Tarea 1: Espacios de Hilbert y teoría de distribuciones

Temas selectos de ecuaciones diferenciales
Espacios de Sobolev y ecuaciones diferenciales parciales de tipo elíptico
Semestre 2024-2

Diego Leipen Lara

1. Sea $(H, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ un espacio de Hilbert sobre $\mathbb{C}$, y $A : D_A \subset H \to H$ un operador acotado, D_A denso en H.

(a) Demuestra que para cualesquiera $u, v \in D_A$

$$\langle Au, v\rangle = \frac{1}{4}\left(\langle A(u+v), u+v\rangle - \langle A(u-v), u-v\rangle + i\langle A(u+iv), u+iv\rangle - i\langle A(u-iv), u-iv\rangle\right)$$

(b) Demuestra que si $\langle Au, u\rangle \in \mathbb{R}$ para todo $u \in D_A$, entonces $\langle Au, v\rangle = \langle u, Av\rangle$ para todo $u, v \in D_A$.

(c) Si H es un espacio de Hilbert sobre $\mathbb{R}$ y $\langle Au, u\rangle \geq 0$, prueba que esto no implica que la forma bilineal $a(u, v) = \langle Au, v\rangle$ es simétrica.

Demostración.

(a) Para cualesquiera $u, v \in D_A$,

$$\begin{aligned}\langle A(u+v), u+v\rangle &= \langle Au, u\rangle + \langle Au, v\rangle + \langle Av, u\rangle + \langle Av, v\rangle,\\ \langle A(u-v), u-v\rangle &= \langle Au, u\rangle - \langle Au, v\rangle - \langle Av, u\rangle + \langle Av, v\rangle.\end{aligned}$$

Entonces, restando

$$\langle A(u+v), u+v\rangle - \langle A(u-v), u-v\rangle = 2\left(\langle Au, v\rangle + \langle Av, u\rangle\right). \tag{1}$$

Análogamente, cambiando v por iv en (1)

$$\langle A(u+iv), u+iv\rangle - \langle A(u-iv), u-iv\rangle = 2\left(\langle Au, iv\rangle + \langle A(iv), u\rangle\right) = 2\left(-i\langle Au, v\rangle + i\langle Av, u\rangle\right).$$

Entonces, multiplicando por i

$$i\langle A(u+iv), u+iv\rangle - i\langle A(u-iv), u-iv\rangle = i2\left(-i\langle Au, v\rangle + i\langle Av, u\rangle\right) = 2\left(\langle Au, v\rangle - \langle Av, u\rangle\right). \tag{2}$$

Juntando (1) y (2) obtenemos

$$\begin{aligned}\langle A(u+v), u+v\rangle - \langle A(u-v), u-v\rangle + i\langle A(u+iv), u+iv\rangle - i\langle A(u-iv), u-iv\rangle =\\ 2\left(\langle Au, v\rangle + \langle Av, u\rangle\right) + 2\left(\langle Au, v\rangle - \langle Av, u\rangle\right) =\\ 4\langle Au, v\rangle.\end{aligned}$$

(b) Sean $u, v \in D_A$. Entonces

$$\begin{aligned}\langle A(v-u), v-u\rangle &= (-1)(-1)\langle A(v-u), v-u\rangle\\ &= \langle (-1)A(v-u), (-1)(v-u)\rangle\\ &= \langle A(u-v), u-v\rangle.\end{aligned} \tag{3}$$

También

$$
\begin{aligned}
\langle A(v+iu), v+iu\rangle &= (-i)(i)\langle A(v+iu), v+iu\rangle \\
&= \langle (-i)A(v+iu), \bar{i}(v+iu)\rangle \\
&= \langle A(u-iv), u-iv\rangle. \qquad (4)
\end{aligned}
$$

Análogamente,

$$
\begin{aligned}
\langle A(v-iu), v-iu\rangle &= (i)(-i)\langle A(v-iu), v-iu\rangle \\
&= \langle iA(v-iu), \overline{-i}(v-iu)\rangle \\
&= \langle A(u+iv), u+iv\rangle. \qquad (5)
\end{aligned}
$$

Por hipótesis, $\langle Au, u\rangle \in \mathbb{R}$ para todo $u \in D_A$. En particular, $\langle Au, u\rangle = \overline{\langle Au, u\rangle}$ para todo $u \in D_A$. Usando esto, el inciso (a), y las ecuaciones (3), (4), y (5), obtenemos

$$
\begin{aligned}
4\langle u, Av\rangle &= 4\overline{\langle Av, u\rangle} \\
&= \overline{\langle A(v+u), v+u\rangle - \langle A(v-u), v-u\rangle + i\langle A(v+iu), v+iu\rangle - i\langle A(v-iu), v-iu\rangle} \\
&= \overline{\langle A(v+u), v+u\rangle} - \overline{\langle A(v-u), v-u\rangle} + \overline{i\langle A(v+iu), v+iu\rangle} - \overline{i\langle A(v-iu), v-iu\rangle} \\
&= \langle A(v+u), v+u\rangle - \langle A(v-u), v-u\rangle - i\langle A(v+iu), v+iu\rangle + i\langle A(v-iu), v-iu\rangle \\
&= \langle A(v+u), v+u\rangle - \langle A(u-v), u-v\rangle - i\langle A(u-iv), u-iv\rangle + i\langle A(u+iv), u+iv\rangle \\
&= 4\langle Au, v\rangle.
\end{aligned}
$$

(c) Sea $H = \mathbb{R}^2$ y $A : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ dado por $A(x, y) \coloneqq (-y, x)$. Entonces

$$\langle A(x, y), (x, y)\rangle = \langle (-y, x), (x, y)\rangle = 0 \text{ para todo } (x, y) \in \mathbb{R}^2$$

pero

$$
\begin{aligned}
a((0,1),(1,1)) &= \langle A(0,1),(1,1)\rangle = \langle (-1,0),(1,1)\rangle = -1, \\
a((1,1),(0,1)) &= \langle A(1,1),(0,1)\rangle = \langle (-1,1),(0,1)\rangle = 1.
\end{aligned}
$$

□

Usaremos los siguientes resultados para demostrar el ejercicio 2.

Lema 1. Sea $(X, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ de Hilbert. Si (ϕ_j) es un subconjunto ortogonal de X tal que $\sum_{j=1}^{\infty} |\phi_j|^2 < \infty$, entonces $\sum_{j=1}^{\infty} \phi_j \coloneqq \lim_{n\to\infty} \sum_{j=1}^{n} \phi_j$ existe y $|\sum_{j=1}^{\infty} \phi_j|^2 = \sum_{j=1}^{\infty} |\phi_j|^2$. (cf. Brezis, Lemma 5.1)

Teorema 1. Sea $(X, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ de Hilbert y (ϕ_j) un subconjunto ortonormal de X. Si para todo $u \in X$ existen $\mu_{n,j} \in \mathbb{R}$ con $n \in \mathbb{N}$ y $j \in \mathbb{N}_{\leq n}$, tales que

$$\left\| u - \sum_{j=1}^{n} \mu_{n,j}\phi_j \right\| \xrightarrow{n\to\infty} 0, \qquad \text{ie,} \qquad \mu_{n,1}\phi_1 + \cdots + \mu_{n,n}\phi_n \xrightarrow{n\to\infty} u,$$

entonces

1. $\mu_{n,j} \xrightarrow{n\to\infty} \langle u, \phi_j\rangle$ para todo $j \in \mathbb{N}$ fijo,
2. $u = \sum_{j=1}^{\infty} \langle u, \phi_j\rangle \phi_j$, y
3. $||u||^2 = \sum_{j=1}^{\infty} |\langle u, \phi_j\rangle|^2$. (Identidad de Parseval)

2. Sea $(H, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ un espacio de Hilbert sobre $\mathbb{R}$. Sea (φ_n) una base ortonormal de H y (λ_n) una sucesión de números reales tal que $0 < \lambda_1 \leq \cdots \leq \lambda_n \to \infty$ si $n \to \infty$. Se define el operador

$$\begin{aligned} A : D_A \subset H &\to H \\ \varphi_n &\mapsto \lambda_n \varphi_n \end{aligned}$$

con dominio

$$D_A \coloneqq \left\{ \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n \varphi_n \in H : \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n^2 \alpha_n^2 < \infty \right\}.$$

Para todo $n \in \mathbb{N}$ se define

$$\zeta_n \coloneqq \varphi_n - \beta_n \varphi_{n+1}, \text{ donde } \beta_n \coloneqq \left(\frac{\lambda_n}{\lambda_{n+1}} \right)^{1/2}.$$

Demuestra que:

(a) D_A es denso en H.

(b) $A : D_A \subset H \to H$ es definido positivo.

(c) El espacio de energía es

$$H_A = \left\{ \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n \varphi_n \in H : \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n \alpha_n^2 < \infty \right\}.$$

(d) $\{\zeta_n\}_{n=1}^{\infty} \subset D_A$.

(e) $\{\zeta_n\}_{n=1}^{\infty} \subset D_A$ es una base de H_A.

(f) $\{A\zeta_n\}_{n=1}^{\infty}$ no es una base de H si $\sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n^{-1} < \infty$.

Demostración. Cabe recalcar que si $\sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n \varphi_n \in D_A$, entonces por definición de D_A y el lema 1,

$$\sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n \lambda_n \varphi_n \text{ existe.}$$

Además, $A : D_A \subset H \to H$ esta definido como el operador lineal que satisface

$$A\left(\sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n \varphi_n \right) \coloneqq \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n \lambda_n \varphi_n.$$

para todo $\sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n \varphi_n \in D_A$.

(a) Sea $u \in H$ fijo y arbitrario. Como (φ_n) es una base ortonormal de H,

$$u = \sum_{n=1}^{\infty} \langle u, \varphi_n \rangle \varphi_n = \lim_{N\to\infty} \sum_{n=1}^{N} \langle u, \varphi_n \rangle \varphi_n. \tag{6}$$

Sea $N \in \mathbb{N}$ fijo. Para todo $n \in \mathbb{N}$ definimos

$$\alpha_n = \begin{cases} \langle u, \varphi_n \rangle & \text{si } n \leq N \\ 0 & \text{si } n > N. \end{cases}$$

Entonces

$$\sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n^2 \alpha_n^2 = \sum_{n=1}^{N} \lambda_n^2 \langle u, \varphi_n \rangle^2 < \infty.$$

y por lo tanto,

$$\sum_{n=1}^{N} \langle u, \varphi_n \rangle \varphi_n \in D_A. \tag{7}$$

Juntando (6) y (7) obtenemos lo deseado.

(b) Sean $\sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n \varphi_n$, $\sum_{m=1}^{\infty} \beta_m \varphi_m \in D_A$. Entonces

$$\begin{aligned}\left\langle A\left(\sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n \varphi_n\right), \sum_{m=1}^{\infty} \beta_m \varphi_m \right\rangle &= \left\langle \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n \lambda_n \varphi_n, \sum_{m=1}^{\infty} \beta_m \varphi_m \right\rangle \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} \lambda_n \alpha_n \beta_m \langle \varphi_n, \varphi_m \rangle \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n \alpha_n \beta_n \end{aligned} \tag{8}$$

donde la última igualdad es consecuencia de que (φ_n) es ortonormal. Análogamente,

$$\left\langle \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n \varphi_n,\ A\left(\sum_{m=1}^{\infty} \beta_m \varphi_m\right) \right\rangle = \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n \alpha_n \beta_n.$$

y por lo tanto A es simétrica. Además, por (8)

$$\left\langle A\left(\sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n \varphi_n\right), \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n \varphi_n \right\rangle = \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n \alpha_n^2 \geq \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_1 \alpha_n^2 = \lambda_1 \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n^2 = \lambda_1 \left\| \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n \varphi_n \right\|$$

donde la última igualdad es consecuencia de que (φ_n) es ortonormal.

(c) Antes que nada, notemos que para todo $n, m \in \mathbb{N}$

$$\langle \varphi_n, \varphi_m \rangle_A = \langle A\varphi_n, \varphi_m \rangle = \langle \lambda_n \varphi_n, \varphi_m \rangle = \lambda_n \langle \varphi_n, \varphi_m \rangle.$$

En particular,

$$||\varphi_n||_A^2 = \lambda_n ||\varphi_n||^2 = \lambda_n.$$

Sea

$$\psi_n := \frac{\varphi_n}{||\varphi_n||_A} = \frac{\varphi_n}{\lambda_n^{1/2}}$$

Entonces (ψ_n) es un subconjunto ortonormal de H_A. Ahora si, sea $u \in H_A$. Por definición, u es el límite (con la norma $||\cdot||_A$) de una sucesión de elementos de D_A. Es fácil ver que esto es equivalente a que existan $\mu_{n,j} \in \mathbb{R}$ con $n \in \mathbb{N}$ y $j \in \mathbb{N}_{\leq n}$ tales que

$$\left\| u - \sum_{j=1}^{n} \mu_{n,j} \varphi_j \right\|_A \xrightarrow{n\to\infty} 0; \qquad \sum_{j=1}^{\infty} \lambda_j^2 \mu_{n,j}^2 < \infty.$$

Entonces por el Teorema 1,

$$u = \sum_{n=1}^{\infty} \langle u, \psi_n \rangle_A \psi_n = \sum_{n=1}^{\infty} \left\langle u, \frac{\varphi_n}{\lambda_n^{1/2}} \right\rangle_A \frac{\varphi_n}{\lambda_n^{1/2}} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\lambda_n} \langle u, \varphi_n \rangle_A \varphi_n.$$

Pero

$$\sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n \left(\frac{1}{\lambda_n} \langle u, \varphi_n \rangle_A \right)^2 = \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n \left(\frac{1}{\lambda_n^{1/2}} \langle u, \psi_n \rangle_A \right)^2 = \sum_{n=1}^{\infty} \langle u, \psi_n \rangle_A^2 < \infty$$

donde la ultima desigualdad es consecuencia de la identidad de Parseval. Por lo tanto,

$$u \in \left\{ \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n \varphi_n \in H : \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n \alpha_n^2 < \infty \right\}.$$

Conversamente, sea $\sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n \varphi_n \in H$ tal que $\sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n \alpha_n^2 < \infty$. Claramente,

$$\sum_{n=1}^{N} \alpha_n \varphi_n \in D_A \text{ para todo } N \in \mathbb{N}. \tag{9}$$

Además,

$$\begin{aligned} \left\| \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n \varphi_n - \sum_{n=1}^{N} \alpha_n \varphi_n \right\|_A^2 &= \left\| \sum_{n=N+1}^{\infty} \alpha_n \varphi_n \right\|_A^2 \\ &= \left\langle A \left(\sum_{n=N+1}^{\infty} \alpha_n \varphi_n \right), \sum_{n=N+1}^{\infty} \alpha_n \varphi_n \right\rangle \\ &= \left\langle \sum_{n=N+1}^{\infty} \alpha_n \lambda_n \varphi_n, \sum_{n=N+1}^{\infty} \alpha_n \varphi_n \right\rangle \\ &= \sum_{n=N+1}^{\infty} \lambda_n \alpha_n^2 \xrightarrow{N \to \infty} 0. \end{aligned} \tag{10}$$

donde la última igualdad es consecuencia de que (φ_n) es ortonormal; la convergencia es consecuencia de que $\sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n \alpha_n^2 < \infty$ y $\lambda_n > 0$. Usando (9) y (10) obtenemos lo deseado.

(d) Sea $n \in \mathbb{N}$ fijo y arbitrario. Para todo $m \in \mathbb{N}$ definimos

$$\alpha_m = \begin{cases} 1 & \text{si } m = n \\ -\beta_n & \text{si } m = n+1 \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}.$$

Entonces

$$\zeta_n = \varphi_n - \beta_n \varphi_{n+1} = \sum_{m=1}^{\infty} \alpha_m \varphi_m,$$

$$\sum_{m=1}^{\infty} \lambda_m^2 \alpha_m^2 = \lambda_m^2 - \lambda_{m+1} \beta_n < \infty$$

Por lo tanto, $\zeta_n \in D_A$.

(e) Antes que nada, sea $\sum_{j=1}^{\infty} \alpha_j \varphi_j \in H$ fijo y arbitrario. Para todo $n \in \mathbb{N}$,

$$\begin{aligned}
\left\langle A\zeta_n, \sum_{j=1}^{\infty} \alpha_j \varphi_j \right\rangle &= \left\langle \lambda_n \varphi_n - \beta_n \lambda_{n+1} \varphi_{n+1}, \sum_{j=1}^{\infty} \alpha_j \varphi_j \right\rangle \\
&= \left\langle \lambda_n \varphi_n, \sum_{j=1}^{\infty} \alpha_j \varphi_j \right\rangle - \left\langle \beta_n \lambda_{n+1} \varphi_{n+1}, \sum_{j=1}^{\infty} \alpha_j \varphi_j \right\rangle \\
&= \lambda_n \alpha_n - \beta_n \lambda_{n+1} \alpha_{n+1} && ((\varphi_j) \text{ es ortogonal}) \\
&= \lambda_n \alpha_n - \left(\frac{\lambda_n}{\lambda_{n+1}} \right)^{1/2} \lambda_{n+1} \alpha_{n+1} \\
&= \lambda_n \alpha_n - \lambda_n^{1/2} \lambda_{n+1}^{1/2} \alpha_{n+1} \\
&= \lambda_n^{1/2} (\lambda_n^{1/2} \alpha_n - \lambda_{n+1}^{1/2} \alpha_{n+1}) && (11)
\end{aligned}$$

Ahora si, sea $\sum_{j=1}^{\infty} \alpha_j \varphi_j \in H_A$, es decir, $\sum_{j=1}^{\infty} \lambda_j \alpha_j^2 < \infty$. Si

$$0 = \left\langle \zeta_n, \sum_{j=1}^{\infty} \alpha_j \varphi_j \right\rangle_A \quad \text{para todo } n \in \mathbb{N},$$

entonces (por (11))

$$0 = \lambda_n^{1/2} (\lambda_n^{1/2} \alpha_n - \lambda_{n+1}^{1/2} \alpha_{n+1}) \text{ para todo } n \in \mathbb{N}.$$

De donde,

$$\lambda_n \alpha_n^2 = \lambda_{n+1} \alpha_{n+1}^2 \text{ para todo } n \in \mathbb{N}.$$

Pero como $\sum_{j=1}^{\infty} \lambda_j \alpha_j^2 < \infty$, debe ser $\sum_{j=1}^{\infty} \alpha_j \varphi_j = 0$. Por lo tanto, $\{\zeta_n\}_{n=1}^{\infty}$ es cerrado en H_A.

(f) Supongamos que $\sum_{j=1}^{\infty} \lambda_j^{-1} < \infty$. Sea

$$\alpha_1 = 1, \quad \alpha_{j+1} = \alpha_j \beta_j \quad \text{para todo } j \in \mathbb{N}.$$

Por inducción se puede demostrar que

$$\alpha_j = \left(\frac{\lambda_1}{\lambda_j} \right)^{1/2} \quad \text{para todo } j \in \mathbb{N}, \tag{12}$$

$$\lambda_j^{1/2} \alpha_j - \lambda_{j+1}^{1/2} \alpha_{j+1} = 0 \text{ para todo } j \in \mathbb{N}. \tag{13}$$

(12) implica que

$$\sum_{j=1}^{\infty} \alpha_j^2 = \sum_{j=1}^{\infty} \frac{\lambda_1}{\lambda_j} = \lambda_1 \sum_{j=1}^{\infty} \lambda_j^{-1} < \infty,$$

de donde, $\sum_{j=1}^{\infty} \alpha_j \varphi_j$ existe (cf. lema 1). Además, por (11) y (13)

$$\left\langle A\zeta_n, \sum_{j=1}^{\infty} \alpha_j \varphi_j \right\rangle = \lambda_n^{1/2} (\lambda_n^{1/2} \alpha_n - \lambda_{n+1}^{1/2} \alpha_{n+1}) = 0.$$

Por lo tanto, $\{\zeta_n\}_{n=1}^{\infty}$ no es cerrado en H_A.

$\square$

3. Teorema de Nečas. Sean $(H, \langle\cdot,\cdot\rangle_H)$ y $(V, \langle\cdot,\cdot\rangle_V)$ dos espacios de Hilbert en $\mathbb{R}$. Sea $a(\cdot,\cdot) : H \times V \to \mathbb{R}$ una forma bilineal con la propiedad de que existen constantes positivas $\alpha, \beta, \gamma > 0$ tales que

$$|a(u,v)| \leq \alpha ||u||_H ||v||_V \text{ para todo } u \in H,\ v \in V, \tag{14}$$

$$\beta ||v||_V \leq \sup_{\substack{u \in H \\ u \neq 0}} \frac{a(u,v)}{||u||_H} \text{ para todo } v \in V, \tag{15}$$

$$\gamma ||u||_H \leq \sup_{\substack{v \in V \\ v \neq 0}} \frac{a(u,v)}{||v||_V} \text{ para todo } u \in H. \tag{16}$$

Sean $h \in H^*$, y $\ell \in V^*$ arbitrarios. Demuestra que existen únicas soluciones $u \in H$ y $v \in V$ a las ecuaciones

$$\begin{cases} a(u,w) = \ell(w) \text{ para todo } w \in V, \\ a(z,v) = h(z) \text{ para todo } z \in H. \end{cases} \tag{17}$$

Demostración. Sea $v \in V$ fijo y arbitrario. Por (14), el funcional en H dado por $u \mapsto a(u,v)$ es continuo. Entonces por el teorema de representación de Riesz, existe un único elemento $Av \in H$ tal que

$$a(u,v) = \langle u, Av\rangle_H \text{ para todo } u \in H.$$

Sea $A : V \to H$ tal que $v \mapsto Av$. Sean $v, w \in V$ y $\lambda \in \mathbb{R}$. Para todo $u \in U$,

$$\langle u, A(v + \lambda w)\rangle_H = a(u, v + \lambda w) = a(u,v) + \lambda a(u,w) = \langle u, Av\rangle_H + \lambda\langle u, Aw\rangle_H = \langle u, Av + \lambda Aw\rangle_H.$$

Entonces A es lineal. Además, por (14),

$$||Av||_H^2 = |\langle Av, Av\rangle_H| = |a(Av, v)| \leq \alpha ||Av||_H ||v||_V.$$

Entonces A es acotado. En resumen, $A : V \to H$ es lineal, acotado, y satisface

$$a(u,v) = \langle u, Av\rangle_H \text{ para todo } u \in H,\ v \in V.$$

Por otro lado, como $h \in H^*$ y $\ell \in V^*$, el teorema de representación de Riesz implica que existen únicos $u_h \in H$ y $v_\ell \in V$ tales que

$$\begin{aligned} h(z) &= \langle z, u_h\rangle_H \text{ para todo } z \in H, \\ \ell(w) &= \langle w, v_\ell\rangle_V \text{ para todo } w \in V. \end{aligned}$$

Usando esto, podemos reescribir (17) de la siguiente manera:

$$\begin{cases} \langle A^* u, w\rangle_V = \langle w, v_\ell\rangle_V \text{ para todo } w \in V, \\ \langle z, Av\rangle_H = \langle z, u_h\rangle_H \text{ para todo } z \in H. \end{cases}$$

Equivalentemente,

$$\begin{cases} A^* u = v_\ell \\ Av = u_h \end{cases}$$

Por lo tanto, resolver (17) es equivalente a demostrar que A y A^* son invertibles. Para esto, notemos que

$$\frac{a(u,v)}{||u||_H} = \frac{\langle u, Av\rangle_H}{||u||_H} \leq ||Av||_H \text{ para todo } u \in H,\ u \neq 0.$$

Por (15), lo anterior implica que para todo $v \in V$

$$\beta ||v||_V \leq \sup_{\substack{u \in H \\ u \neq 0}} \frac{a(u,v)}{||u||_H} \leq ||Av||_H. \tag{18}$$

Por lo tanto, A es inyectivo. En particular,

$$\overline{R(A^*)} = (\ker A)^{\perp} = \{0_H\}^{\perp} = H. \tag{19}$$

Análogamente,

$$\frac{a(u,v)}{||v||_V} = \frac{\langle u, Av\rangle}{||v||_V} = \frac{\langle A^*u, v\rangle}{||v||_V} \leq ||A^*u||_V \text{ para todo } v \in V,\ v \neq 0.$$

Por (16), lo anterior implica que para todo $u \in H$

$$\gamma ||u||_H \leq \sup_{\substack{v\in V\\ v\neq 0}} \frac{a(u,v)}{||v||_V} \leq ||A^*u||_V. \tag{20}$$

Por lo tanto, A^* es inyectivo. En particular,

$$\overline{R(A)} = (\ker A^*)^{\perp} = \{0_V\}^{\perp} = V. \tag{21}$$

Por otro lado, veamos que (18) implica que $R(A)$ es cerrado. Sea $(u_n) \subset R(A) \subset H$ una sucesión de Cauchy. Como $(u_n) \subset R(A)$, existe $(v_n) \subset V$ tal que $Av_n = u_n$. Como (u_n) es de Cauchy y H es de Hilbert, existe $u \in H$ tal que $u_n \to u$. Entonces para todo $m, n \geq 0$

$$||v_n - v_m||_V \overset{(18)}{\leq} \frac{1}{\beta}||Av_n - Av_m||_H = \frac{1}{\beta}||u_n - u_m||_H \xrightarrow{m,n\to\infty} 0$$

Es decir, (v_n) es de Cauchy. Como V es de Hilbert, existe $v \in H$ tal que $v_n \to v$. Por continuidad de A,

$$u = \lim_{n\to\infty} u_n = \lim_{n\to\infty} Av_n = A\left(\lim_{n\to\infty} v_n\right) = Av \in R(A)$$

Entonces $R(A)$ es cerrado. Usando esto, (21), y la inyectividad de A, obtenemos que A es invertible. Análogamente se puede demostrar que (20) implica que $R(A^*)$ es cerrado. Usando esto, (19), y la inyectividad de A^*, obtenemos que A^* es invertible. □

4. Teorema de Aubin-Nitsche. Sean $(H, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ y $(V, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ dos espacios de Hilbert sobre $\mathbb{R}$ tales que $V \subset H$ y V es denso en H. Sea $a : V \times V \to \mathbb{R}$ una forma bilineal. Suponemos que a es V-elíptica y continua, es decir, existen $\alpha, \beta > 0$ tales que

$$|a(u,v)| \leq \alpha ||u||_V ||v||_V$$
$$\beta ||u||_V^2 \leq |a(u,u)|$$

para cualesquiera $u, v \in V$. Sea $f \in H$ arbitrario. Sea $V_n \subset V$ un subespacio vectorial de dimensión finita. Si $u \in V$ y $u_n \in V_n$ son las soluciones únicas a

$$a(u,v) = \langle f, v\rangle_H \text{ para todo } v \in V, \tag{22}$$
$$a(u_n,v_n) = \langle f, v_n\rangle_H \text{ para todo } v_n \in V_n, \tag{23}$$

demuestra que

$$||u - u_n||_H \leq \alpha ||u - u_n||_V \sup_{g\in H} \left\{ \frac{1}{||g||_H} \inf_{\phi_n \in V_n} ||\phi_g - \phi_n||_V \right\},$$

donde, para cada $g \in H$, $\phi_g \in V$ es la única solución de

$$a(v, \phi_g) = \langle g, v\rangle_H \text{ para todo } v \in V. \tag{24}$$

Demostración. Para todo $v_n \in V$,

$$a(u_n, v_n) \overset{(23)}{=} \langle f, v_n \rangle_H \overset{(22)}{=} a(u, v_n).$$

En particular,

$$a(u - u_n, v_n) = 0 \text{ para todo } v_n \in V_n. \tag{25}$$

Por otro lado, notemos que para todo $\phi_n \in V_n$

$$\begin{aligned}
||u - u_n||_H^2 &= \langle u - u_n, u - u_n \rangle_H \\
&= a(u - u_n, \phi_{u-u_n}) && \text{(cf. (24))} \\
&= a(u - u_n, \phi_{u-u_n}) - a(u - u_n, \phi_n) && (\phi_n \in V_n \text{ y } (25)) \\
&= a(u - u_n, \phi_{u-u_n} - \phi_n) \\
&\leq \alpha ||u - u_n||_V ||\phi_{u-u_n} - \phi_n||_V.
\end{aligned}$$

Reacomodando obtenemos

$$\frac{||u - u_n||_H^2}{\alpha ||u - u_n||_V} \leq ||\phi_{u-u_n} - \phi_n||_V \text{ para todo } \phi_n \in V_n.$$

Entonces

$$\frac{||u - u_n||_H^2}{\alpha ||u - u_n||_V} \leq \inf_{\phi_n \in V_n} ||\phi_{u-u_n} - \phi_n||_V.$$

Reacomodando nuevamente y usando la definición de supremo obtenemos,

$$\frac{||u - u_n||_H}{\alpha ||u - u_n||_V} \leq \frac{1}{||u - u_n||_H} \inf_{\phi_n \in V_n} ||\phi_{u-u_n} - \phi_n||_V \leq \sup_{g \in H} \left\{ \frac{1}{||g||_H} \inf_{\phi_n \in V_n} ||\phi_g - \phi_n||_V \right\}.$$

Por lo tanto,

$$||u - u_n||_H \leq \alpha ||u - u_n||_V \sup_{g \in H} \left\{ \frac{1}{||g||_H} \inf_{\phi_n \in V_n} ||\phi_g - \phi_n||_V \right\}.$$

□

Usaremos el siguiente lema.

Lema 2. Sea $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$. Entonces

$$\lim_{r \to \infty} \int_{B_r(0)} |f| = \int_{\mathbb{R}^n} |f|.$$

En particular,

$$\lim_{r \to \infty} \int_{|x| > r} |f| = 0.$$

Demostración. Sea $\chi_{B_r(0)}$ la función característica de $B_r(0)$. Claramente, para todo $x \in \mathbb{R}^n$,

$$\begin{aligned}
(f \cdot \chi_{B_r(0)})(x) &\xrightarrow{r \to \infty} f(x), \\
|(f \cdot \chi_{B_r(0)})(x)| &\leq |f|(x).
\end{aligned}$$

Como $|f| \in L^1$, el teorema de convergencia dominada implica que

$$\lim_{r \to \infty} \int_{B_r(0)} |f| = \lim_{r \to \infty} \int_{\mathbb{R}^n} |f \cdot \chi_{B_r(0)}| = \int_{\mathbb{R}^n} |f|.$$

□

5. Aproximaciones de δ.

(a) Sea $B_r = B_r(0) \subset \mathbb{R}^n$. Sea $\chi_{B_r}(x)$ la función característica de la bola B_r:

$$\chi_{B_r}(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \in B_r \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}$$

Demuestra que

$$\lim_{r \to 0^+} \frac{\chi_{B_r}}{|B_r|} = \delta \text{ en } \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$$

(b) Sea $\eta_\epsilon = \eta_\epsilon(x)$, $x \in \mathbb{R}^n$, el alisador de Friedrichs:

$$\eta_\epsilon(x) = \frac{1}{\epsilon^n} \eta(x/\epsilon)$$

$$\eta(x) = \begin{cases} C \exp\left(\frac{1}{|x|^2 - 1}\right) & \text{si } |x| < 1 \\ 0 & \text{si } |x| \geq 1 \end{cases}$$

donde $C > 0$ es tal que $\int_{\mathbb{R}^n} \eta_\epsilon = 1$. Demuestra que

$$\lim_{\epsilon \to 0^+} \eta_\epsilon = \delta \text{ en } \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n).$$

(c) Sea $\Psi = \Psi(x, t)$ la solución fundamental de la ecuación de calor:

$$\Psi(x,t) = \begin{cases} \frac{1}{(4\pi t)^{n/2}} \exp(-|x|^2/4t) & \text{si } t > 0 \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}$$

Para cada $t > 0$ fijo, Ψ define una distribución en $\mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$ que denotamos por $\Psi(\cdot, t)$. Demuestra que

$$\lim_{t \to 0^+} \Psi(\cdot, t) = \delta \text{ en } \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n).$$

Demostración.

(a) Para todo $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$,

$$\left\langle \frac{\chi_{B_r}}{|B_r|}, \varphi \right\rangle = \int_{\mathbb{R}^n} \frac{\chi_{B_r}}{|B_r|}(x)\varphi(x)\, dx = \frac{1}{|B_r|} \int_{B_r} \varphi(x)\, dx = \frac{1}{|B_r|} |B_r|\, \varphi(\xi_r) = \varphi(\xi_r) \xrightarrow{r \to 0^+} \varphi(0)$$

donde $\xi_r \in B_r$ existe por el TVM para integrales.

(b) Sean $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$ y $\rho > 0$ fijos y arbitrarios. Como φ es continua en 0, existe $\delta > 0$ tal que

$$|\varphi(x) - \varphi(0)| < \frac{\rho}{2} \text{ si } |x| < \delta. \tag{26}$$

Por otro lado, como $\int_{\mathbb{R}^n} \eta = 1$, el lema 2 implica que

$$\lim_{r \to \infty} \int_{|x| \geq r} \eta(x)\, dx = 0.$$

En particular, existe $\epsilon_0 > 0$ suficientemente chica tal que para todo $\epsilon \leq \epsilon_0$

$$\int_{|x| \geq \delta/\epsilon} \eta(x)\, dx < \frac{\rho}{4M}$$

donde M es una cota de φ. Haciendo el cambio de variable $x = \epsilon y$ obtenemos que para todo $\epsilon \leq \epsilon_0$

$$\int_{|x|\geq\delta} \eta_\epsilon(x)\,dx = \int_{|\epsilon y|\geq\delta} \eta(y)\,dy = \int_{|y|\geq\delta/\epsilon} \eta(y)\,dy < \frac{\rho}{4M}. \tag{27}$$

Por lo tanto, para todo $\epsilon \leq \epsilon_0$

$$\begin{aligned}
\big|\langle\eta_\epsilon,\varphi\rangle - \langle\delta,\varphi\rangle\big| &= \left|\int_{\mathbb{R}^n} \eta_\epsilon(x)\varphi(x)\,dx - \varphi(0)\right| \\
&= \left|\int_{\mathbb{R}^n} \eta_\epsilon(x)\varphi(x)\,dx - \left(\int_{\mathbb{R}^n} \eta_\epsilon(x)\,dx\right)\varphi(0)\right| \\
&= \left|\int_{\mathbb{R}^n} \eta_\epsilon(x)(\varphi(x)-\varphi(0))\,dx\right| \\
&\leq \int_{|x|<\delta} \eta_\epsilon(x)|\varphi(x)-\varphi(0)|\,dx + \int_{|x|\geq\delta} \eta_\epsilon(x)|\varphi(x)-\varphi(0)|\,dx \\
&\leq \frac{\rho}{2}\int_{|x|<\delta} \eta_\epsilon(x)\,dx + 2M\int_{|x|\geq\delta} \eta_\epsilon(x)\,dx && \text{((26) y } M \text{ es cota de } \varphi) \\
&< \frac{\rho}{2} + \frac{\rho}{2}. && (\textstyle\int_{\mathbb{R}^n} \eta_\epsilon = 1 \text{ y } (27))
\end{aligned}$$

(c) Sean $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$ y $\epsilon > 0$ fijos y arbitrarios. Como φ es continua en 0, existe $\delta > 0$ tal que

$$|\varphi(x) - \varphi(0)| < \frac{\epsilon}{2} \text{ si } |x| < \delta.$$

Por otro lado, como $\int_{\mathbb{R}^n} \Psi(x,t)\,dx = 1$ para todo $t > 0$ fijo (cf. Evans, p.46), el lema 2 implica que

$$\lim_{r\to\infty} \int_{|x|\geq r} \Psi(x,1)\,dx = 0.$$

En particular, existe $t_0 > 0$ suficientemente chica tal que para todo $t \leq t_0$

$$\int_{|x|\geq\delta/t^{1/2}} \Psi(x,1)\,dx < \frac{\epsilon}{4M}$$

donde M es una cota de φ. Haciendo el cambio de variable $x = t^{1/2}y$ obtenemos que para todo $t \leq t_0$

$$\int_{|x|\geq\delta} \Psi(x,t)\,dx = \int_{|t^{1/2}y|\geq\delta} \Psi(y,1)\,dy = \int_{|y|\geq\delta/t^{1/2}} \Psi(y,1)\,dy < \frac{\epsilon}{4M}.$$

Por lo tanto, para todo $t \leq t_0$

$$\begin{aligned}
\big|\langle\Psi(\cdot,t),\varphi\rangle - \langle\delta,\varphi\rangle\big| &= \left|\int_{\mathbb{R}^n} \Psi(x,t)\varphi(x)\,dx - \varphi(0)\right| \\
&= \left|\int_{\mathbb{R}^n} \Psi(x,t)\varphi(x)\,dx - \left(\int_{\mathbb{R}^n} \Psi(x,t)\,dx\right)\varphi(0)\right| \\
&= \left|\int_{\mathbb{R}^n} \Psi(x,t)(\varphi(x)-\varphi(0))\,dx\right| \\
&\leq \int_{|x|<\delta} \Psi(x,t)|\varphi(x)-\varphi(0)|\,dx + \int_{|x|\geq\delta} \Psi(x,t)|\varphi(x)-\varphi(0)|\,dx \\
&\leq \frac{\epsilon}{2}\int_{|x|<\delta} \Psi(x,t)\,dx + 2M\int_{|x|\geq\delta} \Psi(x,t)\,dx \\
&= \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2}.
\end{aligned}$$

□

6. Sea

$$u(x,t) = H(t)\frac{e^{-x^2/(4t)}}{2\sqrt{\pi t}}$$

donde $H(t)$ es la función Heaviside en $t \in \mathbb{R}$. Evalúa, en sentido de distribuciones, $u_t - u_{xx}$.

Demostración. Para todo $x \in \mathbb{R}$ y $t > 0$ denotemos

$$\Psi(x,t) \coloneqq \frac{e^{-x^2/(4t)}}{2\sqrt{\pi t}}.$$

Calculando directamente se puede ver que

$$\partial_t \Psi(x,t) - \partial^2_{xx}\Psi(x,t) = 0 \text{ para todo } (x,t) \in \mathbb{R} \times (0,\infty), \tag{28}$$

$$\lim_{t\to 0^+} \Psi(x,t) = 0 \text{ para todo } x \neq 0. \tag{29}$$

Sea $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^2)$ fijo y arbitrario. Por integración por partes, para todo $x \neq 0$,

$$\int_0^\infty \Psi(x,t)\partial_t\varphi(x,t)\,dt + \int_0^\infty \partial_t\Psi(x,t)\varphi(x,t)\,dt = \lim_{t\to 0^+} \Psi(x,t)\varphi(x,t) = 0.$$

donde la última igualdad es consecuencia de (29) y de que $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^2)$. En particular, para casi todo $x \in \mathbb{R}$,

$$\int_0^\infty \Psi(x,t)\partial_t\varphi(x,t)\,dt = \int_0^\infty -\partial_t\Psi(x,t)\varphi(x,t)\,dt. \tag{30}$$

Por lo tanto,

$$\begin{aligned}
\langle \partial_t u, \varphi\rangle &= \int_{\mathbb{R}^2} u(x,t)\partial_t\varphi(x,t)\,dt\,dx \\
&= \int_{\mathbb{R}^2} H(t)\Psi(x,t)\partial_t\varphi(x,t)\,dt\,dx \\
&= \int_{-\infty}^\infty \int_0^\infty \Psi(x,t)\partial_t\varphi(x,t)\,dt\,dx \\
&= \int_{-\infty}^\infty \int_0^\infty -\partial_t\Psi(x,t)\varphi(x,t)\,dt\,dx && \text{(cf. (30))} \\
&= \int_{-\infty}^\infty \int_0^\infty \partial^2_{xx}\Psi(x,t)\varphi(x,t)\,dt\,dx && \text{(cf. (28))} \\
&= \int_0^\infty \int_{-\infty}^\infty \partial^2_{xx}\Psi(x,t)\varphi(x,t)\,dx\,dt \\
&= \int_0^\infty \int_{-\infty}^\infty \Psi(x,t)\partial^2_{xx}\varphi(x,t)\,dx\,dt \\
&= \int_{\mathbb{R}^2} H(t)\Psi(x,t)\partial^2_{xx}\varphi(x,t)\,dx\,dt \\
&= \int_{\mathbb{R}^2} u(x,t)\partial^2_{xx}\varphi(x,t)\,dx\,dt \\
&= \langle \partial^2_{xx} u, \varphi\rangle.
\end{aligned}$$

Es decir, en sentido de distribuciones, $u_t - u_{xx} = 0$. ☐

7. Demostración alternativa de que $\mathcal{F}(1) = \delta$. Vamos a dar por hecho la *cerradura del espacio de distribuciones temperadas*: si $\ell_n \in \mathcal{S}'(\mathbb{R})$ es tal que $\langle \ell_n, \varphi \rangle \to \langle \ell, \varphi \rangle$ cuando $n \to \infty$, entonces $\ell \in \mathcal{S}'(\mathbb{R})$.

(a) Demuestra que si $\ell_n \to \ell$ en $\mathcal{S}'_x$, entonces $\mathcal{F}(\ell_n) \to \mathcal{F}(\ell)$ en $\mathcal{S}'_\xi$.

(b) Sea $\ell_n = \ell_{f_n}$ donde

$$f_n(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } |x| < 1 \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}$$

Evalúa $\mathcal{F}(\ell_n)$.

(c) Demuestra que $\ell_n \to 1$ en $\mathcal{S}'_x$.

(d) Prueba que $\mathcal{F}(\ell_n) \to \delta$ en $\mathcal{S}'_\xi$ y concluye.

Demostración.

(a) Supongamos que $\ell_n \to \ell$ en $\mathcal{S}'_x$. Sea $\varphi \in \mathcal{S}$ fijo y arbitrario. Entonces $\widehat{\varphi} \in \mathcal{S}$ y por lo tanto,

$$\langle \mathcal{F}(\ell_n), \varphi \rangle = \langle \ell_n, \widehat{\varphi} \rangle \to \langle \ell, \widehat{\varphi} \rangle = \langle \mathcal{F}(\ell), \varphi \rangle.$$

Cabe recalcar que $\mathcal{F}(\ell)$ tiene sentido por la cerradura del espacio de distribuciones temperadas.

(b) Para todo $x \in \mathbb{R}$,

$$\begin{aligned} \widehat{f_n}(\xi) &= \int_{-\infty}^{\infty} f_n(x) e^{-2\pi i x \xi} dx \\ &= \int_{-n}^{n} e^{-2\pi i x \xi} dx \\ &= \left(\frac{e^{-2\pi i x \xi}}{-2\pi i \xi} \right) \Bigg|_{-n}^{n} \\ &= \frac{e^{2\pi i n \xi} - e^{-2\pi i n \xi}}{2\pi i \xi} \\ &= \frac{\sin(2\pi n \xi)}{\pi \xi}. \end{aligned}$$

Usando la igualdad $\mathcal{F}(\ell_n) = \ell_{\widehat{f_n}}$ obtenemos el cálculo deseado.

(c) Para todo $\varphi \in \mathcal{S}_x$,

$$\begin{aligned} \big| \langle \ell_n, \varphi \rangle - \langle 1, \varphi \rangle \big| &= \left| \int_{-\infty}^{\infty} f_n(x) \varphi(x)\, dx - \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(x)\, dx \right| \\ &= \left| \int_{-n}^{n} \varphi(x)\, dx - \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(x)\, dx \right| \\ &= \left| \int_{|x|>n} \varphi(x)\, dx \right| \xrightarrow{n \to \infty} 0. \end{aligned} \qquad \text{(cf. lema 2)}$$

(d) Para todo $\psi \in \mathcal{S}_\xi$,

$$\langle \widehat{f_n}, \psi \rangle = \langle f_n, \widehat{\psi} \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} f_n(\xi) \widehat{\psi}(\xi)\, d\xi = \int_{-n}^{n} \widehat{\psi}(\xi)\, d\xi \xrightarrow{n \to \infty} \int_{-\infty}^{\infty} \widehat{\psi}(\xi)\, d\xi = \left(\widehat{\psi} \right)^{\vee}(0) = \psi(0).$$

Entonces $\mathcal{F}(\ell_n) \to \delta$ en $\mathcal{S}'_\xi$. Pero (a) y (c) implican $\mathcal{F}(\ell_n) \to \mathcal{F}(1)$ en $\mathcal{S}'_\xi$. Por lo tanto, por unicidad de límite en $\mathcal{S}'_\xi$, obtenemos lo deseado.

□

Usaremos los siguientes lemas.

Lema 3. Sea $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ integrable y considera $f(|\cdot|) : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$. Entonces

$$\int_{|x|\leq M} f(|x|)\, dx = |S^{n-1}| \int_0^M f(r) r^{n-1}\, dr$$

para todo $M > 0$. En particular,

$$\int_{\mathbb{R}^n} f(|x|)\, dx = |S^{n-1}| \int_0^\infty f(r) r^{n-1}\, dr.$$

Lema 4. Sea $f \in L^1_{loc}(\Omega)$. Si existen constantes c y k tales que

$$\int_{|x|\leq A} |f(x)|\, dx \leq cA^k \text{ cuando } A \to \infty,$$

entonces f define una distribución temperada.

Lema 5. Si $O \in O(n)$, entonces $|\det O| = 1$ y $\langle Ox, Oy\rangle = \langle x, y\rangle$ para todo $x, y \in \mathbb{R}^n$.

Lema 6. Sea $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$. Si $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ es lineal e invertible, entonces

$$(f \circ T)^\wedge = |\det T|^{-1}\, \widehat{f} \circ (T^{-1})^T.$$

En particular, si $O \in O(n)$,

$$(f \circ O)^\wedge = \widehat{f} \circ O.$$

Demostración. Para todo $\xi \in \mathbb{R}^n$,

$$\begin{aligned}
(f \circ T)^\wedge(\xi) &= \int_{\mathbb{R}^n} f(Tx) \exp(-2\pi i x \cdot \xi)\, dx \\
&= \int_{\mathbb{R}^n} f(y) \exp(-2\pi i T^{-1} y \cdot \xi) |\det T^{-1}|\, dy && (x = T^{-1}y) \\
&= |\det T|^{-1} \int_{\mathbb{R}^n} f(y) \exp(-2\pi i T^{-1} y \cdot \xi)\, dy \\
&= |\det T|^{-1} \int_{\mathbb{R}^n} f(y) \exp(-2\pi i y \cdot (T^{-1})^T \xi)\, dy \\
&= |\det T|^{-1}\ \widehat{f}((T^{-1})^T \xi).
\end{aligned}$$

□

Lema 7. $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ es radial si y solo si $f \circ O = f$ para todo $O \in O(n)$.

Demostración. Sea f radial. Por el lema 5, $|Ox| = |x|$ para todo $O \in O(n)$ y $x \in \mathbb{R}^n$. Como f es radial, esto implica que $f(Ox) = f(x)$ para todo $O \in O(n)$ y $x \in \mathbb{R}^n$. Conversamente, supongamos que $f \circ O = f$ para todo $O \in O(n)$ y sea $x \in \mathbb{R}^n$ fijo y arbitrario. El siguiente resultado es estándar: para todo $y \in B_{|x|}(0)$ existe $O_y \in O(n)$ tal que $O_y x = y$. Entonces

$$f(y) = f(O_y x) = f(x) \qquad \forall y \in B_{|x|}(0).$$

Por lo tanto, f es radial. □

Lema 8. Sea $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$. Si f es radial, entonces $\widehat{f}$ también.

Demostración. Sea $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$ radial. Para todo $O \in O(n)$ y $\xi \in \mathbb{R}^n$,

$$\begin{aligned}
\widehat{f}(O\xi) &= \int_{\mathbb{R}^n} f(x)\exp(-2\pi i x\cdot O\xi)\,dx \\
&= \int_{\mathbb{R}^n} f(Oy)\exp(-2\pi i Oy\cdot O\xi)|\det O|\;dy && (x = Oy) \\
&= \int_{\mathbb{R}^n} f(Oy)\exp(-2\pi i y\cdot \xi)\,dy && (\text{cf. lema 5}) \\
&= \int_{\mathbb{R}^n} f(y)\exp(-2\pi i y\cdot \xi)\,dy && (\text{cf. lema 7, } f \text{ es radial}) \\
&= \widehat{f}(\xi).
\end{aligned}$$

Usando el lema 7 obtenemos lo deseado. □

Lema 9. Si $\varphi : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ es tal que $\varphi(x) = \exp(-\pi|x|^2)$, entonces $\widehat{\varphi} = \varphi$.

Demostración. Como $\int_{\mathbb{R}} \exp(-\pi x^2)\,dx = 1$, entonces para todo $\alpha \in \mathbb{R}$,

$$\begin{aligned}
\widehat{\varphi}(\alpha,0,0) &= \int_{\mathbb{R}^3} \varphi(x)\exp(-2\pi i x\cdot(\alpha,0,0))\,dx \\
&= \int_{\mathbb{R}^3} \exp(-\pi|x|^2)\exp(-2\pi i x_1\alpha)\,dx \\
&= \int_{\mathbb{R}^3} \exp(-\pi(x_1^2+x_2^2+x_3^2))\exp(-2\pi i x_1\alpha)\,dx \\
&= \int_{\mathbb{R}^3} \exp(-\pi x_1^2 - 2\pi i x_1\alpha)\exp(-\pi x_2^2)\exp(-\pi x_3^2)\,dx \\
&= \left(\int_{\mathbb{R}} \exp(-\pi x_1^2 - 2\pi i x_1\alpha)\,dx_1\right)\left(\int_{\mathbb{R}} \exp(-\pi x_2^2)\,dx_2\right)\left(\int_{\mathbb{R}} \exp(-\pi x_3^2)\,dx_3\right) \\
&= \int_{\mathbb{R}} \exp(-\pi x_1^2 - 2\pi i x_1\alpha)\,dx_1 \\
&= \exp(-\pi\alpha^2)
\end{aligned}$$

donde la última igualdad es un cálculo directo. Por lo tanto, para todo $\xi \in \mathbb{R}^3$

$$\widehat{\varphi}(\xi) = \widehat{\varphi}(|\xi|,0,0) = \exp(-\pi|\xi|^2) = \varphi(\xi).$$

donde la primera igualdad es por el lema 8. □

8. Calculo del inverso del laplaciano en $\mathbb{R}^3$. Sean $x \in \mathbb{R}^3$, $\xi \in \mathbb{R}^3$, y $\widehat{K}(\xi) := \frac{1}{|\xi|^2}$.

(a) Demuestra que $\widehat{K}$ es una distribución temperada en $\mathcal{S}'_\xi(\mathbb{R}^3)$.

(b) Demuestra que $K = K_\infty + K_2$ donde K_∞ es acotada y $K_2 \in L^2(\mathbb{R}^3)$.

(c) Prueba que para cualquier matriz ortogonal $O \in \mathbb{R}^{3\times 3}$ se tiene que $K(Ox) = K(x)$ para todo $x \in \mathbb{R}^3$.

(d) Demuestra que $K(x/\lambda) = \lambda K(x)$ para cualquier $\lambda > 0$ y concluye que $K(x) = \frac{C}{|x|}$ donde C es una constante. Calcula la constante C considerando $\langle K, \varphi\rangle$ con $\varphi = \exp(-\pi|x|^2) \in \mathcal{S}_x$.

Demostración.

(a) Por el lema 3, para todo $A > 0$,

$$\int_{|\xi|\leq A} |\widehat{K}(\xi)|\, d\xi = \int_{|\xi|\leq A} \frac{1}{|\xi|^2}\, d\xi = |S^{3-1}| \int_0^A \frac{1}{r^2} r^{3-1} dr = |S^2| A. \tag{31}$$

Entonces por el lema 4 (con $c = |S^2|$ y $k = 1$) basta probar que $\widehat{K} \in L^1_{loc}(\mathbb{R}^3)$.

Caso 1. $\omega \subset \mathbb{R}^3$ es un abierto acotado tal que $0 \notin \overline{\omega}$.
En este caso es fácil ver que $\widehat{K}$ es acotada en ω. Como ω es acotado, esto implica que $\widehat{K}|_\omega \in L^1(\omega)$.

Caso 2. $\omega \subset \mathbb{R}^3$ es un abierto acotado tal que $0 \in \overline{\omega}$.
Si $B_1 = B_1(0)$, entonces

$$\int_\omega \widehat{K}(\xi)\, d\xi = \int_{\omega\cap\overline{B_1}} \widehat{K}(\xi)\, d\xi + \int_{\omega\setminus\overline{B_1}} \widehat{K}(\xi)\, d\xi \leq \int_{\overline{B_1}} \widehat{K}(\xi)\, d\xi + \int_{\omega\setminus\overline{B_1}} \widehat{K}(\xi)\, d\xi$$

donde la desigualdad es porque $\widehat{K}$ es positiva. El primer sumando es finito por (31) y el segundo sumando es finito por el caso 1. Por lo tanto, $\widehat{K}|_\omega \in L^1(\omega)$.

Juntando ambos casos obtenemos $\widehat{K} \in L^1_{loc}(\mathbb{R}^3)$.

(b) Sean

$$J_\infty \coloneqq \chi_{B_1}\widehat{K} \qquad \text{y} \qquad J_2 \coloneqq \chi_{\mathbb{R}^3\setminus B_1}\widehat{K}.$$

Entonces $\widehat{K} = J_\infty + J_2$, $J_\infty \in L^1(\mathbb{R}^3)$ (por (31)), y $J_2 \in L^2(\mathbb{R}^3)$ pues

$$\int_{\mathbb{R}^3} |J_2(\xi)|^2\, d\xi = \int_{|\xi|\geq 1} |\widehat{K}(\xi)|^2\, d\xi = \int_{|\xi|\geq 1} \frac{1}{|\xi|^4}\, d\xi = |S^2| \int_1^\infty \frac{1}{r^4} r^2\, dr = |S^2| < \infty.$$

Como $(\cdot)^\vee$ es lineal, mapea $L^1(\mathbb{R}^n)$ en $L^\infty(\mathbb{R}^n)$, y mapea $L^2(\mathbb{R}^n)$ en $L^2(\mathbb{R}^n)$, entonces

$$K_\infty \coloneqq (J_\infty)^\vee \qquad \text{y} \qquad K_2 \coloneqq (J_2)^\vee$$

cumplen lo deseado.

(c) Sea $O \in O(3)$. Para todo $\varphi \in \mathcal{S}_x(\mathbb{R}^3)$

$$\begin{aligned}
\langle K\circ O, \varphi\rangle &= \int_{\mathbb{R}^3} (K\circ O)^\wedge(\xi)\widehat{\varphi}(\xi)\, d\xi \\
&= \int_{\mathbb{R}^3} (\widehat{K}\circ O)(\xi)\widehat{\varphi}(\xi)\, d\xi && \text{(cf. lema 6)} \\
&= \int_{\mathbb{R}^3} \widehat{K}(\xi)\widehat{\varphi}(\xi)\, d\xi && \text{(cf. lema 7, } \widehat{K} \text{ es radial)} \\
&= \langle K, \varphi\rangle.
\end{aligned}$$

Por lo tanto $K(Ox) = K(x)$ para todo $x \in \mathbb{R}^3$.

(d) Sea $\lambda > 0$ fijo y arbitrario y sea $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ dada por $Tx = x/\lambda$. Por el lema 6, para todo $x \in \mathbb{R}^3$

$$(K\circ T)^\wedge(x) = |\det T|^{-1}\, \widehat{K}\circ (T^{-1})^T(x) = \lambda^3 \widehat{K}(\lambda x) = \lambda^3 \frac{1}{|\lambda x|^2} = \lambda \frac{1}{|x|^2} = \lambda \widehat{K}(x).$$

Aplicando $(\cdot)^\vee$ obtenemos que para todo $x \in \mathbb{R}^3$

$$K(x/\lambda) = (K\circ T)(x) = \lambda K(x).$$

Por lo tanto, para todo $x \in \mathbb{R}^3$

$$K(x) = K\left(\frac{x}{|x|}|x|\right) = \frac{1}{|x|}K(x/|x|)$$

Pero como K es radial, $C \coloneqq K(x/|x|)$ es constante. Calculemos C. Consideremos $\varphi = \exp(-\pi|x|^2)$. Por un lado, por el lema 3,

$$\langle K, \varphi\rangle = \int_{\mathbb{R}^3} \frac{C}{|x|} \exp(-\pi|x|^2)\, dx = |S^2| \int_0^\infty \frac{C}{r} \exp(-\pi r^2) r^2\, dr = |S^2|C \int_0^\infty \exp(-\pi r^2) r\, dr = |S^2|C\frac{1}{2\pi}.$$

Por otro lado, como $\widehat{\varphi} = \varphi$ (cf. lema 9), entonces

$$\langle K, \varphi\rangle = \int_{\mathbb{R}^3} \widehat{K}(\xi)\widehat{\varphi}(\xi)\, d\xi = \int_{\mathbb{R}^3} \frac{1}{|\xi|^2} \exp(-\pi|\xi|^2)\, d\xi = |S^2| \int_0^\infty \frac{1}{r^2} \exp(-\pi r^2) r^2\, dr = |S^2|\frac{1}{2}.$$

Comparando obtenemos $C = \pi$.

$\square$