Tarea 2

Inferencia Bayesiana
Semestre 2025-1

Diego Leipen Lara

Lema 1. Sea $X_1, X_2, \dots$ una sucesión infinita de variables intercambiables. Entonces

$$\mathbb{E}[X_i] = \mathbb{E}[X_1] \text{ para todo } i.$$

Más aun, si $\mathbb{E}[X_i^2] < \infty$ para todo $i = 1, 2, \dots$, entonces

$$\begin{aligned} \mathrm{Var}[X_i] &= \mathrm{Var}[X_1] \text{ para todo } i, \\ \mathrm{Cov}[X_i, X_j] &= \mathrm{Cov}[X_1, X_2] \text{ para todo } i, j \text{ con } i \neq j. \end{aligned}$$

Demostración. Sea $i \in \mathbb{Z}_{\geq 1}$ con $i \neq 1$. Como $X_1, X_2, \dots$ son intercambiables. Entonces

$$f_{X_i}(x) = \int f_{X_i, X_1}(x, y)\, dy = \int f_{X_1, X_i}(x, y)\, dy = f_{X_1}(x) \tag{1}$$

para todo x. Análogamente, sean $i, j \in \mathbb{Z}_{\geq 1}$ con $i \neq j$. Veamos que $f_{X_i, X_j} = f_{X_1, X_2}$.

Caso 1. $i \notin \{1, 2\}$ y $j \notin \{1, 2\}$:
Entonces

$$f_{X_i, X_j}(x, y) = \int f_{X_i, X_j, X_1, X_2}(x, y, z, w)\, dzdw = \int f_{X_1, X_2, X_i, X_j}(x, y, z, w)\, dzdw = f_{X_1, X_2}(x, y) \tag{2}$$

para todo x, y.

Caso 2. $i \in \{1, 2\}$ o $j \in \{1, 2\}$:
Si $i \in \{1, 2\}$ y $j \in \{1, 2\}$, no hay nada que demostrar. Supongamos que $i = 1$ y $j \notin \{1, 2\}$. (El resto de los casos son análogos.) Entonces

$$f_{X_i, X_j}(x, y) = \int f_{X_1, X_j, X_2}(x, y, z)\, dz = \int f_{X_1, X_2, X_j}(x, y, z)\, dz = f_{X_1, X_2}(x, y).$$

Por otro lado, usando (1) obtenemos

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[X_i] &= \int x f_{X_i}(x)\, dx = \int x f_{X_j}(x)\, dx = \mathbb{E}[X_j], \\ \mathbb{E}[X_i^2] &= \int x^2 f_{X_i}(x)\, dx = \int x^2 f_{X_j}(x)\, dx = \mathbb{E}[X_j^2], && \text{(existen por hip.)} \\ \mathrm{Var}[X_i] &= \mathbb{E}[X_i^2] - \mathbb{E}[X_i]^2 = \mathbb{E}[X_j^2] - \mathbb{E}[X_j]^2 = \mathrm{Var}[X_j] \end{aligned}$$

para todo i, j. De la misma manera, usando (2) obtenemos

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[X_i X_j] &= \int xy f_{X_i, X_j}(x, y)\, dxdy = \int xy f_{X_1, X_2}(x, y)\, dxdy = \mathbb{E}[X_1 X_2], \\ \mathrm{Cov}[X_i, X_j] &= \mathbb{E}[X_i X_j] - \mathbb{E}[X_i]\mathbb{E}[X_j] = \mathbb{E}[X_1 X_2] - \mathbb{E}[X_1]\mathbb{E}[X_2] = \mathrm{Cov}[X_1, X_2] \end{aligned}$$

si $i \neq j$. $\square$

1. Sea $X_1, X_2, \ldots$ una sucesión de variables aleatorias infinitamente intercambiables tales que $\mathbb{E}[X_i^2] < \infty$ para todo $i = 1, 2, \ldots$

(a) Demuestra que $\operatorname{Cov}[X_i, X_j] \geq 0$ $(i \neq j)$.

(b) ¿Qué puedes decir de este resultado?

Demostración.

(a) Para todo $n \in \mathbb{Z}_{\geq 1}$

$$\begin{aligned} 0 &\leq \operatorname{Var}[X_1 + \cdots + X_n] \\ &= \sum_{i=1}^{n} \operatorname{Var}[X_i] + \sum_{i \neq j} \operatorname{Cov}[X_i, X_j] \\ &= \sum_{i=1}^{n} \operatorname{Var}[X_1] + \sum_{i \neq j} \operatorname{Cov}[X_1, X_2] \\ &= n \operatorname{Var}[X_1] + n(n-1) \operatorname{Cov}[X_1, X_2] \end{aligned}$$

De donde,

$$\operatorname{Cov}[X_i, X_j] = \operatorname{Cov}[X_1, X_2] \geq -\frac{1}{n-1} \operatorname{Var}[X_1].$$

Tomando el limite cuando $n \to \infty$, obtenemos lo deseado.

(b) Que no puede suceder $\operatorname{Cov}[X_i, X_j] < 0$. En palabras, los valores grandes de X_i no van a corresponder con los valores chicos de X_j y viceversa.

2. Considera el contexto que se describe en la pagina 12 de las notas "Intercambiabilidad.pdf". Supon que la medida $Q(\theta)$ corresponde a una distribución (conjugada) $\operatorname{Beta}(\theta | a, b)$.

(a) Demuestra que

$$\operatorname{Var}(\theta | a, b) = \frac{ab}{(a+b)^2(a+b+1)}.$$

(b) Demuestra que

$$\operatorname{Corr}(X_i, X_j | a, b) = \frac{1}{a+b+1}.$$

(c) Supón ahora que $a/(a+b) \to m$ cuando $(a+b) \to \infty$, para algún valor de $m \in (0,1)$. ¿Qué ocurre con la varianza y correlación cuando $(a+b) \to \infty$?

(d) ¿Qué ocurre con la varianza y correlación cuando $a = 1$ y $b = 1$?

(e) ¿Qué nos dicen estos resultados sobre las distribuciones $Q(\theta)$ y $p(x_1, \ldots, x_n)$ en cada caso?

Demostración.

(a) Este es un resultado estándar. (cf. `https://statproofbook.github.io/P/beta-var.html`)

(b) Calculando directamente,

$$\begin{aligned} \operatorname{Corr}(X_i, X_j | a, b) &= \frac{\operatorname{Cov}(X_i, X_j)}{\sigma_{X_i} \sigma_{X_j}} \\ &= \frac{\mathbb{E}(X_i X_j) - \mathbb{E}(X_i)\mathbb{E}(X_j)}{\sqrt{\operatorname{Var}(X_i)}\sqrt{\operatorname{Var}(X_j)}} \\ &= \frac{\mathbb{E}(X_i X_j) - \mathbb{E}(X_1)^2}{\operatorname{Var}(X_1)} \end{aligned}$$

donde la última igualdad es consecuencia del lema 1. Pero

$$\begin{aligned}\mathbb{E}(X_iX_j) = \mathbb{E}\left(\mathbb{E}(X_iX_j|\theta)\right) = \mathbb{E}\left(\mathbb{E}(X_i|\theta)\mathbb{E}(X_j|\theta)\right) = \mathbb{E}(\theta^2),\\ \mathbb{E}(X_1) = \mathbb{E}\left(\mathbb{E}(X_1|\theta)\right) = \mathbb{E}(\theta),\end{aligned}$$

y

$$\begin{aligned}\mathrm{Var}(X_i) &= \mathbb{E}(X_i^2) - \mathbb{E}(X_i)^2\\ &= \mathbb{E}\Big(\mathbb{E}(X_i^2|\theta)\Big) - \mathbb{E}\left(\mathbb{E}(X_i|\theta)\right)^2\\ &= \mathbb{E}\Big(\mathrm{Var}(X_i^2|\theta) + \mathbb{E}(X_i)^2\Big) - \mathbb{E}\left(\mathbb{E}(X_i|\theta)\right)^2\\ &= \mathbb{E}\Big(\theta(1-\theta) + \theta^2\Big) - \mathbb{E}(\theta)^2\\ &= \mathbb{E}(\theta) - \mathbb{E}(\theta)^2.\end{aligned}$$

Por lo tanto,

$$\begin{aligned}\mathrm{Corr}(X_i, X_j|a,b) &= \frac{\mathbb{E}(\theta^2) - \mathbb{E}(\theta)^2}{\mathbb{E}(\theta) - \mathbb{E}(\theta)^2}\\ &= \frac{\mathrm{Var}(\theta)}{\mathbb{E}(\theta)(1-\mathbb{E}(\theta))}\\ &= \frac{\frac{ab}{(a+b)^2(a+b+1)}}{\frac{a}{a+b}\left(1-\frac{a}{a+b}\right)}\\ &= \frac{1}{a+b+1}.\end{aligned}$$

(c) Claramente, $\mathrm{Corr}(X_i, X_j|a,b) = \frac{1}{a+b+1} \to 0$ si $(a+b)\to\infty$. Por otro lado, notemos que

$$\lim_{(a+b)\to\infty} \frac{b}{(a+b)(a+b+1)} \leq \lim_{(a+b)\to\infty} \frac{a+b}{(a+b)(a+b+1)} = \lim_{(a+b)\to\infty} \frac{1}{a+b+1} = 0$$

Pero $\frac{b}{(a+b)(a+b+1)} \geq 0$, entonces $\lim_{(a+b)\to\infty} \frac{b}{(a+b)(a+b+1)} = 0$. Por lo tanto,

$$\begin{aligned}\lim_{(a+b)\to\infty} \mathrm{Var}(\theta|a,b) &= \lim_{(a+b)\to\infty} \frac{ab}{(a+b)^2(a+b+1)}\\ &= \left(\lim_{(a+b)\to\infty} \frac{a}{a+b}\right)\left(\lim_{(a+b)\to\infty} \frac{b}{(a+b)(a+b+1)}\right)\\ &= m\cdot 0\\ &= 0.\end{aligned}$$

(d) Evaluando $a=1$ y $b=1$,

$$\begin{aligned}\mathrm{Var}(\theta|1,1) &= \frac{1}{2^2\cdot 3} = \frac{1}{12},\\ \mathrm{Corr}(X_i, X_j|1,1) &= \frac{1}{3}.\end{aligned}$$

(e) Que si $(a+b)\to\infty$, entonces se pierde la relación entre X_i y X_j.

$\square$

Lema 2. Si $f \geq 0$ y $\int f \, d\mu = 0$, entonces $\mu\{f > 0\} = 0$.

Demostración. Para cada $n \in \mathbb{Z}_{\geq 1}$ sea

$$f_n = \frac{1}{n} \mathbb{1}_{f^{-1}(1/n,\infty)}.$$

Claramente, $f_n \leq f$. Entonces

$$\frac{1}{n}\mu\left(f^{-1}(1/n,\infty)\right) = \int f_n \, d\mu \leq \int f d\mu = 0.$$

De donde, $\mu\left(f^{-1}(1/n,\infty)\right) = 0$ para todo $n \in \mathbb{Z}_{\geq 1}$. Pero

$$\mu\{f > 0\} = \mu\left(\bigcup_{n\geq 1} f^{-1}(1/n,\infty)\right) \leq \sum_{n\geq 1} \mu\left(f^{-1}(1/n,\infty)\right) = 0.$$

$\square$

3. Considera dos variables aleatorias dicotómicas X_1 y X_2 con distribución conjunta

$$P[X_1 = 0, X_2 = 0] = P[X_1 = 1, X_2 = 1] = 0,$$
$$P[X_1 = 1, X_2 = 0] = P[X_1 = 0, X_2 = 1] = 1/2.$$

(a) ¿Son intercambiables X_1 y X_2? Argumenta tu respuesta.

(b) Demuestra que $p(x_1, x_2)$ no puede escribirse como

$$\int_0^1 \left\{ \prod_{i=1}^{2} \theta^{x_i}(1-\theta)^{1-x_i} \right\} dQ(\theta)$$

para alguna medida de probabilidad Q.

(c) ¿Contradice este resultado el teorema de representación de Bruno de Finetti? Argumenta tu respuesta.

Demostración.

(a) Sí, son intercambiables - es trivial verificar que

$$f_{X_1,X_2}(x,y) = P[X_1 = x, X_2 = y] = P[X_2 = x, X_1 = y] = f_{X_2,X_1}(x,y)$$

para todo $(x,y) \in \{0,1\} \times \{0,1\}$.

(b) Supongamos lo contrario. Es decir, que existe una medida de probabilidad Q en $[0,1]$ que satisface

$$p(x_1,x_2) = \int_0^1 \left\{ \prod_{i=1}^{2} \theta^{x_i}(1-\theta)^{1-x_i} \right\} dQ(\theta) = \int_0^1 \theta^{x_1+x_2}(1-\theta)^{2-x_1-x_2} \, dQ(\theta).$$

En particular, evaluando en $x_1 = 0$ y $x_2 = 0$,

$$0 = p(0,0) = \int_0^1 (1-\theta)^2 \, dQ(\theta).$$

De donde, (por el lema 2)

$$0 = Q\{\theta \in [0,1] \mid (1-\theta)^2 > 0\} = Q\{[0,1)\}$$

Análogamente, evaluando en $x_1 = 1$ y $x_2 = 1$,

$$0 = p(1, 1) = \int_0^1 \theta^2 dQ(\theta).$$

De donde, (por el lema 2)

$$0 = Q\{\theta \in [0, 1] \mid \theta^2 > 0\} = Q\{(0, 1]\}$$

Pero entonces

$$1 = Q\left\{[0, 1]\right\} = Q\left\{[0, 1) \cup (0, 1]\right\} \leq Q\left\{[0, 1)\right\} + Q\left\{(0, 1]\right\} = 0.$$

Una contradicción.

(c) Este resultado no contradice el teorema de representación de Bruno de Finetti pues este solo es valido para sucesiones infinitas intercambiables (y no toda sucesión finita intercambiable tiene una extensión a una sucesión infinita intercambiable).

□