1. Prueba que $\mathbb{R}$ y $A := \{(x, |x|) \mid x \in \mathbb{R}\}$ no son difeomorfos.
Observación. La composición de difeomorfismos es un difeomorfismo.
Razón. Supongamos que $f : X \to Y$ y $g : Y \to Z$ son difeomorfismos. Como la composición de suaves es suave, $g \circ f$ y $(g \circ f)^{-1} = f^{-1} \circ g^{-1}$ son suaves.
Demostración de 1.
Supongamos lo contrario y sea $f = (f_1, f_2) : \mathbb{R} \to A$ un difeomorfismo. Primero, notemos que $\mathrm{im} f_1 = \mathbb{R}$ y $\mathrm{im} f_2 = \mathbb{R}^+ \cup \{0\}$. Por otro lado, como $(f_1(x), f_2(x)) = f(x) \in A$ para todo $x \in \mathbb{R}$, $f_2(x) = |f_1(x)|$. Entonces,

$$f_2 \circ f_1^{-1}(x) = |f_1(f^{-1}(x))| = |x|.$$

Por lo tanto, por la observación, $f_2 \circ f_1^{-1} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^+ \cup \{0\}$ es un difeomorfismo. Una contradicción. $\square$

2. Si X es una variedad suave y $f : X \to Y$ es una función suave prueba que $G := \{(x, f(x)) \mid x \in X\}$ también es una variedad y que es difeomorfa a f.
Observación. Si X es una variedad suave y $f : X \to Y$ es un difeomorfismo, Y es una variedad suave.
Razón. Sea $y \in Y$. Como f es difeomorfismo, $\exists x \in X(f(x) = y)$. Como X es una variedad suave, $\exists U_x \subset X, V_x \subset \mathbb{R}^n, \phi_x : V_x \to U_x$ tales que U_x es abierto en X, V_x es abierto en $\mathbb{R}^n$ y ϕ_x es difeomorfismo. Por la observación en el ejercicio 1, $f \circ \phi_x$ es un difeomorfismo. En resumen, $\forall y \in Y \ \exists W_y \subset Y$ tal que W_y es difeomorfo a un abierto A_y en $\mathbb{R}^n$ (específicamente, $W_y = f \circ \phi_x(V_x)$ y $A_y = V_x$ donde $f(x) = y$).
Demostración de 2.
Sea $F : X \to G$ tal que $F(x) = (x, f(x))$. Como id_X y f son suaves, F también. Además, $\pi : G \to X$ tal que $\pi(x, f(x)) = x$ es su inversa y también es suave. En efecto, si $X \subset \mathbb{R}^n$, $Y \subset \mathbb{R}^m$ y $\pi_1 : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$ es la proyección entonces, π_1 es suave y extiende a π. $\square$

3. Prueba que $\{(x, y) \mid xy = 0\}$ no es una variedad de dimensión 1.
Observación 1. Si $f : X \to Y$ es un difeomorfismo, y $x_0 \in X$ entonces, $g := f|_{X \setminus \{x_0\}} : X \setminus \{x_0\} \to Y \setminus \{f(x_0)\}$ es un difeomorfismo.
Razón. La misma función suave con dominio abierto que extiende a f extiende a g; y la misma función suave con dominio abierto que extiende a f^{-1} extiende a g^{-1}.
Observación 2. Si X y Y son homeomorfos, X y Y tienen la misma cantidad de componentes conexos.
Razón. Sea $f : X \to Y$ homeomorfismo y $\{x_i \in X \mid i \in I\}$ un conjunto de representantes de $\sim_X$ donde $a \sim_X b$ sii $\exists Z \subset X$ conexo tal que $a, b \in Z$. Veamos que $\{f(x_i) \in X \mid i \in I\}$ es un conjunto de representantes de $\sim_Y$.
P.D. $[f(x_i)] \cap [f(x_j)] = \phi$ si $i \neq j$.
Supongamos que $[f(x_i)] \cap [f(x_j)] \neq \phi$ entonces, existe $x_k \in X$ tal que $f(x_k) \in [f(x_i)] \cap [f(x_j)]$. Por definición de $\sim_Y$, existen $A, B \subset Y$ conexos tales que $f(x_k), f(x_i) \in A$ y $f(x_l), f(x_i) \in B$. Como f es homeomorfismo y la conexidad se preserva bajo continuidad, $f^{-1}(A \cup B)$ es conexo. Por lo tanto, $[x_i] = [x_j]$ y

como $\{x_i \mid i \in I\}$ es de representantes, $i = j$.
P.D. $\bigcup_i [f(x_i)] = Y$.
Sea $y \in Y$ por suprayectividad, $\exists x \in X(f(x) = y)$. Como $\{x_i \mid i \in I\}$ es de representantes $\exists i \in I(x \in [x_i])$. Por definición, $\exists A \subset X$ conexo tal que $x, x_i \in A$. Luego, como $f(A)$ es conexo (por continuidad de f), $f(x) \in [f(x_i)]$.
Observación 3. Si $x \in X \subset \mathbb{R}^n$, $U \subset \mathbb{R}$ es abierto, y $f : U \to X$ es difeomorfismo, existe una vecindad de x que es difeomorfa a un intervalo abierto.
Razón. Sabemos que $U = \bigcup_n (a_n, b_n)$ y $\exists u \in U(f(u) = x)$. Mas aun, $\exists i(u \in (a_i, b_i))$. Por un argumento análogo al de la observación 1 tenemos que $f|_{(a_i,b_i)} : (a_i, b_i) \to f[(a_i, b_i)]$ es difeomorfismo.
Demostración de 3. Supongamos que $\{(x, y) \mid xy = 0\}$ es una variedad de dimensión 1. Aplicando la definición de variedad suave a $(0, 0)$ y ocupando la observación 3, sabemos que, $\exists U \subset \{(x, y) \mid xy = 0\}$ abierto tal que $(0, 0) \in U$, $\exists (a, b) \subset \mathbb{R}$, y $\exists f : (a, b) \to U$ difeomorfismo. Por otro lado, sabemos que $\exists x \in (a, b)$ tal que $f(x) = (0, 0)$. Por la observación 1,

$$g = f|_{(a,b)\setminus\{x\}} : (a, b) \setminus \{x\} \to U \setminus \{(0, 0)\}$$

es difeomorfismo. Sin embargo, es fácil verificar que $(a, b) \setminus \{x\}$ tiene 2 componentes conexas (específicamente $[y]$ y $[z]$ donde $a < y < x < z < b$) mientras que $U \setminus \{(0, 0)\}$ tiene 4 (específicamente $[(0, \epsilon/2)], [(\epsilon/2, 0)], [(0, -\epsilon/2)], [(-\epsilon/2, 0)]$ donde $(B_\epsilon((0, 0)) \setminus \{(0, 0)\}) \cap \{(x, y) \mid xy = 0\} \subset U \setminus \{(0, 0\})$, contradiciendo la observación 2.

Diego Leipen Lara
418002038