

El campo de fracciones de un dominio entero con 1

Facultad de Ciencias UNAM

Introducción

Empecemos esta sección con una observación extremadamente trivial: todo elemento de \mathbb{Q} puede ser expresado como una fracción de elementos de \mathbb{Z} . El objetivo de esta sección es generalizar este hecho en el siguiente sentido: todo dominio entero con 1, digamos D , esta contenido en un campo F_D tal que todo elemento de F_D puede ser expresado como una fracción de elementos de D . Por obvias razones, a este campo le llamaremos el *campo de fracciones de un dominio entero*.

Cabe recalcar que la construcción que haremos es casi una copia literal de la construcción de \mathbb{Q} a partir de \mathbb{Z} que usualmente se ve en Calculo 1 o Álgebra Superior 1.

La construcción

Sea D un dominio entero con 1. Queremos construir un campo F_D tal que todo elemento de F_D pueda ser expresado como una fracción de elementos de D .

1. Definimos el conjunto F_D .
2. Definimos las operaciones en F_D .
3. Verificamos que F_D es un campo.
4. Verificamos que D esta “contenido” en F_D . Precisamente, veremos que F_D tiene un subanillo isomorfo a D .

El caso $D = \mathbb{Z}$ sera nuestra guía. El objetivo es construir F_D de manera que $F_{\mathbb{Z}} \cong \mathbb{Q}$.

Paso 1: El conjunto

Primero notemos que podemos pensar en una fracción $\frac{a}{b} \in \mathbb{Q}$ (con $a, b \in \mathbb{Z}$) como un pareja ordenada $(a, b) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$. Sin embargo, $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ no es el conjunto buscado. Hay dos detalles:

- a. Cuando $b = 0$, la fracción no esta definido.
- b. $(1, 2)$ y $(2, 4)$ representan el mismo racional. Por supuesto, hay una infinidad de ejemplos análogos.

Afortunadamente, podemos resolver ambos problemas con las siguientes modificaciones (las cuales ya escribimos en el caso general):

Definición

Sea D un dominio entero. Definimos el conjunto

$$S := D \times (D \setminus \{0\}) = \{(a, b) \mid a, b \in D \text{ } b \neq 0\}.$$

Definimos la relación de equivalencia \sim sobre S por

$$(a, b) \sim (c, d) \iff a \times_D d = b \times_D c$$

para toda $(a, b), (c, d) \in S$.

Finalmente, definimos **el conjunto del campo de fracciones de un dominio entero** como

$$F_D := S / \sim$$

Como los elementos de F_D son clases de equivalencia, los denotamos por $[(a, b)]$ donde $(a, b) \in S$.

El objetivo de definir S es resolver el problema (a); y el objetivo de definir \sim es resolver el problema (b).

Falta verificar que \sim es una relación de equivalencia: Sean $(a, b), (c, d), (e, f) \in S$.

- *Reflexividad.* Como la multiplicación es conmutativa, $ab = ba$. Por lo tanto, $(a, b) \sim (a, b)$.
- *Simetría.* Supongamos que $(a, b) \sim (c, d)$. Por definición, $ad = bc$. De nuevo, por conmutatividad, $cb = da$. Por lo tanto, $(c, d) \sim (a, b)$.
- *Transitividad.* Supongamos que $(a, b) \sim (c, d)$ y $(c, d) \sim (e, f)$. Por definición, $ad = bc$ y $cf = de$. Usando estas igualdades y la conmutatividad de \times_D obtenemos

$$afd = fad = fbc = bcf = bde = bed.$$

Finalmente, como D es dominio y $d \neq 0$, podemos cancelarlo en la ecuación anterior para obtener $af = be$. Por lo tanto, $(a, b) \sim (e, f)$.

Paso 2: Las operaciones

Definición

Supongamos que $[(a, b)], [(c, d)] \in F_D$. Definimos $+$ y \times en F_D por

$$[(a, b)] + [(c, d)] := [(ad + bc, bd)]$$

$$[(a, b)] \times [(c, d)] := [(ac, bd)]$$

Debería de ser claro que cuando $D = \mathbb{Z}$, estas operaciones coinciden con las operaciones usuales en \mathbb{Q} . Veamos que están bien definidas. Primero notemos que $bd \neq 0$ ¹ y por lo tanto, $(ad + bc, bd), (ac, bd) \in S$. Es decir, el contradominio de las operaciones esta bien definido.

¹Esto es consecuencia de que $(a, b), (c, d) \in S$ implica $b \neq 0 \neq c$ y por lo tanto (como D es dominio, $bd \neq 0$.

Ahora si, veamos que $+$ y \times no dependen de los representantes. Para esto, supongamos que $(a', b'), (c', d') \in S$ son tales que $[(a, b)] = [(a', b')]$ y $[(c, d)] = [(c', d')]$. Queremos ver que

$$[(ad + bc, bd)] = [(a'd' + b'c', b'd')] \quad \text{y} \quad [(ac, bd)] = [(a'c', b'd')].$$

Por hipótesis, $a'b = b'a$ y $c'd = d'c$. Para la multiplicación, simplemente multiplicamos estas ecuaciones y usamos commutatividad. Para la suma, multiplicamos estas ecuaciones por $d'd$ y $b'b$ respectivamente, obteniendo $(a'b)(d'd) = (b'a)(d'd)$ y $(c'd)(b'b) = (d'c)(b'b)$. Sumando estas ecuaciones obtenemos

$$(a'b)(d'd) + (c'd)(b'b) = (b'a)(d'd) + (d'c)(b'b)$$

Usando commutatividad y distributividad obtenemos

$$(a'd' + b'c')(bd) = (ad + bc)(b'd')$$

Por lo tanto, $[(ad + bc, bd)] = [(a'd' + b'c', b'd')]$.

Paso 3: F_D es un campo

Proposición 1

F_D es un campo. Es decir,

1. $+$ es asociativa
2. $+$ es conmutativa
3. El neutro aditivo de F_D es $[(0, 1)]$.
4. El inverso aditivo de $[(a, b)]$ es $[(−a, b)]$.
5. \times es asociativa
6. \times es conmutativa
7. \times se distribuye respecto de $+$
8. El neutro multiplicativo de F_D es $[(1, 1)]$
9. El inverso multiplicativo de $[(a, b)]$ (con $a \neq 0$) es $[(b, a)]$

Demostración. Supongamos que $[(a, b)], [(c, d)], [(e, f)] \in D$.

1. $+$ es asociativa:

$$\begin{aligned}([(a, b)] + [(c, d)]) + [(e, f)] &= [(ad + bc, bd)] + [(e, f)] \\&= [((ad + bc)f + (bd)e, (bd)f)] \\&= [(a(df) + b(cf + de), b(df))] \\&= [(a, b)] + [(cf + de, df)] \\&= [(a, b)] + ([(c, d)] + [(e, f)])\end{aligned}$$

2. $+$ es conmutativa:

$$\begin{aligned}[(a, b)] + [(c, d)] &= [(ad + bc, bd)] \\&= [(cb + da, db)] \\&= [(c, d)] + [(a, b)]\end{aligned}$$

3. *El neutro aditivo de F_D es $[(0, 1)]$:*

$$[(a, b)] + [(0, 1)] = [(a1 + b0, b1)] = [(a, b)]$$

4. *El inverso aditivo de $[(a, b)]$ es $[(-a, b)]$:*

$$[(a, b)] + [(-a, b)] = [(ab + b(-a), bb)] = [(0, b)] = 0_{F_D}$$

Donde la ultima igualdad se cumple por el inciso anterior y porque para toda $b \in D \setminus \{0\}$ es fácil verificar que $[(0, b)] = [(0, 1)]$.

5. \times es *asociativa*:

$$\begin{aligned} (([a, b]) \times [(c, d)]) \times [(e, f)] &= (([ac, bd])) \times [(e, f)] \\ &= [((ac)e, (bd)f)] \\ &= [(a(ce), b(df))] \\ &= \dots \end{aligned}$$

6. \times es *comutativa*: Es consecuencia inmediata de la comutatividad en D .

7. \times se distribuye respecto de $+$:

$$\begin{aligned} &([(a, b)] + [(c, d)]) \times [(e, f)] = [(ad + bc, bd)] \times [(e, f)] = \\ &[(ade + bce, bdf)] = [(aed + bce)f, (bdf)f] = [aefd + bfce, bfdf] = \\ &[(ae, bf)] + [(ce, df)] = ([(a, b)] \times [(e, f)]) + ([(c, d)] \times [(e, f)]) \end{aligned}$$

Donde la tercera igualdad es consecuencia inmediata de la definición de \sim .

8. *El neutro multiplicativo de F_D es $[(1, 1)]$:* Es consecuencia inmediata de la definición de \times .
9. *El inverso multiplicativo de $[(a, b)]$ (con $a \neq 0$) es $[(b, a)]$:*

$$[(a, b)] \times [(b, a)] = [(ab, ba)] = [(1, 1)] = 1_{F_D}$$

Donde la ultima igualdad es consecuencia inmediata de la definición de \sim .



Paso 4: D está contenido en F_D

Proposición 2

La función $i : D \hookrightarrow F_D$ dada por $a \mapsto [(a, 1)]$ es un homomorfismo inyectivo. En particular, F_D contiene un subanillo que es isomorfo a D .

Demostración. Supongamos que $a, b \in D$. Veamos que

- i es homomorfismo.

$$i(a) + i(b) = [(a, 1)] + [(b, 1)] = [(a1 + b1, 1)] = i(a + b) \quad \text{y}$$

$$i(a) \times i(b) = [(a, 1)] \times [(b, 1)] = [(a \times b, 1)] = i(a \times b)$$

- i es inyectiva. Supongamos que $i(a) = i(b)$. Es decir, $[(a, 1)] = [(b, 1)]$. Por definición, esto significa $a1 = 1b$. Es decir, $a = b$. □

F_D es minimal

Proposición 3

Si L es un campo que contiene a D , entonces L contiene a F_D . Precisamente, existe un homomorfismo inyectivo $\psi : F_D \rightarrow L$ tal que $\psi([(a, 1_D)]) = a$ para toda $a \in D$.

Demostración. Primero notemos que si $b \in D \setminus \{0\}$, entonces b tiene un inverso multiplicativo en L el cual denotamos por b_L^{-1} . Antes de definir ψ , veamos que la unidad en D coincide con la unidad en L . Supongamos que $d \in D \setminus \{0\}$ y $\alpha \in L$. Entonces,

$$\begin{aligned}\alpha \times_L 1_D &= \alpha \times_L (d_L^{-1} \times_L d) \times_L 1_D = (\alpha \times_L d_L^{-1}) \times_L (d \times_L 1_D) = \\ &= (\alpha \times_L d_L^{-1}) \times_L d = \alpha \times_L (d_L^{-1} \times_L d) = \alpha \times_L 1_L = \alpha.\end{aligned}$$

Donde la tercera igualdad se cumple porque D es subanillo de L . Por lo tanto, $1_D = 1_L$.

Ahora si, sea

$$\begin{aligned}\psi : F_D &\rightarrow L \\ [(a, b)] &\mapsto a \times_L b_L^{-1}\end{aligned}$$

Por brevedad, escribimos $ab_L^{-1} := a \times b_L^{-1}$, entendiendo que este producto solo tiene sentido en L . Supongamos que $[(a, b)], [(c, d)] \in F_D$. Veamos que

- ψ esta bien definida.

Ahora si, supongamos que $[(a, b)] = [(c, d)]$. Por definición, $ad = bc$. Luego, por conmutatividad, $ab_L^{-1} = cd_L^{-1}$. Es decir, $\psi([(a, b)]) = \psi([(c, d)])$.

- $\psi([(a, 1_D)]) = a$ para toda $a \in D$.

Esto es consecuencia inmediata de la definición de ψ y de que $1_D = 1_L$.

- ψ es homomorfismo.

Primero veamos que ψ abre sumas. Por un lado,

$$\psi([(a, b)] + [(c, d)]) = \psi([(ad + bc, bd)]) = (ad + bc)(bd)_L^{-1} \quad (1)$$

Por otro lado,

$$\psi([(a, b)]) + \psi([(c, d)]) = (ab_L^{-1}) + (cd_L^{-1}) \quad (2)$$

Pero

$$\begin{aligned} (ad + bc)(bd)_L^{-1} &= (ab_L^{-1}) + (cd_L^{-1}) \iff \\ ad + bc &= \left((ab_L^{-1}) + (cd_L^{-1}) \right) (bd) \iff \\ ad + bc &= (ab_L^{-1})(bd) + (cd_L^{-1})(bd) \end{aligned}$$

Por conmutatividad, la ultima igualdad es claramente cierta. Juntando esto con (1) y (2) obtenemos lo deseado.

Ahora veamos que ψ abre productos.

$$\begin{aligned}\psi([(a, b)] \times [(c, d)]) &= \psi([(ac, bd)]) = ac(bd)_L^{-1} = \\ (ab_L^{-1})(cd_L^{-1}) &= \psi([(a, b)]) \times \psi([(c, d)])\end{aligned}$$

Donde la penúltima igualdad se cumple por conmutatividad de L .

- ψ es inyectivo.

Supongamos que $\psi([(a, b)]) = \psi([(c, d)])$. Por definición,
 $a \times b_L^{-1} = c \times d_L^{-1}$. Multiplicando por (bd) ambos lados de la ecuación obtenemos $ad = bc$. Por lo tanto, $[(a, b)] = [(c, d)]$.

□