1. Sea $\mathbb{R}^{n+1} = \{(x, a_0, \ldots, a_{n-1}) \mid x, a_i \in \mathbb{R}\}$. Sea M el conjunto de puntos en $\mathbb{R}^{n+1}$ tales que

$$x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0 = 0$$

Demostrar que M es una subvariedad de codimension 1 en $\mathbb{R}^{n+1}$ difeomorfa a $\mathbb{R}^n$.

Demostración. Sea $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^{n+1}$ tal que

$$(y_1, \ldots, y_n) \mapsto \left(y_1, -\left(y_1^n + y_{n+1}y_1^{n-1} + y_n y_1^{n-2} + \cdots + y_3 y\right), y_3, \ldots, y_n, y_{n+1}\right).$$

Sea $\pi : M \to \mathbb{R}^n$ tal que

$$(y_1, y_2, \ldots, y_{n+1}) \mapsto (y_1, y_3 \ldots, y_{n+1}).$$

Es facil ver que para obtener (todo) lo deseado, basta probar que $f^{-1} = \pi$. La igualdad $\pi \circ f = \mathrm{id}_{\mathbb{R}^n}$ es clara. Para ver $f \circ \pi = \mathrm{id}_M$ notemos que si $(y_1, \ldots, y_{n+1}) \in M$, entonces (por definicion de M),

$$y_1^n + y_{n+1}y_1^{n-1} + y_n y_1^{n-2} + \cdots + y_3 y + y_2 = 0.$$

Lo cual implica,

$$y_2 = -\left(y_1^n + y_{n+1}y_1^{n-1} + y_n y_1^{n-2} + \cdots + y_3 y\right).$$

De donde,

$$\begin{aligned} f \circ \pi (y_1, y_2, y_3, \ldots, y_{n+1}) = \\ f (y_1, y_3, \ldots, y_{n+1}) = \\ \left(y_1, -\left(y_1^n + y_{n+1}y_1^{n-1} + y_n y_1^{n-2} + \cdots + y_3 y\right), y_3, \ldots, y_n, y_{n+1}\right) = \\ (y_1, y_2, y_3, \ldots, y_{n+1}) \end{aligned}$$

□

2. Demostrar que si α es una $(n-1)$-forma con soporte compacto en $\mathbb{R}^n$, entonces $\int_{\mathbb{R}^n} d\alpha = 0$.

Demostración. Por el teorema de Stokes,

$$\int_{\mathbb{R}^n} d\alpha = \int_{\partial\mathbb{R}^n} \alpha = 0.$$

Donde la ultima igualdad se cumple porque $\partial\mathbb{R}^n = \emptyset$. □

3. Sea X un campo vectorial C^∞ en un abierto U de $\mathbb{R}^n$. Sea p un punto de U donde $X(p) \neq 0$, y mas aun, supongamos que $X_1(p) \neq 0$. Sea $(t, q) \mapsto \varphi^t(q)$ el flujo de X (el cual esta definido en una vecindad de $(0, p) \in \mathbb{R} \times U$).

1. Sea F el mapeo definido en una vecindad de p por
$$F(q_1,\ldots,q_n)=\varphi^{q_1-p_1}(p_1,q_2,\ldots,q_n).$$
Demostrar que F es un difeomorfismo local de una vecindad de p en una vecindad de p.

2. Demostrar que $F_*\left(\frac{\partial}{\partial x_1}\right)=X(p)$.

Demostración.

1. Como $F(p)=p$, entonces (por el teorema de la funcion inversa) basta ver que dF_p es invertible. Por eso, hacemos las siguientes cuentas.

   - $\left(\frac{\partial F_1}{\partial x_1}(p),\ldots,\frac{\partial F_n}{\partial x_1}(p)\right)=X(p)$.
     Si $\gamma_q=\left(\gamma_q^1,\ldots,\gamma_q^n\right)$ es la curva integral de X que pasa por q en $t=0$, entonces
     $$F_i(q_1,\ldots,q_n)=\varphi^{q_1-p_1}(p_1,q_2,\ldots,q_n)=\gamma^i_{(p_1,q_2,\ldots,q_n)}(q_1-p_1)$$
     Entonces, para toda $q=(q_1,\ldots,q_n)$
     $$\frac{\partial F_i}{\partial q_1}(q)=\left(\gamma^i_{(p_1,q_2,\ldots,q_n)}\right)'(q_1-p_1).$$
     En particular
     $$\frac{\partial F_i}{\partial q_1}(p)=\left(\gamma^i_{(p_1,\ldots,p_n)}\right)'(p_1-p_1)=\left(\gamma^i_p\right)'(0)=X_i(p)$$
     Donde la ultima igualdad se cumple porque γ_p es integral.
   - $\left(\frac{\partial F_1}{\partial x_i}(p),\ldots,\frac{\partial F_n}{\partial x_i}(p)\right)=e_i$ para toda $i>1$.
     Para todo $t\in\mathbb{R}$, sea $i^t:\mathbb{R}^{n-1}\to\mathbb{R}^n$ tal que
     $$(x_1,\ldots,x_{n-1})\mapsto(t,x_1,\ldots,x_{n-1})$$
     Por una cuenta directa, obtenemos que para todo $t\in\mathbb{R}$ y $x\in\mathbb{R}^{n+1}$,
     $$d\left(i^t\right)_x=i^0 \tag{1}$$
     Por otro lado, notemos que
     $$\begin{aligned}F\circ i^{p_1}(x_1,\ldots,x_{n-1})&=F(p_1,x_1,\ldots,x_{n-1})\\&=\varphi^{p_1-p_1}(p_1,x_1,\ldots,x_{n-1})\\&=\varphi^0(p_1,x_1,\ldots,x_{n-1})\\&=(p_1,x_1,\ldots,x_{n-1})\\&=i^{p_1}(x_1,\ldots,x_{n-1})\end{aligned}$$
     Es decir, $F\circ i^{p_1}=i^{p_1}$. De donde,
     $$dF_p\circ i^0=dF_{i^{p_1}(p_2,\ldots,p_n)}\circ d\left(i^{p_1}\right)_{(p_2,\ldots,p_n)}=d\left(i^{p_1}\right)_{(p_2,\ldots,p_n)}=i^0$$
     Donde la primera y ultima igualdad se cumplen por (1).

Usando lo anterior obtenemos,

$$dF_p = \begin{pmatrix} \frac{\partial F_1}{\partial x_1}(p) & \frac{\partial F_1}{\partial x_2}(p) & \cdots & \frac{\partial F_1}{\partial x_n}(p) \\ \frac{\partial F_2}{\partial x_1}(p) & \frac{\partial F_2}{\partial x_2}(p) & \cdots & \frac{\partial F_2}{\partial x_n}(p) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial F_n}{\partial x_1}(p) & \frac{\partial F_n}{\partial x_2}(p) & \cdots & \frac{\partial F_n}{\partial x_n}(p) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} X_1(p) & 0 & \cdots & 0 \\ X_2(p) & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ X_n(p) & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix} \tag{2}$$

Por lo tanto, $\det dF_p = X_1(p) \cdot \det \mathrm{Id}_{n-1} = X_1(p) \cdot 1 \neq 0$. En particular, dF_p es invertible.

2. Por el inciso anterior, existen vecindades U y V de p tales que $F|_U : U \to V$ es difeomorfismo. Por definicion de F_*, hay que demostrar que para toda $y \in V$,

$$dF_{F^{-1}(y)} \left(\frac{\partial}{\partial x_1} \left(F^{-1}(y) \right) \right) = X(y) \tag{3}$$

Como en $\mathbb{R}^n$, el campo $\frac{\partial}{\partial x_1}$ es el campo constante $x \mapsto e_1$, entonces demostrar (3) es equivalente a demostrar que para toda $y \in V$,

$$dF_{F^{-1}(y)}(e_1) = X(y)$$

Mas aun, esto es equivalente a demostrar que para toda $q \in U$

$$dF_q(e_1) = X\left(F(q)\right)$$

Para esto, notemos que para toda $i = 1, \ldots, n$

$$\begin{aligned} \frac{\partial F_i}{\partial q_1}(q) &= \left(\gamma^i_{(p_1,q_2,\ldots,q_n)}\right)'(q_1 - p_1) \\ &= X_i\left(\gamma_{(p_1,q_2,\ldots,q_n)}(q_1 - p_1)\right) \qquad (\gamma_{(p_1,q_2,\ldots,q_n)} \text{ es integral}) \\ &= X_i\left(F(q)\right). \end{aligned}$$

De donde,

$$\begin{aligned} dF_q(e_1) &= \left(\frac{\partial F_1}{\partial q_1}(q), \ldots, \frac{\partial F_n}{\partial q_1}(q) \right) \\ &= \left(X_1(F(q)), \ldots, X_n(F(q))\right) \\ &= X(F(q)). \end{aligned}$$

$\square$

4. Sea (M, g) una variedad riemanniana de dimension dos con conexion de Levi-Civita ∇. Suponga que M admite dos campos vectoriales X y Y independientes tales que

$$g\left(X/|X|, Y/|Y|\right) \text{ es constante, } \nabla_X X = \lambda X,\ \nabla_Y Y = \mu Y$$

donde $\lambda, \mu \in C^\infty(M)$.

1. Sean $X_1 \coloneqq X/|X|$ y $Y_1 \coloneqq Y/|Y|$. Demostrar que $\nabla_{X_1}X_1 = \nabla_{Y_1}Y_1 = 0$ y deducir que las curvas integrales de X_1 y Y_1 son geodésicas.

2. Demostrar que M tiene curvatura constante cero.
Indicacion: deducir de $g\big(X/|X|, Y/|Y|\big) = $ cte y del inciso anterior que $\nabla X_1 = \nabla Y_1 = 0$.

Demostración.

1. Simplemente calculando,

$$\begin{aligned}
\nabla_{X_1}X_1 &= \nabla_{X/|X|}\big(X/|X|\big) \\
&= \frac{1}{|X|}\nabla_X\big(X/|X|\big) \\
&= \frac{1}{|X|}\left(\frac{1}{|X|}\nabla_X X + \left(X.\left(\frac{1}{|X|}\right)\right)X\right) \\
&= \frac{1}{|X|}\left(\frac{1}{|X|}\lambda X + \left(X.\left(\frac{1}{|X|}\right)\right)X\right)
\end{aligned}$$

Por lo tanto, para ver que $\nabla_{X_1}X_1 = 0$ basta demostrar que

$$X\left(\frac{1}{|X|}\right) = -\frac{\lambda}{|X|}$$

Para esto, sean $f : M \to \mathbb{R}$, $\alpha : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $\beta : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $\gamma : M \to \mathbb{R}$ tales que

$$f(x) = \frac{1}{|X(x)|},\ \ \alpha(x) = \frac{1}{x},\ \ \beta(x) = \sqrt{x},\ \ \gamma(x) = \big\langle X(x), X(x)\big\rangle$$

Entonces, $f = \alpha \circ \beta \circ \gamma$ y para toda $x \in M$

$$\begin{aligned}
d\gamma_x\big(X(x)\big) &= (X.\gamma)(x) \\
&= X.\langle X, X\rangle(x) \\
&= \big(\langle\nabla_X X, X\rangle + \langle X, \nabla_X X\rangle\big)(x) \\
&= 2\langle\nabla_X X, X\rangle(x) \\
&= 2\langle\lambda X, X\rangle(x) \\
&= 2\lambda\langle X, X\rangle(x) \\
&= 2\lambda\big\langle X(x), X(x)\big\rangle
\end{aligned}$$

Por lo tanto,

$$
\begin{aligned}
X.\left(\frac{1}{|X|}\right)(x) &= df_x\big(X(x)\big) && \text{(por def. de } f\text{)}\\
&= d\left(\alpha\circ\beta\circ\gamma\right)_x\big(X(x)\big)\\
&= d\alpha_{\beta\circ\gamma(x)}\circ d\beta_{\gamma(x)}\circ d\gamma_x\big(X(x)\big)\\
&= \left(-\frac{1}{\big(\beta\circ\gamma(x)\big)^2}\right)\cdot\left(\frac{1}{2\sqrt{\gamma(x)}}\right)\cdot\Big(2\lambda\big\langle X(x),X(x)\big\rangle\Big)\\
&= \left(-\frac{1}{\big\langle X(x),X(x)\big\rangle}\right)\cdot\left(\frac{1}{2\sqrt{\big\langle X(x),X(x)\big\rangle}}\right)\cdot\Big(2\lambda\big\langle X(x),X(x)\big\rangle\Big)\\
&= -\frac{\lambda}{|X(x)|}
\end{aligned}
$$

De manera analoga $\nabla_{Y_1}Y_1 = 0$.

Por eso, para ver que las curvas integrales de X_1 y Y_1 son geodesicas, veamos (mas generalmente) que si $Z\in\mathfrak{X}(M)$ es tal que $\nabla_Z Z = 0$, entonces las curvas integrales de Z son geodesicas.

Supongamos que $\gamma : I \to M$ es una curva integral de Z, es decir $Z|_\gamma = \gamma'$. Entonces,

$$\frac{D\gamma'(t)}{dt} = \nabla_{\gamma'(t)}Z = \nabla_Z Z = 0$$

Donde la primera igualdad se cumple por el inciso (c) de la siguiente proposición de Do Carmo,

> 2.2 Proposition. *Let M be a differentiable manifold with an affine connection ∇. There exists a unique correspondence which associates to a vector field V along the differentiable curve $c\colon I\to M$ another vector field $\frac{DV}{dt}$ along c, called the covariant derivative of V along c, such that:*
>
> *a) $\frac{D}{dt}(V+W) = \frac{DV}{dt}+\frac{DW}{dt}$.*
>
> *b) $\frac{D}{dt}(fV) = \frac{df}{dt}V + f\frac{DV}{dt}$, where W is a vector field along c and f is a differentiable function on I.*
>
> *c) If V is induced by a vector field $Y\in\mathcal{X}(M)$, i.e., $V(t) = Y(c(t))$, then $\frac{DV}{dt} = \nabla_{dc/dt}Y$.*

Por lo tanto γ es geodésica.

2. *Recordatorio amistoso.* Supongamos que V es un espacio vectorial dos dimensional con un producto punto $\langle\cdot,\cdot\rangle$, y $x,y\in V$ son distintos de cero. Si $z\in V$ es tal que $\langle x,z\rangle = 0$ y $\langle y,z\rangle = 0$, entonces $z=0$.

   De lo contrario, es facil verificar (por casos) que $\{x,y,z\}$ seria linealmente independiente (contradiciendo que V es dos dimensional).
   Fin de recordatorio amistoso.

   Observacion. $\nabla X_1 = 0$, es decir, para toda $Z\in\mathfrak{X}(M)$, $\nabla_Z X_1 = 0$.

Como X_1 y Y_1 son independientes (recordemos que X y Y son independientes) y M es dos dimensional, entonces para todo $Z \in \mathfrak{X}(M)$ existen $a, b \in C^\infty(M)$ tales que $Z = aX_1 + bY_1$. De donde,

$$\nabla_Z X_1 = \nabla_{aX_1+bY_1} X_1 = a\cancelto{0}{\nabla_{X_1} X_1} + b\nabla_{Y_1} X_1$$

Por lo tanto, basta probar que $\nabla_{Y_1} X_1 = 0$.

Para esto, recordemos que por compatibilidad de la conexion,

$$0 = Y_1. \langle X_1, Y_1 \rangle = \langle \nabla_{Y_1} X_1, Y_1 \rangle + \langle X_1, \nabla_{Y_1} Y_1 \rangle = \langle \nabla_{Y_1} X_1, Y_1 \rangle \tag{4}$$

para todo $Z \in \mathfrak{X}(M)$. Donde la primera igualdad se cumple porque $\langle X_1, Y_1 \rangle$ es constante y la ultima porque $\nabla_{Y_1} Y_1 = 0$. Por otro lado (de nuevo por compatibilidad)

$$0 = Y_1. \langle X_1, X_1 \rangle = \langle \nabla_{Y_1} X_1, X_1 \rangle + \langle X_1, \nabla_{Y_1} X_1 \rangle = 2 \langle \nabla_{Y_1} X_1, X_1 \rangle \tag{5}$$

Juntando (4), (5), el hecho de que X_1 y Y_1 son independientes, y el recordatorio amistoso, obtenemos que $\nabla_{Y_1} X_1 = 0$.
También notemos que si invertimos los papeles de X_1 y Y_1 en el argumento anterior, vemos que $\nabla Y_1 = 0$.
Fin de observacion.

Usaremos la siguiente observacion de las notas 4.12 del semestre pasado

Observación 1. *En dimensión 2, si $K(m)$ denota la curvatura seccional definida por $T_m M$, tenemos*

$$R_m(x, y, z, t) = K(m) \left(\langle x, t \rangle \langle y, z \rangle - \langle x, z \rangle \langle y, t \rangle \right).$$

Veamos que $K(m) = 0$. Como para toda $m \in M$, $X(m)$ y $Y(m)$ son linealmente independientes (en $T_m M$), entonces $X_1(m)$ y $Y_1(m)$ tambien y por lo tanto

$$\begin{aligned}
K(m) &= \frac{R_m\big(X_1(m), Y_1(m), X_1(m), Y_1(m)\big)}{\big\|X_1(m)\big\|^2 \big\|Y_1(m)\big\|^2 - \big\langle X_1(m), Y_1(m) \big\rangle^2} \\
&= \frac{\Big\langle \Big(\nabla_{X_1} \left(\nabla_{Y_1} X_1 \right) - \nabla_{Y_1} \left(\nabla_{X_1} X_1 \right) - \nabla_{[X_1, Y_1]} X_1 \Big) (m), Y_1(m) \Big\rangle}{\big\|X_1(m)\big\|^2 \big\|Y_1(m)\big\|^2 - \big\langle X_1(m), Y_1(m) \big\rangle^2} \\
&= \frac{\big\langle 0, Y_1(m) \big\rangle}{\big\|X_1(m)\big\|^2 \big\|Y_1(m)\big\|^2 - \big\langle X_1(m), Y_1(m) \big\rangle^2} \\
&= 0
\end{aligned}$$

Donde la tercera igualdad se cumple por que $\nabla X_1 = 0$.

$\square$

Diego Leipen Lara
4180002038