Introduccion a construcciones geométricas

Facultad de Ciencias UNAM

Introducción

En la siguiente sección, veremos algunas aplicaciones de teoría de campos a (sorpresivamente) geometría euclidiana. El objetivo de esta sección es dar las bases para la siguiente sección.

Geometría euclidiana es la teoría desarrollada a partir de los 5 postulados de Euclides:

1. Dos puntos distintos cuales quiera determinan un segmento de recta.
2. Un segmento de recta se puede extender indefinidamente en una línea recta.
3. Se puede trazar una circunferencia dados un centro y un radio cualquiera.
4. Todos los ángulos rectos son iguales entre sí.
5. Por un punto exterior a una recta, se puede trazar una única paralela.

Hay al menos dos detalles con estos postulados:

- ¿Entre que “puntos” podemos dibujar rectas?
- ¿Cuales “números” podemos usar como radios?

Para resolver esta ambigüedad, resolvemos un básico ejercicio de geometría euclidiana y (siempre con este ejemplo en mente) definimos dos conceptos que no fueron considerados en la época de Euclides pero que resultan muy útiles:

Imagínate que tienes

- una hoja de papel infinita hacia cualquier dirección (básicamente un plano),
- una regla *no graduada*, y
- un compás.

Empezando desde el siguiente dibujo,
dibujo de solo dos puntos
usa tu regla y compás para dibujar un triángulo equilátero[1].

[1]Es decir, cada uno de sus lados mide lo mismo

Específicamente, las *únicas* cosas que puedes hacer son las siguientes.

1. Con **la regla**, puedes dibujar una recta que pase por O y A, o que pase por O y una intersección, o que pase por A y una intersección, o que pase por cualesquiera dos intersecciones.
2. Con **el compás**, puedes dibujar circunferencias con centro $= O$, A, o una intersección y radio $= 1$ o la distancia entre dos intersecciones.

Si consideramos a O y A como intersecciones, podemos escribir mas simplemente las reglas del juego de la siguiente manera.

1. Con **la regla**, puedes dibujar una recta que pase por cualesquiera dos intersecciones.
2. Con **el compás**, puedes dibujar circunferencias con centro $=$ una intersección y radio $=$ la distancia entre dos intersecciones.

A lo mejor ahorita no queda claro a que nos referimos con "intersección" o en general no queda claro que podemos hacer.

Esperamos que al presentar la solución de nuestro problema anterior se resuelvan estas dudas.

Recuerda que el problema es el siguiente:

Empezando desde el siguiente dibujo,
dibujo de solo dos puntos
usa tu regla y compás para dibujar un triángulo equilátero.

Solución.

1. Dibuja una recta que pase por O y A.
   dibujo
2. Dibuja una circunferencia con centro en O y radio 1. Denotemos esta circunferencia por $\mathcal{C}$.
   dibujo

3. Dibuja una circunferencia con centro en A y radio 1. Denotemos esta circunferencia por $\mathcal{C}'$. Escoge alguna de las *intersecciones* de $\mathcal{C}$ con $\mathcal{C}'$ y denótala por P.
   dibujo
4. Dibuja una recta que pase por O y P
   dibujo
5. Dibuja una recta que pase por A y P.
   dibujo

Afirmamos que el triángulo que consiste de los vértices O, A, y P es equilátero.

Por definición, la distancia entre O y A es 1. Mas aun, como P es un punto de la circunferencia con radio 1 y centro O, entonces (por definición de circunferencia), la distancia entre O y P es 1. Análogamente, la distancia entre A y P es 1. Por lo tanto, el triángulo con vértices O, A, y P es equilátero.

Construcción

Notemos que nuestra solución al problema anterior consistió de dos partes: (i) la “construcción” del triángulo y (ii) la demostración de que nuestra construcción satisfacía lo deseado. Aprovechamos esta oportunidad para precisar el significado de la palabra “construcción”.

Definición

Una **construcción** es una sucesión *finita* de aplicaciones de nuestra regla y compás empezando desde el dibujo que solo tiene a O y A.

Por supuesto, los pasos 1-5 en la solución del problema anterior son un ejemplo de una construcción.

Comentario

De ahora en adelante, consideramos a todas nuestras construcciones como si sucedieran en el plano real $\mathbb{R}^2$. La razón por la que hacemos esto es simplemente porque es mas sencillo denotar los puntos construibles de esta manera. haz esto bien

Puntos y números construibles

Definición

- Decimos que un punto $P \in \mathbb{R}^2$ es un **punto construible** si existe una construcción en donde P es una intersección.
- Decimos que un numero $\alpha \in \mathbb{R}$ es un **numero construible** si existen dos puntos construibles $P, Q \in \mathbb{R}^2$ tales que la distancia entre P y Q es $|\alpha|$.

Observación

- Cabe recalcar que **no** todos los puntos que viven sobre una recta son necesariamente construibles. De hecho, en este momento, los únicos puntos construibles que conocemos son $(0, 0)$, $(0, 1)$, y las intersecciones de las circunferencias construidas en la solución del problema anterior. En particular, los únicos números construibles que conocemos en este momento son 0 y 1.
- menciona que puedes dibujar circunferencias de radio = la distancia entre cualesquiera dos puntos construibles

Segmento

Definición

Supongamos que A y B son puntos construibles. Denotamos a la recta que pasa por A y B como $\overleftrightarrow{AB}$ y definimos el **segmento** $\overline{AB}$ como el subconjunto de $\overleftrightarrow{AB}$ que tiene como extremos a A y B.
dibujo
También, denotamos la distancia entre A y B por $|\overline{AB}|$.

Cuando sea mas conveniente considerar nuestra construcción como sucediendo en $\mathbb{R}^2$, denotamos (como es usual) la distancia entre dos puntos de $\mathbb{R}^2$, digamos $(a,b),(c,d) \in \mathbb{R}^2$ por $d\big((a,b),(c,d)\big)$.

Puntos colineales

Definición

Supongamos que A, B, y C son puntos construibles. Decimos que A, B, y C son **colineales** si los 3 puntos pertenecen a una sola recta.

Supongamos que A, C son puntos construibles y que $B \in \overline{AC}$ es construible. Es decir, supongamos que tenemos el siguiente dibujo.
dibujo
Entonces, claramente

$$|\overline{AC}| = |\overline{AB}| + |\overline{BC}|.$$

Por supuesto, es muy fácil verificar esta igualdad si consideramos a nuestros puntos como elementos de $\mathbb{R}^2$.

$\mathbb{Z} \times \{0\} \subset$ {puntos construibles} y $\mathbb{Z} \subset$ {números construibles}

Proposición 1

Si $n \in \mathbb{Z}$, entonces $(n, 0) \in \mathbb{R}^2$ es un punto construible y $n \in \mathbb{R}$ es un numero construible.

Construcción. Veamos que $(0, 2)$ es un punto construible y que 2 es un numero construible.

1. Dibuja la recta que pasa por $(0, 0)$ y $(0, 1)$, es decir dibuja el eje X.
2. Dibuja una circunferencia $\mathcal{C}$ de radio 1 con centro en $(0, 1)$. Obviamente, las intersecciones de $\mathcal{C}$ con el eje X son $(0, 0)$ y $(0, 2)$.

Por lo tanto, $(0, 2)$ es un punto construible y 2 es un numero construible. Usando esto, la idea para el caso general debería de ser clara. $\square$

Comentario

En lo que sigue, usaremos el quinto postulado para ver que

$$\{0\} \times \mathbb{Z} \subset \{\text{puntos construibles}\}.$$

Para esto, usaremos un resultado básico de geometría euclidiana que lamentablemente no nos daremos el tiempo de demostrar.

Las alturas en los triángulos equiláteros pasan por los puntos medios

Lema 2

Supongamos que PQR es un triángulo equilátero[2]. Por el quinto postulado, existe una recta ℓ que pasa por P y es perpendicular a $\overline{QR}$. Si S es el punto medio de $\overline{QR}$, es decir, $|\overline{QS}| = |\overline{SR}|$, entonces $S \in \ell$.

dibujo

[2] Es decir, tal que $|\overline{PQ}| = |\overline{QR}| = |\overline{RP}|$.

$\mathbb{Z} \times \{0\} \subset \{\text{puntos construibles}\}$

Corolario 3

Si $n \in \mathbb{Z}$, entonces $(0, n)$ es un punto construible.

Construcción. Veamos que podemos dibujar el eje Y y que los puntos $(0, 1)$ y $(0, -1)$ son construibles.

1. Dibuja el eje X.
2. Construye el punto $(-1, 0)$.
3. Dibuja una circunferencia con centro $(1, 0)$ y radio 2 (es posible porque la distancia entre $(1, 0)$ y $(-1, 0)$ es 2).
4. Dibuja una circunferencia con centro $(-1, 0)$ y radio 2. Denota a alguna de las intersecciones de estas dos circunferencias por Q.
   dibujo

4. Usando el quinto postulado, dibuja la recta ℓ que pasa por Q y es perpendicular al eje X. Considerando el triángulo con vértices $(-1,0)$, $(1,0)$ y Q, vemos que (por el lema anterior) ℓ pasa por el punto medio de $(1,0)$ y $(-1,0)$. Pero este punto es $(0,0)$ y por lo tanto, ℓ es el eje Y. dibujo
5. Dibuja una circunferencia $\mathcal{C}$ con centro en O y radio 1. Claramente, las intersecciones de $\mathcal{C}$ con el eje Y son $(0,1)$ y $(0,-1)$. dibujo

Usando esto, la idea para el caso general debería de ser clara. $\square$

$\mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \subset \{\text{puntos construibles}\}$

Proposición 4

Si $n, m \in \mathbb{Z}$, entonces (n, m) es un punto construible.

Demostración. Supongamos que $n, m \in \mathbb{Z}$. La idea para la construcción es la siguiente.

1. Construye los puntos $(0, n-1)$, $(0, n)$, y $(0, n+1)$.
2. Dibuja una circunferencia con radio 2 y centro $(0, n-1)$.
3. Dibuja una circunferencia con radio 2 y centro $(0, n+1)$.

Dibujando la recta perpendicular al eje X que pasa por una de las intersecciones de las circunferencias, vemos (de la misma manera que en la proposición anterior) que esta recta es la recta $x = n$.

dibujo

El resto de la construcción debería de ser clara. $\square$

$\alpha \in \mathbb{R}$ es construible $\iff$ $(\alpha, 0) \in \mathbb{R}^2$ es construible

Proposición 5

Si $\alpha \in \mathbb{R}$, entonces α es un numero construible si y solo si $(\alpha, 0) \in \mathbb{R}^2$ es un punto construible.

Demostración.

$\Longrightarrow$) Supongamos que $\alpha \in \mathbb{R}$ es un numero construible. Por definición, existen dos puntos construibles $P, Q \in \mathbb{R}^2$ tales que $|\overline{PQ}| = |\alpha|$.
Construcción de $(\alpha, 0)$.

1. Construye P y Q.
2. Dibuja el eje X.
3. Dibuja la circunferencia $\mathcal{C}$ con centro en $(0, 0)$ y radio $|\alpha|$. Obviamente, una de las intersecciones del eje X con $\mathcal{C}$ es $(\alpha, 0)$.

$\Longleftarrow$) Supongamos que $(\alpha, 0)$ es construible. Como la distancia entre $(0, 0)$ y $(\alpha, 0)$ es $|\alpha|$, obtenemos lo deseado.

$\square$

La suma y resta de números construibles es construible

Proposición 6

Si $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ son números construibles, entonces $\alpha + \beta$ y $\alpha - \beta$ también son números construibles.

Sin perdida de generalidad, supongamos que $\alpha \geq \beta$. Veamos el caso en que $\alpha, \beta \geq 0$, el resto de los casos son análogos.

Construcción.

1. Construye el punto $(\alpha, 0)$ y $(\beta, 0)$ (posible por la proposición anterior).
2. Dibuja una circunferencia $\mathcal{C}$ con centro en $(\alpha, 0)$ y radio $|\beta| = \beta$ (posible porque la distancia entre $(0,0)$ y $(\beta, 0)$ es β).

Como $\alpha \geq \beta$, tenemos el siguiente dibujo.
dibujo
Debería de ser claro que $d\left((0,\alpha), P\right) = \alpha - \beta$ y $d\left((0,\alpha), Q\right) = \alpha + \beta$. $\square$

Comentario

En lo que sigue, veremos que la multiplicación y división de números construibles también es construible. Para esto, usaremos los siguientes resultados básicos de geometría euclidiana que lamentablemente no nos daremos el tiempo de demostrar.

Podemos dibujar rectas paralelas

Lema 7

Supongamos que ℓ es una recta. Si P es un punto que no vive sobre ℓ, entonces podemos dibujar una recta ℓ' que pasa por P y es paralela a ℓ.

dibujo

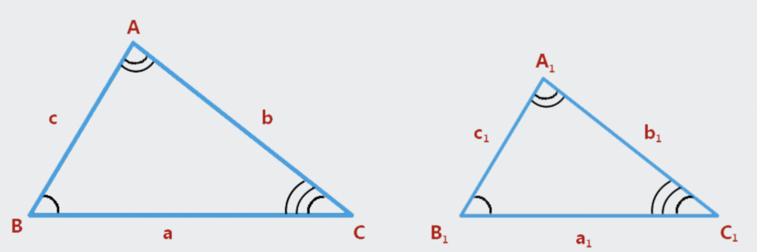
Lema 8

Supongamos que PQR es un triángulo. Si ℓ es una recta paralela a $\overleftrightarrow{QR}$, S es la intersección de ℓ con $\overleftrightarrow{PQ}$, y T es la intersección de ℓ con $\overleftrightarrow{PR}$, entonces

$$\frac{|\overline{PS}|}{|\overline{PQ}|} = \frac{|\overline{PT}|}{|\overline{PR}|}.$$

dibujo

Cabe recalcar que este resultado es valido para cualesquiera dos triángulos que tienen los mismos tres ángulos. Específicamente, si tienes dos triángulos ABC y $A_1B_1C_1$ tales que mejorar dibujo



entonces

$$\frac{a}{a_1} = \frac{b}{b_1} = \frac{c}{c_1}.$$

De hecho, el converso también es cierto y en este caso decimos que ABC y $A_1B_1C_1$ son *similares* y escribimos $ABC \sim A_1B_1C_1$

La multiplicación de números construibles es construible

Proposición 9

Si $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ son números construibles, entonces $\alpha \cdot \beta$ es un numero construible.

Demostración.

Caso 1. $|\beta| > 1$.

Como α es construible, entonces por definición, existen P, Q construibles tales que $|\overline{PQ}| = |\alpha|$.

1. Construye a P y Q.
2. Dibuja $\overleftrightarrow{PQ}$ y por simplicidad, denota $\ell = \overleftrightarrow{PQ}$.
3. Construye cualquier punto R que no sea colineal con P y Q. Es decir, $R \notin \ell$.
4. Dibuja la recta $\overleftrightarrow{PR}$ y por simplicidad, denota $\ell' = \overleftrightarrow{PR}$
   dibujo

5. Dibuja una circunferencia $\mathcal{C}$ con centro en P y radio 1.
6. Dibuja una circunferencia $\mathcal{C}'$ con centro en P y radio $|\beta|$. Denota a las intersecciones de $\mathcal{C}$ y $\mathcal{C}'$ con ℓ' de la siguiente manera.
   dibujo
   Es decir, $R, T \in \ell'$ son puntos construibles tales que $|\overline{PR}| = 1$ y $|\overline{PT}| = |\beta|$.
7. Dibuja ℓ'' la recta paralela a $\overline{RQ}$ que pasa por T y denotemos por S a la intersección de ℓ'' con ℓ (posible por el lema anterior).
   dibujo

Entonces por el lema de triángulos similares,

$$\frac{|\overline{PS}|}{|\alpha|} = \frac{|\overline{PS}|}{|\overline{PQ}|} = \frac{|\overline{PT}|}{|\overline{PR}|} = \frac{|\beta|}{1}.$$

De donde, $|\overline{PS}| = |\alpha \cdot \beta|$ y por lo tanto, $\alpha \cdot \beta$ es un numero construible.

Caso 2. $0 < |\beta| < 1$.

Procediendo de manera análoga al caso anterior, obtenemos el siguiente dibujo.
dibujo: recuerda poner T y S de manera que $|\overline{PT}| < |\overline{PR}|$
Entonces (por triángulos similares)

$$\frac{|\alpha|}{|\overline{PS}|} = \frac{|\overline{PQ}|}{|\overline{PS}|} = \frac{|\overline{PR}|}{|\overline{PT}|} = \frac{1}{|\beta|}.$$

De donde, $|\overline{PS}| = |\alpha \cdot \beta|$ y por lo tanto, $\alpha \cdot \beta$ es un numero construible.

$\square$

La división de números construibles es construible

Proposición 10

Si $\alpha \in \mathbb{R}$ y $\gamma \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ son números construibles, entonces α/γ es un numero construible. En particular,

$$\mathbb{Q} \subset \{\text{números construibles}\}.$$

Demostración. Es consecuencia inmediata de la proposición anterior: simplemente define $\beta := \frac{1}{\gamma}$. $\square$

El conjunto de números construibles es un campo

Corolario 11

El conjunto de números construibles es un campo. En particular,

$$\mathbb{Q} \subset \{\text{números construibles}\} \quad \text{y} \quad \mathbb{Q} \times \mathbb{Q} \subset \{\text{puntos construibles}\}.$$

Demostración. En las proposiciones anteriores vimos que la suma, resta, multiplicación, y división de números construibles son números construibles.

La demostración de la inclusión

$$\mathbb{Q} \times \mathbb{Q} \subset \{\text{puntos construibles}\}$$

es consecuencia de que todo numero racional es construible y de las técnicas de construcción presentadas anteriormente. Por eso, dejamos su verificación al lector. □

Para terminar, veremos que el conjunto de números construibles *también* es cerrado bajo toma de raíces cuadradas.

La raíz cuadrada de un numero construible es un numero construible

Proposición 12

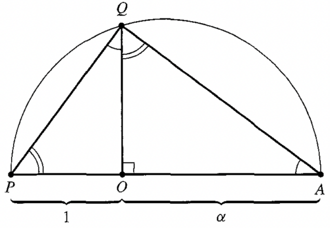
Si $\alpha \in \mathbb{R}$ es un numero construible, entonces $\sqrt{\alpha}$ también es un numero construible.

Este resultado requiere de varios resultados básicos de geometría euclidiana que no hemos visto y por eso solo damos la idea.

Cabe recalcar que estos resultados son necesarios únicamente para demostrar que dos triángulos que construiremos (sin la necesidad de estos resultados) son similares.

Con esto en mente, procedamos a dar la idea de la demostración.

Primero, construye el siguiente dibujo



Luego, demuestra que los triángulos OPQ y OQA son similares[3]. Concluye que

$$\frac{|\overline{OQ}|}{|\alpha|} = \frac{|\overline{OQ}|}{|\overline{OA}|} = \frac{|\overline{OP}|}{|\overline{OQ}|} = \frac{1}{|\overline{OQ}|}$$

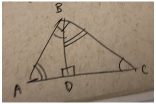
y por lo tanto, $|\overline{OQ}|^2 = \alpha$ o equivalentemente, $|\overline{OQ}| = \sqrt{\alpha}$.

[3]Este es el paso que requiere los resultados que mencionamos anteriormente

Comentario

Si tienes curiosidad de porque los triángulos OPQ y OQA son similares, considera los siguientes resultados básicos de geometría euclidiana.

- Si un ángulo inscrito en una circunferencia abarca un diámetro, entonces este ángulo es recto.
- Si tienes un triángulo recto y dibujas la altura que pasa por el vértice con el ángulo recto, entonces obtienes dos triángulos similares. mejorar dibujo



En este caso, $DBA \sim DCB$ y en particular $\frac{|\overline{BD}|}{|\overline{DC}|} = \frac{|\overline{AD}|}{|\overline{BD}|}$.