Tarea 2

Análisis Real (2025-2)
Dr. Javier Fernando Rosenblueth Laguette

Diego Leipen Lara

7. Demuestra que l es un punto de acumulación de (x_n) si y solo si hay una subsucesión $(x_{n_j})_{j=1}^{\infty}$ que converge a l.

Demostración. Si $x_{n_j} \to l$, entonces l es punto de acumulación de (x_{n_j}). En particular, también es punto de acumulación de (x_n). Conversamente, supongamos que l es un punto de acumulación de (x_n). Construimos la sucesión recursivamente. Poniendo $\epsilon = 1$ y $N = 1$ en la definición de punto de acumulación, obtenemos $n_{1,1} >$[1] N tal que $|x_{n_{1,1}} - l| < \epsilon$. Definimos $n_1 \coloneqq n_{1,1}$. Ahora bien, supongamos que ya tenemos una subsucesión finita $(x_{n_j})_{j=1}^{k}$ tal que $n_1 < n_2 < \cdots < n_k$ y $|x_{n_j} - l| < \frac{1}{j}$ para todo $j = 1, \ldots, k$. Poniendo $\epsilon = \frac{1}{k+1}$ y $N = n_k$ en la definición de punto de acumulación, obtenemos $n_{k+1} > n_k$ tal que $|x_{n_{k+1}} - l| < \frac{1}{k+1}$. Claramente $x_{n_j} \to l$. □

12. Demuestra que $l = \limsup x_n$ si y solo si

(i) $\forall \epsilon > 0\ \exists n \in \mathbb{N}$ tal que $x_k < l + \epsilon$ para todo $k \geq n$.

(ii) $\forall \epsilon > 0\ \forall n \in \mathbb{N}\ \exists k \geq n$ tal que $x_k > l - \epsilon$.

Demostración. Sea $l = \limsup x_n$ y sea $\epsilon > 0$. Como $l = \inf_n \sup_{k \geq n} x_k$, (por propiedades del ínfimo)

$$\exists n_0 \in \mathbb{N} \text{ tal que } \sup_{k \geq n_0} x_k < l + \epsilon.$$

En particular, $x_k < l + \epsilon$ para todo $k \geq n_0$. Esto demuestra (i). Sea $\epsilon > 0$ y sea $n \in \mathbb{N}$. Claramente,

$$l - \epsilon < l = \inf_n \sup_{k \geq n} x_k \leq \sup_{k \geq n_0} x_k \text{ para todo } n_0 \in \mathbb{N}.$$

Entonces (por propiedades de supremo)

$$\exists k_0 \geq n_0 \text{ tal que } l - \epsilon < x_{k_0} \leq \sup_{k \geq n_0} x_k.$$

Esto demuestra (ii).

Conversamente, supongamos que l satisface (i) y (ii). Para ver que $l = \inf_n \sup_{k \geq n} x_k$, veamos que

(a) l es cota inferior de $\{\sup_{k \geq n} x_k \mid n \in \mathbb{N}\}$.

(b) $\forall \epsilon > 0\ \exists n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $l + \epsilon \geq \sup_{k \geq n_0} x_k$.

De (ii) se sigue que $\sup_{k \geq n} x_k > l - \epsilon$ para todo $\epsilon > 0$ y todo $n \in \mathbb{N}$. De donde, $\sup_{k \geq n} x_k > l$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Esto demuestra (a). Ahora bien, sea $\epsilon > 0$. Por (i) existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $l + \epsilon > x_k$ para todo $k \geq n$. En particular, $l + \epsilon \geq \sup_{k \geq n_0} x_k$. Esto demuestra (b). □

[1] Podemos asumir que esta desigualdad es estricta. De hecho hay una cantidad infinidad de n's que satisfacen esta condición.

8. Demuestra que:

(a) $\limsup x_n$ es el punto de acumulación mas grande de (x_n) y que $\liminf x_n$ es el punto de acumulación mas chico de (x_n).

(b) Toda sucesión infinita acotada tiene una subsucesión que converge a un numero real.

Demostración.

(a) Sea $l = \limsup x_n$. En el ejercicio 12 vimos que esto es si y solo si

(i) $\forall \epsilon > 0 \; \exists n \in \mathbb{N}$ tal que $x_k < l + \epsilon$ para todo $k \geq n$

(ii) $\forall \epsilon > 0 \; \forall n \in \mathbb{N} \; \exists k \geq n$ tal que $x_k > l - \epsilon$.

Notemos que (ii) implica que l es punto de acumulación. Para ver que es el mas grande, sea $l_0 > l$. Veamos que l_0 no es de acumulación. Poniendo $\epsilon = (l_0 - l)/2$ en (i) obtenemos $n \in \mathbb{N}$ tal que

$$x_k < l + \epsilon = (l + l_0)/2 < l_0 \text{ para todo } k \geq n.$$

En particular,

$$|l_0 - x_k| = l_0 - x_k > l_0 - (l + l_0)/2 > 0 \text{ para todo } k \geq n.$$

Por lo tanto, l_0 no es de acumulación. La demostración de que $\liminf x_n$ es el punto de acumulación más chico de (x_n) es completamente análoga. □

(b) Sea (x_n) infinita y acotada. Sea $M > 0$ tal que $|x_k| < M$ para todo k. Equivalentemente $-M \leq x_k \leq M$ para todo k. Entonces $-M \leq \sup_{k \geq n} x_k \leq M$ para todo k. Entonces $-M \leq \inf_n \sup_{k \geq n} x_k \leq M$. Es decir, $|\limsup x_n| \leq M < \infty$. Por 8a, $\limsup x_n$ es un punto de acumulación de (x_n). Más aun, por el ejercicio 7, hay una subsucesión que converge a (el numero real) $\limsup x_n$.

□

10. Demuestra que:

(a) Toda sucesión convergente es de Cauchy.

(b) Toda sucesión de Cauchy es acotada.

(c) Si una sucesión de Cauchy (x_n) tiene una subsucesión que converge a l, entonces $x_n \to l$.

(d) Una sucesión es convergente si y solo si es de Cauchy.

Demostración.

(a) Supongamos que $x_n \to l$ y sea $\epsilon > 0$. Entonces existe $N \in \mathbb{N}$ tal que $|x_n - l| < \epsilon/2$ para todo $n \geq N$. En particular, si $m, n \geq N$, entonces

$$|x_m - x_n| \leq |x_m - l| + |l - x_m| < \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2} = \epsilon.$$

(b) Sea (x_n) de Cauchy y sea $\epsilon = 1$. Entonces existe $N \in \mathbb{N}$ tal que $|x_n - x_m| < 1$ para todo $m, n \geq N$. En particular, para $m = N$

$$|x_n| - |x_N| \leq |x_n - x_N| < 1.$$

De donde, $|x_n| \leq |x_N| + 1$ para todo $n \geq N$. Sea

$$M \coloneqq \max\{|x_1|, \ldots, |x_{N-1}|, |x_N| + 1\}$$

Entonces M es cota de (x_n).

(c) Sea (x_n) de Cauchy, sea $x_{n_j} \to l$, y sea $\epsilon > 0$. Entonces existe $N_1 \in \mathbb{N}$ tal que $|x_{n_j} - l| < \epsilon/2$ para todo $j \geq N_1$. En particular, (como $j \leq n_j$) $|x_{n_j} - l| < \epsilon/2$ para todo $n_j \geq N_1$. Por otro lado, como (x_n) es de Cauchy, existe $N_2 > 0$ tal que $|x_n - x_m| < \epsilon/2$ para todo $m, n \geq N_2$. Sea $N \coloneqq \max\{N_1, N_2\}$. Entonces para todo $n \geq N$,

$$|x_n - l| \leq |x_n - x_{n_j}| + |x_{n_j} - l| < \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2} = \epsilon$$

donde n_j es cualquier indice de la subsucesión con $n_j \geq N$.

(d) Sea (x_n) de Cauchy. Por 10(b) es acotada. Más aun, por 8(b), tiene una subsucesión que converge a un numero real. Luego, por 10(c), $x_n \to l$. El converso es 10(a).

$\square$

21. Sea p un entero mayor a 1 y x un numero real, $0 < x < 1$. Demuestra que hay una sucesión (a_n) de enteros con $0 \leq a_n < p$ tal que

$$x = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{p^n} \tag{1}$$

y que esta sucesión es única excepto cuando x es de la forma q/p^n, en cuyo caso hay exactamente dos sucesiones que satisfacen (1). Demuestra que conversamente, si (a_n) es cualquier sucesión de enteros con $0 \leq a_n < p$, entonces la serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{p^n}$$

converge a un x con $0 \leq x \leq 1$.

Demostración. Sea $x \in [0, 1]$ fijo y arbitrario. Definimos recursivamente

$$a_1 \coloneqq \lfloor xp \rfloor, \qquad a_{n+1} = \left\lfloor \left(x - \sum_{i=1}^{n} \frac{a_i}{p^i} \right) p^{n+1} \right\rfloor$$

donde $\lfloor \cdot \rfloor$ es la función piso. Como $0 \leq xp \leq p$, entonces $0 \leq a_1 \leq p$. Más aun, como $0 \leq \lfloor x \rfloor - x < 1$, entonces para todo $n \geq 2$

$$0 \leq \left(x - \sum_{i=1}^{n-1} \frac{a_i}{p^i} \right) p^n - \underbrace{\left\lfloor \left(x - \sum_{i=1}^{n-1} \frac{a_i}{p^i} \right) p^n \right\rfloor}_{a_n} < 1. \tag{2}$$

De donde,

$$a_{n+1} = \left\lfloor \left(x - \sum_{i=1}^{n} \frac{a_i}{p^i} \right) p^{n+1} \right\rfloor = \left\lfloor \left(x - \sum_{i=1}^{n-1} \frac{a_i}{p^i} - \frac{a_n}{p^n} \right) p^{n+1} \right\rfloor = \left\lfloor \left(\left(x - \sum_{i=1}^{n-1} \frac{a_i}{p^i} \right) p^n - a_n \right) p \right\rfloor < p.$$

Por lo tanto, (a_n) es una sucesión de enteros con $0 \leq a_n < p$. Por otro lado, notemos que

$$\left| x - \sum_{i=1}^{n} \frac{a_i}{p^i} \right| = \left| x - \sum_{i=1}^{n-1} \frac{a_i}{p^i} - \frac{a_n}{p^n} \right| = \left| \left(x - \sum_{i=1}^{n-1} \frac{a_i}{p^i} \right) p^n - a_n \right| \frac{1}{p^n} < \frac{1}{p^n} \xrightarrow{n \to \infty} 0$$

donde la última desigualdad es consecuencia de (2). Por lo tanto, $x = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{p^n}$.

Ahora bien, supongamos que (b_n) es una sucesión de enteros con $0 \leq b_n < p$ y $x = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{b_n}{p^n}$. Supongamos que $(a_n) \neq (b_n)$ y sea $k = \min\{n \in \mathbb{N} \mid a_n \neq b_n\}$. Sin perdida de generalidad, supongamos que $a_k < b_k$. Entonces

$$0 = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} \frac{a_i - b_i}{p^i} = \sum_{i=1}^{k} \frac{a_i - b_i}{p^i} + \lim_{n\to\infty} \sum_{i=k+1}^{n} \frac{a_i - b_i}{p^i} = \frac{a_k - b_k}{p^k} + \lim_{n\to\infty} \sum_{i=k+1}^{n} \frac{a_i - b_i}{p^i}. \tag{3}$$

donde la última igualdad es consecuencia de que $i < k$. Más aun,

$$\begin{aligned}
\frac{1}{p^k} &\leq \frac{a_k - b_k}{p^k} && (a_k - b_k \geq 1 \text{ pues son enteros distintos}) \\
&= \sum_{n=k+1}^{\infty} \frac{b_n - a_n}{p^n} && (\text{por } (3)) \\
&\leq \frac{p-1}{p^{k+1}} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{p^n} && (b_n - a_n \leq p - 1 \text{ pues } 0 \leq a_i, b_i < p) \\
&= \frac{p-1}{p^{k+1}} \frac{1}{1 - p^{-1}} \\
&= \frac{1}{p^k}.
\end{aligned}$$

De donde,

$$a_k = b_k + 1 \qquad \text{y} \qquad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{b_{n+k} - a_{n+k}}{p^k} = 1.$$

Pero la segunda igualdad se cumple si y solo si $b_{n+k} = p-1$ y $a_{n+k} = 0$ para todo n. En efecto, $(b_{n+k} - a_{n+k})$ es una sucesión de enteros con $0 \leq b_{n+k} - a_{n+k} < p$. Mas aun, la única sucesión (c_n) de enteros con $0 \leq c_n < p$ que satisface $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{c_n}{p^n} = 1$ es $c_n = p - 1$ para todo n. Y la única manera de que $b_{n+k} - a_{n+k} = p - 1$ es si $b_{n+k} = p - 1$ y $a_{n+k} = 0$. Por lo tanto,

$$x = \sum_{i=1}^{k} \frac{a_i}{p^i} = \frac{\sum_{i=1}^{k} a_i p^{k_i}}{p^k} = \frac{q}{p^k} \qquad \text{y} \qquad b_n = \begin{cases} a_n & \text{si } n < k \\ a_k - 1 & \text{si } n = k \\ p - 1 & \text{si } n \geq k + 1 \end{cases} \tag{4}$$

Para el converso, sea (a_n) una sucesión de enteros con $0 \leq a_n < p$. Entonces

$$0 \leq \sum_{i=n}^{n+m} \frac{a_i}{p^i} \leq \sum_{i=n}^{n+m} \frac{p-1}{p^i} = \frac{p-1}{p^n} \sum_{i=0}^{m} \frac{1}{p^i} = \frac{p^{m+1} - 1}{p^{m+n}} = \frac{1}{p^{n-1}} - \frac{1}{p^{m+n}}$$

Sea $\epsilon > 0$ y sea N tal que $\frac{1}{p^{n-1}} < \frac{\epsilon}{2}$. Entonces

$$\left| \sum_{i=n}^{n+m} \frac{a_i}{p^i} \right| \leq \frac{1}{p^{n-1}} + \frac{1}{p^{m+n}} < \epsilon \text{ para todo } n, m \geq N.$$

Es decir, la sucesión de sumas parciales es de Cauchy y por lo tanto, la serie converge. También,

$$0 \leq \sum_{i=1}^{n} \frac{a_i}{p^i} \leq \sum_{i=1}^{n} \frac{p-1}{p^i} = 1 - \frac{1}{p^n} < 1.$$

Tomando el límite $n \to \infty$ obtenemos

$$0 \leq \sum_{i=1}^{\infty} \frac{a_i}{p^i} \leq 1.$$

$\square$

22. Demuestra que $\mathbb{R}$ es no numerable. (Usa el problema 1.23.)

Demostración. Recordemos que en el problema 1.23 vimos que el conjunto E de sucesiones en $\{0,1\}$ es no numerable. Sea E' el subconjunto de E de sucesiones en $\{0,1\}$ que *no* son eventualmente 0. Con diagonalización de Cantor también se puede demostrar que E' también es no numerable[2]. La función

$$E' \ni (a_n) \mapsto \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{2^n} \in [0,1]$$

es inyectiva por la unicidad demostrada en el ejercicio 21. □

35. Sea (F_n) una sucesión de conjuntos cerrados no vacíos de números reales. Si $F_{n+1} \subset F_n$ para todo n, entonces $\bigcap_{i=1}^{\infty} F_i \neq \emptyset$. Da un ejemplo para demostrar que esta conclusión puede ser falsa si no pedimos que alguno de los conjuntos sea acotado.

Demostración. Sea F_{n_0} el subconjunto acotado. Definimos $K_i \coloneqq F_{n_0-1+i}$. Primero veamos que $\bigcap_{i=1}^{\infty} K_i \neq \emptyset$. Para esto supongamos que $\bigcap_{i=1}^{\infty} K_i = \emptyset$. Entonces $\bigcup_{i=1}^{\infty}(\mathbb{R} \setminus K_i) = \mathbb{R}$. Denotemos $U_i \coloneqq \mathbb{R} \setminus K_i$. Por lo anterior, $\{U_i\}_{i=1}^{\infty}$ es una cubierta abierta de $\mathbb{R}$ y en particular de K_1. Por Heine-Borel, existe $N \in \mathbb{N}$ tal que

$$K_1 \subset \bigcup_{i=1}^{N} U_i = U_N = \mathbb{R} \setminus K_N.$$

donde la primera igualdad se cumple porque $\{U_i\}$ es ascendente (pues $\{F_i\}$ es descendente). Pero esto contradice $K_N = F_{n_0-1+N} \subset F_{n_0} = K_1$. Por lo tanto, $\bigcap_{i=1}^{\infty} F_{n_0-1+i} = \bigcap_{i=1}^{\infty} K_i \neq \emptyset$. En particular, como $\{F_i\}$ es descendente, $\bigcap_{i=1}^{\infty} F_i = \bigcap_{i=n_0}^{\infty} F_i \neq \emptyset$. Para el ejemplo, considera $F_n \coloneqq [n, \infty)$. □

34. Sea $\mathcal{C}$ una colección de conjuntos cerrados (de números reales) con la propiedad de que toda subcolección finita tiene intersección no vacía, y supongamos que alguno de los conjuntos es acotado. Entonces

$$\bigcap_{F \in \mathcal{C}} F \neq \emptyset.$$

Demostración. Considera $\mathcal{O} = \{\mathbb{R} \setminus F \mid F \in \mathcal{F}\}$. Por Lindelof, hay una subcolección numerable $\{U_i\}$ de $\mathcal{O}$ tal que $\bigcup_{U \in \mathcal{O}} U = \bigcup_{i=1}^{\infty} U_i$. Entonces $\bigcap_{F \in \mathcal{F}} F = \bigcap_{i=1}^{\infty} F_i$. Además, si F_0 es el cerrado acotado, entonces

$$\bigcap_{i=0}^{\infty} F_i \subset \bigcap_{i=1}^{\infty} F_i = \bigcap_{F \in \mathcal{F}} F \subset \bigcap_{i=0}^{\infty} F_i.$$

Es fácil verificar que $(F_n)_{n=0}^{\infty}$ satisface las condiciones del ejercicio 35 y por lo tanto, $\bigcap_{F \in \mathcal{F}} F \neq \emptyset$. □

36. El conjunto ternario de Cantor consiste de todos los números reales en $[0,1]$ que tienen expansión ternaria (a_n) tal que a_n nunca es 1. (Si x tiene dos expansiones ternarias, ponemos x en el conjunto de Cantor si *una* de las expansiones no tiene ningún termino igual a 1.) Demuestra que C es cerrado y que C es obtenido removiendo el tercio medio $(1/3, 2/3)$ de $[0,1]$, luego removiendo los tercios medios $(1/9, 2/9)$ y $(7/9, 8/9)$ de los intervalos restantes, y así sucesivamente.

Demostración. Por (4), los números en $[0,1]$ que no tienen expansión ternaria son exactamente aquellos que tienen una expansión ternaria eventualmente 0. Más aun, tenemos dos casos.

1. Si el último dígito no nulo es 1, entonces la otra expansión es una expansión infinita que coincide con la finita (estrictamente) antes del último dígito no nulo y es de la forma $0, 2, 2, \ldots$ en el resto.

2. Si el último dígito no nulo es 2, entonces la otra expansión es una expansión infinita que coincide con la finita (estrictamente) antes del último dígito no nulo y es de la forma $1, 2, 2, \ldots$ en el resto.

[2] Otra forma es notar que E' es igual a E menos el conjunto de “sucesiones finitas” (las sucesiones que son eventualmente cero). Es decir, E' es igual a E menos un conjunto numerable.

Por lo tanto $x \in C$ si y solo si se satisface exactamente uno de los siguientes casos:

1. x tiene una única expansión ternaria (a_n) tal que a_n nunca es 1. En cuyo caso, esta expansión no es eventualmente cero.
2. x tiene una expansión ternaria eventualmente cero tal que el único dígito que *puede* ser 1 es el último dígito no nulo. Por ejemplo,

$$\begin{aligned}
0.0201 &= 0.0200222... \in C,\\
0.0202 &= 0.0201222... \in C,\\
0.0101 &= 0.0100222... \notin C,\\
0.0102 &= 0.0101222... \notin C.
\end{aligned}$$

   En este caso, (por simplicidad) trabajamos con la sucesión que es eventualmente cero.

Ahora bien, consideremos la siguiente sucesión de conjuntos. Sea $F_1 = [0, 1/3] \cup [2/3, 1]$ y suponiendo que $F_n = \bigcup_{i=1}^{2n} [\alpha_i, \beta_i]$ esta dado, definimos

$$F_{n+1} = \bigcup_{i=1}^{2n} \left[\alpha_i, \alpha_i + \frac{1}{3^{i+1}}\right] \cup \left[\alpha_i + \frac{2}{3^{i+1}}, \beta_i\right] \tag{5}$$

Veamos que $C = \bigcap_{n=1}^{\infty} F_n$.

$\subset$) Sea $x \in C$ con expansión ternaria (a_n). Definiremos una sucesión de intervalos a partir de (a_n). Sea

$$I_1 := \begin{cases} [0, 1/3] & \text{si } a_1 = 0, \\ [1/3, 2/3] & \text{si } a_1 = 2. \end{cases}$$

y suponiendo que $I_k = [\alpha_k, \beta_k]$ esta dado, definimos

$$I_{k+1} := \begin{cases} \left[\alpha_k, \alpha_k + \frac{1}{3^{k+1}}\right] & \text{si } a_{k+1} = 0 \\ \\ \left[\alpha_k + \frac{2}{3^{k+1}}, \beta_k\right] & \text{si } a_{k+1} = 2. \end{cases}$$

Claramente $I_k \subset C$ para todo $k \in \mathbb{N}$. Por lo tanto, basta demostrar que $x \in \bigcap_{k=1}^{\infty} I_k$. Para esto, veremos por inducción que para todo $k \in \mathbb{N}$,

$$\sum_{n=1}^{k} \frac{a_n}{3^n} = \alpha_k \qquad \text{y} \qquad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{3^n} \in I_k \tag{6}$$

donde α_k denota el extremo izquierdo de I_k. Procedemos por inducción.

- *Paso base.* $(k = 1)$
  Caso 1. $(a_1 = 0)$ Entonces $I_1 = [0, 1/3]$ y $\sum_{n=1}^{1} \frac{a_n}{3^n} = \frac{a_1}{3} = 0 = \alpha_1$. Más aun,

$$x = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{3^n} = \sum_{n=2}^{\infty} \frac{a_n}{3^n} \leq \sum_{n=2}^{\infty} \frac{2}{3^n} = \frac{1}{3}.$$

  Por lo tanto, $x \in [0, 1/3] = I_1$.
  Caso 2. $(a_1 = 2)$ Entonces $I_1 = [2/3, 1]$ y $\sum_{n=1}^{1} \frac{a_n}{3^n} = \frac{a_1}{3} = \frac{2}{3} = \alpha_1$. Más aun,

$$x = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{3^n} = \frac{2}{3} + \sum_{n=2}^{\infty} \frac{a_n}{3^n} \geq \frac{2}{3}.$$

  Por lo tanto, $x \in [2/3, 1] = I_1$.

- *Paso inductivo.* Supongamos que

$$\sum_{n=1}^{k} \frac{a_n}{3^n} = \alpha_k \qquad \text{y} \qquad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{3^n} \in I_k.$$

Caso 1. ($a_{k+1} = 0$) Entonces $I_{k+1} = \left[\alpha_k, \alpha_k + \frac{1}{3^{k+1}}\right]$ y

$$\sum_{n=1}^{k+1} \frac{a_n}{3^n} = \sum_{n=1}^{k} \frac{a_n}{3^n} = \alpha_k = \alpha_{k+1}.$$

Más aun,

$$\sum_{n=k+2}^{\infty} \frac{a_n}{3^n} \leq \sum_{n=k+2}^{\infty} \frac{2}{3^n} = \frac{1}{3^{k+1}}.$$

De donde,

$$x = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{3^n} = \sum_{n=1}^{k+1} \frac{a_n}{3^n} + \sum_{n=k+2}^{\infty} \frac{a_n}{3^n} \leq \alpha_k + \frac{1}{3^{k+1}}.$$

Por lo tanto, $x \in \left[\alpha_k, \alpha_k + \frac{1}{3^{k+1}}\right] = I_{k+1}$.

Caso 2. ($a_{k+1} = 2$) Entonces $I_{k+1} = \left[\alpha_k + \frac{2}{3^{k+1}}, \beta_k\right]$ y

$$\sum_{n=1}^{k+1} \frac{a_n}{3^n} = \sum_{n=1}^{k} \frac{a_n}{3^n} + \frac{a_{n+1}}{3^{n+1}} = \alpha_k + \frac{2}{3^{n+1}} = \alpha_{k+1}.$$

Más aun,

$$\sum_{n=k+1}^{\infty} \frac{a_n}{3^n} \geq \frac{a_{k+1}}{3^{k+1}} = \frac{2}{3^{k+1}}.$$

De donde,

$$x = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{3^n} = \sum_{n=1}^{k} \frac{a_n}{3^n} + \sum_{n=k+1}^{\infty} \frac{a_n}{3^n} \geq \alpha_k + \frac{2}{3^{k+1}}.$$

Por lo tanto, $x \in \left[\alpha_k + \frac{2}{3^{k+1}}, \beta_k\right] = I_{k+1}$.

Esto demuestra (6) y en particular, $x \in \bigcap_{k=1}^{\infty} I_k$.

$\supset$) Por lo visto al inicio de la demostración, $x \in [0,1] \setminus C$ si y solo si se satisface exactamente uno de los siguientes casos:

1. x tiene una única expansión ternaria (a_n) con algún $a_n = 1$. (De nuevo, en este caso, la expansión no es eventualmente cero.)

2. x tiene una expansión ternaria eventualmente cero con al menos dos dígitos igual a 1. (De nuevo, en este caso, trabajamos con la sucesión que es eventualmente cero.)

Ahora bien, sea $x \in [0,1] \setminus C$ y sea N el menor entero tal que $a_N = 1$. Veamos que $x \notin F_N$ (cf. (5)). Como $a_n \in \{0, 2\}$ para todo $n \leq N$, (6) implica que $\sum_{n=1}^{N-1} \frac{a_n}{3^n}$ es el extremo izquierdo de algún intervalo en

F_{N-1}, digamos $I_{N-1} = [\alpha_{N-1}, \beta_{N-1}]$. Es decir, $\sum_{n=1}^{N-1} \frac{a_n}{3^n} = \alpha_{N-1}$. Usando esto, veamos que x pertenece al intervalo abierto que quitamos de I_{N-1}. Es decir, veamos que

$$x \in \left(\alpha_{N-1} + \frac{1}{3^N}, \alpha_{N-1} + \frac{2}{3^N}\right).$$

Como $a_N = 1$ y a_N no puede ser el último dígito no nulo de (a_n), entonces

$$x > \sum_{n=1}^{N} \frac{a_n}{3^n} = \sum_{n=1}^{N-1} \frac{a_n}{3^n} + \frac{a_N}{3^N} = \alpha_{N-1} + \frac{1}{3^N}. \tag{7}$$

Además,

$$\sum_{n=N+1}^{\infty} \frac{a_n}{3^n} < \sum_{n=N+1}^{\infty} \frac{2}{3^n} = \frac{1}{3^N}.$$

donde la primera igualdad es estricta pues algún a_n, con $n \geq N+1$, debe ser igual a 0 o 1. En efecto, si $(a_n)_{n=N}^{\infty} = (1, 2, 2, \dots)$, entonces tendríamos $x \in C$ (pues N es el menor entero con $a_n = 1$). Luego,

$$x = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{3^n} = \sum_{n=1}^{N-1} \frac{a_n}{3^n} + \frac{a_N}{3^N} + \sum_{n=N+1}^{\infty} \frac{a_n}{3^n} < \alpha_{N-1} + \frac{1}{3^N} + \frac{1}{3^N} = \alpha_{N-1} + \frac{2}{3^N}. \tag{8}$$

Juntando (7) y (8) obtenemos lo deseado.

En resumen, $C = \bigcap_{n=1}^{\infty} F_n$ y este es cerrado pues cada F_n es cerrado (es la unión finita de cerrados). $\square$

37. Demuestra que existe una biyección entre $[0,1]$ y el conjunto de Cantor C.

Demostración. Por el ejercicio 21, $x \in [0,1]$ si y solo si se satisface exactamente uno de los siguientes casos.

1. x tiene una única expansión binaria (a_n).
2. x tiene una expansión binaria eventualmente cero cuyo primero termino es 0. En este caso, trabajaremos con la expansión binaria que es eventualmente 0.
3. x tiene una expansión binaria eventualmente cero cuyo primero termino es 1. En este caso, trabajaremos con la expansión binaria que **no** es eventualmente 0.

Dependiendo del caso, mapeamos respectivamente de la siguiente manera:

1. $(a_n) \mapsto (2a_n)$. Esta función cubre todas las expansiones ternarias únicas que están en C.
2. $(a_n) \mapsto (2a_{n+1})$. En palabras, quitamos el primer dígito, recorremos los dígitos restantes un lugar a la izquierda, y cambiamos los 1's por 2's. Como estamos trabajando con las expansiones binarias que son eventualmente cero, esta función cubre todas las expansiones ternarias en C que son eventualmente cero y que su último dígito no nulo es 2.
3. $(a_n) \mapsto (2a_{n+1})$. En palabras, quitamos el primer dígito, recorremos los dígitos restantes un lugar a la izquierda, y cambiamos los 1's por 2's. Como estamos trabajando con las expansiones binarias que **no** son eventualmente cero, esta función cubre todas las expansiones ternarias en C que son eventualmente cero y que su último dígito no nulo es 1.

Los casos que cubre la función particionan al conjunto de Cantor y por lo tanto esta función es suprayectiva. Además, la inyectividad es clara y por lo tanto esta función es una biyección. $\square$

38. Demuestra que el conjunto de puntos de acumulación del conjunto de Cantor es el conjunto de Cantor.

Demostración. Para cada $n \in \mathbb{N}$, sea F_n como en (5) y denotemos por I_k a los intervalos cerrados que componen a F_n. Ahora bien, sea $x \in C$ y sea U un intervalo abierto que contiene a x. Como $x \in \bigcap_{n=1}^{\infty} F_n$, para cada $n \in \mathbb{N}$ existe un intervalo cerrado I_n de F_n que contiene a x. Como este intervalo tiene longitud 3^{-n}, podemos escoger n suficientemente grande para que $I_n \subset S$. Sea γ_n un extremo de este intervalo tal que $\gamma_n \neq x$. Como $\gamma_n \in C$, acabamos de demostrar que cualquier intervalo abierto U que contiene a x, también contiene un elemento de C distinto de x. Por lo tanto, x es un punto de acumulación de C. □

40. Sea $f : E \to \mathbb{R}$ una función. Demuestra que f es continua si y solo si para todo abierto O existe un abierto U tal que $f^{-1}(O) = E \cap U$.

Demostración. Sea $f : E \to \mathbb{R}$ continua y sea O abierto. Por definición,

$$\forall y \in O \ \exists \epsilon > 0 \text{ tal que } B_\epsilon(y) \subset O.$$

Sea $x \in f^{-1}(O)$. En particular, existe $\epsilon_x > 0$ tal que $B_{\epsilon_x}(f(x)) \subset O$. Por lo tanto,

$$f^{-1}\left(B_{\epsilon_x}(f(x))\right) \subset f^{-1}(O). \tag{9}$$

Por otro lado, como f es continua (en x), existe $\delta_x > 0$ tal que

$$\forall a \in E \left(|x-a| < \delta_x \implies |f(x) - f(a)| < \epsilon_x\right).$$

En otras palabras,

$$B_{\delta_x}(x) \cap E \subset f^{-1}\left(B_{\epsilon_x}(f(x))\right).$$

Juntando esto con (9) obtenemos que $B_{\delta_x}(x) \cap E \subset f^{-1}(O)$. De donde,

$$E \cap \bigcup_{x \in f^{-1}(O)} B_{\delta_x}(x) \subset f^{-1}(O).$$

La inclusión conversa es consecuencia inmediata de que $f^{-1}(O) \subset E$ y $f^{-1}(O) \subset \bigcup_{x\in f^{-1}(O)} B_{\delta_x}(x)$. Por lo tanto, $U \coloneqq \bigcup_{x\in f^{-1}(O)} B_{\delta_x}(x)$ cumple lo deseado.

Conversamente, supongamos que para todo abierto O existe un abierto U tal que $f^{-1}(O) = E \cap U$ y sea $x \in E$ y $\epsilon > 0$. Entonces existe un abierto U tal que $E \cap U = f^{-1}\left(B_\epsilon(f(x))\right)$. Por otro lado, como U es abierto, para todo $x \in U$ existe $\delta > 0$ tal que $B_\delta(x) \subset U$. En particular, si $a \in E$ es tal que $|x-a| < \delta$, entonces

$$a \in E \cap B_\delta(x) \subset E \cap U = f^{-1}\left(B_\epsilon(f(x))\right).$$

Por lo tanto, $|f(x) - f(a)| < \epsilon$. □

41. Sea (f_n) una sucesión de funciones continuas definidas en un conjunto E. Demuestra que si (f_n) converge uniformemente a f en E, entonces f es continua en E.

Demostración. Sea $x \in E$ y sea $\epsilon > 0$. Como (f_n) converge uniformemente a f,

$$\exists N \in \mathbb{N} \text{ tal que } \forall n \geq N \ \forall a \in E \left(|f_n(a) - f(a)| < \epsilon/3\right). \tag{10}$$

Además, como f_N es continua en E,

$$\exists \delta > 0 \text{ tal que } \forall y \in E \left(|x-y| < \delta \implies |f_N(x) - f_N(y)| < \epsilon/3\right). \tag{11}$$

Luego, si $y \in E$ es tal que $|x-y| < \delta$, las ecuaciones (10) y (11) implican que

$$|f(x) - f(y)| \leq |f(x) - f_N(x)| + |f_N(x) - f_N(y)| + |f_N(y) - f(y)| < \epsilon/3 + \epsilon/3 + \epsilon/3 = \epsilon.$$

Por lo tanto, f es continua en E. □

46. Sea $x \in [0,1]$ con expansión ternaria (a_n). Sea $N = \infty$ si ninguno de los a_n es 1, y de lo contrario sea N el menor entero que satisface $a_N = 1$. Sea $b_n = \frac{1}{2}a_n$ para $n < N$ y $b_N = 1$. Demuestra que

$$\sum_{n=1}^{N} \frac{b_n}{2^n}$$

es independiente de la expansión ternaria de x y que la función f dada por

$$f(x) = \sum_{n=1}^{N} \frac{b_n}{2^n}$$

es continua y monótona en el intervalo $[0,1]$. Demuestra que f es constante en cada intervalo contenido en el complemento del conjunto de Cantor y que $f[C] = [0,1]$.

Demostración. Para ver continuidad, sea $\epsilon > 0$ y sea (ϵ_n) la sucesión binaria de ϵ. Definimos $\delta > 0$ como aquel elemento que tiene representación ternaria $(\delta_n) = (2\epsilon_n)$. Ahora bien, sea N el primer dígito no nulo de ϵ. Entonces N también es el primer dígito no nulo de δ. Si $|x - y| < \delta$, entonces las expansiones ternarias de x y y deben coincidir en los primeros $N - 1$ dígitos. Por lo tanto, por definición de f, los primeros $N - 1$ dígitos de las expansiones binarias de $f(x)$ y $f(y)$ también son los mismos. Por lo tanto, $|f(x) - f(y)| < \epsilon$.

Para ver que es monótona, sean $x, y \in [0,1]$ con $x < y$. Sea (a_n) la expansión ternaria de x y sea (b_n) la expansión ternaria de y. Sea $n_0 = \min\{n \in \mathbb{N} \mid a_n \neq b_n\}$, entonces $a_{n_0} < b_{n_0}$ pues $x < y$. En particular, esto también implica que $f(x) < f(y)$.

Sea I un intervalo contenido en el complemento de C. Por lo visto anteriormente, si $x, y \in I$, entonces los dígitos ternarios de x y y solo pueden diferir después de el primer dígito igual a 1. Por lo tanto, f es constante en cada intervalo contenido en el complemento del conjunto de Cantor.

Para ver que $f[C] = [0,1]$, sea $y \in [0,1]$ con expansión binaria (b_n). Si (b_n) es eventualmente 0 y b_N es su último dígito no nulo, definimos

$$a_n = \begin{cases} 2b_n & \text{si } n < N \\ 1 & \text{si } n = N \\ 0 & \text{si } n > N \end{cases}$$

entonces $x = (a_n) \in C$ y $f(x) = y$. Si (b_n) no es eventualmente 0, simplemente definimos $x = (a_n) = (2b_n)$. Luego, $x = (a_n) \in C$ y $f(x) = y$. Por lo tanto, $f[C] = [0,1]$. □

51. Sea $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Demuestra que el conjunto de puntos en los cuales f es continua es un G_δ.

Demostración. Para cada $n \in \mathbb{N}$, sea

$$U_n = \left\{x \in \mathbb{R} \mid \exists \delta_x > 0 \text{ tal que } |f(s) - f(t)| < 1/n \text{ si } s, t \in (x - \delta_x, x + \delta_x)\right\}.$$

Veamos que f es continua en x si y solo si $x \in \bigcap_{n\in\mathbb{N}} U_n$. Sea f continua en x. Entonces existe $\delta_x > 0$ tal que $|f(s) - f(x)| < 1/(2n)$ si $|s - x| < \delta_x$. Luego, si $s, t \in (x - \delta_x, x + \delta_x)$, entonces

$$|f(s) - f(t)| \leq |f(s) - f(x)| + |f(x) - f(t)| < 1/(2n) + 1/(2n) = 1/n.$$

Por lo tanto, $x \in \bigcap_{n\in\mathbb{N}} U_n$. Conversamente, sea $x \in \bigcap_{n\in\mathbb{N}} U_n$ y sea $\epsilon > 0$. Más aun, sea $n \in \mathbb{N}$ tal que $1/n < \epsilon$. Como $x \in A_n$, existe una $\delta_x > 0$ tal que $|f(s) - f(x)| < 1/n < \epsilon$ si $s \in (x - \delta_x, x + \delta_x)$ (ponemos $t = x$). Es decir, f es continua en x. □