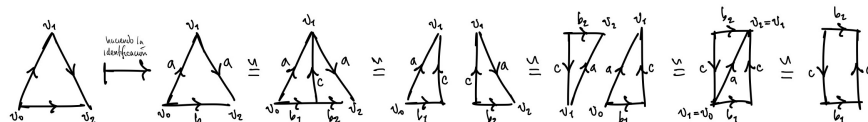


1. Veamos que el espacio obtenido a partir del 2-simplejo $[v_0, v_1, v_2]$ al identificar $[v_0, v_1]$ con $[v_1, v_2]$ de manera que se preserve la orientación (ie, $v_0 \sim v_1$ y $v_1 \sim v_2$) es homeomorfo a la banda de Möbius.



Como la ultima figura es una representación de la banda de Möbius, obtenemos lo deseado. \square

2. Usaremos las siguientes proposiciones de los videos:

Prop. Sea $X = \bigsqcup_{\alpha \in I} X_\alpha$ la descomposición de X como unión disjunta de sus componentes arco-conexas. Entonces

$$H_n(X) \cong \bigoplus_{\alpha \in I} H_n(X_\alpha) \quad \forall n \geq 0.$$

Prop. Si X consiste de un solo punto, entonces

$$H_n(X; \mathbb{R}) = \begin{cases} \mathbb{R} & \text{si } n=0 \\ 0 & \text{si } n \neq 0 \end{cases}$$

Como \mathbb{Q} tiene la topología heredada de \mathbb{R} entonces, su descomposición en componentes conexas es

$$\mathbb{Q} = \bigcup_{x \in \mathbb{Q}} \{x\}$$

Entonces, por la primera proposición, tenemos el primero de los siguientes isomorfismos.

$$\begin{aligned} H_n(\mathbb{Q}) &\cong \bigoplus_{x \in \mathbb{Q}} H_n(\{x\}) \\ &\cong \begin{cases} \bigoplus_{x \in \mathbb{Q}} \mathbb{R} & \text{si } n=0 \\ 0 & \text{si } n > 0 \end{cases} \end{aligned}$$

El segundo isomorfismo se cumple por la segunda proposición. \square

Diego Leipen Lara
Estoy inscrito