Teorema de clasificación de cubrientes (parte 2)

Diego Leipen Lara

UNAM

2 de diciembre de 2025

Recordatorio

Notación

Sea X un espacio topológico y $x_0 \in X$.

- Denotamos por $\mathrm{ACC}(X)$ al conjunto de clases de isomorfismo de aplicaciones cubrientes conexas por trayectorias sobre X.
- Denotamos por $\mathrm{CCS}(\pi_1(X, x_0))$ al conjunto de clases de conjugación de subgrupos de $\pi_1(X, x_0)$.

Teorema (Clasificación)

Sea X conexo, localmente conexo por trayectorias, y semi-localmente 1-conexo. Para todo $x_0 \in X$ sea

$$\begin{aligned} \Phi : \mathrm{ACC}(X) &\to \mathrm{CCS}(\pi_1(X, x_0)) \\ [E, p] &\mapsto \left[p_{\#}\pi_1(E, a)\right] \end{aligned}$$

donde $a \in p^{-1}(x_0)$. Entonces Φ es una biyección.

Tres lemas para ver que Φ es bien definida e inyectiva

Sea X un espacio, $x_0 \in X$, (E, p) cubriente de X, y E conexo por trayectorias.

Lema 1

Si $a, b \in p^{-1}(x_0)$, entonces $p_\# \pi_1(E, a)$ y $p_\# \pi_1(E, b)$ son subgrupos conjugados de $\pi_1(X, x_0)$.

Demostración. Lo vimos en clase. $\square$

Lema 2

Sea $S \leq \pi_1(X, x_0)$ y $a \in p^{-1}(x_0)$. Si S y $p_\# \pi_1(E, a)$ son subgrupos conjugados de $\pi_1(X, x_0)$, entonces existe $b \in p^{-1}(x_0)$ tal que $S = p_\# \pi_1(E, b)$.

Demostración. Es consecuencia inmediata del siguiente ejercicio asignado en clase: *Si E es conexo por trayectorias, entonces la familia*

$$\left\{ p_\# \pi_1(E, c) \mid c \in p^{-1}(x_0) \right\}$$

es una clase de conjugación completa de subgrupos de $\pi_1(X, x_0)$. $\square$

Lema 3

Supongamos que X es conexo y localmente conexo por trayectorias. Sean (E,p), (F,q) cubrientes de X y sean $a \in E$, $b \in F$ t.q. $p(a) = x_0 = q(b)$. Si $p_\# \pi_1(E,a) = q_\# \pi_1(F,b)$, entonces existe un único homeomorfismo $h : (E,a) \to (F,b)$ tal que $qh = p$.

$$\begin{tikzcd} & (F,b) \arrow[d, "q"] \\ (E,a) \arrow[ur, dashed, "h"] \arrow[r, "p"'] & (X,x_0) \end{tikzcd}$$

Demostración. Recordemos el criterio de levantamiento:

Teorema (Criterio de levantamiento)

Sea Y conexo y localmente conexo por trayectorias, sea $f : (Y, y_0) \to (X, x_0)$ continua, y sea (G, r) cubriente de X. Entonces $f_\# \pi_1(Y, y_0) \subset r_\# \pi_1(G, c)$ si y solo si existe una única función continua $\tilde{f} : (Y, y_0) \to (G, c)$ (donde $c \in r^{-1}(x_0)$) tal que $r\tilde{f} = f$.

$$\begin{tikzcd} & (G,c) \arrow[d, "r"] \\ (Y,y_0) \arrow[ur, dashed, "\tilde{f}"] \arrow[r, "f"] & (X,x_0) \end{tikzcd}$$

Supongamos que $p_\# \pi_1(E, a) = q_\# \pi_1(F, b)$. Como X es conexo y localmente conexo por trayectorias, entonces E también lo es. Por lo tanto, (como $p_\# \pi_1(E, a) \subset q_\# \pi_1(F, b)$) el siguiente diagrama tiene una única solución h.

$$\begin{tikzcd} & (F,b) \arrow[d, "q"] \\ (E,a) \arrow[ur, dashed, "h"] \arrow[r, "p"] & (X,x_0) \end{tikzcd}$$

Resta probar que h es un homeomorfismo. De la misma manera en la que obtuvimos h, podemos obtener una única función continua $k : (F, b) \to (E, a)$ tal que $pk = q$. En particular,

$$p(kh) = (pk)h = qh = p.$$

Por lo tanto, kh e id_E ambos completan el siguiente diagrama.

$$\begin{tikzcd}
& E \arrow[d, "p"] \\
E \arrow[ur, dashed] \arrow[r, "p"] & X
\end{tikzcd}$$

Por unicidad de los levantamientos, $kh = \mathrm{id}_E$ y por lo tanto, h es un homeomorfismo. $\square$

Φ es bien definida e inyectiva

Teorema

Sea X localmente conexo por trayectorias y $x_0 \in X$. Más aun sean (E, p), (F, q) cubrientes de X y $a \in E$, $b \in F$ tales que $p(a) = x_0 = q(b)$. Entonces (E, p) y (F, q) son equivalentes si y solo si $p_\# \pi_1(E, a)$ y $q_\# \pi_1(F, b)$ son subgrupos conjugados de $\pi_1(X, x_0)$.

Primero veamos porque esto implica que Φ es bien definida e inyectiva. Recordemos que por definición,

$$\begin{aligned} \Phi : \mathrm{ACC}(X) &\to \mathrm{CCS}(\pi_1(X, x_0)) \\ [E, p] &\mapsto \left[p_\# \pi_1(E, a)\right] \end{aligned}$$

donde $a \in p^{-1}(x_0)$. Usando esto podemos reescribir la proposición de la siguiente manera:

$$[E, p] = [F, q] \iff \Phi[E, p] = \Phi[F, q].$$

Es decir, Φ es bien definida e inyectiva.

Demostración. Supongamos que (E, p) y (F, q) son equivalentes. Por definición, existe un homeomorfismo $\xi : F \to E$ tal que $p\xi = q$. En particular, $p\xi(b) = q(b) = x_0$ y por lo tanto, $\xi(b) \in p^{-1}(x_0)$. Por otro lado,

$$q_{\#}\pi_1(F, b) = (p\xi)_{\#}\pi_1(F, b) = p_{\#}\xi_{\#}\pi_1(F, b) = p_{\#}\pi_1(E, \xi(b)).$$

Pero como $\xi(b) \in p^{-1}(x_0)$, entonces (por el lema 1) $p_{\#}\pi_1(E, a)$ y $p_{\#}\pi_1(E, \xi(b))$ son subgrupos conjugados de $\pi_1(X, x_0)$. Juntando esto con la ecuación anterior, obtenemos lo deseado.

Conversamente, supongamos que $p_{\#}\pi_1(E, a)$ y $q_{\#}\pi_1(F, b)$ son subgrupos conjugados de $\pi_1(X, x_0)$. Entonces (por el lema 2) existe $b_0 \in p^{-1}(x_0)$ con $q_{\#}\pi_1(F, b) = p_{\#}\pi_1(E, b_0)$. Finalmente, (por el lema 3) esta igualdad implica que existe un único homeomorfismo $h : E \to F$ tal que $qh = p$. Es decir, (E, p) y (F, q) son equivalentes. $\square$

Notación para ver que Φ es suprayectiva

Sea (X, x_0) un espacio basado. Denotamos por $C(X, x_0)$ al conjunto de caminos en X que empiezan en x_0. Sea H un subgrupo de $\pi_1(X, x_0)$. La relación $\sim$ en $C(X, x_0)$ dada por

$$f \sim g \iff f(1) = g(1) \quad \text{y} \quad [f * \overline{g}] \in H$$

es de equivalencia. Denotamos por $\langle f \rangle$ a la clase de equivalencia de $f \in C(X, x_0)$ bajo esta relación y denotamos

$$\begin{aligned} E_H &= C(X, x_0)/\sim \\ &= \left\{ \langle f \rangle \mid f \in C(X, x_0) \right\}. \end{aligned}$$

Sea e_0 el lazo constantemente x_0 y denotemos $\tilde{x}_0 \coloneqq \langle e_0 \rangle$. Para todo $\langle f \rangle \in E_H$ y toda vecindad U de $f(1)$ denotamos

$$(U, \langle f \rangle) \coloneqq \{\langle F \rangle \mid F \text{ es una continuación de } f \text{ en } U\}.$$

Finalmente, denotamos

$$\begin{aligned} p : E_H &\to X \\ \langle f \rangle &\mapsto f(1). \end{aligned}$$

El plan para ver que Φ es suprayectiva

La idea es demostrar el siguiente resultado.

Teorema

Sea (X, x_0) un espacio basado y sea H un subgrupo de $\pi_1(X, x_0)$. Si X es conexo, localmente conexo por trayectorias, y semi-localmente 1-conexo, entonces

1. (E_H, p) es cubriente de X y
2. $p_\# \pi_1(E_H, \tilde{x}_0) = H$.

Recordando que por definición,

$$\begin{aligned} \Phi : \mathrm{ACC}(X) &\to \mathrm{CCS}(\pi_1(X, x_0)) \\ [E, q] &\mapsto \left[q_\# \pi_1(E, a)\right] \end{aligned}$$

es claro que el resultado anterior implica que Φ es suprayectiva.

Dos lemas para ver que (E_H, p) es cubriente de X

Lema 4

Si $\langle g \rangle \in (U, \langle f \rangle)$, entonces $(U, \langle f \rangle) = (U, \langle g \rangle)$.

Lema 5

La familia que consiste de todos los subconjuntos de la forma $(U, \langle f \rangle)$ es una base de E_H en donde $p : E_H \to X$ es continua. Más aun, si X es conexo por trayectorias, entonces p es suprayectiva.

(E_H, p) es cubriente de X

Proposición

Sea (X, x_0) espacio basado y sea H un subgrupo de $\pi_1(X, x_0)$. Si X es conexo, localmente conexo por trayectorias, y semi-localmente 1-conexo, entonces (E_H, p) es cubriente de X.

Demostración. Sea $x \in X$. Como X es semi-localmente 1-conexo, existe una vecindad W de x tal que todo lazo en W basado en x es nulhomotópico en X. Más aun, como X es localmente conexo por trayectorias, existe una vecindad U de x tal que U es conexa por trayectorias y $U \subset W$. En lo que sigue veremos que U esta cubierto parejamente por p. Específicamente, veremos que

$$p^{-1}(U) = \coprod_{\langle f \rangle \in p^{-1}(x)} (U, \langle f \rangle).$$

y veremos que $p \restriction_{(U, \langle f \rangle)} : (U, \langle f \rangle) \to U$ es un homeomorfismo para todo $\langle f \rangle \in p^{-1}(x)$. Como E_H es conexo por trayectorias y p es suprayectiva (por el lema 5), esto es suficiente para ver que (E_H, p) es cubriente de X.

Primero veamos que $p\restriction_{(U,\langle f\rangle)}\colon (U,\langle f\rangle)\to U$ es un homeomorfismo para todo $\langle f\rangle\in p^{-1}(x)$. Sea $\langle f\rangle\in p^{-1}(x)$. Veamos que $p\restriction_{(U,\langle f\rangle)}\colon (U,\langle f\rangle)\to U$ es suprayectiva. Sea $y\in U$. Como U es conexo por trayectorias, existe un camino λ de x a y. Entonces $f*\lambda$ es una continuación de f en U con $(f*\lambda)(1)=y$, es decir, $\langle f*\lambda\rangle\in(U,\langle f\rangle)$ y $p(\langle f*\lambda\rangle)=(f*\lambda)(1)=y$. Por lo tanto, f es suprayectiva. Veamos que $p\restriction_{(U,\langle f\rangle)}$ es inyectiva. Sean $a,b\in(U,\langle f\rangle)$ tales que $p(a)=p(b)$. Por definición de $(U,\langle f\rangle)$, existen caminos μ y λ en U tales que $a=\langle f*\mu\rangle$ y $b=\langle f*\lambda\rangle$. En particular, como $p(a)=p(b)$, entonces

$$\lambda(1)=(f*\lambda)(1)=p(\langle f*\lambda\rangle)=p(\langle f*\mu\rangle)=(f*\mu)(1)=\mu(1).$$

Como λ y μ empiezan en $f(1)$ por definición, lo anterior implica que $\lambda*\overline{\mu}$ es un lazo en U basado en $f(1)$. Pero por como escogimos U, $\lambda*\overline{\mu}$ es nulhomotópico en X. Entonces $f*\lambda*\overline{\mu}*\overline{f}$ es nulhomotópico en X. Entonces

$$[f*\lambda*\overline{f*\mu}]=[f*\lambda*\overline{\mu}*\overline{f}]=1_{\pi_1(X,x_0)}\in H.$$

En otras palabras, $\underbrace{\langle f*\lambda\rangle}_{a}=\underbrace{\langle f*\mu\rangle}_{b}$. Por lo tanto, $p\restriction_{(U,\langle f\rangle)}$ es inyectiva.

Veamos que $p \restriction_{(U,\langle f\rangle)}$ es abierta. Como $(U,\langle f\rangle)$ es abierto, basta ver que p es abierta. Como X es localmente conexo por trayectorias, se puede verificar que la familia que consiste de todos los subconjuntos de la forma $(V,\langle f\rangle)$ con V conexo por trayectorias es una base de E_H. Más aun, el argumento dado para demostrar que $p \restriction_{(U,\langle f\rangle)}\colon (U,\langle f\rangle) \to U$ es suprayectiva sirve para demostrar que $\restriction_{(U,\langle f\rangle)}\colon (V,\langle f\rangle) \to V$ es suprayectiva para todo V conexo por trayectorias (lo único que se ocupa en el argumento es precisamente que el abierto es conexo por trayectorias). En particular,

$$p(V,\langle f\rangle) = V \text{ es abierto}$$

para todo V conexo por trayectorias. Pero como la familia que consiste de todos los subconjuntos de la forma $(V,\langle f\rangle)$ con V conexo por trayectorias es una base de E_H, entonces p es abierta.

En resumen, $p \restriction_{(U,\langle f\rangle)}\colon (U,\langle f\rangle) \to U$ es biyectiva, continua, y abierta, es decir, $p \restriction_{(U,\langle f\rangle)}\colon (U,\langle f\rangle) \to U$ es un homeomorfismo.

Veamos que

$$p^{-1}(U) = \bigcup_{\langle f \rangle \in p^{-1}(x)} (U, \langle f \rangle).$$

Como $U = p(U, \langle f \rangle)$ para todo $\langle f \rangle \in p^{-1}(x)$, entonces

$$p^{-1}(U) = p^{-1}(p(U, \langle f \rangle)) \supset (U, \langle f \rangle)$$

para todo $\langle f \rangle \in p^{-1}(x)$. Por lo tanto, tenemos la inclusión "$\supset$".
Conversamente, sea $\langle g \rangle \in p^{-1}(U)$. Entonces $g(1) = p(\langle g \rangle) \in U$. Como U es conexo por trayectorias, existe un camino λ en U de $g(1)$ a x. Entonces, $f \coloneqq g * \lambda$ es una continuación de g en U y en particular, $\langle f \rangle \in p^{-1}(x)$. Más aun, $f * \overline{\lambda}$ es una continuación de f en U. En otras palabras,

$$\langle f * \overline{\lambda} \rangle \in (U, \langle f \rangle).$$

Pero

$$\langle f * \overline{\lambda} \rangle = \langle (g * \lambda) * \overline{\lambda} \rangle = \langle g \rangle.$$

Juntando las ultimas dos ecuaciones obtenemos lo deseado.

Veamos que

$$\bigcup_{\langle f\rangle \in p^{-1}(x)} (U, \langle f\rangle).$$

es una unión disjunta. Sea $\langle h\rangle \in (U, \langle f\rangle) \cap (U, \langle g\rangle)$ con $\langle f\rangle, \langle g\rangle \in p^{-1}(x)$. Por el lema 4,

$$(U, \langle f\rangle) = (U, \langle h\rangle) = (U, \langle g\rangle).$$

Por lo tanto, la unión es disjunta y

$$p^{-1}(U) = \coprod_{\langle f\rangle \in p^{-1}(x)} (U, \langle f\rangle).$$

Esto concluye la demostración. $\square$

Dos lemas para ver que $p_{\#}\pi_1(E_H, \tilde{x}_0) = H$

Lema 6

Para todo $f \in C(X, x_0)$ existe un camino $\tilde{f}$ en E_H tal que $\tilde{f}(0) = \tilde{x}_0$, $\tilde{f}(1) = \langle f \rangle$, y $p\tilde{f} = f$.

Lema 7

Sea (E, q) cubriente de X, $x_0 \in X$, y $a \in q^{-1}(x_0)$. Si f es un lazo en X basado en x_0 y $\tilde{f}$ es el levantamiento de f con $\tilde{f}(0) = a$, entonces

$$[f] \in q_{\#}\pi_1(E, a) \iff \tilde{f} \text{ es un lazo en } \tilde{X} \text{ basado en } a.$$

$p_{\#}\pi_1(E_H, \tilde{x}_0) = H$

Proposición

Sea (X, x_0) espacio basado y sea H un subgrupo de $\pi_1(X, x_0)$. Si X es conexo, localmente conexo por trayectorias, y semi-localmente 1-conexo, entonces $p_{\#}\pi_1(E_H, \tilde{x}_0) = H$.

Demostración. Sea $[f] \in \pi_1(X, x_0)$. Por el lema 6, existe un camino $\tilde{f}$ en E_H tal que $\tilde{f}(0) = \tilde{x}_0$, $\tilde{f}(1) = \langle f \rangle$, y $p\tilde{f} = f$. Más aun, por el lema 7,

$$[f] \in p_{\#}\pi_1(E_H, \tilde{x}_0) \iff \tilde{f} \text{ es un lazo en } E_H \text{ basado en } \tilde{x}_0. \tag{1}$$

Pero

$$\begin{aligned} \tilde{f} \text{ es un lazo en } E_H \text{ basado en } \tilde{x}_0 &\iff \tilde{f}(0) = \tilde{f}(1) \\ &\iff \tilde{x}_0 = \langle f \rangle \\ &\iff \langle e_0 \rangle = \langle f \rangle \\ &\iff [f * \overline{e_0}] \in H \\ &\iff [f] \in H. \end{aligned} \tag{2}$$

Juntando (1) y (2) obtenemos lo deseado. $\square$