1. Muestre que cada una de las ecuaciones $(a, b, c \neq 0)$

$$x^2 + y^2 + z^2 = ax \tag{1}$$
$$x^2 + y^2 + z^2 = by \tag{2}$$
$$x^2 + y^2 + z^2 = cz \tag{3}$$

define una superficie regular, y que todas las superficies se intersectan ortogonalmente.

Demostración. Usaremos la definición de subvariedad del Gallot.

> 1.1 **Definition.** A subset $M \subset \mathbf{R}^{n+k}$ is an *n-dimensional submanifold of class C^p of* $\mathbf{R}^{n+k}$ if, for any $x \in M$, there exists a neighborhood U of x in $\mathbf{R}^{n+k}$ and a C^p submersion $f : U \to \mathbf{R}^k$ such that $U \cap M = f^{-1}(0)$ (we recall that f is a submersion if its differential map is surjective at each point).

Figura 1

Veamos que (1) define una superficie regular, los otros casos son completamente análogos. Sea $S_a \coloneqq \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 + z^2 = ax\}$ y $f_a : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ tal que

$$(x, y, z) \mapsto x^2 + y^2 + z^2 - ax$$

Claramente, $f^{-1}(0) = S_a$. Resta probar que f es submersion. Por definición, para toda $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$,

$$df_{(x,y,z)}(u, v, w) = (2xu - au) + (2yv) + (2zw)$$

La cual claramente es distinta de cero y (como es lineal) entonces es suprayectiva. Por otro lado, sean S_b y f_b definidas de manera análoga a S_a y f_a. Veamos que S_a y S_b se intersectan ortogonalmente, el resto de los casos son análogos. Supongamos que $p \coloneqq (x, y, z) \in S_a \cap S_b$. Entonces,

$$\begin{aligned} \nabla f_a(p) \cdot \nabla f_b(p) &= (2x - a, 2y, 2) \cdot (2x, 2y - b, 2z) \\ &= 2\left(x^2 + y^2 + z^2 - 2ax\right) + 2\left(x^2 + y^2 + z^2 - by\right) \end{aligned}$$

Como p satisface las ecuaciones (1) y (2), la ecuación anterior es igual a 0. Finalmente, como $\nabla f_a(p)$ y $\nabla f_b(p)$ son los vectores normales a S_a y S_p (resp.) en p, entonces S_a y S_b se intersectan ortogonalmente. □

2. Sea M una variedad compacta de dimensión n. Demuestre que no existe una inmersión de M en el espacio euclidiano de dimensión n.

Demostración. Supongamos lo contrario, es decir, supongamos que existe $f : M \to \mathbb{R}^n$ inmersión. Entonces,

- *f es cerrada.*
  Supongamos que $A \subset M$ es cerrado en M. Como M es compacto, A también es compacto. Luego, como f es continua, $f(A)$ es compacto. En particular, $f(A)$ es cerrado.

- *f es abierta.*
  Primero notemos que basta demostrar que para toda $x \in M$, existe $W \subset M$ vecindad de x tal que $f(W)$ es abierto. Por otro lado, como f es inmersión (de un espacio n-dimensional en un espacio n-dimensional), para toda $x \in M$, existen cartas (φ, U) y (ψ, V) de M en x y $\mathbb{R}^n$ en $f(x)$ respectivamente tales que

  $$\psi \circ f \circ \varphi^{-1}(x_1, \ldots, x_n) = (x_1, \ldots, x_n)$$

  Restringiendo adecuadamente, podemos encontrar $W \subset U$ vecindad de x tal que la siguiente igualdad se satisface

  $$f|_W = \psi^{-1} \circ \mathrm{id}_{\varphi(W)} \circ \left(\varphi|_W\right)$$

  Para los detalles de como encontrar esta W, ver mi solución del ejercicio 2 de la tarea 4. Finalmente, como el lado derecho de la igualdad es un difeomorfismo, en particular es una función abierta y por lo tanto, $f(W)$ es abierto.

Por lo tanto, como M es abierto y cerrado en M, $f(M) \subset \mathbb{R}^n$ abierto y cerrado en $\mathbb{R}^n$. Como $\mathbb{R}^n$ es conexo, entonces $f(M) = \mathbb{R}^n$. Lo anterior es una contradicción porque f continua y M compacto implica $f(M)$ compacto, pero $\mathbb{R}^n$ no es compacto. $\square$

Lema 1. Sean $u, v \in \mathbb{R}^3$ tales que $u \perp w \iff v \perp w$ para toda $w \in \mathbb{R}^3$, entonces $u || v$. En otras palabras, sean $A, B, C, D, E, F \in \mathbb{R}$ tales que

$$Au + Bv + Cw = 0 \iff Du + Ev + Fw = 0$$

para toda $u, v, w \in \mathbb{R}$. Entonces, $(A, B, C) \parallel (D, E, F)$.

Demostración. Tomando las (x, y, z) adecuadas, es fácil ver que la hipótesis implica que

$$\begin{aligned} A \neq 0 &\iff D \neq 0 \\ B \neq 0 &\iff E \neq 0 \\ C \neq 0 &\iff F \neq 0 \end{aligned}$$

Por eso, supongamos que $A, B, C, D, E, F \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$, los otros casos son análogos. Tomando $(u, v, w) = (-B, A, 0)$ podemos aplicar la hipótesis para obtener $-DB + EA + 0 = 0$. De donde, $\frac{A}{B} = \frac{D}{E}$ y por lo tanto, existe $\lambda \neq 0$ tal que $A = \lambda D$, $B = \lambda E$. Análogamente, tomando $(u, v, w) = (-C, 0, A)$ podemos demostrar que $\frac{A}{C} = \frac{D}{F}$. Como $A = \lambda D$, entonces $C = \lambda F$. Por lo tanto, $(A, B, C) \parallel (D, E, F)$. $\square$

3. Un *campo de planos* en un conjunto abierto $U \subset \mathbb{R}^3$ es una función P que a cada $q \in U$ le asocia un plano $P(q)$ que pasa por q. El campo P es diferenciable si los coeficientes de la ecuación de $P(q)$ son funciones diferenciables en U. Una *superficie integral* es una superficie $S \subset \mathbb{R}^3$ tal que para toda $q \in S$, $T_pS = P(p)$.

1. Sea $\omega = xdx + ydy + zdz$ una forma diferencial y P el campo de planos en $\mathbb{R}^3 \setminus \{0\}$ determinado por ω. Muestre que la superficie integral de de P que pasa por $p = (x, y, z)$ es la esfera con centro en el origen que pasa por p.

2. Sea $\omega = zdx + xdy + ydz$ una forma diferencial. Muestre que el campo de planos en $\mathbb{R}^3$ determinado por ω, digamos P, no tiene ninguna superficie integral.

Demostración. Antes de empezar, recordemos la siguiente propiedad de las superficies regulares. Supongamos que S es una superficie regular, $p \in S$, $U \subset \mathbb{R}^3$ es una vecindad de p, y $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ es tal que $f^{-1}(0) = U \cap S$. Entonces,

$$\begin{aligned} T_pS &= \Big\{(u,v,w) \in \mathbb{R}^3 \mid \nabla f(p) \cdot (u,v,w) = 0\Big\} \\ &= \Big\{(u,v,w) \in \mathbb{R}^3 \mid \frac{\partial f}{\partial x}(p) \cdot (u-x) + \frac{\partial f}{\partial y}(p) \cdot (v-y) + \frac{\partial f}{\partial z}(p) \cdot (w-z) = 0\Big\} \end{aligned} \tag{4}$$

Ahora si, procedamos con la demostración.

1. Específicamente, el campo de planos P esta dado por

$$(x,y,z) \overset{P}{\longmapsto} \Big\{(u,v,w) \in \mathbb{R}^3 \mid x(u-x) + y(v-y) + z(w-z) = 0\Big\} \tag{5}$$

Por otro lado, recordemos que $\mathbb{S}^2 = f^{-1}(0)$ donde $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ esta dada por $f(x,y,z) = x^2 + y^2 + z^2 - 1$. Además,

$$\frac{\partial f}{\partial x}(p) = 2x, \ \ \frac{\partial f}{\partial y}(p) = 2y, \ \ \frac{\partial f}{\partial z}(p) = 2z \tag{6}$$

Juntando (4), (5), y (6) obtenemos lo deseado.

2. Específicamente, el campo de planos P esta dado por

$$(x,y,z) \overset{P}{\longmapsto} \Big\{(u,v,w) \in \mathbb{R}^3 \mid z(u-x) + x(v-y) + y(w-z) = 0\Big\} \tag{7}$$

Supongamos que existe una superficie integral S de P. Por (4) y (7), para toda $p = (x,y,z) \in S$ deberíamos tener

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial x}(p) \cdot (u-x) + \frac{\partial f}{\partial y}(p) \cdot (v-y) + \frac{\partial f}{\partial z}(p) \cdot (w-z) = 0 \iff \\ z(u-x) + x(v-y) + y(w-z) = 0 \end{aligned}$$

para todo $u, v, w \in \mathbb{R}$. Por el lema 1, existe $\lambda \neq 0$ tal que

$$\frac{\partial f}{\partial x}(p) = \lambda z, \ \ \frac{\partial f}{\partial y}(p) = \lambda x, \ \ \frac{\partial f}{\partial z}(p) = \lambda y$$

para alguna $\lambda \neq 0$. Ahora bien, para todo $\lambda \neq 0$, denotemos

$$F_\lambda(x, y, z) = (\lambda z, \lambda x, \lambda y)$$

Por la siguiente proposición del Paez (el libro de calculo integral multivariable), F_λ no es conservativo.

Proposición 3.21 *Sea $F = (F_1, \ldots, F_n) : U \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ una función de clase C^1 en U. Si F es un campo conservativo en U entonces*

$$\frac{\partial F_i}{\partial x_j}(\hat{x}) = \frac{\partial F_j}{\partial x_i}(\hat{x}) \tag{3.15}$$

para toda $\hat{x} \in U$ y para toda $i, j \in \{1, \ldots, n\}$, $i \neq j$.

En otras palabras, no existe $g : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ tal que $\nabla g = F$. Contradiciendo la existencia de f.

□

4. Sea g una métrica riemanniana en una variedad M y sea $\tilde{g} := f^2 \cdot g$, donde f es una función suave en M que nunca se anula. Sean ∇ y $\tilde{\nabla}$ las conexiones de Levi-Civita asociadas a g y $\tilde{g}$ respectivamente. Finalmente, sea $Grad(f)$ el campo sobre M tal que $df = g\left(Grad(f), .\right)$. Demuestre que

$$\tilde{\nabla}_X Y = \nabla_X Y + \frac{1}{f}\left\{df(X)Y + df(Y)X - \langle X, Y\rangle Grad(f)\right\}$$

Demostración. Primero veamos que si Γ_{ij}^k y $\tilde{\Gamma}_{ij}^k$ son los símbolos de Christoffel asociados a g y $\tilde{g}$ respectivamente, entonces para toda i, j, k

$$\tilde{\Gamma}_{ij}^k = \Gamma_{ij}^k + \frac{1}{f}\left\{\delta_{jk} \cdot \partial_i f + \delta_{ik} \cdot \partial_j f - g_{ij} \cdot \sum_l g^{kl} \partial_l f\right\} \tag{8}$$

donde $\partial_i f$ es tal que $df = \sum_i \partial_i f \cdot dx^i$. Usando la expresión para los símbolos de Christoffel en coordenadas,

$$\begin{aligned}
\tilde{\Gamma}_{ij}^k &= \frac{1}{2}\sum_l \left\{\partial_i \tilde{g}_{jl} + \partial_j \tilde{g}_{li} - \partial_l \tilde{g}_{ij}\right\} \tilde{g}^{lk} \\
&= \frac{1}{2}\sum_l \left\{\left(\partial_i \left(f^2\right) g_{jl} + f^2 \left(\partial_i g_{jl}\right)\right) + \left(\partial_j \left(f^2\right) g_{li} + f^2 \left(\partial_j g_{li}\right)\right) - \left(\partial_l \left(f^2\right) g_{ij} + f^2 \left(\partial_l g_{ij}\right)\right)\right\} \frac{1}{f^2} \cdot g^{lk} \\
&= \frac{1}{2}\sum_l \left\{\left((2f \cdot \partial_i f) g_{jl} + f^2 \left(\partial_i g_{jl}\right)\right) + \left((2f \cdot \partial_j f) g_{li} + f^2 \left(\partial_j g_{li}\right)\right) - \left((2f \cdot \partial_l f) g_{ij} + f^2 \left(\partial_l g_{ij}\right)\right)\right\} \frac{1}{f^2} \cdot g^{lk} \\
&= \Gamma_{ij}^k + \sum_l \left\{g_{jl} \cdot \partial_i f + g_{li} \cdot \partial_j f - g_{ij} \cdot \partial_l f\right\} \frac{1}{f} \cdot g^{lk} \\
&= \Gamma_{ij}^k + \frac{1}{f}\left\{\sum_l \left(g_{jl} \cdot g^{lk}\right) \cdot \partial_i f + \sum_l \left(g_{li} \cdot g^{lk}\right) \cdot \partial_j f - \sum_l \left(g_{ij} \cdot g^{lk}\right) \cdot \partial_l f\right\} \\
&= \Gamma_{ij}^k + \frac{1}{f}\left\{\delta_{jk} \cdot \partial_i f + \delta_{ik} \cdot \partial_j f - g_{ij} \cdot \sum_l g^{kl} \partial_l f\right\}
\end{aligned}$$

Por otro lado, supongamos que $X = \sum_i x_i \frac{\partial}{\partial x_i}$ y $Y = \sum_j y_j \frac{\partial}{\partial x_i}$ son campos vectoriales en X. Sustituyendo (8) en la expresión para $\tilde{\nabla}_X Y$ en coordenadas,

$$
\begin{aligned}
\tilde{\nabla}_X Y &= \sum_k \left(\sum_{ij} x_i y_j \tilde{\Gamma}_{ij}^k + X(y_k) \right) \frac{\partial}{\partial x_k} \\
&= \sum_k \left(\sum_{ij} x_i y_j \left(\Gamma_{ij}^k + \frac{1}{f} \left\{ \delta_{jk} \cdot \partial_i f + \delta_{ik} \cdot \partial_j f - g_{ij} \cdot \sum_l g^{kl} \partial_l f \right\} \right) + X(y_k) \right) \frac{\partial}{\partial x_k} \\
&= \nabla_X Y + \frac{1}{f} \left\{ \sum_k \left(\sum_{ij} \delta_{jk} \cdot x_i y_j \partial_i f + \sum_{ij} \delta_{ik} \cdot x_i y_j \partial_j f - \sum_{ij} x_i y_j \left(g_{ij} \sum_l \partial_l f g^{lk} \right) \right) \frac{\partial}{\partial x_k} \right\} \frac{\partial}{\partial x_k} \\
&= \nabla_X Y + \frac{1}{f} \left\{ \sum_k \left(\sum_{ij} \delta_{jk} \cdot x_i y_j \partial_i f \right) \frac{\partial}{\partial x_k} + \sum_k \left(\sum_{ij} \delta_{ik} \cdot x_i y_j \partial_j f \right) \frac{\partial}{\partial x_k} + \sum_k \left(\sum_{ij} x_i y_j \left(g_{ij} \sum_l \partial_l f g^{lk} \right) \right) \frac{\partial}{\partial x_k} \right\} \\
&= \nabla_X Y + \frac{1}{f} \left\{ \sum_{ik} x_i y_k \partial_i f \frac{\partial}{\partial x_k} + \sum_{jk} x_k y_j \partial_j f \frac{\partial}{\partial x_k} + \sum_k \left(\left(\sum_{ij} x_i y_j g_{ij} \right) \left(\sum_l \partial_l f g^{lk} \right) \right) \frac{\partial}{\partial x_k} \right\} \\
&= \nabla_X Y + \frac{1}{f} \left\{ \left(\sum_i x_i \partial_i f \right) \left(\sum_k y_k \frac{\partial}{\partial x_k} \right) + \left(\sum_j y_j \partial_j f \right) \left(\sum_i x_i \frac{\partial}{\partial x_i} \right) + \left(\sum_{ij} x_i y_j g_{ij} \right) \left(\sum_k \left(\sum_l \partial_l f g^{lk} \right) \frac{\partial}{\partial x_k} \right) \right\} \\
&= \nabla_X Y + \frac{1}{f} \left\{ df(X) Y + df(Y) X + \langle X, Y \rangle Grad(f) \right\}
\end{aligned}
$$

□

Diego Leipen Lara
418002038