Tarea 12

Diego Leipen Lara

Metodos Variacionales

1. Prueba que $H^1(\mathbb{R}^N) \subset D^{1,2}(\mathbb{R}^N)$ y que la inclusión es continua.

Demostración. Sea $u \in H^1(\mathbb{R}^N)$. Por el teorema de encaje de Sobolev, existe $C > 0$ tal que

$$|u|_{2^*} \leq C\|u\|_1 < \infty.$$

Por lo tanto, $u \in L^{2^*}(\mathbb{R}^N)$ y como $D_i u \in L^2(\mathbb{R}^N)$ para todo i (pues $u \in H^1(\mathbb{R}^N)$), entonces $u \in D^{1,2}(\mathbb{R}^N)$. Además, claramente

$$\|u\| \leq \|u\|_1 \qquad \forall u \in H^1(\mathbb{R}^N)$$

donde $\|\cdot\|$ es la norma usual en $D^{1,2}(\mathbb{R}^N)$. Por lo tanto la inclusión es continua. □

Lema 1. Sea $u \in L^1_{\text{loc}}(\mathbb{R}^N)$. Si u es diferenciable en $\mathbb{R}^N \setminus \{0\}$ y u es débilmente diferenciable en $\mathbb{R}^N$,

$$\frac{\partial u}{\partial x_i}(x) = D_i u(x) \text{ pct } x \in \mathbb{R}^N$$

Demostración. Para todo $\varphi \in C_c^\infty(\mathbb{R}^N \setminus \{0\})$,

$$\int_{\mathbb{R}^N} \frac{\partial u}{\partial x_i}\varphi = -\int_{\mathbb{R}^N} u\frac{\partial \varphi}{\partial x_i} = \int_{\mathbb{R}^N} (D_i u)\varphi.$$

Por lo tanto, $\frac{\partial u}{\partial x_i}(x) = D_i u(x)$ pct $x \in \mathbb{R}^N \setminus \{0\}$. En particular, tenemos lo deseado. □

2. Dado $\gamma > 0$ considera la función

$$u_\gamma(x) := \left(\frac{1}{1+|x|^\gamma}\right)^{\frac{N-2}{2}}, \qquad x \in \mathbb{R}^N.$$

(a) ¿Para que valores de γ se cumple que $u_\gamma \in D^{1,2}(\mathbb{R}^N)$?

(b) ¿Para que valores de γ se cumple que $u_\gamma \in H^1(\mathbb{R}^N)$?

Demostración. Veamos que si $\gamma > 0$, entonces u_γ es débilmente diferenciable en $\mathbb{R}^N$. Denotamos

$$v_i(x) := \gamma\left(\frac{2-N}{2}\right)\frac{|x|^{\gamma-2}}{(1+|x|^\gamma)^{N/2}}x_i.$$

Como $\frac{N-2}{2} > 0$ (pues $N \geq 3$) y $1 \leq 1 + |x|^\gamma$ para todo $x \in \mathbb{R}^N$, entonces $|u_\gamma(x)| \leq 1$ para todo $x \in \mathbb{R}^N$. En particular, $u_\gamma \in L^1_{\text{loc}}(\mathbb{R}^N)$. Además,

$$\begin{aligned}
|v_i(x)| &= \left|\gamma\left(\frac{2-N}{2}\right)\frac{|x|^{\gamma-2}}{(1+|x|^\gamma)^{N/2}}x_i\right| \\
&\leq \gamma\left(\frac{N-2}{2}\right)\frac{|x|^{\gamma-1}}{(1+|x|^\gamma)^{N/2}} \\
&\leq \gamma\left(\frac{N-2}{2}\right)|x|^{\gamma-1}. && ((1+|x|^\gamma)^{N/2} \geq 1 \text{ para todo } x \in \mathbb{R}^N)
\end{aligned}$$

La Proposición 13.31 asegura que $|x|^{\gamma-1} \in L^1_{\text{loc}}(\mathbb{R}^N)$ si $(\gamma-1)+N>0$. Como $\gamma>0$ y $N\geq 3$, entonces $v_i \in L^1_{\text{loc}}(\mathbb{R}^N)$. Por otro lado, elegimos $\psi \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^N)$ tal que $0 \leq \psi(x) \leq 1$ para todo $x \in \mathbb{R}^n$, $\psi(x)=0$ si $|x|\leq 1$ y $\psi(x)=1$ si $|x|\geq 2$, definimos $\psi_k(x) \coloneqq \psi(kx)$. Entonces $0 \leq \psi_k(x) \leq 1$ para todo $x \in \mathbb{R}^N$ y

$$\psi_k(x) = 0 \text{ si } |x| \leq 1/k \qquad \text{y} \qquad \psi_k(x) = 1 \text{ si } |x| \geq 2/k.$$

Observa que u_γ es diferenciable en $\mathbb{R}^N \setminus \{0\}$ y que

$$\frac{\partial u_\gamma}{\partial x_i}(x) = v_i(x) \text{ si } x \neq 0.$$

Por tanto, $u_\gamma \psi_k \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}^N)$ e integrando por partes obtenemos

$$\int_{\mathbb{R}^N} u_\gamma \psi_k \frac{\partial \varphi}{\partial x_i} + \int_{\mathbb{R}^N} \left(u_\gamma \frac{\partial \psi_k}{\partial x_i} + \psi_k \frac{\partial u_\gamma}{\partial x_i} \right) \varphi = 0 \qquad \forall \varphi \in \mathcal{C}^\infty_c(\mathbb{R}^N). \tag{1}$$

Ahora calcularemos el límite cuando $k \to \infty$ de cada uno de los sumandos. Sea $\varphi \in \mathcal{C}^\infty_c(\mathbb{R}^N)$ las funciones $u_\gamma \psi_k \frac{\partial \varphi}{\partial x_i}$ y $u_\gamma \frac{\partial \varphi}{\partial x_i}$ son integrables en $\mathbb{R}^N$ y satisfacen

$$u_\gamma \psi_k \frac{\partial \varphi}{\partial x_i}(x) \to u_\gamma \frac{\partial \varphi}{\partial x_i}(x) \text{ pct } x \in \mathbb{R}^N,$$

$$\left| u_\gamma \psi_k \frac{\partial \varphi}{\partial x_i}(x) \right| \leq \left| u_\gamma \frac{\partial \varphi}{\partial x_i}(x) \right| \text{ para todo } k \in \mathbb{N} \text{ y pct } x \in \mathbb{R}^N.$$

Del teorema de convergencia dominada se sigue que

$$\lim_{k\to\infty} \int_{\mathbb{R}^N} u_\gamma \psi_k \frac{\partial \varphi}{\partial x_i} = \int_{\mathbb{R}^N} u_\gamma \frac{\partial \varphi}{\partial x_i}. \tag{2}$$

Análogamente, las funciones $\psi_k \frac{\partial u_\gamma}{\partial x_i} \varphi$ y $\frac{\partial u_\gamma}{\partial x_i} \varphi$ son integrables en $\mathbb{R}^N$ y satisfacen

$$\psi_k \frac{\partial u_\gamma}{\partial x_i} \varphi(x) \to \frac{\partial u_\gamma}{\partial x_i} \varphi \text{ pct } x \in \mathbb{R}^N,$$

$$\left| \psi_k \frac{\partial u_\gamma}{\partial x_i} \varphi(x) \right| \leq \left| \frac{\partial u_\gamma}{\partial x_i} \varphi(x) \right| \text{ para todo } k \in \mathbb{N} \text{ y pct } x \in \mathbb{R}^N.$$

Del teorema de convergencia dominada se sigue que

$$\lim_{k\to\infty} \int_{\mathbb{R}^N} \psi_k \frac{\partial u_\gamma}{\partial x_i} \varphi = \int_{\mathbb{R}^N} \frac{\partial u_\gamma}{\partial x_i} \varphi. \tag{3}$$

Por otro lado, como $\frac{\partial \psi_k}{\partial x_i}(x) = k \frac{\partial \psi}{\partial x_i}(kx)$, se tiene que

$$\left\| \frac{\partial \psi_k}{\partial x_i} \right\|_\infty \leq k \left\| \frac{\partial \psi}{\partial x_i} \right\|_\infty.$$

Observa además que $\operatorname{sop}(\frac{\partial \psi_k}{\partial x_i}) = A^N(\frac{1}{k}, \frac{2}{k})$. En consecuencia,

$$\begin{aligned}
\left| \int_{\mathbb{R}^N} u_\gamma \frac{\partial \psi_k}{\partial x_i} \varphi \right| &\leq \int_{A^N(\frac{1}{k},\frac{2}{k})} \left| u_\gamma \frac{\partial \psi_k}{\partial x_i} \varphi \right| \\
&\leq \left\| \frac{\partial \psi_k}{\partial x_i} \right\|_\infty \|\varphi\|_\infty \int_{A^N(\frac{1}{k},\frac{2}{k})} \left(\frac{1}{1+|x|^\gamma} \right)^{\frac{N-2}{2}} dx \\
&\leq k \left\| \frac{\partial \psi}{\partial x_i} \right\|_\infty \|\varphi\|_\infty \, \omega_N \int_{\frac{1}{k}}^{\frac{2}{k}} \left(\frac{1}{1+t^\gamma} \right)^{\frac{N-2}{2}} t^{N-1} \, dt && \text{(Integración radial)} \\
&\leq k \left\| \frac{\partial \psi}{\partial x_i} \right\|_\infty \|\varphi\|_\infty \, \omega_N \int_{\frac{1}{k}}^{\frac{2}{k}} t^{N-1} \, dt && \left(\tfrac{1}{1+t^\gamma} \leq 1 \text{ para todo } t \in \mathbb{R}\right) \\
&= \left\| \frac{\partial \psi}{\partial x_i} \right\|_\infty \|\varphi\|_\infty \frac{\omega_N}{N-1} \left(\frac{2^N - 1}{k^{N-1}} \right) \xrightarrow{k\to\infty} 0.
\end{aligned}$$

De donde,

$$\lim_{k\to\infty}\int_{\mathbb{R}^N} u_\gamma \frac{\partial \psi_k}{\partial x_i}\varphi = 0. \tag{4}$$

De (1), (2), (3), y (4) se sigue que

$$\int_{\mathbb{R}^N} u_\gamma \frac{\partial \varphi}{\partial x_i} + \int_{\mathbb{R}^N} v_i \varphi = 0 \qquad \forall \varphi \in \mathcal{C}_c^\infty(\mathbb{R}^N),$$

obteniendo lo deseado.

En lo que sigue, denotamos por B_1 a la bola de radio 1 centrada en el origen.

Veamos que $D_i(u_\gamma)$ existe y pertenece a $L^2(\mathbb{R}^N)$ si y solo si $\gamma > 1$. Supongamos que $\gamma > 1$. Como $\gamma > 0$, entonces $D_i(u_\gamma)$ es débilmente diferenciable en $\mathbb{R}^N$ y calculando directamente, tenemos

$$\begin{aligned}
\int_{\mathbb{R}^N} \left| \frac{|x|^{\gamma-2}}{(1+|x|^\gamma)^{N/2}} x_i \right|^2 dx &\leq \int_{\mathbb{R}^N} \frac{|x|^{2\gamma-2}}{(1+|x|^\gamma)^N}\, dx \\
&= \int_{B_1} \frac{|x|^{2\gamma-2}}{(1+|x|^\gamma)^N}\, dx + \int_{\mathbb{R}^N\setminus B_1} \frac{|x|^{2\gamma-2}}{(1+|x|^\gamma)^N}\, dx \\
&\leq \underbrace{\int_{B_1} |x|^{2\gamma-2}\, dx}_{=:I_1} + \underbrace{\int_{\mathbb{R}^N\setminus B_1} |x|^{2\gamma-2-\gamma N}\, dx}_{I_2} \qquad (1+|x|^\gamma \leq |x|^\gamma)
\end{aligned}$$

Por la Proposición 13.31, I_1 es finita si y solo si $(2\gamma-2)+N>0$ y I_2 es finita si y solo si $(2\gamma-2-\gamma N)+N<0$. Usando que $\gamma > 1$ es fácil verificar ambas desigualdades. Conversamente, supongamos que $D_i(u_\gamma)$ existe y pertenece a $L^2(\mathbb{R}^N)$. Por el lema 1,

$$D_i(u_\gamma)(x) = \frac{\partial u_\gamma}{\partial x_i} = \gamma\left(\frac{2-N}{2}\right)\frac{|x|^{\gamma-2}}{(1+|x|^\gamma)^{N/2}} x_i \qquad \text{pct } x \in \mathbb{R}^N.$$

Como $D_i(u_\gamma) \in L^2(\Omega)$, lo anterior implica que

$$\gamma\left(\frac{N-2}{2}\right)\int_{\mathbb{R}^N}\left|\frac{|x|^{\gamma-2}}{(1+|x|^\gamma)^{N/2}} x_i\right|^2 dx = \int_{\mathbb{R}^N} |D_i(u_\gamma)|^2\, dx < \infty.$$

Sumando sobre $i = 1, \ldots, N$ obtenemos

$$\int_{\mathbb{R}^N} \frac{|x|^{2\gamma-2}}{(1+|x|^\gamma)^N}\, dx = \int_{\mathbb{R}^N} \frac{|x|^{2\gamma-4}}{(1+|x|^\gamma)^N}|x|^2\, dx < \infty.$$

Por otro lado, para todo $x \in \mathbb{R}^N$ con $|x| > 1$ tenemos

$$\frac{(1+|x|^\gamma)^N}{|x|^{\gamma N}} = \frac{\sum_{k=0}^N \binom{N}{k}|x|^{\gamma k}}{|x|^{\gamma N}} = \sum_{k=0}^N \binom{N}{k}|x|^{\gamma k-\gamma N} \leq \sum_{k=0}^N \binom{N}{k} =: C_N. \tag{5}$$

Por lo tanto,

$$\int_{\mathbb{R}^N\setminus B_1} |x|^{2\gamma-2-\gamma N}\, dx \leq \int_{\mathbb{R}^N} \frac{|x|^{2\gamma-2}}{|x|^{\gamma N}}\, dx \leq C_N \int_{\mathbb{R}^N} \frac{|x|^{2\gamma-2}}{(1+|x|^\gamma)^N}\, dx < \infty.$$

Por la Proposición 13.31, esto es si y solo si $(2\gamma-2-\gamma N)+N<0$, o equivalentemente, $\gamma > 1$.

Veamos que $u_\gamma \in L^{2*}(\mathbb{R}^N)$ si y solo si $\gamma > 1$. Supongamos que $\gamma > 1$. Calculando directamente,

$$\begin{aligned}
\int_{\mathbb{R}^N} |u_\gamma|^{2^*} &= \int_{\mathbb{R}^N} \left(\frac{1}{1+|x|^\gamma}\right)^N dx \qquad \text{(pues } \left(\tfrac{N-2}{2}\right) 2^* = N\text{)} \\
&= \int_{B_1} \left(\frac{1}{1+|x|^\gamma}\right)^N dx + \int_{\mathbb{R}^N \setminus B_1} \left(\frac{1}{1+|x|^\gamma}\right)^N dx \\
&\leq \underbrace{\int_{B_1} 1\, dx}_{I_3} + \underbrace{\int_{\mathbb{R}^N \setminus B_1} |x|^{-\gamma N}\, dx}_{I_4}
\end{aligned}$$

Como B_1 es acotado, I_3 es finita y por la Proposición 13.31, I_4 es finita si y solo si $-\gamma N + N < 0$. Usando que $\gamma > 1$ es fácil verificar esta desigualdad. Conversamente, supongamos que $u_\gamma \in L^{2^*}(\mathbb{R}^N)$. Por (5),

$$\int_{\mathbb{R}^N \setminus B_1} \frac{1}{|x|^{\gamma N}} \leq C_N \int_{\mathbb{R}^N \setminus B_1} \left(\frac{1}{1+|x|^\gamma}\right)^N \leq C_N \int_{\mathbb{R}^N} \left(\frac{1}{1+|x|^\gamma}\right)^N = C_N \int_{\mathbb{R}^N} |u_\gamma|^2 < \infty.$$

Pero por la Proposición 13.31, esto implica que $-\gamma N + N < 0$, o equivalentemente, $\gamma > 1$.

Veamos que $u_\gamma \in L^2(\mathbb{R}^N)$ si y solo si $\gamma > \frac{N}{N-2}$. Supongamos que $\gamma > \frac{N}{N-2}$. Calculando directamente,

$$\begin{aligned}
\int_{\mathbb{R}^N} |u_\gamma|^2 &= \int_{\mathbb{R}^N} \left(\frac{1}{1+|x|^\gamma}\right)^{N-2} dx \\
&= \int_{B_1} \left(\frac{1}{1+|x|^\gamma}\right)^{N-2} dx + \int_{\mathbb{R}^N \setminus B_1} \left(\frac{1}{1+|x|^\gamma}\right)^{N-2} dx \\
&\leq \underbrace{\int_{B_1} 1\, dx}_{=:I_5} + \underbrace{\int_{\mathbb{R}^N \setminus B_1} |x|^{-\gamma(N-2)}\, dx}_{=:I_6}
\end{aligned}$$

Como B_1 es acotado, I_5 es finita y por la Proposición 13.31, I_6 es finita si y solo si $-\gamma(N-2) + N < 0$. Usando que $\gamma > \frac{N}{N-2}$ es fácil verificar esta desigualdad. Conversamente, supongamos que $u_\gamma \in L^2(\mathbb{R}^N)$. Para todo $x \in \mathbb{R}^N$ con $|x| \geq 1$,

$$\frac{(1+|x|^\gamma)^{N-2}}{|x|^{\gamma(N-2)}} = \frac{\sum_{k=0}^{N-2} \binom{N-2}{k} |x|^{\gamma k}}{|x|^{\gamma(N-2)}} = \sum_{k=0}^{N-2} \binom{N-2}{k} |x|^{\gamma k - \gamma(N-2)} \leq \sum_{k=0}^{N-2} \binom{N-2}{k} =: C_{N-2}.$$

Entonces

$$\int_{\mathbb{R}^N \setminus B_1} \frac{1}{|x|^{\gamma(N-2)}} \leq C_{N-2} \int_{\mathbb{R}^N \setminus B_1} \left(\frac{1}{1+|x|^\gamma}\right)^{N-2} \leq C_{N-2} \int_{\mathbb{R}^N} \left(\frac{1}{1+|x|^\gamma}\right)^{N-2} = C_{N-2} \int_{\mathbb{R}^N} |u_\gamma|^2 < \infty.$$

Pero por la Proposición 13.31, esto implica que $-\gamma(N-2) + N < 0$, o equivalentemente, $\gamma > \frac{N}{N-2}$.

En resumen,

- $D_i(u_\gamma)$ existe y pertenece a $L^2(\mathbb{R}^N)$ si y solo si $\gamma > 1$.
- $u_\gamma \in L^2(\mathbb{R}^N)$ si y solo si $\gamma > \frac{N}{N-2}$.
- $u_\gamma \in L^{2^*}(\mathbb{R}^N)$ si y solo si $\gamma > 1$.

Por lo tanto:

(a) $u_\gamma \in D^{1,2}(\mathbb{R}^N)$ si y solo si $\gamma > 1$.

(b) $u_\gamma \in H^1(\mathbb{R}^N)$ si y solo si $\gamma > \frac{N}{N-2}$.

$\square$

3. Prueba que $D^{1,2}(\mathbb{R}^N)$ no esta contenido en $H^1(\mathbb{R}^N)$.

Demostración. Considera u_γ con $\gamma \in \left(1, \frac{N}{N-2}\right)$. $\square$

4. Prueba que si Ω es un dominio acotado, entonces $D_0^{1,2}(\Omega) = H_0^1(\Omega)$ y que las normas de ambos espacios son equivalentes.

Demostración. Denotamos por $\|\cdot\|$ a la norma usual en $D^{1,2}(\mathbb{R}^N)$. Sea $u \in D_0^{1,2}(\Omega)$. Por definición, existe $\varphi_k \in C_c^\infty(\Omega)$ tal que $\varphi_k \to u$ en $D^{1,2}(\mathbb{R}^N)$. Por otro lado, la Proposición 5.2 asegura que existe $C > 0$ con

$$|v|_{L^{2^*}(\mathbb{R}^N)} \leq C\|v\| \qquad \forall v \in D^{1,2}(\mathbb{R}^N). \tag{6}$$

Pero como Ω es acotado,

$$|\varphi_k - u|_{L^2(\Omega)} \leq |\Omega|^{\frac{2^*-2}{2^*2}} |\varphi_k - u|_{L^{2^*}(\Omega)} \leq |\Omega|^{\frac{2^*-2}{2^*2}} |\varphi_k - u|_{L^{2^*}(\mathbb{R}^N)}. \tag{7}$$

(cf. Corolario 1.7.) Juntando (6) y (7) obtenemos

$$|\varphi_k - u|_{L^2(\Omega)} \leq C|\Omega|^{\frac{2^*-2}{2^*2}} \|\varphi_k - u\| \xrightarrow{k\to\infty} 0.$$

De donde,

$$\|\varphi_k - u\|_{H^1(\Omega)}^2 = |\varphi_k - u|_{L^2(\Omega)}^2 + \int_\Omega |\nabla(\varphi_k - u)|^2 = |\varphi_k - u|_{L^2(\Omega)}^2 + \|\varphi_k - u\|^2 \xrightarrow{k\to\infty} 0.$$

Por lo tanto, $u \in H_0^1(\Omega)$. Conversamente, sea $u \in H_0^1(\Omega)$. Por definición existe $\varphi_k \in C_c^\infty(\Omega)$ tal que $\varphi_k \to u$ en $H^1(\Omega)$. Entonces

$$\begin{aligned} \|\varphi_k - u\|^2 &= \int_\Omega |\nabla(\varphi_k - u)|^2 && (\mathrm{sop}(\varphi_k) \subset\subset \Omega \text{ y } \mathrm{sop}(u) \subset\subset \Omega) \\ &\leq |\varphi_k - u|_{L^2(\Omega)}^2 + \int_\Omega |\nabla(\varphi_k - u)|^2 = \|\varphi_k - u\|_{H^1(\Omega)}^2 \xrightarrow{k\to\infty} 0 \end{aligned}$$

Por lo tanto, $u \in D_0^{1,2}(\Omega)$. Esto demuestra que

$$D_0^{1,2}(\Omega) = H_0^1(\Omega).$$

Por otro lado,

$$\|u\|^2 = \int_\Omega |\nabla u|^2 \leq \underbrace{|u|_{L^2(\Omega)}^2 + \int_\Omega |\nabla u|^2}_{\|u\|_{H^1(\Omega)}^2} \leq C' \int_\Omega |\nabla u|^2 + \int_\Omega |\nabla u|^2 = (C'+1)\|u\|,$$

para todo $u \in H_0^1(\Omega) = D_0^{1,2}(\Omega)$, donde C' es inducida por la desigualdad de Poincaré. Por lo tanto, las normas $\|\cdot\|$ y $\|\cdot\|_1$ son equivalentes en $D_0^{1,2}(\Omega) = H_0^1(\Omega)$. $\square$

5. Si $u_k \rightharpoonup u$ débilmente en $D^{1,2}(\mathbb{R}^N)$ y $p \in [1, 2^*)$, entonces una subsucesión de (u_k) cumple que

$$\begin{gathered} u_k \to u \text{ en } L_{\mathrm{loc}}^p(\mathbb{R}^N), \\ u_k(x) \to u(x) \text{ pct } x \in \Omega. \end{gathered}$$

Demostración. Supongamos que $u_k \rightharpoonup u$ débilmente en $D^{1,2}(\mathbb{R}^N)$ y que $p \in [1, 2^*)$. Sea Θ un subconjunto abierto y acotado de $\mathbb{R}^N$. Elegimos $\varphi \in \mathcal{C}_c^\infty(\mathbb{R}^N)$ tal que $0 \leq \varphi \leq 1$ y $\varphi(x) = 1$ para todo $x \in \Theta$. Sea Ω un abierto acotado tal que $\mathrm{sop}(\varphi) \subset \Omega$. La función

$$\begin{aligned} \Phi : D^{1,2}(\mathbb{R}^N) &\to H_0^1(\Omega) \\ v &\mapsto \varphi v \end{aligned}$$

es claramente lineal y además es continua porque

$$
\begin{aligned}
\|\varphi v\|_{H^1(\Omega)}^2 &= \int_\Omega \left(|\nabla(\varphi v)|^2 + |\varphi v|^2\right) \\
&= \int_\Omega \left(|\varphi\nabla v + v\nabla\varphi|^2 + |\varphi v|^2\right) \\
&\leq \int_\Omega \left(4\left(|\varphi\nabla v|^2 + |v\nabla\varphi|^2\right) + |\varphi v|^2\right) && ((a+b)^2 \leq 4(a^2+b^2)) \\
&\leq \int_\Omega \left(4\left(|\nabla v|^2 + |\nabla\varphi|_\infty^2|v|^2\right) + |v|^2\right) && (\varphi \in \mathcal{C}_c^\infty(\mathbb{R}^N) \text{ y } 0 < \varphi < 1) \\
&\leq C\int_\Omega \left(|\nabla v|^2 + |v|^2\right) \\
&\leq C'\int_\Omega |\nabla v|^2. && \text{(desigualdad de Poincaré)} \\
&\leq C'\int_{\mathbb{R}^N} |\nabla v|^2 \\
&= C'\|v\|^2.
\end{aligned}
$$

Como $u_k \rightharpoonup u$ débilmente en $D^{1,2}(\mathbb{R}^N)$, aplicando el Ejercicio 1.58 se obtiene que $\varphi u_k \rightharpoonup \varphi u$ en $H_0^1(\Omega)$. Como $p \in [1, 2^*)$, el teorema de Rellich-Kondrashov y el Ejercicio 1.62 aseguran que una subsucesión cumple que $\varphi u_k \to \varphi u$ en $L^p(\Omega)$. En consecuencia,

$$\int_\Theta |u_k - u|^p \leq \int_\Omega |\varphi u_k - \varphi u|^p \to 0.$$

Esto prueba que $u_k \to u$ en $L^p_{\text{loc}}(\mathbb{R}^N)$. Por último, como $u_k|_{B_n(0)} \to u|_{B_n(0)}$ fuertemente en $L^p(B_n(0))$ para todo $n \in \mathbb{N}$, existe una subsucesión $(u_{1,k})$ de (u_k) tal que $u_{1,k}(x) \to u(x)$ pct $x \in B_1(0)$. Argumentando de manera recursiva, para cada $n \geq 2$ existe una subsucesión $(u_{n,k})$ de $(u_{n-1,k})$ tal que $u_{n,k} \to u(x)$ pct $x \in B_n(0)$. Entonces $(u_{k,k})$ es una subsucesión de (u_k) y $u_{k,k}(x) \to u(x)$ pct $x \in \mathbb{R}^N$. $\square$