\forall s \in D^n$

$G(s,0) = H(s,0) = f(s)$ pues $f \simeq_H g$

También,

$G(s,1) = g(*) = a_0 = C_{a_0}(s)$

$\therefore f \simeq_G C_{a_0}$. Resta ver que $G(s,t) \in A \;\; \forall s \in S^{n-1}$

Sea $s \in S^{n-1}$. Si $0 \leq t \leq 1/2$, entonces

H es relativa a S^{n-1} y $\therefore$ no depende de t

$G(s,t) = H(s,2t) = H(s,0) = g(s) \in A$ porque $g(D^n) \subseteq A$.

Si $1/2 \leq t \leq 1$, entonces $(2-2t)s + (2t-1)* \in D^n$ porque es un punto en el segmento con extremos s y $*$. Por lo tanto, como $g(D^n) \subseteq A$, entonces

$G(s,t) = g\left((2-2t)s + (2t-1)*\right) \in A$.

$\therefore [f] = [C_{a_0}] \in \pi_n(X, A, a_0)$

(26) Sea $F : \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ un funtor. Ver que si $f \in Mor_{\mathcal{C}}(X, Y)$ es un isomorfismo, entonces $F(f) : F(X) \to F(Y)$ es un isomorfismo en $\mathcal{D}$.

Dem. Como f es un isomorfismo, entonces existe otro morfismo $g : Y \to X$ tal que $g \circ f = Id_X$ y $f \circ g = Id_Y$.

Entonces $F(g \circ f) = F(Id_X)$. Entonces, como F es un funtor, $F(g) \circ F(f) = Id_{F(X)}$.

Analogamente, $F(f) \circ F(g) = Id_{F(Y)}$.

Por lo tanto, $F(f)$ es un isomorfismo en $\mathcal{D}$. $\square$

27 Definir la composición de funtores.

Sean $\mathcal{C}_1$, $\mathcal{C}_2$, $\mathcal{C}_3$ categorías y $F : \mathcal{C}_1 \to \mathcal{C}_2$, $G : \mathcal{C}_2 \to \mathcal{C}_3$ funtores. Definimos el funtor $G \circ F : \mathcal{C}_1 \to \mathcal{C}_3$ de manera que

$\forall X \in \operatorname{obj} \mathcal{C}_1 \quad (G \circ F)(X) := G(F(X))$ y a cada $f : X \to Y$ morfismo

$(G \circ F)(f) = G(F(f))$.

Veamos que $G \circ F$ es en efecto un morfismo.

1) $$\begin{aligned} G \circ F(Id_X) &= G(F(Id_X)) \\ &= G(Id_{F(X)}) \\ &= Id_{G(F(X))} \end{aligned}$$

2) $$\begin{aligned} (G \circ F)(g \circ f) &= G(F(g \circ f)) \\ &= G(F(g) \circ F(f)) \\ &= G(F(g)) \circ G(F(f)) \\ &= (G \circ F)(g) \circ (G \circ F)(f). \qquad \square \end{aligned}$$

(28) ¿Qué es un isomorfismo en H-Top?

Por definición $Mor_{H\text{-}Top}(X,Y) = [X,Y]$. Por lo tanto

$[f] \in [X,Y]$ es un isomorfismo si $\exists\, [g] \in [Y,X]$:)

$$\underbrace{[g]\circ[f]}_{[g\circ f]} = [Id_X] \quad \& \quad \underbrace{[f]\circ[g]}_{[f\circ g]} = [Id_Y]$$

Equivalentemente,

$g\circ f \simeq Id_X \quad \& \quad f\circ g \simeq Id_Y$.

Por lo tanto, f es un isomorfismo en H-Top $\Leftrightarrow$

f es una equivalencia homotópica. $\square$

(29) Ver que cada punto $x \in S^1$ tiene una vecindad $\mathcal{U}$ de manera que $e^{-1}(\mathcal{U}) = \dot{\bigcup}_i V_i$ tales que $e|_{V_i}$ es un homeomorfismo en su imagen.

Dem. Usaremos la siguiente propiedad de la aplicación exponencial compleja. $\forall t \in \mathbb{R}$, $e|_{(-\frac{1}{2}+t, t+\frac{1}{2})}$ es un homeomorfismo sobre $S^1 \setminus \{e^{2\pi(t+\frac{1}{2})i}\}$. Ahora sí, sea $x \in S^1$ fijo y arbitrario. Como $x \in S^1$, existe $\theta \in \mathbb{R}$ $\mid$ $x = e^{2\pi\theta i}$. Sea $\mathcal{U} := S^1 \setminus \{-x\}$. Notemos que $-x = e^{2\pi(\theta+1/2)i}$ y por la propiedad mencionada al inicio, entonces $e|_{(-\frac{1}{2}+\theta, \theta+\frac{1}{2})}$ es un homeomorfismo sobre $S^1 \setminus \{-x\}$. En general (de nuevo por la propiedad mencionada al inicio y porque e tiene periodo 1), entonces

$$e^{-1}(\mathcal{U}) = \dot{\bigcup_{n \in \mathbb{Z}}} \left(n+\theta-\frac{1}{2}, n+\theta+\frac{1}{2}\right)$$

y $e|_{(n+\theta-\frac{1}{2}, n+\theta+\frac{1}{2})}$ es homeo sobre $S^1 \setminus \{-x\}$. $\square$

(30) Sea $f : X \to \Lambda$ donde Λ tiene la topología discreta. Ver que f es continua $\Leftrightarrow$ f es localmente constante.

Recordemos que si Λ tiene la topología discreta, entonces los singuletes son una base de Λ.

$\Rightarrow)$ Sea $x \in X$. Como f es continua (y $\{f(x)\}$ es abierto) entonces, $f^{-1}(\{f(x)\})$ es abierto y obviamente f es constante (con valor $f(x)$) en este abierto vecindad de x.

$\Leftarrow)$ Basta ver que $f^{-1}(\{y\})$ es abierto $\forall y \in \Lambda$

Sea $x \in f^{-1}(\{y\})$. Como f es localmente constante, existe una vecindad V de x t.q. f es constante en V. Como $x \in f^{-1}(\{y\})$, entonces $f(x) = y$, entonces f es constantemente $f(x) = y$ en V y por lo tanto $x \in V \subseteq f^{-1}(\{y\})$. $\square$

(31) Consideremos el haz fibrado producto $p : X \times F \to X$ donde F es un espacio arbitrario. Ver que p es una fibración.

Dem. Sea Y un espacio arbitrario

$$\begin{tikzcd}
Y \times \{0\} \arrow[r, "\varphi"] \arrow[d, "i"'] & X \times F \arrow[d, "p"] \\
Y \times I \arrow[r, "H"'] \arrow[ur, dashed, "\hat{H}"] & X
\end{tikzcd}$$

Como el diagrama conmuta, $p \circ \varphi = H \circ i$. Denotamos por $q : X \times F \to F$ a la proyección canónica.

Definimos $\hat{H} : Y \times I \to X \times F$ por

$$(y,t) \mapsto \left(H(y,t) , q \circ \varphi(y,0) \right)$$

Entonces, $p \circ \hat{H}(y,t) = H(y,t)$ &

$$\begin{aligned}
\hat{H} \circ i \, (y,0) &= \left(H(y,0) , q \circ \varphi(y,0) \right) \\
&= \left(p \circ \varphi(y,0) , q \circ \varphi(y,0) \right) \quad \left(\text{pues } H \circ i = p \circ \varphi \right) \\
&= \varphi(y,0).
\end{aligned}$$

Por lo tanto, $p \circ \hat{H} = H$ & $\hat{H} \circ i = \varphi$, es decir, p es una fibración. $\square$

32) Ver que si $p : E \to X$ es cubriente, E conectable por trayectorias y $x_0 \in X$. Entonces la familia $\{ p_\# \pi_1(E,a) \mid a \in p^{-1}(x_0) \}$ es una clase de conjugación completa de subgrupos de $\pi_1(X, x_0)$.

Recordemos que en clase vimos la siguiente proposición:

Proposición: Sea $f : Z \to Y$ continua, Z un espacio conectable por trayectorias. Sea $y_0 \in Y$ & $z_0, z_1 \in f^{-1}(y_0)$.
Entonces $f_\#(\pi_1(Z, z_0))$ y $f_\#(\pi_1(Z, z_1))$ son subgrupos conjugados (de $\pi_1(Y, y_0)$).

Veamos que

$$[\gamma]^{-1} p_\# \pi_1(E,a) [\gamma] = p_\# \pi_1(E, (\widetilde{\overline{\gamma}})_a(1)).$$

Como X es conectable por trayectorias, al demostrar esto obtendremos lo deseado.

$\subseteq$) Sea $[\beta] \in \pi_1(E,a)$. Entonces,

$$
\begin{aligned}
[\gamma]^{-1} p_\# [\beta] \, [\gamma] &= [\overline{\gamma} * p \circ \beta * \gamma]. \\
&= [(p \circ (\widetilde{\overline{\gamma}})_a) * (p \circ \beta) * (p \circ \overline{(\widetilde{\overline{\gamma}})_a})] \\
&= p_\# [(\widetilde{\overline{\gamma}})_a * \beta * \overline{(\widetilde{\overline{\gamma}})_a}] \\
&\in p_\# \pi_1(E, \widetilde{\overline{\gamma}}_a(1))
\end{aligned}
$$

Donde la segunda igualdad se cumple porque

$$p \circ (\widetilde{\overline{\gamma}})_a = \overline{\gamma} \quad \text{y}$$

$$p \circ \overline{(\widetilde{\overline{\gamma}})_a}\,(s) = p \circ (\widetilde{\overline{\gamma}})_a(1-s) = \overline{\gamma}(1-s) = \gamma(s).$$

$\supseteq |$ Sea $[\beta'] \in \pi_1(E, (\widetilde{\overline{\gamma}})_a(1))$. Como

$$(\widetilde{\overline{\gamma}})_a(0) = a$$

$$(\widetilde{\overline{\gamma}})_a(1) = \beta'(0)$$

$$\beta'(1) = (\widetilde{\overline{\gamma}})_a(1) = \overline{(\widetilde{\overline{\gamma}})_a}(0)$$

$$\overline{(\widetilde{\overline{\gamma}})_a}(1) = (\widetilde{\overline{\gamma}})_a(0) = a$$

entonces $\beta := \overline{(\widetilde{\overline{\gamma}})_a} * \beta' * (\widetilde{\overline{\gamma}})$ esta bien definida

y $[\beta] \in \pi_1(E,a)$. Mas aun,

$$\begin{aligned} p \circ \beta &= p \circ \left(\overline{(\widetilde{\overline{\gamma}})_a} * \beta' * (\widetilde{\overline{\gamma}}) \right) \\ &= p \circ \overline{(\widetilde{\overline{\gamma}})_a} * p \circ \beta' * p \circ (\widetilde{\overline{\gamma}}) \\ &= \gamma * p \circ \beta' * \overline{\gamma} \end{aligned}$$

Por lo tanto,

$$\begin{aligned} [\gamma]^{-1} \cdot p_{\#}[\beta] \cdot [\gamma] &= [\overline{\gamma} * (p \circ \beta) * \gamma] \\ &= [\overline{\gamma} * \gamma * (p \circ \beta') * \overline{\gamma} * \gamma] \\ &= [p \circ \beta'] \end{aligned}$$

$\therefore \quad p_\# [\beta'] \in [\gamma]^{-1} p_\# \pi_1(E, a) [\gamma]$

$\therefore \quad p_\# \pi_1(E, (\widetilde{\gamma})_a(1)) = [\gamma]^{-1} p_\# \pi_1(E, a) [\gamma]$

Juntando esto con la proposicion mencionada al inicio de la demostracion obtenemos lo deseado. $\square$

(33) Ver que tenemos una acción por la derecha

$X^n \times \Sigma_n \longrightarrow X^n$ dada por

$(x_1, \dots, x_n) \cdot \sigma = (x_{\sigma(1)}, \dots, x_{\sigma(n)})$ donde

$\sigma \in \Sigma_n$ = el n-grupo simétrico.

Sea $(x_1, \dots, x_n) \in X^n$. Si $e = id_{\bar{n}}$ es el neutro de Σ_n,

entonces $(x_1, \dots, x_n) \cdot e = (x_{e(1)}, \dots, x_{e(n)}) = (x_1, \dots, x_n)$.

Por otro lado, sean $\sigma, \tau \in \Sigma_n$. Entonces,

$$
\begin{aligned}
(x_1, \dots, x_n) \cdot (\sigma \circ \tau) &= (x_{\sigma \circ \tau(1)}, \dots, x_{\sigma \circ \tau(n)}) \\
&= (x_{\sigma(\tau(1))}, \dots, x_{\sigma(\tau(n))}) \\
&= (x_{\tau(1)}, \dots, x_{\tau(n)}) \cdot \sigma \\
&= ((x_1, \dots, x_n) \cdot \tau) \cdot \sigma
\end{aligned}
$$

Por lo tanto es acción por la derecha. $\square$

(34) Ver que hay una biyección

$Izq = \{ G \times X \xrightarrow{\cdot} X \mid \cdot$ es una acción por la izquierda $\}$ en

$Der = \{ X \times G \xrightarrow{\cdot} X \mid \cdot$ es una acción por la derecha $\}$.

Sea $\varphi : Izq \longrightarrow Der$)

$$(G \times X \xrightarrow{\cdot} X) \longmapsto \left(\begin{array}{ccc} X \times G & \xrightarrow{\varphi(\cdot)} & X \\ (x, g) & \longmapsto & \underbrace{g^{-1} \cdot x}_{\cdot (g^{-1}, x)} \end{array} \right)$$

Veamos que φ está bien definida. Específicamente, veamos que $\varphi(\cdot)$ es una acción derecha.

1) Si $x \in X$ y $e \in G$ es el neutro $\Longrightarrow$

$\Phi(\cdot)(e, g) = e^{-1} \cdot x = e \cdot x = x$.

2) $\forall x \in X \quad \forall g, h \in G$

$\Phi(\cdot) (\Phi(\cdot)(x, g), h) =$

$h^{-1} \cdot \Phi(\cdot)(x, g) =$

$h^{-1} \cdot (g^{-1} \cdot x) =$

$(h^{-1} \cdot g^{-1}) \cdot x =$

$(gh)^{-1} \cdot x$.

$\therefore \varphi$ está bien definida

Veamos que φ es biyección. Específicamente, veamos que ψ: Der $\to$ Izq. Dada por

$$\left(X\times G \xrightarrow{*} X \right) \longmapsto \left(\begin{array}{ccc} G\times X & \xrightarrow{\psi(*)} & X \\ (g,x) & \longmapsto & x\cdot g^{-1} \end{array} \right)$$

es inversa de φ.

$$\begin{aligned}
\psi\circ\varphi(\cdot)\ (g,x) &= \varphi(\cdot)\,(x,g^{-1}) \\
&= \cdot\,((g^{-1})^{-1},x) \\
&= \cdot\,(g,x)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\varphi\circ\psi(*)\ (x,g) &= \psi(*)\,(g^{-1},x) \\
&= *\,(x,(g^{-1})^{-1}) \\
&= *\,(x,g).
\end{aligned}$$

$\therefore$ φ es biyección.

(35) Sea $G \times X \to X$ una acción y un elemento $x \in X$ definimos $\gamma_x : G \to X$ como $\gamma_x(g) = g \cdot x$ que es claramente continua. γ_x pasa al cociente y define $\bar{\gamma}_x : G/G_x \to O(x)$ por $\bar{\gamma}_x([g]) = \gamma_x(g)$.

Ver que $\bar{\gamma}_x$ es inyectiva.

Dem. $\forall g, h \in G$,

$\bar{\gamma}_x([g]) = \bar{\gamma}_x([h]) \Longrightarrow$

$\gamma_x(g) = \gamma_x(h) \Longrightarrow$

$g \cdot x = h \cdot x \Longrightarrow$

$h^{-1}g \cdot x = x \Longrightarrow$

$h^{-1}g \in G_x \Longrightarrow$

$[g] = [h] \in G/G_x$. $\square$

(36) Sea $p: E \to X$ cubriente, $x_0 \in X$. Definimos la acción $p^{-1}(x_0) \times \pi_1(X, x_0) \longrightarrow p^{-1}(x_0)$ como sigue

sea $a \in p^{-1}(x_0)$, $[\alpha] \in \pi_1(X, x_0) = [(I, \partial I), (X, x_0)]$.

$a \cdot [\alpha] = \hat{\alpha}_a(1) \in p^{-1}(x_0)$.

Ver que esta bien definida y que es una acción por la derecha.

Primero veamos que esta bien definida. Específicamente, veamos que no depende del representante de $[\alpha] \in \pi_1(X, x_0)$

Sean $\alpha, \beta \in \Omega(X, x_0)$ t.q. $[\alpha] = [\beta]$, i.e.,

$\alpha \simeq \beta$ rel $\{0,1\}$. Entonces, por lo visto en clase

$\hat{\alpha}_a \simeq \hat{\beta}_a$ rel $\{0,1\}$. En particular,

$\hat{\alpha}_a(1) = \hat{\beta}_a(1)$. Por lo tanto,

$a \cdot [\alpha] = \hat{\alpha}_a(1) = \hat{\beta}_a(1) = a \cdot [\beta]$. Ahora veamos que es acción por la derecha.

1) Sea c_{x_0} el lazo constante x_0. Entonces $[c_{x_0}]$ es el neutro de $\pi_1(X, x_0)$ y

$a \cdot [c_{x_0}] = \widehat{(c_{x_0})}_a(1) = c_a(1) = a$.

2) $\forall\ [\alpha], [\beta] \in \pi_1(X, x_0)$

$$
\begin{aligned}
a \cdot ([\alpha][\beta]) &= a \cdot ([\alpha * \beta]) \\
&= \widetilde{(\alpha * \beta)}_a(1) \\
&= \hat{\alpha}_a * \hat{\beta}_{\hat{\alpha}_a(1)}(1) \\
&= \hat{\beta}_{\hat{\alpha}_a(1)}(1) \\
&= (\hat{\alpha}_a(1)) \cdot [\beta] \\
&= (a \cdot [\alpha]) \cdot [\beta] \qquad \square
\end{aligned}
$$

(37) Consideremos la aplicación cubriente exponencial $e: \mathbb{R} \to S^1$.

Sea $\gamma_0 : \pi_1(S^1, 1) \longrightarrow \mathbb{Z}$

$$[\gamma] \longmapsto \hat{\gamma}_0(1).$$

Ver que γ_0 es un homomorfismo y por lo tanto un iso.

Veamos que si $n \in \mathbb{Z}$ y α es un lazo de S^1 basado en 1,

entonces $\hat{\alpha}_n \overset{(*)}{=} \hat{\alpha}_0 + n$. Tenemos

$$e(\hat{\alpha}_0 + n) = e(\hat{\alpha}_0)\, e(n) = \alpha \cdot e^{2\pi i n} = \alpha$$

$\therefore$ $\hat{\alpha}_0 + n$ es un levantamiento de α

Además, $(\hat{\alpha}_0 + n)(0) = \hat{\alpha}_0(0) + n = 0 + n = n$

$\therefore$ $\hat{\alpha}_n = \hat{\alpha}_0 + n$ (por unicidad)

Ahora sí, veamos que γ_0 es homomorfismo.

$$\begin{aligned}
\gamma_0([\alpha][\beta]) &= \gamma_0([\alpha * \beta]) \\
&= \widehat{(\alpha * \beta)}_0(1) \\
&= (\hat{\alpha}_0 * \hat{\beta}_{\hat{\alpha}(0)})(1) \\
&= \hat{\beta}_{\hat{\alpha}_0(1)}(1) \\
&= \hat{\beta}_0(1) + \hat{\alpha}_0(1) \qquad \text{(por la igualdad (*))} \\
&= \gamma_0([\alpha]) + \gamma_0([\beta]).
\end{aligned}$$

$\square$

(38) Sea $\mathbb{T} := I \times I / \sim$ donde $(s,0) \sim (s,1)$ y $(0,t) \sim (1,t)$, para todo $s,t \in I$. En particular, si $s \neq 0,1$ y $t \neq 0,1$, entonces $[s,t] = \{(s,t)\}$. Ver que $\mathbb{T} \cong S^1 \times S^1$.

Sea $\varphi : I \times I \longrightarrow S^1 \times S^1$

$$(t,s) \longmapsto (e^{2\pi i t}, e^{2\pi i s}).$$

Veamos que φ pasa al cociente:

$$\varphi(0,s) = (e^0, e^{2\pi i s}) = (1, e^{2\pi i s})$$

$$\varphi(1,s) = (e^{2\pi i}, e^{2\pi i s}) = (1, e^{2\pi i s})$$

y por lo tanto $\varphi(0,s) = \varphi(1,s)$.

Analogamente, $\varphi(t,0) = \varphi(t,1)$. Por lo tanto φ pasa al cociente.

$$\begin{tikzcd}
I \times I \arrow[r, "\varphi"] \arrow[d, "p"'] & S^1 \times S^1 \\
\mathbb{T} \arrow[ur, dashed, "\Phi"'] &
\end{tikzcd}$$

Como φ es suprayectiva, Φ tambien. Veamos que Φ es inyectiva. Sean $[t,s], [t',s'] \in \mathbb{T}$ /
$\Phi[t,s] = \Phi[t',s']$. Entonces,

$(e^{2\pi i t}, e^{2\pi i s}) = (e^{2\pi i t'}, e^{2\pi i s'})$.

Entonces, $2\pi i t - 2\pi i t' \in 2\pi i \mathbb{Z}$ &

$2\pi i s - 2\pi i s' \in 2\pi i \mathbb{Z}$. Entonces,

$t - t' \in \mathbb{Z}$ & $s - s' \in \mathbb{Z}$. Entonces, como

$t, s, t', s' \in I \implies$

$(t - t' = 0$ o $t - t' = 1)$ &

$(s - s' = 0$ o $s - s' = 1)$.

Usando esto, la definición de $\mathcal{U}$, y procediendo por casos, obtenemos lo deseado.

Resta probar que Φ es abierta. Sea $\mathcal{U} \subseteq \mathbb{T}$ abierto.

Como $\mathbb{T}$ tiene la topología cociente, entonces

$\mathcal{U} = p(\bar{\mathcal{U}})$ con $\bar{\mathcal{U}} \subseteq I \times I$ un abierto estable bajo la relación de equivalencia. Entonces

$\Phi(\mathcal{U}) = \Phi p(\bar{\mathcal{U}}) = \varphi(\bar{\mathcal{U}})$.

Como queremos ver que $\Phi(\mathcal{U})$ es abierto, basta ver que $\varphi(\bar{\mathcal{U}})$ es abierto. Sin embargo, esto es consecuencia de que

$\varphi(t, s) = (e^{2\pi i t}, e^{2\pi i s})$ y de que $\bar{\mathcal{U}}$ es estable. $\square$

(40) Ver que toda accion prop discontinua es libre.

Sea $\cdot : G \times X \longrightarrow X$ propiamente discontinua y sea $x \in X$ y $g_0 \in G$ $\ni$ $g_0 \cdot x = x$. Como $\cdot$ es propiamente discontinua, existe $\mathcal{U}$ una vecindad de x con $g\mathcal{U} \cap \mathcal{U} = \emptyset$ $\forall g \neq e$.

En particular si $g_0 \neq e$, entonces $g_0 \mathcal{U} \cap \mathcal{U} = \emptyset$ pero (como $g_0 \cdot x = x$) entonces $x \in g_0 \mathcal{U} \cap \mathcal{U} \neq \emptyset$. Por lo tanto $g_0 = e$.

$\therefore$ $G_x = \{e\}$ $\therefore$ $\cdot$ es libre. $\square$

(41) Sea $\cdot : G \times X \to X$ una accion propiamente discontinua, entonces $p : X \to X/G$ es cubriente.

Sea $\bar{x} \in X/G$. Como $\cdot : G \times X \to X$ es prop discontinua, entonces existe $\mathcal{U}_x \subseteq X$ vecindad de x $\ni$.

$g\mathcal{U}_x \cap \mathcal{U}_x = \phi$ $\forall g \neq e$. Mas aun, como p es abierta, entonces $p(\mathcal{U}_x)$ es una vecindad de $\bar{x}$. Veamos que esta cubierta parejamente. En clase vimos que

$$p^{-1}(p(\mathcal{U}_x)) = \bigcup_{g \in G}^{\cdot} g\,\mathcal{U}_x.$$

La union es disjunta porque la accion es propiamente discontinua.

Resta ver que $p\restriction_{g\mathcal{U}_x}$ es un homeomorfismo $\forall g \in G$.

Sean $ga, gb \in g\mathcal{U}_x$ (con $a, b \in \mathcal{U}_x$) $\ni$.

$p(ga) = p(gb)$. Esto es sii

$$\overline{ga} = \overline{gb} \iff \mathcal{O}(ga) = \mathcal{O}(gb)$$
$$\iff \mathcal{O}(a) = \mathcal{O}(b)$$
$$\iff \exists h \in G \ni ha = b$$

Supongamos que $h \neq e$. Entonces $b = ha \in h\mathcal{U}_x$ (pues $a \in \mathcal{U}_x$) y como por hipotesis $b \in \mathcal{U}_x$, entonces $b \in h\mathcal{U}_x \cap \mathcal{U}_x \neq \phi$.

Una contradiccion pues $h \neq e$. Por lo tanto, $h = e$.

Por lo tanto $a = b$. Por lo tanto $ga = gb$.

$\therefore$ $p \restriction g\mathcal{U}_x$ es inyectiva.

Pero ya sabiamos que $p \restriction g\mathcal{U}_x : g\mathcal{U}_x \longrightarrow p(\mathcal{U}_x)$ es

suprayectiva, abierta, y continua.

$\therefore$ $p \restriction g\mathcal{U}_x$ es un homeomorfismo. $\square$

(42) Sea $G \times X \to X$ una acción continua y libre t.q. G es un grupo finito y X de Hausdorff. Ver que la acción es propiamente discontinua.

Para todo $g \in G$ denotemos $\varphi_g : X \ni x \longmapsto gx \in X$.

Sea $x \in X$. Como G es finito y X es Hausdorff, entonces existe una familia $\{U_g\}_{g \in G}$ t.q. U_g es vecindad de $g \cdot x$ y satisfacen $U_g \cap U_h = \phi$ si $g \neq h$. Sea

$U_x := \bigcap_{g \in G} \varphi_g^{-1}(U_g)$. Entonces U_x es abierto porque G es finito, U_g es abierto, y φ_g es continua. Mas aun, es no vacío porque $x \in U_x$. Veamos que

$h U_x \cap U_x = \phi$ si $h \neq e$.

Sea $h \neq e$. Por un lado, notemos que

$$
\begin{aligned}
h \cdot U_x &\subseteq h \cdot \varphi_h^{-1}(U_h) && \text{(por def de } U_x\text{)} \\
&= \varphi_h(\varphi_h^{-1}(U_h)) && \text{(por def de } \varphi_h\text{)} \\
&\subseteq U_h
\end{aligned}
$$

Por otro lado, también tenemos $U_x \subseteq \varphi_e^{-1}(U_e) = U_e$

y $\therefore$ $h \cdot U_x \cap U_x \subseteq U_h \cap U_e = \phi$ pues $h \neq e$. $\square$

(43) Ver que $S^n \overset{i}{\hookrightarrow} \mathbb{R}^{n+1} \setminus \{0\}$ pasa a los cocientes y define una función $\bar{i}$ que es un homeo.

$$\begin{tikzcd} S^n \arrow[r, hook, "i"] \arrow[d, "p"'] & \mathbb{R}^{n+1} \setminus \{0\} \arrow[d, "q"] \\ S^n/\mathbb{Z}_2 \arrow[r, dashed, "\bar{i}"] & \mathbb{P}^n\mathbb{R} \end{tikzcd}$$

donde $\mathbb{Z}_2 = \{-1, 1\}$ actúa sobre S^n de la sig manera

$1 \cdot x = x$ & $-1 \cdot x = -x$.

En lo que sigue, denotaremos por $\bar{z}$ (con $z \in S^n$) a los elementos de $S^2/\mathbb{Z}_2$ y por $[x]$ (con $x \in \mathbb{R}^{n+1} \setminus \{0\}$) a los elementos de $\mathbb{P}^n\mathbb{R}$. Veamos que

$$\begin{aligned} \bar{i} : S^n/\mathbb{Z}^2 &\longrightarrow \mathbb{P}^n\mathbb{R} \\ \bar{z} &\longmapsto [z] \end{aligned}$$

es un homeomorfismo.

<u>$\bar{i}$ está bien definida</u>: Sean $z, w \in S^n$ / $\bar{z} = \bar{w}$.

Entonces (por definición de la acción) $z = \pm w$.

En particular, $[z] = [w]$.

<u>$\bar{i}$ es continua</u>: Como p es un mapeo cociente

supráyectivo, entonces tenemos la siguiente equivalencia:

$\bar{i}$ es continua $\iff$ $\bar{i} \circ p$ es continua.

Sin embargo $\bar{i} \circ p = q \circ i$ y como q & i son continuas entonces $\bar{i} \circ p$ también lo es. Por la equivalencia, $\bar{i}$ es continua.

Ahora bien, sea

$$\begin{aligned} \varphi : \mathbb{P}^n\mathbb{R} &\longrightarrow S^n / \mathbb{Z}_2 \\ [x] &\longmapsto \overline{x/\|x\|} \end{aligned}$$

Entonces para todo $z \in S^n$

$$\varphi \circ \bar{i}\,(\bar{z}) = \varphi([z]) = \overline{z/\|z\|} = \bar{z}$$

donde la ultima igualdad es porque $\|z\| = 1$ (pues $z \in S^n$).

También para todo $x \in \mathbb{R}^{n+1} \setminus \{0\}$

$$\bar{i} \circ \varphi([x]) = \bar{i}\left(\overline{x/\|x\|}\right) = \left[x/\|x\|\right] = [x]$$

donde la ultima igualdad es por def de la rel de eq.

$\therefore \ \varphi = (\bar{i})^{-1}$.

Resta ver que φ es continua. De nuevo, como p es identificación, basta ver que $\varphi \circ p$ es continua.

Para esto, sea $f : \mathbb{R}^{n+1} \setminus \{0\} \longrightarrow \mathbb{R}^{n+1} \setminus \{0\}$

$f(x) = \frac{x}{\|x\|}$. Entonces

$$\varphi \circ q(x) = \varphi([x]) = \overline{x/\|x\|} = p\left(x/\|x\|\right) = p \circ f(x).$$

Como p & f son continuas $\Rightarrow$ $\varphi \circ q$ también.

$\therefore$ φ es continua

$\therefore$ $\bar{i}$ es un homeomorfismo. $\square$

(44) $\mathbb{P}^1\mathbb{R} \cong S^1$.

Sea $f: \mathbb{C} \ni z \longmapsto z^2 \in \mathbb{C}$. Por variable compleja, f es abierta. Veamos que $f\restriction_{S^1}: S^1 \longrightarrow S^1$ es una identificacion. Primero notemos que si $z \in S^1 \implies z^2 \in S^1$ y por lo tanto, $f\restriction_{S^1}: S^1 \longrightarrow S^1$ esta bien definida. Mas aun, como f es abierta, solo resta probar que f es supráyectiva.

Sea $e^{2\pi i\theta} \in S^1$. Entonces $e^{\pi i\theta} \in S^1$ y $f(e^{\pi i\theta}) = e^{2\pi i\theta}$ y por lo tanto $f\restriction_{S^1}$ es sobre.

$\therefore$ $f\restriction_{S^1}: S^1 \longrightarrow S^1$ es una identificacion.

$\therefore$ Basta probar que $f\restriction_{S^1}$ y p son compatibles.

Sea $\bar{z} \in S^1/\mathbb{Z}_2$. Entonces $p^{-1}(\{\bar{z}\}) = \{\pm z\}$. Y como $f(z) = z^2 = f(-z)$, entonces $f(p^{-1}(\{\bar{z}\})) = \{f(z)\}$. Por otro lado, sea $e^{2\pi i\theta} \in S^1$. Entonces $f^{-1}(\{e^{2\pi i\theta}\}) = \{\pm e^{\pi i\theta}\}$. Y como $p(e^{\pi i\theta}) = p(-e^{\pi i\theta})$, entonces $p(f^{-1}(\{e^{2\pi i\theta}\})) = \{p(e^{2\pi i\theta})\}$. $\square$

(45) Demuestra la implicación "$\Longrightarrow$".

Teo (Levantamiento). Sea $p : (E, a_0) \to (X, x_0)$ cubierta. Sea Y conexo y localmente conectado por trayectorias (en particular Y es conectado por trayectorias).

Sea $f : (Y, y_0) \to (X, x_0)$ continua. Entonces existe el levantamiento $\tilde{f} : (Y, y_0) \to (E, a_0)$ si y sólo si $f_{\#} \pi_1(Y, y_0) \subseteq p_{\#} \pi_1(E, a_0)$.

Sup que $\tilde{f}$ es un levantamiento de f. Entonces

$$\begin{aligned} f_{\#} \pi_1(Y, y_0) &= (p\tilde{f})_{\#} \pi_1(Y, y_0) \\ &= p_{\#} \tilde{f}_{\#} \pi_1(Y, y_0) \\ &\subseteq p_{\#} \pi_1(\tilde{X}, \tilde{x}_0). \end{aligned}$$

Donde la inclusión se cumple porque $\tilde{f}_{\#} \pi_1(Y, y_0) \subseteq \pi_1(\tilde{X}, \tilde{x}_0)$ (pues $\tilde{f}_{\#}$ es una función de $\pi_1(Y, y_0)$ en $\pi_1(\tilde{X}, \tilde{x}_0)$). $\square$

(46) Sea $p: E \to X$ cubriente. Ver que los abiertos de X cubiertos parejamente son una base de X y que las hojas sobre estos abiertos son base de E.

Sea $U \subseteq X$ abierto y $x \in U$. Veamos que existe un abierto U_x cubierto parejamente tal que $x \in U_x \subseteq U$. Como p es cubriente, existe V_x vecindad de x cubierta parejamente.

Consideremos $U_x := V_x \cap U$. Como V_x esta cubierta parejamente, $p^{-1}(V_x) = \coprod_\alpha W_\alpha$ para algunos W_α abiertos & $p\restriction_{W_\alpha}$ es homeomorfismo en su imagen.

Pero entonces
$$\begin{aligned} p^{-1}(U_x) &= p^{-1}(V_x \cap U) \\ &= p^{-1}(V_x) \cap p^{-1}(U) \\ &= \coprod_\alpha W_\alpha \cap p^{-1}(U) \\ &= \coprod_\alpha \left(W_\alpha \cap p^{-1}(U) \right) \end{aligned}$$

& tambien $p\restriction_{W_\alpha \cap p^{-1}(U)}$ es homeo en su imagen.

$\therefore$ U_x esta cubierto parejamente. Mas aun, como $x \in U_x \subseteq U$, obtenemos lo deseado, i.e., los abiertos de X cubiertos parejamente son base de X.

Ahora veamos que las hojas sobre estos abiertos son base de E.

Sea $A \subseteq E$ abierto y $a \in A$. Como p es cubriente, en particular es abierta y por lo tanto $p(A)$ es abierto.

Como $p(a) \in p(A)$, existe $\mathcal{U} \subseteq X$ cubierto parejamente tal que $p(a) \in \mathcal{U} \subseteq p(A)$. Supongamos que $p^{-1}(\mathcal{U}) = \coprod_{\alpha} W_\alpha$. Entonces existe un único α_0 t.q. $a \in W_{\alpha_0}$ (pues $a \in p^{-1}(\mathcal{U})$). Por otro lado, notemos que $p^{-1}(\mathcal{U}) \cap A$ es abierto y por lo tanto $p(p^{-1}(\mathcal{U}) \cap A)$ también. Analogamente, para todo α $p(W_\alpha \cap A)$ es abierto. Mas aun, como

$p\restriction_{W_\alpha}$ es un homeomorfismo en su imagen, entonces $p\restriction_{W_\alpha \cap A}$ también y por lo tanto las $W_\alpha \cap A$ son hojas. Finalmente, como $a \in W_{\alpha_0} \cap A \subseteq A$, ent obtenemos lo deseado. $\square$

(47) Sea $p: E \to X$ una aplicación cubriente. Ver que E es localmente conectable por trayectorias sii X lo es.

Antes que nada, notemos que como p es cubriente, entonces en particular es un homeomorfismo local.

$\Rightarrow)$ Supongamos que E es localmente conectable por trayectorias. Para ver que X lo es, sea $\mathcal{U} \subseteq X$ abierto y sea $x \in \mathcal{U}$. Mas aun, sea $a \in p^{-1}(x)$. Como E es localmente conectable por trayectorias, $p^{-1}(\mathcal{U})$ es abierto, y $a \in p^{-1}(\mathcal{U})$, ent existe $\hat{V} \subseteq E$ abierto conectable por tray t.q. $a \in \hat{V} \subseteq p^{-1}(\mathcal{U})$. Mas aun, como p es homeo local, ent existe $\hat{W}$ t.q. $a \in \hat{W} \subseteq \hat{V}$ y $p\restriction_{\hat{W}}$ es homeo sobre $p(\hat{W})$. Notemos que como $\hat{W} \subseteq \hat{V}$ y $\hat{V}$ es conectable por tray, ent $\hat{W}$ tambien lo es. Pero entonces

$$x = p(a) \in p(\hat{W}) \subseteq p(\hat{V}) \subseteq p\,p^{-1}(\mathcal{U}) \subseteq \mathcal{U}$$

Finalmente, como p es abierta, ent $p(\hat{W})$ es abierto y como $p\restriction_{\hat{W}}$ es homeo sobre $\hat{W}$, ent $p(\hat{W})$ es conectable por trayectorias. $\therefore$ $x \in p(\hat{W}) \subseteq \mathcal{U}$ implica lo deseado.

$\Leftarrow]$ Sup que X es localmente conectable por trayectorias.

Para ver que E es localmente conectable por trayectorias, sea $\hat{V} \subseteq E$ abierto y $a \in \hat{V}$. Como p es homeo local, existe $\hat{W}$ t.q. $a \in \hat{W} \subseteq \hat{V}$ y $p \restriction_{\hat{W}}$ es homeo en su imagen.

Como $p(a) \in \underbrace{p(\hat{W})}_{\text{es abto pues } p \text{ es abta}}$, y X es localmente conexo por trayectorias, existe $\mathcal{U} \subseteq X$ abto conexo por trayectorias t.q. $p(a) \in \mathcal{U} \subseteq p(\hat{W})$. Entonces si denotamos $q = p \restriction_{\hat{W}}$,

$$a \in \underbrace{q^{-1}(\mathcal{U})}_{\text{es abto y conexo por tray pues } q \text{ es homeo}} \subseteq q^{-1} p(\hat{W}) = \hat{W} \subseteq \hat{V}$$

$\therefore$ E es loc conexo por trayectorias $\square$

(48) Sea Y conexo y $G \times Y \to Y$ una acción prop. discontinua. Entonces $p: Y \to Y/G$ es cubriente.

Ver que $i: G \to G(p)$

$$g \longmapsto \bar{g} \qquad \text{donde } \bar{g}(y) = g \cdot y$$

es un isomorfismo de grupos.

<u>i es un homomorfismo</u>: Sean $g_1, g_2 \in G \implies$

$i(g_1 g_2) = \overline{g_1 g_2} = \bar{g}_1 \circ \bar{g}_2$ y $i(e) = \bar{e} = id$

$\therefore$ i es un homomorfismo.

<u>i es inyectiva</u>:

Sean $g_1, g_2 \in G$ $\ni$. $i(g_1) = i(g_2) \implies \bar{g}_1 = \bar{g}_2$

$\implies \overline{g_1 g_2^{-1}} = \bar{g}_1 \circ \bar{g}_2^{-1} = id$

$\implies g_1 g_2^{-1} = e$ $\therefore$ $g_1 = g_2$.

<u>i es supráyectiva</u>:

Sea $h \in G(p)$. Sea $y \in Y$. Como la acción es prop discontinua, existe $U_y \subseteq Y$ vecindad de y $\ni$.

$\forall g \neq e$, $U_y \cap gU_y = \emptyset$. Veamos que

$\forall g \neq e$, $h(U_y) \cap g\, h(U_y) = \emptyset$.

Procedemos por contrapuesta, sea $a \in h(\mathcal{U}_y) \cap g h(\mathcal{U}_y)$.

Entonces

$a = h(y_1)$ para algun $y_1 \in \mathcal{U}_y$

$a = g \cdot h(y_2)$ para algun $y_2 \in \mathcal{U}_y$

En particular,

$g^{-1} \cdot a = h(y_2)$ y como

$\theta(a) = \theta(g^{-1} \cdot a) \implies$

$p(h(y_1)) = p(h(y_2))$.

Pero $ph = p$ (pues $h \in G(p)$) y $\therefore$ $p(y_1) = p(y_2)$.

Mas aun, como $p\restriction_{\mathcal{U}_y}$ es homeo $\implies y_1 = y_2$

$\therefore$ $h(y_1) = h(y_2)$. Pero ya sabiamos que

$h(y_1) = a = g\, h(y_2)$ y $\therefore$ $g = e$.

$\therefore \forall g \neq e$, $h(\mathcal{U}_y) \cap g\, h(\mathcal{U}_y) = \emptyset$. $(*)$

Por otro lado, como $ph = p$, entonces $\forall y \in Y$,

$\theta(h(y)) = \theta(y)$ (por def de p). Pero entonces,

$\forall y \in Y \; \exists g_y \in G$ tq $h(y) = g \cdot y$. Fijemos $y_0 \in Y$

y definamos

$V_{y_0} := \mathcal{U}_{y_0} \cap g_{y_0}^{-1} h(\mathcal{U}_{y_0})$

Notemos que V_{y_0} es abierto, no vacío porque ambos intersecandos son abiertos que contienen a y_0 (el segundo lo contiene porque $g_{y_0} \cdot y_0 = h(y_0) \in h(\mathcal{U}_{y_0})$).

Ahora bien, sea $y \in V_{y_0}$. Entonces

$$h(y) = g_y(y) \in h(V_{y_0}) \cap g_y V_{y_0}$$

$$\subseteq h(\mathcal{U}_{y_0}) \cap g_y g_{y_0}^{-1} h(\mathcal{U}_{y_0}) \quad \left(\begin{matrix}\text{por def}\\ \text{de } V_{y_0}\end{matrix}\right)$$

Pero por $(*)$ esto implica que $g_y g_{y_0}^{-1} = e$. $\therefore g_y = g_{y_0}$.

Entonces podemos denotar $g = g_y$, para todo $y \in V_{y_0}$.

Pero entonces $h(y) = gy$ para todo $y \in V_{y_0}$.

Como y_0 es fijo y arbitrario y Y es conexo $\Longrightarrow$ esto implica que $h(y) = gy$ para todo $y \in Y$.

$\therefore \quad h = \bar{g} = i(g)$

$\therefore \quad i$ es suprayectiva.

(49) Sea $p_n : S^1 \longrightarrow S^1$ / $p_n(z) = z^n$ y

sea $q : S^1 \longrightarrow S^1/\ker p_n$ la proyeccion canonica.

Ver que p_n y q son identificaciones compatibles

$\therefore$ $\bar{p}_n$ es un homeomorfismo.

$$\begin{tikzcd} S^1 \arrow[r, "p_n"] \arrow[d, "q"'] & S^1 \\ S^1/_{\ker p_n} \arrow[ur, dashed, "\cong", "\bar{p}_n"'] & \end{tikzcd}$$

$\ker p_n = \{1, \omega, \omega^2, \dots, \omega^{n-1}\} \cong \mathcal{U}_n$, $\omega \in e^{\frac{2\pi i}{n}}$

Sea $z \in S^1$. Entonces (por variable compleja)

$p_n^{-1}(\{z\}) = \{z^{1/n}, z^{1/n}\omega, \dots, z^{1/n}\omega^{n-1}\} \Longrightarrow$

$q(p_n^{-1}(\{z\})) = \{[z]\}$

Por otro lado, sea $\bar{z} \in S^1/\ker p_n$. Entonces

$q^{-1}(\{[z]\}) = \{z^{1/n}, z^{1/n}\omega, \dots, z^{1/n}\omega^{n-1}\} \Longrightarrow$

$p_n(q^{-1}(\{[z]\})) = \{z\}$.

$\therefore$ p_n y q son compatibles. $\square$

(50) Si q es una aplicación cubriente, continua y f es un homeomorfismo $\ni$ $f \circ q = p$, entonces p es cubriente.

$$\begin{tikzcd} E \arrow[r, "p"] \arrow[d, "q"'] & Y \\ X \arrow[ur, "f"'] & \end{tikzcd}$$

Como f es homeo y q es cubriente $\Longrightarrow$ $p = f \circ q$ es continua y sobre. Ahora bien, sea $y \in Y$.

Como $q : E \to X$ es cubriente $\Longrightarrow$ existe una vecindad U de $f^{-1}(y)$ cubierta parejamente. Supongamos que $q^{-1}(U) = \coprod_{\alpha} V_\alpha$ con $q\restriction_{V_\alpha}$ homeo. Pero

$$q^{-1}(U) = (f^{-1} \circ p)^{-1}(U)$$
$$= p^{-1}(f(U))$$

y como $f^{-1}(y) \in U$, ent $y \in f(U)$. Resta probar que $p\restriction_{V_\alpha}$ es un homeo sobre $f(U)$.

Pero como $q\restriction_{V_\alpha}$ es homeo sobre U &

$q = f^{-1} \circ p$ $\Longrightarrow$ $(f^{-1} \circ p)\restriction_{V_\alpha}$ es homeo sobre U

$\Longrightarrow$ (aplicando f (se puede porque f es homeo)) $p\restriction_{V_\alpha}$ es homeo sobre $f(U)$. $\square$

(51) Ver que $\operatorname{Im}(p_n)_\# = n\mathbb{Z}$.

Sea $\alpha_0 : \pi_1(S^1, 1) \longrightarrow \mathbb{Z}$

$$[\alpha] \longmapsto \hat{\alpha}_0(1)$$

Recordemos que α_0 es un isomorfismo

Consideremos el siguiente diagrama conmutativo.

$$\begin{tikzcd} \pi_1(S^1, 1) \arrow[r, "(p_n)_\#"'] \arrow[d, "\alpha_0"'] & \pi_1(S^1, 1) \arrow[d, "\alpha_0"] \\ \mathbb{Z} \arrow[r, "f"] & \mathbb{Z} \end{tikzcd}$$

Veamos que $f(k) = nk$. Recordemos que

$\alpha_0^{-1}(k) = [\beta_k]$ donde $\beta_k(t) = e^{2\pi i k t}$. Entonces

$$(p_n)_\# \circ \alpha_0^{-1}(k) = (p_n)_\#[\beta_k] = [p_n \circ \beta_k]$$

$$= [t \longmapsto (e^{2\pi i t k})^n]$$

$$= [\beta_{nk}]$$

Entonces

$$f(k) = (\alpha_0 \circ (p_n)_\# \circ \alpha_0^{-1})(k)$$

$$= \alpha_0([\beta_{nk}])$$

$$= \hat{\beta}_{nk}(1) = nk$$

donde la primera igualdad se cumple porque el diagrama es conmutativo.

Pero entonces, (de nuevo porque el diagrama es conmutativo) tenemos el primero de los siguientes isomorfismos

$\operatorname{im}(p_n)_\# \cong f(\mathbb{Z}) = n\mathbb{Z}$

el segundo es consecuencia de que $f(k) = nk$. $\square$

(52) Dadas
$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "f"] \arrow[d, "i"'] & Y \arrow[d, "\beta"] \\ X \arrow[r, "\alpha"'] & Y\cup_f X \end{tikzcd}$$
funciones continuas, su pushout o pushout canonico en $Y\cup_f X$ con $\alpha(x)=[x]$, $\beta(y)=[y]$.

Ver que si $A\subseteq X$ es cerrado, entonces $\beta: Y \to Y\cup_f X$ es un encaje cerrado y $\alpha\restriction_{X\setminus A}: X\setminus A \to Y\cup_f X$ es un encaje abierto.

Recordemos que $Y\cup_f X = {}^{Y\amalg X}/\sim$ donde $a\sim f(a)$ $\forall a\in A$. En particular

$$\left.\begin{array}{l} [x]=\{x\} \quad \forall x\in X\setminus A \\ [a]=\{f(a)\}\cup f^{-1}(\{f(a)\}) \quad \forall a\in A \\ [y]=\{y\}\cup f^{-1}(\{y\}) \quad \forall y\in Y \end{array}\right\} (*)$$

Veamos primero que β es inyectiva. Sean $y,y'\in Y$ /. $y\neq y'$. Entonces por $(*)$, $[y]\neq[y']$ y por lo tanto $\beta(y)\neq\beta(y')$. Ahora veamos que $\alpha\restriction_{X\setminus A}$ es inyectiva. Sean $x,x'\in X\setminus A$ /. $\alpha(x)=\alpha(x')$, i.e. $[x]=[x']$. Entonces por $(*)$, $x=x'$. Resta ver que β es cerrada y que $\alpha\restriction_{X\setminus A}$ es abierta.

Primero veamos que β es cerrada. Sea $C \subseteq Y$ cerrado. Denotemos por $\pi : X \amalg Y \to Y \cup_f X$ a la proyeccion canonica. Por def de la topologia sobre $Y \cup_f X$, tenemos que $\beta(C)$ es cerrado $\iff \pi^{-1}(\beta(C))$ es cerrado.

Veamos que $\pi^{-1}(\beta(C)) = f^{-1}(C) \amalg C$.

$\subseteq \rfloor$ $b \in \pi^{-1}(\beta(C)) \iff \pi(b) \in \beta(C)$

$$\iff \pi(b) = \beta(c) \text{ p.a. } c \in C$$

$$\iff [b] = [c]$$

Pero por $(*) \implies$

$$\{c\} \cup f^{-1}(\{c\}) = \begin{cases} \{b\} & \text{si } b \in X \setminus A \\ \{b\} \cup f^{-1}(\{f(b)\}) & \text{si } b \in A \\ \{b\} \cup f^{-1}(\{b\}) & \text{si } b \in Y \end{cases}$$

En cualquier caso, $b = c \in C$ o $b \in f^{-1}(\{c\}) \subseteq f^{-1}(C)$

$\therefore \pi^{-1}(\beta(C)) \subseteq f^{-1}(C) \amalg C$.

$\supseteq \rfloor$ Sea $b \in f^{-1}(C) \amalg C$. Si $b \in C \implies$

$\pi(b) = [b] = \beta(b) \in \beta(C)$. Si $b \in f^{-1}(C) \subseteq A \implies$

$$\pi(b) = [b] \underset{b \in A}{=} \{f(b)\} \cup f^{-1}(\{f(b)\}) \underset{f(b) \in Y}{=} [f(b)] \in \beta(C)$$

donde la última pertenencia se cumple porque $b \in f^{-1}(C)$

y por lo tanto $f(b) \in C$, $\therefore$ $[f(b)] = \beta(f(b)) \in \beta(C)$.

$\therefore$ $\pi^{-1}(\beta(C)) = f^{-1}(C) \amalg C$ es cerrado pues

es una unión finita de cerrados.

$\therefore$ $\beta(C)$ es cerrado si C es cerrado, i.e. β es cerrado

$\therefore$ β es un encaje cerrado.

Veamos que $\alpha\restriction_{X \setminus A}$ es abierta. Sea $\mathcal{U} \subseteq X \setminus A$ abierto.

De nuevo, $\alpha(\mathcal{U})$ es abierto $\iff$ $\pi^{-1}(\alpha(\mathcal{U}))$ es

abierto. Veamos que $\pi^{-1}(\alpha(\mathcal{U})) = \underbrace{i(\mathcal{U})}_{\text{es abierto}}$

donde $i : X \hookrightarrow X \amalg Y$ es la inclusión canónica.

$$
\begin{aligned}
a \in \pi^{-1}(\alpha(\mathcal{U})) &\iff [a] \in \alpha(\mathcal{U}) \\
&\iff [a] = \alpha(u) \text{ p.a. } u \in \mathcal{U} \\
&\iff [a] = [u] \text{ p.a. } u \in \mathcal{U}. \\
&\iff [a] = \{u\} \text{ p.a. } u \in \mathcal{U} \\
&\iff a = u = i(u) \in i(\mathcal{U}) \text{ p.a. } u \in \mathcal{U} \\
&\iff a \in i(\mathcal{U}).
\end{aligned}
$$

Se vale porque $\mathcal{U} \subseteq X \setminus A$ y por lo tanto $u \in X \setminus A$.

$\therefore$ $\alpha\restriction_{X \setminus A}$ es un encaje abierto. $\square$

(53) Pushout en la categoría de grupos : Queremos construir el pushout de f y g.
$$\begin{tikzcd} K \arrow[r, "g"] \arrow[d, "f"'] & H \arrow[d, dashed] \\ L \arrow[r, dashed] & {} \end{tikzcd}$$

¿Hay suma directa en Grp? Sup que L y H son abelianos,

$$\begin{tikzcd} L \arrow[r, hook, "i"] \arrow[dr, "\gamma"'] & L \oplus H \arrow[d, "\mu"] & H \arrow[l, hook', "j"'] \arrow[dl, "\rho"] \\ & G & \end{tikzcd}$$

$\mu(l,h) = \gamma(l)\rho(h)$.

Ver que μ no es homomorfismo.

$$\begin{aligned} \mu((l,h)(l',h')) &= \mu(ll', hh') \\ &= \gamma(ll')\rho(hh') \\ &= \gamma(l)\gamma(l')\rho(h)\rho(h') \end{aligned}$$

Pero como G no necesariamente es abeliano $\Longrightarrow$

$\gamma(l)\gamma(l')\rho(h)\rho(h')$ no necesariamente es igual a

$\gamma(l)\rho(h)\gamma(l')\rho(h') = \mu(l,h)\mu(l',h')$.

$\therefore$ μ no necesariamente es isomorfismo. $\square$

(54) Sea $\mathbb{R}$ el conjunto de las palabras reducidas incluyendo $\emptyset$, a cada $g \in G_\alpha$, $\alpha \in A$, le asociamos $L_g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dada por $L_g(w) = gw$. Ver que $L_{gg'} = L_g \circ L_{g'}$.

$$\begin{aligned} L_g \circ L_{g'}(w) &= L_g(L_{g'}(w)) \\ &= L_g(g'w) \\ &= gg'w \\ &= L_{gg'}(w). \qquad \square \end{aligned}$$

55 (Pushout en Grp) Consideremos homomorfismos:

$$\begin{tikzcd} K \arrow[r, "g"] \arrow[d, "f"'] \arrow[dr, phantom, "\circlearrowright"] & H \arrow[d, "\beta"] \\ L \arrow[r, "\alpha"'] & L *_K H \end{tikzcd}$$

donde $L *_K H$ se define como sigue:

Sea $S = \{ f(k) g(k)^{-1} \mid k \in K \}$,

$$L *_K H := L*H / N(S).$$

$\alpha(\ell) = [\ell]$, $\beta(h) = [h]$

$\alpha f(k) = [f(k)]$ y $\beta g(k) = [g(k)]$

Pero $[f(k)] = [g(k)]$ (por def de $L *_K H$).

Ver que este pushout tiene la propiedad universal.

Sea G arbitrario y supongamos que existen homomorfismos α', β' t.q. el siguiente diagrama conmuta

$$\begin{tikzcd} K \arrow[r, "g"] \arrow[d, "f"'] \arrow[dr, phantom, "\circlearrowright"] & H \arrow[d, "\beta"] \arrow[ddr, bend left, "\beta'"] & \\ L \arrow[r, "\alpha"'] \arrow[drr, bend right, "\alpha'"'] & L *_K H \arrow[dr, dashed, "F"] & \\ & & G \end{tikzcd}$$

En otras palabras, $\alpha' \circ f = \beta' \circ g$.

Veamos que $\exists!\, F : L *_K H \longrightarrow G$ t.q. el diagrama conmuta, i.e., $\beta' = F \circ \beta$ y $\alpha' = F \circ \alpha$.

Antes de empezar, recordemos que por definición,

$$L *_K H = {}^{L*H}/_{N(S)}$$ donde

$$S = \{ f(k) g(k)^{-1} \mid k \in K \}$$

Sea $\varphi : L * H \longrightarrow G$ el único homomorfismo que satisface

$$lh \in L*H \longmapsto \alpha'(l)\, \beta'(h).$$

Veamos que φ pasa al cociente

Sea $f(k) g(k)^{-1} \in S$. Entonces

$$\begin{aligned}
\varphi(f(k) g(k)^{-1}) &= \alpha'(f(k))\, \beta'(g(k)^{-1}) \\
&= \alpha'(f(k))\, (\beta'(g(k)))^{-1} \quad (\text{pues } \beta' \text{ es homo}) \\
&= e \in L*H \quad (\text{pues } \alpha' \circ f = \beta' \circ g)
\end{aligned}$$

$\therefore$ φ pasa al cociente e induce una

$F : L *_K H \longrightarrow G$. Entonces

$$(F \circ \alpha)(l) = F(\alpha(l)) = F(l N(S)) = \varphi(l) = \alpha'(l)$$

$$(F \circ \beta)(h) = F(\beta(h)) = F(h N(S)) = \varphi(h) = \beta'(h)$$

$\therefore$ F satisface lo deseado.

Resta probar que F es única. Sea $F' : L *_K H \to G$ /

$F' \circ \beta = \beta'$ & $F' \circ \alpha = \alpha'$. Entonces

$F' \circ \beta = F \circ \beta$ & $F' \circ \alpha = F \circ \alpha$.

Pero entonces $F' \circ \pi = F \circ \pi$ donde

$\pi : L * H \longrightarrow L *_K H$

es la proyeccion canonica.

Por lo tanto, $F' = F$. $\square$

(86) $F \circ F' = Id_{P'}$

Tenemos los siguientes diagramas conmutativos.

$$\begin{tikzcd}
A \arrow[r, "g"] \arrow[d, "f"'] & B \arrow[d, "\beta"] \arrow[ddr, bend left, "\beta'"] & \\
C \arrow[r, hook, "\alpha"] \arrow[drr, bend right, "\alpha'"'] & P \arrow[dr, dashed, "F"] & \\
& & P'
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
A \arrow[r, "g"] \arrow[d, "f"'] & B \arrow[d, "\beta'"] \arrow[ddr, bend left, "\beta"] & \\
C \arrow[r, hook, "\alpha'"] \arrow[drr, bend right, "\alpha"'] & P' \arrow[dr, dashed, "F'"] & \\
& & P
\end{tikzcd}$$

Es decir, $F \circ \alpha = \alpha'$, $F \circ \beta = \beta'$

$F' \circ \alpha' = \alpha$, $F' \circ \beta' = \beta$.

Por otro lado, considera el diagrama

$$\begin{tikzcd}
A \arrow[r, "g"] \arrow[d, "f"'] & B \arrow[d, "\beta'"] \arrow[ddr, bend left, "\beta'"] & \\
C \arrow[r, hook, "\alpha'"] \arrow[drr, bend right, "\alpha'"'] & P' \arrow[dr, dashed, "Id_P"] & \\
& & P'
\end{tikzcd}
\quad \ldots (*)$$

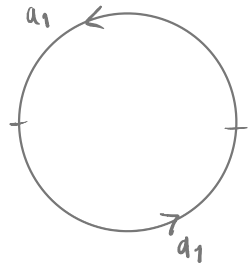
Pero $F \circ F'$ también satisface $(*)$ pues

$F \circ F' \circ \alpha' = F \circ \alpha = \alpha'$ y $F \circ F' \circ \beta' = F \circ \beta = \beta'$.

Como $Id_{P'}$ es el único morfismo que hace conmutar

$(*) \implies F \circ F' = Id_{P'}$. $\square$

57) Ver que $\mathbb{P}^n\mathbb{R}$ se puede obtener de D^n identificando $x \in S^{n-1}$ con $-x \in S^{n-1}$.

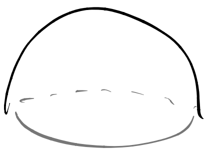


Recordemos que

$\mathbb{P}^n\mathbb{R} = S^n/\sim$

donde $x \sim y \iff x = \pm y$

Sea $S^n_+ = \{ (x_1, \dots, x_{n+1}) \in S^n \mid x_{n+1} \geq 0 \}$.



S^n_+

Entonces $D^n \cong S^n_+$ y la correspondencia manda $S^{n-1} \subseteq D^n$ en la parte azul del dibujo. Por lo tanto $D^n/\underset{\sim}{\sim}$ es homeomorfo a $S^n_+/\sim$ donde $\underset{\sim}{\sim}$ es la relación de eq sobre D^n que identifica $x \in S^{n-1}$ y $-x \in S^{n-1}$; cabe recalcar que $\sim$ sigue denotando la relación usual sobre S^n pero restringida a S^n_+.

Por esto, basta probar que $S^n_+/\sim \; \cong \; S^n/\sim = \mathbb{P}^n\mathbb{R}$.

Sea
$$\begin{aligned} i : S^n_+ &\longrightarrow \mathbb{P}^n\mathbb{R} \\ z &\longmapsto [z]. \end{aligned}$$

Veamos que i pasa al cociente. Sean $z, w \in S^n_+$ t.q.

$z \sim w \implies$ (como la relación en S^n_+ es restricción de la relacion en S^n) $\quad [z]=[w] \in \mathbb{P}^n\mathbb{R}$.

$$\begin{tikzcd} S^n_+ \arrow[r, "i"] \arrow[d, "\pi"'] & \mathbb{P}^n\mathbb{R} \\ S^n_+/\sim \arrow[ur, dashed, "\bar{i}"'] & \end{tikzcd}$$

Veamos que $\bar{i}$ es un homeomorfismo. Claramente es continua y biyectiva. Solo resta probar que es abierta.

Sea $U \subseteq S^n_+/\sim$ abierto. Entonces $U = \pi(\bar{U})$ con $\bar{U} \subseteq S^n_+$ abierto saturado. Entonces

$$\bar{i}(U) = \bar{i}(\pi(\bar{U})) = \bar{i}\circ\pi(\bar{U}) = i(\bar{U})$$

es abierto. $\therefore$ $\bar{i}$ es un homeomorfismo. $\square$

(58) Sea $p: X \to Y$ una identificación y $A \subseteq X$ cerrado. Supongamos que si x, x' son distintos $/$ $p(x) = p(x')$ $\Rightarrow x, x' \in A$. Ver que $p\restriction_{X \setminus A}: X \setminus A \to Y \setminus p(A)$ es un homeo.

Como p es identificación, en particular es continua y abierta. Por lo tanto $p\restriction_{X \setminus A}: X \setminus A \to Y \setminus p(A)$ también es continua y abierta. Por eso, basta probar que es biyección.

Primero veamos que es suprayectiva. Sea $y \in Y \setminus p(A)$. Como p es suprayectiva $\Rightarrow$ existe $x \in X$ $/$ $p(x) = y$. Veamos que $x \notin A$. De lo contrario, tendríamos que $y = p(x) \in p(A)$ $\overset{\nabla}{\circ}$ $\therefore$ $x \in X \setminus A$

$\therefore$ $p\restriction_{X \setminus A}$ es suprayectiva.

Ahora veamos que es inyectiva. Sean $x, x' \in X \setminus A$ $/$ $p(x) = p(x')$. Si son iguales, ya acabamos. Si no, entonces por hipótesis, $x, x' \in A$ $\overset{\nabla}{\circ}$ Pues pedimos $x, x' \in X \setminus A$. $\therefore$ $p\restriction_{X \setminus A}$ es inyectiva.

$\therefore$ $p\restriction_{X \setminus A}: X \setminus A \to Y \setminus p(A)$ es un homeomorfismo. $\square$

(60) Sea $M = \mathbb{R}$ con el atlas $\{(\mathbb{R}, Id)\}$ y con otro atlas $\{(\mathbb{R}, x \mapsto x^3)\}$. Ver que estos atlas no son compatibles.

Dem. Dos atlas $\{(U_i, \varphi_i)\}_{i\in I}$, $\{(V_j, \psi_j)\}_{j\in J}$ son compatibles sii $\forall i,j$ con $U_i \cap V_j \neq \emptyset$ la función

$$\psi_j \circ \varphi_i^{-1} : \varphi_i(U_i \cap V_j) \longrightarrow \psi_j(U_i \cap V_j)$$

es un difeomorfismo.

Sea $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tq. $\varphi(x) = x^3$. Como

$\varphi \circ (Id)^{-1} = \varphi$ no es un difeomorfismo

(pues su inversa $x \mapsto \sqrt[3]{x}$ no es diferenciable en 0),

entonces los atlas $\{(\mathbb{R}, Id)\}$ y

$\{(\mathbb{R}, \varphi)\} = \{(\mathbb{R}, x \mapsto x^3)\}$ no son compatibles. $\square$

61 Sea $\mathcal{U}_i^+ = \{ x \in S^n \mid x_i > 0 \}$, $\mathcal{U}_i^- = \{ x \in S^n \mid x_i < 0 \}$,

$\varphi_i^{\pm} : \mathcal{U}_i^{\pm} \longrightarrow D^n$ donde

$\varphi_i^{\pm}(x_1, \ldots, x_{n+1}) = (x_1, \ldots, \hat{x}_i, \ldots, x_{n+1})$.

Sea $p : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{P}^n\mathbb{R}$ la proyeccion canonica y

$\mathcal{U}_i := p(\mathcal{U}_i^+) = p(\mathcal{U}_i^-)$.

Definimos $\psi_i : \mathcal{U}_i \longrightarrow \mathring{D}^n$ $\ni$. $\psi_i = \varphi_i^+ \circ (p\restriction_{\mathcal{U}_i^+})^{-1}$

Ver que $\{(\mathcal{U}_i, \psi_i)\}_i$ es un atlas suave para $\mathbb{P}^n\mathbb{R}$.

Dem. Veamos que $\mathcal{U}_i$ es abierto en $\mathbb{P}^n\mathbb{R}$. Sea

$V_i := \{ x \in \mathbb{R}^n \mid x_i \neq 0 \}$. Veamos que $p(\mathcal{U}_i^+) = p(V_i)$.

Como $\mathcal{U}_i^+ \subseteq V_i \implies p(\mathcal{U}_i^+) \subseteq p(V_i)$. Conversamente,

sea $x \in V_i$. Entonces $x_i \neq 0$. Entonces $x_i > 0$ o $x_i < 0$.

Si $x_i > 0$, entonces $x \in \mathcal{U}_i^+$ y por lo tanto

$p(x) \in p(\mathcal{U}_i^+)$. Si $x_i < 0$, entonces $-x \in \mathcal{U}_i^+$ y

por lo tanto, $p(x) = p(-x) \in p(\mathcal{U}_i^+)$ (donde la

igualdad se cumple por definicion de p y de la relacion de

equivalencia en $\mathbb{P}^n\mathbb{R}$). $\therefore \mathcal{U}_i = p(\mathcal{U}_i^+) = p(V_i)$.

Veamos que V_i es un abierto saturado. Sea $x \in V_i$ y

$x \sim y$. Entonces $x_i \neq 0$ y $\exists \lambda \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ t.q. $x = \lambda y$.
Entonces $x_i = \lambda y_i$. Entonces $y_i \neq 0$. Entonces
$y \in V_i$. Por lo tanto V_i es saturado. Por lo tanto,
$\mathcal{U}_i = p(V_i)$ es abierto en $\mathbb{P}^n\mathbb{R}$. Veamos que $\{\mathcal{U}_i\}_{i \in I}$
es una cubierta de $\mathbb{P}^n\mathbb{R}$. Sea $[x] \in \mathbb{P}^n\mathbb{R}$. Como
$\mathbb{P}^n\mathbb{R}$ es un cociente sobre $\mathbb{R}^{n+1} \setminus \{0\}$, entonces $x \neq 0$.
Entonces $x_i \neq 0$ para alguna i. Entonces $x_i > 0$ o
$x_i < 0$. Entonces $[x] \in p(\mathcal{U}_i^+)$ o $[x] \in p(\mathcal{U}_i^-)$.
Pero $\mathcal{U}_i = p(\mathcal{U}_i^+) = p(\mathcal{U}_i^-)$ y $\therefore$ $\{\mathcal{U}_i\}$ es una
cubierta abierta de $\mathbb{P}^n\mathbb{R}$.

Veamos que Ψ_i es un homeomorfismo en su imagen.
Por definición, $\Psi_i = \varphi_i \circ (p\restriction_{\mathcal{U}_i^+})^{-1}$. Como φ_i y
$(p\restriction_{\mathcal{U}_i^+})^{-1}$ son homeomorfismos en sus imagenes $\Longrightarrow$ Ψ_i también.

Veamos que $\forall i, j$
$$\Psi_j \circ \Psi_i^{-1} : \Psi_i(\mathcal{U}_i \cap \mathcal{U}_j) \longrightarrow \Psi_j(\mathcal{U}_i \cap \mathcal{U}_j)$$
es un difeomorfismo en su imagen.

Por definición,

$$\psi_j \circ \psi_i^{-1} = (\varphi_j \circ (p\restriction_{U_j^+})^{-1}) \circ (\varphi_i \circ (p\restriction_{U_i^+})^{-1})^{-1}$$

$$= (\varphi_j \circ (p\restriction_{U_j^+})^{-1}) \circ ((p\restriction_{U_i^+}) \circ \varphi_i^{-1})$$

$$= \varphi_j \circ ((p\restriction_{U_j^+})^{-1} \circ (p\restriction_{U_i^+})) \circ \varphi_i^{-1}$$

$$= \varphi_j \circ \varphi_i .$$

Donde la ultima igualdad se cumple porque

$(p\restriction_{U_j^+})^{-1} \circ (p\restriction_{U_i^+}) = id$ en $U_i^+ \cap U_j^+$ y como

el dominio de $\psi_j \circ \psi_i^{-1}$ es $\psi_i(U_i \cap U_j)$, entonces

para $x \in \psi_i(U_i \cap U_j)$, tenemos $x = \psi_i(y)$ para alguna

$y \in U_i \cap U_j$, entonces

$$\varphi_i^{-1}(x) = \varphi_i^{-1}(\psi_i(y))$$

$$= \varphi_i^{-1}(\varphi_i \circ (p\restriction_{U_i^+})^{-1}(y))$$

$$= (p\restriction_{U_i^+})^{-1}(y) \in U_i^+ \cap U_j^+$$

Por lo tanto, $\psi_j \circ \psi_i^{-1} = \varphi_j \circ \varphi_i^{-1}$ es un difeomorfismo sobre su imagen.

Por lo tanto, $\{(U_i, \psi_i)\}_{i=1}^{n}$ es un atlas suave para $\mathbb{P}^n\mathbb{R}$. $\square$

(62) Sea $f: M \to N$ una función continua entre variedades y $x \in M$ fijo. Son equivalentes:

1) Existen cartas (U, φ) de M en x y (V, ψ) de N en $f(x)$ t.q. $\psi \circ f \circ \varphi^{-1}$ es C^∞.

2) Para cualesquiera cartas (U, φ) de M en x y (V, ψ) de N en $f(x)$ tenemos que $\psi \circ f \circ \varphi^{-1}$ es C^∞.

Dem. $2 \Rightarrow 1$) Es evidente. (Las cartas cubren a la variedad.)

$1 \Rightarrow 2$) Supongamos que (U, φ) y (V, ψ) son cartas de M y N en x y $f(x)$ (respectivamente) tales que $\psi \circ f \circ \varphi^{-1}$ es C^∞. Sean (U_1, φ_1) y (V_1, ψ_1) cualesquiera otras cartas de M y N en x y $f(x)$ (respectivamente). Entonces

$$\psi_1 \circ f \circ \varphi_1^{-1} = \psi_1 \circ (\psi^{-1} \circ \psi) \circ f \circ (\varphi^{-1} \circ \varphi) \circ \varphi_1^{-1}$$
$$= (\psi_1 \circ \psi^{-1}) \circ (\psi \circ f \circ \varphi^{-1}) \circ (\varphi \circ \varphi_1^{-1})$$

Pero $\psi_1 \circ \psi^{-1}$ y $\varphi \circ \varphi_1^{-1}$ son C^∞ por def de atlas C^∞ y $\psi \circ f \circ \varphi^{-1}$ es C^∞ por hipótesis. $\therefore \psi_1 \circ f \circ \varphi_1^{-1}$ es C^∞. $\square$

(63) La composición de funciones suaves es suave.

Dem. Supongamos que $f : M \to N$ y $g : N \to P$ son suaves y que $x \in M$ es fijo. Sean (U, φ), (V, ψ), (W, η) cartas de M, N, P en x, $f(x)$, $g \circ f(x)$ respectivamente. Como f y g son suaves (en x) entonces

$\psi \circ f \circ \varphi^{-1}$ y $\eta \circ g \circ \psi^{-1}$ son suaves. Entonces

$$\eta \circ (g \circ f) \circ \varphi^{-1} = (\eta \circ g \circ \psi^{-1}) \circ (\psi \circ f \circ \varphi^{-1})$$

es suave. Como η y φ^{-1} son cartas en x y $g \circ f(x)$, entonces $g \circ f$ es suave en x. $\square$

(64) Denotemos por $\mathbb{R}_1$ a $\mathbb{R}$ con su estructura diferenciable usual y por $\mathbb{R}_2$ a $\mathbb{R}$ con su estructura diferenciable inducida por el atlas $\{(\mathbb{R}, x \longmapsto x^3)\}$. Demuestra que $\mathbb{R}_1$ y $\mathbb{R}_2$ son difeomorfos.

Dem. Sea $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ la carta de $\mathbb{R}_2$, i.e. $x \overset{\varphi}{\longmapsto} x^3$.

Sea $f : \mathbb{R}_2 \to \mathbb{R}_1$ $\cdot/\cdot$ $x \longmapsto x^3$.

Veamos que f es un difeomorfismo.

- f es biyectiva: $x \longmapsto \sqrt[3]{x}$ es su inversa.
- f es suave: $(Id) \circ f \circ \varphi^{-1} = Id$ (pues $f = \varphi$) es suave
- f^{-1} es suave: $\varphi \circ f^{-1} \circ (Id)^{-1} = Id^{-1} = Id$ es suave.

$\therefore$ f es un difeomorfismo. $\square$

65 Si $f : M \to N$ es suave, y $x \in M$ es fijo, entonces df_x es $\mathbb{R}$-lineal.

Dem. Sean $u, v \in T_x M$ y $\lambda \in \mathbb{R}$. Entonces $\forall \mu \in C^\infty(N, \mathbb{R})$

$$
\begin{aligned}
df_x(u + \lambda v)(\mu) &= (u + \lambda v)(\mu \circ f) \\
&= u(\mu \circ f) + \lambda v(\mu \circ f) \quad \left(\begin{array}{c}\text{por def de las operaciones} \\ \text{en } T_x M\end{array}\right) \\
&= df_x(u)(\mu) + \lambda\, df_x(v)(\mu) \\
&= (df_x(u) + \lambda\, df_x(v))(\mu)
\end{aligned}
$$

$\therefore \quad df_x(u + \lambda v) = df_x(u) + \lambda\, df_x(v)$

$\therefore \quad df_x$ es $\mathbb{R}$-lineal. $\square$

(66) Sean $M \xrightarrow{f} N \xrightarrow{g} P$ suaves. Ver que $\forall x \in M$,

$$d(g \circ f)_x = dg_{f(x)} \circ df_x .$$

Dem. Para todo $v \in T_x M$ y todo $\mu \in C^\infty(P, \mathbb{R})$,

$$\begin{aligned} \big(d(g\circ f)_x (v) \big) (\mu) &= v(\mu \circ (g \circ f)) \\ &= v((\mu \circ g) \circ f) \\ &= df_x(v)(\mu \circ g). \end{aligned}$$

Por otro lado,

$$\begin{aligned} \big(dg_{f(x)} \circ df_x(v) \big)(\mu) &= \big(dg_{f(x)} (df_x(v)) \big)(\mu) \\ &= df_x(v)(\mu \circ g). \end{aligned}$$

Juntando estas ecuaciones obtenemos lo deseado. $\square$

(67) Sea V un espacio vectorial de dimensión n. Decimos que dos bases ordenadas de V son equivalentes si la matriz de cambio de base tiene determinante positivo. Ver que esta relación es de equivalencia y que solo hay dos clases de equivalencia.

Dem. Supongamos que B y B' son dos bases ordenadas de V. Denotamos por $M_{B'}^{B}$ a la matriz de cambio de base de B a B'. De esta manera,

$$B \sim B' \iff \det M_{B'}^{B} > 0.$$

Veamos que esto define una relación de equivalencia

Reflexividad: Para toda base ordenada B, tenemos que $M_B^B = I$ y por lo tanto $\det M_B^B = \det I = 1 > 0$.

$\therefore B \sim B \quad \forall B$.

Simetría: Supongamos que B y B' son t.q. $B \sim B'$, i.e. $\det M_{B'}^{B} > 0$. Como $M_{B'}^{B} \cdot M_{B}^{B'} = I$, entonces

$$\det M_{B'}^{B} \det M_{B}^{B'} = \det\left(M_{B'}^{B} \cdot M_{B}^{B'}\right) = \det I = 1.$$

Por lo tanto, $\det M_{B}^{B'} = 1/\det M_{B'}^{B} > 0$. $\therefore B' \sim B$.

Transitividad: Sean B, B', B'' $\ni$ $B \sim B'$ y $B' \sim B''$.

Entonces $\det M_{B'}^{B} > 0$ y $\det M_{B''}^{B'} > 0$. Como

$M_{B''}^{B} = M_{B'}^{B} \cdot M_{B''}^{B'}$, entonces

$\det M_{B''}^{B} = \det M_{B'}^{B} \cdot \det M_{B''}^{B} > 0$ $\therefore$ $B \sim B''$.

$\therefore$ $\sim$ es de equivalencia.

Supongamos que $B_0 := (v_1, \dots, v_n)$ es una base ordenada y denotemos $B_1 := (-v_1, v_2, v_3, \dots, v_n)$, que también es una base ordenada. Veamos que $[B_0]$ y $[B_1]$ son las únicas clases de equivalencia. Sea B una base ordenada cualquiera.

Caso 1. $B \sim B_0$ $\Rightarrow$ ya acabamos.

Caso 2. $B \not\sim B_0$. Veamos que $B \sim B_1$. Tenemos

$M_{B_1}^{B} = M_{B_0}^{B} \cdot M_{B_1}^{B_0}$. Entonces

$\det M_{B_1}^{B} \overset{(1)}{=} \det M_{B_0}^{B} \cdot \det M_{B_1}^{B_0}$. Pero (por def de B_0 y B_1)

$$M_{B_1}^{B_0} = \begin{pmatrix} -1 & & & 0 \\ & 1 & & \\ & & 1 & \\ 0 & & & \ddots \; 1 \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad \therefore \det M_{B_1}^{B_0} = -1 \overset{(2)}{<} 0.$$

Como $B \not\sim B_0$, $\det M_{B_0}^{B} \overset{(3)}{<} 0$. Juntando (1), (2), y (3) obtenemos $\det M_{B_1}^{B} > 0$, i.e. $B \sim B_1$. $\square$

(68) Sea X un espacio topológico, M^n una variedad suave compacta y $f: M^n \to X$ continua. Entonces en $\eta_n(X)$
$-[M, f] = [M, f]$.

Dem. Por definición,

$[M, f] + [M, f] = [M \amalg M, f \amalg f]$.

P.D. $[M \amalg M, f \amalg f] = [S^n, c_{x_0}]$.

Sea $V = (M \times I) \amalg B^{n+1}$. Entonces,

$$\partial V = ((M \times \{0\}) \cup (M \times \{1\})) \amalg S^n$$
$$\cong (M \amalg M) \amalg S^n \quad \cdots (1)$$

Sea $F: V \to X$ t.q. $F(z, t) = f(z)$ si $(z, t) \in M \times I$

y $F(a) = x_0$ si $a \in B^{n+1}$. Entonces

$F|_{M \amalg M} = f \amalg f$ y $F|_{S^n} = c_{x_0}$. $\cdots (2)$

Juntando (1) y (2) obtenemos lo deseado $\square$

(69) Ver que $\eta_0(pt) \xrightarrow{\beta} \mathbb{Z}_2$ dada por

$\beta[\{x_1, \dots, x_n\}] = n \mod 2$ es un isomorfismo.

Dem. Sabemos que

$\eta_0(pt) = \{[M] \mid M$ es una variedad suave compacta de dim $0\}$

donde $[M] = [N] \iff \exists W$ variedad suave compacta de

dim 1 $\,\mathrm{t.q.}\,$ $\partial W = M \amalg N$.

Veamos que β es un homomorfismo. Sean $[M], [N] \in \eta_0(pt)$

y supongamos que $|M| = m$ & $|N| = n$, i.e. que M tiene

m elementos y N tiene n elementos. Entonces

$$\begin{aligned}\beta([M]+[N]) &= \beta([M \amalg N]) \\ &= (m+n) \mod 2 \quad (\text{pues } |M \amalg N| = m+n) \\ &= m \mod 2 +_{\mathbb{Z}_2} n \mod 2 \quad (\text{por def de } +_{\mathbb{Z}_2}) \\ &= \beta([M]) +_{\mathbb{Z}_2} \beta([N]).\end{aligned}$$

Por lo tanto β es un homomorfismo. Veamos que es biyectiva.

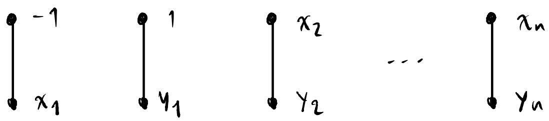
Claramente es suprayectiva. Veamos que es inyectiva. Sea

$[M] \in \eta_0(pt)$ t.q. $\beta([M]) = 0 \mod 2$. Entonces, $|M|$

es par. Como el cero de $\eta_0(pt)$ es $[S^0] = [\{-1, 1\}]$, basta probar que $[M] = [\{-1,1\}]$. Ahora bien, como $|M|$ es par, existe $k \in \mathbb{Z}_{\geq 1}$ tq. $|M| = 2k$. Denotemos $M = \{x_1, \dots, x_k, y_1, \dots, y_k\}$ y consideremos W = la realización geométrica del complejo simplicial

$$\{\{-1\}, \{1\}, \{x_1\}, \dots, \{x_k\}, \{y_1\}, \dots, \{y_k\}, \{x_1,-1\}, \{y_1,-1\}, \{x_2,y_2\}, \dots, \{x_k,y_k\}\}$$

Es decir, W es la siguiente unión disjunta de segmentos



Entonces, $\partial W = M \amalg S^0$ y por lo tanto (por (1)), obtenemos $[M] = [S^0]$. Por lo tanto, β es un iso. $\square$

(70) Sea $f:(X,x_0) \to (Y,y_0)$ continua.

Ver que $f \simeq ct_{y_0} \iff f$ se extiende al $C(X,x_0)$

i.e. $\exists F$ / $F \circ i = f$

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "i"] \arrow[dr, "f"'] & C(X,x_0) \arrow[d, dashed, "F"] \\ & Y \end{tikzcd}$$

donde $i(x) = [x,0]$.

Dem. Por definicion, $C(X,x_0) = X \times I \,/\, X \times \{1\} \cup \{x_0\} \times I$.

Denotemos por $* \in C(X,x_0)$ a la clase de equivalencia de los elementos de $X \times \{1\} \cup \{x_0\} \times I$.

$\Rightarrow$) Supongamos que $f \simeq ct_{y_0}$. Por def, $\exists H: X \times I \to Y$ /

1) $H(x,0) = f(x) \quad \forall x \in X$

2) $H(x,1) = ct_{y_0}(x) = y_0 \quad \forall x \in X$

3) $H(x_0,t) = y_0 \quad \forall t \in I$.

Por (2) y (3) es claro que H pasa al cociente

$$\begin{tikzcd} X \times I \arrow[r, "H"] \arrow[d, "p"'] & (Y,y_0) \\ (C(X,x_0), *) \arrow[ur, dashed, "F"'] & \end{tikzcd}$$

Ademas, $\forall x \in X$, $F \circ i(x) = F([x,0]) = F \circ p((x,0)) = H(x,0) = f(x)$. Es decir, f se extiende a $C(X,x_0)$.

$\Leftarrow$ | Supongamos que $f : (X, x_0) \to (Y, y_0)$ es tal que

$\exists\, F : (C(X, x_0), *) \to (Y, y_0)$ tq $F \circ i = f$.

Sea $H : X \times I \to Y$ tq $H(x,t) = F[x,t]$.

Entonces, H es continua porque es la composicion de

$p : X \times I \to C(X, x_0)$ con F y

1) $H(x,0) = F[x,0] = F \circ i(x) = f(x)$

2) $H(x,1) = F[x,1] = F(*) = y_0$

3) $H(x_0,t) = F[x_0,t] = F(*) = y_0$.

Es decir, $f \simeq ct_{y_0}$. $\square$

(71) Ver que $\{a_0, a_1, \dots, a_n\} \subseteq \mathbb{R}^m$ es afinmente independiente si dados $\lambda_0, \lambda_1, \dots, \lambda_n \in \mathbb{R}$ t.q. $\sum_{i=0}^{n} \lambda_i = 0$,

entonces se tiene que

$$\sum_{i=0}^{n} \lambda_i a_i = 0 \implies \lambda_0 = \lambda_1 = \dots = \lambda_n = 0.$$

Dem. Supongamos que $\{a_0, a_1, \dots, a_n\} \subseteq \mathbb{R}^n$ satisface la siguiente propiedad: $\forall \lambda_1, \dots, \lambda_n \in \mathbb{R}$

$$\left(\sum_{i=0}^{n} \lambda_i = 0 \ \& \ \sum_{i=0}^{n} \lambda_i a_i = 0 \implies \lambda_0 = \lambda_1 = \dots = \lambda_n \right) \cdots (1)$$

Veamos que $\{a_0, a_1, \dots, a_n\}$ es afinmente independiente.

Supongamos que $\mu_1, \dots, \mu_n \in \mathbb{R}$ son t.q.

$\sum_{i=1}^{n} \mu_i (a_i - a_0) = 0$. Entonces,

$$0 = \sum_{i=1}^{n} \mu_i (a_i - a_0) = \sum_{i=1}^{n} \mu_i a_i - \mu_i a_0 =$$

$$\sum_{i=1}^{n} \mu_i a_i - \sum_{i=1}^{n} \mu_i a_0 = \sum_{i=1}^{n} \mu_i a_i - \left(\sum_{i=1}^{n} \mu_i\right) a_0 \cdots (2)$$

Definimos $\lambda_0 = -\sum_{i=1}^{n} \mu_i$ & $\lambda_j = \mu_j$ si $1 \leq j \leq n$.

Entonces podemos reescribir (2) como:

$0 = \sum_{i=0}^{n} \lambda_i a_i \cdots (3)$. Mas aun notemos que por definición,

$$\sum_{i=0}^{n} \lambda_i = \lambda_0 + \sum_{i=1}^{n} \lambda_i = -\sum_{i=1}^{n} \mu_i + \sum_{i=1}^{n} \mu_i = 0 \cdots (4)$$

Juntando (1), (3), y (4) obtenemos lo deseado. $\square$

72 Sea $\sigma \subseteq \mathbb{R}^n$ un complejo geometrico. Ver que σ es cerrado, convexo, y compacto.

Dem. Sea $\sigma \subseteq \mathbb{R}^n$ un q-complejo geometrico. En clase se demostro que si τ es cualquier otro q-simplejo geometrico en un euclidiano, entonces σ y τ son afinmente homeomorfos. Por lo tanto, basta probar que $\Delta^q \subseteq \mathbb{R}^{q+1}$ es cerrado, convexo, y compacto. Por definicion,

$$\Delta^q = \{ (\lambda_0, \lambda_1, \dots, \lambda_q) \in \mathbb{R}^{q+1} \mid \lambda_i \geq 0 \ \& \ \textstyle\sum_{i=0}^q \lambda_i = 1 \}.$$

Sea $f : \mathbb{R}^{q+1} \longrightarrow \mathbb{R} \ \ni\ (\mu_0, \mu_1, \dots, \mu_q) \longmapsto \sum_{i=0}^q \mu_i$.

Entonces

$$\Delta^q = \underbrace{f^{-1}(\{1\})}_{\substack{\text{cerrado porque} \\ \{1\} \text{ es cerrado y} \\ f \text{ es continua}}} \cap \underbrace{\{ x \in \mathbb{R}^{q+1} \mid x_i \geq 0 \ \forall i \}}_{\substack{\text{cerrado porque su complemento} \\ \text{es abierto.}}}.$$

Por lo tanto Δ^q es cerrado. Veamos que Δ^q es acotado. Sea $(\lambda_0, \lambda_1, \dots, \lambda_q) \in \sigma$ y denotemos por $e_0, e_1, \dots, e_q$ a la base canonica de $\mathbb{R}^{q+1}$. Entonces

$$|(\lambda_0, \lambda_1, \dots, \lambda_q)| = \left| \sum_{i=0}^q \lambda_i e_i \right| \leq \sum_{i=0}^q |\lambda_i e_i| =$$

$$\sum_{i=0}^q |\lambda_i| \underbrace{|e_i|}_{1} = \sum_{i=0}^q |\lambda_i| \underset{\text{pues } \lambda_i \geq 0\ \forall i}{=} \sum_{i=0}^q \lambda_i = 1$$

Por lo tanto Δ^9 es acotado $\therefore$ Δ^9 es compacto.

Veamos que Δ^9 es convexo. Supongamos que

$\sum_{i=0}^{9} \lambda_i e_i$, $\sum_{i=0}^{9} \mu_i e_i \in \Delta^9$. Entonces $\forall t \in [0,1]$

$$t \left(\sum_{i=0}^{9} \lambda_i e_i \right) + (1-t) \left(\sum_{i=0}^{9} \mu_i e_i \right) =$$

$$\sum_{i=0}^{9} \left(t\lambda_i + (1-t)\mu_i \right) e_i \in \Delta^9$$

donde la pertenencia se cumple porque

$$\sum_{i=0}^{9} \left(t\lambda_i - (1-t)\mu_i \right) = \sum_{i=0}^{9} t\lambda_i - \sum_{i=0}^{9} (1-t)\mu_i =$$

$$t \underbrace{\sum_{i=0}^{9} \lambda_i}_{1} + (1-t) \underbrace{\sum_{i=0}^{9} \mu_i}_{1} = t + (1-t) = 1.$$

Por lo tanto Δ^9 es convexo. $\square$

73 Sean $\sigma = \langle a_0, a_1, \dots, a_n \rangle \subseteq \mathbb{R}^m$,

$\tau = \langle b_0, b_1, \dots, b_n \rangle \subseteq \mathbb{R}^l$ n-simplejos geometricos.

Sea $f : \sigma \longrightarrow \tau$ dada por

$$f\left(\sum_{i=0}^{n} \lambda_i a_i\right) = \sum_{i=0}^{n} \lambda_i b_i .$$

Ver que f es continua.

Dem. Sup que $\sum_{i=0}^{n} \lambda_i a_i \in \sigma$ es fijo. Sea $\varepsilon > 0$ arbitrario y sea $\delta := \dfrac{\varepsilon \cdot \min |a_j|}{(n+1) \max |b_j|}$. Entonces

$\forall \sum_{i=0}^{n} \mu_i a_i \in \sigma$ $\big)$ $d\left(\sum_{i=0}^{n} \mu_i a_i, \sum_{i=0}^{n} \lambda_i a_i\right) < \delta$

tenemos que $\forall i = 0, 1, \dots, n$

$$|\mu_i - \lambda_i| \, |a_i| = |(\mu_i - \lambda_i) a_i| \leq \left| \sum_{i=0}^{n} (\mu_i - \lambda_i) a_i \right| =$$

$$d\left(\sum_{i=0}^{n} \mu_i a_i, \sum_{i=0}^{n} \lambda_i a_i\right) < \frac{\varepsilon \cdot \min |a_j|}{(n+1) \max |b_j|} \leq \frac{\varepsilon \cdot |a_i|}{(n+1) \max |b_j|}$$

y por lo tanto, $|\mu_i - \lambda_i| < \dfrac{\varepsilon}{(n+1) \max |b_j|}$. Entonces,

$$d\left(f\left(\sum_{i=0}^{n} \mu_i a_i\right), f\left(\sum_{i=0}^{n} \lambda_i a_i\right)\right) =$$

$$d\left(\sum_{i=0}^{n} \mu_i b_i, \sum_{i=0}^{n} \lambda_i b_i\right) = \left| \sum_{i=0}^{n} (\mu_i - \lambda_i) b_i \right| \leq$$

$$\sum_{i=0}^{n} |\mu_i - \lambda_i| \, |b_i| \leq \sum_{i=0}^{n} |\mu_i - \lambda_i| \max |b_j| =$$

$$\max |b_j| \sum_{i=0}^{n} |\mu_i - \lambda_i| \leq \max |b_j| \sum_{i=0}^{n} \frac{\varepsilon}{(n+1) \max |b_j|} = \varepsilon$$

$\square$

74) Definimos una métrica en $|K|$ como sigue:

$d : |K| \times |K| \to \mathbb{R}$

$$d(\alpha,\beta) = \sqrt{\sum_{v \in V_K} (\alpha(v)-\beta(v))^2}$$

Ver que d es una métrica.

1) $\forall \alpha \in |K|$, $d(\alpha,\alpha) = \sqrt{\sum_{v \in V_K} \underbrace{(\alpha(v)-\alpha(v))^2}_{0}} = 0$.

2) Sup que $\alpha, \beta \in |K|$ son $\ni$ $\alpha \neq \beta$. Entonces, existe $v_0 \in V_K$ $\ni$ $\alpha(v_0) \neq \beta(v_0)$. Entonces

$$0 < (\alpha(v_0)-\beta(v_0))^2 \leq \sum_{v \in V_K} (\alpha(v)-\beta(v))^2 = d(\alpha,\beta)^2.$$

$\therefore$ $d(\alpha,\beta) > 0$ si $\alpha \neq \beta$.

3) Si $\alpha, \beta \in |K|$, entonces (por conmutatividad en $\mathbb{R}$),

$d(\alpha,\beta) = d(\beta,\alpha)$.

4) Sean $\alpha, \beta, \gamma \in |K|$. Por def, $\text{supp}(\alpha), \text{supp}(\beta), \text{supp}(\gamma) \in K$. En particular, $\text{supp}(\alpha)$, $\text{supp}(\beta)$, y $\text{supp}(\gamma)$ son finitos. Denotemos $\text{supp}(\alpha) \cup \text{supp}(\beta) \cup \text{supp}(\gamma) = \{v_0, \dots, v_q\}$. Entonces,

$$\begin{aligned} d(\alpha,\beta) &= \sqrt{\sum_{v \in V_K} (\alpha(v)-\beta(v))^2} \\ &= \sqrt{\sum_{i=0}^{q} (\alpha(v_i)-\beta(v_i))^2} \\ &= d_{\mathbb{R}^{q+1}}\big((\alpha(v_0),\dots,\alpha(v_q)),\ (\beta(v_0),\dots,\beta(v_q))\big) \quad \cdots (1) \end{aligned}$$

Analogamente,

$$d(\beta,\gamma) = d_{\mathbb{R}^{q+1}}\left((\beta(v_0),\dots,\beta(v_q)), (\gamma(v_0),\dots,\gamma(v_q)) \right) \quad \cdots (2)$$

Juntando (1) y (2) obtenemos

$$d(\alpha,\beta) + d(\beta,\gamma) =$$

$$d_{\mathbb{R}^{q+1}}\left((\alpha(v_0),\dots,\alpha(v_q)), (\beta(v_0),\dots,\beta(v_q)) \right) + d_{\mathbb{R}^{q+1}}\left((\beta(v_0),\dots,\beta(v_q)), (\gamma(v_0),\dots,\gamma(v_q)) \right) \geq$$

$$d_{\mathbb{R}^{q+1}}\left((\alpha(v_0),\dots,\alpha(v_q)), (\gamma(v_0),\dots,\gamma(v_q)) \right) = d(\alpha,\gamma)$$

Donde la ultima igualdad se demuestra de manera analoga a (1). Por lo tanto d es una metrica. $\square$

(75) Sea K un complejo simplicial y $s \in K$, $s = \{v_0, \dots, v_q\}$

Sea $\varphi : |s| \longrightarrow \Delta^q$ /

$$\alpha \longmapsto (\alpha(v_0), \dots, \alpha(v_q))$$

Sea $\psi : \Delta^q \longrightarrow |s|$

$$(\lambda_1, \dots, \lambda_n) \longmapsto \psi(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$$

donde $v \xmapsto{\psi(\lambda_1, \dots, \lambda_n)} \begin{cases} \lambda_i & \text{si } v = v_i \\ 0 & \text{si } v \neq v_i \ \forall i \end{cases}$

Ver que $\psi = \varphi^{-1}$ y que φ es una isometría.

Dem. Para todo $\alpha \in |s|$,

$\psi \circ \varphi(\alpha) = \psi(\alpha(v_0), \dots, \alpha(v_q))$. Pero

$$\psi(\alpha(v_0), \dots, \alpha(v_q))(v) = \begin{cases} \alpha(v_i) & \text{si } v = v_i \\ 0 & \text{si } v \neq v_i \ \forall i \end{cases}$$

y también, como $\operatorname{supp}(\alpha) \subseteq s = \{v_0, \dots, v_q\}$. Entonces

$$\alpha(v) = \begin{cases} \alpha(v_i) & \text{si } v = v_i \\ 0 & \text{si } v \neq v_i \ \forall i \end{cases}$$

Comparando las últimas dos ecuaciones obtenemos

$$\alpha = \psi(\alpha(v_0), \dots, \alpha(v_q)) = \psi \circ \varphi(\alpha).$$

Conversamente, $\forall (\lambda_0, \dots, \lambda_q) \in \Delta^q \subseteq \mathbb{R}^{q+1}$,

$$\varphi \circ \psi (\lambda_0, \dots, \lambda_q) = \varphi \left(\psi(\lambda_0, \dots, \lambda_q) \right) =$$

$$\left(\psi(\lambda_0, \dots, \lambda_q)(v_0), \dots, \psi(\lambda_0, \dots, \lambda_q)(v_q) \right) = (\lambda_0, \dots, \lambda_q).$$

Por lo tanto, $\psi^{-1} = \varphi$. Veamos que φ es una isometría. Sean $\alpha, \beta \in |s|$. Entonces,

$$d(\alpha, \beta) = \sqrt{\sum_{v \in V_K} (\alpha(v) - \beta(v))^2} \underset{\substack{\wedge \\ \text{pues } supp(\alpha), supp(\beta) \subseteq s.}}{=} \sqrt{\sum_{i=0}^{q} (\alpha(v_i) - \beta(v_i))^2} \quad \cdots (1)$$

Por otro lado,

$$d_{\mathbb{R}^{q+1}}(\varphi(\alpha), \varphi(\beta)) = d_{\mathbb{R}^{q+1}}\left((\alpha(v_0), \dots, \alpha(v_q)), (\beta(v_0), \dots, \beta(v_q)) \right)$$

$$= \sqrt{\sum_{i=0}^{q} (\alpha(v_i) - \beta(v_i))^2} \quad \cdots (2)$$

Comparando (1) y (2) obtenemos lo deseado. $\square$

(76) Sea $f: K \to Q$ un morfismo simplicial. Definimos $|f|: |K| \to |Q|$ como sigue: Para cada $\alpha \in |K|$, sea $|f|(\alpha): V_Q \to I$ tal que $w \mapsto \sum_{v \in f^{-1}(w)} \alpha(v)$.

Ver que $|f|$ está bien definida y que es continua.

(Recordar que $|K|, |Q|$ tienen la topología coherente.)

Lema 1. Si $f: K \to Q$ es un morfismo simplicial, entonces $\mathrm{supp}(|f|(\alpha)) \subseteq f(\mathrm{supp}(\alpha)) \quad \forall \alpha \in |K|$.

Dem del lema 1. Sup que $w \in V_Q$. Entonces

$$
\begin{aligned}
w \in \mathrm{supp}(|f|(\alpha)) &\Rightarrow \sum_{v \in f^{-1}(w)} \alpha(v) = |f|(\alpha)(w) \neq 0 \\
&\Rightarrow \alpha(v) \neq 0 \quad \text{p.a. } v \in f^{-1}(w) \\
&\Rightarrow v \in \mathrm{supp}(\alpha) \quad \text{p.a. } v \in f^{-1}(w) \\
&\Rightarrow w = f(v) \in f(\mathrm{supp}(\alpha)).
\end{aligned}
$$

Dem del ejer. Veamos que $|f|$ está bien definida. Específicamente, veamos que la función $|f|(\alpha): V_Q \to I$ dada por $w \longmapsto \sum_{v \in f^{-1}(w)} \alpha(v)$ pertenece a $|Q|$. Por def,

$$|Q| = \{ \beta : V_Q \to I \mid \mathrm{supp}(\beta) \in Q \ \& \ \sum_{u \in V_Q} \beta(u) = 1 \}.$$

Primero veamos que $\mathrm{supp}(|f|(\alpha)) \in Q$. Por el lema

$$\operatorname{supp}(|f|(\alpha)) \subseteq f(\underbrace{\operatorname{supp}(\alpha)}_{\in K \text{ (pues } \alpha \in |K|)}) \overset{(1)}{\in} Q$$

Donde la pertenencia (1) se cumple porque $f : K \to Q$ es simplicial. Por lo tanto, como Q es un complejo simplicial $\Longrightarrow$ $\operatorname{supp}(|f|(\alpha)) \in Q$. Por otro lado,

$$\sum_{w \in V_Q} |f|(\alpha)(w) = \sum_{w \in V_Q} \left(\sum_{v \in f^{-1}(w)} \alpha(v) \right) \overset{(2)}{=} \sum_{v \in V_K} \alpha(v) \overset{(3)}{=} 1$$

Donde (2) se cumple porque $V_K = \bigcup_{w \in V_Q} f^{-1}(w)$ (esto es consecuencia de que $f : V_K \to V_Q$ es una función) y (3) se cumple porque $\alpha \in |K|$.

$\therefore$ $|f|$ está bien definida.

Veamos que $|f|$ es continua. Cabe recalcar que lo que sigue fue cortado y pegado de mi tesis de licenciatura.

Dem. Es consecuencia de los siguientes resultados conocidos:

1) f es continua $\Longleftrightarrow$ $f\restriction_{|s|}$ es continua $\forall s \in K$ (por def de la topo coherente)

2) Si $g : X \to Y$ es continua & $g(X) \subseteq Z \subseteq Y$,

entonces la restricción del contradominio al subespacio,

$g : X \to Z$ es continua.

(77) Sea K un complejo simplicial y $s \in K$ un q-simplejo.

Consideremos las biyecciones $\sigma : \bar{q} \to s$ donde $\bar{q} = \{0, 1, \dots, q\}$

$s = \operatorname{im} \sigma = \{\sigma(0), \sigma(1), \dots, \sigma(q)\} = \{v_0, v_1, \dots, v_q\}$.

Damos una relacion de equivalencia como sigue.

$\sigma \sim \tau \iff \tau^{-1} \circ \sigma$ es par.

Ver que solamente hay 2 clases de equivalencia.

Dem. Sea $[\sigma] = [v_0, v_1, \dots, v_q]$ fijo y arbitrario.

Sea $f : \{0, 1, \dots, q\} \to \{0, 1, \dots, q\}$ la permutacion

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & \cdots & q \\ 1 & 0 & 2 & \cdots & q \end{pmatrix}$$

Veamos que si τ es t.q. $[\sigma] \neq [\tau]$, entonces

$[\tau] = [\sigma \circ f] = [v_1, v_0, \dots, v_q]$.

Si $[\sigma] \neq [\tau] \implies \tau^{-1} \circ \sigma$ es impar.

Entonces f es impar, $\bar{\sigma} = \sigma \circ f$, y por lo

$\tau^{-1} \circ (\sigma \circ f) = \underbrace{(\tau^{-1} \circ \sigma)}_{\text{impar}} \circ \underbrace{f}_{\text{impar}}$ es par. $\therefore [\tau] = [\bar{\sigma}]$

$\therefore$ solo hay 2 clases de equivalencia: $[\sigma]$ y $[\sigma \circ f]$. $\square$

78 Ver que $R(S)$ tiene la propiedad universal de un R-modulo libre: Dado P un R-modulo y $\varphi : S \to P$ una funcion $\exists!\ F : R(S) \to P$ homomorfismo $/$ $F \circ i = \varphi$.

$$\begin{tikzcd} S \arrow[r, hook, "i"] \arrow[dr, "\varphi"'] & R(S) \arrow[d, dashed, "F"] \\ & P \end{tikzcd}$$

Dem. Sea $\varphi : S \to P$ una funcion cualquiera.

Definimos $F : R(S) \to P$ por

$$\sum_{s \in S} r_s \cdot s \longmapsto \sum_{s \in S} r_s \cdot \varphi(s)$$

Veamos que F es un homomorfismo.

$\forall \sum_{s \in S} r_s \cdot s, \sum_{s \in S} r'_s \cdot s \in R(S)$

$$F\left(\sum_{s \in S} r_s \cdot s + \sum_{s \in S} r'_s \cdot s \right) = F\left(\sum_{s \in S} (r_s + r'_s)\, s \right)$$

$$= \sum_{s \in S} (r_s + r'_s)\, \varphi(s)$$

$$= \sum_{s \in S} r_s \varphi(s) + \sum_{s \in S} r'_s \varphi(s)$$

$$= F\left(\sum_{s \in S} r_s s \right) + F\left(\sum_{s \in S} r'_s s \right).$$

Mas aun, $\forall s \in S$, $F \circ i(s) = F(s) = \varphi(s)$.

$\therefore \exists F : R(S) \to P$ homomorfismo $\dashv$ $F \circ i = \varphi$.

Resta probar que es unico. Supongamos que

$F' : R(S) \to P$ es un homomorfismo $\dashv$ $F' \circ i = \varphi$.

Entonces $\forall \sum_{s \in S} r_s \cdot s \in R(S)$

$$F'\left(\sum_{s\in S} r_s \cdot s\right) = \sum_{s \in S} F'(r_s \cdot s) \quad \left(\begin{array}{c}F' \text{ abre sumas porque} \\ \text{es homomorfismo}\end{array}\right)$$

$$= \sum_{s\in S} r_s \cdot F'(s) \quad \left(\begin{array}{c}F' \text{ saca escalares porque} \\ \text{es homomorfismo}\end{array}\right)$$

$$= \sum_{s\in S} r_s \cdot (F' \circ i)(s)$$

$$= \sum_{s\in S} r_s \cdot \varphi(s)$$

$$= F\left(\sum_{s\in S} r_s \cdot s\right)$$

$\therefore F' = F$. $\square$

(79) Ver que

$0 = \partial_{q-1} \circ \partial_q : R(\mathcal{S}_q^0(K)) \longrightarrow R(\mathcal{S}_{q-2}^0(K))$ y

por lo tanto $0 = \bar{\partial}_{q-1} \circ \bar{\partial}_q : C_q(K) \longrightarrow C_{q-2}(K)$.

Dem. Veamos que $\partial_{q-1} \circ \partial_q = 0$. Como $R(\mathcal{S}_q^0(K))$ es un R-modulo libre, basta ver que

$\partial_{q-1} \circ \partial_q([\sigma]) = 0 \quad \forall [\sigma] \in \mathcal{S}_q^0(K)$.

Sea $[\sigma] \in \mathcal{S}_q^0(K)$ fijo y arbitrario y denotemos $[\sigma] = [v_0, \dots, v_q]$. Ahora bien, sea $i \in \{0, \dots, q\}$ fijo y denotemos $(w_0, \dots, w_{q-1}) = (v_0, \dots, \hat{v}_i, \dots, v_q)$.

Es decir, $w_j = \begin{cases} v_j & \text{si } j < i \\ v_{j+1} & \text{si } j \geq i \end{cases} \quad \cdots (1)$

Entonces,

$$\partial_{q-1}\left([v_0,\dots,\hat{v}_i,\dots,v_q]\right)$$

$$\partial_{q-1}\left([w_0,\dots,w_{q-1}]\right) =$$

$$\sum_{j=0}^{q-1}(-1)^j\,[w_0,\dots,\hat{w}_j,\dots,w_{q-1}] =$$

$$\sum_{0\leq j<i}(-1)^j\,[w_0,\dots,\hat{w}_j,\dots,w_{q-1}] +$$

$$\sum_{i\leq j\leq q-1}(-1)^j\,[w_0,\dots,\hat{w}_j,\dots,w_{q-1}] \underset{\text{por (1)}}{=}$$

$$\sum_{0\leq j<i}(-1)^j\,[v_0,\dots,\hat{v}_j,\dots,\hat{v}_i,\dots,v_q] +$$

$$\sum_{i\leq j\leq q-1}(-1)^j\,[v_0,\dots,\hat{v}_i,\dots,\hat{v}_{j+1},\dots,v_q] \underset{\substack{\text{cambiando el índice}\\ \text{de } j\in\{i,\dots,q-1\}\\ \text{a } j-1\in\{i+1,\dots,q\}\\ \text{en el segundo sumando}}}{=}$$

$$\sum_{0\leq j<i}(-1)^j\,[v_0,\dots,\hat{v}_j,\dots,\hat{v}_i,\dots,v_q] +$$

$$\sum_{i<j\leq q}(-1)^{j-1}\,[v_0,\dots,\hat{v}_i,\dots,\hat{v}_j,\dots,v_q] \quad \cdots\ (2)$$

Por lo tanto

$$\partial_{q-1} \circ \partial_q ([\sigma]) =$$

$$\partial_{q-1} \left(\sum_{i=0}^{q} (-1)^i [v_0, \dots, \hat{v}_i, \dots, v_q] \right) =$$

$$\sum_{i=0}^{q} (-1)^i \partial_{q-1} \left([v_0, \dots, \hat{v}_i, \dots, v_q] \right) \overset{\text{por (2)}}{=}$$

$$\sum_{i=0}^{q} (-1)^i \left(\sum_{0 \leq j < i} (-1)^j [v_0, \dots, \hat{v}_j, \dots, \hat{v}_i, \dots, v_q] + \sum_{i < j \leq q} (-1)^{j-1} [v_0, \dots, \hat{v}_i, \dots, \hat{v}_j, \dots, v_q] \right) =$$

$$\sum_{i=0}^{q} \sum_{0 \leq j < i} (-1)^{i+j} [v_0, \dots, \hat{v}_j, \dots, \hat{v}_i, \dots, v_q] + \sum_{i=0}^{q} \sum_{i < j \leq q} (-1)^{i+j-1} [v_0, \dots, \hat{v}_i, \dots, \hat{v}_j, \dots, v_q] =$$

$$\sum_{0 \leq j < i \leq q} (-1)^{i+j} [v_0, \dots, \hat{v}_j, \dots, \hat{v}_i, \dots, \hat{v}_q] + \sum_{0 \leq i < j \leq q} (-1)^{i+j-1} [v_0, \dots, \hat{v}_i, \dots, \hat{v}_j, \dots, v_q] =$$

$$\sum_{0 \leq j < i \leq q} (-1)^{i+j} [v_0, \dots, \hat{v}_j, \dots, \hat{v}_i, \dots, \hat{v}_q] + \sum_{0 \leq j < i \leq q} (-1)^{i+j-1} [v_0, \dots, \hat{v}_j, \dots, \hat{v}_i, \dots, v_q] = 0$$

Por lo tanto, $\partial_{q-1} \circ \partial_q = 0$. $\square$

(80) Ver que un morfismo de cadenas define un homomorfismo entre los modulos de homologia

$$\varphi_*: H_q(C_*) \longrightarrow H_q(C'_*) \text{ dado por:}$$

$$[c] \longmapsto [\varphi_q(c)]$$

Dem. φ_* esta bien definido: Sea $c \in \ker \partial_q$. Entonces

$$\partial'_q(\varphi_q(c)) = \varphi_{q-1}(\partial_q(c)) \underset{\text{pues } c \in \ker \partial_q}{=} \varphi_{q-1}(0) = 0$$

y por lo tanto $\varphi_q(c) \in \ker \partial'_q$.

Sean $c_1, c_2 \in \ker \partial_q$ t.q. $[c_1] = [c_2]$. Entonces $c_1 - c_2 \in \operatorname{Im} \partial_{q+1}$.

Entonces $\exists\, b \in C_{q+1}$ t.q. $\partial_{q+1}(b) = c_1 - c_2$. Entonces

$$\underbrace{\varphi_q(\partial_{q+1}(b))}_{\in \operatorname{Im} \partial'_q} = \varphi_q(c_1 - c_2) = \varphi_q(c_1) - \varphi_q(c_2)$$

$$\varphi_q(\partial_{q+1}(b)) = \partial'_q(\varphi_q(b))$$

$$\therefore [\varphi_q(c_1)] = [\varphi_q(c_2)].$$

Veamos que φ_* es homomorfismo: Sean $c_1, c_2 \in \ker \partial_q$.

Entonces,

$$\varphi_*([c_1] + [c_2]) = \varphi_*([c_1 + c_2]) = [\varphi_q(c_1 + c_2)] =$$

$$[\varphi_q(c_1) + \varphi_q(c_2)] = [\varphi_q(c_1)] + [\varphi_q(c_2)]. \qquad \square$$

(81) Sean A, B conjuntos y $\varphi: A \to B$ una biyección. Ver que φ induce un isomorfismo $F: R(A) \xrightarrow{\cong} R(B)$.

Dem. Por la propiedad universal de $R(A)$, sabemos que existe un único homomorfismo $\Phi: R(A) \to R(B)$ /. $\Phi \circ i = \varphi$, donde $i: A \hookrightarrow R(A)$ es la inclusión.

Veamos que Φ es biyección. Como φ es biyección, entonces $\Phi(A) = \Phi \circ i(A) = \varphi(A) = B$. Y como B genera $R(B)$, entonces Φ es suprayectiva. Por otro lado, sea $\sum_{a\in A} r_a \cdot a \in R(A)$ /. $\Phi\left(\sum_{a\in A} r_a \cdot a\right) = 0$.

Entonces $\sum_{a\in A} r_a \underbrace{\Phi(a)}_{\in B} = 0$ y por lo tanto $r_a = 0$ $\forall a \in A$,

Entonces Φ es inyectiva y $\therefore$ biyectiva $\square$

82) Sea $V_K = \{v_0, v_1, v_2\}$,

$K = \{ \{v_0\}, \{v_1\}, \{v_2\}, \{v_0, v_1\}, \{v_1, v_2\}, \{v_2, v_0\} \}$.

Ver que $|K| \cong \partial \Delta^2$, $\Delta^2 \subseteq \mathbb{R}^3$

Dem. Por def,

$$|K| = \{ \alpha : V_K \to [0,1] \mid \operatorname{supp}(\alpha) \in K \ \& \ \sum_{v \in V_K} \alpha(v) = 1 \}.$$

Mas aun, como

$K = \{ \{v_0\}, \{v_1\}, \{v_2\}, \{v_0, v_1\}, \{v_1, v_2\}, \{v_2, v_0\} \}$.

entonces todos los elementos de $|K|$ tienen una de las siguientes formas:

1) $\exists v_i$). $\alpha(v_i) = 1$ & $\alpha(v) = 0$ $\forall v \neq v_i$

2) $\exists v_i, v_j$). $\alpha(v_i) + \alpha(v_j) = 1$ & $\alpha(v) = 0$ $\forall v \neq v_i, v_j$

Por otro lado, $\partial \Delta^2 = [e_0, e_1] \cup [e_1, e_2] \cup [e_2, e_0]$

donde $e_0, e_1, e_2 \in \mathbb{R}^3$ es la base canonica de $\mathbb{R}^3$ y $[e_i, e_j]$ denota el segmento de recta con extremos e_i & e_j.

Especificamente,

$$[e_i, e_j] = \{ t e_i + (1-t) e_j \mid t \in [0,1] \}.$$

Definimos $\Phi : |K| \longrightarrow \partial \Delta^2$ por

$$\Phi(\alpha) = \alpha(v_0) e_0 + \alpha(v_1) e_1 + \alpha(v_2) e_2$$

Veamos que Φ esta bien definida. Si $\alpha \in |K|$ es de tipo 1 $\Rightarrow$ $\Phi(\alpha) = e_i \in \partial \Delta^2$. Si $\alpha \in |K|$ es de tipo 2 $\Rightarrow$

$$\begin{aligned}\Phi(\alpha) &= \alpha(v_i) e_i + \alpha(v_j) e_j \\ &= \alpha(v_i) e_i + (1 - \alpha(v_i)) e_j \quad (\text{pues } \alpha(v_i) + \alpha(v_j) = 1) \\ &\in [e_i, e_j] \subseteq \partial \Delta^2.\end{aligned}$$

$\therefore$ Φ esta bien definida.

Veamos que Φ es continua. Como $|K|$ tiene la topologia coherente, esto es equivalente a que $\Phi \restriction_{|s|}$ sea continua $\forall s \in K$. Si $s = \{v_i\}$, entonces claramente $\Phi \restriction_{|s|}$ es continua. Si $s = \{v_i, v_j\}$, entonces $\forall \alpha, \beta \in |s|$

$$d_{\partial \Delta^2}(\Phi(\alpha), \Phi(\beta)) =$$

$$d_{\partial \Delta^2}(\alpha(v_i) e_i + \alpha(v_j) e_j, \beta(v_i) e_i + \beta(v_j) e_j) =$$

$$\sqrt{(\alpha(v_i) - \beta(v_i))^2 + (\alpha(v_j) - \beta(v_j))^2} =$$

$$d_{|s|}(\alpha, \beta)$$

donde la ultima igualdad se cumple por que $\alpha, \beta \in |\{v_i, v_j\}|$

$\therefore$ Φ es continua.

Veamos que Φ es inyectiva. Sup que $\alpha, \beta \in |K|$ son $\cdot|\cdot$ $\Phi(\alpha) = \Phi(\beta)$. Entonces

$$\alpha(v_1)e_1 + \alpha(v_2)e_2 + \alpha(v_3)e_3 = \beta(v_1)e_1 + \beta(v_2)e_2 + \beta(v_3)e_3$$

Entonces $\alpha(v_i) = \beta(v_i)$ $\forall i = 1,2,3$. $\therefore$ $\alpha = \beta$.

Veamos que Φ es suprayectiva. Sea $p \in \partial\Delta^2$.

Entonces $\exists i,j \in \{0,1,2\}$ $\cdot|\cdot$ $p \in [e_i, e_j]$.

Entonces $\exists t \in [0,1]$ $\cdot|\cdot$ $p = te_i + (1-t)e_j$.

Sea $\alpha \in |K|$ $\cdot|\cdot$ $\alpha(v_i) = t$, $\alpha(v_j) = (1-t)$ & $\alpha(v) = 0$ para v el vertice restante. Entonces,

$$\begin{aligned} \Phi(\alpha) &= \alpha(v_i)e_i + \alpha(v_j)e_j \\ &= te_i + (1-t)e_j \\ &= p. \end{aligned}$$

$\therefore$ Φ es suprayectiva.

$\therefore$ Φ es una biyeccion contima

Finalmente como Φ tiene dominio compacto y contradominio Hausdorff, entonces Φ es un homeomorfismo. $\square$

83 Sea $V_K = \{v_0, v_1, v_2\}$,

$K = \{\{v_0\}, \{v_1\}, \{v_2\}, \{v_0, v_1\}, \{v_1, v_2\}, \{v_2, v_0\}\}$.

Ver que $H_q(K, R) \cong \begin{cases} R & ; \quad q \leq 1 \\ 0 & ; \quad q > 1 \end{cases}$

Dem. Primero notemos que como K no tiene simplejos de dimensión > 1, entonces para $q > 1$,

$$H_q(K, R) = {}^{\ker \partial_q}/_{\operatorname{im} \partial_{q+1}} = 0$$

pues $\ker \partial_q \subseteq C_q(K) = 0$.

Ahora bien, veamos el caso $q = 1$. Por def,

$$H_1(K, R) = {}^{\ker \partial_1}/_{\operatorname{im} \partial_2} = \ker \partial_1$$

donde la ultima igualdad se cumple porque $\operatorname{im} \partial_2 \subseteq C_2(K) = 0$. Veamos que $\ker \partial_1 \cong R$. Primero notemos que todo elemento de $C_1(K)$ es de la forma

$a[v_0, v_1] + b[v_1, v_2] + c[v_2, v_0]$, p.a. $a, b, c \in R$.

Calculando directamente,

$\partial_1 (a [v_0, v_1] + b [v_1, v_2] + c [v_2, v_0]) =$

$a \partial_1 ([v_0, v_1]) + b \partial_1 ([v_1, v_2]) + c \partial_1 ([v_2, v_0]) =$

$a ([v_1] - [v_0]) + b ([v_2] - [v_1]) + c ([v_0] - [v_2]) =$

$(c-a) [v_0] + (a-b) [v_1] + (b-c) [v_2]$

Por lo tanto,

$a [v_0, v_1] + b [v_1, v_2] + c [v_2, v_0] \in \ker \partial_1 \iff$

$c - a = 0 , \quad a - b = 0 , \quad b - c = 0$

Equivalentemente, $a = b = c$.

$\therefore$ $[v_0, v_1] + [v_1, v_2] + [v_2, v_0]$ genera $\ker \partial_1$.

Ahora, veamos el caso $q = 0$. Por def,

$H_0 (K, R) = \ker \partial_0 / \operatorname{im} \partial_1 = C_0(K) / \operatorname{im} \partial_1$

donde la ultima igualdad se cumple porque claramente

$\ker \partial_0 = C_0(K)$. Mas aun, como $V_K = \{ v_0, v_1, v_2 \} \implies$

$$C_0(K) = R(\mathcal{S}_0^{\theta}(K))$$
$$= R(\{ [v_0], [v_1], [v_2] \})$$
$$= R \oplus R \oplus R$$

Por otro lado,

$$C_1(K) = R(\{[v_0,v_1], [v_1,v_2], [v_2,v_0]\})$$
$$= R \oplus R \oplus R$$

y por lo tanto, por el 1er teo de isomorfismos,

$$\operatorname{im} \partial_1 \cong C_1(K) / \ker \partial_1 \cong R\oplus R\oplus R / R \cong R\oplus R$$

en el caso $q=1$ vimos que $\ker \partial_1 \cong R$

Por lo tanto,

$$H_0(K,R) \cong C_0(K)/\operatorname{im}\partial_1 \cong R\oplus R\oplus R / R\oplus R \cong R.$$

$\square$

84 $\quad F_q^i \circ F_{q-1}^j = F_q^j \circ F_{q-1}^{i-1}$ si $j < i$

Dem. Supongamos que $(t_0, \dots, t_{q-1}) \in \Delta^{q-1}$. Entonces

<u>Caso 1</u> $\quad j \leq i-2$

$F_q^i \circ F_{q-1}^j (t_0, \dots, t_{q-1}) =$

$F_q^i (t_0, \dots, t_{j-1}, 0, t_j, \dots, t_{q-1}) =$ ← pues $j \leq i-2$

$(t_0, \dots, t_{j-1}, 0, t_j, \dots, t_{i-2}, 0, t_{i-1}, \dots, t_{n-1})$ --- (1)

Por otro lado,

$F_q^j \circ F_{q-1}^{i-1} (t_0, \dots, t_{q-1}) =$

$F_q^j (t_0, \dots, t_{i-2}, 0, t_{i-1}, \dots, t_{q-1}) =$ ← pues $j \leq i-2$

$(t_0, \dots, t_{j-1}, 0, t_j, \dots, t_{i-2}, 0, t_{i-1}, \dots, t_{n-1})$ --- (2)

Comparando (1) y (2) obtenemos lo deseado.

<u>Caso 2.</u> $\quad j = i-1$

$F_q^i \circ F_{q-1}^j (t_0, \dots, t_{q-1}) =$

$F_q^i (t_0, \dots, t_{j-1}, 0, t_j, \dots, t_{q-1}) =$ ← pues $j = i-1$

$(t_0, \dots, t_{j-1}, 0, 0, t_j, \dots, t_{n-1})$ --- (3)

Por otro lado,

$$F_q^{j} \circ F_{q-1}^{i-1}(t_0,\dots,t_{q-1}) =$$

$$F_q^{j}(t_0,\dots,t_{i-2},0,t_{i-1},\dots,t_{q-1}) =$$

pues $j = i-1$

$$(t_0,\dots,t_{i-2},0,0,t_{i-1},\dots,t_{q-1}) =$$

$$(t_0,\dots,t_{j-1},0,0,t_j,\dots,t_{q-1}) \quad \cdots \ (4)$$

Comparando (3) y (4) obtenemos lo deseado. $\square$

85 $\partial_q : S_q(X) \to S_{q-1}(X)$ satisface $\partial_q \circ \partial_{q+1} = 0$.

Sea $\sigma : \Delta^q \to X$ continua, entonces

$$\partial_q \circ \partial_{q+1}(\sigma) =$$

$$\partial_q \left(\sum_{i=0}^{q+1} (-1)^i \sigma \circ F^i_{q+1} \right) =$$

$$\sum_{i=0}^{q+1} (-1)^i \partial_q \left(\sigma \circ F^i_{q+1} \right) =$$

$$\sum_{i=0}^{q+1} (-1)^i \left\{ \sum_{j=0}^{q} \left(\sigma \circ F^i_{q+1} \circ F^j_q \right) \right\} =$$

$$\sum_{i=0}^{q+1} \sum_{j=0}^{q} (-1)^{i+j} \left(\sigma \circ F^i_{q+1} \circ F^j_q \right) =$$

$$\sum_{0 \le j < i \le n} (-1)^{i+j} \left(\sigma \circ F^i_{q+1} \circ F^j_q \right) + \sum_{0 \le i \le j \le n} (-1)^{i+j} \left(\sigma \circ F^i_{q+1} \circ F^j_q \right) =$$

(por el ejercicio anterior.)

$$\sum_{0 \le j < i \le n} (-1)^{i+j} \left(\sigma \circ F^j_{q+1} \circ F^{i-1}_q \right) + \sum_{0 \le i \le j \le n} (-1)^{i+j} \left(\sigma \circ F^i_{q+1} \circ F^j_q \right) =$$

(renombramos los índices del 2do sumando: cambiamos $i \mapsto j'$ y $j \mapsto i'-1$.)

$$\sum_{0 \le j < i \le n} (-1)^{i+j} \left(\sigma \circ F^j_{q+1} \circ F^{i-1}_q \right) + \sum_{0 \le j' \le i'-1 \le n} (-1)^{j'+i'-1} \left(\sigma \circ F^{j'}_{q+1} \circ F^{i'-1}_q \right) =$$

(pues $0 \le j' \le i'-1 \le n \iff 0 \le j' < i' \le n$.)

$$\sum_{0 \le j < i \le n} (-1)^{i+j} \left(\sigma \circ F^j_{q+1} \circ F^{i-1}_q \right) + \sum_{0 \le j' < i' \le n} (-1)^{j'+i'-1} \left(\sigma \circ F^{j'}_{q+1} \circ F^{i'-1}_q \right) =$$

(Los dos sumandos solo difieren en el nombre de los índices y en que el 1ero tiene factor $(-1)^{i+j}$ y el 2do tiene $(-1)^{j'+i'-1}$.)

0.

$\square$

(86) Consideremos una familia de conjuntos $\{B_\alpha\}_{\alpha\in A}$ y los R-modulos libres $R(B_\alpha)$. Ver que

$\bigoplus_\alpha R(B_\alpha) \cong R\left(\bigsqcup_\alpha B_\alpha\right)$.

Dem. Por definicion, todos los elementos de $\bigoplus_\alpha R(B_\alpha)$ son de la forma $\{x_\alpha\}_{\alpha\in A}$ donde $x_\alpha \in R(B_\alpha)$ $\forall \alpha$ & solo hay una cantidad finita de x_α's $/$ $x_\alpha \neq 0$. Mas aun, como $x_\alpha \in R(B_\alpha) \implies x_\alpha = \sum_{b_\alpha\in B_\alpha} r_{b_\alpha}\cdot b_\alpha$ para algunos $r_{b_\alpha}\in R$ $/$ el conjunto $\{b_\alpha \mid r_{b_\alpha}\neq 0\}$ es finito.

Por otro lado, tambien por def, los elementos de $R\left(\bigsqcup_\alpha B_\alpha\right)$ son de la forma $\sum_{b\in \bigsqcup_\alpha B_\alpha} r_b\cdot b$ donde solo una cantidad finita de r_b's son distintas de 0. Notemos que podemos reescribir $\sum_{b\in\bigsqcup_\alpha B_\alpha} r_b\cdot b = \sum_\alpha \sum_{b_\alpha\in B_\alpha} r_{b_\alpha}\cdot b_\alpha$. Definimos

$$f : \bigoplus R(B_\alpha) \longrightarrow R\left(\bigsqcup_\alpha B_\alpha\right)$$

$$\{x_\alpha\}_{\alpha\in A} \longmapsto \sum_\alpha x_\alpha .$$

Por lo mencionado anteriormente, f esta bien definida. Veamos que es inyectiva. Sea $\left\{\sum_{b_\alpha\in B_\alpha} r_{b_\alpha}\cdot b_\alpha\right\}_\alpha \in \bigoplus_\alpha R(B_\alpha)$ $/$

$$0 = f\left(\left\{\sum_{b_\alpha \in B_\alpha} r_{b_\alpha} \cdot b_\alpha\right\}_\alpha\right) = \sum_\alpha \sum_{b_\alpha \in B_\alpha} r_{b_\alpha} \cdot b_\alpha$$

$$= \sum_{b \in \bigsqcup_\alpha B_\alpha} r_b \cdot b_\alpha$$

Entonces, como $\sum_{b_\alpha \in \bigsqcup_\alpha B_\alpha} r_{b_\alpha} \cdot b_\alpha \in R\left(\bigsqcup_\alpha B_\alpha\right)$,

lo anterior implica que $r_{b_\alpha} = 0 \ \forall \alpha$. Por lo tanto,

$\left\{\sum_{b_\alpha \in B_\alpha} r_{b_\alpha} \cdot b_\alpha\right\}_\alpha = \{0_\alpha\}_\alpha$, $\therefore f$ es inyectiva.

Veamos que f es suprayectiva. Sea

$\sum_\alpha \sum_{b_\alpha \in B_\alpha} r_{b_\alpha} \cdot b_\alpha \in R\left(\bigsqcup_\alpha B_\alpha\right)$ arbitrario. Entonces,

claramente, $\left\{\sum_{b_\alpha \in B_\alpha} r_{b_\alpha} \cdot b_\alpha\right\}$ es preimagen de este elemento

y $\therefore f$ es suprayectiva.

Finalmente, veamos que f es morfismo.

$\forall \{x_\alpha\}, \{y_\alpha\} \in \bigoplus_\alpha R(B_\alpha)$ & $\forall r \in R$

$$f(\{x_\alpha\} + r\{y_\alpha\}) = f(\{x_\alpha + r y_\alpha\})$$

$$= \sum_\alpha x_\alpha + r y_\alpha$$

$$= \sum_\alpha x_\alpha + r \sum_\alpha y_\alpha$$

$$= f(\{x_\alpha\}) + r f(\{y_\alpha\}).$$

$\square$

(87) Ver que el homomorfismo

$$\bigoplus_\alpha H_q(C_*^\alpha, \partial_*^\alpha) \xrightarrow{\Phi} H_q\left(\bigoplus_\alpha C_*^\alpha, \partial_*^\oplus\right)$$

dado por $\underbrace{\{[c_\alpha]\}_{\alpha\in A}}_{\text{familia de clases}} \longmapsto \underbrace{[\{c_\alpha\}_{\alpha\in A}]}_{\text{clase de una familia.}}$

es un isomorfismo.

Dem. Sean $\{[c_\alpha]\}_{\alpha\in A}, \{[c'_\alpha]\}_{\alpha\in A} \in \bigoplus_\alpha H_q(C_*^\alpha, \partial_*^\alpha)$

Entonces

$\{[c_\alpha]\} = \{[c'_\alpha]\} \iff$

$[c_\alpha] = [c'_\alpha] \quad \forall \alpha\in\Lambda \iff$

se vale porque solo hay una cantidad finita de $[c_\alpha]$'s distintos de 0.

$\forall \alpha\in\Lambda \ \exists\, d_\alpha \in C_{q+1}^\alpha$ / $\partial_{q+1}(d_\alpha) = c_\alpha - c'_\alpha \iff$

$\exists \{d_\alpha\} \in \oplus C_{q+1}^\alpha \ \ \partial_{q+1}^\oplus(\{d_\alpha\}) = \{c_\alpha - c'_\alpha\} \iff$

$[\{c_\alpha\}] = [\{c'_\alpha\}] \quad \forall \alpha\in\Lambda.$

$\therefore$ Φ está bien definida y es inyectiva.

Veamos que Φ es suprа. Sea $[\{c_\alpha\}] \in H_q\left(\bigoplus_\alpha C_*^\alpha, \partial_*^\oplus\right)$

Claramente, (por la definición de Φ), basta probar que

$\{[c_\alpha]\}_\alpha \in \bigoplus_\alpha H_q(C_*^\alpha, \partial_*^\alpha)$.

Como $\{c_\alpha\} \in \ker \partial_q^{\oplus} \leq \bigoplus_\alpha C_q^\alpha$

(por def de $H_q(\bigoplus_\alpha C_*^\alpha, \partial_*^{\oplus})$) entonces, hay solamente una cantidad finita de c_α's que son distinta de 0. Por lo tanto, claramente $\{[c_\alpha]\}_\alpha \in \bigoplus H_q(C_*^\alpha, \partial_*^\alpha)$.

$\square$

(88) Ver que las dos definiciones de $H_q(X,A;R)$ son isomorfas.

Sea $f: Z_q(X,A) \longrightarrow \ker \bar{\partial}_q$ $\ni$ $c \longmapsto [c]$. Notemos que

$$
\begin{aligned}
c \in Z_q(X,A) &\iff \partial_q(c) \in S_{q-1}(A) && (\text{por def de } Z_q(X,A)) \\
&\iff [\partial_q(c)] = 0_{S_{q-1}(X,A)} && (\text{por def de } S_{q-1}(X,A)) \\
&\iff \bar{\partial}_q([c]) = 0_{S_{q-1}(X,A)} \\
&\iff [c] \in \ker \bar{\partial}_q && \cdots (1)
\end{aligned}
$$

Las implicaciones "$\Longrightarrow$" demuestran que f está bien definida. Veamos que es suprayectiva. Sea $[c] \in \ker \bar{\partial}_q$. Por la definición de f, basta probar que $c \in Z_q(X,A)$. Pero esto es precisamente lo que se demuestra con las implicaciones "$\Longleftarrow$" de (1). Mas aún, es claro que f es un homomorfismo. Como es suprayectivo $\Longrightarrow$ el 1^er^ teo de isomorfismos nos dice que $\ker \bar{\partial}_q \cong Z_q(X,A) / \ker f$.

Calculemos $\ker f$.

$$
\begin{aligned}
c \in \ker f &\iff [c] = f(c) = 0_{S_q(X,A)} \\
&\iff c \in S_q(A)
\end{aligned}
$$

$\therefore \ker f = S_q(A)$ $\quad \therefore \ker \bar{\partial}_q \overset{(2)}{\cong} Z_q(X,A) / S_q(A)$.

Por otro lado, sea $g: B_q(X,A) \longrightarrow \operatorname{im} \bar{\partial}_{q+1}$ tq. $c \longmapsto [c]$

Notemos que

$c \in B_q(X,A) \iff$

$\exists c' \in S_{q+1}(X)\ \exists d \in S_q(A)$ tq. $c = \partial_{q+1}(c') + d \iff$

$\exists c' \in S_{q+1}(X)$ tq. $[c] = [\partial_{q+1}(c')] = \bar{\partial}_{q+1}([c']) \iff$

$[c] \in \operatorname{im} \bar{\partial}_{q+1}$.

Razonando de la misma manera que con f, obtenemos

$$\operatorname{im} \bar{\partial}_{q+1} \cong B_q(X,A) / \ker g .$$

Analogamente,

$$c \in \ker g \iff [c] = 0_{S_q(X,A)}$$
$$\iff c \in S_q(A)$$

y $\therefore \ker g = S_q(A) \iff \operatorname{im} \bar{\partial}_{q+1} \overset{(3)}{\cong} B_q(X,A) / S_q(A)$

Juntando (2) y (3) obtenemos

$$\ker \bar{\partial}_q / \operatorname{im} \bar{\partial}_q \cong \frac{Z_q(X,A)/S_q(A)}{B_q(X,A)/S_q(A)}$$

por el 2do teo de isomorfismos $\longrightarrow \cong Z_q(X,A) / B_q(X,A)$. $\square$

(89) Sea (X, A) una pareja. Denotemos por $\{X_\alpha\}_{\alpha \in \Lambda}$ a la familia de componentes por trayectorias de X y denotemos $A_\alpha := A \cap X_\alpha$. Denotemos $i_\alpha : (X_\alpha, A_\alpha) \longrightarrow (X, A)$ y

$\tilde{i}_\alpha : \{ \Delta^q \xrightarrow{\sigma} X_\alpha \mid \sigma(\Delta^q) \not\subseteq A_\alpha \} \longrightarrow \{ \Delta^q \xrightarrow{\tau} X \mid \tau(\Delta^q) \not\subseteq A \}$

dada por $\sigma \overset{\tilde{i}_\alpha}{\longmapsto} i_\alpha \circ \sigma$. Ver que $\bigsqcup_\alpha \tilde{i}_\alpha$ es inyectiva.

Dem. Sup que $\sigma_i : \Delta^q \longrightarrow X_{\alpha_i}$ son tales que $\sigma_i(\Delta^q) \not\subseteq A_{\alpha_i}$, para $i = 1, 2$. Veamos que

$$\left(\bigsqcup_\alpha \tilde{i}_\alpha\right)(\sigma_1) \overset{(1)}{=} \left(\bigsqcup_\alpha \tilde{i}_\alpha\right)(\sigma_2) \Longrightarrow \alpha_1 = \alpha_2 .$$

Supongamos lo contrario, i.e. $\alpha_1 \neq \alpha_2$. Entonces por (1), $\tilde{i}_{\alpha_1}(\sigma_1) = \tilde{i}_{\alpha_2}(\sigma_2)$. Equivalentemente $\forall x \in \Delta^q$

$$\underbrace{i_{\alpha_1} \circ \sigma_1 (x)}_{\in X_{\alpha_1}} = \underbrace{i_{\alpha_2} \circ \sigma_2 (x)}_{\in X_{\alpha_2}} .$$

Lo cual es imposible pues $X_{\alpha_1} \cap X_{\alpha_2} = \emptyset$. Ahora sí, veamos que $\bigsqcup_\alpha \tilde{i}_\alpha$ es inyectiva. Por lo visto anteriormente, basta tomar $\sigma_1, \sigma_2 \in \{ \Delta^q \xrightarrow{\sigma} X_\alpha \mid \sigma(\Delta^q) \not\subseteq A_\alpha \}$ (con α fijo y arbitrario), tales que $\bigsqcup_\alpha \tilde{i}_\alpha(\sigma_1) = \bigsqcup_\alpha \tilde{i}_\alpha(\sigma_1)$. Equivalentemente, $i_\alpha \circ \sigma_1 = i_\alpha \circ \sigma_2$. Pero como i_α es la inclusión, entonces $\sigma_1 = \sigma_2$. $\square$

(90) Ver la exactitud en $H_q(A;R)$

Queremos ver que $\operatorname{im} \hat{\partial}_{q+1} = \ker i_*$.

$\subseteq$ | Veamos que $i_* \circ \hat{\partial}_{q+1} = 0_{H_q(X,R)}$. Por def,

$\forall [c] \in H_q(A;R)$,

$$i_* \circ \hat{\partial}_{q+1}([c]) = i_*([\partial_{q+1}(c)])$$
$$= [i_\# \circ \partial_{q+1}(c)]$$
$$= 0_{H_q(A,R)}$$

donde la ultima igualdad se cumple porque como $c \in H_q(A;R)$

$\Rightarrow c \in Z_q(X,A) \Rightarrow \partial_{q+1}(c) \in S_q(A) \Rightarrow$

$i_\# \circ \partial_{q+1}(c) \in \operatorname{Im} \partial_{q+1}$.

$\supseteq$ | Sea $[c] \in \ker i_*$, i.e. $i_*[c] = 0$. Entonces

$c \in \operatorname{Im} \partial_{q+1}$. Entonces $c = \partial_{q+1}(\sigma)$ p.a. $\sigma \in Z_q(A,X)$.

Entonces $[c] = \hat{\partial}_{q+1}([\sigma])$. $\therefore \ker i_* \subseteq \operatorname{im} \hat{\partial}_{q+1}$.

$\square$

(91) $\partial_q(\langle v_0, v_1, \dots, v_q\rangle) = \sum_{i=0}^{q} (-1)^i \langle v_0, \dots, \hat{v}_i, \dots, v_q\rangle \in S_{q-1}(K)$

Dem. Primero notemos que $\forall i$, $\forall (t_0, \dots, t_{q-1}) \in \Delta^q$

$\langle v_0, \dots, v_q\rangle \circ F_q^i (t_0, \dots, t_{q-1}) =$

$\langle v_0, \dots, v_q\rangle (t_0, \dots, t_{i-1}, 0, t_i, \dots, t_{q-1}) =$

$t_0 v_0 + \dots + t_{i-1} v_{i-1} + t_i v_{i+1} + \dots + t_{q-1} v_q$.

$\langle v_0, \dots, \hat{v}_i, \dots, v_q\rangle (t_0, \dots, t_{q-1})$.

$\therefore \langle v_0, \dots, v_q\rangle \circ F_q^i = \langle v_0, \dots, \hat{v}_i, \dots, v_q\rangle \quad \forall i \quad \dots (1)$

Mas aun, por def,

$$\partial_q(\langle v_0, \dots, v_q\rangle) = \sum_{i=0}^{q} (-1)^i \langle v_0, \dots, v_q\rangle \circ F_q^i$$

$$= \sum_{i=0}^{q} \langle v_0, \dots, \hat{v}_i, \dots, v_q\rangle. \quad (\text{por } (1))$$

$\square$

(92) Sean $\varphi, \psi : (C_*, \partial_*^C) \longrightarrow (D_*, \partial_*^D)$

morfismos de cadenas $\therefore$ $\varphi \simeq \psi$ son homotópicas.

Ver que $\varphi_* = \psi_* : H_q(C_*) \longrightarrow H_q(D_*)$.

Como $\varphi \simeq \psi$, entonces existen homomorfismos

$T_q : C_q \longrightarrow D_{q+1}$ tales que

$$\varphi_q - \psi_q = \partial_{q+1}^D \circ T_q + T_{q-1} \circ \partial_q^C .$$

Entonces para todo $c \in \ker \partial_q^C$

$$\varphi_q(c) - \psi_q(c) = \partial_{q+1}^D \circ T_q(c) + T_{q+1} \circ \cancel{\partial_q^C(c)}^{\,0}$$

$$= \partial_{q+1}^D(T_q(c)) \in \operatorname{im} \partial_{q+1}^D$$

Pero por def $H_q(D_*, \partial_*^D) = \ker \partial_q^D / \operatorname{im} \partial_{q+1}^D$

y $\therefore$ lo anterior implica que

$$[\varphi_q(c)] = [\psi_q(c)] \quad \forall c \in \ker \partial_q^C$$

Equivalentemente,

$$\varphi_*[c] = \psi_*[c] \quad \forall [c] \in H_q(C_*, \partial_*^C).$$

i.e., $\varphi_* = \psi_*$. $\square$

(94) Ver que $\operatorname{im} \ell = \ker c_*$

$$\operatorname{im} \ell \cong H_q(X, \{x_0\}, R)$$

i.e. las definiciones i) y ii) son equivalentes.

Recordemos que tenemos i_* y j_* :

$\ker j_* = \operatorname{im} i_*$, $\quad \cdots \quad (1)$

$c_* \circ i_* = \mathrm{id}$, $\quad \cdots \quad (2)$

$j_* \circ \ell = \mathrm{id}$. $\quad \cdots \quad (3)$

$$H_q(\{x_0\}; R) \underset{c_*}{\overset{i_*}{\rightleftarrows}} H_q(X; R) \underset{\ell}{\overset{j_*}{\rightleftarrows}} H_q(X, \{x_0\}; R)$$

$\subseteq$ | Sea $[b] \in H_q(X, \{x_0\}; R)$.

$$c_*(\ell([b])) = [c \circ \ell([b])]$$

(95) Ver que la def iii) es equivalente a i) o ii).

De nuevo, basta ver el caso $q=0$. Específicamente, veamos que $\ker c_* = {}^{\ker \varepsilon}/_{\operatorname{im} \partial_1^X}$.

$\subseteq$| Sea $\left[\sum_x r_x x\right] \in \ker c_*$

$\Rightarrow c_*\left[\sum_x r_x x\right] = 0$

$\Rightarrow c_\#\left(\sum_x r_x x\right) \in \operatorname{Im} \partial_1^{\{pt\}}$

$\Rightarrow c_\#\left(\sum_x r_x x\right) = \partial_1^{\{pt\}}[\sigma]$ p.a. $\sigma \in C_1(\{pt\})$

$= 0$ (pues $\partial_1 \circ \sigma = 0$, $\sigma : \Delta^1 \to \{pt\}$).

$\Rightarrow \sum_x r_x (c \circ x) = 0$

$\Rightarrow \sum_x r_x x = 0 \in {}^{\ker \varepsilon}/_{\operatorname{im} \partial_1^X}$.

$\supseteq$| Sea $\left[\sum_x r_x x\right] \in {}^{\ker \varepsilon}/_{\operatorname{im} \partial_1^X}$

$\Rightarrow c_*\left(\left[\sum_x r_x x\right]\right) = 0 \in {}^{\ker \partial_0^{\{pt\}}}/_{\operatorname{im} \partial_1^{\{pt\}}}$

$\Rightarrow c \circ \sum_x r_x x \in \operatorname{im} \partial_1^{\{pt\}} = 0$ pues $\partial_1 \sigma = 0$, $\sigma : \Delta^1 \to pt$

$\Rightarrow \left[\sum_x r_x x\right] \in \ker c_*$

$\therefore \ker c_* = {}^{\ker \varepsilon}/_{\operatorname{im} \partial_1^{\{pt\}}}$. $\square$

(96) Considera la siguiente sucesión exacta larga de homología reducida.

$$\longrightarrow \tilde{H}_q(A;R) \xrightarrow{i_*} \tilde{H}_q(X;R) \xrightarrow{j_*} H_q(X,A;R)$$
$$\xrightarrow{\hat{\partial}_q} \tilde{H}_{q-1}(A;R) \longrightarrow \cdots \longrightarrow \tilde{H}_0(A;R)$$
$$\longrightarrow \tilde{H}_0(X;R) \longrightarrow \tilde{H}_0(X,A;R)$$

Verificar que es exacta (para $q \geq 1$ $\tilde{H}_q(X;R) = H_q(X;R)$)

Solo basta checar para $q=0$.

Veamos que la sucesión

$$H_1(A,X;R) \xrightarrow{\hat{\partial}_1} \tilde{H}_0(A;R) \xrightarrow{i_*} \tilde{H}_0(X;R) \xrightarrow{j_*} H_0(A,X;R)$$

es exacta. Primero veamos que $\operatorname{im} \hat{\partial}_1 = \ker i_*$.

$\subseteq$ | Sea $\sigma \in Z_1(X,A)$.

$\Rightarrow \hat{\partial}_1([\sigma]) = [\partial_1(\sigma)]$

$\Rightarrow i_*[\partial_1(\sigma)] = [i_\# \circ \partial_1(\sigma)]$

$= [\partial_1 \circ i_\#(\sigma)]$ (naturalidad de ∂)

$= 0$ (por def $\tilde{H}_0(A;R) = \ker \varepsilon / \operatorname{im} \partial_1$)

$\supseteq$ | Sea $[\sigma] \in \tilde{H}_0(A;R)$ t.q. $i_*[\sigma] = 0$

$\Rightarrow [i_\#(\sigma)] = 0 \Longrightarrow i_\#(\sigma) \in \operatorname{im} \partial_1$

$\Rightarrow \sigma \in \operatorname{im} \partial_1 \Rightarrow \sigma = \partial_1(c)$ p.a. $c \in S_1(A)$

$\Rightarrow [\sigma] = \hat{\partial_1}([c]) \in \operatorname{im} \hat{\partial_1}$

$\therefore \operatorname{Im} \hat{\partial_1} = \ker i_*$

Ahora veamos que $\operatorname{im} i_* = \ker j_*$.

$\subseteq |$ Sea $[\sigma] \in \operatorname{im} i_*$.

$\Rightarrow [\sigma] = i_*[c]$ p.a. $[c] \in \tilde{H}_0(A;R)$

$\Rightarrow j_*[\sigma] = j_* i_* [c] = [\underbrace{i_\# \circ c}_{\in B_0(X,A)}] = 0$ pues $c \in \ker \varepsilon \subseteq S_0(A)$

$\supseteq |$ Sea $[z] \in \tilde{H}_q(X;R)$ ⟩. $j_*[z] = 0$

$\Rightarrow j_\#(z) \in B_q(X,A)$

$\Rightarrow j_\#(z) = \partial_{q+1}(c) + d$ con $c \in S_{q+1}(X)$ & $d \in S_q(A)$

$\Rightarrow j_\#(z) - d = \partial_{q+1}(c)$

$\Rightarrow z - d \in \operatorname{im} \partial_{q+1}$

$\Rightarrow [z] = [d] = [i_\#(d)] = i_*[d] \in \operatorname{im} i_*$.

$\therefore \operatorname{im} i_* = \ker j_*$.

$\therefore$ La sucesión es exacta. $\square$

(97) $i : S^{n-1} \hookrightarrow \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ es un retracto por def.

Sea $r : \mathbb{R}^n \setminus \{0\} \longrightarrow S^{n-1}$ $\ni$ $x \longmapsto x/\|x\|$.

Entonces r es continua y $\forall z \in S^{n-1}$,

$(r \circ i)(z) = r(i(z)) = r(z) = z/\|z\| = z$.

Veamos que $(i \circ r)(x) \simeq id_{\mathbb{R}^{n+1} \setminus \{0\}}$.

Primero notemos que $\forall x \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$, $(i \circ r)(x) = x/\|x\|$

Sea $H : (\mathbb{R}^n \setminus \{0\}) \times I \longrightarrow \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$

$$(x, t) \longmapsto t\frac{x}{\|x\|} + (1-t)x.$$

Entonces

1) $H(x, 0) = x \quad \forall x \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$

2) $H(x, 1) = \frac{x}{\|x\|} \in S^{n-1} \quad \forall x \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$

3) $H(z, 1) = \frac{z}{\|z\|} = z \quad \forall z \in S^{n-1}$

Juntando esto con la igualdad $(i \circ r)(x) = \frac{x}{\|x\|}$

obtenemos lo deseado. $\square$

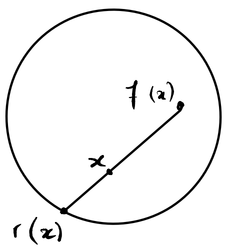
(98) Ver que r es continua dando la formula.

(La r del teo del punto fijo de Brower).

Primero recordemos como esta definida geometricamente r.

Sea $f: D^2 \to D^2$ $/$ $f(x) \neq x \ \forall x \in D^2$. Definimos

$r: D^2 \to S^1$ $/$ $r(x)$ es la interseccion de S^1 con el rayo en $\mathbb{R}^2$ que empieza en $f(x)$ y pasa por x.



Ahora si, veamos la formula explicita de r. Recordemos que el rayo esta parametrizado por

$(1-t)f(x) + tx$, $t \geq 0$. Como queremos su interseccion con S^1 $\Longrightarrow$ queremos encontrar la $t_x > 0$

$/$ $\|(1-t_x)f(x) + t_x x\| = 1$. Pero

$$\|(1-t_x)f(x) + t_x x\| = 1 \iff$$

$$\|(1-t_x)f(x) + t_x x\|^2 = 1 \iff$$

$$\|t_x(x - f(x)) + f(x)\|^2 = 1 \iff$$

$$t_x^2 \underbrace{\|x - f(x)\|^2}_{a} + t_x \underbrace{2\langle x - f(x), f(x)\rangle}_{b} + \underbrace{\|f(x)\|^2 - 1}_{c} = 0$$

Esto es una ecuación cuadrática en t_x con solución

$$t_x = \frac{b^2 \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

Haciendo cuentas y usando Cauchy-Schwarz se puede demostrar que $b^2 - 4ac \geq 0$. Como $a \neq 0$ (pues $a = \|x - f(x)\|^2$ y $f(x) \neq x$ $\forall x$ $\Rightarrow$ t_x está bien definido. Además, la función $t : D^2 \to \mathbb{R}$ dada por $t(x) = t_x$ es continua pues $a(x), b(x), c(x)$ lo son.

Finalmente,

$$r(x) = (1 - t(x))\, f(x) + t(x)\, x$$

es continua. $\square$

(99) Ver que ρ conmuta con las funciones que inducen los otros 3 isomorfismos $\therefore$ ρ_* es mult por -1 en dim n.

Recordemos que

$$\rho : S^n \longrightarrow S^n$$

$$(x_0, \dots, x_n) \longmapsto (-x_0, \dots, x_n).$$

& $\sigma := \hat{\partial}_q \circ \pi_* \circ i_*^{-1} \circ j_*$.

Veamos que ρ conmuta con π, i, j.

1) Para todo $(x_0, \dots, x_n) \in S^n_+$,

$$\rho \circ \pi (x_0, \dots, x_n) = \rho(x_0, \dots, x_{n-1}, 0)$$
$$= (-x_0, \dots, x_{n-1}, 0)$$

$$\pi \circ \rho (x_0, \dots, x_n) = \pi(-x_0, \dots, x_n)$$
$$= (-x_0, \dots, x_{n-1}, 0)$$

2) Para todo $(x_0, \dots, x_n) \in S^n_+$,

$$\rho \circ i (x_0, \dots, x_n) = \rho(x_0, \dots, x_n) = i \circ \rho(x_0, \dots, x_n)$$

3) Para todo $(x_0, \dots, x_n) \in S^n_-$,

$$\rho \circ j (x_0, \dots, x_n) = \rho(x_0, \dots, x_n) = j \circ \rho(x_0, \dots, x_n)$$

$\therefore$ ρ conmuta con π, i, j. $\square$

(100) Sea Z Hausdorff y $Y \subseteq Z$ cerrado. Supongamos que existe $F : (D^n, S^{n-1}) \longrightarrow (Z, Y)$ $\dashv$.

$F\restriction_{D^n \setminus S^{n-1}} : D^{n-1} \setminus S^{n-1} \longrightarrow Z \setminus Y$ es homeomorfismo.

Entonces $Z \cong Y \cup_{F\restriction_{S^{n-1}}} D^{n-1}$

Denotemos $f := F\restriction_{S^{n-1}}$ y denotemos por $i : Y \hookrightarrow Z$ a la inclusión canónica. Entonces tenemos el cuadrado interior del siguiente diagrama conmuta.

$$\begin{tikzcd}
S^{n-1} \arrow[r, "f"] \arrow[d, "\iota"'] & Y \arrow[d, "\beta"] \arrow[ddr, bend left, "i"] & \\
D^n \arrow[r, "\alpha"'] \arrow[drr, bend right, "F"'] & Y \cup_f D^n \arrow[dr, dashed, "\Phi"] & \\
& & Z
\end{tikzcd}$$

Específicamente, tenemos que $\alpha \circ \iota = \beta \circ f$. Para poder ocupar la propiedad universal del pushout $Y \cup_f D^n$, veamos que el cuadrado exterior conmute, i.e., veamos que $F \circ \iota = i \circ f$. Sea $x \in S^{n-1}$. Entonces

$$i \circ f(x) = i(f(x)) = i(F(x)) = F(x) = F \circ \iota(x).$$

$$\therefore \quad F \circ \iota = i \circ f \quad \cdots \quad (1)$$

$\therefore \ \exists\ \Phi : Y \cup_f D^n \longrightarrow Z$ continua $\ni$.

$F = \Phi \circ \alpha \quad \cdots (2)$

$i = \Phi \circ \beta \quad \cdots (3)$

Veamos que Φ es el homeomorfismo buscado. Sea

$\Psi : Z \longrightarrow Y \cup_f D^n \quad \ni$.

$$z \longmapsto \begin{cases} \alpha \circ f^{-1}(z) & \text{si } z \in Z \setminus Y \\ \beta(z) & \text{si } z \in Y \end{cases}$$

Ψ esta bien definida porque $f : D^n \setminus S^{n-1} \longrightarrow Z \setminus Y$ es un homeomorfismo. Veamos que $\Phi^{-1} = \Psi$.

Para todo $z \in Z \setminus Y$

$$\Phi \circ \Psi(z) = \Phi \circ \alpha \circ f^{-1}(z) \overset{\text{por } (2)}{=} F \circ f^{-1}(z) = z$$

Para todo $z \in Y$

$$\Phi \circ \Psi(z) = \Phi \circ \beta(z) \overset{\text{por } (3)}{=} i(z) = z$$

$\therefore \ \Phi \circ \Psi(z) = z$.

Para ver que $\Psi \circ \Phi([x]) = [x] \quad \forall [x] \in Y \cup_f D^n$

necesitamos la siguiente observacion:

$\left(F(x) \in Z \setminus Y \iff x \in D^n \right)$ & $\left(F(x) \in Y \iff x \in S^{n-1} \right) \quad \cdots (4)$

Demostración de (4): La primera equivalencia es porque $f : D^n \setminus S^n \longrightarrow Z \setminus Y$ es una biyección y para ver la segunda notemos que

$$F(x) \in Y \iff F(x) \notin Z \setminus Y \overset{\text{por la primera equivalencia}}{\iff} x \notin D^n \iff x \in S^{n-1}.$$

Fin de la demostración de (4). Ahora sí,

sea $[x] \in Y \cup_f D^n$. Entonces

$$\Psi \circ \Phi([x]) = \Psi \circ \Phi \circ \alpha(x)$$

$$= \Psi \circ F(x) \qquad (\text{por } (2))$$

$$= \begin{cases} \alpha \circ f^{-1}(F(x)) & \text{si } F(x) \in Z \setminus Y \\ \beta(F(x)) & \text{si } F(x) \in Y \end{cases}$$

por (4)

$$= \begin{cases} \alpha(x) & \text{si } x \in D^n \setminus S^{n-1} \\ \beta(F(x)) & \text{si } x \in S^{n-1} \end{cases}$$

porque el cuadrado inferior conmuta

$$= \begin{cases} \alpha(x) & \text{si } x \in D^n \setminus S^{n-1} \\ \alpha(x) & \text{si } x \in S^{n-1} \end{cases}$$

$$= [x].$$

$\therefore \Phi^{-1} = \Psi.$

Ahora bien, como S^{n-1} es compacto y Y es Hausdorff

$\Longrightarrow$ $Y \overset{\text{por (4)}}{=} F(S^{n-1})$ es compacto.

Mas aun, como D^n es compacto $\Longrightarrow$ $Y \cup_f D^n$ es compacto. Pero entonces

$\Phi : Y \cup_f X \longrightarrow Z$ es una biyeccion continua con dominio compacto y contradominio Hausdorff.

$\therefore$ Φ es un homeomorfismo. $\square$

(101) Ver que $[c]$ no depende del elemento d.

Sean $d, d' \in D_q$ $\ni$. $\psi_q(d) = \psi_q(d') = z$ y sean

$c, c' \in C_{q-1}$ $\ni$.

$\varphi_{q-1}(c) = \partial_q^D(d)$ & $\varphi_{q-1}(c') = \partial_q^D(d')$ $\cdots$ (1)

Veamos que $[c] = [c']$. Como c y c' son ciclos $\Rightarrow$ basta ver que $c - c' \in \operatorname{im} \partial_q^C$. Recordemos que el siguiente diagrama conmuta y sus columnas son exactas.

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & C_q \arrow[r, "\varphi_q"] \arrow[d, "\partial_q^C"'] & D_{q+1} \arrow[r, "\psi_q"] \arrow[d, "\partial_q^D"'] & E_{q+1} \arrow[r] \arrow[d, "\partial_q^E"'] & 0 \\
0 \arrow[r] & C_{q-1} \arrow[r, "\varphi_{q-1}"] \arrow[d, "\partial_{q-1}^C"'] & D_{q-1} \arrow[r, "\psi_{q-1}"] \arrow[d, "\partial_{q-1}^D"'] & E_{q-1} \arrow[r] \arrow[d, "\partial_{q-1}^E"'] & 0 \\
0 \arrow[r] & C_{q-2} \arrow[r, "\varphi_{q-2}"] & D_{q-2} \arrow[r, "\psi_{q-2}"] & E_{q-2} \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

Entonces,

$$\begin{aligned}
\varphi_{q-2} \circ \partial_{q-1}^C (c - c') &= \partial_{q-1}^D \circ \varphi_{q-1}(c - c') \\
&= \partial_{q-1}^D \left(\varphi_{q-1}(c) - \varphi_{q-1}(c') \right) \\
&= \partial_{q-1}^D \left(\partial_q^D(d) - \partial_q^D(d') \right) \quad (\text{por } (1)) \\
&= 0 \quad (\text{pues } \partial^2 = 0)
\end{aligned}$$

$\therefore$ $\varphi_{q-2} \circ \partial_{q-1}^C (c - c') = 0$ $\therefore$ $c - c' \in \ker \partial_{q-1}^D = \operatorname{im} \partial_q^D$. $\square$

(102) Ver que γ es suprayectiva y que $\operatorname{Im} \rho = \ker \gamma$

Recordemos que

$$\gamma : \bigoplus_{g} R \longrightarrow \bigoplus_{g-1} R \oplus R/2R$$

$$(r_1, \dots, r_g) \longmapsto (r_1 - r_g, \dots, r_{g-1} - r_g, [r_g])$$ y que

$$\rho : R \longrightarrow \bigoplus_{g} R$$

$$r \longmapsto 2(r, r, \dots, r).$$

Primero veamos que γ es suprayectiva. Sea

$(t_1, \dots, t_{g-1}, [t_g]) \in \bigoplus_{g-1} R \oplus R/2R$.

Entonces,

$\gamma(t_1 + t_g, \dots, t_{g-1} + t_g, t_g) =$

$((t_1 + t_g) - t_g, \dots, (t_{g-1} + t_g) - t_g, [t_g]) =$

$(t_1, \dots, t_{g-1}, [t_g])$.

$\therefore$ γ es suprayectiva.

Veamos que $\operatorname{Im} \rho = \ker \gamma$

$\subseteq |$ Sea $r \in R \Rightarrow \rho(r) = 2(r, \dots, r) \Rightarrow$

$\gamma\rho(r) = (2r - 2r, \dots, 2r - 2r, [2r]) = 0$.

$\supseteq |$ Sea $(r_1, \dots, r_g) \in \ker \gamma$. Entonces,

$\gamma(r_1,\dots,r_g)=0$. Entonces,

$$0=(r_1-r_g,\dots,r_{g-1}-r_g,[r_g])$$

$\therefore\ r_1=r_2=\dots=r_{g-1}=r_g$

Denotemos este elemento por $r\in R$. Por otro lado, como $[r_g]=0 \implies [r]=0 \implies r/2\in R$ está bien definido. Pero entonces

$$\rho(r/2)=2(r/2,r/2,\dots,r/2)$$
$$=(r,\dots,r)=(r_1,\dots,r_g)$$

$\therefore\ (r_1,\dots,r_g)\in \operatorname{im}\rho$

$\therefore\ \operatorname{im}\rho=\ker\gamma$. $\square$

103 Calcular $H_q(\mathbb{R}P^n, \mathbb{Z}_2)$

Recordemos que en clase vimos que

$$H_q(\mathbb{R}P^n, R) \cong \begin{cases} 0 & \text{si } q > n \\ R/2R & \text{si } 1 \leq q \leq n-1 \text{ y } q \text{ es impar} \\ R_{(2)} & \text{si } 1 \leq q \leq n \text{ y } q \text{ es par} \\ R & \text{si } q = 0 \text{ o } q = n,\ n \text{ impar} \end{cases}$$

Por lo tanto, si $R = \mathbb{Z}_2 \Longrightarrow$

$2\mathbb{Z}_2 = 2\{0,1\} = \{0,2\} = \{0\} = 0 \Longrightarrow$

$\mathbb{Z}_2 / 2\mathbb{Z}_2 = \mathbb{Z}_2$.

Por otro lado, $(\mathbb{Z}_2)_{(2)} = \ker(2\,\mathrm{id}_{\mathbb{Z}_2}) = \ker 0 = \mathbb{Z}_2$

donde la tercera igualdad se cumple porque $2 \equiv 0 \mod 2$.

$$\therefore\ H_q(\mathbb{R}P^n, \mathbb{Z}_2) = \begin{cases} 0 & \text{si } q > n \\ \mathbb{Z}_2 & \text{si } 0 \leq q \leq n. \end{cases}$$