1. Sea (X, τ) un espacio topológico, $A \subset X$, $r : X \to A$ una función continua tal que $r|_A = id_A$. Prueba que es un mapeo cociente.
Demostración.
Notemos que si $s : A \to X$ es la inclusión, s es continua y $r \circ s = r|_A = id_A$. Donde la primera igualdad se cumple por definición de restricción y la segunda por hipótesis. El resultado se sigue de Dugundji 6.1.5. $\square$

2. Sea $f : Z \to X \times Y$ donde X, Y, Z son espacios topológicos de tal forma que $f(a) = (f_1(a), f_2(a))$. Donde $f_1 : Z \to X$ y $f_2 : Z \to Y$. Pruebe que f es continua si y solo si f_1 y f_2 lo son.
Demostración.
Supongamos f continua y sean $\pi_1 : X \times Y \to X$ y $\pi_2 : X \times Y \to Y$ las proyecciones. La continuidad de f_1 y f_2 se sigue de la continuidad de π_1, π_2, y f, que la composición de funciones es continua, y que $\pi_1 \circ f = f_1$, y $\pi_2 \circ f = f_2$. Conversamente, supongamos que f_1 y f_2 son continuas. Sea $U \times V$ un básico de $X \times Y$. Veamos que $f^{-1}[U \times V]$ es abierto en Z. Primero notemos que $f^{-1}[U \times V] = f_1^{-1}[U] \cap f_2^{-1}[V]$ pues,

$$
\begin{aligned}
a \in f^{-1}[U \times V] &\iff (f_1(a), f_2(a)) = f(a) \in U \times V \\
&\iff f_1(a) \in U \text{ y } f_2(a) \in V \\
&\iff a \in f_1^{-1}[U] \text{ y } a \in f_2^{-1}[V].
\end{aligned}
$$

Luego, como f_1 y f_2 son continuas, U es abierto en X, y V es abierto en Y entonces, $f_1^{-1}[U]$ y $f_2^{-1}[V]$ son abiertos en Z. Por lo tanto, como la intersección de abiertos es abierta, $f^{-1}[U \times V]$ es abierto. $\square$

3. Sea $f : X \to Y$, donde X y Y son espacios topológicos y $X = \bigcup_{\alpha \in \Lambda} U_\alpha$. Supongamos que $\forall \alpha \in \Lambda$, $f|_{U_\alpha}$ es continua y U_α es cerrado.

1. Halle un ejemplo donde la unión sea numerable y f no sea continua.
2. Si la unión es sobre un conjunto localmente finito, f es continua.

Demostración.

1. Para cada $n \in \mathbb{N}$ sea,

$$
U_n = \begin{cases} [\frac{1}{n+1}, \frac{1}{n}) & \text{si } n \in \mathbb{Z}^+ \\ \{0\} & \text{si } x = 0 \end{cases}
$$

Sea $f : ([0,1), \text{Subespacio de Sorgenfrey}) \to (\mathbb{R}, \text{Sorgenfrey})$ dada por,

$$
f(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \in U_n \text{ para alguna } n \in \mathbb{Z}^+ \\ 1 & \text{si } x \in U_0 \end{cases}
$$

Entonces, $\forall n \in \mathbb{N}$ U_n es cerrado y $f|U_n$ es continua. Sin embargo, f no es continua pues $[\frac{1}{2}, \infty) \in$ Sorgenfrey pero, $f^{-1}[[\frac{1}{2}, \infty)] = \{0\}$ no es abierto en $[0, 1)$ con la topología de subespacio de Sorgenfrey.

2. Supongamos que $\{U_\alpha\}_{\alpha \in \Lambda}$ es localmente finita. Por Munkres 18.1.3, basta probar que si B es cerrado en Y, $f^{-1}[B]$ es cerrado en X. Veamos que $\overline{f^{-1}[B]} \subset f^{-1}[B]$. Primero notemos que como $\bigcup_{\alpha \in \Lambda} U_\alpha = X$ entonces, $f^{-1}[B] =_{(*)} \bigcup_{\alpha \in \Lambda} (f|_{U_\alpha})^{-1}[B]$. Ahora bien, sea $x \notin f^{-1}[B]$, veamos que $x \notin \overline{f^{-1}[B]}$ probando que existe una vecindad de x que no interseca a $f^{-1}[B]$. Por otro lado, como $\{U_\alpha\}_{\alpha \in \Lambda}$ es localmente finita, existe una vecindad U de x que interseca unicamente a una cantidad finita de U_α's digamos $U_{\alpha_1}, \dots, U_{\alpha_n}$. Veamos que

$$V := (X - \bigcup_{i=1}^{n} (f|U_{\alpha_i})^{-1}[B]) \cap U$$

cumple lo deseado. Primero notemos que $\forall \alpha \in \Lambda$ $(f|U_\alpha)^{-1}[B])$ es cerrado en X pues, $f|_{U_\alpha}$ es continua y B y U_α son cerrados. Por lo tanto, como la union finita de cerrados es cerrada, $(X - \bigcup_{i=1}^{n} (f|U_{\alpha_i})^{-1}[B])$ es abierto. Ademas, $x \in X - \bigcup_{i=1}^{n} (f|U_{\alpha_i})^{-1}[B]$ pues como $x \notin f^{-1}[B]$, por $(*)$, $\forall \alpha \in \Lambda$ $x \notin (f|_{U_\alpha})^{-1}[B]$. En particular, $x \in X - \bigcup_{i=1}^{n} (f|U_{\alpha_i})^{-1}[B]$. De donde, $x \in V$. Mas aun, V no interseca a $f^{-1}[B]$ pues U solo interseca a $U_{\alpha_1}, \dots, U_{\alpha_n}$. $\square$

4. Sea $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}} \subset \prod_\alpha X_\alpha$ una sucesión. Donde cada X_α es un espacio topológico. Con la topología producto pruebe que $x_n \to x$ si y solo si $\pi_\alpha(x_n) \to x_\alpha$ para toda α. ¿Sera cierto que se cumple si le damos la topología de caja?

Demostración.

Supongamos que $x_n \to x$. Sea V una vecindad cualquiera de x_α. Notemos que $\pi_\alpha^{-1}[V]$ es una vecindad de x. Entonces, como $x_n \to x$, $\exists n \in \mathbb{N}$ $\forall m \geq n$ $x_m \in \pi_\alpha^{-1}[V]$. Luego, $\forall m \geq n$ $\pi_\alpha(x_m) \in V$ i.e., $\pi_\alpha(x_n) \to x_\alpha$. Conversamente, supongamos que para toda α, $\pi_\alpha(x_n) \to x_\alpha$. Sea $x \in \langle U_{\alpha_1}, \dots U_{\alpha_m} \rangle$. Entonces, para todo $i \in \{1, \dots, m\}$, $x_{\alpha_i} = \pi_{\alpha_i}(x) \in U_{\alpha_i}$. Por lo tanto, como cada U_α es abierto y $\pi_\alpha(x_n) \to x_\alpha$ tenemos que, $\forall i \in \{1, \dots, m\}$ $\exists k_i \in \mathbb{N}$ $\forall p \geq k_i$ $(\pi_{\alpha_i}(x_p) \in U_{\alpha_i})$. Luego, si tomamos $k = \max\{k_1, \dots, k_m\}$ tenemos que, $\forall i \in \{1, \dots, m\}$ $\forall p \geq k$ $(\pi_{\alpha_i}(x_p) \in U_{\alpha_i})$ i.e., $\exists k \in \mathbb{N}$ $\forall p \geq k$ $(x_p \in \langle U_{\alpha_1}, \dots, U_{\alpha_m} \rangle)$. Por lo tanto, como $\langle U_{\alpha_1}, \dots, U_{\alpha_m} \rangle$ es un básico arbitrario que contiene a x, $x_n \to x$.

Af! No es cierto para la topología de caja.
Para cada $n \in \mathbb{N}$ sea,

$$x_n(m) = \begin{cases} \frac{1}{n-m} & \text{si } m < n \\ 1 & \text{si } m \geq n \end{cases}$$

Es decir,

$$\begin{aligned} x_1 &= (1, 1, 1, \dots) \\ x_2 &= (1/2, 1, 1, \dots) \\ x_3 &= (1/3, 1/2, 1, \dots) \\ &\vdots \end{aligned}$$

Entonces, $\forall k \in \mathbb{N}$ $\pi_k(x_n) \to 0$, pero $\prod B_{\frac{1}{2}}(0)$ es una vecindad de $(0, 0, \dots)$ y $\forall n \in \mathbb{N}$ $x_n \notin \prod B_{\frac{1}{2}}(0)$. En particular, $x_n \not\to x$. $\square$

5. Sea $\mathbf{R}^\infty$ el conjunto de sucesiones de los reales $\{x_n\}_{n\in\mathbf{N}}$ donde $x_i \neq 0$ para una cantidad finita de i's. Si lo consideramos como subconjunto de las sucesiones de los reales, ¿cual es la cerradura de $\mathbf{R}^\infty$ con la topología de caja y la de producto?
Demostración.
Af! En la topología de caja, $\overline{\mathbf{R}^\infty} = \mathbf{R}^\infty$.
Sea $x = \{x_n\} \notin \mathbb{R}^\infty$. Si $x_n \neq 0$, existe una vecindad V_n de x_n tal que $0 \notin V_n$. Entonces,

$$x \in V := \prod_{x_i \neq 0} V_n \times \prod_{x_i = 0} \mathbb{R}$$

Y claramente, V es abierto y $V \cap \mathbf{R}^\infty = \phi$. Por lo tanto, $x \notin \overline{\mathbf{R}^\infty}$.
Af! En la topología del producto, $\overline{\mathbf{R}^\infty} = \mathbb{R}^\mathbb{N}$ i.e., $\mathbf{R}^\infty$ es denso.
Sea $\langle U_{\alpha_1}, \dots, U_{\alpha_n} \rangle$ un básico cualquiera de $\mathbb{R}^\mathbb{N}$ y $x_{\alpha_i} \in U_{\alpha_i}$. Si $y \in \mathbb{R}^\mathbb{N}$ es tal que $\pi_{\alpha_i}(y) = x_{\alpha_i}$ y $\pi_\alpha(y) = 0$ para toda i y toda $\alpha \neq \alpha_i$, tenemos que $y \in \mathbf{R}^\infty \cap \langle U_{\alpha_1}, \dots, U_{\alpha_n} \rangle$. En particular, $\mathbf{R}^\infty$ es denso. $\square$

6. Sean $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ y $\{b_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ dos sucesiones de reales de tal manera que $\forall i$ $a_i > 0$. Si $h : \mathbb{R}^\mathbb{N} \to \mathbb{R}^\mathbb{N}$ es tal que $h(\{x_n\}) = \{a_n x_n + b_n\}$ y a $\mathbb{R}^\mathbb{N}$ se le da la topología producto entonces, h es un homeomorfismo. ¿Ocurre lo mismo con la topología de caja?
Demostración.
Primero notemos que por Dugundji 4.2.2, h es continua. Analogamente, $g : \mathbb{R}^\mathbb{N} \to \mathbb{R}^\mathbb{N}$ dada por $g(\{x_n\}) = \{\frac{x_n - b_n}{a_n}\}$ es continua. Además, es rutina

verificar que $f \circ g = id_{\mathbb{R}^{\mathbb{N}}} = g \circ f$. El resultado se sigue de Dugundji 3.12.3.
Af! h es homeomorfismo si $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ tiene la topología de caja.
Basta ver que h y g son continuas para aplicar el mismo argumento que en el caso anterior. Sea $\prod_{n\in\mathbb{N}} U_n$ un básico de $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$. Veamos que $f^{-1}[\prod_{n\in\mathbb{N}} U_n]$ es abierto. Es fácil ver que $f^{-1}[\prod_{n\in\mathbb{N}} U_n] = \prod_{n\in\mathbb{N}} f_n^{-1}[U_n]$, donde $f_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ esta dada por $f(t) = a_n t + b_n$. Además, como para toda n, f_n es continua y U_n es abierto, $f_n^{-1}[U_n]$ es abierto. Por lo tanto, $\prod_{n\in\mathbb{N}} f_n^{-1}[U_n] = f^{-1}[\prod_{n\in\mathbb{N}} U_n]$ es abierto. □

7. De un ejemplo de una aplicación cociente que no sea abierta ni cerrada.
Solución.
Considera $f : [0,1) \to \{0,1\}$ tal que

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \in [0, \frac{1}{2}) \\ 1 & \text{si } x \in [\frac{1}{2}, 1) \end{cases}$$

Veamos que la topología inducida es Sierpinski.
Como $\mathcal{P}(\{0,1\}) = \{\phi, \{0\}, \{1\}, \{0,1\}\}$, basta notar que,

$$\begin{aligned} f^{-1}[\{0\}] &= [0, 1/2) && \text{(Abierto en } [0,1)) \\ f^{-1}[\{1\}] &= [1/2, 1) && \text{(No abierto en } [0,1)) \end{aligned}$$

Por lo tanto, los únicos abiertos en $\{0,1\}$ son ϕ, $\{0\}$ y $\{0,1\}$. Entonces, como

$$\begin{aligned} f[(0,1/2)] &= \{1\} && \text{(Manda un abierto en un no-abierto.)} \\ f[\{0\}] &= \{0\} && \text{(Manda un cerrado en un no-cerrado.)} \end{aligned}$$

f no es abierta ni cerrada. □

8. Pruebe que el espacio cociente de un espacio separable es separable.
Demostración.
Sea $(X, \mathcal{T})$ separable y R una relación de equivalencia en X. Supongamos que D es denso y numerable en X. Si π denota la proyección canónica, veamos que $\pi[D]$ es denso en X/R.

$$\begin{aligned} U \in \mathcal{T}_{X/R} &\implies \pi^{-1}[U] \in \mathcal{T} \\ &\implies D \cap \pi^{-1}[U] \neq \phi \\ &\implies \pi[D] \cap U \neq \phi \end{aligned}$$

Donde la ultima implicación se cumple por que π es suprayectiva, lo cual implica $\pi[\pi^{-1}[U]] = U$. Por lo tanto, $\pi[D]$ interseca a todo abierto de X/R i.e., $\pi[D]$ es denso. $\square$

9. Sea X/s un cociente de un espacio topológico.

1. $A \subset X/s$ es abierto si y solo si es imagen de un abierto saturado bajo la proyección canónica.

2. $A \subset X/s$ es cerrado si y solo si su preimagen es un cerrado saturado.

Demostración.

1. Si $A \subset X/s$ es abierto, $\pi^{-1}[A]$ es abierto. Ademas, como π es suprayectiva, $A = \pi[\pi^{-1}[A]]$ y $\pi^{-1}[A]$ es saturado. Por lo tanto, A es la imagen de un abierto saturado, $\pi^{-1}[A]$ bajo la proyeccion canonica. Conversamente, supongamos que $A = \pi[B]$ donde B es abierto y saturado. Entonces, $\pi^{-1}[A] = \pi^{-1}[\pi[B]] = B$. Donde la segunda igualdad se da pues B es saturado. Luego, como B es abierto en X, $\pi^{-1}[A]$ es abierto en X, por lo tanto, A es abierto en X/s.

2.

$$\begin{aligned}
A \subset X/s \text{ cerrado} &\iff (X/s) - A \text{ abierto} \\
&\iff (X/s) - A = \pi[B], \text{ con } B \text{ abierto y saturado} \\
&\iff \pi^{-1}[(X/s) - A] = \pi^{-1}[\pi[B]] \\
&\qquad\qquad\qquad (\Leftarrow \text{ pues, } \pi \text{ es suprayectiva}) \\
&\iff \pi^{-1}[(X/s) - A] = B \qquad\qquad (B \text{ es saturado}) \\
&\iff \pi^{-1}[A] = X - B, \text{ con } B \text{ abierto y saturado} \\
&\iff \pi^{-1}[A] = C, \text{ con } C \text{ cerrado y saturado}
\end{aligned}$$

$\square$

Diego Leipen Lara
418002038