Tarea 11

Diego Leipen Lara

Metodos Variacionales

Considera el problema

$$\begin{cases} -\Delta u + u = q(x)|u|^{p-2}u, \\ u \in H^1(\mathbb{R}^N), \end{cases} \tag{1}$$

donde $N \geq 3$, $p \in (2, 2^*)$, y $q \in \mathcal{C}^0(\mathbb{R}^N)$ satisface

$$q(x) > 0 \text{ para todo } x \in \mathbb{R}^N \qquad \text{y} \qquad \lim_{|x|\to\infty} q(x) = q_\infty > 0.$$

Una **solución** de (1) es una función $u \in H^1(\mathbb{R}^N)$ tal que

$$\int_{\mathbb{R}^N} \nabla u \cdot \nabla v + \int_{\mathbb{R}^N} uv = \int_{\mathbb{R}^N} q(x)|u|^{p-2}uv \qquad \forall v \in H^1(\mathbb{R}^N). \tag{2}$$

El objetivo de esta tarea es probar el siguiente resultado.

Teorema. (Ding-Ni, 1986) Si $q \in \mathcal{C}^0(\mathbb{R}^N)$ satisface (2) y

$$q(x) \geq q_\infty \text{ para todo } x \in \mathbb{R}^N,$$

entonces el problema (1) tiene una estado fundamental.

Definimos

$$|u|_{q,p} := \left(\int_{\mathbb{R}^N} q|u|^p \right)^{1/p} \qquad \text{y} \qquad S_{q,p} := \inf_{\substack{u \in H^1(\mathbb{R}^N) \\ u \neq 0}} \frac{\|u\|_1^2}{|u|_{q,p}^2}.$$

1. Prueba que el funcional $J_q : H^1(\mathbb{R}^N) \to \mathbb{R}$ dado por

$$J_q(u) := \frac{1}{2}\|u\|_1^2 - \frac{1}{p}|u|_{q,p}^p,$$

esta bien definido, es de clase $\mathcal{C}^2$ y sus puntos críticos son las soluciones de (1).

Demostración. En el ejercicio 3 de la tarea 10 vimos que el funcional

$$\Phi_q(u) = \frac{1}{p}\int_{\mathbb{R}^N} q|u|^p = \frac{1}{p}|u|_{q,p}^p$$

es de clase $\mathcal{C}^2$ y que su derivada esta dada por

$$\Phi_q'(u)v = \int_{\mathbb{R}^N} q|u|^{p-2}uv \qquad \forall u, v \in L^p(\mathbb{R}^N).$$

Por lo tanto, J_q es de clase $\mathcal{C}^2$ y

$$J_q'(u)v = \langle u, v\rangle_1 - \int_{\mathbb{R}^N} q|u|^{p-2}uv = \int_{\mathbb{R}^N} \nabla u \cdot \nabla v + \int_{\mathbb{R}^N} uv - \int_{\mathbb{R}^N} q(x)|u|^{p-2}uv.$$

En particular, sus puntos críticos son las soluciones de (1). $\square$

2. Prueba que
$$\mathcal{N}_q := \{u \in H^1(\mathbb{R}^n) \mid u \neq 0,\, \|u\|_1^2 = |u|_{q,p}^p\}$$
es una subvariedad de Hilbert de clase $\mathcal{C}^2$ de $H^1(\mathbb{R}^N)$ y una restriccion natural para J_q.

Demostración. El argumento es análogo al de la Proposición 2.4.

(a) $\mathcal{N}_q \neq \emptyset$: Para cada $u \in H^1(\mathbb{R}^N) \setminus \{0\}$ sea $J_u : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tal que
$$J_u(t) := \left(\frac{1}{2}\|u\|_1^2\right) t^2 - \left(\frac{1}{p}|u|_{q,p}^p\right) t^p.$$
Como $J_u(t) = 0$ y $p > 2$, entonces J_u tiene un único punto critico t_u en el intervalo $(0, \infty)$. Pero para todo $t \in (0, \infty)$,
$$J_u'(t) = 0 \iff J_q'(tu)u = 0 \iff J_q'(tu)tu = 0 \iff tu \in \mathcal{N}_q.$$
Por lo tanto, $t_u u \in \mathcal{N}_q$ para todo $u \in H^1(\mathbb{R}^N) \setminus \{0\}$. En particular, $\mathcal{N}_q \neq \emptyset$.

(b) $\mathcal{N}_q$ *es cerrado en* $H^1(\mathbb{R}^N)$: En el ejercicio 1 de la tarea 10 vimos que las normas $|\cdot|_p$ y $|\cdot|_{q,p}$ son equivalentes en $L^p(\mathbb{R}^N)$. Entonces, por el teorema de Encaje de Sobolev, existe $C > 0$ tal que
$$|u|_{q,p} \leq C\|u\|_1.$$
Por tanto,
$$C^{-p} \leq \frac{\|u\|_1^p}{|u|_{q,p}^p} = \|u\|_1^{p-2} \qquad \forall u \in \mathcal{N}_q,$$
es decir,
$$0 < d_0 := C^{-p/(p-2)} \leq \|u\|_1 \qquad \forall u \in \mathcal{N}_q.$$
En consecuencia,
$$\mathcal{N}_q = \{u \in H^1(\mathbb{R}^n) : \|u\|_1 \geq d_0,\, \|u\|_1^2 = |u|_{q,p}^p\}.$$
Éste es claramente un subconjunto cerrado de $H^1(\mathbb{R}^N)$.

(c) $\mathcal{N}_q$ *es una subvariedad de Hilbert de clase* $\mathcal{C}^2$: Sea $\Psi : H^1(\mathbb{R}^N) \setminus \{0\} \to \mathbb{R}$ tal que
$$\Psi(u) := \|u\|_1^2 - |u|_{q,p}^p.$$
Claramente $\Psi^{-1}(0) = \mathcal{N}_q$. Además, la Proposición 1.41 de las notas y el ejercicio 3 de la tarea 10, implican que Ψ es de clase $\mathcal{C}^2$ y que
$$\Psi'(u)v = 2\langle u, v\rangle_1 - p\int_{\mathbb{R}^n} q|u|^{p-2}uv \qquad \forall u \in H^1(\mathbb{R}^N) \setminus \{0\},\ \forall v \in H^1(\mathbb{R}^N).$$
Además,
$$\langle \nabla\Psi(u), u\rangle = \Psi'(u)u = 2\|u\|_1^2 - p|u|_{q,p}^p = (2-p)\|u\|_1^2 \neq 0 \qquad \forall u \in \mathcal{N}_q. \tag{3}$$
Por tanto, $\nabla\Psi(u) \neq 0$ para todo $u \in \mathcal{N}_q$, es decir, 0 es un valor regular de Ψ. Usando esto y (a) obtenemos que $\mathcal{N}_q$ es una subvariedad de $H^1(\mathbb{R}^N)$. Usando (b) obtenemos lo deseado.

(d) $\mathcal{N}_q$ *es una restricción natural para* J_q: La ecuación (3) implica que $u \notin \ker \Psi'(u) =: \mathcal{T}_u(\mathcal{N}_q)$ para todo $u \in \mathcal{N}_q$. Por tanto,
$$H^1(\mathbb{R}^N) = \mathcal{T}_u(\mathcal{N}_q) \oplus \{tu \mid u \in \mathbb{R}\} \qquad \forall u \in \mathcal{N}_q. \tag{4}$$
Sea $u \in \mathcal{N}_q$ un punto critico de $J_q|_{\mathcal{N}_q}$. Entonces $J_q'(u)v = 0$ para todo $v \in \mathcal{T}_u(\mathcal{N}_q)$ y $J_q'(u)u = 0$. Usando esto y (4) obtenemos lo deseado.

$\square$

3. Prueba que

$$\inf_{\mathcal{N}_q} J_q = \frac{p-2}{2p} S_{q,p}^{\frac{p}{p-2}}.$$

Una función $u \in \mathcal{N}_q$ tal que $J_q(u) = \inf_{\mathcal{N}_q} J_q$ se llama un **estado fundamental** del problema (1).

Demostración. En el inciso (a) del ejercicio 2 vimos que si $u \in H^1(\mathbb{R}^N) \setminus \{0\}$, existe un único $t_u \in (0, \infty)$ tal que $t_u u \in \mathcal{N}_q$. Calculando $J_u'(t)$ explícitamente se puede verificar que

$$t_u = \left(\frac{\|u\|_1^2}{|u|_{q,p}^p} \right)^{\frac{1}{p-2}}.$$

Entonces

$$J_q(t_u u) = \frac{p-2}{2p} \|t_u u\|_1^2 = \frac{p-2}{2p} \left(\frac{\|u\|_1^2}{|u|_{q,p}^p} \right)^{\frac{2}{p-2}} \|u\|_1^2 = \frac{p-2}{2p} \frac{\|u\|_1^{\frac{4}{p-2}+2}}{|u|_{q,p}^{\frac{2p}{p-2}}} = \frac{p-2}{2p} \left(\frac{\|u\|_1^2}{|u|_{q,p}^2} \right)^{\frac{p}{p-2}}.$$

En consecuencia,

$$\inf_{\mathcal{N}_q} J_q = \frac{p-2}{2p} \left(\inf_{\substack{u \in H^1(\mathbb{R}^N) \\ u \neq 0}} \frac{\|u\|_1^2}{|u|_{q,p}^2} \right)^{\frac{p}{p-2}} = \frac{p-2}{2p} S_{q,p}^{\frac{p}{p-2}}.$$

□

4. Prueba que el **problema límite**

$$\begin{cases} -\Delta u + u = q_\infty |u|^{p-2} u, \\ u \in H^1(\mathbb{R}^N), \end{cases}$$

tiene un estado fundamental ω_∞ tal que $\omega_\infty(x) > 0$ para todo $x \in \mathbb{R}^N$.

Demostración. Sea $(u_m) \in \mathcal{N}_{q_\infty}$ tal que

$$\lim_{m \to \infty} J_{q_\infty}(u_m) = \inf_{\mathcal{N}_{q_\infty}} J_{q_\infty}.$$

Entonces

$$\frac{p-2}{2p} \|u_m\|_1^2 = \frac{1}{2} \|u_m\|_1^2 - \frac{1}{p} |u_m|_{q_\infty,p}^p = J_{q_\infty}(u_m) \to \inf_{\mathcal{N}_{q_\infty}} J_{q_\infty} = \frac{p-2}{2p} S_{q_\infty,p}^{\frac{p}{p-2}} > 0. \tag{5}$$

donde la primera igualdad es por que $u_m \in \mathcal{N}_{q_\infty}$ y la última igualdad es por el ejercicio anterior. En consecuencia, ninguna subsucesión de (u_m) converge fuertemente al 0 en $L^p(\mathbb{R}^N)$. Por lo tanto, el lema de nulidad de Lions implica que existe una subsucesión (u_n) de (u_m) y una $\delta > 0$ tal que

$$\sup_{x \in \mathbb{R}^N} \int_{B_1(x)} |u_n|^2 \geq \delta > 0 \qquad \forall n \in \mathbb{N}.$$

En particular, para cada $n \in \mathbb{N}$ existe $\xi_n \in \mathbb{R}^N$ tal que

$$\int_{B_1(\xi_n)} |u_n|^2 \geq \delta.$$

Para cada $n \in \mathbb{N}$ definimos

$$w_n(x) = u_n(x - \xi_n).$$

Como

$$\|w_n\|_1^2 = \|u_n\|_1^2 \qquad \text{y} \qquad |w_n|_{q_\infty,p}^p = q_\infty |w_n|_p^p = q_\infty |u_n|_p^p = |u_n|_{q_\infty,p}^p,$$

entonces $w_n \in \mathcal{N}_{q_\infty}$, $J_{q_\infty}(w_n) = J_{q_\infty}(u_n)$ y (por (5))

$$\|w_n\|_1^2 = |w_n|_{q_\infty,p}^p \to S_{q_\infty,p}^{\frac{p}{p-2}}. \tag{6}$$

Por otro lado, como (w_n) es acotada en $H^1(\mathbb{R}^N)$, existe una subsucesión (w_j) de (w_n) y existe $w \in H^1(\mathbb{R}^N)$ tales que $w_j \rightharpoonup w$ débilmente en $\mathbb{R}^N$. Entonces el Lema 4.27 de las notas implica que existe una subsucesión (w_k) de (w_j) tal que

$$w_k(x) \to w(x) \text{ casi dondequiera en } \mathbb{R}^N,$$
$$w_k \to w \text{ en } L^2_{\text{loc}}(\mathbb{R}^N).$$

En consecuencia,

$$\frac{\delta}{2} \le \int_{B_1(\xi_k)} u_k^2 = \int_{B_1(0)} w_k^2 \to \int_{B_1(0)} w^2.$$

En particular, $w \neq 0$. Por otro lado, el ejercicio 2 de la tarea 10 implica que

$$|w|_{q_\infty,p}^p = \lim_{k\to\infty} \left(|w_k|_{q_\infty,p}^p - |w_k - w|_{q_\infty,p}^p \right). \tag{7}$$

Además,

$$\begin{aligned}
S_{q_\infty,p}^{\frac{p}{p-2}} &= \lim_{k\to\infty} \|w_k\|_1^2 && \text{(cf. (6))}\\
&= \lim_{k\to\infty} \|w_k - w\|_1^2 + \|w\|_1^2 && \text{(Lema 4.41)}\\
&\ge S_{q_\infty,p} \left(\lim_{k\to\infty} |w_k - w|_{q_\infty,p}^2 + |w|_{q_\infty,p}^2 \right) && \text{(Def. de } S_{q_\infty,p})\\
&= S_{q_\infty,p} \left(\lim_{k\to\infty} (|w_k - w|_{q_\infty,p}^p)^{2/p} + (|w|_{q_\infty,p}^p)^{2/p} \right)\\
&\ge S_{q_\infty,p} \left(\lim_{k\to\infty} |w_k - w|_{q_\infty,p}^p + |w|_{q_\infty,p}^p \right)^{2/p} && \text{(Lema 4.44)}\\
&= S_{q_\infty,p} \left(\lim_{k\to\infty} |w_k|_{q_\infty,p}^p \right)^{2/p} && \text{(cf. (7))}\\
&= S_{q_\infty,p}^{\frac{p}{p-2}}. && \text{(cf. (6))}
\end{aligned}$$

En consecuencia,

$$S_{q_\infty,p}^{\frac{p}{p-2}} = S_{q_\infty,p} \left(\lim_{k\to\infty} |w_k - w|_{q_\infty,p}^p + |w|_{q_\infty,p}^p \right)^{2/p}, \tag{8}$$

$$\lim_{k\to\infty} (|w_k - w|_{q_\infty,p}^p)^{2/p} + (|w|_{q_\infty,p}^p)^{2/p} = \left(\lim_{k\to\infty} |w_k - w|_{q_\infty,p}^p + |w|_{q_\infty,p}^p \right)^{2/p}. \tag{9}$$

Usando (9), el Lema 4.44, y el hecho de que $w \neq 0$, obtenemos que

$$\lim_{k\to\infty} |w_k - w|_{q_\infty,p}^p = 0.$$

Usando esto y (8) obtenemos la primera igualdad de la siguiente ecuación,

$$S_{q_\infty,p}^{\frac{p}{p-2}} = S_{q_\infty,p} |w|_{q_\infty,p}^2 \le \|w\|_1^2 \le \liminf_{k\to\infty} \|w_k\|_1^2 = \lim_{k\to\infty} \|w_k\|_1^2 = S_{q_\infty,p}^{\frac{p}{p-2}}.$$

Donde la segunda desigualdad es porque $w_k \rightharpoonup w$ (cf. Proposición 1.59). Esto prueba que $\|w_k\|_1 \to \|w\|_1$. Dado que $w_k \rightharpoonup w$ débilmente en $H^1(\mathbb{R}^N)$, concluimos que $w_k \to w$ fuertemente en $H^1(\mathbb{R}^N)$. Por lo tanto, w es un estado fundamental del problema límite.

Resta probar que existe un estado fundamental positivo. Como w es un punto crítico de J_{q_∞}, entonces

$$\begin{aligned}
0 &= J'_{q_\infty}(w)w^+ \\
&= \int_{\mathbb{R}^N} \nabla w \cdot \nabla(w^+) + \int_{\mathbb{R}^N} ww^+ - \int_{\mathbb{R}^N} q_\infty |w|^{p-2}ww^+ \\
&= \int_{\mathbb{R}^N} \nabla(w^+) \cdot \nabla(w^+) + \int_{\mathbb{R}^N} w^+w^+ - \int_{\mathbb{R}^N} q_\infty |w^+|^{p-2}w^+w^+ \\
&= \|w^+\|_1^2 - |w^+|_{q_\infty,p}^p. \qquad (10)
\end{aligned}$$

donde $w^+ := \max\{0, w\}$. Análogamente,

$$\|w^-\|_1^2 = |w^-|_{q,p}^p \qquad (11)$$

donde $w^- := \min\{0, w\}$. Calculando directamente también es fácil ver que

$$J_{q_\infty}(w) = J_{q_\infty}(w^+) + J_{q_\infty}(w^-). \qquad (12)$$

Si $w^+ \neq 0$ y $w^- \neq 0$, entonces (10) y (11) implicarían que $w^+, w^- \in \mathcal{N}_q$. Más aun, (12) implicaría que $J_{q_\infty}(w) \geq 2\inf_{u\in\mathcal{N}_{q_\infty}} J_{q_\infty}$, contradiciendo que w es un estado fundamental. Por lo tanto, $w^+ = 0$ o $w^- = 0$. Entonces, por el Teorema 4.47, $w > 0$ o $w < 0$. Si $w > 0$, definimos $\omega_\infty = w$. Si $w < 0$, definimos $\omega_\infty = -w$, el cual también es estado fundamental pues

$$J_{q_\infty}(u) = J_{q_\infty}(-u) \qquad \text{y} \qquad u \in \mathcal{N}_{q_\infty} \iff -u \in \mathcal{N}_{q_\infty}$$

para todo $u \in H^1(\mathbb{R}^N)$. □

5. Prueba que $S_{q,p} \leq S_{q_\infty,p}$.

Demostración. Sea ω_∞ un estado fundamental del problema límite y sea (ξ_n) una sucesión en $\mathbb{R}^N$ tal que $|\xi_n| \to \infty$. Definimos $w_n(x) := \omega_\infty(x - \xi_n)$. Entonces

$$\|w_n\|_1^2 = \|\omega_\infty\|_1^2, \qquad (13)$$
$$|w_n|_{q_\infty,p}^p = |\omega_\infty|_{q_\infty,p}^p, \qquad (14)$$
$$w_n \rightharpoonup 0 \text{ débilmente en } H^1(\mathbb{R}^N). \qquad (15)$$

(cf. Ejercicio 4.57.) Por el ejercicio 4 de la tarea 10, existe una subsucesión (w_k) de (w_n) tal que

$$\lim_{k\to\infty} \left(|w_k|_{q,p}^p - |w_k|_{q_\infty,p}^p \right) = 0.$$

Usando esto y (14) obtenemos

$$\lim_{k\to\infty} |w_k|_{q,p}^p = |\omega_\infty|_{q_\infty,p}^p. \qquad (16)$$

Por lo tanto,

$$S_{q,p} \leq \lim_{k\to\infty} \frac{\|w_k\|_1^2}{|w_k|_{q,p}^p} = \frac{\|\omega_\infty\|_1^2}{|\omega_\infty|_{q_\infty,p}^p} = S_{q_\infty,p}$$

donde la primera igualdad es consecuencia de (13) y (16). □

6. Prueba que, si $S_{q,p} < S_{q_\infty,p}$, entonces J_q alcanza su mínimo en $\mathcal{N}_q$.

Demostración. Supongamos $S_{q,p} < S_{q_\infty,p}$. Sea (u_n) una sucesión en $\mathcal{N}_q$ tal que $J_q(u_n) \to \inf_{\mathcal{N}_q} J_q$. Entonces

$$\|u_n\|_1^2 = |u_n|_{q,p}^p \to S_{q,p}^{\frac{p}{p-2}} > 0. \tag{17}$$

En particular, (u_n) es acotada en $H^1(\mathbb{R}^N)$ y por lo tanto, existe una subsucesión (u_m) de (u_n) y existe un $u \in H^1(\mathbb{R}^N)$ tales que $u_m \rightharpoonup u$ débilmente en $H^1(\mathbb{R}^N)$. Si $u = 0$, el ejercicio 4 de la tarea 10 implica que existe una subsucesión (u_j) de (u_m) tal que

$$S_{q,p} = \lim_{j\to\infty} \frac{\|u_j\|_1^2}{|u_j|_{q,p}^p} = \lim_{j\to\infty} \frac{\|u_j\|_1^2}{|u_j|_{q_\infty,p}^p} \geq S_{q_\infty,p},$$

contradiciendo $S_{q,p} < S_{q_\infty,p}$. Por lo tanto, $u \neq 0$. Por otro lado, como $u_m \rightharpoonup u$ débilmente en $H^1(\mathbb{R}^N)$, el Lema 4.27 implica que existe una subsucesión (u_k) de (u_m) tal que $u_k(x) \to u(x)$ pct $x \in \mathbb{R}^N$. Usando esto, el ejercicio 2 de la tarea 10 implica que

$$|u|_{q,p}^p = \lim_{k\to\infty} \left(|u_k|_{q,p}^p - |u_k - w|_{q,p}^p \right). \tag{18}$$

Además,

$$\begin{aligned}
S_{q,p}^{\frac{p}{p-2}} &= \lim_{k\to\infty} \|u_k\|_1^2 && \text{(cf. (17))}\\
&= \lim_{k\to\infty} \|u_k - u\|_1^2 + \|u\|_1^2 && \text{(Lema 4.41)}\\
&\geq S_{q,p} \left(\lim_{k\to\infty} |u_k - u|_{q,p}^2 + |u|_{q,p}^2 \right) && \text{(Def. de } S_{q,p})\\
&= S_{q,p} \left(\lim_{k\to\infty} (|u_k - u|_{q,p}^p)^{2/p} + (|u|_{q,p}^p)^{2/p} \right) &&\\
&\geq S_{q,p} \left(\lim_{k\to\infty} |u_k - u|_{q,p}^p + |u|_{q,p}^p \right)^{2/p} && \text{(Lema 4.44)}\\
&= S_{q,p} \left(\lim_{k\to\infty} |u_k|_{q,p}^p \right)^{2/p} && \text{(cf. (18))}\\
&= S_{q,p}^{\frac{p}{p-2}}. && \text{(cf. (17))}
\end{aligned}$$

En consecuencia,

$$S_{q,p}^{\frac{p}{p-2}} = S_{q,p} \left(\lim_{k\to\infty} |u_k - u|_{q,p}^p + |u|_{q,p}^p \right)^{2/p}, \tag{19}$$

$$\lim_{k\to\infty} (|u_k - u|_{q,p}^p)^{2/p} + (|u|_{q,p}^p)^{2/p} = \left(\lim_{k\to\infty} |u_k - u|_{q,p}^p + |u|_{q,p}^p \right)^{2/p}. \tag{20}$$

Usando (20), el Lema 4.44, y el hecho de que $u \neq 0$, obtenemos que

$$\lim_{k\to\infty} |u_k - u|_{q,p}^p = 0.$$

Usando esto y (19) obtenemos la primera igualdad de la siguiente ecuación,

$$S_{q,p}^{\frac{p}{p-2}} = S_{q,p}|u|_{q,p}^2 \leq \|u\|_1^2 \leq \liminf_{k\to\infty} \|u_k\|_1^2 = \lim_{k\to\infty} \|u_k\|_1^2 = S_{q,p}^{\frac{p}{p-2}}.$$

Donde la segunda desigualdad es porque $u_k \rightharpoonup u$ (cf. Proposición 1.59). Esto prueba que $\|u_k\|_1^2 \to \|u\|_1^2$. Dado que $u_k \rightharpoonup u$ en $H^1(\mathbb{R}^N)$, concluimos que $u_k \to u$ fuertemente en $H^1(\mathbb{R}^N)$. En consecuencia u es un mínimo de J_q en $\mathcal{N}_q$. □

7. Demuestra el teorema de Ding y Ni.

Demostración. Si $q = q_\infty$, el ejercicio 4 implica lo deseado. De lo contrario (como $q(x) \geq q_\infty \ \forall x \in \mathbb{R}^N$), existe $x_0 \in \mathbb{R}^N$ tal que $q(x_0) > q_\infty$, entonces (como $q \in \mathcal{C}^0(\mathbb{R}^N)$) existe una vecindad V de x tal que $q(x) > q_\infty$ para todo $x \in V$. Usando esto y la hipótesis de que $q(x) \geq q_\infty \ \forall x \in \mathbb{R}^N$ obtenemos que

$$|\omega_\infty|_{q_\infty,p}^p = \int_{\mathbb{R}^N} q_\infty |\omega_\infty|^p < \int_{\mathbb{R}^N} q|\omega_\infty|^p = |\omega_\infty|_{q,p}^p$$

donde ω_∞ es un estado fundamental del problema límite con $\omega_\infty(x) > 0$ para todo $x \in \mathbb{R}^N$. Por lo tanto,

$$S_{q,p} \leq \frac{\|\omega_\infty\|_1^2}{|\omega_\infty|_{q,p}^2} < \frac{\|\omega_\infty\|_1^2}{|\omega_\infty|_{q_\infty,p}^2} = S_{q_\infty,p}.$$

Usando esto y el ejercicio 6 obtenemos lo deseado. □