1a. *Lema 1.* Supongamos que $\{f_n\}_n \subset C([a,b])$ es tal que $f_n \to f$ uniformemente, (o lo que es lo mismo, $||f_n - f||_\infty \to 0$) y $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ es continua entonces, $g \circ f_n \to g \circ f$.
Razón. Sea $\epsilon > 0$. Como $\{f_n\}_n$ converge, es acotada. Es decir, $\exists M > 0$ $\forall x \in [a,b]$ $(|f(x)| < M)$. Sea $h = g|_{[-M,M]}$. Entonces, h es uniformemente continua y por lo tanto, $\exists \delta > 0$ $\forall x, y \in [a,b]$

$$|x - y| < \delta \implies |h(x) - h(y)| < \epsilon \tag{1}$$

Mas aun, como $f_n \to f$ uniformemente, $\exists N \in \mathbb{N}$ $\forall n \geq \mathbb{N}$ $\forall x \in [a,b]$

$$|f_n(x) - f(x)| < \delta \tag{2}$$

Juntando (1) y (2) tenemos que $\exists N \in \mathbb{N}$ $\forall n \geq N$ $\forall x \in [a,b]$

$$|g(f_n(x)) - g(f(x))| = |h(f_n(x)) - h(f(x))| < \epsilon$$

Lema 2. Si (Y,d) es metrico, $X \subset Y$, y $(X, d|_X)$ es Banach entonces, X es cerrado en (Y, τ_d) (la topologia inducida por d).
Razon. Sea $\{x_n\} \subset X$ una sucesion convergente a $y \in Y$. En particular, $\{x_n\}$ es $d|_X$-cauchy. Luego, como X es Banach, x_n converge a un cierto $x \in X \subset Y$. Pero como en un metrico los limites son unicos, $y = x \in X$.
Demostración 1a. Sean $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ y $f_n \in C([0,1])$ tales que $g(x) = \sqrt{x}$ y $f_n(x) = x^2 + 1/n$. Como g es continua, por el lema 1, $||g \circ f_n - g \circ f||_\infty \to 0$. Luego, usando que para toda $x \in [0,1]$ $(f_n(x) \neq 0)$, g es diferenciable en todo y distinto de 0, y la regla de la cadena, vemos que $(g \circ f_n)'$ es continua. Entonces, $g \circ f_n \in C^1([-1,1])$, pero $|\cdot| = g \circ f \notin C^1([-1,1])$ entonces, $C^1([a,b])$ no es cerrado con $||\cdot||_\infty$. Entonces, por el lema 2, no es de Banach.
1b. Supongamos que $\{f_n\}_n \subset C^1([-1,1])$ es $||\cdot||_1$-cauchy. Entonces, $\forall \epsilon > 0$ $\exists N_\epsilon$ $\forall n, m \geq N_\epsilon$ $(||f_n - f_m||_1 < \epsilon)$. Por otro lado, $\forall x \in [-1,1]$ tenemos que,

$$\begin{aligned} |f_n(x) - f_m(x)| &\leq |f_n(x) - f_m(x)| + |f_n'(x) - f_m'(x)| \\ &\leq \sup_{y \in [-1,1]} \{|f_n(y) - f_m(y)|\} + \sup_{y \in [-1,1]} \{|f_n'(y) - f_m'(y)|\} \\ &= ||f_n - f_m||_1. \end{aligned}$$

Entonces, por el criterio de Cauchy para sucesiones de funciones, $\exists f : [-1,1] \to \mathbb{R}$ tal que f_n converge uniformemente a f. Análogamente, usando que $|f_n'(x) - f_m'(x)| \leq |f_n(x) - f_m(x)| + |f_n'(x) - f_m'(x)|$, tenemos que $\{f_n'\}_n$ converge uniformemente. Por lo tanto, $f'(x) = \lim_{n\to\infty} f_n'(x)$ (ver Rudin, Principles of Mathematical Analysis 7.17). Sea $\epsilon > 0$, por definición, $\exists N_1 \in \mathbb{N}$ $\forall n \geq N_1$ $\forall x \in [-1,1]$ $(|f_n(x) - f(x)| < \epsilon/4)$ y $\exists N_2 \in \mathbb{N}$ $\forall m \geq N_2$ $\forall x \in [-1,1]$ $(|f_m'(x) - f'(x)| < \epsilon/4)$. Tomando $N = \max\{N_1, N_2\}$ tenemos que $\forall n \geq N$ $\forall x \in [-1,1]$ $(|f_n(x) - f(x)| + |f_n'(x) - f'(x)| < \epsilon/2)$. Por lo tanto,

$$||f_n - f||_1 = \sup_{x \in [-1,1]} \{|f_n(x) - f(x)|\} + \sup_{x \in [-1,1]} \{|f_n'(x) - f'(x)|\} \leq \epsilon/2 < \epsilon$$

El resultado se sigue recordando que la continuidad se preserva bajo convergencia uniforme, y que las f_n' son continuas pues $f_n \in C^1([-1,1])$. $\square$

2a. Como $\mathbb{R}^+ = [0, +\infty)$ es cerrado en $\mathbb{R}$ y $\mathbb{R}$ es Banach entonces, $\mathbb{R}^+$ es Banach. Luego, por el ejemplo 1 de las notas 1.2, $E = \mathcal{A}(\mathbb{R}^+, \mathbb{C})$ es de Banach.
2b. Supongamos que $\{f_n\}_n \subset F$ converge a f. Sea $\epsilon > 0$, por definición, $\exists N \in \mathbb{N}\ \forall n \geq N\ ||f_n - f|| < \epsilon/3$. Por otro lado, si $x \in [-1,1]$, como f_N es continua, $\exists \delta > 0\ \forall y \in [-1,1]\ (|x-y| < \delta \implies |f_N(x) - f_N(y)| < \epsilon/3)$. Por lo tanto, si $|x-y| < \delta$,

$$\begin{aligned} |f(x) - f(y)| &\leq |f(x) - f_N(x)| + |f_N(x) - f_N(y)| + |f_N(y) - f(y)| \\ &\leq ||f - f_N|| + |f_N(x) - f_N(y)| + ||f - f_N|| \\ &< \epsilon/3 + \epsilon/3 + \epsilon/3 = \epsilon \end{aligned}$$

En resumen, $\forall \epsilon > 0\ \exists \delta > 0\ \forall y \in [-1,1]\ (|x-y| < \delta \implies |f(x) - f(y)| < \epsilon)$ i.e., $f \in F$.
2c. Supongamos que $\{f_n\}_n \subset G$ y $f_n \to f$. Veamos que

$$\lim_{x\to\infty} f(x) = \lim_{n\to\infty} \lim_{x\to\infty} f_n(x). \tag{3}$$

Antes, verifiquemos que $\lim_{n\to\infty} \lim_{x\to\infty} f_n(x)$ existe.
Veamos que $\{\lim_{x\to\infty} f_n(x)\}_n$ es $|\cdot|$-cauchy. Como $\{f_n\}$ converge, es $||\cdot||_\infty$-cauchy. Luego, usando que $\forall x \in \mathbb{R}^+\ |f_n(x) - f_m(x)| \leq ||f_n - f_m||$ tenemos que $\forall x \in \mathbb{R}^+\ \{f_n(x)\}_n$ es $|\cdot|$-cauchy. Sea $\epsilon > 0$, por definición, $\exists N \in \mathbb{N}\ \forall n, m \geq \mathbb{N}$ $(|f_n(x) - f_m(x)| < \epsilon)$. Por lo tanto, si $n, m \geq N$

$$\begin{aligned} |\lim_{x\to\infty} f_n(x) - \lim_{x\to\infty} f_m(x)| &\leq \lim_{x\to\infty} |f_n(x) - f_m(x)| \\ &\leq \lim_{n\to\infty} \epsilon = \epsilon. \end{aligned}$$

Ahora si, veamos que $\lim_{x\to\infty} f(x) = \lim_{n\to\infty} \lim_{x\to\infty} f_n(x)$. Es decir, $\forall \epsilon > 0$ $\exists M > 0\ \forall x \geq M\ |f(x) - \lim_{n\to\infty} \lim_{x\to\infty} f_n(x)| < \epsilon$.
Por definición, si $\epsilon > 0$, $n \in \mathbb{N}$, y $x \in \mathbb{R}^+$,

i. $\exists M_1 > 0\ \forall x \geq M_1\ |f_n(x) - \lim_{y\to\infty} f_n(y)| < \epsilon/3$

ii. $\exists M_2 \in \mathbb{N}\ \forall n \geq M_2\ |\lim_{y\to\infty} f_n(y) - \lim_{n\to\infty} \lim_{y\to\infty} f_n(y)| < \epsilon/3$.

iii. $\exists M_3 \in \mathbb{N}\ n \geq M_3\ |f_n(x) - f(x)| < \epsilon/3$. (Esto se sigue de que $f_n \to f$ y $\forall x \in \mathbb{R}^+\ |f_n(x) - f(x)| \leq ||f_n - f||$)

Sea $x > M_1$ y $m \geq \max\{M_2, M_3\}$ entonces,

$$\begin{aligned} |f(x) - \lim_{n\to\infty} \lim_{y\to\infty} f_n(y)| \leq |f(x) - f_m(x)| + |f_m(x) - \lim_{y\to\infty} f_m(y)| + \\ |\lim_{y\to\infty} f_m(y) - \lim_{n\to\infty} \lim_{y\to\infty} f_n(y)| \\ \leq \epsilon/3 + \epsilon/3 + \epsilon/3 = \epsilon \end{aligned}$$

2d. Sea $\{f_n\}_n \subset H$ y $f_n \to f$. Como $H \subset G$, por (3) tenemos,

$$\lim_{x\to\infty} f(x) = \lim_{n\to\infty} \lim_{x\to\infty} f_n(x) = \lim_{n\to\infty} 0 = 0.$$

$\therefore f \in H$. $\square$

3. Primero notemos que Lip_α en efecto es un espacio vectorial: si $f, g \in Lip_\alpha$ entonces,

$$\begin{aligned}\sup_{(x,y)\in J}\left\{\frac{|(f+g)(x)-(f+g)(y)|}{|x-y|^\alpha}\right\} \leq& \sup_{(x,y)\in J}\left\{\frac{|f(x)-f(y)|}{|x-y|^\alpha}\right\}\\ &+ \sup_{(x,y)\in J}\left\{\frac{|g(x)-g(y)|}{|x-y|^\alpha}\right\} < +\infty\end{aligned}$$

Ademas, si $\lambda \in \mathbb{R}$ y $f \in Lip_\alpha$

$$\sup_{(x,y)\in J}\left\{\frac{|(\lambda f)(x)-(\lambda f)(y)|}{|x-y|^\alpha}\right\} = |\lambda| \sup_{(x,y)\in J}\left\{\frac{|f(x)-f(y)|}{|x-y|^\alpha}\right\} < +\infty$$

3a. Sea $f \in Lip_\alpha$ distinta de 0. Entonces,

$$\sup_{(x,y)\in J}\left\{\frac{|f(x)-f(y)|}{|x-y|^\alpha}\right\} \leq p_\alpha(f) < +\infty.$$

De donde, $\forall (x,y) \in J$ $|f(x)-f(y)| \leq p_\alpha(f)|x-y|^\alpha$. Como $f \neq 0$, haciendo $\delta = \frac{\epsilon^{1/\alpha}}{p_\alpha(f)}$ obtenemos lo deseado.

3b. P.D. p_α es norma en Lip_α.

i. Supongamos que $p_\alpha(f) = 0$. Entonces,

$$\begin{aligned}|f(x)-f(y)| &\leq \frac{|f(x)-f(y)|}{|x-y|^\alpha}. && \text{(pues, } (x,y)\in J \text{ y } \alpha \in (0,1])\\ &\leq \sup_{(x,y)\in J}\left\{\frac{|f(x)-f(y)|}{|x-y|^\alpha}\right\} = 0 && \text{(pues, } p_\alpha(f) = 0)\end{aligned}$$

Por lo tanto, f es constante. Pero como $f(0) = 0$ (pues, $p_\alpha(f) = 0$), $f \equiv 0$. El converso es trivial.

ii. p_α es positiva definida pues $|\cdot|$ lo es.

iii. Sea $\lambda \in \mathbb{R}$ y $f \in Lip_\alpha$ entonces,

$$\begin{aligned}p_\alpha(\lambda f) &= |\lambda f(0)| + \sup_{(x,y)\in J}\left\{\frac{|(\lambda f)(x)-(\lambda f)(y)|}{|x-y|^\alpha}\right\}\\ &= |\lambda||f(0)| + |\lambda| \sup_{(x,y)\in J}\left\{\frac{|f(x)-f(y)|}{|x-y|^\alpha}\right\} = |\lambda| p_\alpha(f)\end{aligned}$$

iv. Sean $f, g \in Lip_\alpha$. Entonces,

$$\begin{aligned}
p_\alpha(f+g) &= |(f+g)(0)| + \sup_{(x,y)\in J}\left\{\frac{|(f+g)(x)-(f+g)(y)|}{|x-y|^\alpha}\right\} \\
&\le |f(0)| + |g(0)| + \sup_{(x,y)\in J}\left\{\frac{|f(x)-f(y)|}{|x-y|^\alpha}\right\} + \sup_{(x,y)\in J}\left\{\frac{|g(x)-g(y)|}{|x-y|^\alpha}\right\} \\
&= p_\alpha(f) + p_\alpha(g).
\end{aligned}$$

P.D. $\forall f \in Lip_\alpha \; ||f||_\infty \le p_\alpha(f)$
Sea $f \in Lip_\alpha$ y $x \in (0,1]$ entonces,

$$\begin{aligned}
|f(x)| - |f(0)| &\le |f(x) - f(0)| \\
&\le \sup_{(x,y)\in J}\left\{\frac{|f(x)-f(y)|}{|x-y|^\alpha}\right\}.
\end{aligned}$$

Donde la desigualdad se da porque $|x-y| < 1$ cuando $(x,y) \in J$. Luego,

$$\begin{aligned}
\sup_{x\in[0,1]}\{|f(x)|\} - |f(0)| &= \sup_{x\in[0,1]}\left\{|f(x)| - |f(0)|\right\} \\
&\le \sup_{(x,y)\in J}\left\{\frac{|f(x)-f(y)|}{|x-y|^\alpha}\right\}.
\end{aligned}$$

Sumando $|f(0)|$ de ambos lados obtenemos la desigualdad deseada.
3c. Supongamos que $\{f_n\}_n \subset Lip_\alpha$ es p_α-cauchy. Por el inciso anterior, $|f_n(x) - f_m(x)| \le ||f_n - f_m||_\infty \le p_\alpha(f_n - f_m)$. Por lo tanto, $\forall x \in [0,1]$ $\{f_n(x)\}_n$ es $|\cdot|$-cauchy. Luego, por el criterio de Cauchy, $f_n \to f$ uniformemente (relativo a $||\cdot||_\infty$) donde $f(x) = \lim_{n\to\infty} f_n(x)$. Por otro lado, sea $M_n = \sup_{(x,y)\in J}\left\{\frac{|f_n(x)-f_n(y)|}{|x-y|^\alpha}\right\}$. Veamos que $\{M_n\}$ esta acotada, digamos por M. En efecto, como $p_\alpha(f_n) - p_\alpha(f_m) \le p_\alpha(f_n - f_m)$ entonces, $\{p_\alpha(f_n)\}$ es $|\cdot|$-cauchy. Mas aun, como $\{|f_n(0)|\}$ es $|\cdot|$-cauchy y la suma de sucesiones $|\cdot|$-cauchy es $|\cdot|$-cauchy entonces, $\{M_n\} = \{p_\alpha(f_n) - |f_n(0)|\}$ es $|\cdot|$-cauchy. Entonces,

$$\frac{|f_n(x)-f_n(y)|}{|x-y|^\alpha} \le M_n \le M \implies \frac{|f(x)-f(y)|}{|x-y|^\alpha} = \lim_{n\to\infty}\frac{|f_n(x)-f_n(y)|}{|x-y|^\alpha} \le M.$$

Entonces, $\sup_{(x,y)\in J}\left\{\frac{|f(x)-f(y)|}{|x-y|^\alpha}\right\} \le M < +\infty$ y por lo tanto, $f \in Lip_\alpha$. Finalmente, veamos que $\{f_n\}$ converge a f con la norma inducida por p_α. Como $\{f_n\}$ es p_α-cauchy, $\forall \epsilon > 0 \; \exists N_1 \in \mathbb{N} \; \forall m, n \ge N_1 \; p_\alpha(f_n - f_m) < \epsilon$. En particular, $\forall \epsilon > 0 \; \exists N_1 \in \mathbb{N} \; \forall m, n \ge N_1 \; \forall x, y \in [0,1] \; |(f_n - f_m)(x) - (f_n - f_m)(y)| \le \epsilon|x-y|^\alpha$. Fijando m tenemos,

$$\begin{aligned}
|(f-f_m)(x) - (f-f_m)(y)| &= |\lim_{n\to\infty} f_n(x) - f_m(x) - \lim_{n\to\infty} f_n(y) + f_m(y)| \\
&= \lim_{n\to\infty} |(f_n - f_m)(x) - (f_n - f_m)(y)| \\
&\le \lim_{n\to\infty} \epsilon|x-y|^\alpha \\
&= \epsilon|x-y|^\alpha
\end{aligned}$$

Dividiendo y tomando supremo sobre $(x, y) \in J$ tenemos que $\forall \epsilon > 0$ $\exists N_1 \in \mathbb{N}$ $\forall m \geq N_1$

$$\sup_{(x,y)\in J} \left\{ \frac{|(f - f_m)(x) - (f - f_m)(y)}{|x-y|^\alpha} \right\} \leq \epsilon$$

Por otro lado, como $f(x) = \lim_{n\to\infty} f_n(x)$ entonces, $\forall \epsilon > 0$ $\exists N_2 \forall k \geq N_2$ $|f_k(0) - f(0)| < \epsilon$. Haciendo $n \geq N = \max\{N_1, N_2\}$ tenemos que

$$\begin{aligned} p_\alpha(f_n - f) &= |(f_n - f)(0)| + \sup_{(x,y)\in J} \left\{ \frac{|(f_n - f)(x) - (f_n - f)(y)}{|x-y|^\alpha} \right\} \\ &< \epsilon + \epsilon = 2\epsilon. \end{aligned}$$

Es decir, f_n converge a f en la métrica inducida por p_α.

3d. Primero veamos que $f_a \in Lip_\alpha$. Sean $x, y \in [0, 1]$ distintos. Procederemos por casos:

1. $x, y \leq a$
   Entonces, $f_a(x) = 0 = f_a(y)$ y por tanto,

   $$\frac{|f_a(x) - f_a(y)|}{|x-y|^\alpha} = 0$$

2. $x \leq a \leq y$ (el caso $y \leq a \leq x$ es completamente analogo).
   Entonces, $f_a(x) = 0$ y $f_a(y) = (y-a)^\alpha$ y por tanto,

   $$\frac{|f_a(x) - f_a(y)|}{|x-y|^\alpha} = \frac{(y-a)^\alpha}{(y-x)^\alpha} \leq 1$$

   Donde la desigualdad se cumple por el caso en el que estamos.

3. $x, y > a$
   Fijando y y haciendo x tender a a por arriba tenemos,

   $$\lim_{x\to a^+} \frac{|f_a(x) - f_a(y)|}{|x-y|^\alpha} = \lim_{x\to a^+} \frac{|(x-a)^\alpha - (y-a)^\alpha|}{|x-y|^\alpha} = \lim_{x\to a^+} \frac{(y-a)^\alpha}{(y-a)^\alpha} = 1$$

   Tomando $\epsilon = 1$ en la definicion de limite, tenemos que $\exists \delta > 0$ tal que $\forall x - a < \delta$

   $$\frac{|(x-a)^\alpha - (y-a)^\alpha|}{|x-y|^\alpha} < 2$$

   Por otro lado, notemos que $f|_{[\delta,1]} \in C^1([\delta, 1])$. Por el T.V.M., $\exists \xi \in [\delta, 1]$ tq,

   $$|f_a(x) - f_a(y)| = |f'(\xi)(x-y)| \leq |f'(\xi)||x-y|^\alpha.$$

   Tomando $M = \max\{|f'(\xi)|, 2\}$ tenemos que $\frac{|f_a(x)-f_a(y)|}{|x-y|^\alpha}$ esta acotado.

En resumen, para cualquier caso (de los cuales hay finitos) encontramos una cota para $\frac{|f_a(x)-f_a(y)|}{|x-y|^\alpha}$. Por lo tanto, $f_a \in Lip_\alpha$. Ahora si, veamos lo que dice el inciso 3d. Supongamos que $(a,b) \in J$, y sin perdida de generalidad, que $a < b$. Entonces,

$$\begin{aligned} |(f_a - f_b)(b) - (f_a - f_b)(a)| &= |f_a(b) - f_b(b) - f_a(a) + f_b(a)| \\ &= |(b-a)^\alpha - 0 - 0 + 0| \\ &= |b-a|^\alpha \end{aligned}$$

Entonces, $\frac{|(f_a-f_b)(b)-(f_a-f_b)(a)|}{|b-a|^\alpha} = 1$. Sacando supremo sobre $(x,y) \in J$,

$$\begin{aligned} p_\alpha(f_a - f_b) &= |(f_a - f_b)(0)| + \sup_{(x,y)\in J} \left\{ \frac{|(f_a - f_b)(x) - (f_a - f_b)(y)|}{|x-y|^\alpha} \right\} \\ &= \sup_{(x,y)\in J} \left\{ \frac{|(f_a - f_b)(x) - (f_a - f_b)(y)|}{|x-y|^\alpha} \right\} \geq 1 \end{aligned}$$

Por lo tanto, encontramos un subconjunto no numerable de Lip_α tal que la distancia entre cualesquiera dos elementos es ≥ 1. En particular, hay una cantidad no numerable de bolas ajenas dos a dos de radio 1. Especificamente, $\{B_{p_\alpha}(f_a, 1)\}_{a\in[0,1]}$. Ahora bien, si hubiese un denso numerable, este tendría que intersecar a cada una de las bolas, lo cual es imposible porque son no numerables y ajenas dos a dos. $\square$

4.1. Sea $x \in c_0(\mathbb{N})$. Entonces, $\forall n \in \mathbb{N}$

$$\left\| \sum_{k=0}^{n} x_k e_k - x \right\|_\infty = \sup\{0, 0, \cdots, 0, |x_{n+1}|, |x_{n+2}|, \cdots\}$$

Como $x_n \to 0$, $\forall \epsilon > 0\ \exists N \in \mathbb{N}\ \forall m \geq N\ (|x_m| < \frac{\epsilon}{2})$. Por lo tanto, si $n \geq N-1$, $\left\|\sum_{k=0}^{n} x_k e_k - x\right\|_\infty \leq \frac{\epsilon}{2} < \epsilon$. Es decir, $\left\|\sum_{k=1}^{n} x_k e_k - x\right\|_\infty \to 0$.
4.2. Sea $x \in l^p$. Primero, notemos que como $\sum_{n\in\mathbb{N}} |x_n|^p < +\infty$ entonces, $\lim_{n\to\infty} \sum_{k\geq n} |x_n|^p = 0$. Por lo tanto, $\forall n \in \mathbb{N}$

$$\left(\lim_{n\to\infty} \left\| \sum_{k=0}^{n} x_k e_k - x \right\|_p \right)^p = \lim_{n\to\infty} \left\| \sum_{k=0}^{n} x_k e_k - x \right\|_p^p = \lim_{n\to\infty} \sum_{k\geq n+1} |x_n|^p = 0$$

De donde, $\lim_{n\to\infty} \left\|\sum_{k=0}^{n} x_k e_k - x\right\|_p = 0$ y por lo tanto, $\sum_{k\in\mathbb{N}} x_k e_k = x$.
4.3. Sea $x \in l^\infty(\mathbb{N})$ tal que $\forall n \in \mathbb{N}$ $(x_n = 1)$ y $\epsilon = 1/2$. Entonces, $\forall n \in \mathbb{N}$

$$\left\| \sum_{k=0}^{n} x_k e_k - x \right\|_\infty = \sup\{0, 0, \cdots, 0, 1, 1, \cdots\} = 1 > 1/2$$

Por lo tanto, $\sum_{k=0}^{\infty} x_k e_k \neq x$. $\square$

Diego Leipen Lara
418002038