Tarea 3

Diego Leipen Lara

Metodos Variacionales

Sean Ω un subconjunto abierto de $\mathbb{R}^N$ y $F \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R})$ tal que $F(0) = 0$. Supongamos que su derivada, a la que denotamos por $f := F'$, satisface

(f_1) Existen $p > 1$ y $C > 0$ tales que

$$|f(t)| \leq C|t|^{p-1}.$$

Demuestra las siguientes afirmaciones.

1. La función

$$\begin{aligned}\Phi : L^p(\Omega) &\to \mathbb{R}\\ u &\mapsto \int_\Omega F(u(x))dx\end{aligned}$$

esta bien definida, i.e., $F \circ u$ es integrable en Ω para todo $u \in L^p(\Omega)$.

2. La función $\Phi : L^p(\Omega) \to \mathbb{R}$ es de clase $\mathcal{C}^1$ y su derivada esta dada por

$$\Phi'(u)v = \int_\Omega f(u(x))v(x)dx.$$

Demostración.

1. Por el teorema del valor medio, para todo $t \in \mathbb{R}$ existe $t^* \in \mathbb{R}$ tal que $|t^*| \leq$[1] $|t|$ y

$$|F(t) - F(0)| = |f(t^*)||t - 0|.$$

Entonces

$$\begin{aligned}|F(t)| &= |F(t) - F(0)| && \text{(pues } F(0) = 0\text{)}\\ &= |f(t^*)||t - 0|\\ &\leq C|t^*|^{p-1}|t| && \text{(por } (f_1)\text{)}\\ &\leq C|t|^{p-1}|t| && \text{(pues } |t^*| \leq |t|\text{)}\\ &= C|t|^p.\end{aligned}$$

Sea $u \in L^p(\Omega)$. Entonces

$$|F(u(x))| \leq C|u(x)|^p \text{ para todo } x \in \Omega.$$

Como $u \in L^p(\Omega)$, integrando obtenemos

$$\int_\Omega |F \circ u| \leq \int_\Omega C|u|^p < \infty.$$

Por lo tanto, $|F \circ u|$ es integrable en Ω y en particular, $F \circ u$ también.

[1] Estamos aplicando el teorema del valor medio a F en los números 0 y t. Este induce una $t^* \in \mathbb{R}$ tal que (dependiendo del signo de t) $0 < t^* < t$ ó $t < t^* < 0$. En cualquier caso, $|t^*| \leq |t|$.

2. Siguiendo la sugerencia, recordamos la Proposición 1.42.

   Proposición 1.42. $\Phi : \mathcal{O} \to W$ es de clase $\mathcal{C}^1$ si y solo si satisface las siguientes tres condiciones:

   (i) Para cualesquiera $u \in \mathcal{O}$ y $v \in V$ existe el límite
   $$\lim_{t\to 0} \frac{\Phi(u+tv)-\Phi(u)}{t} =: \mathcal{G}\Phi(u)v.$$

   (ii) $\mathcal{G}\Phi(u) \in \mathcal{B}(V,W)$ para todo $u \in \mathcal{O}$.

   (iii) La función $\mathcal{G}\Phi : \mathcal{O} \to \mathcal{B}(V,W)$ es continua.

   Veamos que Φ verifica estas tres condiciones.

   (i) Sean $u, v \in L^p(\Omega)$. Entonces para todo $x \in \Omega$
   $$\lim_{t\to 0} \frac{F(u(x)+tv(x))-F(u(x))}{t} = F'(u(x))v(x) = \big((f\circ u)v\big)(x). \tag{1}$$
   Por otro lado, sean $s, r \in \mathbb{R}$ y $t \in [-1,1]$ fijos y arbitrarios. Aplicando el teorema del valor medio a la función $\alpha \mapsto F(s+\alpha)$ en los números 0 y tr obtenemos $\alpha_0 \leq |tr|$ tal que
   $$\begin{aligned} |F(s+tr)-F(s)| &= |f(\alpha_0)||tr| \\ &\leq C|\alpha_0|^{p-1}|tr| && \text{(por } (f_1)) \\ &\leq C|tr|^{p-1}|tr|. && \text{(pues } \alpha_0 \leq |tr|) \\ &\leq C|t||r|^p && \text{(pues } t \in [-1,1]) \end{aligned}$$
   Entonces para todo $x \in \Omega$ y $t \in [-1,1]$
   $$\frac{|F(u(x)+tv(x))-F(u(x))|}{|t|} \leq C|v(x)|^p. \tag{2}$$
   Pero $v \in L^p(\Omega)$. Por lo tanto, usando (1), (2), y el teorema de convergencia dominada obtenemos
   $$\lim_{t\to 0}\frac{\Phi(u+tv)-\Phi(u)}{t} = \lim_{t\to 0}\frac{\int_\Omega F(u+tv) - \int_\Omega F(u)}{t} = \lim_{t\to 0}\int_\Omega \frac{F(u+tv)-F(u)}{t} = \int_\Omega (f\circ u)v.$$

   (ii) Sea $u : \Omega \to \mathbb{R}$. Por (f_1), para todo $x \in \Omega$
   $$|(f\circ u)(x)| \leq C|u(x)|^{p-1}.$$
   En particular,
   $$|(f\circ u)(x)|^{p/(p-1)} \leq C^{p/(p-1)}|u(x)|^p.$$
   Por lo tanto,
   $$f\circ u \in L^{p/(p-1)} \text{ para todo } u \in L^p(\Omega). \tag{3}$$
   Por otro lado, claramente,
   $$\begin{aligned} \mathcal{G}\Phi(u) : L^p(\Omega) &\to \mathbb{R} \\ v &\mapsto \int_\Omega (f\circ u)v \end{aligned}$$
   es lineal. Además, aplicando la desigualdad de Hölder[2],
   $$|\mathcal{G}\Phi(u)v| = \left|\int_\Omega (f\circ u)v\right| \leq \int_\Omega |(f\circ u)v| \leq |f\circ u|_{p/(p-1)}|v|_p.$$
   Por lo tanto, $\mathcal{G}\Phi(u) \in \mathcal{B}(L^p(\Omega), \mathbb{R})$.

[2]Posible por (3).

(iii) Supongamos que $u_k \to u$ en $L^p(\Omega)$. Por el Teorema 14.28, existe una sucesión (a la que por simplicidad, denotaremos del mismo modo) y una función $h \in L^p(\Omega)$ tales que

$$u_k(x) \to u(x) \quad \text{y} \quad |u_k(x)| \leq h(x) \quad \text{pct } x \in \Omega.$$

Como f es continua,

$$(f \circ u_k)(x) \to (f \circ u)(x) \quad \text{pct } x \in \Omega. \tag{4}$$

Por (f_1),

$$|(f \circ u_k)(x)| \leq C|u_k(x)|^{p-1} \leq Ch(x)^{p-1} \tag{5}$$

Pero $h^{p-1} \in L^{p/(p-1)}(\Omega)$, pues $h \in L^p(\Omega)$. Por lo tanto, usando (4), (5), y el teorema de convergencia dominada obtenemos

$$f \circ u_k \to f \circ u \text{ en } L^{p/(p-1)}(\Omega).$$

Por lo tanto, por la desigualdad de Hölder,

$$\begin{aligned} ||\mathcal{G}\Phi(u_k) - \mathcal{G}\Phi(u)||_{\mathcal{B}(L^p(\Omega),\mathbb{R})} &= \sup_{\substack{v \in V \\ v \neq 0}} \frac{|\int_\Omega (f \circ u_k - f \circ u)\, v|}{|v|_p} \\ &\leq \sup_{\substack{v \in V \\ v \neq 0}} \frac{|f \circ u_k - f \circ u|_{p/(p-1)} |v|_p}{|v|_p} \\ &= |f \circ u_k - f \circ u|_{p/(p-1)} \to 0. \end{aligned}$$

$\square$