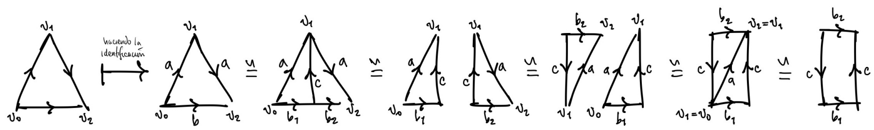
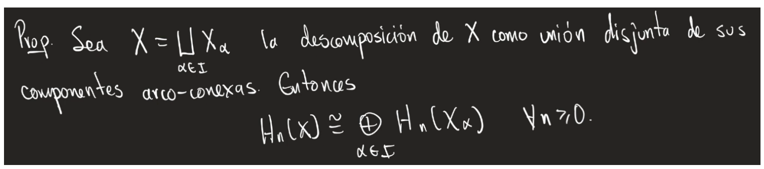
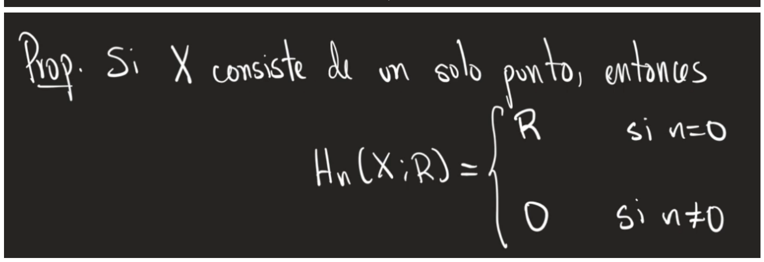
1. Veamos que el espacio obtenido a partir del 2-simplejo $[v_0, v_1, v_2]$ al identificar $[v_0, v_1]$ con $[v_1, v_2]$ de manera que se preserve la orientación (ie, $v_0 \sim v_1$ y $v_1 \sim v_2$) es homeomorfo a la banda de Möbius.



Como la ultima figura es una representación de la banda de Möbius, obtenemos lo deseado. $\square$

2. Usaremos las siguientes proposiciones de los videos:





Como $\mathbb{Q}$ tiene la topología heredada de $\mathbb{R}$ entonces, su descomposición en componentes conexas es

$$\mathbb{Q} = \bigcup_{x \in \mathbb{Q}} \{x\}$$

Entonces, por la primera proposición, tenemos el primero de los siguientes isomorfismos.

$$\begin{aligned} H_n(\mathbb{Q}) &\cong \bigoplus_{x \in \mathbb{Q}} H_n(\{x\}) \\ &\cong \begin{cases} \bigoplus_{x \in \mathbb{Q}} R & \text{si } n = 0 \\ 0 & \text{si } n > 0 \end{cases} \end{aligned}$$

El segundo isomorfismo se cumple por la segunda proposición. $\square$

Diego Leipen Lara
Estoy inscrito