

# El campo de fracciones de un dominio entero con 1

Facultad de Ciencias UNAM

# Introducción

Empecemos esta sección con una observación extremadamente trivial: todo elemento de  $\mathbb{Q}$  puede ser expresado como una fracción de elementos de  $\mathbb{Z}$ . El objetivo de esta sección es generalizar este hecho en el siguiente sentido: todo dominio entero con 1, digamos  $D$ , está contenido en un campo  $F_D$  tal que todo elemento de  $F_D$  puede ser expresado como una fracción de elementos de  $D$ . Por obvias razones, a este campo le llamaremos el *campo de fracciones de un dominio entero*.

Cabe recalcar que la construcción que haremos es casi una copia literal de la construcción de  $\mathbb{Q}$  a partir de  $\mathbb{Z}$  que usualmente se ve en Cálculo 1 o Álgebra Superior 1.

# La construcción

Sea  $D$  un dominio entero con 1. Queremos construir un campo  $F_D$  tal que todo elemento de  $F_D$  pueda ser expresado como una fracción de elementos de  $D$ .

1. Definimos el conjunto  $F_D$ .
2. Definimos las operaciones en  $F_D$ .
3. Verificamos que  $F_D$  es un campo.
4. Verificamos que  $D$  está “contenido” en  $F_D$ . Precisamente, veremos que  $F_D$  tiene un subanillo isomorfo a  $D$ .

El caso  $D = \mathbb{Z}$  será nuestra guía. El objetivo es construir  $F_D$  de manera que  $F_{\mathbb{Z}} \cong \mathbb{Q}$ .

## Paso 1: El conjunto

Primero notemos que podemos pensar en una fracción  $\frac{a}{b} \in \mathbb{Q}$  (con  $a, b \in \mathbb{Z}$ ) como un pareja ordenada  $(a, b) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ . Sin embargo,  $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$  no es el conjunto buscado. Hay dos detalles:

- a. Cuando  $b = 0$ , la fracción no esta definido.
- b.  $(1, 2)$  y  $(2, 4)$  representan el mismo racional. Por supuesto, hay una infinidad de ejemplos análogos.

Afortunadamente, podemos resolver ambos problemas con las siguientes modificaciones (las cuales ya escribimos en el caso general):

## Definición

Sea  $D$  un dominio entero. Definimos el conjunto

$$S := D \times (D \setminus \{0\}) = \{(a, b) \mid a, b \in D, b \neq 0\}.$$

Definimos la relación de equivalencia  $\sim$  sobre  $S$  por

$$(a, b) \sim (c, d) \iff a \times_D d = b \times_D c$$

para toda  $(a, b), (c, d) \in S$ .

Finalmente, definimos **el conjunto del campo de fracciones de un dominio entero** como

$$F_D := S / \sim$$

Como los elementos de  $F_D$  son clases de equivalencia, los denotamos por  $[(a, b)]$  donde  $(a, b) \in S$ .

El objetivo de definir  $S$  es resolver el problema (a); y el objetivo de definir  $\sim$  es resolver el problema (b).

Falta verificar que  $\sim$  es una relación de equivalencia: Sean  $(a, b), (c, d), (e, f) \in S$ .

- *Reflexividad.* Como la multiplicación es conmutativa,  $ab = ba$ . Por lo tanto,  $(a, b) \sim (a, b)$ .
- *Simetría.* Supongamos que  $(a, b) \sim (c, d)$ . Por definición,  $ad = bc$ . De nuevo, por conmutatividad,  $cb = da$ . Por lo tanto,  $(c, d) \sim (a, b)$ .
- *Transitividad.* Supongamos que  $(a, b) \sim (c, d)$  y  $(c, d) \sim (e, f)$ . Por definición,  $ad = bc$  y  $cf = de$ . Usando estas igualdades y la conmutatividad de  $\times_D$  obtenemos

$$afd = fad = fbc = bcf = bde = bed.$$

Finalmente, como  $D$  es dominio y  $d \neq 0$ , podemos cancelarlo en la ecuación anterior para obtener  $af = be$ . Por lo tanto,  $(a, b) \sim (e, f)$ .

## Paso 2: Las operaciones

### Definición

Supongamos que  $[(a, b)], [(c, d)] \in F_D$ . Definimos  $+$  y  $\times$  en  $F_D$  por

$$[(a, b)] + [(c, d)] := [(ad + bc, bd)]$$

$$[(a, b)] \times [(c, d)] := [(ac, bd)]$$

Debería de ser claro que cuando  $D = \mathbb{Z}$ , estas operaciones coinciden con las operaciones usuales en  $\mathbb{Q}$ . Veamos que están bien definidas. Primero notemos que  $bd \neq 0$ <sup>1</sup> y por lo tanto,  $(ad + bc, bd), (ac, bd) \in S$ . Es decir, el contradominio de las operaciones está bien definido.

---

<sup>1</sup>Esto es consecuencia de que  $(a, b), (c, d) \in S$  implica  $b \neq 0 \neq d$  y por lo tanto (como  $D$  es dominio,  $bd \neq 0$ ).

Ahora si, veamos que  $+$  y  $\times$  no dependen de los representantes. Para esto, supongamos que  $(a', b'), (c', d') \in S$  son tales que  $[(a, b)] = [(a', b')]$  y  $[(c, d)] = [(c', d')]$ . Queremos ver que

$$[(ad + bc, bd)] = [(a'd' + b'c', b'd')] \quad \text{y} \quad [(ac, bd)] = [(a'c', b'd')].$$

Por hipótesis,  $a'b = b'a$  y  $c'd = d'c$ . Para la multiplicación, simplemente multiplicamos estas ecuaciones y usamos conmutatividad. Para la suma, multiplicamos estas ecuaciones por  $d'd$  y  $b'b$  respectivamente, obteniendo  $(a'b)(d'd) = (b'a)(d'd)$  y  $(c'd)(b'b) = (d'c)(b'b)$ . Sumando estas ecuaciones obtenemos

$$(a'b)(d'd) + (c'd)(b'b) = (b'a)(d'd) + (d'c)(b'b)$$

Usando conmutatividad y distributividad obtenemos

$$(a'd' + b'c')(bd) = (ad + bc)(b'd')$$

Por lo tanto,  $[(ad + bc, bd)] = [(a'd' + b'c', b'd')]$ .

## Paso 3: $F_D$ es un campo

### Proposición 1

$F_D$  es un campo. Es decir,

1.  $+$  es asociativa
2.  $+$  es conmutativa
3. El neutro aditivo de  $F_D$  es  $[(0, 1)]$ .
4. El inverso aditivo de  $[(a, b)]$  es  $[(-a, b)]$ .
5.  $\times$  es asociativa
6.  $\times$  es conmutativa
7.  $\times$  se distribuye respecto de  $+$
8. El neutro multiplicativo de  $F_D$  es  $[(1, 1)]$
9. El inverso multiplicativo de  $[(a, b)]$  (con  $a \neq 0$ ) es  $[(b, a)]$

*Demostración.* Supongamos que  $[(a, b)], [(c, d)], [(e, f)] \in D$ .

1.  $+$  es asociativa:

$$\begin{aligned}([(a, b)] + [(c, d)]) + [(e, f)] &= [(ad + bc, bd)] + [(e, f)] \\&= [((ad + bc)f + (bd)e, (bd)f)] \\&= [(a(df) + b(cf + de), b(df))] \\&= [(a, b)] + [(cf + de, df)] \\&= [(a, b)] + ([[(c, d)] + [(e, f)])]\end{aligned}$$

2.  $+$  es conmutativa:

$$\begin{aligned}[(a, b)] + [(c, d)] &= [(ad + bc, bd)] \\&= [(cb + da, db)] \\&= [(c, d)] + [(a, b)]\end{aligned}$$

3. *El neutro aditivo de  $F_D$  es  $[(0, 1)]$ :*

$$[(a, b)] + [(0, 1)] = [(a1 + b0, b1)] = [(a, b)]$$

4. *El inverso aditivo de  $[(a, b)]$  es  $[(-a, b)]$ :*

$$[(a, b)] + [(-a, b)] = [(ab + b(-a), bb)] = [(0, b)] = 0_{F_D}$$

Donde la ultima igualdad se cumple por el inciso anterior y porque para toda  $b \in D \setminus \{0\}$  es fácil verificar que  $[(0, b)] = [(0, 1)]$ .

5.  *$\times$  es asociativa:*

$$\begin{aligned} ([ (a, b) ] \times [ (c, d) ]) \times [ (e, f) ] &= ([ (ac, bd) ]) \times [ (e, f) ] \\ &= [ ((ac)e, (bd)f) ] \\ &= [ (a(ce), b(df)) ] \\ &= \dots \end{aligned}$$

6.  *$\times$  es conmutativa:* Es consecuencia inmediata de la conmutatividad en  $D$ .

7.  $\times$  se distribuye respecto de  $+$ :

$$\begin{aligned} ([ (a, b) ] + [ (c, d) ]) \times [ (e, f) ] &= [ (ad + bc, bd) ] \times [ (e, f) ] = \\ [ (ade + bce, bdf) ] &= [ (aed + bce) f, (bdf) f ] = [ aedf + bfce, bdfdf ] = \\ [ (ae, bf) ] + [ (ce, df) ] &= ([ (a, b) ] \times [ (e, f) ]) + ([ (c, d) ] \times [ (e, f) ]) \end{aligned}$$

Donde la tercera igualdad es consecuencia inmediata de la definición de  $\sim$ .

8. *El neutro multiplicativo de  $F_D$  es  $[(1, 1)]$ :* Es consecuencia inmediata de la definición de  $\times$ .

9. *El inverso multiplicativo de  $[(a, b)]$  (con  $a \neq 0$ ) es  $[(b, a)]$ :*

$$[(a, b)] \times [(b, a)] = [(ab, ba)] = [(1, 1)] = 1_{F_D}$$

Donde la ultima igualdad es consecuencia inmediata de la definición de  $\sim$ .

□

## Paso 4: $D$ esta contenido en $F_D$

### Proposición 2

La función  $i : D \hookrightarrow F_D$  dada por  $a \mapsto [(a, 1)]$  es un homomorfismo inyectivo. En particular,  $F_D$  contiene un subanillo que es isomorfo a  $D$ .

*Demostración.* Supongamos que  $a, b \in D$ . Veamos que

- $i$  es homomorfismo.

$$i(a) + i(b) = [(a, 1)] + [(b, 1)] = [(a1 + b1, 1)] = i(a + b) \quad \text{y}$$

$$i(a) \times i(b) = [(a, 1)] \times [(b, 1)] = [(a \times b, 1)] = i(a \times b)$$

- $i$  es inyectiva. Supongamos que  $i(a) = i(b)$ . Es decir,  $[(a, 1)] = [(b, 1)]$ . Por definición, esto significa  $a1 = 1b$ . Es decir,  $a = b$ .  $\square$

$F_D$  es minimal

### Proposición 3

Si  $L$  es un campo que contiene a  $D$ , entonces  $L$  contiene a  $F_D$ . Precisamente, existe un homomorfismo inyectivo  $\psi : F_D \rightarrow L$  tal que  $\psi([(a, 1_D)]) = a$  para toda  $a \in D$ .

*Demostración.* Primero notemos que si  $b \in D \setminus \{0\}$ , entonces  $b$  tiene un inverso multiplicativo en  $L$  el cual denotamos por  $b_L^{-1}$ . Antes de definir  $\psi$ , veamos que la unidad en  $D$  coincide con la unidad en  $L$ . Supongamos que  $d \in D \setminus \{0\}$  y  $\alpha \in L$ . Entonces,

$$\begin{aligned}\alpha \times_L 1_D &= \alpha \times_L (d_L^{-1} \times_L d) \times_L 1_D = (\alpha \times_L d_L^{-1}) \times_L (d \times_L 1_D) = \\ &= (\alpha \times_L d_L^{-1} \times_L) \times_L d = \alpha \times_L (d_L^{-1} \times_L d) = \alpha \times_L 1_L = \alpha.\end{aligned}$$

Donde la tercera igualdad se cumple porque  $D$  es subanillo de  $L$ . Por lo tanto,  $1_D = 1_L$ .

Ahora si, sea

$$\begin{aligned}\psi : F_D &\rightarrow L \\ [(a, b)] &\mapsto a \times_L b_L^{-1}\end{aligned}$$

Por brevedad, escribimos  $ab_L^{-1} := a \times b_L^{-1}$ , entendiendo que este producto solo tiene sentido en  $L$ . Supongamos que  $[(a, b)], [(c, d)] \in F_D$ . Veamos que

- *$\psi$  esta bien definida.*

Ahora si, supongamos que  $[(a, b)] = [(c, d)]$ . Por definición,  $ad = bc$ . Luego, por conmutatividad,  $ab_L^{-1} = cd_L^{-1}$ . Es decir,  $\psi([(a, b)]) = \psi([(c, d)])$ .

- *$\psi([(a, 1_D)]) = a$  para toda  $a \in D$ .*

Esto es consecuencia inmediata de la definición de  $\psi$  y de que  $1_D = 1_L$ .

- $\psi$  es homomorfismo.

Primero veamos que  $\psi$  abre sumas. Por un lado,

$$\psi([(a, b)] + [(c, d)]) = \psi([(ad + bc, bd)]) = (ad + bc)(bd)_L^{-1} \quad (1)$$

Por otro lado,

$$\psi([(a, b)]) + \psi([(c, d)]) = (ab_L^{-1}) + (cd_L^{-1}) \quad (2)$$

Pero

$$\begin{aligned} (ad + bc)(bd)_L^{-1} &= (ab_L^{-1}) + (cd_L^{-1}) \iff \\ ad + bc &= \left( (ab_L^{-1}) + (cd_L^{-1}) \right) (bd) \iff \\ ad + bc &= (ab_L^{-1})(bd) + (cd_L^{-1})(bd) \end{aligned}$$

Por conmutatividad, la ultima igualdad es claramente cierta. Juntando esto con (1) y (2) obtenemos lo deseado.

Ahora veamos que  $\psi$  abre productos.

$$\begin{aligned}\psi([(a, b)] \times [(c, d)]) &= \psi([(ac, bd)]) = ac(bd)_L^{-1} = \\ &= (ab_L^{-1})(cd_L^{-1}) = \psi([(a, b)]) \times \psi([(c, d)])\end{aligned}$$

Donde la penúltima igualdad se cumple por conmutatividad de  $L$ .

- $\psi$  es *inyectivo*.

Supongamos que  $\psi([(a, b)]) = \psi([(c, d)])$ . Por definición,  $a \times b_L^{-1} = c \times d_L^{-1}$ . Multiplicando por  $(bd)$  ambos lados de la ecuación obtenemos  $ad = bc$ . Por lo tanto,  $[(a, b)] = [(c, d)]$ .

