Lema. Si $f : U \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ es diferenciable y $a \in f(U)$ es un valor regular de f entonces, $f^{-1}(a)$ es una subvariedad de dimension $n-1$.

1. Sea $a \neq 0$ y $x \in p^{-1}(a)$. Por la identidad de Euler para funciones homogeneas,

$$m \cdot a = \deg(p) \cdot p(x) = \sum_{i=1}^{m} x_i \frac{\partial p}{\partial x_i}(x)$$

Como $m \cdot a \neq 0$ entonces, $\exists i \in \{1, \cdots, n\}$ $\frac{\partial p}{\partial x_i}(x) \neq 0$. En particular, a es un valor regular de p. Por el lema, $p^{-1}(c)$ es una subvariedad de dimensión $n-1$ si $p^{-1}(c)$ no es vacío. $\square$

2. Sea $p : \mathbb{R}^{n+1} \to \mathbb{R}$ tal que $p(x, a_0, \cdots, a_{n-1}) = x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_0$. Como $\forall \hat{x} \in \mathbb{R}^{n+1}$ $\frac{\partial p}{\partial a_0}(\hat{x}) = 1$, 0 es regular. Por el lema, $\{(x, a_0, \cdots, a_{n-1}) \in \mathbb{R}^{n+1} \mid x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_0 = 0\} = p^{-1}(0)$ es una subvariedad de dimension $n-1$ y por lo tanto de codimension 1. Resta probar que $p^{-1}(0)$ es difeomorfo a $\mathbb{R}^n$. Sea $f = (f_0, \cdots, f_n) : \mathbb{R}^n \to p^{-1}(0)$ tal que

$$f(a_0, \cdots, a_{n-1}) = (a_0, -(a_0^n + a_0^{n-1}a_{n-1} + a_0^{n-2}a_{n-2} \cdots + a_0^1 a_1), a_1, \cdots, a_{n-1})$$

Como $a_0^n + a_0^{n-1}a_{n-1} + \cdots + a_0^1 a_1 - (a_0^n + a_0^{n-1}a_{n-1} + \cdots + a_0^1 a_1) = 0$, f esta bien definida. Ademas, $\forall i \in \{0, \cdots, n\}$ f_i es un polinomio y por lo tanto, f es suave. Finalmente, $\pi : p^{-1}(0) \to \mathbb{R}^n$ tal que $\pi(x_0, x_1, \cdots x_n) = (x_0, x_2, \cdots, x_n)$ es su inversa y tambien es suave. $\square$

3. Sea $p : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ tal que $p(x) = x^T A x$. Veamos que p cumple las hipotesis del ejericicio 1. Primero notemos que si $A = (a_{ij})$ y $x = (x_1, \cdots, x_n)$ entonces, como A es simetrica,

$$p(x) = \sum_{i=1}^{n} a_{ii}x_i^2 + 2\sum_{i<j} a_{ij}x_i x_j.$$

Entonces, p es un polinomio homogeneo tal que $p(tx) = t^2 p(x)$, y por lo tanto, $p^{-1}(b)$ es una subvariedad de $\mathbb{R}^n$. Ahora, veamos que $p^{-1}(b)$ es difeomorfo a $\mathbb{S}^{n-1}$. Como $x^T A x > 0$ entonces, $\frac{b}{x^T A x} \neq 0$. Mas aun, como $\sqrt{\cdot} : \mathbb{R} \setminus \{0\} \to \mathbb{R}$ es suave entonces, $\beta : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ dada por $\beta_x := \left(||x|| \sqrt{\frac{b}{x^T A x}} \right) \neq 0$ es suave. Ahora bien, sea $f : \mathbb{S}^{n-1} \to p^{-1}(b)$ tal que $f(x) = \beta_x \cdot x$. Primero notemos que f es suave (id y β son suaves) y esta bien definida pues si $x \in \mathbb{S}^{n-1}$,

$$\begin{aligned} f(x)^T A f(x) &= \left(\left(||x|| \sqrt{\frac{b}{x^T A x}} \right) \cdot x \right)^T A \left(\left(||x|| \sqrt{\frac{b}{x^T A x}} \right) \cdot x \right) \\ &= \left(\sqrt{\frac{b}{x^T A x}} \right)^2 \cdot x^T A x = \frac{b}{x^T A x} \cdot x^T A x = b. \end{aligned}$$

Por otro lado, si $g : p^{-1}(b) \to \mathbb{S}^{n-1}$ es tal que $g(x) = \frac{1}{\beta_x} \cdot x$ entonces, g es suave e inversa de f. En efecto,

$$f(g(x)) = f(\frac{1}{\beta_x} \cdot x) = \beta_x(\frac{1}{\beta_x} \cdot x) = x$$
$$g(f(x)) = g(\beta_x \cdot x) = \frac{1}{\beta_x}(\beta_x \cdot x) = x$$

Finalmente, g esta bien definida pues si $x \in p^{-1}(b)$ entonces, $x^T A x = b$ y por lo tanto, $\beta_x = ||x||$. De donde, $||g(x)|| = ||\frac{1}{||x||} \cdot x|| = 1$ y por lo tanto, $g(p^{-1}(b)) \subset \mathbb{S}^{n-1}$. $\square$

4a. Veamos que

i. f es homeomorfo a su imagen

ii. $\forall t_0, \theta_0 \in \mathbb{R}$ $df_{(t_0,\theta_0)}$ es inyectiva.

i. Claramente, f es continua. Veamos que $g : f(\mathbb{R}^2) \to \mathbb{R}^2$ dada por

$$g(x,y,z) = \begin{cases} (\frac{x}{\cos z}, z) & \text{si } \cos z \neq 0 \\ (\frac{y}{\sin z}, z) & \text{si } \sin z \neq 0 \end{cases}$$

es inversa de $f : \mathbb{R}^2 \to f(\mathbb{R}^2)$. Primero veamos que f esta bien definida. Por la identidad de Euler, $\cos z = 0$ implica $\sin z = \pm 1$. Por lo tanto, los casos son exhaustivos. Mas aun, en el caso que $\cos z \neq 0$ y $\sin z \neq 0$, $\frac{x}{\cos z} = \frac{y}{\sin z}$. En efecto, como $(x, y, z) \in f(\mathbb{R}^2)$, existen $t, \theta \in \mathbb{R}$ tales que

$$x = t\cos\theta \tag{1}$$
$$y = t\sin\theta \tag{2}$$
$$z = \theta \tag{3}$$

Despejando t de (1) y (2), igualando, y sustituyendo (3), obtenemos lo deseado. Ahora, veamos que f es continua. Como cos y sin son continuas y $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ es abierto, $\cos^{-1}(\mathbb{R} \setminus \{0\})$ y $\sin^{-1}(\mathbb{R} \setminus \{0\})$ son abiertos. La continuidad de f se sigue del lema del pegado. Ahora, veamos que g es inversa. Supongamos que $\cos z \neq 0$. El caso $\sin z \neq 0$ es análogo.

$$f \circ g(x,y,z) = f\left(\frac{x}{\cos z}, z\right) = \left(\frac{x}{\cos z}\cos z, \frac{x}{\cos z}\sin z, z\right) = (x,y,z)$$

Donde la tercera igualdad se cumple despejando t de (1) y sustituyendo en (2), es decir, $y = x\frac{\sin z}{\cos z}$. Por otro lado, sea $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ y supongamos que $\cos\theta \neq 0$. El caso $\sin\theta \neq 0$ es analogo.

$$g \circ f(t,\theta) = g(t\cos\theta, t\sin\theta, \theta) = \left(\frac{t\cos\theta}{\cos\theta}, \theta\right) = (t,\theta)$$

Por lo tanto, $g = f^{-1}$.

ii. Sea $(t_0, \theta_0) \in \mathbb{R}^2$ fijo. Derivando obtenemos,

$$\begin{aligned} df_{(t_0,\theta_0)}(t,\theta) &= \begin{pmatrix} \cos\theta_0 & -t\sin\theta_0 \\ \sin\theta_0 & t\cos\theta_0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} t \\ \theta \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} t\cos\theta_0 - \theta t_0 \sin\theta_0 \\ t\sin\theta_0 + \theta t_0\cos\theta_0 \\ \theta \end{pmatrix} \end{aligned} \tag{4}$$

Para ver que es inyectiva notemos que

$$\begin{pmatrix} t_1\cos\theta_0 - \theta_1 t_0\sin\theta_0 \\ t_1\sin\theta_0 + \theta_1 t_0\cos\theta_0 \\ \theta_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} t_2\cos\theta_0 - \theta_2 t_0\sin\theta_0 \\ t_2\sin\theta_0 + \theta_2 t_0\cos\theta_0 \\ \theta_2 \end{pmatrix}$$

implica $\theta_1 = \theta_2$. Por lo tanto, podemos cancelar el segundo sumando en cualquiera de las dos primeras ecuaciones y dividir (teniendo cuidado de que $\cos\theta_0 \neq 0$ o $\sin\theta_0 \neq 0$) para obtener $t_1 = t_2$.

4b. Afirmación: $\pi|_V$ no es submersión. Primero veamos que el espacio tangente $T_{f(0,0)}(V)$ es perpendicular al plano XY. Como f es una parametrizacion local de V al rededor de $f(0,0)$ entonces, por definición,

$$\begin{aligned} T_{f(0,0)}(V) &= df_{(0,0)}(\mathbb{R}^2) \\ &= \{df_{(0,0)}(x,y) \mid x,y \in \mathbb{R}\} \\ &= \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mid x,y \in \mathbb{R} \right\} \quad \text{(evaluando } t_0 = 0,\ \theta_0 = 0 \text{ en (4))} \\ &= \{(x,0,y) \mid x,y \in \mathbb{R}\} \\ &= XZ \end{aligned}$$

En particular, $(0,1) \notin \pi(XZ) = d(\pi|_V)_{(0,0)}(XZ)$ y por lo tanto, $d(\pi|_V)_{(0,0)} : XZ \to \mathbb{R}^2$ no es suprayectiva.

Diego Leipen Lara
418002038