1. Probar que $x \in R(\omega)$ si y solo si $x \in BF$ y $trcl(x)$ es finito.
Lema 1. $\forall n \in \omega\ |R(n)| < \omega$.
Induccion sobre n recordando que el potencia de un finito es finito.
Lema 2. $\forall x \in V\ \forall n \in \omega\ RNK(\bigcup^{n+1} x) \leq RNK(\bigcup^n x)$.
Sea $x \in V$ y $n \in \omega$, por definicion, $\bigcup^n x \subset R(RNK(\bigcup^n x))$. Luego, como $\bigcup$ es monotono, $\bigcup(\bigcup^n x) \subset \bigcup(R(RNK(\bigcup^n x))) \subset R(RNK(\bigcup^n x))$. Donde la segunda contencion se cumple pues $R(\alpha)$ es transitivo para todo $\alpha \in OR$. Por lo tanto, $\bigcup^{n+1} x \subset R(RNK(\bigcup^n x)$. De donde, $RNK(\bigcup^{n+1} x) \leq RNK(\bigcup^n x)$. Ademas, por induccion es facil ver, $\forall m \in \omega\ RNK(\bigcup^m x) \leq RNK(\bigcup x)$.
Lema 3. $\forall m, n \in \omega\ \forall x \in R(n)\ \bigcup^m x$ es finito.
Sea $x \in R(n)$ entonces, $RNK(x) \leq n$. Por el lema 2, $RNK(\bigcup^m x) \leq RNK(\bigcup x) \leq n$. En particular, $RNK(\bigcup^m x)$ es finito. Entonces, $\bigcup^m x \subset R(m)$ para alguna $m \in \omega$. Entonces, por el lema 1, $\bigcup^m x$ es finito.
Lema 4. $\forall n \in \omega\ (x \subset R(n) \implies \bigcup^n x = \phi)$.
Por induccion sobre n.
Base. Trivial, pues $\bigcup^0 x = x$ y $R(0) = \phi$.
Paso inductivo. Supongamos $w \subset R(n) \implies \bigcup^n w = \phi$. Sea $x \subset R(n+1)$. Veamos que $\bigcup x \subset R(n)$. Sea $y \in \bigcup x$ entonces, $\exists z \in x\ (y \in z)$. Ademas, como $x \subset R(n+1)$, $z \in R(n+1)$ i.e., $z \subset R(n)$. Por lo tanto, $y \in R(n)$. Entonces, por hipotesis de induccion, como $\bigcup x \subset R(n)$, $\bigcup^n(\bigcup x) = \phi$. Es decir, $\bigcup^{n+1} x = \phi$.
Lema 5. Si $|x| > 0$ entonces, $x \not\subseteq \bigcup x$. Supongamos $x \subseteq \bigcup x$ entonces, $\forall a \in x\ \exists b \in x\ (a \in b \in x)$. Por lo tanto, podemos construir una sucesion $b_1, \ldots, b_n \in x$ tal que

$$a \in b_1 \in \cdots \in b_n \in x$$

Entonces, como $\{a, b_1, \ldots, b_n\} \subseteq x$, y $|x| = n$, $\exists j \in \{1, \ldots, n\}\ (a = b_j)$. Por lo tanto, x no es bien fundado, contradiciendo, por el ejercicio 2, que $x \in BF$.
Demostracion.
Supongamos $x \in R(\omega)$. Claramente $x \in BF$ pues $R(\omega) \subset BF$. Por otro lado, por definicion de $R(\omega)$, $x \subset R(n)$ para algun $n < \omega$. Entonces, por los lemas 1 y 3, $\forall m \in \omega\ x$ y $\bigcup^m x$ son finitos. Ademas, por el lema 4,

$$trcl(x) = \bigcup_{m \in \omega} (\cup^m x) = \bigcup_{k=0}^{n-1} (\cup^k x)$$

Por lo tanto, $trcl(x)$ es la union finita de conjuntos finitos. En particular, $trcl(x)$ es finito.

Conversamente, veamos por induccion fuerte sobre n que si $x \in BF$ y $|trcl(x)| = n$ entonces, $x \in R(\omega)$.
Base. Si $|trcl(x)| = 0$, como $x \subset trcl(x)$, $|x| = 0$. Por lo tanto, $x \subset R(0)$.
Paso inductivo. Supongamos $|trcl(x)| = n > 0$, en particular, $x \neq \phi$, pues de lo contrario, $\forall m \in \omega \bigcup^m x = \phi$ y por lo tanto, $|trcl(x)| = 0$. De lo anterior, $|x| > 0$. Entonces, por el lema 5,

$$|(\cup x) \cup (\cup^2 x) \cup \cdots| < |x \cup (\cup x) \cup (\cup^2 x) \cup \cdots|$$

Es decir, $|trcl(\bigcup x)| < |trcl(x)| = n$. Por lo tanto, por hipotesis de induccion, $\exists m \in \omega\ x \subset R(m)$. Veamos $x \subset R(m+1)$.

$$\begin{aligned} a \in x &\implies a \subset \bigcup x \subset R(m) \\ &\implies a \in \mathcal{P}(R(m)) = R(m+1). \end{aligned}$$

Por lo tanto, $x \in R(\omega)$. □

2. Demostrar que todo elemento de $BF = \bigcup_{\alpha \in OR} R(\alpha)$ es bien fundado.
Demostracion.
Sea $\phi \neq X \subset BF$. Como $X \neq \phi$, $A := \{RNK(x) \mid x \in X\} \neq \phi$. Por lo tanto, como $A \subset OR$, $\exists \alpha = \min A$. Como es minimo, $\exists x \in X$ tal que $RNK(x) = \alpha$. Veamos que x es $\in -$ minimal. Supongamos lo contrario, i.e., $\exists x' \in X\ (x' \in x)$. Entonces por el lema 2.6(a) del Kunen, $RNK(x') < RNK(x) = \alpha$ contradiciendo la minimalidad de α. □

3. Sea (A, R) un buen orden. Probar que la funcion $RNK_{a,r}$ es el isomorfismo entre (A, R) y su tipo de orden.
Demostracion.
$RNK_{A,R}$ preserva el orden. Es decir, $xRy \iff RNK_{A,R}(x) < RNK_{A,R}(y)$.
Supongamos xRy. Entonces,

$$RNK_{A,R}(x) < RNK_{A,R}(x)+1 \leq \sup\{RNK_{A,R}(z)+1 \mid zRy\} = RNK_{A,R}(y)$$

Conversamente, supongamos $(x, y) \notin R$. Entonces, como R es buen orden,
Caso 1. Si $x = y$, $\{RNK_{A,R}(z) + 1 \mid zRx\} = \{RNK_{A,R}(z) + 1 \mid zRy\}$.
Luego, $\sup\{RNK_{A,R}(z) + 1 \mid zRx\} = \sup\{RNK_{A,R}(z) + 1 \mid zRy\}$.
Caso 2. Si yRx, por lo anterior, $RNK_{A,R}(y) < RNK_{A,R}(x)$.
Por lo tanto, en ambos casos $RNK_{A,R}(x) \not< RNK_{A,R}(y)$.
Para ver que $RNK_{A,R}$ esta bien definido y es suprayectivo, veamos un resultado previo.

Lema. Si f es el isomorfismo entre (A, R) y su tipo de orden $(\alpha, \in)$, entonces, $\forall \beta < \alpha \; (RNK_{A,R}(f^{-1}(\beta)) = \beta)$.
Procederemos por induccion sobre β. Antes, notemos que como f es isomorfismo,

$$\begin{aligned} RNK_{A,R}(f^{-1}(\beta)) &= \sup\{RNK_{A,R}(y) + 1 \mid y \, R \, f^{-1}(\beta)\} \\ &= \sup\{RNK_{A,R}(f^{-1}(\gamma)) + 1 \mid \gamma < \beta\} \end{aligned}$$

Ahora bien,

i. Claramente, $\sup\{RNK_{A,R}(f^{-1}(\gamma)) \mid \gamma < 0\} = 0$.

ii. Supongamos $\beta = RNK_{A,R}(f^{-1}(\beta))$. Veamos $\beta^{+} = RNK_{A,R}(f^{-1}(\beta^{+}))$.
$\leq$) Como $\beta < \beta + 1$,

$$\beta + 1 = RNK_{A,R}(f^{-1}(\beta)) + 1 \in \{RNK_{A,R}(f^{-1}(\gamma)) + 1 \mid \gamma < \beta + 1\}$$

Donde la primera igualdad se cumple por hipotesis de induccion. Por lo tanto, $\beta + 1 \leq \sup\{RNK_{A,R}(f^{-1}(\gamma)) + 1 \mid \gamma < \beta + 1\}$.
$\geq$) P.D. $\beta+1$ es cota superior de $\{RNK_{A,R}(f^{-1}(\gamma))+1 \mid \gamma < \beta+1\}$. Si $\gamma < \beta+1$ entonces, $\gamma < \beta$ o $\gamma = \beta$. Si $\gamma = \beta$, por hipotesis de induccion, $RNK_{A,R}(f^{-1}(\beta)) + 1 = \beta + 1$. Si $\gamma < \beta$ entonces, $f^{-1}(\gamma) \, R \, f^{-1}(\beta)$. Luego, como $RNK_{A,R}$ preserva el orden,

$$RNK_{A,R}(f^{-1}(\gamma)) < RNK_{A,R}(f^{-1}(\beta)) = \beta < \beta + 1$$

Donde la igualdad se cumple por hipotesis de induccion. Por lo tanto, $\sup\{RNK_{A,R}(f^{-1}(\gamma)) \mid \gamma < \beta + 1\} \leq \beta + 1$.

iii. Si β ordinal sucesor y $\forall \gamma < \beta \; (\gamma = RNK_{A,R}(f^{-1}(\gamma)))$ entonces,

$$\begin{aligned} \beta &= \sup\{\gamma \mid \gamma < \beta\} \\ &= \sup\{RNK_{A,R}(f^{-1}(\gamma)) \mid \gamma \in \beta\} \\ &= \sup\{RNK_{A,R}(y) \mid y \, R \, f^{-1}(\beta)\} \\ &= RNK_{A,R}(f^{-1}(\beta)) \end{aligned}$$

$RNK_{A,R}$ esta bien definida. Es decir, $\forall x \in A \; RNK_{A,R}(x) \in \alpha$.
Por el lema, $\forall \beta < \alpha \; RNK_{A,R}(f^{-1}(\beta)) = \beta$. Luego, $RNK_{A,R}(f^{-1}(\beta)) \in \alpha$.
Entonces, como f es iso, $\forall x \in A \; (RNK_{A,R}(x) = RNK_{A,R}(f^{-1}(\beta)) \in \alpha)$.
$RNK_{A,R}$ es supra. Es inmediato del lema pues por definicion, $f^{-1}(\beta) \in A$.
Por lo tanto, f es isomorfismo. $\square$

4. Sean R_1, R_2 en la clase A ambas bien fundadas e izquierdas limitadas. Mostrar que $R_1 \subset R_2$ implica $\forall x \in A\ RNK_{A,R_1}(x) \leq RNK_{A,R_2}(x)$.
Demostracion.
Supongamos $R_1 \subset R_2$. Procederemos por induccion en (A, R_2) sobre x. Sea $x \in A$ y supongamos que $\forall y \in A\ (yR_2x \implies RNK_{A,R_1}(y) \leq RNK_{A,R_2}(y))$. Entonces, $\forall y \in A\ (yR_2x \implies RNK_{A,R_1}(y)+1 \leq RNK_{A,R_2}(y)+1)$. Luego, $RNK_{A,R_1}(y)+1 \leq \sup\{RNK_{A,R_2}(y)+1 \mid yR_2x \text{ y } y \in A\}) = RNK_{A,R_2}(x)$. Es decir,

$$\forall y \in A(yR_2x \implies RNK_{A,R_1}(y) + 1 \leq RNK_{A,R_2}(x)) \tag{1}$$

Veamos que $RNK_{A,R_2}(x)$ es cota superior de $\{RNK_{A,R_1}(y) + 1 \mid yR_1x \text{ y } y \in A\}$. Si yR_1X y $y \in A$ entonces, como $R_1 \subset R_2$, yR_2x y $y \in A$. Luego, por (1), $RNK_{A,R_2}(x)$ es cota superior de $\{RNK_{A,R_1}(y)+1 \mid yR_1x \text{ y } y \in A\}$. Por lo tanto,

$$\sup\{RNK_{A,R_1}(y) + 1 \mid yR_1x \text{ y } y \in A\} \leq RNK_{A,R_2}(x).$$

Es decir, $RNK_{A,R_1}(x) \leq RNK_{A,R_2}(x)$. $\square$

5. Probar que todo cardinal infinito es un ordinal limite.
Demostracion.
Procediendo por contradiccion, supongamos que $\alpha+1$ es un cardinal infinito. Entonces, como $\alpha + 1$ es infinito, $\alpha \backsim \alpha + 1$ pues, $f : \alpha + 1 \to \alpha$ dada por,

$$f(\beta) = \begin{cases} 0 & \text{si } \beta = \alpha \\ \beta + 1 & \text{si } \beta \neq \alpha \end{cases}$$

es inyectiva. Por lo tanto, como $\alpha \subset \alpha + 1$, existe un subconjunto propio de $\alpha + 1$ al cual $\alpha + 1$ es equipotente i.e., $\alpha + 1$ no es inicial. $\square$

6. Mostrar que para cualquier conjunto a se cumple $|\mathcal{P}(a)| = 2^{|a|}$.
Demostracion
Sea $x \in \mathcal{P}(a)$. Consideremos la funcion caracteristica, $\chi_x : a \to 2$ i.e.,

$$\chi_x(\alpha) = \begin{cases} 0 & \text{si } \alpha \notin x \\ 1 & \text{si } \alpha \in x \end{cases}$$

Sea $\Phi : \mathcal{P}(a) \to 2^a$ dada por $\Phi(x) = \chi_x$.
Φ *es inyectiva.* Supongamos $x_1, x_2 \in \mathcal{P}(a)$ distintos. Entonces, $x_1 \nsubseteq x_2$ o $x_2 \nsubseteq x_1$. Sin perdida de generalidad supongamos $x_1 \nsubseteq x_2$. Entonces,

$\exists \alpha \in x_1$ ($\alpha \notin x_2$). Luego, $\chi_{x_1}(\alpha) = 1$ pero $\chi_{x_2}(\alpha) = 0$. Por lo tanto, $\Phi(x_1) = \chi_{x_1} \neq \chi_{x_2} = \Phi(x_2)$.
Φ *es suprayectiva.* Sea $f \in 2^a$. Veamos que $\Phi(f^{-1}[\{1\}]) = f$ i.e., $\chi_{f^{-1}[\{1\}]} = f$. Basta probar que $\chi_{f^{-1}[\{1\}]}(x) = 1 \iff f(x) = 1$. Pues si $\chi_{f^{-1}[\{1\}]}(x) \neq 1$ entonces, $\chi_{f^{-1}[\{1\}]}(x) = 0$ y si $f(x) \neq 1$ entonces, $f(x) = 0$. Pero claramente, $\chi_{f^{-1}[\{1\}]}(x) = 1 \iff x \in f^{-1}[\{1\}] \iff f(x) = 1$. $\square$

7. Sean a y b conjuntos infinitos. Probar que si $|a| < |b|$ entonces, $|b \backslash a| = |b|$.
Demostracion.
Como $b \backslash a \subset b$, $|b \backslash a| \leq |b|$. Supongamos $|b| \nleq |b \backslash a|$. Entonces, como son cardinales, $|b \backslash a| < |b|$. Por tricotomia de CAR, podemos proceder por casos. Si $|a| < |b \backslash a|$ entonces, $|b| = |a| + |b \backslash a| = |b \backslash a| < |b|$, contradiciendo el buen orden de los cardinales. Analogamente, para los otros dos casos podemos concluir $|b| < |b|$. Entonces, no puede ser $|b| \nleq |b \backslash a|$. Por lo tanto, $|b| = |b \backslash a|$. $\square$

8. Se definen recursivamente los siguientes cardinales.

- $\delta_0 = 0$
- $\delta_{\alpha+1} = \aleph_{\delta_\alpha}$
- $\delta_\beta = \bigcup\{\delta_\gamma \mid \gamma < \beta\}$, $\forall \beta$ ordinal limite

Probar que $\aleph_{\delta_\alpha} = \delta_\alpha$ si α es limite.
Lema. Si α es ordinal limite, $\sup\{\delta_\beta \mid \beta < \alpha\} = \sup\{\delta_{\beta+1} \mid \beta < \alpha\}$.
$\leq$) Si $\gamma < \alpha$, $\delta_\gamma < \delta_{\gamma+1} \leq \sup\{\delta_{\beta+1} \mid \beta < \alpha\}$. Luego, $\sup\{\delta_{\beta+1} \mid \beta < \alpha\}$ es cota superior de $\{\delta_\beta \mid \beta < \alpha\}$. Por lo tanto, $\sup\{\delta_\beta \mid \beta < \alpha\} \leq \sup\{\delta_{\beta+1} \mid \beta < \alpha\}$.
$\geq$) Si $\gamma < \alpha$, como α es limite, $\gamma + 1 < \alpha$. Entonces, $\delta_{\gamma+1} \in \{\delta_\beta \mid \beta < \alpha\}$. Luego, $\delta_{\gamma+1} \leq \sup\{\delta_\beta \mid \beta < \alpha\}$. Por lo tanto, $\sup\{\delta_{\beta+1} \mid \beta < \alpha\} \leq \sup\{\delta_\beta \mid \beta < \alpha\}$.
Demostracion.
Si α es limite,

$$\begin{aligned}
\delta_\alpha &= \sup\{\delta_\beta \mid \beta < \alpha\} \\
&= \sup\{\delta_{\beta+1} \mid \beta < \alpha\} \\
&= \sup\{\aleph_{\delta_\beta} \mid \beta < \alpha\} \\
&= \aleph_{\delta_\alpha}
\end{aligned}$$

Donde la segunda igualdad se cumple por el lema. $\square$

9. Probar las siguientes igualdades donde $n \in \omega \setminus \{0\}$.

i. $(2^{\aleph_0})^n = (2^{\aleph_0})^{\aleph_0} = (n+1)^{\aleph_0} = (\aleph_0)^{\aleph_0} = 2^{\aleph_0}$.

ii. $n2^{\mathfrak{c}} = \aleph_0 2^{\mathfrak{c}} = \mathfrak{c}2^{\mathfrak{c}} = 2^{\mathfrak{c}}2^{\mathfrak{c}} = (2^{\mathfrak{c}})^n = (2^{\mathfrak{c}})^{\aleph_0} = (2^{\mathfrak{c}})^{\mathfrak{c}} = 2^{\mathfrak{c}}$.

Demostracion.

i. Se sigue de la siguiente cadena de desigualdades,

$$2^{\aleph_0} \leq (n+1)^{\aleph_0} \leq (\aleph_0)^{\aleph_0} \leq (2^{\aleph_0})^{\aleph_0} = 2^{\aleph_0 \cdot \aleph_0} = 2^{\aleph_0},$$

y de la idempotencia del producto cardinal, i.e., $\forall \kappa \in CAR\ \kappa \cdot \kappa = \kappa$. Ademas, por induccion sobre $n \in \omega$ es facil ver $\kappa^n = \kappa$. En particular, $(2^{\aleph_0})^n = 2^{\aleph_0}$.

ii. Se sigue de la siguiente cadena de desigualdades; la observacion de idempotencia en el inciso anterior para la ultima igualdad; y el teorema de Cantor $\forall x \in V\ |x| < 2^{|x|}$ para la tercera desigualdad.

$$n2^{\mathfrak{c}} \leq \aleph_0 2^{\mathfrak{c}} \leq \mathfrak{c}2^{\mathfrak{c}} \leq 2^{\mathfrak{c}}2^{\mathfrak{c}} \leq (2^{\mathfrak{c}})^n \leq (2^{\mathfrak{c}})^{\aleph_0} \leq (2^{\mathfrak{c}})^{\mathfrak{c}} = 2^{\mathfrak{c} \cdot \mathfrak{c}} = 2^{\mathfrak{c}}$$

10. Mostrar las siguientes afirmaciones:

i. Para cualquier conjunto a se tiene $|\bigcup a| \leq \sum_{b \in a} |b|$.

ii. Si a es un conjunto y κ es un cardinal tal que $|a| \leq \kappa$ y $|b| \leq \kappa$ para todo $b \in a$ entonces, $|\bigcup a| \leq \kappa$.

Demostracion.

i. Sea $x \in \bigcup a$ i.e., $\exists b \in a\ (x \in b)$. Usando AE, para cada x escogamos una unica b_x que cumpla lo anterior. Sea $\Phi : \bigcup a \to \bigcup_{b \in a} b \times \{b\}$ dada por $\Phi(x) = (x, b_x)$. Claramente Φ es inyectiva, pues si $x, y \in \bigcup a$ son distintos, $\Phi(x) = (x, b_x) \neq (y, b_y) = \Phi(y)$.

ii. Como $\sum_{b \in a} |b| \leq \sum_{b \in a} \kappa = \kappa \cdot |a| \leq \kappa \cdot \kappa = \kappa$, el resultado se sigue del inciso anterior. □

11. Demostrar las formulas,

i. $(\prod_{i \in I} \kappa_i)^\lambda = \prod_{i \in I} (\kappa_i^\lambda)$

ii. $\prod_{i \in I} (\kappa^{\lambda_i}) = \kappa^{(\sum_{i \in I} \lambda_i)}$.

Demostracion.

i. Sean $Y \in V$ y $\{X_i \mid i \in I\} \subset V$ tales que $|X_i| = \kappa$, $|Y| = \lambda$. Dada $(f_i)_{i\in I} \in \prod_{i\in I} X_i^Y$ sea $f \in (\prod_{i\in I} X_i)^Y$ definida como, $f(y) = (f_i(y))_{i\in I}$. Sea $\Phi : \prod_{i\in I} X_i^Y \to (\prod_{i\in I} X_i)^Y$ dada por, $\Phi((f_i)_{i\in I}) = f$.
Φ *es suprayectiva.* Sea $G : Y \to \prod_{i\in I} X_i$ tal que $G(y) = (x_i^y)_{i\in I}$. Entonces, definimos $g_i : Y \to X_i$ dada por $g_i(y) = x_i^y$.
P.D. $\Phi((g_i)_{i\in I}) = G$.
Por definicion, $\Phi((g_i)_{i\in I}) = g$ donde $g(y) = (g_i(y))_{i\in I} = (x_i^y)_{i\in I} = G(y)$. Por lo tanto, $\Phi((g_i)_{i\in I}) = G$.
Φ *es inyectiva.* Sean $(f_i)_{i\in I}, (g_i)_{i\in I} \in \prod_{i\in I} X_i^Y$ distintos. Entonces, existe $i \in I$ tal que $f_i \neq g_i$. Luego, existe $y \in Y$ tal que $f_i(y) \neq g_i(y)$.
P.D. $\Phi((f_i)_{i\in I}) \neq \Phi((g_i)_{i\in I})$ i.e., $f \neq g$.
Pero $f(y) \neq g(y)$ pues, $f(y) = (f_i(y))_{i\in I}$, $g(y) = (g_i(y))_{i\in I}$, y existe $i \in I$ tal que $f_i(y) \neq g_i(y)$.

ii. Sean $X \in V$ y $\{Y_i \mid i \in I\}$ tal que $Y_i \cap Y_j = \phi$ si $i \neq j$. Sea $(f_i)_{i\in I} \in \prod_{i\in I} X^{Y_i}$. Definamos, $f = \bigcup_{i\in I} f_i$, notemos que f es funcion pues su dominio es la union de conjuntos disjuntos dos a dos. Ahora, sea $\Phi : \prod_{i\in I} X^{Y_i} \to X^{(\bigcup_{i\in I} Y_i)}$ dada por $\Phi((f_i)_{i\in I}) = f$.
Φ *es inyectiva.* Sean $(f_i)_{i\in I}, (g_i)_{i\in I} \in \prod_{i\in I} X^{Y_i}$ distintos. Entonces, $\exists i \in I$ $(f_i \neq g_i)$. Por lo tanto, $\exists y_i \in Y_i$ $f_i(y_i) \neq g_i(y_i)$. Luego, por definicion de f y g, $f(y_i) = f_i(y_i) \neq g_i(y_i) = g(y_i)$. En particular, $f \neq g$ de donde, $\Phi((f_i)_{i\in I}) \neq \Phi((g_i)_{i\in I})$.
Φ *es suprayectiva.* Si $F \in X^{(\bigcup_{i\in I} Y_i)}$, sean $f_i = F_{\restriction Y_i}$. Entonces, $\Phi((f_i)_{i\in I}) = \bigcup_{i\in I} f_i = \bigcup_{i\in I} F_{\restriction Y_i} = F$. □

12. Para un conjunto a y un ordinal α se define $a^{<\alpha}$ como $\bigcup\{a^\beta \mid \beta < \alpha\}$. Mostrar que $|\kappa^{<\lambda}| = \sup\{\kappa^\mu \mid \mu < \lambda \text{ y } \mu \text{ es cardinal}\}$.
Demostracion.
$\geq$) Claramente,

$$\{\kappa^\mu \mid \mu < \lambda \text{ y } \mu \text{ es cardinal}\} \subset \{\kappa^\mu \mid \mu < \lambda\}.$$

Luego,

$$\bigcup\{\kappa^\mu \mid \mu < \lambda \text{ y } \mu \text{ es cardinal}\} \subset \bigcup\{\kappa^\mu \mid \mu < \lambda\} = \kappa^{<\lambda}.$$

Como $\sup\{\kappa^\mu \mid \mu < \lambda \text{ y } \mu \text{ es cardinal}\} = \bigcup\{\kappa^\mu \mid \mu < \lambda \text{ y } \mu \text{ es cardinal}\}$ es cardinal pues, $\{\kappa^\mu \mid \mu < \lambda \text{ y } \mu \text{ es cardinal}\}$ es conjunto, y $a \subset b$ implica $|a| \leq |b|$,

$$\sup\{\kappa^\mu \mid \mu < \lambda \text{ y } \mu \text{ es cardinal}\} = |\sup\{\kappa^\mu \mid \mu < \lambda \text{ y } \mu \text{ es cardinal}\}| \leq |\kappa^\lambda|$$

$\leq$) Si $\mu < \lambda$ y $\mu \in CAR$, $\kappa^\mu \geq 2^\mu = \mu^+ > \mu$. Ademas, como $\lambda = \sup\{\mu \mid \mu < \lambda\}$, por lo anterior, $\kappa^\mu \geq \lambda$. Por otro lado,

$$
\begin{aligned}
|\kappa^\lambda| &= |\bigcup\{\kappa^\alpha \mid \alpha < \lambda\}| \\
&\leq \sum_{\alpha<\lambda} |\kappa^\alpha| && \text{(Amor, Prop. 3.12.)} \\
&\leq \sum_{\alpha<\lambda} |\kappa^\lambda| && \text{(Amor, Prop. 3.16.)} \\
&= \lambda \cdot |\kappa^\lambda| && \text{(Amor, Prop. 3.17.)} \\
&= \lambda \cdot \kappa^{|\lambda|} && \text{(Def. de exp. cardinal)} \\
&= \kappa^{|\lambda|} && (\kappa^\mu \geq \lambda \text{ si } \mu < \lambda \text{ y } \mu \in CAR) \\
&\leq \sup\{\kappa^\mu \mid \mu < \lambda \text{ y } \mu \text{ es cardinal}\} && (\forall \lambda \in OR\ |\lambda| \leq \lambda)
\end{aligned}
$$

$\sum_{\alpha<\lambda} |\kappa^\alpha| = \lambda \cdot |\kappa^\alpha|$ se cumple pues, $|\{\kappa^\alpha \mid \alpha < \lambda\}| = \lambda$. □

Diego Leipen Lara
418002028