Tarea 8

Diego Leipen Lara

Metodos Variacionales

1. Sea G un subgrupo cerrado de $O(N)$. Prueba que la G-órbita Gx es compacta para todo $x \in \mathbb{R}^N$.

Demostración. Como G es cerrado y $O(N)$ es compacto (cf. Proposición 4.4 de las notas), entonces G también es compacto. Sea $x \in \mathbb{R}^N$ fijo y arbitrario. La función $G \ni g \overset{\Phi}{\mapsto} gx \in \mathbb{R}^N$ es continua pues

$$|gx - hx| \leq \|g - h\|_{\mathcal{B}(\mathbb{R}^N,\mathbb{R}^N)}|x| \qquad \forall g, h \in G.$$

Además, $\Phi(G) = Gx$. Entonces Gx es la imagen directa de un conjunto compacto bajo una función continua. Por lo tanto, Gx es compacto. □

Usaremos el siguiente lema.

Lema 1. Sea G un subgrupo cerrado de $O(N)$. Si A es un subconjunto G-invariante de $\mathbb{R}^N$, entonces

$$\operatorname{dist}(gx, A) = \operatorname{dist}(x, A) \qquad \forall g \in G,\ \forall x \in \mathbb{R}^N.$$

Demostración. Sean $g \in G$ y $x \in \mathbb{R}^n$ fijos y arbitrarios. Como A es G-invariante, $g\alpha \in A$ para todo $\alpha \in A$. Entonces

$$\inf_{a\in A} d(gx, a) \leq d(gx, g\alpha) \qquad \forall a \in A.$$

De donde,

$$\inf_{a\in A} d(gx, a) \leq \inf_{a\in A} d(gx, ga).$$

De nuevo, como A es G-invariante, $g^{-1}\alpha \in A$ para todo $\alpha \in A$. Entonces

$$\inf_{a\in A} d(gx, ga) \leq d(gx, g(g^{-1}\alpha)) = d(gx, \alpha) \qquad \forall a \in A.$$

De donde,

$$\inf_{a\in A} d(gx, ga) \leq \inf_{a\in A} d(gx, a).$$

En resumen,

$$\inf_{a\in A} d(gx, ga) = \inf_{a\in A} d(gx, a).$$

Por otro lado, notemos que

$$d(gy, gz) = |gy - gz| = |g(y - z)| = |y - z| = d(y, z) \qquad \forall g \in G,\ \forall y, z \in \mathbb{R}^N.$$

Por lo tanto,

$$\operatorname{dist}(gx, A) = \inf_{a\in A} d(gx, a) = \inf_{a\in A} d(gx, ga) = \inf_{a\in A} d(x, a) = \operatorname{dist}(x, A).$$

□

2. Sea G un subgrupo cerrado de $O(N)$ y Ω un subconjunto abierto G-invariante de $\mathbb{R}^N$. Prueba que existe una función no trivial G-invariante que pertenece a $\mathcal{C}_c^\infty(\Omega)$.

Demostración. Sea $x_0 \in \Omega$ fijo. Como Gx_0 es compacto, se tiene que $\epsilon := \frac{1}{4} \operatorname{dist}(Gx_0, \mathbb{R}^n \setminus \Omega) > 0$. Sean

$$X := \{x \in \mathbb{R}^N \mid \operatorname{dist}(x, Gx_0) \leq \epsilon\},$$
$$Y := \{x \in \mathbb{R}^N \mid \operatorname{dist}(x, Gx_0) \geq 2\epsilon\},$$

y sea $f : \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}$ dada por

$$f(x) := \frac{\operatorname{dist}(x, Y)}{\operatorname{dist}(x, X) + \operatorname{dist}(x, Y)}.$$

En el ejercicio 1 de la tarea 6 vimos que f es continua y es fácil ver que satisface

$$f(x) = 0 \text{ si } x \in Y, \;\; f(x) = 1 \text{ si } x \in X, \tag{1}$$
$$f(x) \neq 0 \text{ si y solo si } x \notin Y. \tag{2}$$

Por otro lado, como Gx_0 es G-invariante, entonces (por el Lema 1)

$$\operatorname{dist}(x, Gx_0) = \operatorname{dist}(gx, Gx_0) \qquad \forall g \in G, \; \forall x \in \mathbb{R}^N.$$

De donde, X y Y son G-invariantes. Más aun, esto implica (de nuevo por el Lema 1) que f es G-invariante. Sea $\rho \in \mathcal{C}_c^\infty(\mathbb{R}^N)$ una función radial tal que $\operatorname{sop}(\rho) \subset B_\epsilon(0)$, y $\int_{\mathbb{R}^N} \rho = 1$. Veamos que $\rho * f$ tiene las propiedades deseadas.

$\rho * f$ es no trivial. Sea $z \in \operatorname{sop}(\rho) \subset B_\epsilon(0)$. Entonces

$$\operatorname{dist}(x_0 - z, Gx_0) = \inf_{g \in G} d(x_0 - z, gx_0) \leq d(x_0 - z, x_0) = |z| < \epsilon,$$

de donde, $x_0 - z \in X$. Entonces $f(x_0 - z) = 1$ (cf. (1)) para todo $z \in \operatorname{sop}(\rho)$. Por lo tanto,

$$(\rho * f)(x_0) = \int_{\mathbb{R}^N} \rho(x_0 - y) f(y)\, dy = \int_{\mathbb{R}^N} \rho(z) f(x_0 - z)\, dz = \int_{\mathbb{R}^N} \rho(z)\, dz = 1.$$

$\rho * f \in \mathcal{C}_c^\infty(\Omega)$. Por el Corolario 14.39 del libro, $\rho * f : \Omega \to \mathbb{R}$ es de clase C^∞. Resta ver que tiene soporte compacto contenido en Ω. Sea $x \in \mathbb{R}^N$ tal que

$$0 \neq (\rho * f)(x) = \int_{\mathbb{R}^N} \rho(x - y) f(y)\, dy = \int_{\mathbb{R}^N} \rho(z) f(x - z)\, dz.$$

Entonces existe $z \in \mathbb{R}^N$ tal que $\rho(z) f(x - z) \neq 0$. Entonces $\rho(z) \neq 0$ y $f(x - z) \neq 0$. Entonces $z \in B_\epsilon(0)$ y $x - z \notin Y$ (cf. (2)). Entonces $|z| < \epsilon$ y $\operatorname{dist}(x - z, Gx_0) < 2\epsilon$. Entonces

$$|x - gx_0| - |z| \leq |x - z - gx_0| = d(x - z, gx_0) < 2\epsilon \qquad \forall g \in G.$$

Entonces $|x - gx_0| < 3\epsilon$ para todo $g \in G$, pues $|z| < \epsilon$. Entonces $\operatorname{dist}(x, Gx_0) < 3\epsilon$. En resumen, demostramos

$$\{x \in \mathbb{R}^N \mid (\rho * f)(x) \neq 0\} \subset \{x \in \mathbb{R}^N \mid \operatorname{dist}(x, Gx_0) < 3\epsilon\}.$$

De donde,

$$\sup(\rho * f) \subset \{x \in \mathbb{R}^N \mid \operatorname{dist}(x, Gx_0) \leq 3\epsilon\} \subset \Omega.$$

Como Gx_0 es compacto, el conjunto $\{x \in \mathbb{R}^N \mid \operatorname{dist}(x, Gx_0) \leq 3\epsilon\}$ también lo es. Por lo tanto, $\rho * f \in \mathcal{C}_c^\infty(\Omega)$.

$\rho * f$ es G-invariante. Como ρ y f son G-invariantes (ρ es radial), entonces para todo $g \in G$ y $x \in \Omega$,

$$(\rho * f)(x) = \int_{\mathbb{R}^N} \rho(x - y) f(y)\, dy = \int_{\mathbb{R}^N} \rho(gx - gy) f(gy)\, dy = \int_{\mathbb{R}^N} \rho(gx - z) f(z)\, dz = (\rho * f)(gx),$$

es decir, $\rho * f$ es G-invariante. Por lo tanto $\rho * f$ tiene las propiedades deseadas. $\square$

3. Sea $N \geq 2$ y $\phi : O(N) \to \mathbb{Z}_2$ el homomorfismo que a cada $g \in O(N)$ le asocia su determinante. Prueba que si $u : \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}$ es ϕ-equivariante, es decir, si satisface

$$u(gx) = \det(g)u(x) \qquad \forall g \in O(N),\ \forall x \in \mathbb{R}^N,$$

entonces $u = 0$. Así que en este caso, $H^1(\mathbb{R}^N)^\phi = \{0\}$.

Demostración. Sea $x \in \mathbb{R}^N$ fijo y arbitrario, sea $0 \neq a \in \mathbb{R}^N$ ortogonal a x, y sea $R : \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}^N$ dada por

$$Rv = v - 2\frac{\langle v, a\rangle}{\langle a, a\rangle}a.$$

Claramente R es lineal, y

$$Re_i = e_i - 2\frac{\langle e_i, a\rangle}{\langle a, a\rangle}a = e_i - 2\frac{a_i}{\langle a, a\rangle}a.$$

Entonces

$$\begin{aligned}
\langle Re_i, Re_j\rangle &= \left\langle e_i - 2\frac{a_i}{\langle a, a\rangle}a, e_j - 2\frac{a_j}{\langle a, a\rangle}a\right\rangle \\
&= \langle e_i, e_j\rangle - \left\langle e_i, 2\frac{a_j}{\langle a, a\rangle}a\right\rangle - \left\langle 2\frac{a_i}{\langle a, a\rangle}a, e_j\right\rangle + \left\langle 2\frac{a_i}{\langle a, a\rangle}a, 2\frac{a_j}{\langle a, a\rangle}a\right\rangle \\
&= \langle e_i, e_j\rangle - 2\frac{a_j}{\langle a, a\rangle}\langle e_i, a\rangle - 2\frac{a_i}{\langle a, a\rangle}\langle a, e_j\rangle + 4\frac{a_i a_j}{\langle a, a\rangle^2}\langle a, a\rangle \\
&= \langle e_i, e_j\rangle - 2\frac{a_j a_i}{\langle a, a\rangle} - 2\frac{a_i a_j}{\langle a, a\rangle} + 4\frac{a_i a_j}{\langle a, a\rangle} \\
&= \langle e_i, e_j\rangle = \delta_{ij}.
\end{aligned}$$

De donde $RR^T = I$, es decir $R \in O(N)$. Por otro lado, sea

$$\mathcal{P} \coloneqq \{v \in \mathbb{R}^N \mid \langle v, a\rangle = 0\}.$$

Como $\mathcal{P}$ es cerrado, $\mathbb{R}^N = \mathcal{P} \oplus \mathcal{P}^\perp$. Entonces para todo $v \in \mathbb{R}^N$ existen únicos $p_v \in \mathcal{P}$ y $q_v \in \mathcal{P}^\perp$ tales que $v = p_v + q_v$. Sea $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ la aplicación lineal dada por

$$Tv = p_v - q_v.$$

Sea $\{v_1, \ldots, v_{N-1}\}$ base de $\mathcal{P}$ y $0 \neq v_N \in \mathcal{P}^\perp$. Entonces la matriz asociada a T en la base $\{v_1, \ldots, v_N\}$ es

$$\mathrm{diag}(1, \ldots, 1, -1)$$

De donde $\det(T) = -1$. Por otro lado, para todo $v \in \mathbb{R}^N$

$$\left\langle v - \frac{\langle v, a\rangle}{\langle a, a\rangle}a, a\right\rangle = \langle v, a\rangle - \left\langle \frac{\langle v, a\rangle}{\langle a, a\rangle}a, a\right\rangle = \langle v, a\rangle - \frac{\langle v, a\rangle}{\langle a, a\rangle}\langle a, a\rangle = 0.$$

Entonces $v - \frac{\langle v, a\rangle}{\langle a, a\rangle}a \in \mathcal{P}$. Además, como

$$v = \underbrace{v - \frac{\langle v, a\rangle}{\langle a, a\rangle}a}_{\in \mathcal{P}} + \underbrace{\frac{\langle v, a\rangle}{\langle a, a\rangle}a}_{\in \mathcal{P}^\perp},$$

entonces $p_v = v - \frac{\langle v, a\rangle}{\langle a, a\rangle}a$ y $q_v = \frac{\langle v, a\rangle}{\langle a, a\rangle}a$. De donde $R = T$ y en particular, $\det(R) = \det(T) = -1$. Como $Rx = x$ (pues $\langle x, a\rangle = 0$) y u es ϕ-equivariante, entonces

$$u(x) = u(Rx) = \det(R)u(x) = -u(x).$$

Como x es un elemento arbitrario de $\mathbb{R}^N$, lo anterior implica que $u = 0$. $\square$