Tarea 1

Diego Leipen Lara

Metodos Variacionales

1. Si Ω es acotado y $\lambda > -\lambda_1(\Omega)$ denotamos por

$$\langle u, v\rangle_\lambda = \int_\Omega \nabla u \cdot \nabla v + \lambda \int_\Omega uv,$$

$$||u||_\lambda = \left(\int_\Omega |\nabla u|^2 + \int_\Omega \lambda \nabla^2\right)^{1/2}.$$

Demuestra las siguientes afirmaciones.

(a) $\langle \cdot, \cdot\rangle$ es un producto escalar en $H_0^1(\Omega)$.

(b) $||\cdot||_\lambda$ es equivalente a $||\cdot||_1$, es decir, existen $C_1, C_2 > 0$ tales que

$$C_1||u||_1 \leq ||u||_\lambda \leq C_2||u||_1 \qquad \forall u \in H_0^1(\Omega).$$

Demostración.

(a) (PE1) Sean $u_1, u_2, v \in H_0^1(\Omega)$ y $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$. Entonces

$$\begin{aligned}\int_\Omega \nabla(\alpha u_1 + \beta u_2)\cdot\nabla v &= \int_\Omega (\alpha\nabla u_1 + \beta\nabla u_2)\cdot\nabla v\\ &= \int_\Omega \big(\alpha\left(\nabla u_1\cdot\nabla v\right) + \beta\left(\nabla u_2\cdot\nabla v\right)\big)\\ &= \alpha\int_\Omega \nabla u_1\cdot\nabla u + \beta\int_\Omega \nabla u_2\cdot\nabla v.\end{aligned}$$

Por lo tanto,

$$\begin{aligned}\langle \alpha u_1 + \beta u_2, v\rangle_\lambda &= \int_\Omega \nabla(\alpha u_1 + \beta u_2)\cdot\nabla v + \int_\Omega (\alpha u_1 + \beta u_2)v\\ &= \left(\alpha\int_\Omega \nabla u_1\cdot\nabla u + \beta\int_\Omega \nabla u_2\cdot\nabla v\right) + \left(\alpha\int_\Omega u_1 v + \beta\int_\Omega u_2 v\right)\\ &= \alpha\left(\int_\Omega \nabla u_1\cdot\nabla u + \int_\Omega u_1 v\right) + \beta\left(\int_\Omega \nabla u_2\cdot\nabla v + \int_\Omega u_2 v\right)\\ &= \alpha\langle u_1, v\rangle_\lambda + \beta\langle u_2, v\rangle_\lambda.\end{aligned}$$

(PE2) Para todo $u, v \in H_0^1(\Omega)$,

$$\langle u, v\rangle_\lambda = \int_\Omega \nabla u\cdot\nabla v + \int_\Omega uv = \int_\Omega \nabla v\cdot\nabla u + \int_\Omega vu = \langle v, u\rangle_\lambda.$$

(PE3) Como Ω es acotado, la desigualdad de Poincare asegura que

$$\lambda_1(\Omega) = \inf_{\substack{u\in H_0^1(\Omega)\\ u\neq 0}} \frac{\int_\Omega |\nabla u|^2}{\int_\Omega u^2} > 0.$$

En particular,

$$\lambda_1(\Omega) \int_\Omega u^2 \leq \int_\Omega |\nabla u|^2 \qquad \forall u \in H_0^1(\Omega). \tag{1}$$

Equivalentemente,

$$0 \leq \int_\Omega |\nabla u|^2 - \lambda_1(\Omega) \int_\Omega u^2 \qquad \forall u \in H_0^1(\Omega).$$

Ahora bien, si $u \in H_0^1(\Omega)$, $u \neq 0$, entonces $\int_\Omega u^2 > 0$ y por lo tanto (como $\lambda > -\lambda_1(\Omega)$)

$$\langle u, u \rangle_\lambda = \int_\Omega |\nabla u|^2 + \lambda \int_\Omega u^2 > \int_\Omega |\nabla u|^2 - \lambda_1(\Omega) \int_\Omega u^2 \geq 0.$$

(b) Como $\lambda > -\lambda_1(\Omega)$ y $\lambda_1(\Omega) > 0$, entonces

$$C \coloneqq \frac{\lambda + \lambda_1(\Omega)}{1 + \lambda_1(\Omega)} > 0.$$

Más aun,

$$1 - C = 1 - \frac{\lambda + \lambda_1(\Omega)}{1 + \lambda_1(\Omega)} = \frac{1 + \lambda_1(\Omega) - \lambda - \lambda_1(\Omega)}{1 + \lambda_1(\Omega)} = \frac{1 - \lambda}{1 + \lambda_1(\Omega)}. \tag{2}$$

y

$$C - \lambda = \frac{\lambda + \lambda_1(\Omega)}{1 + \lambda_1(\Omega)} - \lambda = \frac{\lambda + \lambda_1(\Omega) - \lambda - \lambda\lambda_1(\Omega)}{1 + \lambda_1(\Omega)} = \frac{(1 - \lambda)\lambda_1(\Omega)}{1 + \lambda_1(\Omega)} = (1 - C)\lambda_1(\Omega). \tag{3}$$

Caso 1: $\lambda < 1$. Entonces

$$||u||_\lambda^2 = \int_\Omega |\nabla u|^2 + \lambda \int_\Omega u^2 \leq \int_\Omega |\nabla u|^2 + \int_\Omega u^2 = ||u||_1^2 \qquad \forall u \in H_0^1(\Omega).$$

Por lo tanto, $C_2 \coloneqq 1$ cumple lo deseado. Por otro lado, $\lambda < 1$ implica que $1 - C > 0$ (cf. (2)). Entonces multiplicando $1 - C$ en ambos lados de (1) obtenemos

$$(1 - C)\lambda_1(\Omega) \int_\Omega u^2 \leq (1 - C) \int_\Omega |\nabla u|^2 \qquad \forall u \in H_0^1(\Omega).$$

Sustituyendo (3) obtenemos

$$(C - \lambda) \int_\Omega u^2 \leq (1 - C) \int_\Omega |\nabla u|^2 \qquad \forall u \in H_0^1(\Omega).$$

Equivalentemente,

$$C \left(\int_\Omega |\nabla u|^2 + \int_\Omega u^2 \right) \leq \int_\Omega |\nabla u|^2 + \lambda \int_\Omega u^2 \qquad \forall u \in H_0^1(\Omega).$$

Es decir,

$$C||u||_1^2 \leq ||u||_\lambda^2 \qquad \forall u \in H_0^1(\Omega).$$

Por lo tanto, $C_1 \coloneqq \sqrt{C}$ cumple lo deseado.

Caso 2: $\lambda > 1$. Entonces

$$||u||_1^2 = \int_\Omega |\nabla u|^2 + \int_\Omega u^2 \leq \int_\Omega |\nabla u|^2 + \lambda \int_\Omega u^2 = ||u||_\lambda^2 \qquad \forall u \in H_0^1(\Omega).$$

Por lo tanto, $C_1 \coloneqq 1$ cumple lo deseado. Por otro lado, $\lambda > 1$ implica $C - 1 > 0$ (cf. (2)). Entonces multiplicando $C - 1$ en ambos lados de (1) obtenemos

$$(C-1)\lambda_1(\Omega)\int_\Omega u^2 \leq (C-1)\int_\Omega |\nabla u|^2 \qquad \forall u \in H_0^1(\Omega).$$

Sustituyendo (3) obtenemos

$$(\lambda - C)\int_\Omega u^2 \leq (C-1)\int_\Omega |\nabla u|^2 \qquad \forall u \in H_0^1(\Omega).$$

Equivalentemente,

$$\int_\Omega |\nabla u|^2 + \lambda \int_\Omega u^2 \leq C\left(\int_\Omega |\nabla u|^2 + \int_\Omega u^2\right) \qquad \forall u \in H_0^1(\Omega).$$

Es decir,

$$||u||_\lambda^2 \leq C||u||_1^2 \qquad \forall u \in H_0^1(\Omega).$$

Por lo tanto, $C_2 \coloneqq \sqrt{C}$ cumple lo deseado.

$\square$