18. Show that (v) does not imply (iv) in Proposition 18 by constructing a function f such that $\{x: f(x) > 0\} = E$, a given nonmeasurable set, and such that f assumes each value at most once.

Dem. Sea $f: [0,1) \to \mathbb{R}$ dada por

$$f(x) = \begin{cases} x & \text{si } x \in P \\ -x & \text{si } x \notin P \end{cases}$$

Entonces $\{x : f(x) > 0\} = P$ y f es inyectiva. QED

19. Let D be a dense set of real numbers, that is, a set of real numbers such that every interval contains an element of D. Let f be an extended real-valued function on $\mathbf{R}$ such that $\{x: f(x) > \alpha\}$ is measurable for each $\alpha \in D$. Then f is measurable.

Dem. Sea $\alpha \in \mathbb{R}$ fijo y arbitrario. Como D es denso en $\mathbb{R}$, existe $(\alpha_n) \subseteq D$ tal que $\alpha_n \to \alpha$ & $\alpha_n > \alpha$ $\forall n$. Entonces $\{x : f(x) > \alpha\} = \bigcup_{n=1}^{\infty} \{x : f(x) > \alpha_n\}$ es medible. QED

20. Show that the sum and product of two simple functions are simple.
Show that

$$\chi_{A \cap B} = \chi_A \cdot \chi_B$$
$$\chi_{A \cup B} = \chi_A + \chi_B - \chi_A \cdot \chi_B$$
$$\chi_{\tilde{A}} = 1 - \chi_A.$$

Dem. Sean $f, g : E \to \mathbb{R}$ simples. La función

$$\begin{aligned} f(E) \times g(E) &\longrightarrow \{ f(x) + g(y) \mid x, y \in E \} =: A \\ (f(x), g(y)) &\longmapsto f(x) + g(y) \end{aligned}$$

es suprayectiva. Como $f(E) \times g(E)$ es finito, esto implica que A es finito. Pero $(f+g)(E) \subseteq A$.

$\therefore$ $f+g$ es simple. Analogamente, cambiando la suma por multiplicación, $f \cdot g$ es simple.

Por otro lado, notemos que $\forall x \in \mathbb{R}$

$$(\chi_A \cdot \chi_B)(x) = \chi_A(x) \cdot \chi_B(x)$$

$$= \begin{cases} 0 & \text{si } \chi_A(x) = 0 \text{ o } \chi_B(x) = 0 \\ 1 & \text{si } \chi_A(x) = 1 = \chi_B(x) \end{cases}$$

$$= \begin{cases} 0 & \text{si } x \notin A \text{ o } x \notin B \\ 1 & \text{si } x \in A \text{ y } x \in B \end{cases}$$

$$= \chi_{A \cap B}(x).$$

Las otras dos igualdades se demuestran de manera analoga. Especificamente, desarrollamos la expresion del lado derecho dependiendo de los casos convenientes. Por ejemplo para la segunda igualdad convienen los casos $x \in A \cup B$ y $x \notin A \cup B$. QED

21. a. Let D and E be measurable sets and f a function with domain $D \cup E$. Show that f is measurable if and only if its restrictions to D and E are measurable.

b. Let f be a function with measurable domain D. Show that f is measurable iff the function g defined by $g(x) = f(x)$ for $x \varepsilon D$ and $g(x) = 0$ for $x \not\varepsilon D$ is measurable.

Dem. a) La implicacion "$\Longrightarrow$" es inmediata pues (cf p66)

If f is a measurable function and E is a measurable subset of the domain of f, then the function obtained by restricting f to E is also measurable.

Conversamente, sea $\alpha \in \mathbb{R}$. Entonces

$$\{x \in D \cup E : f(x) > \alpha\} = \{x \in D : f(x) > \alpha\} \cup \{x \in E : f(x) > \alpha\}.$$

Pero los dos conjuntos en el lado derecho son medibles por hypotesis. $\therefore$ f es medible.

b) Por la misma razón que en el inciso anterior, la implicación "$\Leftarrow$" es inmediata. El converso es consecuencia de (a) pues D^c es medible y las funciones constantes son medibles. QED

22. **a.** Let f be an extended real-valued function with measurable domain D, and let $D_1 = \{x : f(x) = \infty\}$, $D_2 = \{x : f(x) = -\infty\}$. Then f is measurable if and only if D_1 and D_2 are measurable and the restriction of f to $D \sim (D_1 \cup D_2)$ is measurable.

b. Prove that the product of two measurable extended real-valued functions is measurable.

c. If f and g are measurable extended real-valued functions and α a fixed number, then $f + g$ is measurable if we define $f + g$ to be α whenever it is of the form $\infty - \infty$ or $-\infty + \infty$.

d. Let f and g be measurable extended real-valued functions which are finite almost everywhere. Then $f + g$ is measurable no matter how it is defined at points where it has the form $\infty - \infty$.

Dem. a) $\underline{\Rightarrow)}$ D_1 y D_2 son medibles por el inciso (v) de la Prop 18. En particular $D \setminus (D_1 \cup D_2)$ es medible y $\therefore$ $f\restriction_{D \setminus (D_1 \cup D_2)}$ es medible.

$\underline{\Leftarrow)}$ Sea $\alpha \in \mathbb{R}$. Entonces

$$\{x : f(x) > \alpha\} = \{x \in D \setminus (D_1 \cup D_2) : f(x) > \alpha\} \cup D_1$$

es medible.

b) Sean $f, g : D \to \overline{\mathbb{R}}$ medibles. Denotemos

$D_1 := \{x : f(x)g(x) = +\infty\}$ y $D_2 := \{x : f(x)g(x) = -\infty\}$

Por la Prop 19, $f\restriction_{D \setminus (D_1 \cup D_2)}$ es medible. Además

$$D_1 = [\{x : f(x) = +\infty\} \cap \{x : g(x) = +\infty\}] \cup [\{x : f(x) = -\infty\} \cap \{x : g(x) = -\infty\}].$$

es medible. Analogamente, D_2 es medible.

Usando esto y (a) obtenemos que fg es medible.

c) Sea $A = \left[\{ x : f(x) = +\infty \} \cap \{ x : g(x) = -\infty \} \right] \cup$
$\left[\{ x : f(x) = -\infty \} \cap \{ x : g(x) = +\infty \} \right]$

Entonces A es medible. Veamos que la funcion

$$(f+g)_\alpha (x) = \begin{cases} f(x)+g(x) & \text{si } x \notin A \\ \alpha & \text{si } x \in A \end{cases}$$

es medible. Por el ejercicio 21 basta ver que $(f+g)_\alpha \restriction_A$ y $(f+g)_\alpha \restriction_{A^c}$ son medibles. Primero notemos que $(f+g)_\alpha \restriction_A$ es medible pues es constante. Ahora bien, denotemos

$D_1 = \{ x \in A^c : f(x)+g(x) = +\infty \}$ y $D_2 = \{ x \in A^c : f(x)+g(x) = -\infty \}$

Entonces $D_1 = \{ x \in A^c : f(x) = +\infty \} \cap \{ x \in A^c : g(x) = +\infty \}$

es medible y analogamente D_2 es medible. Además, por la Prop 19, $(f+g)_\alpha \restriction_{A^c \setminus (D_1 \cup D_2)}$ es medible.

Luego, por (a), $(f+g)_\alpha \restriction_{A^c}$ es medible.

d) Sean $f, g : D \to \overline{\mathbb{R}}$ medibles. Denotemos

$A = \{ x : f(x) \text{ es finito} \}$ y $B = \{ x : g(x) \text{ es finito} \}$.

Sea $\varphi : D \to \overline{\mathbb{R}}$ tal que $\varphi \restriction_{A \cap B} (x) = f(x) + g(x)$.

Sea $\alpha \in \mathbb{R}$. Entonces $\{ x : \varphi(x) > \alpha \} =$

$\{ x \in A \cap B : \varphi(x) > \alpha \} \cup \{ x \in (A \cap B)^c : \varphi(x) > \alpha \}$.

Como f y g solo toman valores finitos en $A \cap B$ y $\varphi\restriction_{A\cap B}(x) = f(x)+g(x)$, la Prop 19 implica que el primer conjunto del lado derecho es medible. El segundo también es medible porque por hipótesis tiene medida 0. $\therefore$ φ es medible. QED

23. Prove Proposition 22 by establishing the following lemmas:

a. Given a measurable function f on $[a, b]$ which takes the values $\pm\infty$ only on a set of measure zero, and given $\epsilon > 0$, there is an M such that $|f| \leq M$ except on a set of measure less than $\epsilon/3$.

b. Let f be a measurable function on $[a, b]$. Given $\epsilon > 0$ and M, there is a simple function φ such that $|f(x) - \varphi(x)| < \epsilon$ except where $|f(x)| \geq M$. If $m \leq f \leq M$, then we may take φ so that $m \leq \varphi \leq M$.

c. Given a simple function φ on $[a, b]$, there is a step function g on $[a, b]$ such that $g(x) = \varphi(x)$ except on a set of measure less than $\epsilon/3$. [Hint: Use Proposition 15.] If $m \leq \varphi \leq M$, then we can take g so that $m \leq g \leq M$.

d. Given a step function g on $[a, b]$, there is a continuous function h such that $g(x) = h(x)$ except on a set of measure less than $\epsilon/3$. If $m \leq g \leq M$, then we may take h so that $m \leq h \leq M$.

Dem. a) Como $\bigcap_n \{x : |f(x)| \geq n\} = \{x : f(x) = \pm\infty\}$, entonces $\lim_{n\to\infty} m\{x : |f(x)| \geq n\} = m\{x : f(x) = \pm\infty\} = 0$.
En particular $\forall \varepsilon > 0\ \exists M$ $\cdot)\cdot$ $m\{x : |f(x)| \geq M\} < \varepsilon/3$.

b) Sea $\varepsilon > 0$ y $M > 0$. SPG, supongamos que $\varepsilon << M$.
Ahora consideremos el intervalo $[-M, M]$ y una partición $-M = \alpha_0 < \alpha_1 < \cdots < \alpha_n = M$ tal que $\alpha_{i+1} - \alpha_i < \varepsilon$. Denotemos $I_i = [\alpha_{i-1}, \alpha_i]$, $i = 1, \ldots, n$.
Entonces

$\{x : |f(x)| \leq M\} = \bigcup_i f^{-1}(I_i)$ y $\quad \cdots (1)$

$\forall i \ \forall x,y \in f^{-1}(I_i)$, $|f(x) - f(y)| < \varepsilon$ (pues $\ell(I_i) = \varepsilon$). $\quad \cdots (2)$

Además, $\forall i \ \exists \xi_i \in f^{-1}(I_i)$ / $f(\xi_i)$ es finito, pues de lo contrario, $m\{x : f(x) = \pm\infty\} > 0$. Sea $\varphi : [a,b] \to \mathbb{R}$ dada por

$$\varphi(x) = \begin{cases} f(\xi_i) & \text{si } x \in f^{-1}(I_i) \\ 0 & \text{si } x \in [a,b] \setminus \bigcup_i f^{-1}(I_i) = [a,b] \setminus f^{-1}([-M,M]) \end{cases}$$

$$= \begin{cases} f(\xi_i) & \text{si } x \in f^{-1}(I_i) \\ 0 & \text{si } |f(x)| > M \end{cases}$$

Claramente φ es simple. Sea $x \in [a,b]$ tal que $|f(x)| \leq M$. Por (1) existe i / $x \in f^{-1}(I_i)$ y por (2), $|\varphi(x) - f(x)| = |f(\xi_i) - f(x)| < \varepsilon$.

c) Sea φ simple y denotemos $\varphi([a,b]) = \{\eta_1, \ldots, \eta_n\}$. Como φ es medible, $\varphi^{-1}(\{\eta_i\})$ es medible $\forall i$. Entonces por la Prop 15 para cada i existe una unión finita de intervalos abiertos $\mathcal{U}_i$ tal que $m(\mathcal{U}_i \,\Delta\, \varphi^{-1}(\{\eta_i\})) < \frac{\varepsilon}{3n}$.

Sea $\eta_0 \in \mathbb{R}$ / $\eta_0 \neq \eta_i \ \forall i$. Definimos

$$g(x) = \begin{cases} \varphi(\eta_i) & \text{si } x \in \mathcal{U}_i \setminus \bigcup_{j=1}^{i-1} \mathcal{U}_j, \\ \eta_0 & \text{si } x \in [a,b] \setminus \bigcup_{i=1}^{n} \mathcal{U}_i. \end{cases}$$

Entonces g es una función escalonada y

$\{x : g(x) \neq \varphi(x)\} \subseteq \bigcup_{i=1}^{n} (U_i \,\Delta\, \varphi^{-1}(\{\eta_i\})) \quad \cdots \quad (1)$

En efecto, sea x tal que $g(x) \neq \varphi(x)$.

<u>Caso 1</u> $x \in [a,b] \setminus \bigcup_{i=1}^{n} U_i$.

Como $[a,b] = \bigcup_{i=1}^{n} \varphi^{-1}(\{\eta_i\})$, existe i_0 tal que $x \in \varphi^{-1}(\{\eta_{i_0}\})$. Pero por el caso en el que estamos, también

$$x \in \varphi^{-1}(\{\eta_{i_0}\}) \setminus U_{i_0} \subseteq \varphi^{-1}(\{\eta_{i_0}\}) \,\Delta\, U_{i_0} \subseteq \bigcup_{i=1}^{n} (\varphi^{-1}(\{\eta_i\}) \,\Delta\, U_i).$$

<u>Caso 2</u> $x \in \bigcup_{i=1}^{n} U_i$.

Sea i_1 tal que $x \in U_{i_1}$ y sea i_2 tal que $x \in \varphi^{-1}(\{\eta_{i_2}\})$.

Si $i_1 \neq i_2$, ent. $x \in U_{i_1} \setminus \varphi^{-1}(\{\eta_{i_1}\}) \subseteq \bigcup_{i=1}^{n} (U_i \,\Delta\, \varphi^{-1}(\{\eta_i\}))$.

Si $i_1 = i_2$, ent. $x \notin U_{i_1} \setminus \bigcup_{j=1}^{i_1-1} U_j$. (De lo contrario, $g(x) \overset{\text{def de } g}{=} \varphi(\eta_{i_1}) \overset{i_1 = i_2}{=} \varphi(\eta_{i_2}) \overset{x \in \varphi^{-1}(\{\eta_{i_2}\})}{=} \varphi(x)$.)

En particular $x \in U_{j_0}$ para algún $j_0 < i_1$. Más aún, como $x \in \varphi^{-1}(\{\eta_{i_2}\})$, entonces $x \notin \varphi^{-1}(\{\eta_{j_0}\})$ (pues $j_0 \neq i_1 = i_2$). Por lo tanto,

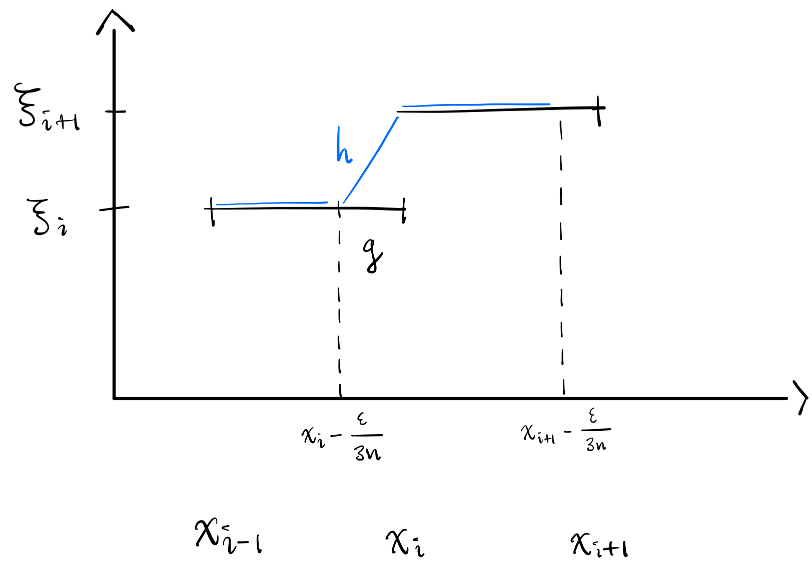
$$x \in U_{j_0} \setminus \varphi^{-1}(\{\eta_{j_0}\}) \subseteq \bigcup_{i=1}^{n} (U_i \,\Delta\, \varphi^{-1}(\{\eta_i\})).$$

Esto concluye la demostración de (1). De donde,

$$m\{x : g(x) \neq \varphi(x)\} \leq \sum_{i=1}^{n} m(U_i \,\Delta\, \varphi^{-1}(\{\eta_i\})) < \sum_{i=1}^{n} \frac{\varepsilon}{3n} = \frac{\varepsilon}{3}.$$

QED

d) Sea $g : [a,b] \to \mathbb{R}$ escalonada. Mas aun, sean $a = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = b$ tales que g es constante ξ_i sobre (x_{i-1}, x_i). Para cada i, consideremos la partición $x_{i-1} < x_i - \frac{\varepsilon}{3n} < x_{i+1}$. Definimos $h : [a,b] \to \mathbb{R}$ por $h(x) = g(x)$ si $x \in \left(x_{i-1}, x_i - \frac{\varepsilon}{3n}\right)$ y h es el segmento de recta que conecta los puntos $\left(x_i - \frac{\varepsilon}{3n}, \xi_i\right)$ y $(x_i, \xi_{i+1}) \in \mathbb{R}^2$



Por lo tanto g y h sólo no coinciden en n intervalos de longitud $\frac{\varepsilon}{3n}$. QED

24. Let f be measurable and B a Borel set. Then $f^{-1}[B]$ is a measurable set. [Hint: The class of sets for which $f^{-1}[E]$ is measurable is a σ-algebra.]

Dem. Sean $a, b \in \mathbb{R}$ con $a < b$. Entonces

$$f^{-1}[(a,b)] = f^{-1}[(-\infty, b)] \cap f^{-1}[(a, \infty)]$$

es medible. Como todo abierto es una unión numerable de intervalos, lo anterior implica que

$$\{U : U \text{ es abierto}\} \subseteq \{E : f^{-1}[E] \text{ es medible}\}$$

Pero por el hint, $\{E : f^{-1}[E] \text{ es medible}\}$ es una σ-algebra y

$$\therefore \{B : B \text{ es de Borel}\} \subseteq \{E : f^{-1}[E] \text{ es medible}\}.$$ QED

25. Show that if f is a meaurable real-valued function and g a continuous function defined on $(-\infty, \infty)$, then $g \circ f$ is measurable.

Dem. Sea $\alpha \in \mathbb{R}$. Entonces

$$\{x : g \circ f(x) > \alpha\} = (g \circ f)^{-1}[(\alpha, \infty)] = f^{-1}[g^{-1}[(\alpha, \infty)]]$$

es medible pues $g^{-1}[(\alpha, \infty)]$ es abierto (pues g es continua). QED

26. *Borel measurability.* A function f is said to be **Borel measurable** if for each α the set $\{x : f(x) > \alpha\}$ is a Borel set. Verify that Propositions 18 and 19 and Theorem 20 remain valid if we replace "measurable set" by "Borel set" and "(Lebesgue) measurable" by "Borel measurable." Every Borel measurable function is Lebesgue measurable. If f is Borel measurable, and B is a Borel set, then $f^{-1}[B]$ is a Borel set. If f and g are Borel measurable, so is $f \circ g$. If f is Borel measurable and g is Lebesgue measurable, then $f \circ g$ is Lebesgue measurable.

Dem. Intercambiando "conjunto medible" por "Boreliano" y "(Lebesgue) medible" por "Borel medible" en las demostraciones de las proposiciones 18 y 19 y del teorema 20 obtenemos los argumentos deseados. Esto es consecuencia de que todos los argumentos están basados en que la familia $\mathfrak{M}$ de conjuntos medibles es una σ-algebra.

* Toda función Borel medible es Lebesgue medible:

Como todo abierto es medible y $\mathfrak{M}$ es una σ-algebra, entonces $\mathfrak{M}$ contiene a la σ-algebra generada por la familia de conjuntos abiertos. Es decir, todo Boreliano es medible. En particular toda función Borel medible es Lebesgue medible.

* Si f es Borel medible y B es Boreliano, entonces $f^{-1}[B]$ es Boreliano: El argumento es análogo al del ejercicio 24.

* Si f y g son Borel medibles, entonces $f \circ g$ también:

Sea $\alpha \in \mathbb{R}$. Entonces (α, ∞) es Boreliano y

$$\{x : f\circ g(x) > \alpha\} = (f\circ g)^{-1}[(\alpha,\infty)] = g^{-1}[f^{-1}[(\alpha,\infty)]]$$

es Boreliano por la preimagen de un Boreliano bajo una función Borel medible es un Boreliano.

* Si f es Borel medible y g es Lebesgue medible, entonces $f \circ g$ es Lebesgue medible: Sea $\alpha \in \mathbb{R}$, entonces

$$\{x : f \circ g(x) > \alpha\} = (f \circ g)^{-1}[(\alpha, \infty)]$$
$$= g^{-1}[\underbrace{f^{-1}[(\alpha, \infty)]}_{\text{Boreliano}}]$$

es medible por la preimagen de un Boreliano bajo una funcion Lebesgue medible es medible. QED

27. How much of the preceding problem can be carried out if we replace the class $\mathcal{B}$ of Borel sets by an arbitrary σ-algebra $\mathcal{A}$ of sets?

Sea $\mathcal{A}$ una σ-algebra. Decimos que f es $\mathcal{A}$-medible si $\{x : f(x) > \alpha\} \in \mathcal{A}$ $\forall \alpha \in \mathbb{R}$.

Las proposiciones 18 y 19 y el teorema 20 seguirian siendo ciertas para funciones $\mathcal{A}$-medibles por la misma razon que explicamos en el ejercicio anterior.

* Toda funcion $\mathcal{A}$-medible es Lebesgue medible: Necesitariamos $\mathcal{A} \subseteq \{E : E \text{ es Lebesgue medible}\}$.

* Si f es $\mathcal{A}$-medible y $A \in \mathcal{A}$ entonces $f^{-1}[A] \in \mathcal{A}$: Necesitariamos que $\mathcal{A}$ contenga a todos los conjuntos de la forma (α, ∞). Equivalentemente, contendria a todos los Borelianos.

Para las otras dos propiedades de composición de funciones, de nuevo se necesitaría $\{B \mid B$ es de Borel$\} \subseteq \mathcal{A}$. $\lrcorner$

<u>Lema.</u> Sean $K_1, K_2 \subseteq \mathbb{R}$ compactos. Sea $f: K_1 \to K_2$ continua y biyectiva. Entonces f es un homeomorfismo.

Dem. Sea $\mathcal{U} \subseteq K_1$ abierto (en K_1). Entonces $K_1 \setminus \mathcal{U}$ es cerrado (en K_1). Como también es acotado (pues K_1 lo es por Heine-Borel), entonces $K_1 \setminus \mathcal{U}$ es compacto. Entonces $f[K_1 \setminus \mathcal{U}]$ es compacto (La imagen de compactos bajo continuas es compacta.) y en particular cerrado. Pero $f[K_1 \setminus \mathcal{U}] \overset{f \text{ es biy.}}{=} K_2 \setminus f[\mathcal{U}]$ y $\therefore$ $f[\mathcal{U}]$ es abierto (en K_2), i.e. f^{-1} es continua. QED

28. Let f_1 be the Cantor ternary function (cf. Problem 2.46), and define f by $f(x) = f_1(x) + x$.

a. Show that f is a homeomorphism of $[0, 1]$ onto $[0, 2]$.

b. Show that f maps the Cantor set onto a set F of measure 1.

c. Let $g = f^{-1}$. Show that there is a measurable set A such that $g^{-1}[A]$ is not measurable.

d. Give an example of a continuous function g and a measurable function h such that $h \circ g$ is not measurable. Compare with Problems 25 and 26.

e. Show that there is a measurable set which is not a Borel set.

a) En el ejercicio 2.46 vimos que f_1 es continua y monótona (creciente) en el intervalo $[0,1]$. Por lo tanto, f es continua (suma de continuas) y estrictamente creciente. En particular, f es inyectiva. Más aún, como $f(0) = 0$ y $f(1) = 2$, el Teorema del Valor Intermedio implica que

f es sobre. Entonces $f:[0,1]\to[0,2]$ es biyectiva.

$\therefore$ El lema implica que f^{-1} es un homeomorfismo.

b) Denotemos por $I_n^1,\dots,I_n^{2^{n-1}}$ a los intervalos (de longitud 3^{-n}) que quitamos en el n-ésimo paso de la construcción del conjunto de Cantor. Entonces $[0,1]\setminus C=\bigcup_{n=1}^\infty\bigcup_{k=1}^{2^{n-1}} I_n^k$ y $\sum_{k=1}^{2^{n-1}} mI_n^k=\sum_{k=1}^{2^{n-1}}3^{-n}=2^{n-1}3^{-n}$. De donde,

$$m f[[0,1]\setminus C] = m f\left[\bigcup_{n=1}^\infty\bigcup_{k=1}^{2^{n-1}} I_n^k\right]$$

$$\overset{f \text{ es biy.}}{=} m\left(\bigcup_{n=1}^\infty\bigcup_{k=1}^{2^{n-1}} f[I_n^k]\right) = \sum_{n=1}^\infty\sum_{k=1}^{2^{n-1}} mf[I_n^k]$$

$$\overset{(*)}{=} \sum_{n=1}^\infty\sum_{k=1}^{2^{n-1}} mI_n^k = \sum_{n=1}^\infty 2^{n-1}3^{-n} = \frac{1}{3}\left(\frac{1}{1-\frac{2}{3}}\right) = 1.$$

Donde la igualdad $(*)$ es porque f_1 es constante en $[0,1]\setminus C$.

Pero $2=m[0,2]=mf[[0,1]\setminus C]+mf[C]$ y

$\therefore$ $mf[C]=1$.

c) Como $mf[C]=1>0$, existe $E\subseteq f[C]$ no medible. Sea $A:=f^{-1}[E]$. Entonces $A\subseteq C$ (pues f es biyección). De donde $m^*A\leq m^*C=0$.

$\therefore$ A es medible pero $f[A]=E$ no lo es.

d) Sea A como en (c). Sea $g=f^{-1}$ y $h=\chi_A$. Entonces $(h\circ g)^{-1}[\mathbb{R}] = g^{-1}[h^{-1}[\mathbb{R}]] = f[A]$ es no medible.

e) Sea A como en (c). Si A fuera Boreliano, $f^{-1}[A]$ sería medible pues f^{-1} es continua y en particular medible (cf. Ej 24). QED

29. Give an example to show that we must require $mE < \infty$ in Proposition 23.

Dem. Sea $f_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dada por $f_n(x) := x \chi_{[n,n+1)}(x)$.
Claramente $f_n(x) \to 0$ para todo $x \in \mathbb{R}$. Ahora bien, sea $\varepsilon := 1$ y $\delta > 0$. Mas aun, sea $N \in \mathbb{N}$ y $A \subseteq \mathbb{R}$ con $mA < \delta$. Como $mA < \delta < \infty$, existe $x \geq N$ tal que $x \notin A$ (de lo contrario, $(N, \infty) \subseteq A$, contradiciendo $mA < \infty$). Entonces $\lfloor x \rfloor \geq N$ y
$|f_{\lfloor x \rfloor}(x) - f(x)| = |x - 0| = x \geq N \geq 1$. QED

30. Prove *Egoroff's Theorem:* If $\langle f_n \rangle$ is a sequence of measurable functions which converge to a real-valued function f a.e. on a measurable set E of finite measure, then, given $\eta > 0$, there is a subset $A \subset E$ with $mA < \eta$ such that f_n converges to f *uniformly* on $E \sim A$. [Hint: Apply Proposition 24 repeatedly with $\epsilon_n = 1/n$ and $\delta_n = 2^{-n}\eta$.]

Dem. Siguiendo la sugerencia,
$\forall n \in \mathbb{N} \; \exists A_n \subseteq E \; \exists N_n \in \mathbb{N}$ t.q. (i) $mA_n < \delta_n = 2^{-n}\eta$,
(ii) $\forall x \in E \setminus A_n \; \forall k \geq N_n \; |f_k(x) - f(x)| < \varepsilon_n = \frac{1}{n}$.
Sea $A := \bigcup_n A_n$. Entonces $mA \leq \sum_n mA_n < \sum 2^{-n}\eta = \eta$.
Veamos que $f_n \xrightarrow{unif} f$ en $E \setminus A$. Sea $\varepsilon > 0$. Sea $n_\varepsilon \in \mathbb{N}$ tal que $\frac{1}{n_\varepsilon} < \varepsilon$. Entonces $\forall x \in E \setminus A_{n_\varepsilon} \; \forall k \geq N_{n_\varepsilon}$
$|f_k(x) - f(x)| < \frac{1}{n_\varepsilon} = \varepsilon$. En particular, como $A_{n_\varepsilon} \subseteq A$, esto es cierto $\forall x \in E \setminus A$. QED

31. Prove *Lusin's Theorem:* Let f be a measurable real-valued function on an interval $[a, b]$. Then given $\delta > 0$, there is a continuous function φ on $[a, b]$ such that $m\{x: f(x) \neq \varphi(x)\} < \delta$. Can you do the same on the interval $(-\infty, \infty)$? [Hint: Use Egoroff's theorem, Propositions 15 and 22, and Problem 2.39.]

Dem. Siguiendo la sugerencia, recordemos

15. Proposition: *Let E be a given set. Then the following five statements are equivalent:*

i. *E is measurable;*
ii. *given $\epsilon > 0$, there is an open set $O \supset E$ with $m^*(O \sim E) < \epsilon$;*
iii. *given $\epsilon > 0$, there is a closed set $F \subset E$ with $m^*(E \sim F) < \epsilon$;*
iv. *there is a G in $\mathfrak{G}_\delta$ with $E \subset G$, $m^*(G \sim E) = 0$;*
v. *there is an F in $\mathfrak{F}_\sigma$ with $F \subset E$, $m^*(E \sim F) = 0$;*

If m^*E is finite, the above statements are equivalent to:

vi. *given $\epsilon > 0$, there is a finite union U of open intervals such that $m^*(U \triangle E) < \epsilon$.*

22. Proposition: *Let f be a measurable function defined on an interval $[a, b]$, and assume that f takes the values $\pm\infty$ only on a set of measure zero. Then given $\epsilon > 0$, we can find a step function g and a continuous function h such that*

$$|f - g| < \epsilon \quad \text{and} \quad |f - h| < \epsilon$$

except on a set of measure less than ϵ; i.e. $m\{x: |f(x) - g(x)| \geq \epsilon\} < \epsilon$ and $m\{x: |f(x) - h(x)| \geq \epsilon\} < \epsilon$. If in addition $m \leq f \leq M$, then we may choose the functions g and h so that $m \leq g \leq M$ and $m \leq h \leq M$.

39. Let F be a closed set of real numbers and f a real-valued function which is defined and continuous on F. Show that there is a function g defined and continuous on $(-\infty, \infty)$ such that $f(x) = g(x)$ for each $x \in F$. [Hint: Take g to be linear in each of the intervals of which $\tilde{F}$ is composed.]

Por la prop 22, $\forall n \in \mathbb{N}$ $\exists h_n$ continua en $[a,b]$ tal que $m\{x : |f(x) - h_n(x)| \geq \frac{\delta}{2^{n+2}}\} < \frac{\delta}{2^{n+2}}$. Denotemos $F_n := \{x : |f(x) - h_n(x)| \geq \frac{\delta}{2^{n+2}}\}$. Entonces

$|f(x) - h_n(x)| < \frac{\delta}{2^{n+2}}$ $\forall x \in [a,b] \setminus \bigcup_{n=1}^{\infty} F_n$.

En particular, $h_n(x) \to f(x)$ $\forall x \in [a,b] \setminus \bigcup_{n=1}^{\infty} F_n$.

Como $m([a,b] \setminus \bigcup_{n=1}^{\infty} F_n) < \infty$, lo anterior y Egoroff implican que $\exists F_0 \subseteq [a,b] \setminus \bigcup_{n=1}^{\infty} F_n$ tal que $mF_0 < \frac{\delta}{2^{0+2}}$ y $h_n \xrightarrow{unif} f$ en $([a,b] \setminus \bigcup_{n=1}^{\infty} F_n) \setminus F_0 = [a,b] \setminus \bigcup_{n=0}^{\infty} F_n$. En particular como las h_n son continuas y convergencia unif preserva continuidad, entonces f es continua en $[a,b] \setminus \bigcup_{n=0}^{\infty} F_n$.

Por otro lado, como $[a,b] \setminus \bigcup_{n=0}^{\infty} F_n$ es medible, la Prop 15 implica la existencia de un cerrado $F \subseteq [a,b] \setminus \bigcup_{n=0}^{\infty} F_n$ tal que

$$m\left\{\left([a,b] \setminus \bigcup_{n=0}^{\infty} F_n\right) \setminus F\right\} < \frac{\delta}{2}.$$

En particular $f\restriction_F$ es una funcion continua con dominio cerrado. Entonces por el ejercicio 2.39, existe una extension continua φ de $f\restriction_F$ a todo $\mathbb{R}$. Ademas,

$$\{x : f(x) \neq \varphi(x)\} \subseteq [a,b] \setminus F = \left(\left([a,b] \setminus \bigcup_{n=0}^{\infty} F_n\right) \cup \bigcup_{n=0}^{\infty} F_n\right) \setminus F \subseteq \left(\left([a,b] \setminus \bigcup_{n=0}^{\infty} F_n\right) \setminus F\right) \cup \bigcup_{n=0}^{\infty} F_n.$$

De donde,

$$m\{x : f(x) \neq \varphi(x)\} \leq m\left\{\left([a,b] \setminus \bigcup_{n=0}^{\infty} F_n\right) \setminus F\right\} + \sum_{n=0}^{\infty} mF_n < \frac{\delta}{2} + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\delta}{2^{n+2}} = \frac{\delta}{2} + \frac{\delta}{2} = \delta.$$

QED

32. Show that Proposition 23 need not be true if the integer variable n is replaced by a real variable t; that is, construct a family $\langle f_t \rangle$ of measurable real-valued functions on $[0, 1]$ such that for each x we have $\lim_{t \to 0} f_t(x) = 0$, but for some $\delta > 0$ we have $m^*\{x : f_t(x) > \frac{1}{2}\} > \delta$. Hint: Let P_i be the sets in Section 4. For $2^{-i-1} \leq t < 2^{-i}$ define f_t by

$$f_t(x) = \begin{cases} 1 & \text{if } x \in P_i \text{ and } x = 2^{i+1}t - 1 \\ 0 & \text{otherwise.} \end{cases}$$