Tarea 5

Análisis Real (2025-2)
Dr. Javier Fernando Rosenblueth Laguette

Diego Leipen Lara

3. Como $f \geq 0$,

$$\{x : f(x) \neq 0\} = \bigcup_n \underbrace{\{x : f(x) \geq 1/n\}}_{=:E_n}.$$

En particular,

$$m\{x : f(x) \neq 0\} \leq \sum_n mE_n. \tag{1}$$

Más aun,

$$0 = \int f \geq \int_{E_n} f \geq \frac{1}{n} mE_n.$$

donde la primera desigualdad es consecuencia de que $f \geq 0$. Esto implica que $mE_n = 0$. Sustituyendo esto en (1) obtenemos $m\{x : f(x) \neq 0\} = 0$.

5. *Continuidad por la izquierda.* Sea $x \in \mathbb{R}$ y sea (x_n) una sucesión creciente tal que $x_n \uparrow x$. Definimos $f_n \coloneqq f \cdot \chi_{(-\infty,x)}$. Como f es no negativa, (f_n) es una sucesión creciente de funciones medibles no negativas. Más aun, es fácil ver que $\lim f_n(x) = (f \cdot \chi_{(-\infty,x)})(x)$ para todo $x \in \mathbb{R}$. Por lo tanto,

$$F(x) = \int_{-\infty}^{x} f = \int f \cdot \chi_{(-\infty,x)} = \lim \int f_n = \lim \int f \cdot \chi_{(-\infty,x_n)} = \lim \int_{-\infty}^{x_n} f = \lim F(x_n) = \lim_{y \uparrow x} F(y)$$

donde la tercera igualdad es consecuencia del teorema de convergencia monótona.

Continuidad por la derecha. Sea $x \in \mathbb{R}$ y sea (x_n) una sucesión decreciente tal que $x_n \downarrow x$. Definimos $f_n \coloneqq f \cdot \chi_{(x_n,\infty)}$. Procediendo de la misma manera que en la demostración de continuidad por la izquierda, se puede demostrar que $\int_x^\infty f = \lim \int_{x_n}^\infty f$. Por lo tanto,

$$F(x) = \int_{-\infty}^{x} f = \int f - \int_x^\infty f = \int f - \lim \int_{x_n}^\infty f = \lim \int_{-\infty}^{x_n} f = \lim F(x_n) = \lim_{y \downarrow x} F(y).$$

6. Como $f - f_n$ es no negativa y $f - f_n \to 0$, el Lema de Fatou implica que

$$0 \leq \liminf \int (f - f_n) = \liminf \left(\int f - \int f_n \right) = \int f - \limsup \int f_n.$$

De donde, $\limsup \int f_n \leq \int f$. Pero por el Lema de Fatou también tenemos $\int f \leq \liminf f_n$.

7. a) Sea $f_n = \chi_{[n,n+1)}$. Entonces $f_n(x) \to 0$ y $\int f_n = 1$. Por lo tanto, $\int f = 0 < 1 = \liminf \int f_n$.

b) Sea $f_n = \chi_{[n,\infty)}$. Entonces $f_n(x) \to 0$ y $\int f_n = \infty$. Por lo tanto, $\int f = 0 \neq \infty = \lim \int f_n$.

8. Sea $g_n = \inf_{k\geq n} f_k$ y $g = \liminf f_n$. Entonces $g_n(x) \to g(x)$ (pues una sucesión creciente converge a su supremo) y por lo tanto,

$$\int \liminf f_n = \int g \leq \liminf \int g_n \leq \liminf \int f_n$$

donde la primera desigualdad es por el Lema de Fatou y la segunda es porque $g_n = \inf_{k\geq n} f_k \leq f_n$.

9. Como el dominio de f_n es $\mathbb{R}$ y $f_n \to f$, por el Lema de Fatou,

$$\int_{\mathbb{R}\setminus E} f \leq \liminf \int_{\mathbb{R}\setminus E} f_n.$$

Equivalentemente,

$$\int f - \int_E f \leq \liminf \int f_n - \limsup \int_E f_n.$$

Pero por hipótesis $\int f_n \to \int f < \infty$. De donde,

$$\limsup \int_E f_n \leq \int_E f.$$

Pero por el Lema de Fatou también tenemos $\int_E f \leq \liminf \int_E f_n$.

12. Sea $g_n = \inf_{k\geq n} f_k$ y $f = \liminf f_n$. Entonces $|g_n| \leq |f_n| \leq g$ y $g_n(x) \to f(x)$ (pues una sucesión creciente converge a su supremo). Luego, por el teorema de convergencia dominada,

$$\int_E \liminf f_n = \lim \int_E \inf_{k\geq n} f_k = \liminf \int_E \inf_{k\geq n} f_k \leq \liminf \int_E f_n. \tag{2}$$

Esto demuestra la primera desigualdad. La segunda es trivial. Resta ver la última. Primero notemos que $g - f_n$ es medible pues g y f_n son medibles. Entonces por (2),

$$\int_E \liminf(g - f_n) \leq \liminf \int_E (g - f_n)$$

Desarrollando obtenemos

$$\begin{aligned}\int_E g - \int_E \limsup f_n = \int_E (g - \limsup f_n) = \int_E \liminf(g - f_n)\\ \leq \liminf \int_E (g - f_n) = \liminf \left(\int_E g - \int_E f_n\right) = \int_E g - \limsup \int_E f_n.\end{aligned}$$

Por lo tanto,

$$\limsup \int_E f_n \leq \int_E \limsup f_n.$$

13. Como $f_n \geq -h$ y $f_n \to f$, entonces $0 \leq f_n + h \to f + h$. Entonces, por el Lema de Fatou

$$\int (f+h) \leq \liminf \int (f_n + h).$$

Desarrollando obtenemos

$$\int f + \int h = \int (f+h) \leq \liminf \int (f_n + h) = \liminf \left(\int f_n + \int h\right) = \liminf \left(\int f_n\right) + \int h.$$

Como por hipótesis h es integrable, podemos restar $\int h < \infty$ de ambos lados para obtener lo deseado.

14. Sea (f_n) una sucesión de funciones integrables tal que $f_n \to f$ c.d.s. con f integrable. Supongamos que $\int |f - f_n| \to 0$. Como $|f_n| - |f| \to 0$, $\big||f_n| - |f|\big| \leq |f - f_n| \to 0$ y $\int |f - f_n| \to 0$, el Teorema 16 implica que

$$\int (|f_n| - |f|) \to 0.$$

Como $\int f < \infty$, esto es equivalente a

$$\int |f_n| \to \int |f|.$$

Cabe recalcar que la integrabilidad de las f_n y de la f es necesaria para poder ocupar el Teorema 16. Conversamente, supongamos que $\int |f_n| \to \int |f|$. Como $|f - f_n| \to 0$, $|f_n - f| \leq |f_n| + |f| \to 2|f|$, y $\int (|f_n| + |f|) \to 2 \int |f|$, el Teo. 16 implica que

$$\int |f - f_n| \to 0.$$

15. a) Sea f integrable y sea $\epsilon > 0$. Por el problema 4, existe $\varphi^+ \leq f^+$ simple que se anula afuera de un conjunto de medida finita y satisface

$$\int |f^+ - \varphi^+| = \int (f^+ - \varphi^+) < \epsilon/2.$$

Análogamente, existe $\varphi^- \leq f^-$ tal que

$$\int |f^- - \varphi^-| = \int (f^- - \varphi^-) < \epsilon/2.$$

Por lo tanto, la función $\varphi \coloneqq \varphi^+ - \varphi^-$ es simple y satisface

$$\int |f - \varphi| = \int |(f^+ - f^-) - (\varphi^+ - \varphi^-)| \leq \int |f^+ - \varphi^+| + \int |f^- - \varphi^-| < \epsilon.$$

Cabe recalcar que usando la caracterización de conjuntos de medida finita en términos de una diferencia simétrica (cf. proposición 3.15.vi) podemos escoger φ^+ y φ^- como funciones simples definidas sobre un intervalo cerrado.

b) Sea f integrable y sea $\epsilon > 0$. Por (a), existe una función simple φ definida sobre un intervalo cerrado tal que $\int |f - \varphi| < \epsilon/2$. Como φ es simple, existe $M > 0$ tal que $|\varphi| < M$. Ahora bien, por el ejercicio 3.23.c, existe ψ escalonada tal que $|\psi| < M$ y

$$m\{x : \varphi(x) \neq \psi(x)\} < \frac{\epsilon}{4M}.$$

Denotemos $A \coloneqq \{x : \varphi(x) \neq \psi(x)\}$. Entonces

$$\int |\varphi - \psi| = \int_A |\varphi - \psi| < \int_A 2M = mA \cdot 2M < \frac{\epsilon}{4M} 2M = \frac{\epsilon}{2}.$$

Por lo tanto,

$$\int |f - \psi| \leq \int |f - \varphi| + \int |\varphi - \psi| < \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2} = \epsilon.$$

c) La demostración es análoga a la de (b). Empezamos con la función simple dada por (b) y usamos el ejercicio 3.22.d para encontrar la función continua deseada.

16. Sea ψ una función escalonada que sea anula afuera de $[a,b]$ y sea $a = a_1 < a_2 < \cdots < a_m = b$ tal que $\psi \equiv \eta_i$ en (a_i, a_{i+1}). Entonces

$$\int \psi(x)\cos(nx)\,dx = \sum_{i=1}^{m-1} \int_{a_i}^{a_{i+1}} \eta_i \cos(nx)\,dx = \sum_{i=1}^{m-1} \eta_i \left(\frac{1}{n}\sin(na_{i+1}) - \frac{1}{n}\sin(na_i)\right) \to 0$$

donde la segunda igualdad es consecuencia del TFC y la convergencia es consecuencia de que (usando la desigualdad del triangulo) podemos acotar cada sumando por $2|\eta_i|/n$.

Ahora bien, sea f integrable en $(-\infty,\infty)$. Por el ejercicio 15.b, existe ψ escalonada que se anula afuera de un intervalo finito tal que $\int |f-\psi| < \epsilon$. Entonces

$$\begin{aligned}
\left|\int f(x)\cos(nx)\,dx\right| &\le \int |(f(x)-\psi(x))\cos(nx)|\,dx + \int |\psi(x)\cos(nx)|\,dx \\
&\le \int |f-\psi| + \int |\psi(x)\cos(nx)|\,dx && \text{(pues } |\cos| \le 1) \\
&< \epsilon + \int |\psi(x)\cos(nx)|\,dx \to \epsilon + 0.
\end{aligned}$$

Por lo tanto, (como esto es cierto para todo $\epsilon > 0$)

$$\int f(x)\cos(nx)\,dx \to 0.$$

17. En lo que sigue, denotamos $f_t(x) = f(x+t)$ para cualquier función f.

a) Sea $\varphi = \sum_{i=1}^n a_i \chi_{E_i}$ simple. Entonces $\varphi_t = \sum_{i=1}^n a_i \chi_{E_i - t}$ es simple y por la invarianza bajo traslaciones de la medida de Lebesgue,

$$\int \varphi = \sum_{i=1}^n a_i m E_i = \sum_{i=1}^n a_i m(E_i - t) = \int \varphi_t \tag{3}$$

Ahora bien, sea f integrable sobre $(-\infty,\infty)$ y sea $\varphi \le f$ simple. Entonces $\varphi_t \le f_t$ es simple y

$$\int \varphi = \int \varphi_t \le \int f_t.$$

Por lo tanto,

$$\int f \le \int f_t.$$

En particular, también tenemos

$$\int f_t \le \int (f_t)_{-t} = \int f.$$

b) Sea g medible con cota $M > 0$. Sea f integrable sobre $(-\infty,\infty)$. Siguiendo la sugerencia, por el ejercicio 15.c, existe h continua que se anula afuera de un intervalo finito tal que $\int |f-h| < \frac{\epsilon}{2M}$. En particular, por el inciso anterior, también tenemos $\int |f_t - h_t| < \int |(f-h)_t| = \int |f-h| < \frac{\epsilon}{2M}$. De donde,

$$\int |g(f-f_t)| \le M \int |f-f_t| \le M\left(\int |f-h| + \int |f_t - h_t| + \int |h-h_t|\right) < \epsilon + M\int |h-h_t| \to \epsilon + 0$$

donde la convergencia se cumple por lo mencionado en la sugerencia.

18. Sea $(t_n) \subset [0,1]$ tal que $t_n \to 0$ y sea $f_n(x) = f(x, t_n)$. Entonces $|f_n| \leq g$ y $f_n \to f$. Por lo tanto,

$$\int f = \lim \int f_n = \lim_{t \to 0} \int f(x,t)\,dx$$

donde la primera igualdad es consecuencia del teorema de convergencia dominada y la segunda es porque (t_n) es una sucesión arbitraria en $[0,1]$ con $t_n \to 0$.

Ahora bien, supongamos que $f(x,t)$ es continua en t para todo x fijo. Sea $t \in [0,1]$ fijo y sea $(t_n) \subset [0,1]$ tal que $t_n \to t$. Más aun, sea $f_n(x) = f(x, t_n)$. Entonces $|f_n| \leq g$ y $f_n(x) \to f(x,t)$. Por lo tanto,

$$h(t) = \int f(x,t)\,dx = \lim \int f_n(x)\,dx = \lim \int f(x,t_n)\,dx = \lim h(t_n)$$

donde la segunda igualdad es consecuencia del teorema de convergencia dominada.