Tarea 10

Diego Leipen Lara

Metodos Variacionales

Sean $p \in (2, 2^*)$ y $q \in \mathcal{C}^0(\mathbb{R}^N)$ tal que $q(x) > 0$ para todo $x \in \mathbb{R}^N$ y

$$\lim_{|x| \to \infty} q(x) = q_\infty > 0. \tag{1}$$

Demuestra las siguientes afirmaciones.

1. La expresión

$$|u|_{q,p} := \left(\int_{\mathbb{R}^N} q|u|^p \right)^{\frac{1}{p}}$$

es una norma en $L^p(\mathbb{R}^N)$ y es equivalente a la norma usual de $L^p(\mathbb{R}^N)$.

Demostración. La ecuación (1) implica que existe $M > 0$ tal que

$$|q(x) - q_\infty| < \frac{q_\infty}{2} \qquad \text{si } |x| > M.$$

En particular,

$$\frac{q_\infty}{2} < q(x) < \frac{3q_\infty}{2} \qquad \text{si } |x| > M.$$

Como $q \in \mathcal{C}^0(\mathbb{R}^N)$, $q > 0$, y $\overline{B_M(0)}$ es compacta, entonces existen $M_1, M_2 > 0$ tales que

$$M_1 < q(x) < M_2 \qquad \text{si } |x| \leq M.$$

Entonces

$$C_1 := \min\left\{ \frac{q_\infty}{2}, M_1 \right\} < q(x) < \max\left\{ \frac{3q_\infty}{2}, M_2 \right\} =: C_2 \qquad \forall x \in \mathbb{R}^N.$$

De donde,

$$C_1^{\frac{1}{p}} |u|_p = \left(\int_{\mathbb{R}^N} C_1 |u|^p \right)^{\frac{1}{p}} \leq \underbrace{\left(\int_{\mathbb{R}^N} q|u|^p \right)^{\frac{1}{p}}}_{|u|_{q,p}} \leq \left(\int_{\mathbb{R}^N} C_2 |u|^p \right)^{\frac{1}{p}} = C_2^{\frac{1}{p}} |u|_p < \infty. \tag{2}$$

En particular, $|\cdot|_{q,p}$ esta bien definida. Además, por definición,

$$|u|_{q,p} = |q^{\frac{1}{p}} u|_p \qquad \forall u \in L^p(\mathbb{R}^N). \tag{3}$$

Como $|\cdot|_p$ es norma, (3) implica que

$$|\lambda u|_{q,p} = |\lambda| |u|_{q,p} \qquad \forall \lambda \in \mathbb{R}, \forall u \in L^p(\mathbb{R}^N),$$
$$|u + v|_{q,p} \leq |u|_{q,p} + |v|_{q,p} \qquad \forall u, v \in L^p(\mathbb{R}^N).$$

Finalmente, (2) implica que $|\cdot|_{q,p}$ es positiva definida y equivalente a $|\cdot|_p$. $\square$

2. Si (u_n) es una sucesión acotada en $L^p(\mathbb{R}^N)$ y $u_n(x) \to u(x)$ pct $x \in \mathbb{R}^N$, entonces $u \in L^p(\mathbb{R}^N)$ y

$$\lim_{n\to\infty} \left(|u_n|_{q,p}^p - |u_n - u|_{q,p}^p| \right) = |u|_{q,p}^p.$$

Demostración. Como (u_n) es acotada en $L^p(\mathbb{R}^N)$, el ejercicio (1) implica que la sucesión de números reales $(|u_n|_{q,p})$ es acotada. Pero $|u_n|_{q,p} = |q^{\frac{1}{p}} u_n|_p$ (cf. (3)) y por lo tanto, $(q^{\frac{1}{p}} u_n)$ es acotada en $L^p(\mathbb{R}^N)$. Además, $q^{\frac{1}{p}}(x) u_n(x) \to q^{\frac{1}{p}}(x) u(x)$ pct $x \in \mathbb{R}^N$ pues $u_n(x) \to u(x)$ pct $x \in \mathbb{R}^N$. Entonces, por el Lema de Brezis-Lieb,

$$\lim_{n\to\infty} \left(|q^{\frac{1}{p}} u_n|_p^p - |q^{\frac{1}{p}} u_n - q^{\frac{1}{p}} u|_p^p \right) = |q^{\frac{1}{p}} u|_p^p.$$

Usando esto y (3) obtenemos lo deseado. $\square$

3. Prueba que la función $\Phi_q : L^p(\mathbb{R}^N) \to \mathbb{R}$ dada por

$$\Phi_q(u) = \frac{1}{p} \int_{\mathbb{R}^N} q|u|^p$$

es de clase $\mathcal{C}^2$ y que su derivada esta dada por

$$\Phi_q'(u)v = \int_{\mathbb{R}^N} q|u|^{p-2}uv \qquad \forall u, v \in L^p(\mathbb{R}^N).$$

Demostración. Siguiendo la sugerencia, sea

$$\begin{aligned} Q : L^p(\mathbb{R}^N) &\to L^p(\mathbb{R}^N) \\ u &\mapsto q^{\frac{1}{p}} u. \end{aligned}$$

Entonces

$$\begin{aligned} Q(u + \lambda v) = q^{\frac{1}{p}}(u + \lambda v) = q^{\frac{1}{p}} u + \lambda q^{\frac{1}{p}} v = Q(u) + \lambda Q(v) \qquad &\forall u, v \in L^p(\mathbb{R}^N)\, \forall \lambda \in \mathbb{R}, \\ |Q(u)|_p = |q^{\frac{1}{p}} u|_p = |u|_{q,p} \overset{(2)}{\leq} C_2^{\frac{1}{p}} |u|_p \qquad &\forall u \in L^p(\mathbb{R}^N). \end{aligned}$$

Es decir, Q es lineal y continua. Por otro lado, sea

$$\begin{aligned} \Phi : L^p(\mathbb{R}^N) &\to \mathbb{R} \\ u &\mapsto \frac{1}{p} \int_{\mathbb{R}^N} |u|^p. \end{aligned}$$

En la Proposición 1.43 de las notas se demuestra que Φ es de clase $\mathcal{C}^2$ y que

$$\Phi'(u)v = \int_{\mathbb{R}^N} |u|^{p-2}uv \qquad \forall u, v \in L^p(\mathbb{R}^n).$$

Además,

$$\Phi \circ Q(u) = \Phi(q^{\frac{1}{p}} u) = \frac{1}{p} \int_{\mathbb{R}^N} |q^{\frac{1}{p}} u|^p = \frac{1}{p} \int_{\mathbb{R}^N} q|u|^p = \Phi_q(u) \qquad \forall u \in L^p(\mathbb{R}^N).$$

Por lo tanto, Φ_q es de clase $\mathcal{C}^2$ y

$$\begin{aligned} \Phi_q'(u)v &= (\Phi \circ Q)'(u)v \\ &= (\Phi'(Qu) \circ Q'(u))v \\ &= (\Phi'(q^{\frac{1}{p}} u) \circ Q)v \\ &= \Phi'(q^{\frac{1}{p}} u)(q^{\frac{1}{p}} v) \\ &= \int_{\mathbb{R}^N} |q^{\frac{1}{p}} u|^{p-2} (q^{\frac{1}{p}} u)(q^{\frac{1}{p}} v) \\ &= \int_{\mathbb{R}^N} q|u|^{p-2}uv \end{aligned}$$

para todo $u, v \in L^p(\mathbb{R}^N)$. $\square$

4. Prueba que si $u_n \rightharpoonup 0$ en $H^1(\mathbb{R}^N)$, entonces una subsucesión satisface

$$\lim_{n\to\infty}\Big(|u_n|_{q,p}^p - |u_n|_{q_\infty,p}^p|\Big) = 0.$$

Demostración. Sea $\epsilon > 0$. Como (u_n) converge débilmente en $H^1(\mathbb{R}^N)$, es acotada en $H^1(\mathbb{R}^N)$. Además, por el teorema de encaje de Sobolev, (u_n) es acotada en $L^p(\mathbb{R}^N)$. En particular, existe $C > 0$ tal que $|u_n|_p^p < C$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Por otro lado, (1) implica que existe $R > 0$ tal que

$$|q(x) - q_\infty| < \frac{\epsilon}{2C} \qquad \text{si } |x| \geq R.$$

Entonces

$$\int_{|x|\geq R} |q(x) - q_\infty||u_n|^p \leq \frac{\epsilon}{2C}\int_{|x|\geq R} |u_n|^p \leq \frac{\epsilon}{2C}|u_n|_p^p < \frac{\epsilon}{2} \qquad \forall n \in \mathbb{N}.$$

Por otro lado, como $u_n \rightharpoonup 0$ en $H^1(\mathbb{R}^N)$, el Lema 4.27 de las notas implica que existe una subsucesión (u_k) de (u_n) que satisface $u_k \to 0$ en $L^p_{\text{loc}}(\mathbb{R}^N)$. Por lo tanto, existe $k_0 \in \mathbb{N}$ tal que

$$\int_{|x|\leq R} |q(x) - q_\infty||u_k|^p \leq \sup_{x\in\mathbb{R}^N} |q(x) - q_\infty| \int_{|x|\leq R} |u_k|^p < \frac{\epsilon}{2} \qquad \forall k \geq k_0.$$

Por lo tanto, si $k \geq k_0$

$$\begin{aligned}
\Big||u_k|_{q,p}^p - |u_k|_{q_\infty,p}^p\Big| &= \left|\int_{\mathbb{R}^N} q|u_k|^p - \int_{\mathbb{R}^N} q_\infty|u_k|^p\right| \\
&= \left|\int_{\mathbb{R}^N} (q - q_\infty)|u_k|^p\right| \\
&= \left|\int_{|x|\leq R} (q - q_\infty)|u_k|^p + \int_{|x|\geq R} (q - q_\infty)|u_k|^p\right| \\
&\leq \int_{|x|\leq R} |q(x) - q_\infty||u_k|^p + \int_{|x|\geq R} |q(x) - q_\infty||u_k|^p \\
&< \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2} = \epsilon.
\end{aligned}$$

□