Tarea 5

Diego Leipen Lara

Metodos Variacionales

Considera el problema

$$\begin{cases} -\Delta u + u = f(u) & \text{en } \Omega \\ u = 0 & \text{en } \partial\Omega \end{cases} \tag{1}$$

donde Ω es un dominio acotado en $\mathbb{R}^N$, $N \geq 3$, y f tiene las siguientes propiedades:

(f_1) $f \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R})$ y existen $p \in (2, 2^*)$ tales que

$$|f(s)| \leq a_0 s^{p-1} \quad \text{y} \quad |f'(s)| \leq a_0 s^{p-2} \quad \forall s \in \mathbb{R}.$$

(f_2) $f(s)s < f'(s)s^2$ para todo $s \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$.

(f_3) $\lim_{|s|\to\infty} \frac{f(s)}{s} = \infty$.

(f_4) Existe $\theta > 2$ tal que $0 < \theta F(s) \leq f(s)s$ para todo $s \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ donde

$$F(s) \coloneqq \int_0^s f(t)dt.$$

Sea $J : H_0^1(\Omega) \to \mathbb{R}$ el funcional dado por

$$J(u) \coloneqq \frac{1}{2}||u||_1^2 - \int_\Omega F(u), \qquad \text{donde } F(s) \coloneqq \int_0^s f(t)dt.$$

Denotamos

$$\begin{aligned} \mathcal{N} &\coloneqq \{u \in H_0^1(\Omega) \mid u \neq 0, \;\; J'(u)u = 0\} \\ &= \left\{u \in H_0^1(\Omega) \mid u \neq 0, \;\; ||u||_1^2 - \int_\Omega f(u)u = 0\right\}. \end{aligned}$$

Sea (u_k) una sucesión en $\mathcal{N}$ tal que

$$\lim_{k\to\infty} J(u_k) = \inf_{\mathcal{N}} J =: c_0.$$

Usaremos los siguientes resultados de tareas anteriores.

(T2.1) Si $J : H \to \mathbb{R}$ es una función de clase $\mathcal{C}^1$, $\mathcal{M}$ es una subvariedad clase $\mathcal{C}^1$ de H, y u es un mínimo (o un máximo) de $J|_{\mathcal{M}}$, entonces u es un punto crítico de $J|_{\mathcal{M}}$.

(T2.2) Sea (u_k) una sucesión en $H_0^1(\Omega)$. Si $u_k \rightharpoonup u$ en $H_0^1(\Omega)$ y $u_k \to v$ en $L^p(\Omega)$, entonces $u = v$.

(T4.2) Existe $d_0 > 0$ tal que $||u||_1 \geq d_0$ para todo $u \in \mathcal{N}$. En particular, $\mathcal{N}$ es cerrado en $H_0^1(\Omega)$.

(T4.3) Para cada $u \in H_0^1(\Omega) \setminus \{0\}$ existe $t \in (0, \infty)$ tal que $tu \in \mathcal{N}$. En consecuencia $\mathcal{N} \neq \emptyset$.

(T4.5) Sea $u \in \mathcal{N}$. Entonces u es un punto critico de J si y solo si u es un punto critico de $J|_{\mathcal{N}}$.

(T4.6) Si $u \in \mathcal{N}$, $t \xmapsto{J_u} J(tu)$ es estrictamente creciente en $[0, 1]$ y estrictamente decreciente en $[1, \infty)$.

1. $\inf_{u \in \mathcal{N}} J(u) > 0$.

Demostración. Como $\mathcal{N} \neq \emptyset$ (cf. (T4.3)), entonces $\inf_{u \in \mathcal{N}} J(u) < \infty$. Además, para todo $u \in H_0^1(\Omega)$

$$\begin{aligned}
\theta \int_\Omega F(u) &= \int_{\Omega \setminus u^{-1}(0)} \theta F(u) && \text{(pues } F(0) = 0\text{)} \\
&\leq \int_{\Omega \setminus u^{-1}(0)} f(u)u && \text{(por } (f_4)\text{)} \\
&= \int_\Omega f(u)u. && (2)
\end{aligned}$$

Entonces para todo $u \in \mathcal{N}$

$$\begin{aligned}
J(u) &= \frac{1}{2}||u||_1^2 - \int_\Omega F(u) \\
&\geq \frac{1}{2}||u||_1^2 - \frac{1}{\theta}\int_\Omega f(u)u && \text{(cf. (2))} \\
&= \frac{1}{2}||u||_1^2 - \frac{1}{\theta}||u||_1^2 && \text{(pues } u \in \mathcal{N}\text{)} \\
&= \frac{\theta - 2}{2\theta}||u||_1^2 \\
&\geq \frac{\theta - 2}{2\theta} d_0 > 0 && \text{(cf. (T4.2))}
\end{aligned}$$

Por lo tanto, $\inf_{u \in \mathcal{N}} J(u) > 0$. □

2. La sucesión (u_k) es acotada en $H_0^1(\Omega)$.

Demostración. Como $u_k \in \mathcal{N}$, obtenemos (razonando de la misma manera que en el inciso 1)

$$0 < \frac{\theta - 2}{2\theta}||u_k||_1^2 \leq J(u_k).$$

Como $(J(u_k))$ converge, es acotada en $\mathbb{R}$. Por lo tanto, (u_k) es acotada en $H_0^1(\Omega)$. □

3. Pasando a una subsucesión se tiene que $u_k \rightharpoonup u$ débilmente en $H_0^1(\Omega)$, $u_k \to u$ fuertemente en $L^p(\Omega)$,

$$\lim_{k \to \infty} ||u_k||_1^2 = \lim_{k \to \infty} \int_\Omega f(u_k)u_k = \int_\Omega f(u)u, \tag{3}$$

y $u \neq 0$.

Demostración. Sea (u_j) una subsucesión arbitraria de (u_k). Por el inciso 2, y la propiedad fundamental de la convergencia débil, existe un una subsucesión (u_i) de (u_j) que converge débilmente. Sea $u \in H_0^1(\Omega)$ tal que $u_i \rightharpoonup u$ en $H_0^1(\Omega)$. Más aun, como Ω es acotado y $p < 2^*$, aplicando el teorema de Rellich-Kondrashov y T2.2, podemos elegir una subsucesión (u_n) de (u_i) que cumple además que

$$u_n \to u \text{ fuertemente en } L^p(\Omega).$$

Por lo tanto, existe una subsucesión (u_m) de (u_n) y una función $h \in L^p(\Omega)$ tales que

$$\begin{cases} u_m(x) \to u(x) & \text{pct } x \in \Omega, \\ |u_m(x)| \le h(x) & \text{pct } x \in \Omega. \end{cases} \tag{4}$$

En particular,

$$\begin{aligned} f(u_m(x))u_m(x) &\to f(u(x))u(x) \text{ pct } x \in \Omega, \\ |f(u_m(x))u_m(x)| &\overset{(f_1)}{\le} a_0|u_m(x)|^{p-1}|u_m(x)| = a_0|u_m(x)|^p \le a_0 h(x)^p \text{ pct } x \in \Omega. \end{aligned}$$

Como $h^p \in$[1] $L^1(\Omega)$, esto implica por teorema de convergencia dominada que

$$\lim_{m\to\infty} ||u_m||_1^2 = \lim_{m\to\infty} \int_\Omega f(u_m)u_m = \int_\Omega f(u)u.$$

Como (u_j) es una subsucesión arbitraria de (u_k), y (u_n) es una subsucesión de (u_j), esto implica que

$$\lim_{k\to\infty} ||u_k||_1^2 = \lim_{k\to\infty} \int_\Omega f(u_k)u_k = \int_\Omega f(u)u. \tag{5}$$

A manera de contradicción, supongamos que $u = 0$. Entonces por (5), $\lim_{k\to\infty} ||u_k||_1^2 = 0$. Esto es imposible porque existe $d_0 > 0$ tal que $||u||_1 \ge d_0$ para todo $u \in \mathcal{N}$. Por lo tanto, $u \neq 0$. □

4. $u \in \mathcal{N}$ y $J(u) = c_0$.

Demostración. Sea $t > 0$ fijo y arbitrario. Por (4),

$$\begin{aligned} F(tu_k(x)) &\to F(tu(x)) \text{ pct } x \in \Omega, \\ |F(tu_k(x))| &\overset{(f_4)}{\le} \frac{1}{\theta}|f(tu(x))tu(x)| \le \frac{1}{\theta}a_0|tu(x)|^{p-1}|tu(x)| \le \frac{1}{\theta}a_0 t^p h(x)^p \text{ pct } x \in \Omega. \end{aligned}$$

Como $h \in L^p(\Omega)$, entonces $\frac{1}{\theta}a_0 t^p h(x)^p \in L^1(\Omega)$. Por lo tanto,

$$\lim_{k\to\infty} \int_\Omega F(tu_k) = \int_\Omega F(tu). \tag{6}$$

Como $u_k \in \mathcal{N}$, (T4.6) implica que

$$J(tu_k) \le J(u_k) \text{ para todo } t \ge 0. \tag{7}$$

Sea $t_u \in (0, \infty)$ tal que $t_u u \in \mathcal{N}$ (cf. (T4.3)). Entonces

$$\begin{aligned} c_0 &\le J(t_u u) \\ &= \frac{1}{2}||t_u u||_1^2 - \int_\Omega F(t_u u) \\ &= \frac{1}{2}||t_u u||_1^2 - \lim_{k\to\infty} \int_\Omega F(t_u u_k) && \text{(cf. (6))} \\ &\le \liminf_{k\to\infty} \left(\frac{1}{2}||t_u u_k||_1^2\right) - \lim_{k\to\infty} \int_\Omega F(t_u u_k) && \text{(cf. Proposición 1.59.b)} \\ &= \lim_{k\to\infty} \left(\frac{1}{2}||t_u u_k||_1^2\right) - \lim_{k\to\infty} \int_\Omega F(t_u u_k) && \text{(cf. (3))} \\ &= \lim_{k\to\infty} J(t_u u_k) \\ &\le \lim_{k\to\infty} J(u_k) && \text{(cf. (7))} \\ &= c_0. \end{aligned}$$

[1] Pues $h \in L^p(\Omega)$

En particular,

$$J(t_u u) = c_0, \tag{8}$$

$$\frac{1}{2}||t_u u||_1^2 - \lim_{k\to\infty}\int_\Omega F(t_u u_k) = \lim_{k\to\infty}\left(\frac{1}{2}||t_u u_k||_1^2\right) - \lim_{k\to\infty}\int_\Omega F(t_u u_k). \tag{9}$$

Usando (9) y (6) obtenemos

$$\lim_{k\to\infty}||u_k||_1^2 = ||u||_1^2,$$

y de la Proposición 1.59.b se sigue que $u_k \to u$ fuertemente en $H_0^1(\Omega)$. En particular, $u \in \mathcal{N}$ (pues $\mathcal{N}$ es cerrado en $H_0^1(\Omega)$). Por lo tanto, podemos poner $t_u = 1$. De esta manera, (8) implica $J(u) = c_0$. □

5. Concluye que el problema (1) tiene una solución débil no trivial.

Demostración. El inciso 4 asegura que existe un mínimo u de J en $\mathcal{N}$. De (T2.1) y (T4.5) se sigue que cualquier mínimo de J en $\mathcal{N}$ es un punto critico no trivial de $J : H_0^1(\Omega) \to \mathbb{R}$. Por lo tanto, u es una solución débil no trivial de (1). □