Tarea 13

Diego Leipen Lara

Metodos Variacionales

Considera el problema

$$\begin{cases} -\Delta u + \lambda u = |u|^{2^*-2}u \\ u \in D^{1,2}(\Omega) \end{cases} \tag{$\wp_\lambda$}$$

donde Ω es un dominio acotado en $\mathbb{R}^N$, $N \geq 3$, y $\lambda \geq 0$.

En este caso, $D_0^{1,2}(\Omega) = H_0^1(\Omega)$,

$$\|u\|_\lambda := \left(\int_\Omega \left(|\nabla u|^2 + \lambda u^2 \right) \right)^{1/2}$$

esta bien definida y es una norma equivalente a la norma de $D_0^{1,2}(\Omega)$. Las soluciones no triviales del problema $(\wp_\lambda)$ son los puntos críticos del funcional

$$J_\lambda(u) = \frac{1}{2}\|u\|_\lambda^2 - \frac{1}{2^*}|u|_{2^*}^{2^*}$$

sobre la variedad de Nehari $\mathcal{N}_\lambda := \{u \in D_0^{1,2}(\Omega) : \|u\|_\lambda^2 = |u|_{2^*}^{2^*}\}$, y

$$c_\lambda := \inf_{\mathcal{N}_\lambda} J_\lambda = \frac{1}{N} S_\lambda^{N/2}, \qquad \text{donde } S_\lambda := \inf_{\substack{u \in D_0^{1,2}(\Omega) \\ u \neq 0}} \frac{\|u\|_\lambda^2}{|u|_{2^*}^2}.$$

El objetivo de esta tarea es probar que $(\wp_\lambda)$ no tiene solución de energía mínima si $\lambda \geq 0$.

1. Sean $R > 0$ y $\varphi \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^N)$ tal que $0 \leq \varphi(x) \leq 1$, $\varphi(x) = 1$ si $|x| \leq R$ y $\varphi(x) = 0$ si $|x| \geq 2R$. Para cada $\epsilon > 0$ definimos

$$u_\epsilon(x) := \varphi(x) U_\epsilon(x), \qquad \text{donde } U_\epsilon(x) := a_N \left(\frac{\epsilon}{\epsilon^2 + |x|^2} \right)^{\frac{N-2}{2}}.$$

Prueba que

$$\lim_{\epsilon \to 0} \int_{B_{2R}} u_\epsilon^2 = 0.$$

Demostración. Para todo $x \neq 0$,

$$|u_\epsilon(x)| = |\varphi(x) U_\epsilon(x)| \leq a_N \left(\frac{\epsilon}{\epsilon^2 + |x|^2} \right)^{\frac{N-2}{2}} \xrightarrow{\epsilon \to 0} 0. \tag{1}$$

Por otro lado, sean $\epsilon > 0$ y $x \neq 0$. Claramente,

$$\epsilon^2 - 2\epsilon|x| + |x|^2 = (\epsilon - |x|)^2 \geq 0.$$

De donde,

$$\frac{\epsilon}{\epsilon^2 + |x|^2} \leq \frac{1}{2|x|}.$$

Por lo tanto,

$$|u_\epsilon(x)| = |\varphi(x)U_\epsilon(x)| \le a_N \left(\frac{1}{2|x|}\right)^{\frac{N-2}{2}} \qquad \forall \epsilon > 0,\, \forall x \neq 0. \tag{2}$$

Además,

$$\left(\frac{1}{|x|}\right)^{\frac{N-2}{2}} \in L^2(B_{2R}) \tag{3}$$

pues

$$\int_{B_{2R}} \left(\frac{1}{|x|}\right)^{N-2} = \int_{B_{2R}} |x|^{2-N} < \infty$$

donde la última integral es finita pues $(2-N)+N>0$ (cf. Proposición 13.31). De (1), (2), (3), y el teorema de convergencia dominada de Lebesgue, se sigue que

$$\lim_{\epsilon\to 0} \int_{B_{2R}} u_\epsilon^2 = 0.$$

$\square$

2. Prueba que si $\lambda \ge 0$, entonces

$$S_\lambda = S \coloneqq \inf_{\substack{u\in D^{1,2}(\mathbb{R}^N)\\ u\neq 0}} \frac{\|u\|^2}{|u|_{2^*}^2}.$$

Demostración. Recordemos que en el Teorema 5.8 vimos que

$$S = S_\Omega \coloneqq \inf_{\substack{u\in D_0^{1,2}(\Omega)\\ u\neq 0}} \frac{\|u\|^2}{|u|_{2^*}^2}.$$

Ahora bien, como $\lambda \ge 0$, entonces

$$\|u\|^2 \le \|u\|_\lambda^2 \qquad \forall u \in D_0^{1,2}(\Omega).$$

De donde,

$$S = S_\Omega \le S_\lambda. \tag{4}$$

Conversamente, supongamos sin perdida de generalidad que Ω contiene al origen. Sea $R>0$ tal que $B_{2R}\subset\Omega$ y para cada $\epsilon>0$ sea u_ϵ como en el ejercicio 1. Entonces

$$\begin{aligned} S_\lambda &\le \frac{\|u_\epsilon\|_\lambda^2}{|u_\epsilon|_{2^*}^2} && (u_\epsilon \in C_c^\infty(B_{2R}) \subset D_0^{1,2}(\Omega) \text{ para todo } \epsilon>0)\\ &= \frac{\|u_\epsilon\|^2}{|u_\epsilon|_{2^*}^2} + \lambda\frac{|u_\epsilon|_2^2}{|u_\epsilon|_{2^*}^2} && (\text{por def. de } \|\cdot\|_\lambda)\\ &= \frac{S^{N/2}+O(\epsilon^{N-2})}{(S^{N/2}+O(\epsilon^N))^{\frac{2}{2^*}}} + \lambda\frac{|u_\epsilon|_2^2}{(S^{N/2}+O(\epsilon^N))^{\frac{2}{2^*}}}. && (\text{cf. Lema 5.30}) \end{aligned}$$

Tomando el límite cuando $\epsilon\to 0$ obtenemos

$$S_\lambda = \lim_{\epsilon\to 0} S_\lambda \le \lim_{\epsilon\to 0}\left(\frac{S^{N/2}+O(\epsilon^{N-2})}{(S^{N/2}+O(\epsilon^N))^{\frac{2}{2^*}}} + \lambda\frac{|u_\epsilon|_2^2}{(S^{N/2}+O(\epsilon^N))^{\frac{2}{2^*}}}\right) = \frac{S^{N/2}}{(S^{N/2})^{\frac{2}{2^*}}} + 0 = S. \tag{5}$$

De (4) y (5) se sigue lo deseado. $\square$

3. Prueba que si $\lambda \geq 0$, entonces c_λ no se alcanza.

Demostración. Si $\lambda = 0$, esto es precisamente lo que garantiza el teorema 5.8.ii. Por eso, supongamos que $\lambda > 0$ y argumentando por contradicción, supongamos que existe $u \in \mathcal{N}_\lambda$ tal que

$$J_\lambda(u) = \inf_{\mathcal{N}_\lambda} J_\lambda = \frac{1}{N} S_\lambda^{N/2}. \tag{6}$$

Entonces

$$\begin{aligned}
\frac{1}{N}|u|_{2^*}^{2^*} &= \frac{2^* - 2}{2^* 2}|u|_{2^*}^{2^*} && (\text{pues } \tfrac{2^*-2}{2^*2} = \tfrac{1}{N}) \\
&= \frac{1}{2}\|u\|_\lambda^2 - \frac{1}{2^*}|u|_{2^*}^{2^*} && (\text{pues } u \in \mathcal{N}_\lambda) \\
&= J_\lambda(u) && (\text{def. de } J_\lambda) \\
&= \frac{1}{N} S_\lambda^{N/2} && (\text{cf. } (6)) \\
&= \frac{1}{N} S^{N/2}. && (\text{cf. Ejercicio 2})
\end{aligned}$$

En particular,

$$|u|_{2^*}^{\frac{4}{N-2}} = \left(|u|_{2^*}^{2^*}\right)^{2/N} = S. \tag{7}$$

pues $2^*\left(\frac{2}{N}\right) = \frac{4}{N-2}$. Por otro lado,

$$\begin{aligned}
\frac{\|u\|^2}{|u|_{2^*}^2} + \lambda \frac{|u|_2^2}{|u|_{2^*}^2} &= \frac{\|u\|_\lambda^2}{|u|_{2^*}^2} && (\text{por def. de } \|\cdot\|_\lambda) \\
&= \frac{|u|_{2^*}^{2^*}}{|u|_{2^*}^2} && (\text{pues } u \in \mathcal{N}_\lambda) \\
&= |u|_{2^*}^{2^*-2} \\
&= |u|_{2^*}^{\frac{4}{N-2}} && (\text{pues } 2^* - 2 = \tfrac{4}{N-2}) \\
&= S && (\text{cf. } (7)) \\
&\leq \frac{\|u\|^2}{|u|_{2^*}^2}. && (\text{por def. de } S)
\end{aligned}$$

Como $\lambda > 0$, esto implica que $|u|_2 = 0$. De donde,

$$\|u\|^2 = \|u\|_\lambda^2 = |u|_{2^*}^{2^*}$$

es decir, $u \in \mathcal{N}_{\mathbb{R}^N}$. Luego,

$$J(u) = \frac{1}{2}\|u\|^2 - \frac{1}{2^*}|u|_{2^*}^{2^*} = \frac{2^* - 2}{2^* 2}|u|_{2^*}^{2^*} = \frac{1}{N}|u|_{2^*}^{2^*} = \frac{1}{N} S^{N/2}.$$

Es decir, u es una solución de energía mínima del problema

$$\begin{cases} -\Delta u = |u|^{2^*-2}u, \\ u \in D^{1,2}(\mathbb{R}^N). \end{cases}$$

Procediendo de la misma manera que en la demostración del teorema 5.8.ii, obtenemos que u es estrictamente positiva o estrictamente negativa. Una contradicción pues $u(x) = 0$ para todo $x \in \mathbb{R}^N \setminus \Omega$. $\square$