Tarea 2

Diego Leipen Lara

Metodos Variacionales

1. Prueba que si $J : H \to \mathbb{R}$ es una función de clase $\mathcal{C}^1$, $\mathcal{M}$ es una subvariedad clase $\mathcal{C}^1$ de H, y u es un mínimo (o un máximo) de $J|_{\mathcal{M}}$, entonces u es un punto crítico de $J|_{\mathcal{M}}$.

Demostración. Supongamos que u es un mínimo de $J|_{\mathcal{M}}$. Sea $v \in T_u\mathcal{M}$ y sea $\tau : (-\epsilon, \epsilon) \to H$ de clase $\mathcal{C}^1$ tal que $\tau(0) = u$, $\tau'(0) = v$, y $\tau(t) \in \mathcal{M}$ para todo $t \in (-\epsilon, \epsilon)$. Entonces

$$J \circ \tau(0) = J(\tau(0)) = J(u) \leq J(\tau(t)) = J \circ \tau(t) \text{ para todo } t \in (-\epsilon, \epsilon).$$

(Donde la desigualdad se cumple porque $\tau(t) \in \mathcal{M}$ y u es mínimo de $J|_{\mathcal{M}}$.) En otras palabras, 0 es mínimo de $J \circ \tau : (-\epsilon, \epsilon) \to \mathbb{R}$. En particular, $(J \circ \tau)'(0) = 0$. Por lo tanto,

$$\langle \nabla J(u), v \rangle = \langle \nabla J(u), \tau'(0) \rangle = J'(u)\tau'(0) = J'(\tau(0))\tau'(0) = (J \circ \tau)'(0) = 0.$$

Es decir, u es un punto crítico de $J|_{\mathcal{M}}$. La demostración para u máximo es análoga. $\square$

Usaremos los siguientes resultados para probar el ejercicio 2.

Lema 1. Si E es de Banach y $u \in E$ es tal que $f(u) = 0$ para todo $f \in \mathcal{B}(E, \mathbb{R})$, entonces $u = 0$.

Demostración. La siguiente afirmación[1] es un corolario del teorema de Hahn-Banach.

Para todo $u \in E$ existe $f_u \in \mathcal{B}(E, \mathbb{R})$ tal que $f_u(u) = ||u||$.

En particular (por hipotesis), $0 = f_u(u) = ||u||$. Por lo tanto, $u = 0$. $\square$

Definición 1. Sea E de Banach y $(u_k) \subset E$. Decimos que (u_k) converge débilmente a $u \in E$ si $f(u_k) \to f(u)$ en $\mathbb{R}$ para todo $f \in \mathcal{B}(E, \mathbb{R})$. (Observemos que por continuidad de las $f \in \mathcal{B}(E, \mathbb{R})$, convergencia usual implica convergencia débil.)

Lema 2. Si E es de Banach y $(u_k) \subset E$ converge débilmente, entonces su limite débil es único.

Demostración. Supongamos que (u_k) converge debilmente a u y a v. Entonces

$$0 = f(u_k) - f(u_k) \to f(u) - f(v) = f(u - v) \text{ para todo } f \in \mathcal{B}(E, \mathbb{R}).$$

Por el lema 1, esto implica que $u - v = 0$. $\square$

El siguiente resultado demuestra que cuando el espacio es de Hilbert, el concepto de convergencia débil definido anteriormente coincide la Definición 1.54 de las notas del curso. Cabe recalcar que en lo que sigue usaremos la notación $u_k \rightharpoonup u$ exclusivamente como se define en la Definición 1.54.

Lema 3. Si H es de Hilbert, entonces $u_k \rightharpoonup u$ en H si y solo si $f(u_k) \to f(u)$ en $\mathbb{R}$ para todo $f \in \mathcal{B}(H, \mathbb{R})$.

[1] cf. Bressan, Lecture Notes on Functional Analysis, Corollary 2.32, p.30.

Demostración. Supongamos que $u_k \rightharpoonup u$ en H y que $f \in \mathcal{B}(H, \mathbb{R})$. Por el teorema de representación de Fréchet-Riesz, existe un único $v_0 \in H$ tal que $f(v) = \langle v, v_0 \rangle$ para todo $v \in H$. Por lo tanto, (como $u_k \rightharpoonup u$)

$$f(u_k) = \langle u_k, v_0 \rangle \to \langle u, v_0 \rangle = f(u).$$

Conversamente, para cada $v \in H$ sea $f_v(u) = \langle u, v \rangle$. Claramente $f_v \in \mathcal{B}(H, \mathbb{R})$ y entonces (por hipótesis)

$$\langle u_k, v \rangle = f_v(u_k) \to f_v(u) = \langle u, v \rangle \text{ para todo } v \in H.$$

Es decir, $u_k \rightharpoonup u$. □

Lema 4. Sea H de Hilbert, E de Banach, y $T \in \mathcal{B}(H, E)$. Si $u_k \rightharpoonup u$ en H, entonces (Tu_k) converge debilmente a Tu en E.

Demostración. Sea $f \in \mathcal{B}(E, \mathbb{R})$ arbitrario. Entonces $f \circ T \in \mathcal{B}(H, \mathbb{R})$. Como $u_k \rightharpoonup u$, por el Lema 3,

$$f(Tu_k) = f \circ T(u_k) \to f \circ T(u) = f(Tu).$$

Como $f \in \mathcal{B}(E, \mathbb{R})$ es arbitrario, acabamos de demostrar que (Tu_k) converge débilmente a Tu en E. □

2. Sea $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ abierto, (u_k) una sucesión en $H_0^1(\Omega)$, y $p \in [2, 2^*]$ tales que

$$u_k \rightharpoonup u \text{ débilmente en } H_0^1(\Omega), \tag{1}$$

$$u_k \to v \text{ fuertemente en } L^p(\Omega). \tag{2}$$

Prueba que $u = v$.

Demostración. Como $p \in [2, 2^*]$, la inclusión $\iota : H_0^1(\Omega) \hookrightarrow L^p(\Omega)$ es continua (teorema de encaje de Sobolev). Además, como ι es lineal, $\iota \in \mathcal{B}(H_0^1(\Omega), L^p(\Omega))$. Usando (1) y el Lema 4[2] obtenemos que $\iota(u_k) = u_k$ converge débilmente a $\iota(u) = u$ en $L^p(\Omega)$. Por otro lado, (2) implica que (u_k) converge débilmente a v en $L^p(\Omega)$ (en el sentido de la Definición 1). Entonces (por unicidad del límite débil en espacios de Banach) $u = v$. □

[2]Es posible porque $H_0^1(\Omega)$ es de Hilbert y $L^p(\Omega)$ es de Banach.