Lema. Si E y F son espacios normados entonces, $L : E \to F$ es continua $\iff$ $\exists M > 0\ \forall x \in E\ \big(\|x\|_E \leq 1 \implies \|Lx\|_F \leq M\big)$

Demostración. $\to$) Supongamos que L es continua. Por la proposicion 1.8 de las notas, L es acotado. Es decir, $\exists C > 0$ tal que

$$\|Lx\|_F \leq C\|x\|_E \ \text{ para todo } x \in E \tag{1}$$

La conclusión se sigue inmediatamente de (1) poniendo $M := C$.

$\leftarrow$) Supongamos que $\exists M > 0\ \forall x \in E\ \big(\|x\|_E \leq 1 \implies \|Lx\|_F \leq M\big)$. De nuevo, por la proposicion 1.8, basta probar que L es acotada. Sea $x \in E$ cualquiera. Definimos $\tilde{x} = \frac{x}{\|x\|_E}$. En particular, $\|\tilde{x}\| = 1$ y por lo tanto,

$$M \geq \|L\tilde{x}\|_F = \left\| L\left(\frac{x}{\|x\|_E}\right)\right\|_F = \left\|\frac{1}{\|x\|_E} Lx\right\|_F = \frac{1}{\|x\|_E}\|Lx\|_F. \tag{2}$$

Finalmente, multiplicando (2) por $\|x\|_E$, obtenemos lo deseado. $\square$

Observación 1. Si E y F son espacios normados y $[x, y] \in E \times F$ es tal que $\|[x, y]\|_{E\times F} \leq 1$ entonces, $\|x\|_E \leq 1$ & $\|y\|_F \leq 1$.

1. *La suma es continua.* Por el lema, basta notar que si $\|[x, y]\|_{E\times E} \leq 1$ entonces, $\| + [x, y]\|_E = \|x + y\|_E \leq \|x\|_E + \|y\|_E = \|[x, y]\|_{E\times E} \leq 1$.

La multiplicación es continua. Por el lema y la observación 1, basta notar que si $\|[\lambda, x]\|_{\mathbb{R}\times E} \leq 1$ entonces, $\| \cdot [\lambda, x]\| = \|\lambda x\| = |\lambda|\|x\| \leq 1 \cdot 1 = 1$.

2. $\to$) Procedemos por contradiccion: supongamos que $\forall C \geq 0\ \exists x, y \in F$ tales que $\|A[x, y]\|_G > C\|x\|_E\|y\|_F$. Si ponemos $\tilde{x} = \frac{x}{2\|x\|_E}$ & $\tilde{y} = \frac{y}{2\|y\|_F}$ entonces, dividiendo la desigualdad anterior por $\|x\|_E\|y\|_F$ obtenemos,

$$\big\|A[\tilde{x}, \tilde{y}]\big\| = \left\|\frac{1}{\|x\|_E\|y\|_F} \cdot A[x, y]\right\|_G = \frac{1}{\|x\|_E\|y\|_F} \cdot \|A[x, y]\|_G > C.$$

Donde la primera igualdad se cumple por bilinealidad de A y la segunda por linealidad de la norma. Por otro lado, como $\|\tilde{x}\|_E = \frac{1}{2} = \|\tilde{y}\|_F$ entonces, $\|[\tilde{x}, \tilde{y}]\|_{E\times F} = 1$. Por lo tanto, acabamos de demostrar que

$$\forall C > 0\ \exists [\tilde{x}, \tilde{y}] \in E \times F \text{ tal que } \|[\tilde{x}, \tilde{y}]\|_{E\times F} \leq 1 \ \&\ \|A[\tilde{x}, \tilde{y}]\| > C$$

Finalmente, por el lema (en contrapuesta), A no es continua.

$\leftarrow$) Supongamos que $\exists C \geq 0$ tal que $\|A[x, y]\|_G \leq C\|x\|_E\|y\|_F$ para toda $[x, y] \in E \times F$. Usando la observación 1 vemos que, si $\|[x, y]\|_{E\times F} \leq 1$ entonces, $\|A[x, y]\| \leq C\|x\|_E\|y\|_F \leq C \cdot 1 \cdot 1 = C$. Por el lema, A es continua. $\square$

Observación 2. Si E es normado y $\{a_n\}_n \subset E$ entonces,

1. $\|a_n\| \to \|a\|$ implica $\|a_n\|^2 \to \|a\|^2$.
2. $\|a_n\|^2 \to 0$ implica $\|a_n\| \to 0$.

Observación 3. Si E es un espacio vectorial con producto escalar $(\cdot,\cdot)$ & $x, y \in E$ entonces,

$$\begin{aligned}
\|x-y\|^2 &= (x-y, x-y) \\
&= (x,x)-(x,y)-(y,x)+(y,y) && \text{(bilinealidad)} \\
&= \|x\|^2 - 2(x,y) + \|y\|^2 && \text{(simetría)}
\end{aligned}$$

3a. Supongamos que $(x, x_n) \to (x,x) = \|x\|^2$ y $\|x_n\| \to \|x\|$. Por la observación 2.1, $\lim_{n\to\infty} \|x_n\|^2 = \|x\|^2$. Además, por la observación 3,

$$\begin{aligned}
\lim_{n\to\infty} \|x_n - x\|^2 &= \lim_{n\to\infty} \Big(\|x_n\|^2 - 2(x_n, x) + \|x\|^2 \Big) \\
&= \lim_{n\to\infty} \|x_n\|^2 - 2 \lim_{n\to\infty} (x_n, x) + \lim_{n\to\infty} \|x\|^2 \\
&= \|x\|^2 - 2\|x\|^2 + \|x\|^2 = 0
\end{aligned}$$

Donde la segunda igualdad se cumple porque supusimos que $\|x_n\|$ y (x, x_n) convergen; y la tercera porque supusimos $(x, x_n) \to (x,x)$. Finalmente, usando lo anterior y la observación 2.2, $x_n \to x$. $\square$

3b. Supongamos que $(x_n), (y_n) \subset B_1$ y $(x_n, y_n) \to 1$. Por la observación 3,

$$\lim_{n\to\infty} \|x_n - y_n\|^2 = \lim_{n\to\infty} \|x_n\|^2 - \lim_{n\to\infty} 2(x_n, y_n) + \lim_{n\to\infty} \|y_n\|^2 = 1 - 2\cdot 1 + 1 = 0$$

Donde la tercera igualdad se cumple porque $x_n, y_n \in B_1$ y $(x_n, y_n) \to 1$. Finalmente, usando lo anterior y la observación 2.2, $\|x_n - y_n\| \to 0$. $\square$

Diego Leipen Lara
418002038