Tarea 2: Espacios de Sobolev

Temas selectos de ecuaciones diferenciales
Espacios de Sobolev y ecuaciones diferenciales parciales de tipo elíptico
Semestre 2024-2

Diego Leipen Lara

1. Usa la transformada de Fourier para demostrar que si $u \in H^s(\mathbb{R}^n)$ con $s > \frac{n}{2}$ entonces $u \in L^\infty(\mathbb{R}^n)$ y

$$\|u\|_{L^\infty(\mathbb{R}^n)} \leq C\|u\|_{H^s(\mathbb{R}^n)}$$

donde $C = C(n,s) > 0$ es una constante independiente de u.

Demostración. Sea $u \in H^s(\mathbb{R}^n)$. Para todo $x \in \mathbb{R}^n$

$$\begin{aligned}
|u(x)| &= \left| \int_{\mathbb{R}^n} \exp(2\pi i\langle x, \xi\rangle)\hat{u}(\xi)\, d\xi \right| && (u = (\widehat{u})^\vee) \\
&\leq \int_{\mathbb{R}^n} |\exp(2\pi i\langle x,\xi\rangle)|\, |\hat{u}(\xi)|\, d\xi \\
&= \int_{\mathbb{R}^n} |\hat{u}| && (|\exp(2\pi i\langle x,\xi\rangle)| = 1) \\
&= \|\hat{u}\|_{L^1(\mathbb{R}^n)}.
\end{aligned}$$

Esto implica la primera de las siguientes igualdades

$$\begin{aligned}
\|u\|_{L^\infty(\mathbb{R}^n)} &\leq \|\widehat{u}\|_{L^1(\mathbb{R}^n)} \\
&\leq \|(1+|\xi|^2)^{-s/2}\|_{L^2(\mathbb{R}^n)} \|(1+|\xi|^2)^{s/2}\widehat{u}\|_{L^2(\mathbb{R}^n)} && \text{(Hölder)} \\
&= C\|u\|_{H^s(\mathbb{R}^n)}
\end{aligned}$$

donde $C \coloneqq \|(1+|\xi|^2)^{-s/2}\|_{L^2(\mathbb{R}^n)} < \infty$ pues

$$\begin{aligned}
\|(1+|\xi|^2)^{-s/2}\|^2_{L^2(\mathbb{R}^n)} &= \int_{B_1} (1+|\xi|^2)^{-s}\, d\xi + \int_{\mathbb{R}^n \setminus B_1} (1+|\xi|^2)^{-s}\, d\xi \\
&\leq \underbrace{\int_{B_1} (1+|\xi|^2)^{-s}\, d\xi}_{=:I_1} + \underbrace{\int_{\mathbb{R}^n \setminus B_1} |\xi|^{-2s}\, d\xi}_{=:I_2}.
\end{aligned}$$

Como B_1 es acotado y $(1+|\xi|^2)^{-s} \leq 1$ para todo $\xi \in \mathbb{R}^n$, entonces $I_1 < \infty$. Como $-2s+n < 0$ (pues $s > \frac{n}{2}$) entonces $I_2 < \infty$ (cf. Proposición 13.31 del libro de Análisis de Mónica Clapp). □

Lema 1. Sea $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ abierto y acotado. Si $1 \leq p < q < \infty$, entonces $L^q(\Omega) \subset L^p(\Omega)$ y

$$\|u\|_p \leq |\Omega|^{(q-p)/pq}\|u\|_q \qquad \forall u \in L^q(\Omega).$$

Demostración. Sean $r \coloneqq q/p$ y $r' \coloneqq q/(q-p)$. Entonces $1/r + 1/r' = 1$ y por Hölder,

$$\|u\|_p^p = \|u^p\|_1 \leq \|1\|_{r'}\|u^p\|_r = |\Omega|^{1/r'} \left(\int_\Omega |u|^{pr} \right)^{1/r} = |\Omega|^{q/(q-p)} \left(\int_\Omega |u|^q \right)^{p/q} = |\Omega|^{(q-p)/q}\|u\|_q^p.$$

□

Lema 2. Sea $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ abierto y acotado y sean $p, q \in [1, \infty)$. Si $r \in \mathbb{R}$ es tal que $1/r \geq 1/p + 1/q$, entonces existe $C > 0$ constante tal que

$$\|uv\|_r \leq C\|u\|_p\|v\|_q \qquad \forall u \in L^p(\Omega),\ \forall v \in L^q(\Omega).$$

Demostración. Sean $\tilde{p} = p/r$ y $\tilde{q} = p/(p-r)$. Entonces $1/\tilde{p} + 1/\tilde{q} = 1$ y por Hölder,

$$\|uv\|_r^r = \|u^r v^r\|_1 \leq \|u^r\|_{\tilde{p}}\|v^r\|_{\tilde{q}} = \left(\int_\Omega |u|^{r\tilde{p}}\right)^{1/\tilde{p}} \left(\int_\Omega |v|^{r\tilde{q}}\right)^{1/\tilde{q}} = \|u\|_p^r \|v\|_{r\tilde{q}}^r. \tag{1}$$

Por otro lado, como $1/r \geq 1/p + 1/q$, entonces $(p-r)/pr = 1/r - 1/p \geq 1/q$, de donde $q \leq pr/(p-r) = r\tilde{q}$. Luego por el lema 1, existe $C > 0$ constante tal que

$$\|v\|_{r\tilde{q}} \leq C\|v\|_q. \tag{2}$$

Juntando (1) y (2) obtenemos lo deseado. □

2. Sea $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ abierto, acotado con $\partial\Omega \in \mathcal{C}^1$ y $n \geq 2$. Sean $p, q \in [1, n)$ y

$$\frac{1}{s} = \frac{1}{p} + \frac{1}{q} - \frac{1}{n}.$$

Demuestra que si $u \in W^{1,p}(\Omega)$ y $v \in W^{1,q}(\Omega)$ entonces $uv \in W^{1,s}(\Omega)$.

Demostración. Sean $u \in W^{1,p}(\Omega)$ y $v \in W^{1,q}(\Omega)$. Como Ω es acotado con $\partial\Omega \in \mathcal{C}^1$, el teorema de encaje de Sobolev implica que $u \in L^{p^*}(\Omega)$ y $v \in L^{q^*}(\Omega)$. Como

$$\frac{1}{s} = \frac{1}{p} + \frac{1}{q} - \frac{1}{n} \geq \frac{1}{p} - \frac{1}{n} + \frac{1}{q} - \frac{1}{n} = \frac{n-p}{np} + \frac{n-q}{nq} = \frac{1}{p^*} + \frac{1}{q^*},$$

el lema 2 implica que $uv \in L^s(\Omega)$. Más aun, como $D_i v \in L^q(\Omega)$, y

$$\frac{1}{s} = \frac{1}{p} + \frac{1}{q} - \frac{1}{n} = \frac{n-p}{np} + \frac{1}{q} = \frac{1}{p^*} + \frac{1}{q},$$

el lema 2 implica que $uD_i v \in L^s(\Omega)$. Análogamente, $vD_i u \in L^s(\Omega)$. Entonces $D_i(uv) = uD_i v + vD_i u \in L^s(\Omega)$. Por lo tanto, $uv \in W^{1,s}(\Omega)$. □

3. Suponiendo que $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ es abierto, acotado con $\partial\Omega \in \mathcal{C}^1$, integra por partes para demostrar la siguiente desigualdad de interpolación:

$$\|Du\|_{L^2(\Omega)} \leq C\|u\|_{L^2(\Omega)}^{1/2}\|D^2u\|_{L^2(\Omega)}^{1/2},$$

para toda $u \in H_0^1(\Omega) \cap H^2(\Omega)$.

Demostración. En lo que sigue, denotamos por $\langle \cdot, \cdot \rangle$ al producto punto usual en $\mathbb{R}^n$. Veamos que

$$\int_\Omega \langle Dv, Dw \rangle \leq \|v\|_{L^2(\Omega)}\|D^2 w\|_{L^2(\Omega)} \qquad \forall v \in C_c^\infty(\Omega),\ \forall w \in C^\infty(\overline{\Omega}). \tag{3}$$

Para todo $v \in C_c^\infty(\Omega)$ y $w \in C^\infty(\overline{\Omega})$,

$$\begin{aligned}
\int_\Omega \langle Dv, Dw \rangle &= \int_\Omega \sum_{i=1}^n \frac{\partial v}{\partial x_i}\frac{\partial w}{\partial x_i} = -\sum_{i=1}^n \int_\Omega v \frac{\partial^2 w}{\partial x_i^2} \leq \sum_{i=1}^n \int_\Omega |v| \left|\frac{\partial^2 w}{\partial x_i^2}\right| \\
&\leq \sum_{i=1}^n \left(\left(\int_\Omega |v|^2\right)^{1/2} \left(\int_\Omega \left|\frac{\partial^2 w}{\partial x_i^2}\right|^2\right)^{1/2} \right) = \left(\int_\Omega |v|^2\right)^{1/2} \left(\sum_{i=1}^n \left(\int_\Omega \left|\frac{\partial^2 w}{\partial x_i^2}\right|^2\right)^{1/2} \right) \leq C\|D^2 w\|_{L^2(\Omega)},
\end{aligned}$$

donde la segunda igualdad se cumple porque v tiene soporte compacto (el termino frontera se anula cuando integramos por partes) y $C := \|v\|_{L^2(\Omega)}\sqrt{n}$, pues $\sum_{i=1}^n a_k^{1/2} \leq \sqrt{n}(\sum_{i=1}^n a_k)^{1/2}$ para todo $a_1, \ldots, a_k \in \mathbb{R}^n$ (esto es consecuencia de la desigualdad de Cauchy-Schwarz con los vectores $(1, \ldots, 1)$ y $(a_1^{1/2}, \ldots, a_n^{1/2})$).

Ahora bien, sea $u \in H_0^1(\Omega) \cap H^2(\Omega)$. Como $u \in H_0^1(\Omega)$, por def., existe una sucesión (v_k) en $C_c^\infty(\Omega)$ tal que

$$\sum_{|\alpha|\leq 1} \|D^\alpha(u - v_k)\|_{L^2(\Omega)}^2 =: \|u - v_k\|_{H_0^1(\Omega)}^2 \xrightarrow{k\to\infty} 0. \tag{4}$$

En particular,

$$\|u - v_k\|_{L^2(\Omega)}^2 \leq \|u - v_k\|_{H_0^1(\Omega)}^2 \xrightarrow{k\to\infty} 0.$$

De donde,

$$\|v_k\|_{L^2(\Omega)} \xrightarrow{k\to\infty} \|u\|_{L^2(\Omega)}. \tag{5}$$

Análogamente, como $u \in H^2(\Omega)$ y Ω es acotado con $\partial\Omega \in \mathcal{C}^1$, por el teorema de aproximación global por funciones suaves hasta la frontera, existe una sucesión (w_k) en $C^\infty(\overline{\Omega})$ tal que

$$\sum_{|\alpha|\leq 2} \|D^\alpha(u - w_k)\|_{L^2(\Omega)}^2 =: \|u - w_k\|_{H^2(\Omega)}^2 \xrightarrow{k\to\infty} 0.$$

En particular,

$$\sum_{|\alpha|=2} \|D^\alpha(u - w_k)\|_{L^2(\Omega)}^2 \leq \|u - w_k\|_{H^2(\Omega)}^2 \xrightarrow{k\to\infty} 0.$$

De donde,

$$\|D^2 w_k\|_{L^2(\Omega)}^2 = \sum_{|\alpha|=2} \|D^\alpha w_k\|_{L^2(\Omega)}^2 \xrightarrow{k\to\infty} \sum_{|\alpha|=2} \|D^\alpha u\|_{L^2(\Omega)}^2 = \|D^2 u\|_{L^2(\Omega)}^2. \tag{6}$$

Por otro lado, notemos que

$$\begin{aligned}
\left| \int_\Omega \langle Dv_k, Dw_k\rangle - \|Du\|_{L^2(\Omega)}^2 \right| &= \left| \int_\Omega \langle Dv_k, Dw_k\rangle - \int_\Omega \langle Du, Du\rangle \right| \\
&= \left| \int_\Omega \big(\langle Dv_k, Dw_k - Du\rangle + \langle Dv_k - Du, Du\rangle\big) \right| \\
&\leq \int_\Omega \Big(\big|\langle Dv_k, Dw_k - Du\rangle\big| + \big|\langle Dv_k - Du, Du\rangle\big| \Big) \\
&\leq \int_\Omega \big(|Dv_k|\,|Dw_k - Du| + |Dv_k - Du|\,|Du| \big) \\
&\leq \|Dv_k\|_{L^2(\Omega)} \|Dw_k - Du\|_{L^2(\Omega)} + \|Dv_k - Du\|_{L^2(\Omega)} \|Du\|_{L^2(\Omega)} \\
&\leq M \|Dw_k - Du\|_{L^2(\Omega)} + \|Dv_k - Du\|_{L^2(\Omega)} \|Du\|_{L^2(\Omega)} \xrightarrow{k\to\infty} 0
\end{aligned}$$

donde $M > 0$ es una cota de la sucesión convergente $(\|Dv_k\|_{L^2(\Omega)})$, ver (4). En otras palabras,

$$\int_\Omega \langle Dv_k, Dw_k\rangle \xrightarrow{k\to\infty} \|Du\|_{L^2(\Omega)}^2. \tag{7}$$

Ahora bien, como $v_k \in C_c^\infty(\Omega)$ y $w_k \in C^\infty(\overline{\Omega})$ para todo $k \in \mathbb{N}$, la ecuación (3) implica que

$$\int_\Omega \langle Dv_k, Dw_k\rangle \leq \|v_k\|_{L^2(\Omega)} \|D^2 w_k\|_{L^2(\Omega)} \qquad \forall k \in \mathbb{N}.$$

Tomando el límite cuando $k \to \infty$ y usando (5), (6), y (7) obtenemos

$$\|Du\|_{L^2(\Omega)}^2 \leq \|u\|_{L^2(\Omega)} \|D^2 u\|_{L^2(\Omega)}.$$

Tomando raíz cuadrada de ambos lados se sigue la desigualdad deseada. $\square$

4. Sea $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ abierto, acotado, con $\partial\Omega \in \mathcal{C}^1$. Demuestra que no existe un operador lineal y acotado

$$\gamma_0 : L^p(\Omega) \to L^p(\partial\Omega)$$

con $1 \leq p < \infty$ tal que $\gamma_0 u = u|_{\partial\Omega}$ cuando $u \in \mathcal{C}(\overline{\Omega}) \cap L^p(\Omega)$. Es decir, una función en $L^p(\Omega)$ no tiene, en general, traza en $\partial\Omega$.

Demostración. Sea $p \in [1,\infty)$ fijo y arbitrario. Argumentando por contradicción, supongamos que existe un operador lineal y acotado $\gamma_0 : L^p(\Omega) \to L^p(\partial\Omega)$ tal que $\gamma_0 u = u|_{\partial\Omega}$ cuando $u \in \mathcal{C}(\overline{\Omega}) \cap L^p(\Omega)$. En particular, existe una constante $C > 0$ tal que

$$\|u|_{\partial\Omega}\|_{L^p(\partial\Omega)} \leq C\|u\|_{L^p(\Omega)} \qquad \forall u \in \mathcal{C}(\overline{\Omega}) \cap L^p(\Omega). \tag{8}$$

En lo que sigue veremos que esto induce una contradicción.

Para todo $t \in \mathbb{R}$ denotamos $t^+ := \max\{0,t\}$ y para todo $n \in \mathbb{N}$ definimos

$$u_n : \Omega \to \mathbb{R} \qquad \text{dada por} \qquad u_n(x) = (1 - n\,\mathrm{dist}(x,\partial\Omega))^+.$$

Claramente, u_n es continua en $\overline{\Omega}$ y como Ω es acotado, entonces $u_n \in L^p(\Omega)$. Es decir,

$$u_n \in \mathcal{C}(\overline{\Omega}) \cap L^p(\Omega) \qquad \forall n \in \mathbb{N}. \tag{9}$$

Sea $x \in \Omega \setminus \partial\Omega$ fijo y arbitrario. Sea $N > \frac{1}{\mathrm{dist}(x,\partial\Omega)}$. Entonces

$$1 - n\,\mathrm{dist}(x,\partial\Omega) \leq 1 - N\,\mathrm{dist}(x,\partial\Omega) < 0 \qquad \forall n \geq N.$$

Entonces

$$u_n(x) = (1 - n\,\mathrm{dist}(x,\partial\Omega))^+ = 0 \qquad \forall n \geq N.$$

Entonces

$$u_n(x) \xrightarrow{n\to\infty} 0 \qquad \forall x \in \Omega \setminus \partial\Omega. \tag{10}$$

Por otro lado,

$$|u_n(x)| = (1 - n\,\mathrm{dist}(x,\partial\Omega))^+ \leq (1 - \mathrm{dist}(x,\partial\Omega))^+ = |u_1(x)| \qquad \forall n \in \mathbb{N}, \forall x \in \Omega. \tag{11}$$

De (9), (10), (11), y el teorema de convergencia dominada de Lebesgue se sigue que

$$\lim_{n\to\infty} \|u_n\|^p_{L^p(\Omega)} = \lim_{n\to\infty} \int_\Omega u_n^p = 0.$$

Por otro lado,

$$u_n|_{\partial\Omega}(x) = (1 - n0)^+ = 1 \qquad \forall n \in \mathbb{N}, \forall x \in \partial\Omega.$$

De esto, (8), y (9) se sigue que

$$\|1\|_{L^p(\partial\Omega)} \leq C\|u_n\|_{L^p(\Omega)}.$$

Tomando el límite cuando $n \to \infty$ obtenemos

$$0 < \int_{\partial\Omega} 1 = \lim_{n\to\infty} \int_{\partial\Omega} 1 \leq \lim_{n\to\infty} C\|u_n\|_{L^p(\Omega)} = 0.$$

Una contradicción. $\square$

Lema 3. La función $f(r) = \big(\log\log(2/r)\big)^2\, r$ es continua y acotada en $(0, \frac{1}{2})$.

Demostración. La continuidad es clara. Por otro lado, como $\log(t) \le t$ para todo $t > 0$, entonces

$$0 \le \big(\log\log(2/r)\big)^2\, r \le \big(\log(2/r)\big)^2\, r \qquad \forall r \neq 0. \tag{12}$$

Pero

$$\begin{aligned}
\lim_{r\to 0^+} \big(\log(2/r)\big)^2\, r &= \lim_{r\to 0^+} \frac{\big(\log(2/r)\big)^2}{1/r} && (\log(t) \le t,\ \forall x \in \mathbb{R}) \\
&= \lim_{r\to 0^+} \frac{2\log(2/r)\cdot(r/2)\cdot 2\frac{d}{dr}\frac{1}{r}}{\frac{d}{dr}\frac{1}{r}} && \text{(L'Hôpital)} \\
&= 2\lim_{r\to 0^+} r\log(2/r) \\
&= 2\lim_{t\to\infty} \frac{\log(2t)}{t} \\
&= 0. && (13)
\end{aligned}$$

De (12) y (13) se sigue que

$$\lim_{r\to 0^+} \big(\log\log(2/r)\big)^2\, r = 0$$

Como f es acotada en $(\epsilon, \frac{1}{2})$ es acotada para todo $\epsilon > 0$, esto implica que f es acotada en $(0, \frac{1}{2})$. ☐

Lema 4. $\epsilon \log\log(2/\epsilon) \xrightarrow{\epsilon\to 0^+} 0$.

Demostración. Como $\log(t) \le t$ para todo $t > 0$, entonces

$$\frac{1}{\eta}\log\log(2\eta) \le \frac{1}{\eta}\log(2\eta) \qquad \forall \eta > 0.$$

Pero $\lim_{\eta\to\infty} \frac{1}{\eta}\log(2\eta) = 0$ y como $0 \le \frac{1}{\eta}\log\log(2\eta)$ para η suficientemente grande, entonces también

$$\lim_{\epsilon\to 0^+} \epsilon\log\log(2/\epsilon) = \lim_{\eta\to\infty} \frac{1}{\eta}\log\log(2\eta) = 0.$$

☐

Lema 5. $\int_0^{\frac{1}{2}} \frac{1}{r\log(2/r)^2}\, dr < \infty$.

Demostración. Sea $t = \log(2/r)$. Calculando directamente vemos que

$$\frac{dt}{dr} = \frac{1}{2/r}\left(-2\frac{1}{r^2}\right) = -\frac{1}{r}.$$

En particular,

$$\frac{1}{r}dr = -dt. \tag{14}$$

Por lo tanto,

$$\begin{aligned}
\int_0^{\frac{1}{2}} \frac{1}{r\log(2/r)^2}\, dr &= \int_{-\infty}^{\log 4} \frac{1}{t^2}\left(\frac{1}{r}dr\right) \\
&= -\int_{-\infty}^{\log 4} \frac{1}{t^2} dt && \text{(cf. (14))} \\
&= \frac{1}{t}\bigg|_{-\infty}^{\log 4} = \frac{1}{\log 4} < \infty.
\end{aligned}$$

☐

5. Encuentra un elemento en el espacio $W^{1,n}(\Omega)$ que no este en $L^\infty(\Omega)$.

Demostración. Siguiendo la sugerencia, consideramos $n = 2$, $\Omega = B_{\frac{1}{2}}(0) \subset \mathbb{R}^2$, y $u = \log\log(2/|x|)$. Como $\lim_{x\to 0} u(x) = \infty$, entonces $u \notin L^\infty(\Omega)$. Por otro lado, haciendo integración radial,

$$\int_\Omega |u|^2 = \int_\Omega \big(\log\log(2/|x|)\big)^2 = 2\pi \int_0^{\frac{1}{2}} \big(\log\log(2/r)\big)^2\, r\, dr.$$

De esto y el Lema 3 se sigue que $u \in L^2(\Omega)$. Resta probar que u es débilmente diferenciable en Ω y que sus derivadas débiles pertenecen a $L^2(\Omega)$. Para esto, definimos para cada $\epsilon > 0$

$$\Omega_\epsilon \coloneqq \{x \in \mathbb{R}^2 \mid \epsilon < |x| < 1/2\}.$$

Sea $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$. Como u es diferenciable en $\mathbb{R}^n \setminus \{0\}$, entonces integrando por partes sobre $\partial\Omega_\epsilon \subset \mathbb{R}^N \setminus \{0\}$,

$$\int_{\Omega_\epsilon} u \frac{\partial \varphi}{\partial x_i} = -\int_{\Omega_\epsilon} \frac{\partial u}{\partial x_i}\varphi + \int_{\partial\Omega_\epsilon} u\varphi\hat{\nu}_i\, dS_x.$$

De donde,

$$\int_\Omega u\frac{\partial\varphi}{\partial x_i} = \lim_{\epsilon\to 0^+} \int_{\Omega_\epsilon} u\frac{\partial \varphi}{\partial x_i} = \lim_{\epsilon\to 0^+}\left(-\int_{\Omega_\epsilon}\frac{\partial u}{\partial x_i}\varphi + \int_{\partial\Omega_\epsilon} u\varphi\hat{\nu}_i\, dS_x\right). \tag{15}$$

Pero

$$\begin{aligned}
\left|\int_{\partial\Omega_\epsilon} u\varphi\hat{\nu}_i\, dS_x\right| &\le \int_{\partial\Omega_\epsilon} |u||\varphi|\, dS_x \\
&\le \log\log(2/\epsilon)\|\varphi\|_\infty \int_{\partial\Omega_\epsilon} dS_x && (u(x) = \log\log(2/\epsilon),\ \forall x \in \partial\Omega_\epsilon) \\
&= \log\log(2/\epsilon)\|\varphi\|_\infty 2\pi\epsilon \xrightarrow{\epsilon\to 0^+} 0. && \text{(cf. Lema 4)}
\end{aligned}$$

Usando esto y (15) obtenemos que

$$\int_\Omega u\frac{\partial\varphi}{\partial x_i} = -\lim_{\epsilon\to 0^+}\int_{\Omega_\epsilon}\frac{\partial u}{\partial x_i}\varphi = -\int_\Omega \frac{\partial u}{\partial x_i}\varphi \qquad \forall\varphi\in\mathcal{D}(\Omega).$$

Es decir, u es débilmente diferenciable en Ω y $D_i u = \frac{\partial u}{\partial x_i}$. Calculando directamente,

$$\frac{\partial u}{\partial x_i}(x) = -\frac{x_i}{|x|^2\log(2/|x|)} \qquad \forall x \neq 0.$$

Además,

$$\begin{aligned}
\int_\Omega \left(\frac{x_i}{|x|^2\log(2/|x|)}\right)^2 dx &\le \int_\Omega \left(\frac{1}{|x|\log(2/|x|)}\right)^2 dx \\
&= 2\pi\int_0^{\frac{1}{2}} \left(\frac{1}{r\log(2/r)}\right)^2 r\, dr \\
&= 2\pi\int_0^{\frac{1}{2}} \frac{1}{r\log(2/r)^2}\, dr \\
&< \infty && \text{(cf. Lema 5)}
\end{aligned}$$

Por lo tanto, $D_i u \in L^2(\Omega)$. $\square$

6. Sea $\Omega = B_{\frac{1}{2}}(0) \subset \mathbb{R}^2$ y sea

$$u(x) \coloneqq (-\log|x|)^a, \qquad x \neq 0,$$

con $0 < a < 1/2$. Demuestra que $u \in H^1(\Omega)$, pero que u no es acotada en una vecindad del origen.

Demostración. Como $\lim_{x\to 0} u(x) = \infty$, entonces $u \notin L^\infty(\Omega)$. Por otro lado,

$$\begin{aligned}
\int_\Omega |u|^2 &= \int_\Omega (-\log|x|)^{2a}\, dx \\
&\leq \int_\Omega \left(\frac{1}{|x|}\right)^{2a} dx && (-\log(t) \leq \tfrac{1}{t},\ \forall t > 0) \\
&= \int_\Omega |x|^{-2a}\, dx \\
&< \infty. && (a \in (0, \tfrac{1}{2}))
\end{aligned}$$

donde la última desigualdad es porque $-2a + 2 > 0$. Es decir, $u \in L^2(\Omega)$. Resta probar que u es débilmente diferenciable en Ω y que sus derivadas débiles pertenecen a $L^2(\Omega)$. Para esto, definimos para cada $\epsilon > 0$

$$\Omega_\epsilon \coloneqq \{x \in \mathbb{R}^2 \mid \epsilon < |x| < 1/2\}.$$

Sea $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$. Como u es diferenciable en $\mathbb{R}^n \setminus \{0\}$, entonces integrando por partes sobre $\partial\Omega_\epsilon \subset \mathbb{R}^N \setminus \{0\}$,

$$\int_{\Omega_\epsilon} u \frac{\partial\varphi}{\partial x_i} = -\int_{\Omega_\epsilon} \frac{\partial u}{\partial x_i}\varphi + \int_{\partial\Omega_\epsilon} u\varphi\hat{\nu}_i\, dS_x.$$

De donde,

$$\int_\Omega u\frac{\partial\varphi}{\partial x_i} = \lim_{\epsilon\to 0^+} \int_{\Omega_\epsilon} u\frac{\partial\varphi}{\partial x_i} = \lim_{\epsilon\to 0^+}\left(-\int_{\Omega_\epsilon}\frac{\partial u}{\partial x_i}\varphi + \int_{\partial\Omega_\epsilon} u\varphi\hat{\nu}_i\, dS_x\right). \tag{16}$$

Pero

$$\begin{aligned}
\left|\int_{\partial\Omega_\epsilon} u\varphi\hat{\nu}_i\, dS_x\right| &\leq \int_{\partial\Omega_\epsilon} |u||\varphi|\, dS_x \\
&\leq (-\log\epsilon)^a \|\varphi\|_\infty \int_{\partial\Omega_\epsilon} dS_x && (u(x) = (-\log\epsilon)^a,\ \forall x \in \partial\Omega_\epsilon) \\
&\leq \left(\frac{1}{\epsilon}\right)^a \|\varphi\|_\infty 2\pi\epsilon && (-\log(t) \leq \tfrac{1}{t},\ \forall t > 0) \\
&= \|\varphi\|_\infty 2\pi\epsilon^{1-a} \xrightarrow{\epsilon\to 0^+} 0. && (a \in (0, \tfrac{1}{2}))
\end{aligned}$$

Usando esto y (16) obtenemos que

$$\int_\Omega u\frac{\partial\varphi}{\partial x_i} = -\lim_{\epsilon\to 0^+}\int_{\Omega_\epsilon}\frac{\partial u}{\partial x_i}\varphi = -\int_\Omega \frac{\partial u}{\partial x_i}\varphi \qquad \forall\varphi \in \mathcal{D}(\Omega).$$

Es decir, u es débilmente diferenciable en Ω y $D_i u = \frac{\partial u}{\partial x_i}$. Calculando directamente,

$$\frac{\partial u}{\partial x_i}(x) = -a(-\log|x|)^{a-1}\frac{x_i}{|x|^2}$$

Además,

$$\int_\Omega \left((-\log|x|)^{a-1}\frac{x_i}{|x|^2}\right)^2 dx \leq \int_\Omega \left(\left(\frac{1}{|x|}\right)^{a-1}\frac{1}{|x|}\right)^2 dx = \int_\Omega |x|^{-2a}\, dx < \infty.$$

Por lo tanto, $D_i u \in L^2(\Omega)$. $\square$

Lema 6. Sean H_1, H_2 de Hilbert y sea $T : H_1 \to H_2$ lineal y continua. Si $u_k \rightharpoonup u$ débilmente en H_1, entonces $Tu_k \rightharpoonup Tu$ en H_2.

Lema 7. Sea $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ abierto, acotado, y con $\partial\Omega \in \mathcal{C}^1$ y sea (u_j) una sucesión acotada en $H^k(\Omega)$, $k \in \mathbb{Z}_{\geq 1}$. Si $u_j \to u$ en $H^{k-1}(\Omega)$, entonces $u \in H^k(\Omega)$.

Demostración. Como (u_j) es acotada en $H^k(\Omega)$, entonces (por la propiedad fundamental de la convergencia débil) existe $v \in H^k(\Omega)$ tal que $u_j \rightharpoonup v$ débilmente en $H^k(\Omega)$. Por otro lado, como la inclusión $H^k(\Omega) \hookrightarrow H^{k-1}(\Omega)$ es continua, el lema 6 garantiza que $u_j \rightharpoonup v$ débilmente en $H^{k-1}(\Omega)$. Pero $u_j \to u$ en $H^{k-1}(\Omega)$ (por hipótesis). Entonces (por unicidad del límite débil) $u = v \in H^k(\Omega)$. $\square$

Lema 8. Sea $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ abierto, sea (u_m) una sucesión en $L^1_{\text{loc}}(\Omega)$, sea α un multi-indice fijo y arbitrario, y supongamos que la derivada débil $D^\alpha u_m$ existe para todo m. Si $u_m \to u$ en $L^1_{\text{loc}}(\Omega)$ y $D^\alpha u_m \to v$ en $L^1_{\text{loc}}(\Omega)$, entonces $v = D^\alpha u$.

Demostración. Lo vimos en clase. (cf. Bressan, 8.14.) $\square$

Lema 9. Sea $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ abierto y acotado, sea (u_m) una sucesión en $L^2(\Omega)$, sea α un multi-indice fijo y arbitrario, y supongamos que la derivada débil $D^\alpha u_m$ existe para todo m. Si $u_m \to u$ en $L^2(\Omega)$ y $D^\alpha u_m \to v$ en $L^2(\Omega)$, entonces $v = D^\alpha u$.

Demostración. Como Ω es acotado, el lema 1 asegura que existe $C > 0$ constante tal que $\|w\|_1 \leq C\|w\|_2$ para todo $w \in L^2(\Omega)$. En particular,

$$\|u - u_m\|_1 \leq C\|u - u_m\|_2 \xrightarrow{m\to\infty} 0,$$
$$\|D^\alpha u_m - v\|_1 \leq C\|D^\alpha u_m - v\|_2 \xrightarrow{m\to\infty} 0.$$

De donde, $u_m \to u$ en $L^1_{\text{loc}}(\Omega)$ y $D^\alpha u_m \to v$ en $L^1_{\text{loc}}(\Omega)$. De esto y el lema 8 se sigue lo deseado. $\square$

Lema 10. Sea $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ abierto y conexo, y sea $u \in L^1_{\text{loc}}(\Omega)$. Si

$$D_i u = 0 \qquad \forall i = 1, \dots, n,$$

entonces u es constante en Ω.

Demostración. cf. Bressan, 8.16. $\square$

Lema 11. Sea $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ abierto y conexo, sea $u \in L^1_{\text{loc}}(\Omega)$, y sea $k \in \mathbb{Z}_{\geq 1}$. Si

$$D^\alpha u = 0 \qquad \forall |\alpha| = k$$

entonces u es un polinomio de grado $\leq k - 1$ en Ω.

Demostración. Por inducción sobre k. El paso base $k = 1$ es precisamente el lema 10. Ahora bien, sea $k \geq 1$ fijo y arbitrario, y supongamos que el resultado es cierto para k. Veamos que el resultado es cierto para $k+1$. Sea $u \in L^1_{\text{loc}}(\Omega)$ tal que $D^\beta u = 0$ para todo $|\beta| = k + 1$. Entonces

$$D_i(D^\alpha u) = 0 \qquad \forall i = 1, \dots, n,\ \forall |\alpha| = k.$$

Entonces (por lema 10) $D^\alpha u$ es constante para todo $|\alpha| = k$. Denotemos $D^\alpha u = c_\alpha$. Entonces

$$D^\alpha \left(u - \sum_{|\eta|=k} c_\eta x^\eta \right) = D^\alpha u - c_\alpha = 0 \qquad \forall |\alpha| = k.$$

Entonces (por hipótesis de inducción) $u - \sum_{|\alpha|=k} c_\alpha x^\alpha$ es un polinomio de grado $\leq k - 1$. Por lo tanto, u es un polinomio de grado $\leq k$. $\square$

7. Sea $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ abierto, acotado, y conexo con $\partial\Omega \in \mathcal{C}^1$. Aplica el teorema de Rellich-Kondrachov para demostrar las siguientes afirmaciones.

(a) Existe una constante $C > 0$ independiente de u tal que

$$\|u\|^2_{H^k(\Omega)} \leq C \left(\sum_{|\alpha|=k} \|D^\alpha u\|^2_{L^2(\Omega)} + \sum_{|\alpha|<k} \left(\int_\Omega x_1^{\alpha_1} \cdots x_n^{\alpha_n} u(x)\, dx \right)^2 \right)$$

para todo $u \in H^k(\Omega)$, $k \in \mathbb{Z}$, $k \geq 1$.

(b) Existe una constante $C > 0$ independiente de u tal que

$$\|u\|^2_{H^2(\Omega)} \leq C \left(\sum_{|\alpha|=2} \|D^\alpha u\|^2_{L^2(\Omega)} + \int_\Gamma (\gamma_0 u)^2\, dS_x \right)$$

para todo $u \in H^2(\Omega)$, donde $\gamma_0 : H^1(\Omega) \to L^2(\partial\Omega)$ es el operador de traza y $\Gamma \subset \partial\Omega$ es una porción de la frontera que tiene superficie positiva $|\Gamma| > 0$, y que no es un pedazo de hiperplano.

(c) Existe una constante $C > 0$ independiente de u tal que

$$\|u\|^2_{H^3(\Omega)} \leq C \left(\sum_{|\alpha|=3} \|D^\alpha u\|^2_{L^2(\Omega)} + \int_{\partial\Omega} (\gamma_0 u)^2\, dS_x \right)$$

para todo $u \in H^3(\Omega)$ siempre que Ω no sea un elipsoide. Analiza el contraejemplo $u(x, y) = x^2 + y^2 - 1$ para el caso del disco unitario en $\mathbb{R}^2$.

Demostración.

(a) Supongamos lo contrario. Entonces para todo $m \in \mathbb{N}$ existe $v_m \in H^k(\Omega)$ tal que

$$\|v_m\|^2_{H^k(\Omega)} > m \left(\sum_{|\alpha|=k} \|D^\alpha v_m\|^2_{L^2(\Omega)} + \sum_{|\alpha|<k} \left(\int_\Omega x_1^{\alpha_1} \cdots x_n^{\alpha_n} v_m(x)\, dx \right)^2 \right).$$

Para todo $m \in \mathbb{N}$ sea

$$u_m := \frac{v_m}{\|v_m\|_{H^k(\Omega)}} \tag{17}$$

Entonces

$$\sum_{|\alpha|=k} \|D^\alpha u_m\|^2_{L^2(\Omega)} + \sum_{|\alpha|<k} \left(\int_\Omega x_1^{\alpha_1} \cdots x_n^{\alpha_n} u_m(x)\, dx \right)^2 =$$

$$\frac{1}{\|v_m\|^2_{H^k(\Omega)}} \left(\sum_{|\alpha|=k} \|D^\alpha v_m\|^2_{L^2(\Omega)} + \sum_{|\alpha|<k} \left(\int_\Omega x_1^{\alpha_1} \cdots x_n^{\alpha_n} v_m(x)\, dx \right)^2 \right) <$$

$$\frac{1}{\|v_m\|^2_{H^k(\Omega)}} \left(\|v_m\|^2_{H^k(\Omega)} \frac{1}{m} \right) =$$

$$\frac{1}{m}.$$

En particular,

$$\sum_{|\alpha|=k} \|D^\alpha u_m\|^2_{L^2(\Omega)} \xrightarrow{m\to\infty} 0, \tag{18}$$

$$\sum_{|\alpha|<k} \left(\int_\Omega x_1^{\alpha_1} \cdots x_n^{\alpha_n} u_m(x)\, dx \right)^2 \xrightarrow{m\to\infty} 0.$$

Más aun,

$$\|D^\alpha u_m\|^2_{L^2(\Omega)} \xrightarrow{m\to\infty} 0 \qquad \forall |\alpha| = k, \tag{19}$$

$$\int_\Omega p(x) u_m(x)\, dx \xrightarrow{m\to\infty} 0 \qquad \forall p \text{ polinomio de grado } < k. \tag{20}$$

Por otro lado, como (u_m) es acotada en $H^k(\Omega)$, el teorema de Rellich-Kondrachov garantiza que existe una subsucesión (u_j) de (u_m) y que existe un $u \in H^{k-1}(\Omega)$ tal que

$$u_j \xrightarrow{j\to\infty} u \text{ en } H^{k-1}(\Omega) \tag{21}$$

Además, el lema 7 implica que $u \in H^k(\Omega)$ y calculando directamente,

$$\begin{aligned}
1 &= \lim_{j\to\infty} \|u_j\|^2_{H^k(\Omega)} && \text{(cf. (17))}\\
&= \lim_{j\to\infty} \sum_{|\alpha|\le k} \|D^\alpha u_j\|^2_{L^2(\Omega)} \\
&= \lim_{j\to\infty} \sum_{|\alpha|\le k-1} \|D^\alpha u_j\|^2_{L^2(\Omega)} && \text{(cf. (18))}\\
&= \lim_{j\to\infty} \|u_j\|^2_{H^{k-1}(\Omega)} \\
&= \|u\|^2_{H^{k-1}(\Omega)}. && \text{(cf. (21))}
\end{aligned}$$

Por otro lado, (21) implica que $u_j \to u$ en $L^2(\Omega)$. De esto, (19), y el lema 9, se sigue que $D^\alpha u = 0$ para todo $|\alpha| = k$. Más aun, de esto y el lema 11, se sigue que u es un polinomio de grado $\le |k| - 1$. Por otro lado,

$$\left|\int_\Omega p(x)(u_j(x) - u(x))\, dx\right| \le \|p\|_{L^2(\Omega)} \|u_j - u\|_{L^2(\Omega)} \xrightarrow{m\to\infty} 0 \qquad \forall p \text{ polinomio de grado } < k.$$

De esto y (20) se sigue que

$$\int_\Omega p(x) u(x)\, dx = 0 \qquad \forall p \text{ polinomio de grado } < k.$$

Poniendo $p = u$ obtenemos $\int_\Omega u^2 = 0$ y por lo tanto, $u = 0$.

(b) Argumentando por contradicción y procediendo de la misma manera que en el inciso (a), obtenemos una subsucesión (u_j) de (u_m) y un $u \in H^1(\Omega)$ tales que

$$\int_\Gamma (\gamma_0 u_m)^2\, dS_x \to 0, \tag{22}$$

$$u_j \to u \in H^1(\Omega), \tag{23}$$

$$\|u\|_{H^1(\Omega)} = 1, \tag{24}$$

$$u = c_1 x^1 + \cdots + c_n x^n + C \tag{25}$$

De (22), (23), y la continuidad del operador traza se sigue que

$$\int_\Gamma (\gamma_0 u)^2\, dS_x = 0.$$

Entonces $\gamma_0 u = 0$. Pero $u \in H^1(\Omega) \cap \mathcal{C}(\overline{\Omega})$ (por (25)). Entonces

$$c_1 x^1 + \cdots + c_n x^n + C = u|_{\partial\Omega}(x) = \gamma_0 u(x) = 0 \qquad \forall x \in \Gamma$$

Como Γ no es un pedazo de hiperplano, esto implica que $u = 0$. Contradiciendo (24).

(c) De nuevo, argumentando por contradicción y procediendo de la misma manera que en el inciso (a), obtenemos una subsucesión (u_j) de (u_m) y un $u \in H^2(\Omega)$ tales que

$$\int_{\partial\Omega} (\gamma_0 u_m)^2 \, dS_x \to 0, \tag{26}$$

$$u_j \to u \in H^2(\Omega), \tag{27}$$

$$\|u\|_{H^2(\Omega)} = 1, \tag{28}$$

$$u = \sum_{|\alpha|\leq 2} c_\alpha x^\alpha. \tag{29}$$

De (26), (27), y la continuidad del operador traza se sigue que

$$\int_{\partial\Omega} (\gamma_0 u)^2 \, dS_x = 0.$$

Entonces $\gamma_0 u = 0$. Pero $u \in H^2(\Omega) \cap \mathcal{C}(\overline{\Omega})$ (por (29)). Entonces

$$\sum_{|\alpha|\leq 2} c_\alpha x^\alpha = u|_{\partial\Omega}(x) = \gamma_0 u(x) = 0 \qquad \forall x \in \partial\Omega.$$

En particular, $\partial\Omega \subset u^{-1}(0)$. Como u es un polinomio de grado 2 y Ω es abierto, acotado, y con $\partial\Omega \in \mathcal{C}^1$, entonces la inclusión $\partial\Omega \subset u^{-1}(0)$ implica que Ω es una elipsoide o que $u = 0$. Pero Ω no es una elipsoide por hipótesis y por lo tanto $u = 0$. Contradiciendo (28).

Ahora bien, sea $\Omega := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 < 1\}$ y sea $u := x^2 + y^2 - 1$. Entonces

$$\int_{\partial\Omega} (\gamma_0 u)^2 \, dS_x = \int_{\partial\Omega} (u|_{\partial\Omega})^2 \, dS_x = 0, \tag{30}$$

donde la primera igualdad es porque $u \in H^3(\Omega) \cap \mathcal{C}(\overline{\Omega})$ y la segunda es porque $u = 0$ en $\partial\Omega$. Además, como u es un polinomio de grado 2, $D^\alpha = 0$ para todo $|\alpha| = 3$. De esto y (30) se sigue que

$$\sum_{|\alpha|=3} \|D^\alpha u\|^2_{L^2(\Omega)} + \int_{\partial\Omega} (\gamma_0 u)^2 \, dS_x = 0 < \|u\|_{H^2(\Omega)}.$$

Por lo tanto, (c) no es cierto para $\Omega := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 < 1\}$.

□

8. Sea $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ abierto, acotado, con $\partial\Omega \in \mathcal{C}^1$, y $\partial\Omega$ orientable. Sea $\Gamma \subset \partial\Omega$ una porción de la frontera con $|\Gamma| := \int_\Gamma dS_x > 0$. Demuestra que para cada $g \in L^2(\Gamma)$, el mapeo

$$u \mapsto \int_\Gamma g(x)(\gamma_0 u)(x) \, dS_x$$

define un elemento del dual $H^{-1}(\Omega)$, donde $\gamma_0 : H^1(\Omega) \to L^2(\partial\Omega)$ es el operador de traza.

Demostración. Para todo $u \in H^1(\Omega)$,

$$\begin{aligned}
\left| \int_\Gamma g(x)(\gamma_0 u)(x) \, dS_x \right| &\leq \left(\int_\Gamma g(x)^2 \, dS_x \right)^{1/2} \left(\int_\Gamma (\gamma_0 u)(x)^2 \, dS_x \right)^{1/2} && \text{(Hölder)} \\
&\leq \left(\int_\Gamma g(x)^2 \, dS_x \right)^{1/2} \|\gamma_0 u\|_{L^2(\partial\Omega)} && (\Gamma \subset \partial\Omega \text{ tiene superficie positiva}) \\
&\leq \left(\int_\Gamma g(x)^2 \, dS_x \right)^{1/2} C\|u\|_{H^1(\Omega)}. && (\text{continuidad de } \gamma_0)
\end{aligned}$$

□