1. En $\mathbb{R}^2$ todos los lazos basados en el origen son homotopicos rel $0, 1$.
Demostración.
Supongamos que α, β son dos lazos en $\mathbb{R}^2$ basados en el origen. Sea $f_t : I \to \mathbb{R}^2$ tal que

$$f_t(x) = t\alpha(x) + (1-t)\beta(x).$$

Como $id_{\mathbb{R}}$, α, y β son continuas, la función asociada $F(x,t) = f_t(x)$ es continua.
P.D. $F(0,t) = (0,0)$

$$\begin{aligned} F(0,t) &= f_t(0) \\ &= t\alpha(0) + (1-t)\beta(0) \\ &= t(0,0) + (1-t)(0,0) \\ &= (0,0) \end{aligned}$$

Análogamente, usando que $\alpha(1) = (0,0) = \beta(1)$ tenemos $F(1,t) = (0,0)$.
P.D. $F(x,0) = \beta(0)$

$$\begin{aligned} F(x,0) &= f_0(t) \\ &= 0\alpha(x) + (1-0)\beta(x) \\ &= \beta(x) \end{aligned}$$

Análogamente, $F(x,1) = \alpha(x)$.
$\therefore$ En $\mathbb{R}^2$ todos los lazos basados en el origen son homotopicos rel 0,1. $\square$

2. Sea $f : X \to Y$ continua, y $\alpha, \beta : I \to X$ homotopicos. Demuestre que $f \circ \alpha$ y $f \circ \beta$ son homotopicos.
Demostracion.
Por definicion, existe una familia $\{f_t : I \to X \mid t \in I\}$ de funciones continuas tal que $f_0 = \alpha$, $f_1 = \beta$ y la funcion asociada, $F(x,t) = f_t(x)$ es continua. Veamos que $\{f \circ f_t \mid t \in I\}$ cumple lo deseado. Como f y f_t son continuas, $\forall t \in I$ $f \circ f_t$ es continua. Ademas, $f \circ f_0 = f \circ \alpha$ y $f \circ f_1 = f \circ \beta$. Ahora, si G es la funcion asociada a $\{f \circ f_t \mid t \in I\}$ entonces,

$$\begin{aligned} G(x,t) &= (f \circ f_t)(x) \\ &= f(f_t(x)) \\ &= f(F(x,t)) \\ &= f \circ F(x,t). \end{aligned}$$

La cual es continua porque f y F lo son. $\square$

Diego Leipen Lara
Estoy inscrito.