1.1. Si $x \in Fix(f)$,

$$(df_x)^2 = (df_x) \circ (df_x) = (df_{f(x)}) \circ (df_x) = d(f \circ f)_x = d(\mathrm{Id})_x = \mathrm{Id}.$$

La segunda igualdad se cumple porque $x \in Fix(f)$ y la tercera por la regla de la cadena.
1.2. Por definición,

$$\begin{aligned} dh_0 = \frac{1}{2}(d(\mathrm{Id})_0 + d(df_0 \circ f)_0) = \frac{1}{2}(\mathrm{Id} + d(df)_{f(0)} \circ df_0) &= \frac{1}{2}(\mathrm{Id} + (df_0)^2) \\ &= \frac{1}{2}(\mathrm{Id} + \mathrm{Id}) = \mathrm{Id}. \end{aligned}$$

El resultado se sigue del teorema de la función inversa.
Por otro lado,

$$\begin{aligned} h \circ f = \left(\frac{1}{2}(\mathrm{Id} + df_0 \circ f)\right) \circ f &= \frac{1}{2}(f + df_0 \circ f^2) \\ &= \frac{1}{2}(f + df_0) \\ &= \frac{1}{2}(df_0 + (df_0)^2 \circ f) && \text{(por 1.1)} \\ &= d_0 f \circ h && (df_0 \text{ es lineal}) \end{aligned}$$

1.3. Usaremos el siguiente lema:
Lema. Si $A \in M_n(\mathbb{R})$ es tal que $A^2 = I$ entonces, la forma canónica de Jordan de A, digamos B es una matriz diagonal tal que $b_{ii} \in \{+1, -1\}$.
Demostración. Como B es la forma canónica de Jordan de A sabemos que existe $P \in M_n(\mathbb{R})$ invertible tal que $A = P^{-1}BP$. Mas aun, como $A^2 = I$ entonces, $(A+I)(A-I) = 0$. Por lo tanto,

$$\begin{aligned} B^2 - I &= (PAP^{-1})^2 - I \\ &= PA^2P^{-1} - I \\ &= PP^{-1} - I = 0 \end{aligned}$$

Como B tiene forma canónica de Jordan, la ecuación anterior implica lo deseado.
Demostracion de 1.3. En lo que sigue, voy a denotar a una matriz y su funcion lineal asociada por la misma letra. Juntando 1.1 y el lema, $df_0 = P^{-1}BP$. Sin perdida de generalidad, supongamos que

$$B = \begin{pmatrix} I_p & 0 \\ 0 & -I_q \end{pmatrix}$$

Donde $p + q = n$. Entonces, por 1.2.,

$$f = h^{-1} \circ df_0 \circ h = h^{-1} \circ (P^{-1}BP) \circ h$$

De aquí esta claro que $Fix(f) = \mathbb{R}^p \times \{0\}^q$. Por lo tanto, $Fix(f)$ es una subvariedad. $\square$

2.1. Primero, veamos que $\min\{d(x,y) \mid x \sim y\} \geq 1$. Por definición de $\sim$,

$$(x_1, y_1) \sim (x_2, y_2) \iff \exists n \in \mathbb{Z} \left((x_1 + n, (-1)^n y_1) = \gamma^n(x_1, y_1) = (x_2, y_2)\right)$$

La primera igualdad se puede demostrar por inducción. Por lo anterior, si $x \in \mathbb{R}^2$ y B_x es la bola abierta de radio $\frac{1}{2}$ centrada en x, la restricción de la proyección, $\pi|_{B_x}$, es homeomorfismo (independientemente del representante que escojamos). Además, el cambio de cartas es una restricción de la identidad $\mathbb{1}_{\mathbb{R}}$, o una restricción de una traslación. Por lo tanto, $\pi|_{B_x}$ es una parametrización local de M en $[x]$.

2.2. Sea $\langle \cdot, \cdot \rangle$ el producto punto usual en $\mathbb{R}^2$; $x \in \mathbb{R}^2$; $u, v \in T_{\pi(x)}M$. Definimos,

$$g_{\pi(x)}(u, v) = \langle (d(\pi|_{B_x})_x)^{-1}(u), (d(\pi|_{B_x})_x)^{-1}(v) \rangle.$$

g esta bien definida. Supongamos que $x \sim y$; $u \in T_{\pi(x)}M = T_{\pi(y)}M$. Si $(d(\pi|_{B_x})_x)^{-1}(u) = \alpha'(0)$, donde $\alpha : I \to \mathbb{R}^2$ es suave y $\alpha(0) = x$, definimos $\beta(t) = \alpha(t) + y - x$. Entonces, por las definiciones de π & β,

$$\pi|_{B_y} \circ \beta = \pi|_{B_x} \circ \alpha$$

Por lo tanto,

$$u = d(\pi|_{B_x})_x(\alpha'(0)) = (\pi|_{B_x} \circ \alpha)'(0) = (\pi|_{B_y} \circ \beta)'(0) = d(\pi|_{B_y})_y(\beta'(0))$$

De donde,

$$(d(\pi|_{B_y})_y)^{-1}(u) = \beta'(0) = \alpha'(0) = (d(\pi|_{B_x})_x)^{-1}(u).$$

La segunda igualdad se cumple por una cuenta directa usando la definición de β. En particular, g esta bien definida.

2.3. Usaremos el siguiente lema:

Lema. Si $\gamma : [a, b] \to M$ es geodésica, existe $\tilde{\gamma} : I \to \mathbb{R}^2$ geodésica tal que $\gamma = \pi \circ \tilde{\gamma}$.

Demostración. Como γ es suave, $\forall\ t \in [a, b]$ existe U_t tal que $(\pi|_{U_t})^{-1} \circ \gamma$ es suave. Mas aun, podemos escoger las U_t de manera que $\tilde{\gamma} : I \to \mathbb{R}^2$ dada por

$$t \mapsto (\pi|_{U_t})^{-1} \circ \gamma(t)$$

es suave. En efecto, empecemos por escoger U_a. Sea $x_a \in \pi^{-1}(\gamma(a))$ cualquiera, y pongamos $U_a := B_{x_a}$. Luego, para $t > a$, sea $x_t \in \pi^{-1}(\gamma(t))$ tal que

$$\forall \epsilon > 0\ \exists \delta \in (0, \epsilon) \left(B_{x_{t-\delta}} \cap B_{x_t} \neq \phi\right)$$

Como B_x es una bola de radio $\frac{1}{2}$, la condición anterior nos garantiza que si escogemos $U_t := B_{x_t}$ entonces, $\tilde{\gamma}$ no hace saltos. La existencia de esta x_t se sigue de notar que $\forall n \in \mathbb{Z}$, $A_n = \{(x, y) \mid n \leq x < n + 1\}$ es un conjunto de representantes: solo hay que tener cuidado con la elección del representante x_t cuando $\gamma(t) \sim (0, z)$ para algún $z \in \mathbb{R}$ (el no tener cuidado en este caso podría significar escoger una x_t que haga discontinua a γ). En cualquier otro caso, simplemente hay que verificar que x_t este en el mismo A_n que las x_s con $s < t$ cercanas. Finalmente, $\tilde{\gamma}$ es geodésica en todo punto por que es la composición de una geodésica y una isometria local.

Demostración de 2.3.

Existencia. Sea $\alpha : [0,1] \to \mathbb{R}^2$ tal que $\alpha(t) = (t, 0)$. Claramente α es geodésica y por lo tanto, $\pi \circ \alpha$ también. Además,

$$\begin{aligned} L(\pi \circ \alpha) &= \int_0^1 g_{\pi\circ\alpha(t)}((\pi \circ \alpha)'(t), (\pi \circ \alpha)'(t))dt \\ &= \int_0^1 \langle \alpha'(t), \alpha'(t) \rangle dt \qquad \text{(regla de la cadena \& def. de } g) \\ &= 1 \end{aligned}$$

Unicidad. Veamos que no hay geodésicas cerradas con inicio (equivalentemente, final) afuera del eje X. Notemos que por definición de $\sim$, para cualquier punto x afuera del eje X, $\min\{d(x, y) \mid x \sim y\} > 1$. Juntando esto con el hecho de que las geodésicas en $\mathbb{R}^2$ son rectas y usando el lema, obtenemos lo deseado. $\square$

3.1. Primero notemos que por un calculo directo,

$$\begin{aligned} d\left(\frac{x}{x^2+y^2}\right) &= \left(\frac{y^2-x^2}{(x^2+y^2)^2}\right)dx + \left(\frac{-2xy}{(x^2+y^2)^2}\right)dy \\ d\left(\frac{y}{x^2+y^2}\right) &= \left(\frac{-2xy}{(x^2+y^2)^2}\right)dx + \left(\frac{x^2-y^2}{(x^2+y^2)^2}\right)dy \end{aligned}$$

Luego, usando que $dx \wedge dx = 0 = dy \wedge dy$ obtenemos,

$$\begin{aligned} d\alpha &= d\left(\frac{x}{x^2+y^2}\right) \wedge dy - d\left(\frac{y}{x^2+y^2}\right) \wedge dx \\ &= \left(\frac{y^2-x^2}{(x^2+y^2)^2}\right)dx \wedge dy - \left(\frac{x^2-y^2}{(x^2+y^2)^2}\right)dy \wedge dx = 0 \end{aligned}$$

3.2. Como $d(f^*(\alpha)) = (d \circ f^*)(\alpha) = f^* \circ d\alpha = f^* \circ 0 = 0$ entonces, $f^*(\alpha)$ es cerrada. Por otro lado, por definición tenemos,

$$\begin{aligned} f^*(\alpha) &= -\left(\frac{\sin\theta}{r}\right)d(r\cos\theta) + \left(\frac{\cos\theta}{r}\right)d(r\sin\theta) \\ &= -\left(\frac{\sin\theta}{r}\right)((\cos\theta)dr - (r\sin\theta)d\theta) + \left(\frac{\cos\theta}{r}\right)((\sin\theta)dr + (r\cos\theta)d\theta) \\ &= \left(\frac{-\sin\theta\cos\theta + \cos\theta\sin\theta}{r}\right)dr + \left(\frac{r(\sin\theta)^2 + r(\cos\theta)^2}{r}\right)d\theta = d\theta \end{aligned}$$

Cabe mencionar que esto solo tiene sentido porque $\mathrm{Dom} f = \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}$ y en este dominio, $d\theta$ esta bien definida.

3.3. Supongamos que α es exacta. En particular, $i^*\alpha$ también i.e., existe $\beta \in \Omega^0(\mathbb{S}^1)$ tal que $\alpha = d\beta$. Sea M el disco unitario. Entonces, $\partial M = \mathbb{S}^1$ y por Stokes,

$$\int_{\mathbb{S}^1} i^*\alpha = \int_{\partial M} i^*\alpha = \int_M d\alpha = \int_M d(d\beta) = \int_M 0 = 0$$

Por lo tanto, α tendría que anularse en algún punto de $\mathbb{S}^1$ pero simplemente viendo la definición de α, vemos que esto es imposible. $\therefore$ α no es exacta. $\square$

5.1. Veamos que B es $C^\infty(M)$-lineal con respecto de X, Y:

$$\begin{aligned} B(fX,Y) &= \nabla_{fX}Y - \overline{\nabla}_{fX}Y = f\nabla_X Y - f\overline{\nabla}_X Y = fB(X,Y) \\ B(X,fY) &= \nabla_X(fY) - \overline{\nabla}_X(fY) \\ &= (f\nabla_X Y + (X.f)Y) - (f\overline{\nabla}_X Y + (X.f)Y) \\ &= fB(X,Y) \end{aligned}$$

5.2. Usaremos la siguiente observación:
Observación. Supongamos que en una carta, $X_i = \frac{\partial}{\partial x_i}$, $X = \sum x_i X_i$, $Y = \sum y_i X_i$. Ocupando la expresión local para una conexión que aparece en Do Carmo p.51 (ver final del documento),

$$\begin{aligned} B(X,Y)(p) &= (\nabla_X Y(p) - \overline{\nabla}_X Y(p)) \\ &= \sum_k \left(\sum_{ij} x_i(p) y_j(p) \Gamma_{ij}^k(p) + X(y_k)(p) \right) X_k(p) \\ &- \sum_k \left(\sum_{ij} x_i(p) y_j(p) \overline{\Gamma}_{ij}^k(p) + X(y_k)(p) \right) X_k(p) \\ &= \sum_k \left(\sum_{ij} x_i(p) y_j(p) \Gamma_{ij}^k(p) - \sum_{ij} x_i(p) y_j(p) \overline{\Gamma}_{ij}^k(p) \right) \end{aligned}$$

De lo anterior, $B(X,Y)(p)$ depende únicamente de $x_i(p), y_j(p), \Gamma_{ij}^k(p), \overline{\Gamma}_{ij}^k(p)$.
Demostración de 5.2.
$\rightarrow$) Supongamos que ∇ y $\overline{\nabla}$ tienen las mismas geodésicas. Sea $p \in M$ & $X \in \Gamma(TM)$. Sabemos que existe una única geodésica $\gamma : I \to M$ tal que $\gamma(0) = p$ & $\gamma'(0) = X(p)$. Por la observación anterior,

$$B(X,X)(p) = B(\gamma',\gamma')(0) = \nabla_{\gamma'}\gamma' - \overline{\nabla}_{\gamma'}\gamma' = 0 - 0 = 0$$

La penúltima igualdad se cumple porque γ es geodésica en ambas conexiones.
$\leftarrow$) Supongamos que $\forall X \in \Gamma(TM)$ $B(X,X) = 0$. Veamos que si γ geodésica de ∇ entonces, γ es geodésica de $\overline{\nabla}$ (el converso es análogo):

$$0 = B(\gamma',\gamma') = \nabla_{\gamma'}\gamma' - \overline{\nabla}_{\gamma'}\gamma' = 0 - \overline{\nabla}_{\gamma'}\gamma'$$

Por lo tanto, γ es geodésica de $\overline{\nabla}$.
5.3. Supongamos que ∇ & $\overline{\nabla}$ tienen las mismas geodésicas y la misma torsión. Por el inciso anterior, $\nabla_X X = \overline{\nabla}_X X$ para toda $X \in \Gamma(TM)$. En particular, esto es cierto para $X = X_k := \frac{\partial}{\partial x_k}$. Escribiendo $\nabla_{X_k} X_k = \overline{\nabla}_{X_k} X_k$ en coordenadas locales, ie, usando los símbolos de Christoffel obtenemos,

$$\forall i, k \in \{1, ..., n\} \ \left(\Gamma_{ii}^k = \overline{\Gamma}_{ii}^k \right)$$

Por otro lado, de la pura definición y expresión local; vemos que tener la misma torsión implica

$$\sum_k \left(\sum_{ij} \Gamma_{ij}^k (x_i y_j - y_i x_j) \right) X_k = \sum_k \left(\sum_{ij} \overline{\Gamma}_{ij}^k (x_i y_j - y_i x_j) \right) X_k \tag{1}$$

En particular, para toda k,

$$\sum_{ij} \Gamma_{ij}^k (x_i y_j - y_i x_j) = \sum_{ij} \overline{\Gamma}_{ij}^k (x_i y_j - y_i x_j)$$

Ahora bien, sean $i, j \in \{1, ..., n\}$ fijos y distintos. Consideremos los campos vectoriales $X = X_i$ & $Y = X_j$. Es decir, $x_l = \delta_{il}$ & $y_l = \delta_{jl}$. Simplemente evaluando en la ecuación anterior obtenemos,

$$\forall i, j, k \in \{1, ..., n\} \ \left(i \neq j \implies \Gamma_{ij}^k = \overline{\Gamma}_{ij}^k \right) \tag{2}$$

Juntando (1) y (2) obtenemos lo deseado. □

Diego Leipen Lara
418002038

Referencias.

Setting $\nabla_{X_i} X_j = \sum_k \Gamma_{ij}^k X_k$, we conclude that the Γ_{ij}^k are differentiable functions and that

$$\nabla_X Y = \sum_k \left(\sum_{ij} x_i y_j \Gamma_{ij}^k + X(y_k) \right) X_k,$$

Figure 1: Do Carmo p.51