

1. Identifiquemos \mathbb{R}^4 con el conjunto de matrices 2×2 . Pruebe que el conjunto de matrices $SL(2)$ de 2×2 con determinante igual a 1 es una subvariedad de \mathbb{R}^4 . ¿Cual es su dimensión?

Demostración. Usaremos la definición de subvariedad del Gallot:

1.1 Definition. A subset $M \subset \mathbb{R}^{n+k}$ is an *n-dimensional submanifold of class C^p of \mathbb{R}^{n+k}* if, for any $x \in M$, there exists a neighborhood U of x in \mathbb{R}^{n+k} and a C^p submersion $f : U \rightarrow \mathbb{R}^k$ such that $U \cap M = f^{-1}(0)$ (we recall that f is a submersion if its differential map is surjective at each point).

Sea $U := GL_2(\mathbb{R})$ y $f : U \subset M_{2 \times 2}(\mathbb{R}) \cong \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}$ tal que

$$(x_1, x_2, x_3, x_4) \mapsto \det \begin{pmatrix} x_1 & x_2 \\ x_3 & x_4 \end{pmatrix} - 1 = (x_1 x_4 - x_2 x_3) - 1$$

(Recordemos que U es abierto en \mathbb{R}^4 porque es igual a $\mathbb{R}^4 \setminus \det^{-1}(0)$ y \det es continua) Como $SL(2) \subset U$ implica $U \cap SL(2) = SL(2) = f^{-1}(0)$, entonces basta probar que f es submersion; y para esto, basta probar que $\det : \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}$ es submersion. Sea $x = (x_1, x_2, x_3, x_4) \in \mathbb{R}^4$, entonces $\det(x) = x_1 \cdot x_4 - x_2 \cdot x_3$ y por lo tanto,

$$\begin{aligned} d(\det)_x(x) &= \sum_{i=1}^4 \frac{\partial \det}{\partial x_i}(x) \cdot x_i \\ &= x_4 \cdot x_1 - x_3 \cdot x_2 - x_2 \cdot x_3 + x_1 \cdot x_4 \\ &= \det(x) + \det(x) = 2 \det(x) \neq 0 \end{aligned}$$

Donde la ultima igualdad se cumple porque $x \in U$. Entonces, para toda $x \in U$, $d(\det)_x$ es una función lineal distinta de 0 con contradominio \mathbb{R} . Por lo tanto, para toda $x \in U$, $d(\det)_x$ es suprayectiva, es decir, \det es submersion. \square

2. Sea $p : \mathbb{R}^{n+1} \rightarrow \mathbb{P}^n \mathbb{R}$ la proyección de $\mathbb{R}^{n+1} \setminus \{0\}$ sobre el espacio proyectivo. Muestre que la aplicación lineal

$$p^* : \Omega^*(\mathbb{P}^n \mathbb{R}) \rightarrow \Omega^*(\mathbb{R}^{n+1} \setminus \{0\})$$

(el “pullback” de las formas diferenciales) es inyectiva y que su imagen es el conjunto de las formas tales que $f_\lambda^*(\alpha) = \alpha$ para toda homotecia, $f_\lambda : x \mapsto \lambda \cdot x$, $\lambda \neq 0$ y $i_X \alpha = 0$, donde $X_x = x$ y $i_X \alpha(\dots) = \alpha(X, \dots)$.

Demostración. Antes que nada, un poco de notación. Vamos a escribir la notación del atlas $\{(\varphi_i, \mathcal{V}_i)\}_{i=1}^n$ para $\mathbb{P}^n \mathbb{R}$ introducido en las notas 1.1 del semestre pasado Para cada $i \in \{1, \dots, n\}$ definimos

$$\mathcal{V}_i := \{(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^{n+1} \mid x_i \neq 0\}$$

$$\begin{aligned}\Phi : \mathcal{V}_i &\rightarrow \mathbb{R}^n \\ x &\mapsto \left(\frac{x_1}{x_i}, \dots, \frac{x_{i-1}}{x_i}, \frac{x_{i+1}}{x_i}, \dots, \frac{x_{n+1}}{x_i} \right)\end{aligned}$$

Entonces, Φ es compatible con la relación de equivalencia definida en $\mathbb{P}^n\mathbb{R}$ y por lo tanto, existe $\varphi_i : \mathbb{P}^n\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n$ tal que el siguiente diagrama conmuta.

$$\begin{array}{ccc}\mathcal{V}_i \subset \mathbb{R}^{n+1} \setminus \{0\} & \xrightarrow{\Phi_i} & \mathbb{R}^n \\ \downarrow p & \nearrow \varphi_i & \\ U_i \subset \mathbb{P}^n\mathbb{R} & & \end{array}$$

Para ver que p^* es inyectiva, usaremos la siguiente observación.

Observación 1. p es submersion:

Supongamos que $x \in \mathbb{R}^{n+1} \setminus \{0\}$. Por el diagrama anterior, para toda $i \in \{1, \dots, n\}$, $p = (\varphi_i)^{-1} \circ \Phi_i$. Como φ_i es una carta para $\mathbb{P}^n\mathbb{R}$, en particular, es submersion y por lo tanto basta probar que Φ_i también es submersion. Para esto, sea $x := (x_1, \dots, x_{n+1}) \in \mathcal{V}_i$ y $u := (u_1, \dots, u_{n+1}) \in \mathbb{R}^{n+1}$. Por definición,

$$d(\Phi_i)_x(u) = \begin{pmatrix} \frac{\partial \Phi_i^1}{\partial x_1}(x) & \cdots & \frac{\partial \Phi_i^1}{\partial x_{n+1}}(x) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial \Phi_i^n}{\partial x_1}(x) & \cdots & \frac{\partial \Phi_i^n}{\partial x_{n+1}}(x) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_1 \\ \vdots \\ u_{n+1} \end{pmatrix}$$

Donde $\Phi_i = (\Phi_i^1, \dots, \Phi_i^n)$. Por lo tanto conviene calcular,

$$\left(\frac{\partial \Phi_i^j}{\partial x_1}(x) \quad \cdots \quad \frac{\partial \Phi_i^j}{\partial x_{n+1}}(x) \right)$$

para toda $j \in \{1, \dots, n\}$. Como

$$\Phi_i^j(x) = \begin{cases} \frac{x_j}{x_i} & \text{si } j < i \\ \frac{x_{j+1}}{x_i} & \text{si } j \geq i \end{cases}$$

entonces, tenemos dos casos:

1. Si $i < j$:

$$\begin{pmatrix} 0 & \cdots & 0 & \underbrace{\frac{1}{x_i}}_{j\text{-ésimo lugar}} & 0 & \cdots & 0 & \underbrace{-\frac{x_j}{x_i^2}}_{i\text{-ésimo lugar}} & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{\partial \Phi_i^j}{\partial x_1}(x) & \cdots & \frac{\partial \Phi_i^j}{\partial x_{n+1}}(x) \end{pmatrix} =$$

2. Si $i \geq j$:

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial \Phi_i^j}{\partial x_1}(x) & \cdots & \frac{\partial \Phi_i^j}{\partial x_{n+1}}(x) \\ 0 & \cdots & 0 & \underbrace{-\frac{x_{j+1}}{x_i^2}}_{i\text{-ésimo lugar}} & 0 & \cdots & 0 & \underbrace{\frac{1}{x_i}}_{(j+1)\text{-ésimo lugar}} & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix} =$$

Por lo tanto, para toda $j \in \{1, \dots, n\}$

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial \Phi_i^j}{\partial x_1}(x) & \cdots & \frac{\partial \Phi_i^j}{\partial x_{n+1}}(x) \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} u_1 \\ \vdots \\ u_{n+1} \end{pmatrix} = \begin{cases} \frac{u_j}{x_i} + \left(-\frac{x_j}{x_i^2}\right) u_i & \text{si } i < j \\ \left(-\frac{x_{j+1}}{x_i^2}\right) u_i + \frac{u_{j+1}}{x_i} & \text{si } i \geq j \end{cases} \quad (1)$$

Mas aun, si ponemos

$$(u_1, \dots, u_{n+1}) := x_i \cdot (y_1, \dots, y_{i-1}, 0, y_i, \dots, y_n)$$

entonces, $d\Phi_x(u) = y$. Es decir, Φ es submersion. Por lo tanto, p es submersion.
Fin de observación 1.

Ahora si, veamos que p^* es inyectiva. Para esto, sean $\alpha, \beta \in \Omega^*(\mathbb{P}^n \mathbb{R})$ tales que $p^*\alpha = p^*\beta$. Es decir, para toda $x \in \mathbb{R}^n$ y $v_1, \dots, v_k \in T_x \mathbb{R}^n$ tenemos

$$(p^*\alpha)_x(v_1, \dots, v_k) = (p^*\beta)_x(v_1, \dots, v_k)$$

Es decir,

$$\alpha_{p(x)}(dp_x(v_1), \dots, dp_x(v_k)) = \beta_{p(x)}(dp_x(v_1), \dots, dp_x(v_k))$$

Como p y dp_x son suprayectivas, la ecuación anterior implica que $\alpha = \beta$.

Ahora, veamos que

$$\text{im } p^* = \left\{ \alpha \in \Omega^*(\mathbb{R}^{n+1} \setminus \{0\}) \mid f_\lambda^*(\alpha) = \alpha \text{ y } i_X \alpha = 0 \right\}$$

\subset) Usaremos las siguientes observaciones.

Observación 2. Para toda $x \in \mathbb{R}^{n+1}$, $d(\Phi_i)_x(x) = 0$.

Por (1), tenemos que para toda $j \in \{1, \dots, n\}$

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial \Phi_i^j}{\partial x_1}(x) & \cdots & \frac{\partial \Phi_i^j}{\partial x_{n+1}}(x) \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_{n+1} \end{pmatrix} = \begin{cases} \frac{x_j}{x_i} + \left(-\frac{x_j}{x_i^2}\right) x_i & \text{si } i < j \\ \left(-\frac{x_{j+1}}{x_i^2}\right) x_i + \frac{x_{j+1}}{x_i} & \text{si } i \geq j \end{cases} = 0$$

Por lo tanto, $d(\Phi_i)_x(x) = 0$.

Fin de observación 2.

Observación 3. Para toda $x \in \mathbb{R}^{n+1}$, $dp_x(x) = 0$.

$$\begin{aligned} dp_x(x) &= d\left(\varphi_i^{-1} \circ \Phi_i\right)_x(x) && \text{(el diagrama conmuta)} \\ &= d\left(\varphi_i^{-1}\right)_{\Phi(x)} \circ d(\Phi_i)_x(x) \\ &= d\left(\varphi_i^{-1}\right)_{\Phi(x)}(0) && \text{(por la observación 2)} \\ &= 0 \end{aligned}$$

Fin de observación 3.

Ahora si, veamos “ \subset ”. Supongamos que $\omega \in \Omega^*(\mathbb{P}^n \mathbb{R})$. Por definición de p , es claro que para toda $\lambda \neq 0$, $p \circ f_\lambda = p$. Entonces,

$$f_\lambda^*(p^*\omega) = (p \circ f_\lambda)^*(\omega) = p^*\omega$$

Donde la primera igualdad se cumple por que el pullback se comporta bien respecto a la composición. Por otro lado, simplemente evaluando tenemos

$$\begin{aligned} (i_X(p^*\omega))_x(X, \dots) &= (p^*\omega)_x(X_x, \dots) \\ &= (p^*\omega)_x(x, \dots) \\ &= \omega_{p(x)}(dp_x(x), \dots) \\ &= \omega_{p(x)}(0, \dots) && \text{(por la observación 3)} \\ &= 0 \end{aligned}$$

\supset) Usaremos las siguientes observaciones.

Observación 4. Para todo $\eta \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ y $z \in \mathbb{R}^n$, $\left(d\varphi_i^{-1}\right)_{\eta z} = d\left(\varphi_i^{-1}\right)_z$.

Como $\varphi_i(\eta z) = \varphi_i(z)$, entonces

$$\left(d\varphi_i^{-1}\right)_{\eta z} = (d\varphi_i)_{\varphi_i(\eta z)}^{-1} = (d\varphi_i)_{\varphi_i(z)}^{-1} = \left(d\varphi_i^{-1}\right)_z$$

Fin de observación 4.

Observación 5. Para todo $\lambda \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ y $x \in \mathbb{R}^{n+1} \setminus \{0\}$ tenemos

$$d(\Phi_i)_{\lambda x} = \frac{1}{\lambda} d(\Phi_i)_x$$

En efecto, esto es consecuencia inmediata de (1) (solo hay que factorizar $\frac{1}{\lambda}$).

Fin de observación 5.

Observación 6. Para toda $\lambda \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ y $x \in \mathbb{R}^{n+1} \setminus \{0\}$, $dp_{\lambda x}(v) = \frac{1}{\lambda} dp_x(v)$.
 Simplemente evaluando,

$$\begin{aligned}
 dp_{\lambda x} &= d\left(\varphi_i^{-1} \circ \Phi_i\right)_{\lambda x} \\
 &= d\left(\varphi_i^{-1}\right)_{\Phi_i(\lambda x)} \circ d(\Phi_i)_{\lambda x} \\
 &= d\left(\varphi_i^{-1}\right)_{\Phi_i(\lambda x)} \left(\frac{1}{\lambda} d(\Phi_i)_x\right) && \text{(por la observación 5)} \\
 &= \frac{1}{\lambda} \cdot d\left(\varphi_i^{-1}\right)_{\Phi_i(\lambda x)} \circ d(\Phi_i)_x \\
 &= \frac{1}{\lambda} \cdot d\left(\varphi_i^{-1}\right)_{\lambda \Phi_i(x)} \circ d(\Phi_i)_x && (\Phi_i \text{ es lineal}) \\
 &= \frac{1}{\lambda} \cdot d\left(\varphi_i^{-1}\right)_{\Phi_i(x)} \circ d(\Phi_i)_x && \text{(por la observación 4)} \\
 &= \frac{1}{\lambda} \cdot d\left(\varphi_i^{-1} \circ \Phi_i\right)_x = \frac{1}{\lambda} \cdot dp_x
 \end{aligned}$$

Fin de observación 6.

Observación 7. Para toda $x \in \mathbb{R}^{n+1} \setminus \{0\}$, $\ker dp_x = p(x) = \{\lambda x \mid \lambda \neq 0\}$:
 Por la observación 3, y la linealidad de la diferencial, $p(x) \subset \ker dp_x$. Conversamente, supongamos que $u \in \ker dp_x$. Veamos que existe $\lambda \neq 0$ tal que $u = \lambda x$. Como $u \in \ker dp_x$, entonces

$$0 = dp_x(u) = d\left(\varphi_i^{-1} \circ \Phi_i\right)_x(u) = d\left(\varphi_i^{-1}\right)_{\Phi_i(x)}(d(\Phi_i)_x)$$

Como φ_i es carta, lo anterior implica que $d(\Phi)_x = 0$. Además por (1), tenemos que

$$\begin{aligned}
 \frac{u_j x_i - x_j u_i}{x_i^2} &= 0 \text{ si } i < j \\
 \frac{-x_{j+1} u_i - u_{j+1} x_i}{x_i^2} &= 0 \text{ si } i \geq j
 \end{aligned}$$

Entonces,

$$\begin{aligned}
 u_j &= \left(\frac{u_i}{x_i}\right) x_j \text{ si } i < j \\
 u_{j+1} &= \left(\frac{u_i}{x_i}\right) x_{j+1} \text{ si } i \geq j
 \end{aligned}$$

Por lo tanto, $\lambda := \frac{u_i}{x_i}$ cumple lo deseado.
Fin de observación 7.

Observación 8. Supongamos que $\alpha \in \Omega^*(\mathbb{R}^{n+1} \setminus \{0\})$ es tal que $i_X \alpha = 0$ y $f_\lambda^*(\alpha) = \alpha$. Si $x, x' \in \mathbb{R}^{n+1}$ y $u_1, \dots, u_k \in T_x$ y $u'_1, \dots, u'_k \in T_{x'}(\mathbb{R}^{n+1} \setminus \{0\})$

son tales que $p(x) = p(x')$ y $dp_x(u_i) = dp_{x'}(u'_i)$, entonces

$$\alpha_x(u_1, \dots, u_k) = \alpha_{x'}(u'_1, \dots, u'_k)$$

Como $p(x) = p(x')$, existe $\lambda \neq 0$ tal que $x' = \lambda x$. Entonces, para toda $i \in \{1, \dots, n\}$

$$dp_x(u_i) = dp_{x'}(u'_i) = dp_{\lambda x}(u'_i) = \frac{1}{\lambda} \cdot dp_x(u'_i) = dp_x\left(\frac{1}{\lambda} \cdot u'_i\right)$$

donde la penúltima igualdad es consecuencia de la observación 6. Entonces, para toda i , $u_i - \frac{1}{\lambda}u'_i \in \ker dp_x$. Por la observación 7, lo anterior implica que existe una $\eta_i \neq 0$ tal que $u_i - \frac{1}{\lambda}u'_i = \eta_i x$. En particular, para $i = 1$

$$\alpha_x\left(u_1 - \frac{1}{\lambda}u'_1, u_2, \dots, u_k\right) = \alpha_x(\eta_1 x, u_2, \dots, u_k) = \eta_1 \cdot \alpha_x(x, u_2, \dots, u_k) = 0$$

donde la ultima igualdad se cumple porque $i_X \alpha = 0$. Luego,

$$\alpha_x(u_1, u_2, \dots, u_k) = \alpha_x\left(\frac{1}{\lambda}u'_1, u_2, \dots, u_k\right) \quad (2)$$

De la misma manera,

$$\alpha_x\left(\frac{1}{\lambda}u'_1, u_2 - \frac{1}{\lambda}u'_2, \dots, u_k\right) = \alpha_x\left(\frac{1}{\lambda}u'_1, \eta_2 x, \dots, u_k\right) = 0$$

De donde,

$$\alpha_x\left(\frac{1}{\lambda}u'_1, u_2, \dots, u_k\right) = \alpha_x\left(\frac{1}{\lambda}u'_1, \frac{1}{\lambda}u'_2, \dots, u_k\right)$$

Juntando esto con (2) obtenemos

$$\alpha_x(u_1, \dots, u_k) = \alpha_x\left(\frac{1}{\lambda}u'_1, \frac{1}{\lambda}u'_2, \dots, u_k\right)$$

Continuando (inductivamente) de la misma manera obtenemos la primera de la siguiente cadena de igualdades

$$\begin{aligned} \alpha_x(u_1, \dots, u_k) &= \alpha_x\left(\frac{1}{\lambda}u'_1, \dots, \frac{1}{\lambda}u'_k\right) \\ &= (f_\lambda^* \alpha)_x\left(\frac{1}{\lambda}u'_1, \dots, \frac{1}{\lambda}u'_k\right) \\ &= \alpha_{f_\lambda(x)}\left(d(f_\lambda^*)_x\left(\frac{1}{\lambda}u'_1\right), \dots, d(f_\lambda^*)_x\left(\frac{1}{\lambda}u'_k\right)\right) \\ &= \alpha_{\lambda x}\left(\lambda \cdot \frac{1}{\lambda} \cdot u'_1, \dots, \lambda \cdot \frac{1}{\lambda} \cdot u'_k\right) \\ &= \alpha_{x'}(u'_1, \dots, u'_k) \end{aligned}$$

Fin de observación 8.

Ahora si, veamos “ \supset ”. Supongamos que $\alpha \in \Omega^*(\mathbb{R}^{n+1} \setminus \{0\})$ es tal que $i_X \alpha = 0$ y $f_\lambda^*(\alpha) = \alpha$. Sea $\omega \in \Omega^*(\mathbb{P}^n \mathbb{R})$ tal que para toda $y \in \mathbb{P}^n \mathbb{R}$ y $v_1, \dots, v_k \in T_y(\mathbb{P}^n \mathbb{R})$

$$\omega_y(v_1, \dots, v_k) = \alpha_x(u_1, \dots, u_k)$$

donde $x \in \mathbb{R}^{n+1} \setminus \{0\}$ y $u_1, \dots, u_k \in \mathbb{R}^{n+1}$ son tales que $p(x) = y$ y $dp_x(u_i) = v_i$ para toda i . Por la observación 8, ω esta bien definida. Ademas, es claro que satisface

$$p^* \omega_x(u_1, \dots, u_k) = \omega_{p(x)}(dp_x(u_1), \dots, dp_x(u_k)) = \alpha_x(u_1, \dots, u_k)$$

donde la ultima igualdad es consecuencia directa de la definici3n de ω . \square

3. Supongamos que M es una variedad Riemanniana de dimensi3n n y $p \in M$. Muestre que existe una vecindad U de p y n campos vectoriales X_1, \dots, X_n tales que

$$\nabla_{X_i} X_j(p) = 0, \quad i, j = 1, \dots, n$$

donde ∇ es la conexi3n de Levi-Civita de M .

Demostraci3n. Este resultado se demostr3 en el teorema 1 de las notas 4.9 del semestre pasado, pero lo escribimos por completud.

Veamos que los campos vectoriales can3nicos de la carta exponencial cumplen lo deseado. Recordemos que para $\epsilon > 0$ suficientemente peque1o, la aplicaci3n

$$\begin{aligned} \exp_p : B(0_p, \epsilon) \subset T_p M &\rightarrow M \\ v &\mapsto \gamma_v(1) \end{aligned}$$

es un difeomorfismo en su imagen, digamos V (aquí, γ_v es la geodésica tal que $\gamma(0) = p$ y $\gamma'(0) = v$). En particular, \exp_p es una carta local en p . Fijemos una base ortonormal (e_1, \dots, e_n) de $T_p M$. Si $q \in V$ es tal que $m = \exp_p(x_1 e_1 + \dots + x_n e_n)$, decimos que m tiene coordenadas (x_1, \dots, x_n) . Usaremos las siguientes observaciones.

Observaci3n 2. Si $\lambda \in \mathbb{R}$, $p \in M$, $v \in T_p M$, y $v' = \lambda v$, entonces $\gamma_{v'}(t) = \gamma_v(\lambda t)$. Claramente, $\gamma_v(\lambda t)$ es geodésica y por una cuenta directa, $\gamma'_{v'}(0) = \lambda \gamma'_v(0) = \lambda v$.
Fin de observaci3n 2.

Observaci3n 3. Para todo $v \in B(0_p, \epsilon)$ y todo t en el intervalo de definici3n de γ_v , $\exp_p(tv) = \gamma_v(s)$.

Es consecuencia inmediata de la observaci3n anterior.

Fin de observaci3n 3.

Observación 4. Para todo $p \in M$, $d(\exp_p)_{0_m} = \text{id}_{T_p M}$.

Por la observación anterior,

$$d(\exp_p)_{0_m}(v) = \underbrace{\frac{d}{dt}\bigg|_{t=0} \left(\underbrace{\exp_m(tv)}_{\gamma_v(t)} \right)}_v$$

Fin de observación 4.

Ahora, veamos que los símbolos de Christoffel de la carta \exp_p se anulan en p . Tenemos por definición de la base $\frac{\partial}{\partial x_i}$, que para toda $v \in T_p M$

$$\begin{aligned} g\left(\frac{\partial}{\partial x_i}, \frac{\partial}{\partial x_j}\right)(\exp_p(v)) &= g_{\exp_p(v)}\left(d(\exp_p)_v(e_i), d(\exp_p)_v(e_j)\right) \\ &= g_p(e_i, e_j) \quad (\text{por la observación 4}) \\ &= \delta_{ij} \end{aligned}$$

Por otro lado, notemos que si $v = (v_1, \dots, v_n)$, entonces

$$(\exp_p^{-1} \circ \gamma_v)(t) = \exp_p^{-1}(\gamma_v(t)) = \exp_p^{-1}(\gamma_{t \cdot v}(1)) = t \cdot v = t \cdot (v_1, \dots, v_n)$$

Si denotamos $\exp_p^{-1} \circ \gamma_v = (x_1, \dots, x_n)$ entonces, para toda i , $\dot{x}_i = v_i$ y $\ddot{x}_i = 0$. Como γ_v es geodésica, entonces para toda t en el intervalo de definición de γ_v , se satisface la ecuación de las geodésicas y por lo tanto para toda k ,

$$0 = \ddot{x}_k + \sum_{i,j} \Gamma_{ij}^k(\gamma_v(t)) \dot{x}_i \dot{x}_j = 0 + \sum_{i,j} \Gamma_{ij}^k(\gamma_v(t)) v_i v_j$$

En particular, para $t = 0$

$$\sum_{i,j} \Gamma_{ij}^k(p) v_i v_j = 0$$

Como esto es para toda $v \in B(0_p, \epsilon)$, (escogiendo las v 's adecuadas y usando la simetría de ∇) lo anterior implica que $\Gamma_{ij}^k(p) = 0$ para toda i, j, k . Pero por definición, Γ_{ij}^k satisface la primera de las siguientes igualdades

$$\nabla_{\frac{\partial}{\partial x_i}} \frac{\partial}{\partial x_j} = \sum_k \Gamma_{ij}^k \frac{\partial}{\partial x_k} = 0$$

Por lo tanto, $X_i := \frac{\partial}{\partial x_i}$ cumple lo deseado. \square

4. Diga si la siguiente afirmación es verdadera o falsa y justifique su respuesta demostrándola o dando un contraejemplo: si ∇ es la conexión de Levi-Civita de una variedad Riemanniana (M, g) y si X es un campo vectorial $\nabla_X X = 0$ en todo punto de M , entonces las curvas integrales de X son geodésicas.

Demostración. Verdadera: Supongamos que $\gamma : I \rightarrow M$ es una curva integral de X , es decir $X|_\gamma = \gamma'$. Entonces,

$$\frac{D\gamma'(t)}{dt} = \nabla_{\gamma'(t)}X = \nabla_X X = 0$$

Donde la primera igualdad se cumple por el inciso (c) de la siguiente proposición de Do Carmo,

2.2 PROPOSITION. *Let M be a differentiable manifold with an affine connection ∇ . There exists a unique correspondence which associates to a vector field V along the differentiable curve $c: I \rightarrow M$ another vector field $\frac{DV}{dt}$ along c , called the covariant derivative of V along c , such that:*

- a) $\frac{D}{dt}(V + W) = \frac{DV}{dt} + \frac{DW}{dt}$.
- b) $\frac{D}{dt}(fV) = \frac{df}{dt}V + f\frac{DV}{dt}$, where W is a vector field along c and f is a differentiable function on I .
- c) If V is induced by a vector field $Y \in \mathcal{X}(M)$, i.e., $V(t) = Y(c(t))$, then $\frac{DV}{dt} = \nabla_{dc/dt}Y$.

Por lo tanto γ es geodésica. □

Diego Leipen Lara
418002038