Tarea 9

Diego Leipen Lara

Metodos Variacionales

1. Sean $a \in \mathcal{C}^0(\mathbb{R}^N)$ y $a_1, a_2 \in \mathbb{R}$ tales que $0 < a_1 \leq a(x) \leq a_2$ para todo $x \in \mathbb{R}^N$. Definimos

$$\langle u, v\rangle_a = \int_{\mathbb{R}^N} \nabla u \cdot \nabla v + \int_{\mathbb{R}^N} auv, \qquad u, v \in H^1(\mathbb{R}^N).$$

(a) Prueba que éste es un producto escalar en $H^1(\mathbb{R}^N)$ y que la norma inducida

$$\|u\|_a := \left(\int_{\mathbb{R}^N} |\nabla u|^2 + \int_{\mathbb{R}^N} au^2\right)^{1/2}$$

es equivalente a la norma usual en $H^1(\mathbb{R}^N)$.

(b) Prueba que, si $p \in (2, 2^*)$,

$$S_{a,p} := \inf_{\substack{u \in H^1(\mathbb{R}^N)\\ u \neq 0}} \frac{\|u\|_a^2}{|u|_p^2} > 0.$$

Demostración.

(a) $\langle \cdot, \cdot\rangle_a$ es claramente bilineal y simétrico. Por hipótesis, $0 < a_1 \leq a(x) \leq a_2$ para todo $x \in \mathbb{R}^N$. Sin perdida de generalidad, podemos tomar $a_1 < 1 < a_2$ (podemos definir $a_1' := \min\{a_1, 1/2\}$ y $a_2' := \max\{a_2, 2\}$). Entonces para todo $u \in H^1(\mathbb{R}^N)$,

$$\begin{aligned} a_1||u||_1^2 &= a_1\left(\int_{\mathbb{R}^N} \nabla u \cdot \nabla v + \int_{\mathbb{R}^N} uv\right) \\ &\leq \underbrace{\int_{\mathbb{R}^N} \nabla u \cdot \nabla v + \int_{\mathbb{R}^N} auv}_{||u||_a^2} \leq a_2\left(\int_{\mathbb{R}^N} \nabla u \cdot \nabla v + \int_{\mathbb{R}^N} uv\right) = a_2||u||_1^2. \end{aligned} \tag{1}$$

De donde,

$$\|u\|_a^2 = 0 \iff \|u\|_1^2 = 0 \iff u = 0$$

y las normas son equivalentes.

(b) Por el teorema de encaje de Sobolev,

$$S_p := \inf_{\substack{u \in H^1(\mathbb{R}^N)\\ u \neq 0}} \frac{\|u\|_1^2}{|u|_p^2} > 0. \tag{2}$$

Entonces para todo $u \in H^1(\mathbb{R}^N)$ con $u \neq 0$,

$$\frac{||u||_a^2}{|u|_p^2} \geq \frac{a_1||u||_1^2}{|u|_p^2} > 0,$$

donde la primera desigualdad es consecuencia de (1) y la segunda de (2). Por lo tanto, $S_{a,p} > 0$.

$\square$

2. Sean $N \geq 3$, $p \in (2, 2^*)$, $\alpha \in (0, \infty)$. Denotamos por J_α y $\mathcal{N}_\alpha$ al funcional de energía y a la variedad de Nehari asociados al problema

$$\begin{cases} -\Delta u + \alpha u = |u|^{p-2} u, \\ u \in H^1(\mathbb{R}^N) \end{cases} \tag{$\wp_\alpha$}$$

(a) Prueba que la función $u_\alpha(x) \coloneqq \alpha^{\frac{1}{p-2}} u(\sqrt{\alpha} x)$ pertenece a $\mathcal{N}_\alpha$ si y solo si $u \in \mathcal{N}_1$.

(b) Prueba que ω_α es un estado fundamental de $(\wp_\alpha)$ si y solo si ω es un estado fundamental de $(\wp_1)$.

(c) Concluye que el problema $(\wp_\alpha)$ tiene un estado fundamental y que todo estado fundamental de $(\wp_\alpha)$ pertenece a $\mathcal{C}^2(\mathbb{R}^N)$, es radialmente simétrico respecto a algún punto de $\mathbb{R}^N$ y es, o bien estrictamente positivo, o bien estrictamente negativo en todo $\mathbb{R}^N$.

Demostración.

(a) Por la regla de la cadena, para todo $u \in H^1(\mathbb{R}^N)$ y $x \in \mathbb{R}^n$,

$$\nabla u_\alpha(x) = \alpha^{\frac{1}{p-2}} \alpha^{\frac{1}{2}} \nabla u(\sqrt{\alpha} x) = \alpha^{\frac{p}{2(p-2)}} \nabla u(\sqrt{\alpha} x).$$

Entonces para todo $u \in H^1(\mathbb{R}^N)$,

$$\begin{aligned} \|u_\alpha\|_\alpha^2 &= \int_{\mathbb{R}^N} (|\nabla u_\alpha|^2 + \alpha u_\alpha^2) \\ &= \int_{\mathbb{R}^N} (\alpha^{\frac{p}{p-2}} |\nabla u(\sqrt{\alpha} x)|^2 + \alpha^{\frac{p}{p-2}} u(\sqrt{\alpha} x)^2)\, dx \\ &= \alpha^{\frac{p}{p-2}} \alpha^{-\frac{N}{2}} \int_{\mathbb{R}^N} (|\nabla u(y)|^2 + u(y)^2)\, dy && (x = \tfrac{1}{\sqrt{\alpha}} y) \\ &= \alpha^{\frac{p}{p-2} - \frac{N}{2}} \|u\|_1^2. \end{aligned}$$

Por otro lado, para todo $u \in H^1(\mathbb{R}^N)$,

$$|u_\alpha|_p^p = \int_{\mathbb{R}^N} |u_\alpha|^p = \int_{\mathbb{R}^N} |\alpha^{\frac{1}{p-2}} u(\sqrt{\alpha} x)|^p\, dx = \alpha^{\frac{p}{p-2}} \alpha^{-\frac{N}{2}} \int_{\mathbb{R}^N} |u(y)|^p\, dy = \alpha^{\frac{p}{p-2} - \frac{N}{2}} |u|_p^p.$$

Por definición de $\mathcal{N}_\alpha$, las igualdades anteriores implican lo deseado.

(b) Denotemos $C \coloneqq \alpha^{\frac{p}{p-2} - \frac{N}{2}}$. Para todo $u \in H^1(\mathbb{R}^N)$,

$$J_\alpha(u_\alpha) = \frac{1}{2} \|u_\alpha\|_\alpha^2 + \frac{1}{p} |u_\alpha|_p^p = \frac{1}{2} C \|u\|_1^2 + \frac{1}{p} C |u|_p^p = C J_1(u). \tag{3}$$

Por lo tanto,

$$\inf_{\mathcal{N}_\alpha} J_\alpha = \inf_{u_\alpha \in \mathcal{N}_\alpha} J_\alpha(u_\alpha) \overset{(3)}{=} C \inf_{u_\alpha \in \mathcal{N}_\alpha} J_1(u) \overset{\text{(a)}}{=} C \inf_{u \in \mathcal{N}_1} J_1(u). \tag{4}$$

donde la primera igualdad se cumple porque $\mathcal{N}_\alpha = \{u_\alpha \mid u \in \mathcal{N}_1\}$. En efecto, si $v \in \mathcal{N}_\alpha$, entonces $u(x) = \alpha^{p-2} u(\frac{1}{\alpha} x)$ es tal que $u_\alpha = w$ y $u \in \mathcal{N}_1$ (por (a)). Por lo tanto, (3) y (4) implican lo deseado.

(c) El teorema 4.39 de las notas garantiza la existencia de un estado fundamental ω de $(\wp_1)$, el teorema 4.52 garantiza que ω es radialmente simétrico respecto a algún punto de $\mathbb{R}^N$, y el corolario 4.48 garantiza que $\omega \in \mathcal{C}^2(\mathbb{R}^N)$ y que o bien $\omega > 0$, o bien $\omega < 0$ en $\mathbb{R}^N$. Por el inciso anterior y la pura definición de ω_α es fácil ver que cada una de estas propiedades se satisfacen para ω si y solo si se satisfacen para ω_α.

$\square$

Lema. Sea H de Hilbert, $D \subset X$ denso, y (u_k) una sucesión acotada en X. Si $\langle u_k, x\rangle \to 0$ para todo $x \in D$, entonces $u_k \rightharpoonup 0$ débilmente en H.

Demostración. Sean $h \in H$ y $\epsilon > 0$ fijos y arbitrarios. Como D es denso, existe (x_k) sucesión en D tal que $\|h - x_k\| < \frac{1}{k}$ para todo $k \in \mathbb{N}$. Sea M una cota de (u_k) y sea $k_0 > 1$ tal que $k_0 > \frac{2M}{\epsilon}$. Como $\langle u_k, x\rangle \to 0$ para todo $x \in D$, existe $k_1 > 1$ tal que $\left|\langle u_k, x_{k_0}\rangle\right| < \frac{\epsilon}{2}$ para todo $k \geq k_1$. Entonces para todo $k \geq k_1$,

$$\left|\langle u_k, h\rangle\right| = \left|\langle u_k, x_{k_0}\rangle\right| + \left|\langle u_k, h - x_{k_0}\rangle\right| < \frac{\epsilon}{2} + \|u_k\|\|h - x_{k_0}\| < \frac{\epsilon}{2} + M\frac{1}{k_0} < \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2}.$$

Por lo tanto, $u_k \rightharpoonup 0$ débilmente en H. □

3. Dados $w \in H^1(\mathbb{R}^N)$ y $\xi_k \in \mathbb{R}^N$ tales que $|\xi_k| \to \infty$, definimos $w_k(x) := w(x - \xi_k)$. Prueba que $w_k \rightharpoonup 0$ débilmente en $H^1(\mathbb{R}^N)$.

Demostración. Sean $\varphi, \psi \in \mathcal{C}_c^\infty(\mathbb{R}^N)$ fijos y arbitrarios. Para cada $k \in \mathbb{N}$ definimos $\varphi_k(x) := \varphi(x - \xi_k)$. Como φ_k y ψ tienen soporte compacto y $|\xi_k| \to \infty$, entonces existe $k_0 > 1$ tal que $\mathrm{sop}(\varphi_k) \cap \mathrm{sop}(\psi) = \emptyset$ para todo $k \geq k_0$. En particular, $\langle \varphi_k, \psi\rangle_1 = 0$ para todo $k \geq k_0$. De donde, $\langle \varphi_k, \psi\rangle_1 \to 0$ para todo $\psi \in \mathcal{C}_c^\infty(\mathbb{R}^N)$. Como $\mathcal{C}_c^\infty(\mathbb{R}^N)$ es denso en $H^1(\mathbb{R}^N)$, el lema y lo anterior implican que

$$\begin{aligned} \varphi_k \rightharpoonup 0 \text{ débilmente en } H^1(\mathbb{R}^N) \qquad &\forall \varphi \in \mathcal{C}_c^\infty(\mathbb{R}^N), \\ &\text{donde } \varphi_k(x) := \varphi(x - \xi_k). \end{aligned} \tag{5}$$

Por otro lado, como $\mathcal{C}_c^\infty(\mathbb{R}^N)$ es denso en $H^1(\mathbb{R}^N)$, existe una sucesión (ϕ_j) en $\mathcal{C}_c^\infty(\mathbb{R}^N)$ tal que $\|w - \phi_j\|_1 < \frac{1}{j}$ para todo $j \in \mathbb{N}$. Para cada $k \in \mathbb{N}$ definimos $\phi_{j,k}(x) := \phi_j(x - \xi_k)$. Como $w_k - \phi_{j,k}$ es una traslación de $w - \phi_j$ para todo $k \in \mathbb{N}$, y $\|\cdot\|_1$ es invariante bajo traslaciones, entonces

$$\|w_k - \phi_{j,k}\|_1 = \|w - \phi_j\|_1 < \frac{1}{j} \qquad \forall k \in \mathbb{N}. \tag{6}$$

Sean $v \in H^1(\mathbb{R}^N)$ y $\epsilon > 0$ fijos y arbitrarios. Sea $j_0 > 1$ tal que $j_0 > \frac{2\|v\|_1}{\epsilon}$. Por (5), existe $k_0 > 1$ tal que $|\langle \phi_{j_0,k}, v\rangle| < \frac{\epsilon}{2}$ para todo $k \geq k_0$. Entonces para todo $k \geq k_0$

$$|\langle w_k, v\rangle| \leq |\langle w_k - \phi_{j_0,k}, v\rangle| + |\langle \phi_{j_0,k}, v\rangle| < \|w_k - \phi_{j_0,k}\|_1\|v\|_1 + \frac{\epsilon}{2} < \frac{1}{j_0}\|v\|_1 + \frac{\epsilon}{2} < \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2}.$$

Por lo tanto, $w_k \rightharpoonup 0$ débilmente en $H^1(\mathbb{R}^N)$. □

Demostración alternativa. Como (w_k) es acotada en $H^1(\mathbb{R}^N)$ (pues $\|w_k\|_1 = \|w\|_1$), existe una subsucesión (w_j) de (w_k) que converge débilmente en $H^1(\mathbb{R}^N)$ a algún $u \in H^1(\mathbb{R}^N)$. Sea $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ abierto. Usando el lema, es fácil ver que $w_j \rightharpoonup u$ en $H^1(\mathbb{R}^N)$ implica que $w_k \rightharpoonup u$ en $H_0^1(\Omega)$. En particular, (w_k) es acotada en $H_0^1(\Omega)$. Sea $\Omega = B_r(0)$ con $r > 0$. Por Rellich-Kondraschov, existe una subsucesión (w_i) de (w_j) que converge fuertemente en $L^2(\Omega)$. Por unicidad del limite débil, $w_i \to u$ en $L^2(\Omega)$. Entonces existe una subsucesión (w_n) de (w_i) tal que $w_n(x) \to u(x)$ pct $x \in B_r(0)$. Sea $\epsilon > 0$ fijo y arbitrario. Entonces existe $n_1 \in \mathbb{N}$ tal que para todo $n \geq n_1$, $|u(x) - w_n(x)| < \frac{\epsilon}{2}$ pct $x \in \Omega$. Por otro lado, como $\lim_{|x|\to\infty} f(x) = 0$ para todo $f \in L^2(\mathbb{R}^N)$ y $|\xi_k| \to \infty$, entonces para todo $r > 0$ existe $n_2 \in \mathbb{N}$ tal que para todo $n \geq n_2$, $|w_n(x)| < \frac{\epsilon}{2}$ para todo $x \in B_r(0)$. Entonces para todo $n \geq \max\{n_1, n_2\}$,

$$|u(x)| \leq |u(x) - w_n(x)| + |w_n(x)| < \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2} \text{ pct } x \in B_r(0).$$

Como esto es cierto para todo $\epsilon > 0$ y $r > 0$, entonces $u(x) = 0$ pct $x \in \mathbb{R}^N$. □