Let m be a countably additive measure defined for all sets in a σ-algebra $\mathfrak{M}$.

1. If A and B are two sets in $\mathfrak{M}$ with $A \subset B$, then $mA \leq mB$. This property is called *monotonicity*.

Dem. $m(B) = m(A \cup (B \setminus A))$

$= m(A) + m(B \setminus A)$

$\geq m(A)$. QED

Let m be a countably additive measure defined for all sets in a σ-algebra $\mathfrak{M}$.

2. Let $\langle E_n \rangle$ be any sequence of sets in $\mathfrak{M}$. Then $m(\bigcup E_n) \leq \sum mE_n$. [Hint: Use Proposition 1.2.] This property of a measure is called *countable subadditivity*.

Dem. Siguiendo la sugerencia, recordemos

2. Proposition: *Let $\mathfrak{A}$ be an algebra of subsets and $\langle A_i \rangle$ a sequence of sets in $\mathfrak{A}$. Then there is a sequence $\langle B_i \rangle$ of sets in $\mathfrak{A}$ such that $B_n \cap B_m = \varnothing$ for $n \neq m$ and*

$$\bigcup_{i=1}^{\infty} B_i = \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i.$$

Mas aun, recordemos que esto se demuestra definiendo $B_1 := A_1$ y para $n \geq 2$,
$$B_n = A_n \sim [A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_{n-1}] = A_n \cap \tilde{A}_1 \cap \tilde{A}_2 \cap \cdots \cap \tilde{A}_{n-1}.$$

En particular, $B_n \subseteq A_n$ $\forall n$. Ahora bien, considerando $\mathfrak{A} = \mathfrak{M}$ y $A_n = E_n$, sea (B_n) como en la Prop 1.2. Entonces

$m(\cup E_n) = m(\cup B_n) = \sum m(B_n) \leq \sum m(E_n)$. QED

Let m be a countably additive measure defined for all sets in a σ-algebra $\mathfrak{M}$.

3. If there is a set A in $\mathfrak{M}$ such that $mA < \infty$, then $m\emptyset = 0$.

Dem. Como $\phi \subseteq A$, entonces $m\phi \leq mA < \infty$.

Por otro lado, $m\phi = m(\phi \cup \phi) = m\phi + m\phi$.

Pero el unico real (no extendido) que satisface esto es el 0. $\therefore$ $m\phi = 0$. QED.

4. Let nE be ∞ for an infinite set E and be equal to the number of elements in E for a finite set. Show that n is a countably additive set function which is translation invariant and defined for all sets of real numbers. This measure is called the **counting measure**.

Dem. Sea $(E_k)_{k=1}^{\infty}$ una sucesion de conjuntos disjuntos.

Caso 1: $\bigcup E_k$ es infinito. Entonces $n(\bigcup_k E_k) = \infty$.

Ademas, $\sum_k nE_k = \infty$ pues de lo contrario, (como $nE \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$)

$\bigcup E_k$ seria una union finita de conjuntos finitos, contradiciendo el caso.

Caso 2: $\bigcup E_k$ es finito. Entonces todo E_k es finito y $\therefore$

$n(\bigcup_k E_k) = \text{card}(\bigcup_k E_k) = \sum_k \text{card}(E_k) = \sum_k n(E_k)$

donde la segunda igualdad es porque son disjuntos (y finitos).

$\therefore$ n es contablemente aditiva. Además n es invariante bajo traslaciones pues $x \mapsto x+y$ con y fijo es una biyeccion entre E y $E+y$. QED.

5. Let A be the set of rational numbers between 0 and 1, and let $\{I_n\}$ be a *finite* collection of open intervals covering A. Then $\sum l(I_n) \geq 1$.

Dem. Notemos que $[0,1] = \bar{A} \subseteq \overline{\bigcup I_n} = \bigcup \bar{I}_n$ donde la primera igualdad se cumple porque $A = [0,1] \cap \mathbb{Q}$ es denso en $[0,1]$ y la ultima igualdad se cumple porque la cerradura de una union finita es la union de las cerraduras. Por lo tanto,

$$\sum l(I_n) = \sum m^* I_n = \sum m^* \bar{I}_n \geq m^*(\bigcup \bar{I}_n)$$
$$\geq m^*([0,1]) = 1. \quad \text{QED}$$

6. Prove Proposition 5.

5. Proposition: *Given any set A and any $\epsilon > 0$, there is an open set O such that $A \subset O$ and $m^*O \leq m^*A + \epsilon$. There is a $G \in \mathcal{G}_\delta$ such that $A \subset G$ and $m^*A = m^*G$.*

Dem. Si $m^*A = \infty$, no hay nada que probar. Por eso, supongamos que $m^*A < \infty$ y sea $\varepsilon > 0$. Entonces (por def de m^* y por propiedades del infimo) existe una sucesión numerable de intervalos abiertos (I_n) que cubren A y satisfacen $\sum l(I_n) < m^*A + \varepsilon$. Definimos $O := \bigcup I_n$. Entonces $A \subseteq O$ y (por la subaditividad de m^*)

$$m^*O = m^*(\bigcup I_n) \leq \sum m^* I_n < m^*A + \varepsilon.$$

Esto demuestra la primera parte de la proposicion. Ahora bien esto implica que para todo $n \in \mathbb{N}$ existe O_n tal que

$A \subseteq O_n$ y $m^* O < m^* A + \frac{1}{n}$. Definimos $G := \bigcap O_n \in G_\delta$.
Entonces $A \subseteq G \subseteq O_n$. De donde $m^* A \leq m^* G$ y
$m^* G \leq m^* O_n < m^* A + \frac{1}{n}$. Haciendo $n \to \infty$ obtenemos
$m^* G \leq m^* A$. Por lo tanto $m^* A = m^* G$. QED

7. Prove that m^* is translation invariant.

Dem. Sean $E \subseteq \mathbb{R}$ y $y \in \mathbb{R}$ fijos y arbitrarios.
Sea (I_n) una sucesion numerable de intervalos que cubren E.
Entonces $E + y \subseteq \bigcup (I_n + y)$. Entonces (por def de $m^*(E+y)$)
$m^*(E+y) \leq \sum \ell(I_n + y) = \sum \ell(I_n)$. Entonces
(por def de $m^* E$) $m^*(E+y) \overset{(1)}{\leq} m^* E$. Mas aun,
$m^* E = m^*((E^* + y) + (-y)) \overset{(2)}{\leq} m^*(E+y)$
pues (2) es un caso particular de (1).
$\therefore$ $m^*(E+y) = m^* E$. QED

8. Prove that if $m^* A = 0$, then $m^*(A \cup B) = m^* B$.

Dem. Por la subaditividad de m^* (cf. Prop 2),
$m^*(A \cup B) \leq m^* A + m^* B = m^* B$. QED

9. Show that if E is a measurable set, then each translate $E + y$ of E is also measurable.

Dem. Sean $A \subseteq \mathbb{R}$ y $y \in \mathbb{R}$ fijos y arbitrarios. Como E es medible,

$$m^*(A-y) = m^*((A-y)\cap E) + m^*((A-y)\cap E^c) \quad \cdots (1)$$

Por otro lado, veamos que

$$((A-y)\cap E) + y = A \cap (E+y) \quad \cdots (2)$$

$\subseteq \mid$ $x \in (A-y)\cap E \implies$

$x = a - y$, $a \in A$ & $x \in E \implies$

$x + y = a \in A$ & $x+y \in E+y \implies$

$x+y \in A \cap (E+y)$.

$\supseteq \mid$ $z \in A \cap (E+y) \implies$

$z - y \in A - y$ & $z - y \in E \implies$

$z - y \in (A-y)\cap E$.

Esto demuestra (2). En particular,

$$((A-y)\cap E^c) + y = A \cap (E^c + y) = A \cap (E+y)^c \quad \cdots (3)$$

donde la ultima igualdad es porque $E^c + y = (E+y)^c$. Ahora bien, usando la invarianza bajo traslación de m^*, podemos sumar "y" a cada uno de los argumentos en (1). Luego, sustituyendo (1) y (2) obtenemos

$$m^* A = m^*(A \cap (E+y)) + m^*(A \cap (E+y)^c). \qquad \text{QED}$$

Cabe recalcar que hay demostraciones mas sencillas usando la caracterización de medibilidad de la prop 15.

10. Show that if E_1 and E_2 are measurable, then $m(E_1 \cup E_2) + m(E_1 \cap E_2) = mE_1 + mE_2$.

Dem. $m(E_1 \cup E_2) = m(E_1 \cup (E_2 \setminus (E_1 \cap E_2)))$

$= mE_1 + m(E_2 \setminus (E_1 \cap E_2))$

$= mE_1 + mE_2 - m(E_1 \cap E_2)$. QED

11. Show that the condition $mE_1 < \infty$ is necessary in Proposition 14 by giving a decreasing sequence $\langle E_n \rangle$ of measurable sets with $\varnothing = \bigcap E_n$ and $mE_n = \infty$ for each n.

Dem. Considera $E_n := (n, \infty)$. QED

12. Let $\langle E_i \rangle$ be a sequence of disjoint measurable sets and A any set. Then $m^*(A \cap \bigcup_{i=1}^{\infty} E_i) = \sum_{i=1}^{\infty} m^*(A \cap E_i)$.

Dem. $\underline{\leq}$ $m^*(A \cap \bigcup_{i=1}^{\infty} E_i) = m^*(\bigcup_{i=1}^{\infty} (A \cap E_i))$

$\leq \sum_{i=1}^{\infty} m^*(A \cap E_i)$.

$\underline{\geq}$ $m^*(\bigcup_{i=1}^{\infty} (A \cap E_i)) \geq m^*(\bigcup_{i=1}^{n} (A \cap E_i))$

$\overset{\text{Lema 9}}{=} \sum_{i=1}^{n} m^*(A \cap E_i)$.

Haciendo $n \to \infty$ obtenemos lo deseado. QED

13. Prove Proposition 15. [Hints:

a. Show that for $m^*E < \infty$, (i) $\Rightarrow$ (ii) $\Leftrightarrow$ (vi) (cf. Proposition 5).

b. Use (a) to show that for arbitrary sets E, (i) $\Rightarrow$ (ii) $\Rightarrow$ (iv) $\Rightarrow$ (i).

c. Use (b) to show that (i) $\Rightarrow$ (iii) $\Rightarrow$ (v) $\Rightarrow$ (i).]

15. Proposition: *Let E be a given set. Then the following five statements are equivalent:*

i. *E is measurable;*
ii. *given $\epsilon > 0$, there is an open set $O \supset E$ with $m^*(O \sim E) < \epsilon$;*
iii. *given $\epsilon > 0$, there is a closed set $F \subset E$ with $m^*(E \sim F) < \epsilon$;*
iv. *there is a G in $\mathcal{G}_\delta$ with $E \subset G$, $m^*(G \sim E) = 0$;*
v. *there is an F in $\mathcal{F}_\sigma$ with $F \subset E$, $m^*(E \sim F) = 0$;*

If m^*E is finite, the above statements are equivalent to:

vi. *given $\epsilon > 0$, there is a finite union U of open intervals such that $m^*(U \triangle E) < \epsilon$.*

Dem. Recordemos la Prop 5.

5. Proposition: *Given any set A and any $\epsilon > 0$, there is an open set O such that $A \subset O$ and $m^*O \leq m^*A + \epsilon$. There is a $G \in \mathcal{G}_\delta$ such that $A \subset G$ and $m^*A = m^*G$.*

a) Supongamos que $m^*E < \infty$

$(i) \Rightarrow (ii)$: Sea $\varepsilon > 0$. Por la Prop 5, existe O abierto tal que $E \subseteq O$ y $m^*O \leq m^*A + \varepsilon/2$. Entonces $m^*(O \setminus E) = m^*O - m^*E \leq \varepsilon/2 < \varepsilon$ donde la primera igualdad se cumple porque E es medible.

$(ii) \Rightarrow (vi)$: Sea $\varepsilon > 0$ y sea O el abierto inducido por la hipotesis (ii) para E. Ponemos $\mathcal{U} := O$. Entonces $m^*(\mathcal{U} \Delta E) = m^*(O \setminus E) < \varepsilon$ donde la primera igualdad se cumple porque $E \subseteq O = \mathcal{U}$.

$(vi) \Rightarrow (ii)$: PENDIENTE

b) (i) $\Rightarrow$ (ii): La demostración en (a) no depende de que $m^* E < \infty$.

(ii) $\Rightarrow$ (iv): Por hipotesis, $\forall n \in \mathbb{N}$ $\exists O_n$ abierto tal que $E \subseteq O_n$ y $m^*(O_n - E) < \frac{1}{n}$. Definimos $G := \bigcap O_n \in G_\delta$. Entonces $G \subseteq O_n$ $\forall n$ y así $m^*(G \setminus E) \leq m^*(O_n \setminus E) < \frac{1}{n} \longrightarrow 0$.

(iv) $\Rightarrow$ (i): Como $m^*(G \setminus E) = 0$, entonces $G \setminus E$ es medible. Entonces $E = G \setminus (G \setminus E)$ es medible.

c) (i) $\Rightarrow$ (iii): Como (i) por hipotesis, entonces tambien tenemos (ii). Sea $\varepsilon > 0$, por (ii) existe O abierto tal que $E^c \subseteq O$ y $m^*(O \setminus E^c) < \varepsilon$. Entonces $F = O^c$ es cerrado, $F \subseteq E$ y $m^*(E \setminus F) = m^*(E \cap F^c) = m^*(E \cap O) = m^*(O \setminus E^c) < \varepsilon$.

(iii) $\Rightarrow$ (v): Es analoga a (ii) $\Rightarrow$ (iv).

(v) $\Rightarrow$ (i): Es analoga a (iv) $\Rightarrow$ (i).

QED

14. a. Show that the Cantor ternary set (Problem 2.36) has measure zero.

b. Let F be a subset of $[0, 1]$ constructed in the same manner as the Cantor ternary set except that each of the intervals removed at the n^{th} step has length $\alpha 3^{-n}$ with $0 < \alpha < 1$. Then F is a closed set, $\tilde{F}$ dense in $[0, 1]$ and $mF = 1 - \alpha$. Such a set F is called a *generalized Cantor set.*

Dem. a) En el ejercicio 2.36 demostramos que $C = \bigcap F_n$ donde $F_1 := [0, 1/3] \cup [2/3, 1]$ y suponiendo que $F_n = \bigcup_{i=1}^{2^n} [\alpha_i, \beta_i]$ esta dado, definimos

$$F_{n+1} := \bigcup_{i=1}^{2^n} [\alpha_i, \alpha_i + \tfrac{1}{3^{i+1}}] \cup [\beta_i - \tfrac{1}{3^{i+1}}, \beta_i].$$

Por lo tanto, F_n es una union disjunta de 2^n intervalos cerrados de longitud $1/3^n$. Luego, por la Prop 14,

$$mC = m\left(\bigcap_{i=1}^{\infty} F_i\right) = \lim_{n\to\infty} mF_n = \lim_{n\to\infty} 2^n \frac{1}{3^n} = 0.$$

b) Analogamente, F es de la forma $F = \bigcap F_n$ donde cada F_n es una union (disjunta) de intervalos cerrados. Por lo tanto F es cerrado. Para ver que F^c es denso en $[0,1]$, sea $x \in F$ y sea I cualquier intervalo abierto que contiene a x. Como $x \in \bigcap F_n$, para todo $n \in \mathbb{N}$ existe un intervalo I_n de F_n que contiene a x. Como este intervalo tiene longitud $\xrightarrow{n\to\infty} 0$, podemos escoger n suficientemente grande para que $I_n \subseteq I$. Sea y_0 cualquier punto del intervalo que quitamos de I_n en la construcción de F_{n+1}. Entonces $y_0 \in I \cap F^c$. En resumen, acabamos de demostrar que para cualquier $x \in [0,1] \setminus F^c = F$ y cualquier intervalo I que contiene a x, existe $y_0 \in F^c \cap I$.

$\therefore$ F^c es denso en $[0,1]$.

Ahora bien, para ver que $m^* F = 1-\alpha$, notemos que en el primer paso, quitamos un intervalo de longitud $\alpha 3^{-1}$. En el segundo paso, quitamos dos intervalos de longitud $\alpha 3^{-2}$, Entonces, $mF_2 = 1 - 2\alpha 3^{-2} - \alpha 3^{-1}$. Siguiendo de esta manera notamos que, en general, $mF_n = 1 - \sum_{k=1}^{n} 2^{k-1} \alpha 3^{-k}$.

Por lo tanto,

$$mF = m\left(\cap F_n\right) = \lim_{n\to\infty} mF_n = 1 - \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} 2^{k-1}\alpha 3^{-k}.$$

$$= 1 - \frac{\alpha}{3}\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{2}{3}\right)^{n-1} = 1 - \frac{\alpha}{3}\left(\frac{1}{1-\frac{2}{3}}\right) = 1-\alpha. \quad \text{QED}$$

15. Show that if E is measurable and $E \subset P$, then $mE = 0$. [Hint: Let $E_i = E \stackrel{\circ}{+} r_i$. Then $\langle E_i \rangle$ is a disjoint sequence of measurable sets and $mE_i = mE$. Thus $\sum mE_i = m \bigcup E_i \leq m[0, 1]$.]

Dem. El hint escencialmente resuelve el ejercicio. Solo resta notar que $\sum_{i=1}^{\infty} mE = \sum_{i=1}^{\infty} mE_i \leq 1$ y por lo tanto, debe ser $m^* E = 0$. QED

16. Show that, if A is any set with $m^*A > 0$, then there is a nonmeasurable set $E \subset A$. [Hint: If $A \subset (0, 1)$, let $E_i = A \cap P_i$. The measurability of E_i implies $mE_i = 0$, while $\sum m^*E_i \geq m^*A > 0$.]

Dem. Notemos que

$$0 < m^* A = m^*\left(\bigcup_{n\in\mathbb{Z}} (A\cap[n,n+1))\right) \leq \sum_{n\in\mathbb{Z}} m^*(A\cap[n,n+1)).$$

$\therefore \exists\, n_0 \in \mathbb{Z}$ t.q. $m^*(A\cap[n_0,n_0+1)) > 0$.

Sea $A_0 := A\cap[n_0,n_0+1) - n_0$. Entonces $A_0 \subseteq [0,1)$ y podemos aplicar el hint para encontrar $E_0 \subseteq A_0$ no medible. $\therefore E = E_0 + n_0 \subseteq A\cap[n_0,n_0+1) \subseteq A$ es no medible. QED

17. a. Give an example where $\langle E_i \rangle$ is a disjoint sequence of sets and $m^*(\bigcup E_i) < \sum m^*E_i$.

b. Give an example of a sequence of sets $\langle E_i \rangle$ with $E_i \supset E_{i+1}$, $m^*E_i < \infty$, and $m^*(\bigcap E_i) < \lim m^*E_i$.

Dem. a) Considera $E_i := P_i$. Entonces los E_i son disjuntos y $m^*(\bigcup E_i) = m^*([0,1]) = 1$

Pero $\sum m^* E_i = \sum m^* P = \infty$ pues $m^* P = 1$.

b) PENDIENTE