1. Probar que el mapeo antipoda $A : S^n \to S^n$ dado por $A(p) = -p$ es una isometria de S^n.
Usar este hecho para introducir una métrica riemanniana sobre el espacio proyectivo real $\mathbb{P}^n\mathbb{R}$ de forma que la proyección natural $\pi : S^n \to \mathbb{P}^n\mathbb{R}$ sea una isometria local.

Demostración. Usaremos las siguientes observaciones:

Observacion 1.
Si α es una curva suave en S^n tal que $\alpha(0) = q$, $q \in S^n$, entonces

$$dA_q\left(\alpha'(0)\right) = (A \circ \alpha)'(0) = (-\alpha)'(0)$$

Fin de observacion 1.

Observacion 2.
Si g es la metrica en S^n inducida por $\mathbb{R}^{n+1}$, entonces para todo $q \in S^n$ y cualesquiera curvas en S^n, α y β tales que $\alpha(0) = q = \beta(0)$ tenemos

$$g_q\left(\alpha'(0), \beta'(0)\right) = \left\langle (i \circ \alpha)'(0), (i \circ \beta)'(0) \right\rangle$$

donde $i : S^n \to \mathbb{R}^{n+1}$ es la inclusion, $\langle \cdot, \cdot \rangle$ es el producto punto usual en $\mathbb{R}^n$, y $(i \circ \alpha)'(0)$ y $(i \circ \beta)'(0)$ tienen el significado de calculo 3, es decir, son elementos de $\mathbb{R}^{n+1}$.
En efecto, supongamos que G es la metrica usual en $\mathbb{R}^{n+1}$, entonces (por definicion de metrica en una subvariedad y por definicion de G)

$$\begin{aligned}
g_q\left(\alpha'(0), \beta'(0)\right) &= G_q\Big(di_q\left(\alpha'(0)\right), di_q\left(\beta'(0)\right)\Big) \\
&= G_q\Big((i \circ \alpha)'(0), (i \circ \beta)'(0)\Big) \\
&= \left\langle (i \circ \alpha)'(0), (i \circ \beta)'(0) \right\rangle
\end{aligned}$$

Fin de observacion 2.

A es isometria.
Como A es suave y $A \circ A = \mathrm{id}$, solo resta probar que A respeta la metrica

$$\begin{aligned}
g_{A(q)}\Big(dA_q\left(\alpha'(0)\right), dA_q\left(\beta'(0)\right)\Big) &= g_{A(q)}\Big((-\alpha)'(0), (-\beta)'(0)\Big) \\
&\qquad\qquad \text{(por la observacion 1)} \\
&= \Big\langle \big(i \circ (-\alpha)\big)'(0), \big(i \circ (-\beta)\big)'(0) \Big\rangle \\
&\qquad\qquad \text{(por la observacion 2)} \\
&= \left\langle -(i \circ \alpha)'(0), -(i \circ \beta)'(0) \right\rangle \\
&\qquad\qquad \text{(linealidad de la derivada)} \\
&= \left\langle (i \circ \alpha)'(0), (i \circ \beta)'(0) \right\rangle \\
&\qquad\qquad \text{(bilinealidad de } \langle \cdot, \cdot \rangle\text{)} \\
&= g_q\left(\alpha'(0), \beta'(0)\right)
\end{aligned}$$

A induce una metrica en $\mathbb{P}^n\mathbb{R}$ tal que $\pi : S^n \to \mathbb{P}^n\mathbb{R}$ es isomorfismo.
Supongamos que $p \in \mathbb{P}^n\mathbb{R}$ y $u, v \in T_p\mathbb{P}^n\mathbb{R}$. Definimos,

$$h_p(u,v) := g_q(a,b)$$

donde $q \in S^n$ y $a, b \in T_qS^n$ son tales que

$$\pi(q) = p, \;\; d\pi_q(a) = u, \;\; d\pi_q(b) = v$$

Cabe aclarar que la existencia de q, a, y b es consecuencia de que π y $d\pi_q$ son suprayectivas. Necesitamos ver que h esta bien definida. Para esto, supongamos que $q, q' \in S^n$ y $\alpha'(0), \beta'(0) \in T_qS^n$ y $\gamma'(0), \delta'(0) \in T_{q'}S^n$ son tales que

$$\pi(q) = \pi(q'), \;\; d\pi_q\left(\alpha'(0)\right) = d\pi_{q'}\left(\gamma'(0)\right), \;\; d\pi_q\left(\beta'(0)\right) = d\pi_{q'}\left(\delta'(0)\right)$$

Queremos ver que

$$g_q\left(\alpha'(0), \beta'(0)\right) = g_{q'}\left(\gamma'(0), \delta'(0)\right). \tag{1}$$

Necesitaremos la siguiente igualdad: para toda curva c tal que $c(0) = -q \in S^n$

$$\begin{aligned} d\pi_{-q}\left(c'(0)\right) &= (\pi \circ c)'(0) \\ &= \left(\pi \circ (-c)\right)'(0) && (\text{pues } \pi(-x) = \pi(x) \; \forall x \in S^n) \\ &= d\pi_q\Big((-c)'(0)\Big) && (2) \end{aligned}$$

Ahora si, veamos (1). Como $\pi(q) = \pi(q')$, entonces $q = q'$ o $q = -q'$.

Caso 1. $q = q'$
Por hipotesis tenemos $d\pi_q\left(\alpha'(0)\right) = d\pi_{q'}\left(\gamma'(0)\right) = d\pi_q\left(\gamma'(0)\right)$. Como π es un difeomorfismo local (c.f. Do Carmo Cap. 1, Ejemplo 4.7), entonces $\alpha'(0) = \beta'(0)$. Analogamente, $\beta'(0) = \gamma'(0)$. Por lo tanto, (1) es inmediato.

Caso 2. $q' = -q$.
Por hipotesis y por (2) tenemos

$$d\pi_q\left(\alpha'(0)\right) = d\pi_{q'}\left(\gamma'(0)\right) = d\pi_{-q}\left(\gamma'(0)\right) = d\pi_q\Big((-\gamma)'(0)\Big)$$

Lo cual implica que $\alpha'(0) = (-\gamma)'(0)$. Analogamente, $\beta'(0) = (-\delta)'(0)$.
Con esto en mente, supongamos que $p_i : S^n \to \mathbb{R}$ es la i-esima proyeccion usual (i.e., $(x_1, \ldots, x_n) \mapsto x_i$). Entonces, las igualdades

$$\alpha'(0)p_i = (-\gamma)'(0)p_i \quad \text{y} \quad \beta'(0)p_i = (-\delta)'(0)p_i$$

implican

$$\begin{aligned} (i \circ \alpha)'(0) &= \left(i \circ (-\gamma)\right)'(0) \\ (i \circ \beta)'(0) &= \left(i \circ (-\delta)\right)'(0) \end{aligned}$$

De donde,

$$\begin{aligned}
g_q\left(\alpha'(0),\beta'(0)\right) &= \Big\langle (i\circ\alpha)'(0),(i\circ\beta)'(0)\Big\rangle \\
&= \Big\langle \big(i\circ(-\gamma)\big)'(0),\big(i\circ(-\delta)\big)'(0)\Big\rangle \\
&= \Big\langle -(i\circ\gamma)'(0),-(i\circ\delta)'(0)\Big\rangle \\
&= \Big\langle (i\circ\gamma)'(0),(i\circ\delta)'(0)\Big\rangle \\
&= g_{q'}\left(\gamma'(0),\delta'(0)\right)
\end{aligned}$$

□

2. Sea $f : M^n \to \overline{M}^{n+k}$ una inmersion de una variedad diferenciable M en una variedad riemanniana $\overline{M}$. Asumimos que M tiene la metrica inducida por f. Sea $p \in M$ y sea $U \subset M$ una vecindad de p tal que $f(U) \subset \overline{M}$ es una subvariedad de $\overline{M}$. Ademas, supongamos que X y Y son campos vectoriales diferenciables sobre $f(U)$ que se extienden a campos vectoriales diferenciables $\overline{X}, \overline{Y}$ sobre un conjunto abierto de $\overline{M}$. Definimos

$$(\nabla_X Y)(p) = \left(\left(\overline{\nabla}_{\overline{X}}\overline{Y}\right)(p)\right)^{\top} = \text{la componente tangencial de } \left(\overline{\nabla}_{\overline{X}}\overline{Y}\right)(p)$$

donde $\overline{\nabla}$ es la conexión riemanniana de $\overline{M}$.
Probar que ∇ es una conexión riemanniana sobre M.

Demostración.

Lema 1. (Linealidad de la extension)
Supongamos que $\overline{N}$ es una variedad diferenciable, $N \subset \overline{N}$ es una subvariedad de $\overline{N}$, y $\overline{U}$ es un abierto en $\overline{N}$ tal que $N \subset \overline{U}$. Si $X, Y \in \mathfrak{X}(N)$ tienen extensiones $\overline{X}, \overline{Y} \in \mathfrak{X}(\overline{U})$ y $g, h \in \mathcal{D}(N)$ tienen extensiones $\overline{g}, \overline{h} \in \mathcal{D}(\overline{U})$, entonces

$$\overline{gX + hY} = \overline{g}\overline{X} + \overline{h}\,\overline{Y}$$

Donde $\overline{gX + hY}$ es una extension de $gX + hY$.
Fin del lema 1.

Lema 2. Supongamos que $\overline{N}^{n+k}$ es una variedad riemanniana y que $N^n \subset \overline{N}^{n+k}$ es una subvariedad de $\overline{N}$ que esta contenida en un abierto $\overline{U}$ de $\overline{N}$. Por definicion, la inclusion es una inmersion y por lo tanto, existen cartas (φ, U) y (ψ, V) de N y $\overline{N}$ tales que

$$\psi \circ i \circ \varphi^{-1} = j$$

donde $j : \varphi(U) \subset \mathbb{R}^n \to V \subset \mathbb{R}^{n+k}$ es la inclusion canonica

$$(x_1, \ldots, x_n) \mapsto (x_1, \ldots, x_n, 0, \ldots, 0)$$

Si $\left\{\frac{\partial}{\partial x_i}\right\}_{i=1}^{n}$ y $\left\{\frac{\partial}{\partial y_j}\right\}_{j=1}^{n+k}$ son las bases inducidas por φ y ψ (resp.), entonces

1. $\frac{\partial}{\partial y_i}(p) = \frac{\partial}{\partial x_i}(p)$ para toda $i = 1, \ldots, n$ y $p \in N$

2. $\frac{\partial \overline{g}}{\partial y_i}(p) = \frac{\partial g}{\partial x_i}(p)$ para toda $i = 1, \ldots, n$, $p \in N$, y $g \in \mathcal{D}(N)$ con extension $\overline{g} \in \mathcal{D}(\overline{U})$.

3. Si $X = \sum_{i=1}^{n} X^i \frac{\partial}{\partial x_i} \in \mathfrak{X}(N)$ tiene una extension $\overline{X} = \sum_{j=1}^{n+k} \overline{X}^j \frac{\partial}{\partial y_j} \in \mathfrak{X}(\overline{N})$, entonces

$$\overline{X}^j(p) = \begin{cases} X^j(p) & \text{si } j = 1, \ldots, n \\ 0 & \text{si } j = n+1, \ldots, n+k \end{cases}$$

4. $\overline{X}(\overline{g})(p) = X(g)(p)$ para todo $p \in N$ y todo $X \in \mathfrak{X}(N)$ con extension $\overline{X} \in \mathfrak{X}(\overline{N})$.

Demostracion del lema 2.

1. Si $\{e_1, \ldots, e_n\}$ y $\{\widehat{e}_1, \ldots, \widehat{e}_{n+k}\}$ son las bases canonicas de $\mathbb{R}^n$ y $\mathbb{R}^{n+k}$ (respectivamente), entonces por definicion,

$$\frac{\partial}{\partial x_i}(p) = d\varphi^{-1}_{\varphi(p)}(e_i), \quad \frac{\partial}{\partial y_i}(p) = d\psi^{-1}_{\psi(p)}(\widehat{e_i})$$

Por lo tanto, queremos ver

$$d\varphi^{-1}_{\varphi(p)}(e_i) = d\psi^{-1}_{\psi(p)}(\widehat{e_i}) \tag{3}$$

Sabemos que

$$\begin{aligned} d\varphi^{-1}_{\varphi(p)}(e_i) = d\psi^{-1}_{\psi(p)}(\widehat{e_i}) &\iff d\psi_p\left(d\varphi^{-1}_{\varphi(p)}(e_i)\right) = \widehat{e_i} \\ &\iff d\left(\psi \circ i \circ \varphi^{-1}\right)_{\varphi(p)}(e_i) = \widehat{e_i} \\ &\iff dj_{\varphi(p)}(e_i) = \widehat{e_i} \end{aligned} \tag{4}$$

Donde el segundo " $\iff$ " se cumple porque

$$\begin{aligned} d\left(\psi \circ \varphi^{-1}\right)_{\varphi(p)}(e_i) &= d\psi_{i\circ\varphi^{-1}(\varphi(p))} \circ di_{\varphi^{-1}(\varphi(p))} \circ d\varphi^{-1}_{\varphi(p)}(e_i) \\ &= d\psi_p\left(d\varphi^{-1}_{\varphi(p)}(e_i)\right) \end{aligned}$$

Por lo tanto, como (4) es cierto, entonces (3) tambien.

2. Por definicion,

$$\frac{\partial \overline{g}}{\partial y_i}(p) = \frac{\partial}{\partial y_i}\left(\overline{g} \circ \psi^{-1}\right)(\psi(p)), \quad \frac{\partial g}{\partial x_i}(p) = \frac{\partial}{\partial x_i}\left(g \circ \varphi^{-1}\right)(\varphi(p))$$

Por lo tanto, queremos ver que

$$\frac{\partial}{\partial y_i}\left(\overline{g}\circ\psi^{-1}\right)(\psi(p)) = \frac{\partial}{\partial x_i}\left(g\circ\varphi^{-1}\right)(\varphi(p))$$

Sin embargo, esto es consecuencia inmediata de (a) que la derivada parcial de una funcion $\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ es una propiedad local, (b) $g = \overline{g}\circ i$, y (c) $\psi\circ i\circ\varphi^{-1} = j$.

3. Escribiendo $X(p)$ en coordenadas locales,

$$\sum_{j=1}^{n+k}\overline{X}^j(p)\frac{\partial}{\partial y_j}(p) = \sum_{i=1}^{n} X^i(p)\frac{\partial}{\partial x_i}(p) = \sum_{i=1}^{n} X^j(p)\frac{\partial}{\partial y_i}(p)$$

Donde la ultima igualdad se cumple por el inciso 1. A partir de esta igualdad, obtenemos inmediatamente lo deseado.

4. Escribiendo $\overline{X}(\overline{g})(p)$ y $X(g)(p)$ en coordenadas locales, notamos que queremos ver

$$\sum_{j=1}^{n+k}\overline{X}^j(p)\frac{\partial\overline{g}}{\partial y_i}(p) = \sum_{i=1}^{n} X^i(p)\frac{\partial g}{\partial x_i}(p)$$

Sin embargo, esto es consecuencia inmediata de los incisos 2 y 3.

Fin del lema 2.

Lema 3. La componente tangencial es lineal.
En efecto, supongamos que $p\in M$ y $u,v\in T_p\overline{M}$. Entonces, podemos escribir de manera *única*

$$u = u^\top + u^\perp,\ \ v = v^\top + v^\perp$$

Luego, para toda $\lambda,\mu\in\mathbb{R}$

$$\begin{aligned}\lambda u + \mu v &= \lambda\left(u^\top + u^\perp\right) + \mu\left(v^\top + v^\perp\right)\\ &= \left(\lambda u^\top + \mu v^\top\right) + \left(\lambda u^\perp + \mu v^\perp\right)\end{aligned}$$

Luego, como $\lambda u^\top + \mu v^\top \in T_pM$ y $\lambda u^\perp + \mu v^\perp \in \left(T_pM\right)^\perp$, entonces la unicidad de la descomposicion implica

$$(\lambda u + \mu v)^\top = \lambda u^\top + \mu v^\top$$

Fin del lema 3.

Ahora si, veamos que ∇ es una conexión riemanniana. Supongamos que $\overline{U}\subset\overline{M}$ es un abierto que contiene a $f(U)$, y supongamos que $X,Y,Z\in\mathfrak{X}(f(U))$ tienen extensiones $\overline{X},\overline{Y},\overline{Z}\in\mathfrak{X}(\overline{U})$ y $g,h\in\mathcal{D}(f(U))$ tienen extensiones $\overline{g},\overline{h}\in\mathcal{D}(\overline{U})$

∇ *es conexión.*

1. Linealidad en la primera entrada:

$$\begin{aligned}
\left(\nabla_{gX+hY} Z\right)(p) &= \left(\left(\overline{\nabla}_{\overline{(gX+hY)}} \overline{Z}\right)(p)\right)^{\top} \\
&= \left(\left(\overline{\nabla}_{\overline{g}\cdot\overline{X}+\overline{h}\cdot\overline{Y}} \overline{Z}\right)(p)\right)^{\top} \qquad \text{(linealidad de la extension)} \\
&= \left(\left(\overline{\nabla}_{\overline{g}\cdot\overline{X}} \overline{Z}\right)(p) + \left(\nabla_{\overline{h}\cdot\overline{Y}} \overline{Z}\right)(p)\right)^{\top} \qquad (\overline{\nabla} \text{ es conexion}) \\
&= \left(\overline{g}(p)\left(\overline{\nabla}_{\overline{X}} \overline{Z}\right)(p) + \overline{h}(p)\left(\overline{\nabla}_{\overline{Y}} \overline{Z}\right)(p)\right)^{\top} \\
&\qquad (\overline{\nabla} \text{ es conexion}) \\
&= \overline{g}(p)\left(\left(\overline{\nabla}_{\overline{X}} \overline{Z}\right)(p)\right)^{\top} + \overline{h}(p)\left(\left(\overline{\nabla}_{\overline{Y}} \overline{Z}\right)(p)\right)^{\top} \\
&\qquad \text{(linealidad de } \cdot^{\top}) \\
&= g(p)\left(\nabla_X Z\right)(p) + h(p)\left(\nabla_Y Z\right)(p)
\end{aligned}$$

2. Aditividad en la segunda entrada:

$$\begin{aligned}
\left(\nabla_X (Y+Z)\right)(p) &= \left(\left(\overline{\nabla}_{\overline{X}}\left(\overline{(Y+Z)}\right)\right)(p)\right)^{\top} \\
&= \left(\left(\overline{\nabla}_{\overline{X}}\left(\overline{Y}+\overline{Z}\right)\right)(p)\right)^{\top} \\
&\qquad \text{(linealidad de la extension)} \\
&= \left(\left(\overline{\nabla}_{\overline{X}} \overline{Y}\right)(p) + \left(\overline{\nabla}_{\overline{X}} \overline{Z}\right)(p)\right)^{\top} \qquad (\overline{\nabla} \text{ es conexion}) \\
&= \left(\left(\overline{\nabla}_{\overline{X}} \overline{Y}\right)(p)\right)^{\top} + \left(\left(\overline{\nabla}_{\overline{X}} \overline{Z}\right)(p)\right)^{\top} \\
&\qquad \text{(linealidad de } \cdot^{\top}) \\
&= \left(\nabla_X Y\right)(p) + \left(\nabla_X Z\right)(p)
\end{aligned}$$

3. La regla de Leibniz:

$$
\begin{aligned}
\left(\nabla_X (gY)\right)(p) &= \left(\overline{\nabla}_{\overline{X}} \left(\overline{gY}\right)(p)\right)^{\top} \\
&= \left(\overline{\nabla}_{\overline{X}} \left(\overline{g}\overline{Y}\right)(p)\right)^{\top} && \text{(linealida de la extension)} \\
&= \left(\overline{g}(p) \cdot \left(\overline{\nabla}_{\overline{X}}\overline{Y}\right)(p) + \overline{X}\left(\overline{g}\right)(p) \cdot \overline{Y}(p)\right)^{\top} \\
& && (\overline{\nabla} \text{ es conexion}) \\
&= \overline{g}(p)\left(\left(\overline{\nabla}_{\overline{X}}\overline{Y}\right)(p)\right)^{\top} + \overline{X}\left(\overline{g}\right)(p)\left(\overline{Y}(p)\right)^{\top} \\
& && (\text{linealidad de } \cdot^{\top}) \\
&= g(p) \cdot \left(\nabla_X Y\right)(p) + X(g)(p) \cdot Y(p) && \text{(por el lema 2.4)}
\end{aligned}
$$

∇ *es compatible con la metrica.*
Como $\langle \overline{Y}, \overline{Z}\rangle$ es extension de $\langle Y, Z\rangle$, entonces podemos aplicar el lema 2.4 para obtener la primera de las siguientes igualdades.

$$
\begin{aligned}
\left(X\langle Y, Z\rangle\right)(p) &= \left(\overline{X}\left\langle \overline{Y}, \overline{Z}\right\rangle\right)(p) \\
&= \left(\left\langle \overline{\nabla}_{\overline{X}}\overline{Y}, \overline{Z}\right\rangle + \left\langle \overline{Y}, \overline{\nabla}_{\overline{X}}\overline{Z}\right\rangle\right)(p) && (\overline{\nabla} \text{ es conexion}) \\
&= \left\langle \overline{\nabla}_{\overline{X}}\overline{Y}(p), \overline{Z}(p)\right\rangle + \left\langle \overline{Y}(p), \overline{\nabla}_{\overline{X}}\overline{Z}(p)\right\rangle \\
&= \left\langle \overline{\nabla}_{\overline{X}}\overline{Y}(p)^{\top} + \overline{\nabla}_{\overline{X}}\overline{Y}(p)^{\perp}, \overline{Z}(p)\right\rangle + \\
&\quad \left\langle \overline{Y}(p), \overline{\nabla}_{\overline{X}}\overline{Z}(p)^{\top} + \overline{\nabla}_{\overline{X}}\overline{Z}(p)^{\perp}\right\rangle \\
& && (\text{pues } T_p\overline{M} = T_pM \oplus T_pM^{\perp}) \\
&= \left\langle \overline{\nabla}_{\overline{X}}\overline{Y}(p)^{\top}, Z(p)\right\rangle + \left\langle \overline{\nabla}_{\overline{X}}\overline{Y}(p)^{\perp}, Z(p)\right\rangle + \\
&\quad \left\langle Y(p), \overline{\nabla}_{\overline{X}}\overline{Z}(p)^{\top}\right\rangle + \left\langle Y(p), \overline{\nabla}_{\overline{X}}\overline{Z}(p)^{\perp}\right\rangle && (\text{linealidad de } \langle\cdot,\cdot\rangle) \\
&= \left\langle \overline{\nabla}_{\overline{X}}\overline{Y}(p)^{\top}, Z(p)\right\rangle + \left\langle Y(p), \overline{\nabla}_{\overline{X}}\overline{Z}(p)^{\top}\right\rangle \\
& && (\text{pues } Y(p), Z(p) \in T_pM \text{ y } \cdot^{\perp} \in T_pM^{\perp}) \\
&= \left(\langle \nabla_X Y, Z\rangle + \langle Y, \nabla_X Z\rangle\right)(p)
\end{aligned}
$$

∇ *es simetrica.*
Primero veamos que

$$
\left(\left[\overline{X}, \overline{Y}\right](p)\right)^{\top} = [X, Y](p) \tag{5}
$$

En coordenadas locales tenemos,

$$\begin{aligned}
\left(\left[\overline{X},\overline{Y}\right](p)\right)^{\top} &= \left(\sum_{i=1}^{n+k}\left\{\sum_{j=1}^{n+k}\overline{X}^j(p)\frac{\partial\overline{Y}^i}{\partial y_j}(p)-\overline{Y}^j\frac{\partial\overline{X}^i}{\partial y_j}(p)\right\}\frac{\partial}{\partial y_i}(p)\right)^{\top}\\
&= \sum_{i=1}^{n}\left\{\sum_{j=1}^{n+k}\overline{X}^j(p)\frac{\partial\overline{Y}^i}{\partial y_j}(p)-\overline{Y}^j\frac{\partial\overline{X}^i}{\partial y_j}(p)\right\}\frac{\partial}{\partial x_i}(p)\\
&= \sum_{i=1}^{n}\left\{\sum_{j=1}^{n}\overline{X}^j(p)\frac{\partial\overline{Y}^i}{\partial y_j}(p)-\overline{Y}^j\frac{\partial\overline{X}^i}{\partial y_j}(p)\right\}\frac{\partial}{\partial x_i}(p)\\
&\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad \text{(por el lema 2.3)}\\
&= \sum_{i=1}^{n}\left\{\sum_{j=1}^{n}\overline{X}^j(p)\frac{\partial\overline{Y}^i}{\partial x_j}(p)-\overline{Y}^j\frac{\partial\overline{X}^i}{\partial x_j}(p)\right\}\frac{\partial}{\partial x_i}(p)\\
&\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad \text{(por el lema 2.2)}\\
&= [X,Y](p)
\end{aligned}$$

La segunda igualdad se cumple porque $\forall p \in M\left(\overline{X}(p),\overline{Y}(p)\in T_pM\right)$ implica $[\overline{X},\overline{Y}](p)\in T_pM$.
Por lo tanto,

$$\begin{aligned}
\left(\nabla_X Y-\nabla_Y X\right)(p) &= \left(\nabla_X Y\right)(p)-\left(\nabla_Y X\right)(p)\\
&= \left(\left(\overline{\nabla}_{\overline{X}}\overline{Y}\right)(p)\right)^{\top}-\left(\left(\overline{\nabla}_{\overline{Y}}\overline{X}\right)(p)\right)^{\top}\\
&= \left(\left(\overline{\nabla}_{\overline{X}}\overline{Y}\right)(p)-\left(\overline{\nabla}_{\overline{Y}}\overline{X}\right)(p)\right)^{\top} && \text{(linealidad de } \cdot^{\top}\text{)}\\
&= \left(\left[\overline{X},\overline{Y}\right](p)\right)^{\top}\\
&= [X,Y](p) && \text{(por (5))}
\end{aligned}$$

□

3. Considere el plano superior

$$\mathbb{R}^2_+ = \left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid y>0\right\}$$

con la metrica

$$g_{11}=\frac{1}{y^2}=g_{22},\ \ g_{12}=0=g_{21}$$

1. Los simbolos de Christoffel de la conexion Riemanniana son

$$\Gamma^1_{11}=\Gamma^2_{12}=\Gamma^1_{22}=0,\ \ \Gamma^2_{11}=\frac{1}{y},\ \ \Gamma^1_{12}=\Gamma^2_{22}=-\frac{1}{y}$$

2. Sea $v_0 = (0,1)$ un vector tangente en el punto $(0,1) \in \mathbb{R}^2_+$. Sea v el transporte paralelo de v_0 a lo largo de la curva $x = t$, $y = 1$. Mostrar que $v(t)$ hace un angulo t con la direccion del eje Y, medido en el sentido de las manecillas del reloj.

Demostración.

1. Usaremos la siguiente formula (c.f. pag. 56 de Do Carmo).

$$\Gamma_{ij}^{m} = \frac{1}{2}\sum_{k}\left\{\frac{\partial}{\partial x_i}g_{jk} + \frac{\partial}{\partial x_j}g_{ki} - \frac{\partial}{\partial x_k}g_{ij}\right\}g^{km}.$$

Como en nuestro caso $k = 1, 2$, entonces la formula anterior se convierte en

$$\Gamma_{ij}^{m} = \frac{1}{2}\left\{\left(\partial_i g_{j1} + \partial_j g_{1i} - \partial_1 g_{ij}\right)g^{1m} + \left(\partial_i g_{j2} + \partial_j g_{2i} - \partial_2 g_{ij}\right)g^{2m}\right\}$$

En las siguientes igualdades, el segundo sumando en los primeros tres renglones se anula porque esta siendo multiplicado por $g^{21} = 0$; y el primer sumando en los últimos tres renglones se anula porque esta siendo multiplicado por $g^{12} = 0$.

$$
\begin{aligned}
\Gamma^1_{11} &= \frac{1}{2}\Big\{\left(\partial_1 g_{11} + \partial_1 g_{11} - \partial_1 g_{11}\right) g^{11} + \left(\partial_1 g_{12} + \partial_1 g_{21} - \partial_2 g_{11}\right) g^{21}\Big\} \\
&= \frac{1}{2}\Big\{(0+0-0)g^{11} + 0\Big\} = 0 \\
\Gamma^1_{12} &= \frac{1}{2}\Big\{\left(\partial_1 g_{21} + \partial_2 g_{11} - \partial_1 g_{12}\right) g^{11} + \left(\partial_1 g_{22} + \partial_2 g_{21} - \partial_2 g_{12}\right) g^{21}\Big\} \\
&= \frac{1}{2}\left\{\left(0 + \left(-\frac{2}{y^3}\right) - 0\right) y^2 + 0\right\} = -\frac{1}{y} \\
\Gamma^1_{22} &= \frac{1}{2}\Big\{\left(\partial_2 g_{21} + \partial_2 g_{12} - \partial_1 g_{22}\right) g^{11} + \left(\partial_2 g_{22} + \partial_2 g_{22} - \partial_2 g_{22}\right) g^{21}\Big\} \\
&= \frac{1}{2}\Big\{(0+0-0)g^{11} + 0\Big\} = 0 \\
\Gamma^2_{11} &= \frac{1}{2}\Big\{\left(\partial_1 g_{11} + \partial_1 g_{11} - \partial_1 g_{11}\right) g^{12} + \left(\partial_1 g_{12} + \partial_1 g_{21} - \partial_2 g_{11}\right) g^{22}\Big\} \\
&= \frac{1}{2}\left\{0 + \left(0 + 0 - \left(-\frac{2}{y^3}\right) y^2\right)\right\} = \frac{1}{y} \\
\Gamma^2_{12} &= \frac{1}{2}\Big\{\left(\partial_1 g_{21} + \partial_2 g_{11} - \partial_1 g_{12}\right) g^{12} + \left(\partial_1 g_{22} + \partial_2 g_{21} - \partial_2 g_{12}\right) g^{22}\Big\} \\
&= \frac{1}{2}\Big\{0 + (0+0-0)g^{22}\Big\} \\
\Gamma^2_{22} &= \frac{1}{2}\Big\{\left(\partial_2 g_{21} + \partial_2 g_{12} - \partial_1 g_{22}\right) g^{12} + \left(\partial_2 g_{22} + \partial_2 g_{22} - \partial_2 g_{22}\right) g^{22}\Big\} = 0 \\
&= \frac{1}{2}\left\{0 + \left(-\frac{2}{y^3}\right) y^2\right\} = -\frac{1}{y}
\end{aligned}
$$

2. En lo que sigue denotaremos por $\mathbb{H}$ a la variedad descrita en este ejercicio. Pero antes de empezar, hagamos unas observaciones:

   Observacion 1.
   Para toda $(x, y) \in \mathbb{H}$ y todo $(u_1, u_2), (v_1, v_2) \in T_{(x,y)}\mathbb{H}$ tenemos

$$
\begin{aligned}
g_{(x,y)}\big((u_1,u_2),(v_1,v_2)\big) &= \\
u_1 v_1 g_{11}(x,y) + u_1 v_2 \cancelto{0}{g_{12}(x,y)} + u_2 v_1 \cancelto{0}{g_{21}(x,y)} + u_2 v_2 g_{22}(x,y) & \\
u_1 v_1 \left(\frac{1}{y^2}\right) + u_2 v_2 \left(\frac{1}{y^2}\right) &= \\
\frac{1}{y^2}\left(u_1 v_1 + u_2 v_2\right) &
\end{aligned}
$$

   En particular, si $|(u_1, u_2)| := \sqrt{g_{(x,y)}\big((u_1,u_2),(u_1,u_2)\big)}$ y $\|\cdot\|$ denota la metrica usual en $\mathbb{R}^2$, entonces

$$|(u_1, u_2)| = \frac{1}{y}\big\|(u_1, u_2)\big\|$$

Fin de observacion 1.

Observacion 2.
Si V es un campo vectorial paralelo, entonces $\langle V, V\rangle = \text{cte}$.
En efecto, por compatibilidad de la metrica

$$\frac{d}{dt}\langle V, V\rangle = \left\langle \frac{DV}{dt}, V\right\rangle + \left\langle V, \frac{DV}{dt}\right\rangle = \langle 0, V\rangle + \langle V, 0\rangle = 0$$

Fin de observacion 2.

Observacion 3.
Si $f = (f_1, f_2) : I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2_+$ es suave y satisface $\big\|f(t)\big\|_{\mathbb{R}^2} = 1$, entonces existe $\theta : I \subset \mathbb{R} \to [0, \pi]$ tal que $f(t) = \Big(\cos\big(\theta(t)\big), \sin\big(\theta(t)\big)\Big)$.
En efecto, es facil ver que

$$\begin{aligned}\theta(t) &= \tan^{-1}\left(\frac{f_2(t)}{f_1(t)}\right) \\ &= \text{ el angulo medido desde el eje X hasta } f(t) \text{ en el sentido antihorario.}\end{aligned}$$

cumple lo deseado. Cabe aclarar que la suavidad de θ y nuestra capacidad de poner como contradominio a $[0, \pi]$ son consecuencia de que el contradominio de f es $\mathbb{R}^2_+$.
Fin de observacion 3.

Ahora si, veamos 3b. Primero notemos que por la observacion 1,

$$\begin{aligned}g_{c(t_0)}\big(v(t_0), v(t_0)\big) &= g_{(0,1)}\big((0,1), (0,1)\big) \\ &= 0 \cdot 0 \cdot \frac{1}{1^2} + 1 \cdot 1 \cdot \frac{1}{1^2} = 1\end{aligned}$$

Luego, como v es paralelo, entonces (por la observacion 2) $|v(t)| = 1$ para toda $t \in \mathbb{R}$ (recordemos que $t \mapsto (t, 1)$ esta definida para toda $t \in \mathbb{R}$). Mas aun, por la observacion 1

$$\frac{1}{1}\big\|v(t)\big\| = |v(t)| = 1.$$

Luego, por la observacion 3, podemos escribir $v(t) = \big(a(t), b(t)\big)$, donde

$$\begin{aligned}a(t) &= \cos\big(\theta(t)\big) \\ b(t) &= \sin\big(\theta(t)\big)\end{aligned}$$

para alguna $\theta : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$.

Por otro lado, como v es paralelo, entonces se satisfacen las siguientes ecuaciones (c.f. pag. 53 de Do Carmo)

$$\mathbf{0 = \frac{dv^k}{dt} + \sum_{i,j} \Gamma^k_{ij} v^j \frac{dx_i}{dt}, \quad k = 1, \ldots, n,}$$

Las cuales en nuestro caso se convierten en

$$\begin{cases} \frac{da}{dt}(t) + \Gamma^1_{12}\big(c(t)\big)\, b(t) = 0 \\ \frac{db}{dt}(t) + \Gamma^2_{11}\big(c(t)\big)\, a(t) = 0 \end{cases}, \tag{6}$$

donde $c(t) = (t, 1)$. Calculando explicitamente obtenemos,

$$\begin{cases} -\sin\big(\theta(t)\big) \cdot \theta'(t) + \big(-\frac{1}{1}\big) \sin\big(\theta(t)\big) = 0 \\ \cos\big(\theta(t)\big) \cdot \theta'(t) + \big(\frac{1}{1}\big) \cos\big(\theta(t)\big) = 0 \end{cases}$$

Lo cual implica que $\theta'(t) = 1$ para toda $t \in \mathbb{R}$. Por otro lado, como

$$v(0) = \big(a(0), b(0)\big) = (0, 1)$$

entonces, $\theta(0) = \frac{\pi}{2}$. Por lo tanto,

$$\theta(t) = -t + \frac{\pi}{2}$$

Finalmente, como

a) este es el angulo medido desde el eje X hasta $v(t)$ medido en el sentido antihorario y

b) el angulo medido desde el eje X hasta el eje Y en el sentido antihorario es $\frac{\pi}{2}$,

entonces el angulo medido desde el eje Y hasta $v(t)$ en el sentido antihorario es precisamente t.

□

4. Dada la métrica $ds^2 = d\theta^2 + \sin^2\theta d\phi^2$ de la esfera S^2, encuentre todos los componentes del tensor de curvatura de Riemann.

Demostración. Primero notemos que por definicion,

$$\begin{aligned} g_{\theta\theta} &= 1 \\ g_{\theta\phi} = g_{\phi\theta} &= 0 \\ g_{\phi\phi} &= \sin^2\theta \end{aligned}$$

En particular,

$$\partial_\theta g_{\phi\phi} = \partial_\theta \left(\sin^2\theta\right) = 2\sin\theta\cos\theta$$

y

$$\begin{pmatrix} g^{\theta\theta} & g^{\theta\phi} \\ g^{\phi\theta} & g^{\phi\phi} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} g_{\theta\theta} & g_{\theta\phi} \\ g_{\phi\theta} & g_{\phi\phi} \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \sin^2\theta \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \frac{1}{\sin^2\theta} \end{pmatrix}$$

Ahora, calculemos los simbolos de Christoffel usando la siguiente formula (c.f. pag. 56 de Do Carmo).

$$\boldsymbol{\Gamma_{ij}^m = \frac{1}{2}\sum_k \left\{ \frac{\partial}{\partial x_i} g_{jk} + \frac{\partial}{\partial x_j} g_{ki} - \frac{\partial}{\partial x_k} g_{ij} \right\} g^{km}.}$$

Como en nuestro caso $k = \theta, \phi$, entonces la formula anterior se convierte en

$$\Gamma_{ij}^m = \frac{1}{2}\left\{ \left(\partial_i g_{j\theta} + \partial_j g_{\theta i} - \partial_\theta g_{ij}\right) g^{\theta m} + \left(\partial_i g_{j\phi} + \partial_j g_{\phi i} - \partial_\phi g_{ij}\right) g^{\phi m} \right\}$$

Por lo tanto,

$$\begin{aligned}
\Gamma^{\theta}_{\theta\theta} &= \frac{1}{2}\left\{(\partial_\theta g_{\theta\theta} + \partial_\theta g_{\theta\theta} - \partial_\theta g_{\theta\theta})\, g^{\theta\theta} + \big(\partial_\theta g_{\theta\phi} + \partial_\theta g_{\phi\theta} - \partial_\phi g_{\theta\theta}\big)\, g^{\phi\theta}\right\} \\
&= \frac{1}{2}\left\{(0+0-0)g^{\theta\theta} + \big((\partial_\theta g_{\theta\phi} - \partial_\theta g_{\phi\theta} - \partial_\phi g_{\theta\theta}\big)\, 0\right\} = 0 \\
\Gamma^{\theta}_{\theta\phi} &= \frac{1}{2}\left\{\big(\partial_\theta g_{\phi\theta} + \partial_\phi g_{\theta\theta} - \partial_\theta g_{\theta\phi}\big)\, g^{\theta\theta} + \big(\partial_\theta g_{\phi\phi} + \partial_\phi g_{\phi\theta} - \partial_\phi g_{\theta\phi}\big)\, g^{\phi\theta}\right\} \\
&= \frac{1}{2}\left\{(0+0-0)g^{\theta\theta} + \big(\partial_\theta g_{\phi\phi} + \partial_\phi g_{\phi\theta} - \partial_\phi g_{\theta\phi}\big)\, 0\right\} = 0 \\
\Gamma^{\theta}_{\phi\phi} &= \frac{1}{2}\left\{\big(\partial_\phi g_{\phi\theta} + \partial_\phi g_{\theta\phi} - \partial_\theta g_{\phi\phi}\big)\, g^{\theta\theta} + \big(\partial_\phi g_{\phi\phi} + \partial_\phi g_{\phi\phi} - \partial_\phi g_{\phi\phi}\big)\, g^{\phi\theta}\right\} \\
&= \frac{1}{2}\left\{(0+0-2\sin\theta\cos\theta)\, 1 + \big(\partial_\phi g_{\phi\phi} + \partial_\phi g_{\phi\phi} + \partial_\phi g_{\phi\phi}\big)\, 0\right\} \\
&= \frac{1}{2}\left\{-2\sin\theta\cos\theta\right\} = -\sin\theta\cos\theta \\
\Gamma^{\phi}_{\theta\theta} &= \frac{1}{2}\left\{(\partial_\theta g_{\theta\theta} + \partial_\theta g_{\theta\theta} - \partial_\theta g_{\theta\theta})\, g^{\theta\phi} + \big(\partial_\theta g_{\theta\phi} + \partial_\theta g_{\phi\theta} - \partial_\phi g_{\theta\theta}\big)\, g^{\phi\phi}\right\} \\
&= \frac{1}{2}\left\{(\partial_\theta g_{\theta\theta} + \partial_\theta g_{\theta\theta} - \partial_\theta g_{\theta\theta})\, 0 + (0+0-0)g^{\phi\phi}\right\} = 0 \\
\Gamma^{\phi}_{\theta\phi} &= \frac{1}{2}\left\{\big(\partial_\theta g_{\phi\theta} + \partial_\phi g_{\theta\theta} - \partial_\theta g_{\theta\phi}\big)\, g^{\theta\phi} + \big(\partial_\theta g_{\phi\phi} + \partial_\phi g_{\phi\theta} - \partial_\phi g_{\theta\phi}\big)\, g^{\phi\phi}\right\} \\
&= \frac{1}{2}\left\{(0+0-0)0 + (2\sin\theta\cos\theta + 0 - 0)\cdot\frac{1}{\sin^2\theta}\right\} \\
&= \frac{1}{2}\left\{2\cdot\frac{\cos\theta}{\sin\theta}\right\} = \frac{\cos\theta}{\sin\theta} \\
\Gamma^{\phi}_{\phi\phi} &= \frac{1}{2}\left\{\big(\partial_\phi g_{\phi\theta} + \partial_\phi g_{\theta\phi} - \partial_\theta g_{\phi\phi}\big)\, g^{\theta\phi} + \big(\partial_\phi g_{\phi\phi} + \partial_\phi g_{\phi\phi} - \partial_\phi g_{\phi\phi}\big)\, g^{\phi\phi}\right\} \\
&= \frac{1}{2}\left\{\big(\partial_\phi g_{\phi\theta} + \partial_\phi g_{\phi\theta} - \partial_\theta g_{\phi\phi}\big)\, g^{\theta\phi} + (0+0-0)g^{\theta\theta}\right\} = 0
\end{aligned}$$

En resumen,

$$\begin{aligned}
\Gamma^{\theta}_{\phi\phi} &= -\sin\theta\cos\theta \\
\Gamma^{\phi}_{\theta\phi} &= \frac{\cos\theta}{\sin\theta} \\
\Gamma^{\theta}_{\theta\theta} = \Gamma^{\theta}_{\theta\phi} = \Gamma^{\phi}_{\theta\theta} = \Gamma^{\phi}_{\phi\phi} &= 0
\end{aligned}$$

Finalmente, calculemos los componentes del tensor de curvatura de Riemann usando las siguientes cuentas y la siguiente formula (c.f. pag. 93 de Do Carmo)

$$\begin{aligned}
\partial_\theta\Gamma^{\theta}_{\phi\phi} &= -\big(\cos\theta\cos\theta + \sin\theta\,(-\sin\theta)\big) \\
&= -\Big(\cos^2\theta - \sin^2\theta\Big) \\
&= \sin^2\theta - \cos^2\theta,
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
\partial_\theta \Gamma^\phi_{\theta\phi} &= (-\sin\theta)(\sin\theta)^{-1} + (\cos\theta)\left(-(\sin\theta)^{-2}\cos\theta\right) \\
&= -1 - \frac{\cos^2\theta}{\sin^2\theta} \\
&= -\left(1 + \frac{\cos^2\theta}{\sin^2\theta}\right),
\end{aligned}
$$

$$
\boldsymbol{R^s_{ijk} = \sum_\ell \Gamma^\ell_{ik}\Gamma^s_{j\ell} - \sum_\ell \Gamma^\ell_{jk}\Gamma^s_{i\ell} + \frac{\partial}{\partial x_j}\Gamma^s_{ik} - \frac{\partial}{\partial x_i}\Gamma^s_{jk}.}
$$

Como en nuestro caso $l = \theta, \phi$, entonces la formula anterior se convierte en

$$
R^s_{ijk} = \partial_j \Gamma^s_{ik} - \partial_i \Gamma^s_{jk} + \left(\Gamma^\theta_{ik}\Gamma^s_{j\theta} + \Gamma^\phi_{ik}\Gamma^s_{j\phi}\right) - \left(\Gamma^\theta_{jk}\Gamma^s_{i\theta} + \Gamma^\phi_{jk}\Gamma^s_{i\phi}\right)
$$

Por lo tanto,

$$
\begin{aligned}
R^\theta_{\theta\theta\theta} &= \partial_\theta \Gamma^\theta_{\theta\theta} - \partial_\theta \Gamma^\theta_{\theta\theta} + \left(\Gamma^\theta_{\theta\theta}\Gamma^\theta_{\theta\theta} + \Gamma^\phi_{\theta\theta}\Gamma^\theta_{\theta\phi}\right) - \left(\Gamma^\theta_{\theta\theta}\Gamma^\theta_{\theta\theta} + \Gamma^\phi_{\theta\theta}\Gamma^\theta_{\theta\phi}\right) \\
&= 0 \text{ (es una expresion de la forma } c - c + (c') - (c')) \\
R^\theta_{\theta\theta\phi} &= \partial_\theta \Gamma^\theta_{\theta\phi} - \partial_\theta \Gamma^\theta_{\theta\phi} + \left(\Gamma^\theta_{\theta\phi}\Gamma^\theta_{\theta\theta} + \Gamma^\phi_{\theta\phi}\Gamma^\theta_{\theta\phi}\right) - \left(\Gamma^\theta_{\theta\phi}\Gamma^\theta_{\theta\theta} + \Gamma^\phi_{\theta\phi}\Gamma^\theta_{\theta\phi}\right) \\
&= 0 \text{ (es una expresion de la forma } c - c + (c') - (c')) \\
R^\theta_{\theta\phi\theta} &= \partial_\phi \Gamma^\theta_{\theta\theta} - \partial_\theta \Gamma^\theta_{\phi\theta} + \left(\Gamma^\theta_{\theta\theta}\Gamma^\theta_{\phi\theta} + \Gamma^\phi_{\theta\theta}\Gamma^\theta_{\phi\phi}\right) - \left(\Gamma^\theta_{\phi\theta}\Gamma^\theta_{\theta\theta} + \Gamma^\phi_{\phi\theta}\Gamma^\theta_{\theta\phi}\right) \\
&= 0 - 0 + (0 + 0) - (0 + 0) = 0 \\
R^\theta_{\phi\theta\theta} &= \partial_\theta \Gamma^\theta_{\phi\theta} - \partial_\phi \Gamma^\theta_{\theta\theta} + \left(\Gamma^\theta_{\phi\theta}\Gamma^\theta_{\theta\theta} + \Gamma^\phi_{\phi\theta}\Gamma^\theta_{\theta\phi}\right) - \left(\Gamma^\theta_{\theta\theta}\Gamma^\theta_{\phi\theta} + \Gamma^\phi_{\theta\theta}\Gamma^\theta_{\phi\phi}\right) \\
&= 0 - 0 + (0 + 0) - (0 + 0) = 0 \\
R^\theta_{\phi\phi\theta} &= \partial_\phi \Gamma^\theta_{\phi\theta} - \partial_\phi \Gamma^\theta_{\phi\theta} + \left(\Gamma^\theta_{\phi\theta}\Gamma^\theta_{\phi\theta} + \Gamma^\phi_{\phi\theta}\Gamma^\theta_{\phi\phi}\right) - \left(\Gamma^\theta_{\phi\theta}\Gamma^\theta_{\phi\theta} + \Gamma^\phi_{\phi\theta}\Gamma^\theta_{\phi\phi}\right) \\
&= 0 \text{ (es una expresion de la forma } c - c + (c') - (c')) \\
R^\theta_{\phi\theta\phi} &= \partial_\theta \Gamma^\theta_{\phi\phi} - \partial_\phi \Gamma^\theta_{\theta\phi} + \left(\Gamma^\theta_{\phi\phi}\Gamma^\theta_{\theta\theta} + \Gamma^\phi_{\phi\phi}\Gamma^\theta_{\theta\phi}\right) - \left(\Gamma^\theta_{\theta\phi}\Gamma^\theta_{\phi\theta} + \Gamma^\phi_{\theta\phi}\Gamma^\theta_{\phi\phi}\right) \\
&= \left(\sin^2\theta - \cos^2\theta\right) - 0 + (0 + 0) - \left(0 + \left(\frac{\cos\theta}{\sin\theta}\right)(-\sin\theta\cos\theta)\right) \\
&= \sin^2\theta \\
R^\theta_{\theta\phi\phi} &= \partial_\phi \Gamma^\theta_{\theta\phi} - \partial_\theta \Gamma^\theta_{\phi\phi} + \left(\Gamma^\theta_{\theta\phi}\Gamma^\theta_{\phi\theta} + \Gamma^\phi_{\theta\phi}\Gamma^\theta_{\phi\phi}\right) - \left(\Gamma^\theta_{\phi\phi}\Gamma^\theta_{\theta\theta} + \Gamma^\phi_{\phi\phi}\Gamma^\theta_{\theta\phi}\right) \\
&= -R^\theta_{\phi\theta\phi} = -\sin^2\theta \\
R^\theta_{\phi\phi\phi} &= \partial_\phi \Gamma^\theta_{\phi\phi} - \partial_\phi \Gamma^\theta_{\phi\phi} + \left(\Gamma^\theta_{\phi\phi}\Gamma^\theta_{\phi\theta} + \Gamma^\phi_{\phi\phi}\Gamma^\theta_{\phi\phi}\right) - \left(\Gamma^\theta_{\phi\phi}\Gamma^\theta_{\phi\theta} + \Gamma^\phi_{\phi\phi}\Gamma^\theta_{\phi\phi}\right) \\
&= 0 \text{ (es una expresion de la forma } c - c + (c') - (c'))
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
R^{\phi}_{\theta\theta\theta} &= \partial_\theta \Gamma^{\phi}_{\theta\theta} - \partial_\theta \Gamma^{\phi}_{\theta\theta} + \left(\Gamma^{\theta}_{\theta\theta}\Gamma^{\phi}_{\theta\theta} + \Gamma^{\phi}_{\theta\theta}\Gamma^{\phi}_{\theta\phi}\right) - \left(\Gamma^{\theta}_{\theta\theta}\Gamma^{\phi}_{\theta\theta} + \Gamma^{\phi}_{\theta\theta}\Gamma^{\phi}_{\theta\phi}\right) \\
&= 0 \text{ (es una expresion de la forma } c - c + (c') - (c')) \\
R^{\phi}_{\theta\theta\phi} &= \partial_\theta \Gamma^{\phi}_{\theta\phi} - \partial_\theta \Gamma^{\phi}_{\theta\phi} + \left(\Gamma^{\theta}_{\theta\phi}\Gamma^{\phi}_{\theta\theta} + \Gamma^{\phi}_{\theta\phi}\Gamma^{\phi}_{\theta\phi}\right) - \left(\Gamma^{\theta}_{\theta\phi}\Gamma^{\phi}_{\theta\theta} + \Gamma^{\phi}_{\theta\phi}\Gamma^{\phi}_{\theta\phi}\right) \\
&= 0 \text{ (es una expresion de la forma } c - c + (c') - (c')) \\
R^{\phi}_{\theta\phi\theta} &= \partial_\phi \Gamma^{\phi}_{\theta\theta} - \partial_\theta \Gamma^{\phi}_{\phi\theta} + \left(\Gamma^{\theta}_{\theta\theta}\Gamma^{\phi}_{\phi\theta} + \Gamma^{\phi}_{\theta\theta}\Gamma^{\phi}_{\phi\phi}\right) - \left(\Gamma^{\theta}_{\phi\theta}\Gamma^{\phi}_{\theta\theta} + \Gamma^{\phi}_{\phi\theta}\Gamma^{\phi}_{\theta\phi}\right) \\
&= 0 - \left(-\left(1 + \frac{\cos^2\theta}{\sin^2\theta}\right)\right) + (0+0) - \left(0 + \left(\frac{\cos\theta}{\sin\theta}\right)\left(\frac{\cos\theta}{\sin\theta}\right)\right) \\
&= 1 \\
R^{\phi}_{\phi\theta\theta} &= \partial_\theta \Gamma^{\phi}_{\phi\theta} - \partial_\phi \Gamma^{\phi}_{\theta\theta} + \left(\Gamma^{\theta}_{\phi\theta}\Gamma^{\phi}_{\theta\theta} + \Gamma^{\phi}_{\phi\theta}\Gamma^{\phi}_{\theta\phi}\right) - \left(\Gamma^{\theta}_{\theta\theta}\Gamma^{\phi}_{\phi\theta} + \Gamma^{\phi}_{\theta\theta}\Gamma^{\phi}_{\phi\phi}\right) \\
&= -R^{\phi}_{\theta\phi\theta} = -1 \\
R^{\phi}_{\phi\phi\theta} &= \partial_\phi \Gamma^{\phi}_{\phi\theta} - \partial_\phi \Gamma^{\phi}_{\phi\theta} + \left(\Gamma^{\theta}_{\phi\theta}\Gamma^{\phi}_{\phi\theta} + \Gamma^{\phi}_{\phi\theta}\Gamma^{\phi}_{\phi\phi}\right) - \left(\Gamma^{\theta}_{\phi\theta}\Gamma^{\phi}_{\phi\theta} + \Gamma^{\phi}_{\phi\theta}\Gamma^{\phi}_{\phi\phi}\right) \\
&= 0 \text{ (es una expresion de la forma } c - c + (c') - (c')) \\
R^{\phi}_{\phi\theta\phi} &= \partial_\theta \Gamma^{\phi}_{\phi\phi} - \partial_\phi \Gamma^{\phi}_{\theta\phi} + \left(\Gamma^{\theta}_{\phi\phi}\Gamma^{\phi}_{\theta\theta} + \Gamma^{\phi}_{\phi\phi}\Gamma^{\phi}_{\theta\phi}\right) - \left(\Gamma^{\theta}_{\theta\phi}\Gamma^{\phi}_{\phi\theta} + \Gamma^{\phi}_{\theta\phi}\Gamma^{\phi}_{\phi\phi}\right) \\
&= 0 - 0 + (0+0) - (0+0) \\
R^{\phi}_{\theta\phi\phi} &= \partial_\phi \Gamma^{\phi}_{\theta\phi} - \partial_\theta \Gamma^{\phi}_{\phi\phi} + \left(\Gamma^{\theta}_{\theta\phi}\Gamma^{\phi}_{\phi\theta} + \Gamma^{\phi}_{\theta\phi}\Gamma^{\phi}_{\phi\phi}\right) - \left(\Gamma^{\theta}_{\phi\phi}\Gamma^{\phi}_{\theta\theta} + \Gamma^{\phi}_{\phi\phi}\Gamma^{\phi}_{\theta\phi}\right) \\
&= 0 - 0 + (0+0) - (0+0) \\
R^{\phi}_{\phi\phi\phi} &= \partial_\phi \Gamma^{\phi}_{\phi\phi} - \partial_\phi \Gamma^{\phi}_{\phi\phi} + \left(\Gamma^{\theta}_{\phi\phi}\Gamma^{\phi}_{\phi\theta} + \Gamma^{\phi}_{\phi\phi}\Gamma^{\phi}_{\phi\phi}\right) - \left(\Gamma^{\theta}_{\phi\phi}\Gamma^{\phi}_{\phi\theta} + \Gamma^{\phi}_{\phi\phi}\Gamma^{\phi}_{\phi\phi}\right) \\
&= 0 \text{ (es una expresion de la forma } c - c + (c') - (c'))
\end{aligned}
$$

□

Diego Leipen Lara
418002038