1. Sea $(I,<)$ un conjunto bien ordenado y para cada $i \in I$ sea $(a_i, <_i)$ un conjunto bien ordenado. Definimos $<_l$ en $\prod_{i\in I} a_i$ como,

$$(x_i)_{i\in I} <_l (y_i)_{i\in I} \iff (x_i)_{i\in I} \neq (y_i)_{i\in I} \text{ y } x_j <_j y_j \text{ con, } j = \min\{i \in I \mid x_i \neq y_i\}$$

Probar que esta relacion es un buen orden en $\prod_{i\in I} a_i$.

Proof.
Transitividad. Sean $(x_i)_{i\in I}, (y_i)_{i\in I}, (z_i)_{i\in I} \in \prod_{i\in I} a_i$ tales que $(x_i)_{i\in I} <_l (y_i)_{i\in I}$ y, $(y_i)_{i\in I} <_l (z_i)_{i\in I}$. Sean, $j = \min\{i \in I \mid x_i \neq y_i\}$, $k = \min\{i \in I \mid y_i \neq z_i\}$. Procederemos por casos,
$j < k$. Entonces, como k es el minimo indice donde $(y_i)_{i\in I}$ y $(z_i)_{i\in I}$ difieren, $y_j = z_j$ y por lo tanto, $x_j <_j y_j$ implica $x_j <_j z_j$.
$j > k$. Entonces, como j es el minimo indice donde $(x_i)_{i\in I}$ y $(y_i)_{i\in I}$ difieren, $x_k = y_k$ y por lo tanto, $y_k <_k z_k$ implica $x_k <_k z_k$.
$j = k$. Entonces, por transitividad de $<_j$, $x_j <_j y_j <_j z_j$ implica $x_j <_j z_j$.
Asimetria. Supongamos que $(x_i)_{i\in I} <_l (y_i)_{i\in I}$ y $(x_i)_{i\in I} >_l (y_i)_{i\in I}$ entonces, si $j = \min\{i \in I \mid x_i \neq y_i\}$, $x_j <_j y_j$ y $x_j >_j y_j$, contradiciendo que $(a_j, <_j)$ es un buen orden.
Linearidad. Sean $(x_i)_{i\in I}, (y_i)_{i\in I} \in \prod_{i\in I} a_i$ distintos. Entonces, $j := \min\{i \in I \mid x_i \neq y_i\}$ existe. Ademas, como $<_j$ es un buen orden, $x_j <_j y_j$ o $x_j >_j y_j$. Por lo tanto, $(x_i)_{i\in I} <_l (y_i)_{i\in I}$ o $(x_i)_{i\in I} >_l (y_i)_{i\in I}$, respectivamente.
Buen orden. Sea,

$$\begin{aligned} i_0 &= \min I \\ \alpha_{i_0} &= \min\{x_{i_0} \mid x \in X\} \\ \alpha_i &= \min\{x_i \mid x \in X \text{ es tal que } \forall j < i(x_j = \alpha_j)\} \end{aligned}$$

Af! $(\alpha_i)_{i\in I}$ es minimo en X.
Supongamos que $x \in X$. Si $x \neq \alpha$ entonces, $x_k \neq \alpha_k$ para alguna $k \in I$. Entonces, $\{i \in I \mid x_i \neq \alpha_i\} \neq \phi$. Por lo tanto, tiene un minimo, $i^* \in I$. En particular, $\forall j < i^*(x_j = \alpha_j)$. Por lo tanto,

$$\alpha_{i^*} = \min\{x_i \mid x_j = \alpha_j \text{ para todo } j < i^* \text{ y } x \in X\} < x_i^*.$$

Es decir, $(\alpha_i)_{i\in I}$ es minimo. □

2. Sea $(a,<)$ un buen orden. Mostrar que $(a,<) \cong (\{\text{pred}(x) \mid x \in a\}, \subsetneq)$.

Proof. Sea $f : a \to \{\text{pred}(x) \mid x \in a\}$ tal que $f(x) = \text{pred}(x)$. Veamos que f es isomorfismo. Sean $x, y \in a$ distintos. Sin perdida de generalidad, como $(a,<)$ es lineal, podemos asumir $x < y$. Entonces, por transitividad de $<$, y como $x \in \text{pred}(y)$ pero $x \notin \text{pred}(x)$, concluimos que $\text{pred}(x) \subsetneq \text{pred}(y)$. Por lo tanto, $f(x) \subsetneq f(y)$. En particular, $f(x) \neq f(y)$. Es decir, f es morfismo e inyectiva. Para ver suprayectividad, tomemos $z \in \{\text{pred}(x) \mid x \in a\}$. Entonces, por definicion, $z = \text{pred}(x)$ para alguna $x \in a$. Por lo tanto, $f(x) = z$. □

3. Sea A una clase no vacia de ordinales, probar que $\bigcap A$ es un ordinal y ademas, es $\in-$minimo en A.

Proof.
$\bigcap A$ *es transitivo.* Sea $x \in y \in \bigcap A$. Entonces, $\forall a \in A\ y \in a$. Entonces, $\forall a \in A$ $x \in y \in a$. Y como $a \in A$ es ordinal, por transitividad, $\forall a \in A\ x \in a$. Es decir, $x \in \bigcap A$.
$\bigcap A$ *esta bien ordenado por* $\in$. Primero notemos que como A es una clase de ordinales, $x \in a \in A$ implica que x es ordinal, pues todo elemento de un ordinal es un ordinal. Entonces, como $x \in \bigcap A$ si y solo si, $\forall a \in A\ x \in a$, todos los elementos de $\bigcap A$ son ordinales. Es decir, $\bigcap A \subset \mathrm{OR}$. Por lo tanto, el buen orden de OR, se hereda a $\bigcap A$. $\square$

4. Mostrar que no existe ninguna sucesion decreciente de ordinales.

Proof. Supongamos lo contrario, y sea s esta sucesion. Entonces, $\phi \neq \operatorname{ran} s \subset \mathrm{OR}$. Por lo tanto, como OR es buen orden, $\operatorname{ran} s$ tiene minimo $s(\alpha)$. Pero por hipotesis s es decreciente, en particular, $s(\alpha+1) \in s(\alpha)$ y $s(\alpha+1) \in \operatorname{ran} s$. Una contradiccion a que $s(\alpha)$ es minimo. $\square$

5. Sea R una relacional en la clase A. Demostrar que R es bien fundada si existe una funcional $f : A \to \mathrm{OR}$ tal que $\forall x, y \in A\ xRy \to f(x) < f(y)$.

Proof. Sea $X \subset A$. Entonces, $f[X] \subset \mathrm{OR}$. Entonces, como OR es buen orden, existe $a \in X$ tal que $f(a)$ es minimo en $f[X]$. Es decir, $\forall x \in X\ f(a) \leq f(x)$. En otras palabras, $\forall x \in X\ f(x) \not< f(a)$. Entonces, por hipotesis, $\forall x \in X$ $(x, a) \notin R$. Es decir, a es minimal en X. $\square$

6. Demostrar que para cada ordinal α existe un ordinal no sucesor β, y un numero natural n, tal que $\alpha = \beta + n$.

Proof. Procederemos usando la segunda version del principio de induccion transfinita. Sea $P(x) \rightleftharpoons$ Existe β ordinal limite y $n \in \omega$ tales que, $x = \beta + n$.
$P(0)$. Claramente $\beta = 0$, $n = 0$ funcionan.
$P(\alpha) \to P(\alpha + 1)$. Supongamos que $\alpha = \beta' + n'$, donde β' es un ordinal limite y $n' \in \omega$. Entonces, por definicion de suma de ordinales,

$$\alpha + 1 = (\beta + n) + 1 = \beta + (n + 1)$$

Por lo tanto, $\beta = \beta'$ y $n = n' + 1$ funcionan.
Si α *es un ordinal limite y* $\forall \gamma < \alpha\ P(\gamma)$ *entonces,* $P(\alpha)$. Basta notar que si α es un ordinal limite, $\beta = \alpha$ y $n = 0$ funcionan. $\square$

7. Para cada uno de los siguientes ordinales dar un subconjunto de $\mathbb{Q}$ al cual sea isomorfo.

Proof.

i. $\omega + 1$

Af! $\omega + 1 \cong \{1 - \frac{1}{n+1} \mid n \in \omega\} \cup \{1\} \subset \mathbb{Q}$.

Sea $f : \omega + 1 \to \{1 - \frac{1}{n+1} \mid n \in \omega\} \cup \{1\}$ tal que,

$f(x) = \begin{cases} 1 - \frac{1}{x+1} & \text{si } x \in \omega \\ 1 & \text{si } x = \omega \end{cases}$

f es inyectiva. Supongamos que $f(x) = f(y)$. Si $f(x) = 1 = f(y)$, como no existe $n \in \omega$ tal que $1 - \frac{1}{n} = 1$, $x = \omega = y$. Si $f(x) \neq 1 \neq f(y)$ entonces, $1 - \frac{1}{x} = 1 - \frac{1}{y}$. Despejando, obtenemos $x = y$.

f es suprayectiva. Sea $y \in \{1 - \frac{1}{n+1} \mid n \in \omega\} \cup \{1\}$. Si $y = 1$, $f(\omega) = y$. Si $y \neq 1$, $y = 1 - \frac{1}{n+1}$ para algun $n \in \omega$. Por lo tanto, $f(n) = y$.

f es morfismo. Sean $x, y \in \omega$ entonces,

$$\begin{aligned} x < y &\iff -y < -x \\ &\iff -\frac{1}{x} < -\frac{1}{y} \\ &\iff 1 - \frac{1}{x} < 1 - \frac{1}{y} \\ &\iff f(x) < f(y) \end{aligned}$$

Por otro lado, sea $n \in \omega + 1$. Si $n < \omega$, $f(n) = 1 - \frac{1}{n+1} < 1 = f(\omega)$. Si $n \not< \omega$ entonces, $n = \omega$ y por lo tanto, $f(n) = f(\omega)$ en particular, $f(n) \not< f(\omega)$.

ii. $\omega \cdot 2$

Af! $\omega \cdot 2 \cong \{1 - \frac{1}{n+1} \mid n \in \omega\} \cup \{2 - \frac{1}{n+1} \mid n \in \omega\} \subset \mathbb{Q}$.

Sea $f : \omega \cdot 2 \to \{1 - \frac{1}{n+1} \mid n \in \omega\} \cup \{2 - \frac{1}{n+1} \mid n \in \omega\}$ tal que,

$f(\omega^k + n) = \begin{cases} 1 - \frac{1}{n+1} & \text{si } k = 0 \\ 2 - \frac{1}{n+1} & \text{si } k = 1 \end{cases}$

f es inyectiva. Supongamos que $f(\omega^{k_0} + m) = f(\omega^{k_1} + n)$. Notemos que no puede ser que $1 - \frac{1}{m+1} = 2 - \frac{1}{n+1}$ para $m, n \in \omega$, pues tendriamos $0 > -\frac{1}{m+1} = 1 - \frac{1}{n+1}$. Por lo tanto, debe ser $k_0 = k_1$. Es decir, $1 - \frac{1}{m+1} = 1 - \frac{1}{n+1}$ o $2 - \frac{1}{m+1} = 2 - \frac{1}{n+1}$. En cualquier caso, despejando obtenemos, $m = n$.

f es suprayectiva. Sea $y \in \{1 - \frac{1}{n+1} \mid n \in \omega\} \cup \{2 - \frac{1}{n+1} \mid n \in \omega\}$. Supongamos que $y \in \{2 - \frac{1}{n+1} \mid n \in \omega\}$, el otro caso es analogo. Entonces, $y = 2 - \frac{1}{n+1}$ para alguna $n \in \omega$. Por lo tanto, $f(\omega^1 + n) = y$.

f es morfismo. Sean $x, y \in \omega \cdot 2$. Supongamos ademas que, $x = \omega^{k_0} + m$ y

$y = \omega^{k_1} + n$ donde, $k_0, k_1 \in \{0,1\}$, $m, n \in \omega$. Entonces,

$$\begin{aligned}
x < y &\iff \omega^{k_0} + m < \omega^{k_1} + n \\
&\iff k_0 < k_1 \text{ ó } k_0 = k_1 \text{ y } m < n \\
&\iff f(x) = 1 - \frac{1}{m+1} < 2 - \frac{1}{n+1} = f(y) \text{ ó} \\
&\qquad f(x) = k - \frac{1}{m+1} < k - \frac{1}{n+1} = f(y) \text{ donde, } k \in \{1,2\} \\
&\iff f(x) < f(y)
\end{aligned}$$

iii. ω^ω

Para cada $n \in \omega$, sea $(a_k^{(n)})_{k\in\omega}$ cualquier sucesion estrictamente estrictamente creciente en el intervalo $[n, n+1)$ tal que $a_0^{(n)} = n$. Recursivamente, sea $(a_k^{(n_0,\dots,n_{m^+})})_{k\in\omega}$ cualquier sucesion estrictamente creciente en el intervalo $[a_{n_{m^+}}^{(n_0,\dots,n_m)}, a_{n_{m^+}+1}^{(n_0,\dots,n_m)})$.
Ademas, por la forma normal, sabemos que todo ordinal α menor a ω^ω puede ser expresado de forma unica como,

$$\alpha = \omega^k m_k + \omega^{k-1} m_{k-1} + \cdots + \omega m_1 + m_0.$$

Para algunos, $k, m_0, \dots, m_k \in \omega$. Es decir, cada ordinal α queda unicamente determinado por una sucesion de naturales, $(m_0, \dots, m_k)$. Por lo tanto, $f : \omega^\omega \to \mathbb{Q}$ dada por,

$$f(\omega^k m_k + \omega^{k-1} m_{k-1} + \cdots + \omega m_1 + m_0) = a_{m_0}^{(k,m_k,\dots,m_1)}$$

esta bien definida. Veamos que,
f es morfismo. Supongamos que $\alpha = \omega^k m_k + \cdots + m_0 < \omega^l n_l + \cdots + n_0 = \beta$. Entonces, $k \le l$. En el caso que $k < l$ tendremos que $f(\alpha) \in [k, k+1)$, y $f(\beta) \in [l, l+1)$. Por lo tanto, como $k < l$, $f(k) < f(l)$. En el caso que $k = l$ notemos que $\{j \in k^+ = l^+ \mid m_j \neq n_j\}$ tiene maximo, llamemosle i. En particular, tenemos que $m_i < n_i$ y como son numeros naturales, $m_i + 1 \le n_i$. Por lo tanto, como $(a_j^{(k,m_k,\dots,m_{i+1})})_{j\in\omega}$ es estrictamente creciente,

$$a_{m_i}^{(k,m_k,\dots,m_{i^+})} < a_{m_i+1}^{(k,m_k,\dots,m_{i^+})} \le a_{n_i}^{(k,m_k,\dots,m_{i^+})} = a_{n_i}^{(l,n_l,\dots,n_{i^+})} \qquad (*)$$

Donde la ultima igualdad se cumple pues $i = \max\{j \in k^+ = l^+ \mid m_j \neq n_j\}$.
Por otro lado, como $(a_j^{(k,m_k,\dots,m_2)})_{j\in\omega}$ es una sucesion en $[a_{m_2}^{(k,m_k,\dots,m_3)}, a_{m_2+1}^{(k,m_k,\dots,m_3)})$ entonces,

$$\begin{aligned}
[a_{m_1}^{(k,m_k,\dots,m_2)}, a_{m_1+1}^{(k,m_k,\dots,m_2)}) &\subset [a_{m_2}^{(k,m_k,\dots,m_3)}, a_{m_2+1}^{(k,m_k,\dots,m_3)}) \\
&\subset [a_{m_3}^{(k,m_k,\dots,m_4)}, a_{m_3+1}^{(k,m_k,\dots,m_4)}) \\
&\ \ \vdots \\
&\subset [a_{m_i}^{(k,m_k,\dots,m_{i+1})}, a_{m_i+1}^{(k,m_k,\dots,m_{i+1})})
\end{aligned}$$

Analogamente,

$$[a_{n_1}^{(l,n_l,\ldots,n_2)}, a_{n_1+1}^{(l,n_l,\ldots,n_2)}) \subset [a_{n_i}^{(l,n_l,\ldots,n_{i+})}, a_{n_i+1}^{(l,n_l,\ldots,n_{i+})}).$$

Por la misma razon, $f(\alpha) = a_{m_0}^{(k,m_k,\ldots,m_1)} \in [a_{m_1}^{(k,m_k,\ldots,m_2)}, a_{m_1+1}^{(k,m_k,\ldots,m_2)})$ y, $f(\beta) = a_{n_0}^{(l,n_l,\ldots,n_1)} \in [a_{n_1}^{(l,n_l,\ldots,n_2)}, a_{n_1+1}^{(l,n_l,\ldots,n_2)})$. De lo anterior, se sigue que $f(\alpha) \in [a_{m_i}^{(k,m_k,\ldots,m_{i+})}, a_{m_i+1}^{(k,m_k,\ldots,m_{i+})})$ y $f(\beta) \in [a_{n_i}^{(l,n_l,\ldots,n_{i+})}, a_{n_i+1}^{(l,n_l,\ldots,n_{i+})})$. Y por $(*)$, $f(\alpha) < f(\beta)$.
Conversamente, supongamos $\alpha = \omega^k m_k + \cdots + m_0$, $\beta = \omega^l n_l + \cdots + n_0$ y, $f(\alpha) < f(\beta)$. Si $k < l$, claramente $\alpha < \beta$. Si $k = l$, basta probar que si $i = \max\{j \in k^+ = l^+ \mid m_i \neq n_i\}$ entonces, $m_i < n_i$. Sin embargo, si suponemos lo contrario, como $m_i \neq n_i$ por definicion de i, $m_i > n_i$. Y por lo tanto estamos en las condiciones del caso anterior. Esto implica que $f(\alpha) > f(\beta)$. Una contradiccion.

□

8. Mostrar que para cualquier conjunto $a = \{a_i \mid i \in I\}$ existe un conjunto $b = \{b_i \mid i \in I\}$ tal que $\cup a = \cup b$, para todo $i \in I$ $b_i \subset a_i$ y $b_i \cap b_j = \phi$ si $i \neq j$.

Proof. Sea,

$$\begin{aligned} b_0 &= a_0 \\ b_i &= a_i - \bigcup_{j<i} a_j \end{aligned}$$

Claramente, $b_i \subset a_i$. Por otro lado, si $i \neq j$, supongamos sin perdida de generalidad que $i > j$. Entonces, por definicion de b_i,

$$\begin{aligned} x \in b_i &\implies x \notin \bigcup_{k<i} a_k \\ &\implies x \notin a_k \text{ para todo } k < i \\ &\implies x \notin a_j \\ &\implies x \notin a_j - \bigcup_{k<j} a_k = b_j \end{aligned}$$

Es decir, $b_i \subset b_j^c$. Por lo tanto, $b_i \cap b_j = \phi$. □

9. Comparar los siguientes pares de ordinales.

i. $\omega + 1$ y $n + \omega$, con $n \in \omega$.
Lema 1. $\forall n \in \omega(n + \omega) = \omega)$

$$\begin{aligned} n + \omega &= n + \sup\{m \mid m \in \omega\} \\ &= \sup\{n + m \mid m \in \omega\} \\ &= \omega \end{aligned}$$

Por lo tanto, $n+\omega=\omega\leq\omega+n$

ii. $n\omega$ y ωn, con $n\in\omega$. *Lema 2.* $\forall n\in\omega(n\omega=\omega)$

$$\begin{aligned} n\omega &= \sup\{nm \mid m\in\omega\} \\ &= \sup\{l \mid l\in\omega\} \\ &= \omega \end{aligned}$$

Por lo tanto, $n\omega=\omega\leq\omega n$

iii. $\omega\omega_1$ y $\omega_1\omega$
Como ω_1 es el minimo ordinal que no es equipotente a ningun subconjunto de ω, entonces, $\forall\alpha<\omega_1$ α es equipotente a un subconjunto de ω, en particular, α es numerable. Por lo tanto,

$$\begin{aligned} \omega\omega_1 &= \sup\{\omega\alpha \mid \alpha<\omega_1\} \\ &= \sup\{\beta \mid \beta<\omega_1\} \\ &= \omega_1 \end{aligned}$$

Donde la segunda igualdad se cumple pues el producto de ω y un ordinal numerable es un ordinal numerable. Entonces, como para todo ordinal γ y todo $n\in\omega-\{0\}$, $\gamma\leq\gamma n$, en particular,

$$\omega\omega_1=\omega_1\leq\omega n<\sup\{\omega n \mid n\in\omega\}=\omega_1\omega.$$

iv. $\omega^k n_k+\cdots+\omega^1 n_1+n_0$ y ω^{k+1}, con $k,n_0,\ldots,n_k\in\omega$
Usaremos los siguientes resultados:

i. $\forall m,n\in\omega\ (m<n\implies\omega^m<\omega^n)$
ii. $\forall\alpha,\beta\in\mathrm{OR},\forall\gamma\in\mathrm{OR}-\{0\}\ (\alpha<\beta\implies\gamma\alpha<\gamma\beta)$
iii. $\forall\alpha,\beta,\gamma,\delta\in\mathrm{OR}\ \alpha<\beta,\gamma<\delta\implies\alpha+\gamma<\beta+\delta$.

Primero notemos que por (i.) y (ii.) $\forall i\in k^+\forall n_i\in\omega(\omega^i n_i<\omega^k n_k)$. Entonces, por (iii.),

$$\begin{aligned} \omega^k n_k+\omega^{k-1}n_{k-1}+\cdots+\omega n_1+n_0 &< \omega^k n_k+\omega^k n_{k-1}+\cdots+\omega^k n_1+\omega^k n_0 \\ &= \omega^k(n_k+\cdots+n_0) \\ &< \omega^k\omega \\ &= \omega^{k+1} \end{aligned}$$

10. Encontrar el conjunto de parejas de ordinales α y β tales que $\alpha+\beta=\omega^2+1$.

Proof. Af! $\{(\alpha,\beta)\mid\alpha+\beta=\omega^2+1\}=\{(\alpha,\beta)\mid\psi(\alpha,\beta)\}$. Donde,

$$\psi(\alpha,\beta)\rightleftharpoons(\alpha,\beta)=\begin{cases}(n_0,\omega^2+1) & \text{con, } n_0\in\omega\text{, ó,}\\ (\omega n_1+n_0,\omega^2+1) & \text{con, } n_0\in\omega, n_1\in\omega-\{0\}\text{, ó,}\\ (\omega^2,1) & \text{ó,}\\ (\omega^2+1,0) & \end{cases}$$

Lema 1. $\forall n \in \omega(n + \omega^2 = \omega^2)$

$$\begin{aligned} n + \omega^2 &= n + \sup\{\omega m \mid m \in \omega\} \\ &= n + \sup\{\omega(1+m) \mid m \in \omega\} \\ &= \sup\{n + (\omega + \omega m) \mid m \in \omega\} \\ &= \sup\{(n + \omega) + \omega m \mid m \in \omega\} \\ &= \sup\{\omega + \omega m \mid m \in \omega\} \\ &= \sup\{\omega(1+m) \mid m \in \omega\} \\ &= \omega^2 \end{aligned}$$

Lema 2. $\forall m, n \in \omega((\omega n + m) + \omega^2 = \omega^2$

$$\begin{aligned} ((\omega n + m) + \omega^2 &= \omega n + (m + \omega^2) \\ &= \omega n + (\omega^2) \\ &= (n + \omega)\omega \\ &= (\omega)\omega \\ &= \omega^2 \end{aligned}$$

Por los lemas y asociatividad de la suma de ordinales, $\supset$ es clara. Veamos $\subset$. Sean α, β tales que $\alpha + \beta = \omega^2 + 1$. Entonces, $\alpha \leq \omega^2 + 1$ y por lo tanto,
Caso 1. $\alpha = n_0$ para algun $n_0 \in \omega$. Entonces,

$$\begin{aligned} n_0 + \beta &= \alpha + \beta \\ &= \omega^2 + 1 \\ &= (n_0 + \omega^2) + 1 \\ &= n_0 + (\omega^2 + 1) \end{aligned}$$

Entonces, por la ley de la cancelacion por la izquierda de la suma de ordinales (lcis), $\beta = \omega^2 + 1$.
Caso 2. $\alpha = \omega n_1 + n_0$ con $n_0 \in \omega$ y $n_1 \in \omega - \{0\}$. Entonces,

$$\begin{aligned} (\omega n_1 + n_0) + \beta &= \alpha + \beta \\ &= \omega^2 + 1 \\ &= ((\omega n_1 + n_0) + \omega^2) + 1 \\ &= \omega n_1 + n_0) + (\omega^2 + 1) \end{aligned}$$

Entonces, por la lcis, $\beta = \omega^2 + 1$.
Caso 3. $\alpha = \omega^2 n_2 + \omega n_1 + n_0$ con $n_0, n_1 \in \omega$, $n_2 \in \omega - \{0\}$.
Af! $n_2 = 1$. Supongamos lo contrario, entonces, como $n_2 \neq 0$, $n_2 \geq 2$. Entonces, $\alpha \geq \omega^2 2 > \omega^2 + 1$. Una contradiccion.
Af! $n_1 = 0$. Supongamos lo contrario, entonces, $\alpha \geq \omega^2 + \omega > \omega^2 + 1$. Una contradiccion.
Af! $n_0 \in \{0, 1\}$. Supongamos lo contrario, entonces, $n_0 \geq 2$. Por lo tanto,

$\alpha \geq \omega^2 + 2 > \omega^2 + 1$. Una contradiccion.
De lo anterior podemos concluir que $\alpha \in \{\omega^2, \omega^2 + 1\}$.
Caso 3.1. $\alpha = \omega^2$. Entonces por la lcis, $\alpha + \beta = \omega^2 + 1$ implica, $\beta = 1$.
Caso 3.2. $\alpha = \omega^2$. Entonces por la lcis, $(\omega^2 + 1) + 0 = \omega^2 + 1 = \alpha + \beta$ implica que $\beta = 0$.
Los casos son exahustivos pues todos los ordinales de grado ≤ 2 fueron considerados y todos los ordinales de grado ≥ 3 son mayores que $\omega^2 + 1$. □

11. Considera el siguiente juego de longitud ω con dos participantes, I y II. En la ronda i, I elige un ordinal infinito α_i estrictamente mayor que su eleccion anterior y posteriormente II elige $\beta_i \in \alpha_i$. II ganara si $\sup\{\beta_i \mid i \in \omega\} = \sup\{\alpha_i \mid i \in \omega\}$. Describir una estrategia ganadora para II.

Proof. Como $\forall n \in \omega \; \alpha_0 < \alpha_n$ entonces, $\sup\{\alpha_i \mid i \in \omega - \{0\}\} = \sup\{\alpha_i \mid i \in \omega\}$. Por lo tanto, basta que

$$\beta_0 = 0$$
$$\beta_n^+ = \alpha_n.$$

□

Diego Leipen Lara
418002028