1. Muestre que la aplicación

$$\begin{aligned} j : \mathbb{R}^2 &\to \mathbb{R}^3 \\ (t, \theta) &\mapsto (t\cos\theta, t\sin\theta, \theta) \end{aligned}$$

es un encaje. Denotemos por V a su imagen.

Demostración. Usaremos la siguiente proposición de las notas 1.6 del semestre pasado.

> **Proposición 2.4.** *Si $f : M \to N$ es una inmersión inyectiva propia, entonces $f : M \to N$ es un encaje.*

j es inmersión.
Consideremos,

$$\det \begin{pmatrix} \cos\theta & -t\sin\theta \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \cos\theta, \quad \det \begin{pmatrix} \sin\theta & t\cos\theta \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \sin\theta$$

Por la primera ecuación, j es inmersión en (t, θ) si $\cos\theta \neq 0$. Por la segunda ecuación, j es inmersión en (t, θ) si $\sin\theta \neq 0$. Juntando esto, j es inmersión en todo (t, θ).

j es inyectiva.
Claramente, $(t, \theta) \neq (t', \theta')$ implica $(t\cos\theta, t\sin\theta, \theta) \neq (t'\cos\theta', t'\sin\theta', \theta')$.

j es propia.
Supongamos que $K \subset \mathbb{R}^3$ es compacto. Por Heine-Borel, K es cerrado y acotado. Como j es continua, $j^{-1}(K)$ también es cerrado. Resta probar que $j^{-1}(K)$ es acotado. Supongamos que M es la cota de K, es decir, para todo $k \in K \, \|k\| \leq M$. Entonces, para toda $(t, \theta) \in j^{-1}(K)$

$$\begin{aligned} \big\|(t, \theta)\big\| = \sqrt{t^2 + \theta^2} &= \sqrt{\big(t\cos\theta\big)^2 + \big(t\sin\theta\big)^2 + \theta^2} \\ &= \big\|(t\cos\theta, t\sin\theta, \theta\big\| \\ &= \big\|j(t, \theta)\big\| \leq M \end{aligned}$$

Donde la ultima desigualdad se satisface porque $(t, \theta) \in j^{-1}(K)$. En resumen, $j^{-1}(K)$ es cerrado y acotado, o equivalentemente (por Heine-Borel), $j^{-1}(K)$ es compacto. $\square$

2. Muestre que el haz tangente $T\mathbb{S}^1$ a la circunferencia unitaria es difeomorfo a $\mathbb{S}^1 \times \mathbb{R}$.

Demostración. Antes de empezar, introducimos un poco de notación y recordamos que para toda $x \in \mathbb{S}^1$,

$$T_x\mathbb{S}^1 = \Big\{ y \in \mathbb{R}^2 \mid \langle x, y \rangle = 0 \Big\}.$$

Sean $X \in \mathfrak{X}(\mathbb{S}^1)$ y $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{S}^1$ dadas por

$$(\cos t, \sin t) \overset{X}{\longmapsto} (-\sin t, \cos t)$$
$$t \overset{\varphi}{\longmapsto} (\cos t, \sin t)$$

Entonces,

$$d\varphi_x \big(X(x)\big) = \big(-\sin t, \cos t\big) \begin{pmatrix} -\sin t \\ \cos t \end{pmatrix} = (-\sin t)^2 + (\cos t)^2 = 1 \tag{1}$$

y por lo tanto, para toda $x \in \mathbb{S}^1$ y toda $v \in T_x\mathbb{S}^1$ tenemos

$$d\varphi_x(v) \cdot X(x) = v \tag{2}$$

En efecto, como para toda $x \in \mathbb{S}^1$ $X(x) \neq 0$ y $T_x\mathbb{S}^1$ es 1-dimensional, entonces para toda $v \in T_x\mathbb{S}^1$ existe un único $\lambda \in \mathbb{R}$ tal que $v = \lambda \cdot X(x)$. Entonces,

$$d\varphi_x(v) = d\varphi_x \big(\lambda \cdot X(x)\big) = \lambda \cdot d\varphi_x \big(X(x)\big) = \lambda$$

Donde la ultima igualdad se cumple por (1).

Ahora si, procedamos con la demostración. Veamos que

$$f : \mathbb{S}^1 \times \mathbb{R} \to T\mathbb{S}^1$$
$$(x, \lambda) \mapsto \big(x, \lambda \cdot X(x)\big)$$

es un difeomorfismo.

f es suave.
Necesitamos cartas α y β de $\mathbb{S}^1 \times \mathbb{R}$ y $T\mathbb{S}^1$ en (x, λ) y $f(x, \lambda)$ tales que $\beta \circ f \circ \alpha^{-1}$ sea suave. Supongamos que $x \in \mathbb{S}^1$ y U_x es un abierto en $\mathbb{R}$ tal que $\Big(\big(\varphi|_{U_x}\big)^{-1}, \varphi\left(U_x\right)\Big)$ es carta de $\mathbb{S}^1$ en x. Definimos $\alpha \coloneqq \varphi|_{U_x} \times \mathrm{id}_{\mathbb{R}}$ y $\beta : T\mathbb{S}^1 \to \mathbb{R}^2$ dada por

$$(p, v) \overset{\beta}{\longmapsto} \big(\varphi(p), d\varphi_p(v)\big)$$

Entonces,

$$\begin{aligned} \beta \circ f \circ \alpha^{-1}(r, t) &= \beta \circ f \left(\varphi^{-1}(r), t\right) \\ &= \beta \left(\varphi^{-1}(r), tX \left(\varphi^{-1}(r)\right)\right) \\ &= \left(r, d\varphi_r \left(t \cdot X \left(\varphi^{-1}(r)\right)\right)\right) \\ &= \left(r, t \cdot d\varphi_r \left(X \left(\varphi^{-1}(r)\right)\right)\right) \end{aligned}$$

La cual es claramente suave (la segunda función coordenada es suave por definición de campo vectorial).
f tiene inversa suave. Sea $g : T\mathbb{S}^1 \to \mathbb{S}^1 \times \mathbb{R}$ tal que

$$(x, v) \overset{g}{\mapsto} \big(x, d\varphi_x(v)\big)$$

Entonces,

$$\begin{aligned} f \circ g(x, v) &= f\left(x, d\varphi_x(v)\right) = \left(x, d\varphi_x(v) \cdot X(x)\right) = (x, v) \\ g \circ f(x, \lambda) &= g\left(x, \lambda \cdot X(x)\right) = \Big(x, d\varphi_x\left(\lambda \cdot X(x)\right)\Big) = (x, \lambda) \end{aligned}$$

Donde la ultima igualdad del primer renglón se satisface por (2). Además, g es suave porque con α y β definidas de la misma manera,

$$\begin{aligned} \alpha \circ g \circ \beta^{-1}(r, t) &= \alpha \circ g\left(\varphi^{-1}(r), \left(d\varphi_{\varphi^{-1}(r)}\right)^{-1}(t)\right) \\ &= \alpha\left(\varphi^{-1}(r), d\varphi_{\varphi^{-1}(r)} \circ \left(d\varphi_{\varphi^{-1}(r)}\right)^{-1}(t)\right) \\ &= \alpha\left(\varphi^{-1}(r), t\right) = (r, t) \end{aligned}$$

□

3. Denotemos por (x, y) las coordenadas sobre $\mathbb{R}^2$. Sea $p : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2/\mathbb{Z}^2 = \mathbb{T}^2$ la proyección. Muestre que existe una única 2-forma ω sobre $\mathbb{T}^2$ tal que

$$p^*\omega = dx \wedge dy$$

¿Es esta forma cerrada? ¿Es esta forma exacta?

Demostración. Empecemos haciendo una pequeña observacion:
Si $x, x', y, y', u, u', v, v' \in \mathbb{R}$ son tales que

$$p(x, y) = p(x', y') \;\text{ y }\; dp_{(x,y)}(u, v) = dp_{(x',y')}(u', v'),$$

entonces $dp_{(x,y)} = dp_{(x',y')}$ y por lo tanto, $(u, v) = (u', v')$ (recordemos que p es difeomorfismo local).

Usando lo anterior, podemos definir ω de la siguiente manera,

$$\omega_{p(x,y)}\Big(dp_{(x,y)}(u, v), dp_{(x,y)}(u', v')\Big) := uv' - u'v$$

En otras palabras, para toda $q \in \mathbb{T}^2$ y $w, z \in T_q\mathbb{T}^2$ sea

$$\omega_q(w, z) = uv' - u'v$$

donde $q = p(x, y)$ y $w = dp_{(x,y)}(u, v)$ y $z = dp_{(x,y)}(u', v')$ (la existencia de x, y, u, v, u', v' esta garantizada por la suprayectividad de p y $dp_{(x,y)}$ respectivamente; y el hecho de que ω este bien definida es consecuencia de la observacion).

Unicidad de ω.
Veamos que p^* es inyectiva. Para esto, sean $\alpha, \beta \in \Omega^2(\mathbb{T}^2)$ tales que $p^*\alpha = p^*\beta$. Es decir, para toda $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ y $v_1, \ldots, v_k \in T_{(x,y)}\mathbb{R}^2$ tenemos

$$(p^*\alpha)_{(x,y)}(v_1, \ldots, v_k) = (p^*\beta)_{(x,y)}(v_1, \ldots, v_k)$$

Es decir,

$$\alpha_{p(x,y)}\left(dp_{(x,y)}(v_1), \ldots, dp_{(x,y)}(v_k)\right) = \beta_{p(x,y)}\left(dp_{(x,y)}(v_1), \ldots, dp_{(x,y)}(v_k)\right)$$

Como p y $dp_{(x,y)}$ son suprayectivas, la ecuación anterior implica que $\alpha = \beta$.

¿Es cerrada? ¿Es exacta?
Sea $\alpha \in \Omega^1\left(\mathbb{T}^2\right)$ tal que

$$p^*\alpha = x \cdot dy$$

El argumento para ver que α existe y esta bien definida es el mismo que usamos cuando definimos ω. De esta manera,

$$p^*(d\alpha) = d(p^*\alpha) = d(x \cdot dy) = dx \wedge dy = p^*\omega$$

Como p^* es inyectiva, $d\alpha = \omega$. Es decir, ω es exacta y en particular, también es exacta. $\square$

5. Sean M y N variedades riemannianas y $f : M \to N$ un difeomorfismo. Suponga que N es completa y que existe una constante $c > 0$ tal que

$$|v| \geq c|df_p(v)| \tag{3}$$

para todo $p \in M$ y todo $v \in T_pM$. Demuestre que M es completa.

Demostración. Usaremos el siguiente corolario de las notas 1.4 de este semestre (Teorema de Hopf-Rinow)

Corolario 1. *Sea (M,g) una variedad riemanniana conexa. Las propiedades siguientes son equivalentes:*

1. *(M,g) es geodésicamente completa.*
2. *Para todo $m \in M$, $\exp_m$ está definida sobre todo T_mM.*
3. *Existe $m \in M$ tal que $\exp_m$ está definida sobre todo T_mM.*
4. *Un conjunto cerrado y acotado de (M,d) es compacto.*
5. *(M,d) es un espacio métrico completo.*

Recordemos que la métrica d esta dada por

Definición 1. *Consideremos (M,g) una variedad riemanniana conexa. Definimos la distancia entre dos puntos $x, y \in M$ por*

$$d(x,y) = \inf\{L(\gamma),\ \gamma : [a,b] \to M,\ C^1 \text{ por pedazos t.q. } \gamma(a) = x,\ \gamma(b) = y\}.$$

Recordemos que

$$L(\gamma) := \int_a^b \sqrt{g_{\gamma(t)}(\gamma'(t), \gamma'(t))}dt$$

es la longitud de la curva γ.

Observación. Para cualquier curva γ en M

$$L(\gamma) = \int \left|\gamma'\right| dt \geq c \int \left|df_\gamma \gamma'\right| = c \cdot L(f \circ \gamma)$$

Ahora bien, sean $x, x' \in M$ y γ una curva en M tal que empieza en x y acaba en x'. Por definición, $d_N\left(f(x), f(x')\right) \leq L(f \circ \gamma)$. Multiplicando por c la desigualdad anterior, obtenemos

$$c \cdot d_N\left(f(x), f(x')\right) \leq c \cdot L(f \circ \gamma) \leq L(\gamma)$$

Como esto es cierto para toda γ que empieza en x y acaba en x', entonces $c \cdot d_N\left(f(x), f(x')\right) \leq d_M(x, x')$. Dividiendo por c obtenemos

$$d_N\left(f(x), f(x')\right) \leq \frac{1}{c} \cdot d_M(x, x') \tag{4}$$

En particular, f es una función continua entre los espacios métricos (M, d_M) y (N, d_M).
Fin de observación.

Por el corolario 1 inciso 5, basta ver que (M, d_M) es un espacio métrico completo. Para esto, sea $\{x_n\}$ una sucesión de Cauchy en M, por el lema para toda $n, m \in \mathbb{N}$

$$d_N\left(f(x_n), f(x_m)\right) \leq \frac{1}{c} \cdot d_M\left(x_n, x_n\right)$$

Entonces, $\{f(x_n)\}$ es una sucesión de Cauchy en N. Como N es completo, existe $y \in N$ tal que $f(x_n) \xrightarrow{n\to\infty} y$. Pero como f es continua, $x_n \xrightarrow{n\to\infty} f^{-1}(y)$. En resumen, toda sucesión de Cauchy en M es convergente, es decir, (M, d_M) es completo. $\square$

Diego Leipen Lara
418002038