1 Espacios de medida

Definición (Espacio medible)
Un *espacio medible* es una pareja ordenada $(X, \mathcal{B})$ donde X es un conjunto arbitrario y $\mathcal{B}$ es una σ-álgebra de subconjuntos de X. En este caso, decimos que un subconjunto A de X es *medible* si $A \in \mathcal{B}$.

Definición (Espacio de medida)
Una *medida* en un espacio medible $(X, \mathcal{B})$ es una función $\mu : \mathcal{B} \to \mathbb{R}_{\geq 0} \cup \{+\infty\}$ tal que $\mu(\emptyset) = 0$ y

$$\mu\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} E_i\right) = \sum_{i=1}^{\infty} \mu E_i$$

para cualquier sucesión E_i de conjuntos medibles disjuntos. Un *espacio de medida* es una tripleta ordenada $(X, \mathcal{B}, \mu)$ donde $(X, \mathcal{B})$ es un espacio medible y μ es una medida en $(X, \mathcal{B})$.

En lo que sigue, $(X, \mathcal{B}, \mu)$ denota un espacio de medida arbitrario.

1. Proposición (Monotonicidad de la medida)
Sean $A, B \in \mathcal{B}$. Si $A \subset B$, entonces $\mu A \leq \mu B$.

2. Proposición (Medida de una intersección anidada)
Sean $E_i \in \mathcal{B}$. Si $\mu E_1 < \infty$ y $E_i \supset E_{i+1}$, entonces

$$\mu\left(\bigcap_{i=1}^{\infty} E_i\right) = \lim_{i\to\infty} \mu E_i.$$

3. Proposición (Subaditividad de la medida)
Sean $E_i \in \mathcal{B}$. Entonces

$$\mu\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} E_i\right) \leq \sum_{i=1}^{\infty} \mu E_i.$$

Definición (Finitud y σ-finitud)
Decimos que μ es *finita* si $\mu(X) < \infty$. Decimos que μ es *σ-finita* si existe una sucesión E_i de conjuntos medibles tales que $\mu E_i < \infty$ y $X = \bigcup_{i=1}^{\infty} E_i$. Por otro lado, sea $E \in \mathcal{B}$. Decimos que E es de *medida finita* si $\mu E < \infty$. Decimos que E es de *medida σ-finita* si existe una sucesión E_i de conjuntos medibles tales que $\mu E_i < \infty$ y $E = \bigcup_{i=1}^{\infty} E_i$.

Definición (Semifinitud)
Decimos que μ es *semifinita* si para todo $E \in \mathcal{B}$ con $\mu E = \infty$ se satisface la siguiente propiedad: para todo $M > 0$, existe $E_M \subset E$ medible con $M < \mu E_M < \infty$.

Definición (Espacio de medida completo)
Un espacio de medida es *completo* si para todo $E \in \mathcal{B}$ con $\mu E = 0$ se satisface la siguiente implicación: $A \subset E \implies A \in \mathcal{B}$.

4. Proposición (Extensión completa)
Para cualquier espacio de medida $(X, \mathcal{B}, \mu)$, existe un espacio de medida completo $(X, \mathcal{B}_0, \mu_0)$ tal que

i. $\mathcal{B} \subset \mathcal{B}_0$.

ii. $\mu_0 \restriction_{\mathcal{B}} = \mu$.

iii. $E \in \mathcal{B}_0$ si y solo si $E = A \cup B$ donde $B \in \mathcal{B}$ y $A \subset C$, $C \in \mathcal{B}$, $\mu C = 0$.

2 Funciones medibles

5. Proposición (Caracterización de funciones medibles)
Sea $f : X \to \overline{\mathbb{R}}$ una función. Son equivalentes:

i. $\{x : f(x) < \alpha\} \in \mathcal{B}$ para todo α.

ii. $\{x : f(x) \leq \alpha\} \in \mathcal{B}$ para todo α.

iii. $\{x : f(x) > \alpha\} \in \mathcal{B}$ para todo α.

iv. $\{x : f(x) \geq \alpha\} \in \mathcal{B}$ para todo α.

Definición (Función medible)
Una función $f : X \to \overline{\mathbb{R}}$ es *medible* si se satisface cualquiera de los incisos de la Proposición 5.

6. Teorema (Operaciones con funciones medibles)
Sea $c \in \mathbb{R}$ constante y sean f y g funciones medibles. Entonces $f + c$, cf, $f + g$, $f \cdot g$, y $f \vee g$ también son medibles. Por otro lado, sea (f_n) una sucesión de funciones medibles. Entonces $\sup f_n$, $\inf f_n$, $\limsup f_n$, y $\liminf f_n$ también son medibles.

7. Proposición (Aproximación por funciones simples)
Sea $f : X \to \overline{\mathbb{R}}$ medible. Entonces existe una sucesión $\langle \varphi_n \rangle$ de funciones simples con $\varphi_{n+1} \geq \varphi_n$ tal que $f(x) = \lim \varphi_n(x)$ para todo $x \in X$. Más aun, si μ es σ-finita, podemos escoger las φ_n de manera que se anulen afuera de un conjunto de medida finita.

8. Proposición (Condiciones suficientes para medibilidad en espacios completos)
Supongamos que $(X, \mathcal{B}, \mu)$ es completo. Entonces para toda función medible f se satisface la siguiente implicación: $f = g$ c.s. $\implies$ g es medible.

9. Lema (Consecuencias de una familia creciente de conjuntos medibles)
Sea $\mathcal{A} \subset \mathbb{R}$ un conjunto de indices y sea $\langle B_\alpha \rangle_{\alpha \in \mathcal{A}}$ una familia de conjuntos medibles tales que $B_\alpha \subset B_\beta$ si $\alpha < \beta$. Entonces existe una función medible f tal que $f \leq \alpha$ en B_α y $f \geq \alpha$ en $X \setminus B_\alpha$.

10. Lema (Consecuencias de una familia casi creciente de conjuntos medibles)
Sea $\mathcal{A} \subset \mathbb{R}$ un conjunto de indices y sea $\langle B_\alpha \rangle_{\alpha \in \mathcal{A}}$ una familia de conjuntos medibles tales que $\mu(B_\alpha \setminus B_\beta) = 0$ si $\alpha < \beta$. Entonces existe una función medible f tal que $f \leq \alpha$ c.s. en B_α y $f \geq \alpha$ c.s. en $X \setminus B_\alpha$.

3 Integración

Definición (Integral función simple)
La integral de una función simple $\varphi(x) = \sum c_i \chi_{E_i}(x)$ sobre un medible E está dada por

$$\int_E \varphi \, d\mu = \sum_{i=1}^{n} c_i \mu(E_i \cap E)$$

Definición (Integral función no-negativa)
Sea f es una función medible y no-negativa en el espacio de medida $(X, \mathcal{B}, \mu)$. Definimos su integral como

$$\int f \, d\mu = \sup \left\{ \int \varphi : \varphi \text{ es una función simple y } 0 \leq \varphi \leq f \right\}$$

11. Lema (Fatou)
Sea $\langle f_n \rangle$ una sucesión de funciones medibles no negativas que convergen c.s. a f en E. Entonces

$$\int_E f \leq \liminf \int_E f_n$$

12. Teorema (Convergencia monótona)
Sea $\langle f_n \rangle$ una sucesión de funciones medibles no negativas que convergen c.s. a f y $f_n \leq f$ para toda $n \in \mathbb{N}$. Entonces

$$\int f = \lim \int f_n$$

14. Corolario (Integral y suma)
Sea $\langle f_n \rangle$ una sucesión de funciones medibles no negativas. Entonces

$$\int \sum_{n=1}^{\infty} f_n = \sum_{n=1}^{\infty} \int f_n$$

Definición (Función integrable)
Decimos que una función no negativa f es *integrable* (sobre un medible E respecto a μ) si es medible y

$$\int_E f \, d\mu < \infty$$

Una función arbitraria es *integrable* si f^+ y f^- son integrables y definimos su integral como

$$\int_E f \, d\mu = \int_E f^+ - \int_E f^-$$

15. Proposición (Propiedades de la integral)
Sean f y g funciones integrables y sea E un medible. Entonces

i. $\int_E (c_1 f + c_2 g) = c_1 \int_E f + c_2 \int_E g$.

ii. Si $|h| \leq |f|$ y h es medible, entonces h es integrable.

iii. Si $f \geq g$ c.s., entonces $\int f \geq \int g$.

16. Teorema (Convergencia de Lebesgue)
Sea g integrable en E y $\langle f_n \rangle$ una sucesión de funciones medibles en E tal que $|f_n(x)| \leq g(x)$ y $f_n(x) \to f(x)$ c.s. en E, entonces

$$\int_E f = \lim \int_E f_n$$

4 Teoremas de convergencia general

Definición (Convergencia conjunto a conjunto)
Sea $(X, \mathcal{B})$ un espacio de medida. Decimos que una sucesión de medidas μ_n converge conjunto a conjunto a μ si para cada $E \in \mathcal{B}$ tenemos $\mu E = \lim \mu_n E$

17. Proposición (Lema de Fatou para medidas)
Sea $(X, \mathcal{B})$ un espacio de medida, $\langle \mu_n \rangle$ una sucesión de medidas que converge conjunto a conjunto a μ, y $\langle f_n \rangle$ una sucesión de funciones medibles no-negativas que convergen puntualmente a f. Entonces

$$\int f \; d\mu \leq \liminf \int f_n \; d\mu_n$$

18. Proposición (Teorema de convergencia de Lebesgue para medidas)
Sea $(X, \mathcal{B})$ un espacio de medida y $\langle \mu_n \rangle$ una sucesión de medidas que converge conjunto a conjunto a μ. Consideremos $\langle f_n \rangle$, $\langle g_n \rangle$ sucesiones de funciones medibles que convergen puntualmente a f y g, respectivamente. Si $|f_n| \leq g_n$ y

$$\lim \int g_n \; d\mu_n = \int g \; d\mu < \infty.$$

Entonces

$$\lim \int f_n \; d\mu_n = \int f \; d\mu.$$

5 Medidas con signo

Definición (Medida con signo) Sea $(X, \mathcal{B})$ un espacio medible. Una *medida con signo* es una función $\nu : \mathcal{B} \to \overline{\mathbb{R}}$ que satisface las siguientes condiciones:

i. ν asume a lo mas uno de los valores $\pm\infty$.

ii. $\nu\emptyset = 0$.

iii. $\nu\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} E_i\right) = \sum_{i=1}^{\infty} \nu E_i$ para toda sucesión E_i de conjuntos medibles disjuntos.
Esta igualdad significa que la serie converge absolutamente si $\nu\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} E_i\right) < \infty$ y que la serie diverge propiamente en otro caso.

En lo que sigue, ν denota una medida con signo arbitraria sobre un espacio medible $(X, \mathcal{B})$ arbitrario.

Definición (Conjuntos positivos, negativos, y nulos)
Un conjunto A es *positivo respecto a* ν si A es medible y para todo subconjunto medible E de A tenemos $\nu E \geq 0$. Análogamente, un conjunto es *negativo respecto a* ν si es medible y todos sus subconjuntos medibles tienen medida no positiva. Finalmente, un conjunto es *nulo respecto a* ν si todos sus subconjuntos medibles tienen medible tiene medida 0.

19. Lema (Subconjuntos y uniones de conjuntos positivos)
Todo subconjunto medible de un conjunto positivo es positivo. La unión contable de una colección de conjuntos positivos es positiva.

20. Lema (Existencia de subconjuntos positivos)
Sea E medible con $0 < \mu E < \infty$. Entonces existe un subconjunto positivo A contenido en E con $\nu A > 0$.

21. Proposición (Descomposición de Hahn)
Sea ν una medida con signo en el espacio medible $(X, \mathcal{B})$. Entonces existe un conjunto positivo A y un conjunto negativo B tales que $X = A \cup B$ y $A \cap B = \emptyset$. En este caso, decimos que (A, B) es una *descomposición de Hahn* para ν.

Definición (Medidas mutuamente singulares)
Decimos que dos medidas μ y ν en $(X, \mathcal{B})$ son *mutuamente singulares* si existen conjuntos medibles disjuntos A y B tales que $X = A \cup B$ y $\nu(A) = \mu(B) = 0$. En este caso escribimos $\mu \perp \nu$.

22. Proposición (Descomposición de Jordan)
Sea ν una medida con signo en el espacio medible $(X, \mathcal{B})$. Entonces existen dos medidas mutuamente singulares ν^+ y ν^- en $(X, \mathcal{B})$ tales que $\nu = \nu^+ - \nu^-$. Esta descomposición de ν es única y le llamamos la *descomposición de Jordan*.

Definición (Valor absoluto / Variación total)
La medida $|\nu|$ dada por

$$|\nu|(E) = \nu^+ E + \nu^- E$$

es llamada el *valor absoluto* o la *variación total* de E.

6 El teorema de Radon-Nikodym

Definición (Continuidad absoluta respecto a una medida)
Decimos que ν es *absolutamente continua* respecto a μ si

$$\forall A \in \mathcal{B}\,(\mu A = 0 \implies \nu A = 0)\,.$$

En este caso escribimos $\nu \ll \mu$.

23. Teorema (Radon-Nikodym)
Sea $(X, \mathcal{B}, \mu)$ un espacio de medida σ-finito y sea ν otra medida definida en $\mathcal{B}$. Si ν es absolutamente continua respecto a μ, entonces existe una función medible no negativa f tal que para todo $E \in \mathcal{B}$,

$$\nu E = \int_E f\,d\mu.$$

La función f es única en el sentido de que si g es cualquier otra función que satisface la ecuación anterior, entonces $f = g$ c.s. $[\mu]$.

24. Proposición (Descomposición de Lebesgue)
Sean μ y ν medidas σ-finitas sobre $(X, \mathcal{B})$. Entonces existen únicas medidas ν_0 y ν_1 sobre $(X, \mathcal{B})$ tales que

i. $\nu_0 \perp \mu$.

ii. $\nu_1 \ll \mu$.

iii. $\nu = \nu_0 + \nu_1$.

7 Los espacios L^p

Definición (Los espacios L^p)
Sea $(X, \mathcal{B}, \mu)$ un espacio de medida. Para todo $1 \le p < \infty$ definimos

$$L^p(\mu) = \left\{ f : f \text{ es medible y } \int |f|^p \, d\mu < \infty \right\},$$
$$\|f\|_p = \left\{ \int |f|^p \, d\mu \right\}^{1/p} \qquad \text{para todo } f \in L^p(\mu).$$

Para $p = \infty$ definimos

$$L^\infty(\mu) = \{ f : f \text{ es medible y acotada} \},$$
$$\|f\|_\infty = \operatorname{ess\,sup} |f| \qquad \text{para todo } f \in L^\infty(\mu).$$

Dos funciones en L^p son equivalentes si son iguales c.s.

25. Teorema (El teorema de Fischer-Riesz y las desigualdades de Hölder y Fischer en L^p)
Para todo $1 \le p \le \infty$, el espacio $L^p(\mu)$ es de Banach. Más aun, si $f \in L^p(\mu)$, $g \in L^q(\mu)$, y $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$, entonces

$$\int |fg| \, d\mu \le \|f\|_p \|g\|_q.$$

26. Teorema (El segundo principio de Littlewood en L^p)
Sea $f \in L^p(\mu)$ con $1 \le p < \infty$. Entonces para todo $\epsilon > 0$ existe una función simple φ que se anula afuera de un conjunto de medida finita y satisface $\|f - \varphi\|_p < \epsilon$.

29. Teorema (Representación de Riesz)
Sea μ una medida σ-finita y sea $1 \le p < \infty$. Para todo funcional lineal acotado F en $L^p(\mu)$ existe un único elemento $g \in L^q$, donde $\frac{1}{q} + \frac{1}{p} = 1$ tal que

$$F(f) = \int fg \, d\mu.$$

Más aun, $\|F\| = \|g\|_q$.

30. Teorema (Representación de Riesz con $1 < p < \infty$)
Sea $1 < p < \infty$. Para todo funcional lineal acotado F en $L^p(\mu)$ existe un único elemento $g \in L^q$, donde $\frac{1}{q} + \frac{1}{p} = 1$ tal que

$$F(f) = \int fg \, d\mu.$$

Más aun, $\|F\| = \|g\|_q$.

A1 Espacios de medida

Ejercicio 1 (Continuidad de la medida). Si $\langle E_i \rangle$ es una sucesión de medibles, entonces

$$\lim_{n\to\infty} \mu\left(\bigcup_{i=1}^{n} E_i\right) = \mu\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} E_i\right)$$

Demostración:
Si $\mu E_k = \infty$ para algún índice k, la igualdad ocurre trivialmente. Supongamos $\mu E_i < \infty$ para toda $i \in \mathbb{N}$. Sea

$$A_n := \bigcup_{i=1}^{n} E_i,$$

esta es una sucesión creciente de conjuntos. Ahora definimos $A_0 = \emptyset$ y

$$B_i := A_i - A_{i-1}.$$

$$\Rightarrow \bigcup_{i=1}^{\infty} E_i = \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i = \bigcup_{i=1}^{\infty} B_i$$

Con esto, hemos expresado la unión de la sucesión original con una sucesión disjunta y tenemos que

$$\mu\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} E_i\right) = \mu\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} B_i\right) = \sum_{i=1}^{\infty} \mu B_i = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} \mu(A_i - A_{i-1})$$

Y como $A_{i-1} \subset A_i$ entonces $\mu(A_i - A_{i-1}) = \mu A_i - \mu A_{i-1}$, con lo que

$$\mu\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} E_i\right) = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} (\mu A_i - \mu A_{i-1}) = \lim_{n\to\infty} (\mu A_n - \overbrace{\mu A_0}^{=0}) = \lim_{n\to\infty} \mu A_n$$

Haciendo explicita la definición de A_n

$$\mu\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} E_i\right) = \lim_{n\to\infty} \mu\left(\bigcup_{i=1}^{n} E_i\right).$$

□

Ejercicio 3.a Demostrar que si $\mu(E_1 \Delta E_2) = 0$ y $E_1, E_2 \in \mathcal{B}$, entonces $\mu E_1 = \mu E_2$.
Demostración:

$$\mu(E_1 \Delta E_2) = \mu\big((E_1 - E_2) \cup (E_2 - E_1)\big) = \overbrace{\mu(E_1 - E_2)}^{\geq 0} + \overbrace{\mu(E_1 - E_2)}^{\geq 0} = 0$$
$$\Rightarrow \mu(E_1 \cap E_2^c) = 0 = \mu(E_2 \cap E_1^c)$$

Por otro lado

$$E_1 = (E_1 \cap E_2) \cup (E_1 \cap E_2^c)$$
$$\Rightarrow \mu E_1 = \mu(E_1 \cap E_2) + \mu(E_1 \cap E_2^c) = \mu(E_1 \cap E_2)$$

Análogamente

$$\mu E_2 = \mu(E_2 \cap E_1) + \mu(E_2 \cap E_1^c) = \mu(E_1 \cap E_2),$$

y el resultado se sigue. □

Ejercicio 3.b Demostrar que si $\mu(E_1 \Delta E_2) = 0$ y $E_1 \in \mathcal{B}$, entonces $E_2 \in \mathcal{B}$.
Demostración:
Sea $N = E_1 \Delta E_2$, el resultado se sigue de notar que

$$E_2 = (E_1 - N) \cup (N - E_1).$$

Como E_1 y N son medibles, también lo es $E_1 - N$. Por otro lado, $N - E_1$ también debe ser medible pues, por hipótesis, la medida es completa y este es un subconjunto de un conjunto de medida nula. Finalmente, $E_2 \in \mathcal{B}$ por ser la unión de medibles.

$\square$

Ejercicio 6.a Demostrar que toda medida $\sigma-$finita es semifinita.
Demostración
Si $\mu X < \infty$, el resultado es inmediato pues se satisface la definición de semifinitud por vacuidad. Supongamos entonces $\mu X = \infty$ y que

$$X = \bigcup_{n=1}^{\infty} X_n$$

donde $\mu X_n < \infty$. Consideremos $E \subset X$ medible y de medida infinita, entonces

$$E = \bigcup_{n=1}^{\infty} (X_n \cap E).$$

Y por la continuidad de la medida

$$\mu E = \lim_{n \to \infty} \mu \left(\bigcup_{n=1}^{n} (X_n \cap E) \right) = \infty.$$

Como este limite diverge, podemos encontrar N suficientemente grande tal que la unión descrita (que es subconjunto de E) sea de medida arbitrariamente grande.

$\square$

Ejercicio 7. Demmostrar la **proposición 4**.
Demostración:
Consideremos la familia

$$\mathcal{B}_0 = \{E \subset X : E = A \cup B \text{ donde } A \subset N \in \mathcal{B}, B \in \mathcal{B} \text{ y } \mu N = 0\}.$$

Veamos que $\mathcal{B}_0$ es una $\sigma-$álgebra.

- Claramente, $X, \emptyset \in \mathcal{B}_0$ pues $X = \overbrace{\emptyset}^{\subset \emptyset \in \mathcal{B}} \cup \overbrace{X}^{\in \mathcal{B}}$ y $\emptyset = \overbrace{\emptyset}^{\subset \emptyset \in \mathcal{B}} \cup \overbrace{\emptyset}^{\in \mathcal{B}}$.
- Si $E = A \cup B \in \mathcal{B}_0$, entonces $E^c = A^c \cap B^c$. Donde $A \subset N$ de un conjunto de medida 0, entonces $A^c = N^c \cup (N \cap A^c)$, lo que implica

  $$E^c = (N^c \cup (N \cap A^c)) \cap B^c = (N^c \cap B^c) \cup (N \cap A^c \cap B^c).$$

  Como $N^c \cap B^c \in \mathcal{B}$ y $N \cap A^c \cap B^c \subset N$ con $\mu N = 0$, esto implica que $E^c \in \mathcal{B}_0$.
- Sea $\langle E_n \rangle$ en $\mathcal{B}_0$. Cada elemento $E_n = A_n \cup B_n$ y por propiedades de la unión

  $$\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n = \bigcup_{n=1}^{\infty} (A_n \cup B_n) = \left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \right) \cup \left(\bigcup_{n=1}^{\infty} B_n \right).$$

  Como $\mathcal{B}$ es una $\sigma-$álgebra, $\cup B_n \in \mathcal{B}$. Por otro lado, si $A_n \subset N_n$ de medida nula, entonces

  $$\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \subset \bigcup_{n=1}^{\infty} N_n := N. \tag{1}$$

Por la **proposición 3**,

$$\mu\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} N_n\right) \leq \sum_{n=1}^{\infty} \mu N_n = 0, \Rightarrow \mu N = 0. \tag{2}$$

Y eso muestra que $\cup E_n \in \mathcal{B}_\prime$.
Ahora, definimos una función μ_0 en $\mathcal{B}_0$ como

$$\mu_0 E = \mu_0(A \cup B) := \mu B$$

para $E \in \mathcal{B}_0$. Solo falta probar que μ_0 es una medida y que está bien definida, es decir, que no depende del representante. Pero es trivial ver que μ_0 es una medida pues está definida en términos de la medida μ.
Veremos entonces que la función está bien definida. Consideremos $E \in \mathcal{B}_0$ tal que $E = A_1 \cup B_1$ y $E = A_2 \cup B_2$, entonces

$$B_1 \subset A_2 \cup B_2 \subset N_2 \cup B_2, \Rightarrow B_1 - B_2 \subset N_2.$$

Análogamente, tenemos que $B_2 - B_1 \subset N_1$. Y como $B_1, B_2 \in \mathcal{B}$ y N_1, N_2 son de medida 0 entonces

$$\mu(B_1 \Delta B_2) = \mu(B_1 - B_2) + \mu(B_2 - B_1) = 0,$$

y por el ejercicio 3.a tenemos que $\mu B_1 = \mu B_2$, es decir, μ_0 está bien definida.

□

Ejercicio 8.a Demostrar que si μ es una medida $\sigma-$finita, entonces es una medida saturada.
Demostración:
Sea E un conjunto localmente medible. Como μ es $\sigma-$finita, entonces

$$X = \bigcup_{n=1}^{\infty} X_n, \ \mu X_n < \infty.$$

De forma que

$$E = \bigcup_{n=1}^{\infty} (E \cap X_n).$$

Pero cada $E \cap X_n \in \mathcal{B}$, pues E es localmente medible, entonces $E \in \mathcal{B}$ y μ es saturada.

□

Ejercicio 8.b Demostrar que la colección de conjuntos localmente medibles $\mathcal{L}$ es una $\sigma-$álgebra.
Demostración:

- Es inmediato que X y $\emptyset$ están en $\mathcal{L}$ pues para cualquier $B \in \mathcal{B}$, $B \cap X = B$ y $B \cap \emptyset = \emptyset$.
- Sea $E \in \mathcal{L}$ y $B \in \mathcal{B}$ algún medible

  $$B \cap E^c = (B \cap E^c) \cup (B \cap B^c) = B \cap (B \cap E)^c.$$

  Como E es localmente medible, $B \cap E \in \mathcal{B}$ y entonces $(B \cap E)^c \in \mathcal{B}$. Con esto, $B \cap E^c \in \mathcal{B}$ y $E^c \in \mathcal{L}$.
- Sea $\langle E_n \rangle$ en $\mathcal{L}$ y

  $$E = \bigcup_{n=1}^{\infty} E_n.$$

  Ahora, si $B \in \mathcal{B}$

  $$E \cap B = \bigcup_{n=1}^{\infty} (E_n \cap B).$$

  Pero como $E_n \in \mathcal{L}$, se sigue que cada $E_n \cap B$ es medible, por lo tanto también su unión lo es. Esto es, $E \cap B \in \mathcal{B}$ y $E \in \mathcal{L}$.

A2 Funciones medibles

Ejercicio 10. Demostrar la **proposición 7.**
Demostración:
Definimos para cada pareja de enteros (n, k)

$$E_{n,k} = \{x : k2^{-n} < f(x) < (k+1)2^{-n}\} = f^{-1}\left[\left(\frac{k}{2^n}, \frac{k+1}{2^n}\right)\right].$$

Sea

$$\varphi_n = \frac{1}{2^n}\sum_{k=0}^{2^{2n}} k\ \chi_{E_{n,k}}$$

una sucesión de funciones simples (pues la medibilidad de f implica la medibilidad de cada $E_{n,k}$). Veamos que φ_n satisface las propiedades que enuncia la proposición.

- Monotonía

  Como $E_{n,i} \cap E_{n,j} = \emptyset$ para $i \neq j$, para cada $x \in X$

$$\exists! k : x \in E_{n,k} \ \text{ es decir } \ \frac{k}{2^n} < f(x) < \frac{k+1}{2^n} \ \text{ y } \ \varphi_n(x) = \frac{k}{2^n},$$

$$\exists! \hat{k} : x \in E_{n+1,\hat{k}} \ \text{ es decir } \ \frac{\hat{k}}{2^{n+1}} < f(x) < \frac{\hat{k}+1}{2^{n+1}} \ \text{ y } \ \varphi_{n+1}(x) = \frac{k}{2^{n+1}}.$$

  Entonces, de las desigualdades podemos inferir

$$\frac{k}{2^n} < \frac{\hat{k}+1}{2^{n+1}}, \Rightarrow 2k < \hat{k}+1, \Rightarrow 2k \leq \hat{k}$$

$$\therefore \varphi_n(x) = \frac{2k}{2^{n+1}} \leq \frac{\hat{k}}{2^{n+1}} = \varphi_{n+1}(x)$$

- Convergencia

  Por construcción, dado $\epsilon > 0$ existe N natural lo suficientemente grande tal que

$$\varphi_N(x) = \frac{k}{2^N} < f(x) < \frac{k+1}{2^N},$$

$$\Rightarrow 0 < f(x) - \varphi_N(x) < \frac{1}{2^N} < \epsilon.$$

  Con esto, $\lim \varphi_n(x) = f(x)$ para cada $x \in X$.

Finalmente, veamos que si μ es $\sigma-$finita, entonces definimos

$$\phi_n = \varphi \cdot \chi_{X_n}$$

donde X_n es la descomposición finita de X. Esta nueva sucesión satisface

$$\lim \phi_n = \lim \varphi_n = f.$$

Y además, se anula fuera de X_n que es un conjunto de medida finita.

Ejercicio 11. Demostrar la **proposición 8** y mostrar que el resultado es falso si se omite la palabra "completo".
Demostración:
Sea

$$N = \{x \in X : f(x) \neq g(x)\},$$

por hipótesis $\mu N = 0$, entonces

$$\{x \in X : g(x) > \alpha\} = \{x \in N : g(x) > \alpha\} \cup \{x \in N^c : g(x) > \alpha\}. \tag{3}$$

Para comprobar que g es medible, veamos que estos dos conjuntos son medibles. Las funciones dadas son iguales en N^c, entonces

$$\{x \in N^c : g(x) > \alpha\} = \{x \in X : f(x) > \alpha\} \cap N^c \in \mathcal{B}$$

Pues f es medible y $N \in \mathcal{B}$. Por otro lado,

$$\{x \in N : g(x) > \alpha\} \subset N$$

pero N es de medida nula y como μ es completa por hipótesis, se sigue que este conjunto es medible, por lo tanto g es medible.
Si omitimos la palabra "completo" el resultado es falso. Consideremos el espacio $(\mathbb{R}, \mathcal{B} = \text{ Borelianos}, m = \text{ Lebesgue})$ y recordemos que en el ejercicio 3.28 probamos la existencia de un medible A tal que $\mu A = 0$ y $f^{-1}[A]$ no es Boraliano, donde $f(x) = x + f_1(x)$ con f_1 la función ternaria de Cantor. Con esto, sea $f(x) \equiv 0$ y $g(x) = \chi_{f^{-1}[A]}(x)$ tenemos f medible, g no medible y $f = g$ c.s.

A3 Integración

Lema. Si f es integrable en E, entonces f es finita c.s. en E.

Demostración. Sea $E_\infty = \{x : f(x) = \pm\infty\} = \{x : |f|(x) = \infty\}$ y sea $\psi = \chi_{E_\infty}$. Observa que $0 \leq \psi \leq |f|$ en E y que ψ es una función simple. Entonces por definición,

$$\mu(E_\infty) = \int_E \psi \, d\mu \leq \int_E |f| \, d\mu < \infty.$$

Por lo tanto, f es finita c.s. en E. □

Ejercicio 16. Demuestra la Proposición 15.

Demostración. Primero veamos (ii). Si $|h| \leq |f|$,

$$\begin{aligned}
\left| \int_E h \, d\mu \right| &= \left| \int_E h^+ \, d\mu - \int_E h^- \, d\mu \right| \\
&\leq \int_E h^+ \, d\mu + \int_E h^- \, d\mu \\
&= \int_E |h| \, d\mu && \text{(cf. Proposición 13)} \\
&\leq \int_E |f| \, d\mu && (0 \leq |h| \leq |f|) \\
&< \infty.
\end{aligned}$$

Ahora veamos (i). Probamos linealidad para los coeficientes $\alpha = \beta = 1$. Habiendo hecho esto, describimos la idea para el caso general. Como $|f|$ y $|g|$ son integrables sobre E (pues f y g lo son por hipótesis), la Proposición 13 garantiza que $|f| + |g|$ también es integrable sobre E. Más aun, como $|f + g| \leq |f| + |g|$, entonces $|f + g|$ también es integrable sobre E. En resumen, las partes positivas y negativas de f, g, y $f + g$ son integrables sobre E. Sin perdida de generalidad, por el Lema anterior podemos suponer que f y g son finitas c.s. en E. Ahora bien,

$$(f + g)^+ - (f + g)^- = f + g = (f^+ - f^-) + (g^+ - g^-) \text{ en } E.$$

Como cada una de estas funciones toma valores reales en X, podemos reacomodar esta ecuación para que cada lado sea una suma de funciones no negativas. Específicamente, obtenemos

$$(f + g)^+ + f^- + g^- = (f + g)^- + f^+ + g^+ \text{ en } E.$$

Luego, por la Proposición 13,

$$\int_E (f + g)^+ \, d\mu + \int_E f^- \, d\mu + \int_E g^- \, d\mu = \int_E (f + g)^- \, d\mu + \int_E f^+ \, d\mu + \int_E g^+ \, d\mu.$$

Como f, g, y $f + g$ son integrables sobre E, cada una de estas integrales es finita. Por lo tanto, podemos reacomodar esta igualdad para obtener lo deseado. La idea para el caso general es análoga. La única diferencia es que al reacomodar la primera ecuación para que cada lado sea una suma de funciones no negativas, hay que tomar en cuenta el signo de los coeficientes. Específicamente,

$$(\alpha f)^+ = \begin{cases} \alpha f^+ & \text{si } \alpha \geq 0, \\ -\alpha f^- & \text{si } \alpha \leq 0. \end{cases} \qquad \text{y} \qquad (\alpha f)^- = \begin{cases} \alpha f^- & \text{si } \alpha \geq 0, \\ -\alpha f^+ & \text{si } \alpha \leq 0. \end{cases}$$

Esto demuestra (i). Finalmente, veamos que (iii) se sigue de (i). Si $f \leq g$ c.s. en E, entonces $g - f \geq 0$ c.s. en E y por lo tanto,

$$0 \leq \int_E (g - f) \, d\mu = \int_E g \, d\mu - \int_E f \, d\mu.$$

Ejercicio 18. Sea f integrable en X. Demuestra que para todo $\epsilon > 0$ existe $\delta > 0$ tal que

$$\forall E \in \mathcal{B} \left(\mu E < \delta \implies \left| \int_E f \, d\mu \right| < \epsilon \right).$$

Demostración. Supongamos que $f \geq 0$. El caso general se sigue de considerar la parte positiva y negativa de f. Sea $\epsilon > 0$. Como $\int_X f \, d\mu < \infty$, por definición existe una función simple ψ en X tal que

$$0 \leq \psi \leq f \text{ en } X \qquad \text{y} \qquad 0 \leq \int_X f \, d\mu - \int_X \psi \, d\mu < \epsilon/2.$$

Sea $M > 0$ tal que $0 \leq \psi \leq M$. Entonces para todo E medible,

$$\int_E f \, d\mu = \int_E \psi \, d\mu + \int_E (f - \psi) \, d\mu \leq M \cdot \mu E + \epsilon/2.$$

Por lo tanto, $\delta = \frac{\epsilon}{2M}$ cumple lo deseado. □

Ejercicio 19. (Convergencia en medida) Sea $\langle f_n \rangle$ una sucesión de funciones medibles. Decimos que f_n *converge en medida* a f si para todo $\epsilon > 0$ existe $N \in \mathbb{N}$ tal que

$$\mu\{x : |f_n(x) - f(x)| > \epsilon\} < \epsilon$$

para todo $n \geq N$. Decimos que $\langle f_n \rangle$ es una sucesión de Cauchy en medida si para todo $\epsilon > 0$ existe $n \in \mathbb{N}$ tal que

$$\mu\{x : |f_n(x) - f_m(x)| > \epsilon\} < \epsilon$$

para todo $m, n \geq N$. Demuestra que una condición suficiente y necesaria para que una sucesión de funciones converja en medida a una función es que la sucesión sea de Cauchy en medida. Si $\langle f_n \rangle$ converge a f en medida, entonces existe $\langle f_{n_\nu} \rangle$ que converge a f c.s. y por lo tanto convergencia c.s. puede ser remplazada por convergencia en medida en los teoremas de convergencia.

Desigualdad de Chebychev. Sea f no negativa medible. Para todo $\lambda > 0$,

$$\mu\{x : f(x) \geq \lambda\} \leq \frac{1}{\lambda} \int_X f \, d\mu.$$

Demostración. Sea $X_\lambda = \{x : f(x) \geq \lambda\}$ y sea $\varphi = \lambda \cdot \chi_{X_\lambda}$. Observa que $0 \leq \varphi \leq f$ en X y que φ es una función simple. Entonces por definición,

$$\lambda \mu(X_\lambda) = \int_X \varphi \, d\mu \leq \int_X f \, d\mu.$$

Dividiendo esta desigualdad por λ obtenemos lo deseado. □

Ejercicio 20. Si f es integrable, entonces $\{x : f(x) \neq 0\}$ es de medida σ-finita.

Demostración. Sea $X_n = \{x : |f|(x) \geq 1/n\}$. Por la desigualdad de Chebychev,

$$\mu(X_n) \leq n \cdot \int_X |f| \, d\mu < \infty.$$

Más aun,

$$\{x : f(x) \neq 0\} = \bigcup_{n=1}^{\infty} X_n.$$

Por lo tanto, $\{x : f(x) \neq 0\}$ es de medida σ-finita. □

Ejercicio 21. Sea $(X, \mathcal{B}, \mu)$ un espacio de medida y sea g una función no negativa y medible en X. Definimos

$$\nu E := \int_E g \, d\mu$$

a) Demuestra que ν es una medida en $\mathcal{B}$.

b) Sea f no negativa y medible en X. Entonces

$$\int f \, d\nu = \int fg \, d\mu.$$

Demostración. Omitimos la demostración de que ν es una medida. Veamos (b). Primero consideremos el caso en que f es simple. Supongamos que $f = \sum_{i=1}^n c_i \chi_{E_i}$. Entonces

$$\int f \, d\nu = \sum_{i=1}^n c_i \nu E_i = \sum_{i=1}^n c_i \int_{E_i} g \, d\mu.$$

Por otro lado,

$$\int fg \, d\mu = \int \left(\sum_{i=1}^n c_i \chi_{E_i} \right) g \, d\mu = \sum_{i=1}^n c_i \int_{E_i} g \, d\mu.$$

Juntando las últimas dos ecuaciones obtenemos la igualdad deseada para f simple. Para el caso general, sea f una función no negativa y medible en X. Por la Proposición 7 existe una sucesión $\langle \varphi_n \rangle$ de funciones simples con $\varphi_n \leq \varphi_{n+1} \leq f$ tal que $f = \lim \varphi_n$ puntualmente. Por lo tanto,

$$\int f \, d\nu = \lim \int \varphi_n \, d\nu = \lim \int \varphi_n g \, d\mu = \int fg \, d\mu$$

donde la primera y última igualdad son consecuencia del teorema de convergencia monótona. □

A5 Medidas con signo

Ejercicio 26.

a) Da un ejemplo para demostrar que la descomposición de Hahn no es necesariamente única.

b) Demuestra que la descomposición de Hahn es única salvo conjuntos nulos.

Demostración.

a) Sea (A, B) una descomposición de Hahn de X. Si existe un un subconjunto nulo N de A, definimos $A' = A \setminus N$ y $B' = B \cup N$. Entonces (A', B') también es una descomposición de Hahn de X.

b) Sean (A, B) y (A', B') descomposiciones de Hahn de X. Entonces $A \cap B'$ es positivo y negativo (es subconjunto de un positivo y subconjunto de un negativo), es decir, $A \cap B'$ es nulo. Análogamente, $A' \cap B$ es nulo. Por lo tanto,

$$A \triangle A' = (A \setminus A') \cup (A' \setminus A) = (A \cap B') \cup (A' \cap B)$$

es nulo. Análogamente, $B \triangle B'$ es nulo.

$\square$

Ejercicio 27. Existe un único par de medidas mutuamente singulares ν^+ y ν^- tales que $\nu = \nu^+ - \nu^-$.

Demostración. Sean A, B, ν^+, y ν^- como en la Proposición 22 (y el párrafo anterior). Supongamos que λ^+ y λ^- es otro par de medidas mutuamente singulares con $\nu = \lambda^+ - \lambda^-$. Por definición, existen A', B' tales que $X = A' \cup B'$ y $\lambda^-(A') = \lambda^+(B') = 0$. Entonces para todo medible $E \subset A'$,

$$\nu E = \lambda^+ E - \lambda^- E = \lambda^+ E - 0 \geq 0.$$

Es decir, A' es positivo. Análogamente, B' es negativo. Por lo tanto, (A', B') es otra descomposición de Hahn y por el ejercicio anterior, $A \triangle A'$ y $B \triangle B'$ son nulos. Por lo tanto, para todo medible $E \subset X$

$$\begin{aligned}
\nu^+ E &= \nu(E \cap A) \\
&= \nu(E \cap (A \cap A')) + \nu(E \cap (A \setminus A')) \\
&= \nu(E \cap (A \cap A')) && (A \triangle A' \text{ es nulo}) \\
&= \nu(E \cap (A' \cap A)) + \nu(E \cap (A' \setminus A)) && (A \triangle A' \text{ es nulo}) \\
&= \nu(E \cap A') \\
&= \lambda^+(E \cap A') - \lambda^-(E \cap A') \\
&= \lambda^+(E \cap A') && (\text{pues } \lambda^-(A') = 0) \\
&= \lambda^+(E \cap A') + \lambda^+(E \cap B') && (\text{pues } \lambda^+(B') = 0) \\
&= \lambda^+ E.
\end{aligned}$$

Por lo tanto, $\nu^+ = \lambda^+$. Análogamente, $\nu^- = \lambda^-$. $\square$

A6 El teorema de Radon-Nikodym

Lema. Si $\int_E f\,d\mu = 0$ para todo E medible, entonces $f = 0$ c.s.

Demostración. Supongamos lo contrario, es decir, que $\mu\{x : f(x) \neq 0\} > 0$. Como

$$\{x : f(x) \neq 0\} = \{x : f(x) > 0\} \cup \{x : f(x) < 0\}$$

entonces alguno de estos dos conjuntos debe tener medida positiva. Supongamos que es el primero. El caso para el segundo es analogo. Como

$$\{x : f(x) > 0\} = \bigcup_{k=1}^{\infty} \underbrace{\{x : f(x) > 1/k\}}_{=:E_k}$$

entonces existe $k \in \mathbb{N}$ tal que $\mu E_k > 0$. Pero (por definición) $f \geq 1/k$ en E_k y por lo tanto,

$$\int_{E_k} f\,d\mu \geq \int_{E_k} \frac{1}{k}\,d\mu = \frac{1}{k}\mu E_k > 0.$$

Una contradicción. □

Ejercicio 32.

a) Demuestra que el teorema de Radon-Nikodym para medidas finitas implica el teorema para medidas σ-finitas.

b) Demuestra que la unicidad de la derivada de Radon-Nikodym.

Demostración.

a) Supongamos el teorema de Radon-Nikodym para medidas finitas. Sea $(X, \mathcal{B}, \mu)$ un espacio de medida σ-finita. En particular, existe una sucesión E_i de conjuntos disjuntos medibles tales que $\mu E_i < \infty$ y $E = \bigcup_{i=1}^{\infty} E_i$. Denotemos

$$\mathcal{B}_i = \{E \cap E_i \mid E \in \mathcal{B}\} \qquad \text{y} \qquad \mu_i = \mu\restriction_{\mathcal{B}_i}.$$

Ahora bien, sea ν es una medida definida en $\mathcal{B}$ tal que $\nu \ll \mu$. Aplicando el teorema de Radon-Nikodym para medidas finitas a $(E_i, \mathcal{B}_i, \mu_i)$ obtenemos $f_i : E_i \to \mathbb{R}$ medible no negativa tal que para todo $B_i \in \mathcal{B}_i$,

$$\nu B_i = \int_{B_i} f_i\,d\mu_i.$$

Sea $f : E \to \mathbb{R}$ tal que $f(x) = f_i(x)$ si $x \in E_i$. Esta función esta bien definida (pues los E_i son disjuntos), es no negativa (pues cada f_i lo es), y es medible (esto es fácil de verificar). Además, para todo $E \in \mathcal{B}$,

$$\nu E = \nu\left(E \cap \bigcup_{i=1}^{\infty} E_i\right) = \sum_{i=1}^{\infty} \nu(E \cap E_i) = \sum_{i=1}^{\infty} \int_{E\cap E_i} f_i\,d\mu_i = \sum_{i=1}^{\infty} \int_{E\cap E_i} f\,d\mu = \int_E f\,d\mu.$$

La penúltima igualdad es consecuencia de que μ_i es una restricción de μ y de que f_i es una restricción de μ. La última igualdad es consecuencia de la aditividad sobre dominios (disjuntos) de la integral.

b) Es consecuencia del Lema anterior.

□

Ejercicio 33. Demuestra que la derivada de Radon-Nikodym tiene las siguientes propiedades:

a) Si $\nu \ll \mu$ y f es medible no negativa, entonces

$$\int f\, d\nu = \int f \left[\frac{d\nu}{d\mu}\right]\, d\mu.$$

b) Si $\nu_1 \ll \mu$ y $\nu_2 \ll \mu$, entonces

$$\left[\frac{d(\nu_1 + \nu_2)}{d\mu}\right] = \left[\frac{d\nu_1}{d\mu}\right] + \left[\frac{d\nu_2}{d\mu}\right].$$

c) Si $\nu \ll \mu \ll \lambda$, entonces

$$\left[\frac{d\nu}{d\lambda}\right] = \left[\frac{d\nu}{d\mu}\right]\left[\frac{d\mu}{d\lambda}\right].$$

d) Si $\nu \ll \mu$ y $\mu \ll \nu$, entonces

$$\left[\frac{d\nu}{d\mu}\right] = \left[\frac{d\mu}{d\nu}\right]^{-1}.$$

Demostración.

a) Es consecuencia inmediata del Ejercicio 21b.

b) Para todo E medible

$$(\nu_1 + \nu_2)E = \nu_1 E + \nu_2 E = \int_E \left[\frac{d\nu_1}{d\mu}\right] d\mu + \int_E \left[\frac{d\nu_2}{d\mu}\right] d\mu = \int_E \left(\left[\frac{d\nu_1}{d\mu}\right] + \left[\frac{d\nu_2}{d\mu}\right]\right) d\mu$$

Usando esto y la unicidad de la derivada de Radon-Nikodym obtenemos lo deseado.

c) Para todo E medible

$$\nu E = \int_E \left[\frac{d\nu}{d\mu}\right] d\mu = \int_E \left[\frac{d\nu}{d\mu}\right]\left[\frac{d\mu}{d\lambda}\right] d\lambda$$

donde la última igualdad es consecuencia del inciso (a). Usando esto y la unicidad de la derivada de Radon-Nikodym obtenemos lo deseado.

d) Primero notemos que $\left[\frac{d\nu}{d\nu}\right] = 1$ pues $\nu E = \int_E 1\, d\nu$ y por la unicidad de la derivada de Radon-Nikodym. Usando esto y el inciso (c) obtenemos lo deseado.

$\square$

Ejercicio 34.

a) Si ν es una medida con signo tal que $\nu \perp \mu$ y $\nu \ll \mu$, entonces $\nu = 0$.

b) Si ν_1 y ν_2 son singulares con respecto a μ, entonces $c_1\nu_1 + c_2\nu_2$ también lo es.

c) Si ν_1 y ν_2 son absolutamente continuas con respecto a μ, entonces $c_1\nu_1 + c_2\nu_2$ también lo es.

d) Demuestra la afirmación de unicidad en la descomposición de Lebesgue.

Demostración.

a) Como $\nu \perp \mu$, existen A, B disjuntos medibles tales que $X = A \cup B$ y $\nu A = \mu B = 0$. Más aun, como $\nu \ll \mu$, y $\mu B = 0$, entonces $\nu B = 0$. Por lo tanto, para todo E medible

$$\nu E = \nu(E \cap (A \cup B)) = \nu(E \cap A) + \nu(E \cap B) = 0 + 0.$$

b) Como $\nu_i \perp \mu$, existen A_i, B_i disjuntos medibles tales que $X = A_i \cup B_i$ y $\nu_i A_i = \mu_i B_i = 0$. Sean

$$A \coloneqq A_1 \cap A_2 \qquad \text{y} \qquad B \coloneqq B_1 \cup B_2$$

Es fácil verificar que A, B son disjuntos medibles tales que $X = A \cup B$. Ademas,

$$\begin{aligned} (c_1\nu_1 + c_2\nu_2)(A) &= c_1\nu_1 A + c_1\nu_2 A = 0, && \text{(pues } A \subset A_1 \text{ y } A \subset A_2\text{)} \\ \mu B &\leq \mu B_1 + \mu B_2 = 0. \end{aligned}$$

Por lo tanto, $(c_1\nu_1 + c_2\nu_2) \perp \mu$.

c) Es trivial.

d) Supongamos que $\nu = \lambda_0 + \lambda_1$ es otra descomposición de Lebesgue. Entonces

$$\nu_0 + \nu_1 = \lambda_0 + \lambda_1$$

De donde,

$$\nu_0 - \lambda_0 = \lambda_1 - \nu_1$$

El lado izquierdo es singular respecto a μ por (b). El lado derecho es absolutamente continuo respecto a μ por (c). Entonces por (a), es 0. De donde $\nu_0 = \lambda_0$ y $\nu_1 = \lambda_1$.

$\square$

Ejercicio 35. El teorema de Radon-Nikodym se puede extender a medidas con signo.

A7 Los espacios L^p

Ejercicio 40. Demostrar el **teorema 26.**
Demostración:
Primero supongamos $f \geq 0$. Por la **proposición 7**, sabemos que existe φ_n una sucesión de funciones simples tal que $\varphi_n \to f$ puntualmente. Como $0 \leq \varphi_n \leq f$, entonces

$$0 \leq f - \varphi_n \leq f, \Rightarrow |f - \varphi_n|^p \leq |f|^p,$$

y esto implica que $f - \varphi_n \in L^p$, es decir $f - \varphi_n = g \in L^p$, así $f - g = \varphi_n \in L^P$.
Notemos que $|f - \varphi_n|^p \leq |f|^p$ y $|f - \varphi_n|^p \to 0$ .Y por el teorema de convergencia dominada de Lebesgue

$$\lim \int |f - \varphi_n|^p d\mu = \int \lim |f - \varphi_n|^p d\mu = 0$$

Es decir,

$$\lim \|f - \varphi_n\|_p^p = 0.$$

Por lo tanto, dado $\epsilon > 0$ existe $N \in \mathbb{N}$ tal que $\|f - \varphi_N\| \leq \epsilon$.
En general, $f = f^+ - f^-$, y por lo anterior existen ϕ y φ simples tal que $\|f^+ - \phi\| < \epsilon/2$ y $\|f^- - \varphi\| < \epsilon/2$. Con lo que

$$\|f - (\phi - \varphi)\| \leq \|f^+ - \phi\| + \|f^- - \varphi\| < \epsilon$$

Más aún, si μ es $\sigma-$finita, podemos tomar $\phi - \varphi$ de forma que se anule fuera de un conjunto de medida finita.

□

Ejercicio 42. Demostrar el **lema 28**.
Demostración:
Como cada f_n se anula fuera de E_n, i.e., en E^c, f se anula en $\bigcap_{n=1}^{\infty} E_n^c$. Es decir $f \neq 0$ en $\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n$, pero esta es una sucesión disjunta, por lo que $\exists! k : x \in E_k$, entonces

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} f_n(x) = f_k(x) + 0 + 0 + \dots.$$

Si $x \in \cup E_n$,

$$|f(x)|^p = |f_k(x)|^p = |f_k(x)|^p + \sum_{n \neq k}^{\infty} |f_n(x)|^p,$$

pues cada $f_n(x) = 0$ para $n \neq k$. Con esto

$$|f(x)|^p = \sum_{n=1}^{\infty} |f_n(x)|^p,$$

y por el **corolario 14**:

$$\int |f(x)|^p = \int \sum_{n=1}^{\infty} |f_n(x)|^p = \sum_{n=1}^{\infty} \int |f_n(x)|^p,$$

$$\Rightarrow \|f\|^p = \sum_{n=1}^{\infty} \|f_n\|^p.$$

Lo que muestra que $f \in L^p$ si y solo si $\sum \|f_n\|^p < \infty$. En este caso,

$$\|f - \sum_{i=1}^{n} f_i\| \to 0.$$

Pues

$$\lim \|f - \sum_{i=1}^{n} f_i\| = \lim \|\sum_{i=n}^{\infty} f_i\| \leq \lim \sum_{i=n}^{\infty} \|f_i\| \leq \lim \sum_{i=n}^{\infty} \|f_i\|^p = 0.$$

Pues esa última serie es convergente. □