Tarea 6

Diego Leipen Lara

Metodos Variacionales

1. Sea X un espacio métrico. Demuestra las siguientes afirmaciones:

a) Si A es un subconjunto no vacío de X, la función $D : X \to \mathbb{R}$ dada por $D(x) := \operatorname{dist}(x, A)$, donde

$$\operatorname{dist}(x, A) = \inf_{a \in A} d_X(x, a),$$

es Lipschitz.

b) Si $f : X \to \mathbb{R}$ es localmente Lipschitz y para cada $x \in X$ existen $\delta_x > 0$ y $\epsilon_x > 0$ tales que $|f(y)| \geq \epsilon_x$ para todo $y \in B_X(x, \delta_x)$, entonces la función,

$$\frac{1}{f} : X \to \mathbb{R}$$

está bien definida y es localmente Lipschitz.

c) Si Z es un espacio vectorial normado y las funciones $f, g : X \to Z$ y $h : X \to \mathbb{R}$ son localmente Lipschitz, entonces $f + g : X \to Z$ y $hf : X \to Z$ son localmente Lipschitz.

d) Si A y B son subconjuntos cerrados no vacíos de X y $A \cap B = \emptyset$, entonces $\rho : X \to \mathbb{R}$ dada por

$$\rho(x) := \frac{\operatorname{dist}(x, A)}{\operatorname{dist}(x, A) + \operatorname{dist}(x, B)}$$

está bien definida y es localmente Lipschitz.

Demostración.

a) Sean $x, y \in X$ fijos y arbitrarios. Para todo $a \in A$

$$D(x) = \operatorname{dist}(x, A) \leq d_X(x, a) \leq d_X(x, y) + d_X(y, a).$$

En particular, para todo $a \in A$

$$D(x) - d_X(x, y) \leq d_X(y, a).$$

Entonces

$$D(x) - d_X(x, y) \leq D(y). \tag{1}$$

Por lo tanto,

$$D(x) - D(y) \leq d_X(x, y).$$

Análogamente,

$$D(y) - D(x) \leq d_X(x, y).$$

Entonces

$$|D(x) - D(y)| \leq d_X(x, y)$$

y por lo tanto, D es Lipschitz.

b) Como $|f(x)| \geq \epsilon_x > 0$ para todo $x \in X$, claramente $\frac{1}{f}$ esta bien definida. Como f es localmente Lipschitz, para cada $x \in X$ existe $C_x > 0$ y $r_x > 0$ tales que

$$|f(y) - f(z)| \leq C_x d_X(y, z) \text{ para todo } y, z \in B_X(x, r_x).$$

Por lo tanto,

$$\left|\frac{1}{f}(y) - \frac{1}{f}(z)\right| = \left|\frac{f(z) - f(y)}{f(y)f(z)}\right| \leq \frac{C}{\epsilon_x^2} d_X(y, z) \text{ para todo } y, z \in B_X(x, R_x)$$

donde $R_x \coloneqq \min\{\delta_x, r_x\}$.

c) Como f es localmente Lipschitz, para cada $x \in X$ existe $C_x > 0$ y $r_x > 0$ tales que

$$|f(y) - f(z)|_Z \leq C_x d_X(y, z) \text{ para todo } y, z \in B_X(x, r_x). \tag{2}$$

Análogamente, como g es localmente Lipschitz, para cada $x \in X$ existe $C'_x > 0$ y $r'_x > 0$ tales que

$$|g(y) - g(z)|_Z \leq C'_x d_X(y, z) \text{ para todo } y, z \in B_X(x, r'_x).$$

Por lo tanto,

$$\begin{aligned} d_Z\big((f+g)(y), (f+g)(z)\big) &= |(f+g)(y) - (f+g)(z)|_Z \\ &\leq |f(y) - f(z)|_Z + |g(y) - g(z)|_Z \\ &\leq C_x d_X(y, z) + C'_x d_X(y, z) \\ &\leq (C_x + C'_x) d_X(y, z) \text{ para todo } y, z \in B_X(x, R_x) \end{aligned}$$

donde $R_x = \min\{r_x, r'_x\}$. Por lo tanto, $f + g$ es localmente Lipschitz. Por otro lado, como h es localmente Lipschitz, para cada $x \in X$ existe $C''_x > 0$ y $r''_x > 0$ tales que

$$|h(y) - h(z)| \leq C''_x d_X(y, z) \text{ para todo } y, z \in B_X(x, r''_x). \tag{3}$$

Más aun, (2) implica que

$$|f(y)|_Z \leq C_x d_X(y, x) + |f(x)|_Z \leq C_x R_x + |f(x)|_Z =: P_x \text{ para todo } y \in B_X(x, r_x)$$

y (3) implica que

$$|h(z)| \leq C''_X d_X(x, z) + |h(x)| \leq C''_X r''_x + |h(x)| =: Q_x \text{ para todo } z \in B_X(x, r''_x).$$

Por lo tanto,

$$\begin{aligned} |hf(y) - hf(z)|_Z &= |h(y)f(y) - h(z)f(y) + h(z)f(y) - h(z)f(z)|_Z \\ &= |(h(y) - h(z))f(y) + h(z)(f(y) - f(z))|_Z \\ &\leq |h(y) - h(z)||f(y)|_Z + |h(z)||f(y) - f(z)|_Z \\ &\leq C''_x d_X(y, z) P_x + Q_x C_x d_X(y, z) \\ &= (C''_x P_x + Q_x C_x) d_X(y, z) \text{ para todo } y, z \in B_X(x, \kappa_x) \end{aligned}$$

donde $\kappa_x = \min\{r_x, r''_x\}$. Por lo tanto, hf es localmente Lipschitz.

d) Denotemos $D_A(x) = \operatorname{dist}(x, A)$ y $D_B(x) = \operatorname{dist}(x, B)$. Sea $x \notin A$. Como A es cerrado, existe $\delta_x > 0$ tal que $B_X(x, \delta_x) \subset X \setminus A$. En particular, por (1)

$$D_A(y) \geq D_A(x) - d_X(x, y) \geq D_A(x) - \delta_x =: \epsilon_x \text{ para todo } y \in B_X(x, \delta_x)$$

Cabe recalcar que podemos tomar δ_x suficientemente chico para que $\epsilon_x = D_A(x) - \delta_x > 0$. En resumen, demostramos que para todo $x \notin A$ existen $\delta_x > 0$ y $\epsilon_x > 0$ tales que

$$D_A(y) \geq \epsilon_X \text{ para todo } y \in B_X(x, \delta_x)$$

Análogamente, para todo $x \notin B$ existen $\delta'_x > 0$ y $\epsilon'_x > 0$ tales que

$$D_B(y) \geq \epsilon'_X \text{ para todo } y \in B_X(x, \delta'_x)$$

Por otro lado, los incisos (a) y (c) implican que la función $D_A + D_B$ es localmente Lipschitz. Veamos que $D_A + D_B$ satisface las hipótesis de (b). Sea $x \in X$.
Caso 1. $x \in A$. Entonces $\text{dist}(x, A) = 0$ y $x \notin B$. De donde,

$$(D_A + D_B)(y) = D_B(y) \geq \epsilon'_x \text{ para todo } y \in B_X(x, \delta'_x).$$

Caso 2. $x \in B$. Es análogo al caso anterior.
Caso 3. $x \notin A \cup B$. Entonces

$$(D_A + D_B)(y) = D_A(y) + D_B(y) \geq \epsilon_x + \epsilon'_x \text{ para todo } y \in B_X(x, \delta''_x)$$

donde $\delta''_x = \min\{\delta_x, \delta'_x\}$.
En resumen, $D_A + D_B$ satisface las hipótesis de (b) y por lo tanto, $\frac{1}{D_A + D_B}$ es localmente Lipschitz. Finalmente, por (c), la función $\rho = \frac{D_A}{D_A + D_B}$ es localmente Lipschitz.

$\square$

2. Sea $\mathcal{T}$ el toro de revolución en $\mathbb{R}^3$ que se obtiene rotando el círculo

$$\mathcal{C} := \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 : x_1^2 + (x_2 - 2)^2 = 1,\ x_3 = 0\}$$

al rededor del eje x_1. Prueba que $\mathcal{T}$ es simétrico y calcula su género.

Demostración. La curva

$$\mathbb{R} \ni u \mapsto (\cos u, \sin u + 2) \in \mathcal{C}$$

es una parametrización del circulo $\mathcal{C}$. Por lo tanto,

$$\mathbb{R}^2 \ni (u, v) \mapsto \big(\cos u, (\sin u + 2)\cos v, (\sin u + 2)\sin v\big) \in \mathcal{T}. \tag{4}$$

es una parametrización de $\mathcal{T}$. Como cos es par, sin es impar, y tenemos las identidades

$$\cos(x + \pi) = -\cos x \quad \text{y} \quad \sin(x + \pi) = -\sin x \quad \text{para todo } x \in \mathbb{R},$$

entonces

$$\begin{aligned}
\mathcal{T} &\ni \big(\cos(-u + \pi), (\sin(-u + \pi) + 2)\cos(v + \pi), (\sin(-u + \pi) + 2)\sin(v + \pi)\big) \\
&= \big(-\cos(-u), (-\sin(-u) + 2)(-\cos v), (-\sin(-u) + 2)(-\sin v)\big) \\
&= \big(-\cos u, -(\sin u + 2)\cos v, -(\sin u + 2)\sin v\big) \\
&= -\big(\cos u, (\sin u + 2)\cos v, (\sin u + 2)\sin v\big).
\end{aligned}$$

Por lo tanto, $\mathcal{T}$ es simétrico. Por otro lado, para $i = 2, 3$, el conjunto

$$U_i := \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathcal{T} \mid x_i \neq 0\}.$$

es simétrico y abierto en $\mathcal{T}$. Sea $(x_1, x_2, x_3) \in \mathcal{T}$ tal que $x_2 = 0$. Entonces por (4), $\cos v = 0$, de donde $v \in \{\pi/2, 3\pi/2\}$, luego $\sin v \in \{1, -1\}$, y por lo tanto $x_3 \neq 0$. Es decir, $\mathcal{T} = U_2 \cup U_3$. Además, la función

$$\begin{aligned}
\alpha_i : U_i &\to \{1, -1\} \\
x &\mapsto \begin{cases} 1 & \text{si } x_i > 0 \\ -1 & \text{si } x_i < 0 \end{cases}
\end{aligned}$$

es continua e impar. Por lo tanto, $\text{gen}(\mathcal{T}) \leq 2$. Supongamos que $\text{gen}(\mathcal{T}) = 1$. Entonces existe una función impar y continua $f : \mathcal{T} \to \{-1, 1\}$. De esta manera, $f^{-1}(1)$ y $f^{-1}(-1)$ son dos subconjuntos no vacíos de $\mathcal{T}$ (pues f es impar) que cubren $\mathcal{T}$ y son disjuntos. Pero $\mathcal{T}$ es conexo y por lo tanto, $\text{gen}(\mathcal{T}) = 2$. $\square$