1. Usaremos el siguiente teorema: (esta en la sección 5 de la pagina de Wikipedia "Holder's inequality")

Generalization of Hölder's inequality [edit]

Assume that $r \in (0, \infty]$ and $p_1, \ldots, p_n \in (0, \infty]$ such that

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{p_k} = \frac{1}{r}$$

where $1/\infty$ is interpreted as 0 in this equation. Then, for all measurable real or complex-valued functions $f_1, \ldots, f_n$ defined on S,

$$\left\| \prod_{k=1}^{n} f_k \right\|_r \leq \prod_{k=1}^{n} \|f_k\|_{p_k}$$

where we interpret any product with a factor of ∞ as ∞ if all factors are positive, but the product is 0 if any factor is 0.

In particular, if $f_k \in L^{p_k}(\mu)$ for all $k \in \{1, \ldots, n\}$ then $\prod_{k=1}^{n} f_k \in L^r(\mu)$.

Primero notemos que la ultima oración en la foto nos garantiza que el operador L esta bien definido entre $L^p(\Omega)$ y $L^r(\Omega)$. Mas aun, notemos que podemos aplicar el teorema anterior poniendo

$$n = 2,\ p_1 = p,\ p_2 = q,\ f_1 = u,\ f_2 = f$$

De donde,

$$\|Lu\|_r = \|f \cdot u\|_r \leq \|f\|_q \cdot \|u\|_p$$

Por lo tanto, como f es fijo, L esta acotado. $\square$

2a. Sean $A, B \in \mathcal{L}(E)$ tales que A es invertible y $\left\|I - BA^{-1}\right\| < 1$. Por la proposición 1.15 de las notas, $I - (I - BA^{-1}) = BA^{-1}$ es invertible. Denotemos $L = (BA^{-1})^{-1}$. Entonces,

$$BA^{-1}L = I \ \&\ LBA^{-1} =_{(*)} I$$

De donde,

$$B(A^{-1}L) = I \ \&\ (A^{-1}L)B = I$$

Donde la segunda ecuación se deduce a partir de multiplicar $(*)$ por A por la derecha y luego por A^{-1} por la izquierda

Por lo tanto, B es invertible y $B^{-1} = A^{-1}L = A^{-1}(BA^{-1})^{-1}$. $\square$

2b. Sea X el conjunto de elementos invertibles en $\mathcal{L}(E)$. Veamos que X es abierto en $\mathcal{L}(E)$. Para esto, sea $A \in X$ y $B \in \mathcal{L}(E)$ tal que

$$\|A - B\| \leq \frac{1}{1 + \|A^{-1}\|}.$$

Entonces,

$$\begin{aligned} \|I - BA^{-1}\| &= \|(A - B)A^{-1}\| \\ &\leq \|A\| \cdot \|A - B\| \\ &\leq \|A\| \cdot \frac{1}{1 + \|A\|} < 1 \end{aligned}$$

Por lo tanto, por el inciso anterior obtenemos lo deseado.
Ahora, veamos que el operador

$$\begin{aligned} X &\to X \\ A &\mapsto A^{-1} \end{aligned}$$

es continuo. Para esto, sea $\epsilon > 0$. Definimos

$$\delta := \min\left\{\frac{1}{2\|A^{-1}\|}, \frac{\epsilon}{2\|A^{-1}\|^2}\right\}$$

Antes de acotar $\left\|B^{-1} - A^{-1}\right\|$, voy a demostrar las siguientes 4 desigualdades auxiliares (suponiendo $\|B - A\| \leq \delta$):

1. $\|B^{-1}\| \leq \frac{\|A^{-1}\|}{1-\|A^{-1}\|\|A-B\|}$
2. $\frac{\|A^{-1}\|}{1-\|A^{-1}\|\|A-B\|} \leq 2\|A^{-1}\|$
3. $\|B^{-1}\| \leq 2\|A^{-1}\|$
4. $\|I - BA^{-1}\| \leq \frac{\epsilon}{2\|A^{-1}\|}$

Demostración.

1. Por una cuenta directa,

$$B^{-1} = A^{-1} + A^{-1}(A - B)B^{-1}$$

Entonces,

$$\begin{aligned} \|B^{-1}\| &\leq \|A^{-1}\| + \|A^{-1}(A - B)B^{-1}\| \\ &\leq \|A^{-1}\| + \|A^{-1}\|\|A - B\|\|B^{-1}\| \end{aligned}$$

Entonces,

$$\|B^{-1}\| \left(1 - \|A^{-1}\|\|A - B\|\right) = \|B^{-1}\| - \|A^{-1}\|\|A - B\|\|B^{-1}\| \leq \|A^{-1}\|$$

Por otro lado, como $\|B - A\| \leq \frac{1}{2\|A^{-1}\|} \leq \frac{1}{\|A^{-1}\|}$ entonces (multiplicando por $\|A^{-1}\|$ y luego restando por $\|A\|\|A - B\|$), $1 - \|A^{-1}\|\|A - B\| \geq 0$. Por lo tanto, podemos dividir para obtener,

$$\|B^{-1}\| \leq \frac{\|A^{-1}\|}{1 - \|A^{-1}\|\|A - B\|}$$

2. Se sigue de la siguiente cadena de implicaciones,

$$\begin{aligned}
\|B-A\| \le \frac{1}{2\|A^{-1}\|} &\implies \|A^{-1}\|\|B-A\| \le \frac{1}{2} \\
&\implies -\|A^{-1}\|\|B-A\| \ge -\frac{1}{2} \\
&\implies \frac{1}{2} = 1-\frac{1}{2} \le 1-\|A^{-1}\|\|B-A\| \\
&\implies \frac{1}{1-\|A^{-1}\|\|B-A\|} \le 2 \\
&\implies \frac{\|A^{-1}\|}{1-\|A^{-1}\|\|B-A\|} \le 2\|A^{-1}\|
\end{aligned}$$

   Donde la 4ta implicación es valida por que $1-\|A^{-1}\|\|A-B\| \ge 0$ (misma razón que en el inciso anterior).

3. Es una consecuencia directa de (1) y (2).

4. Se sigue de la siguiente cadena de desigualdades,

$$\begin{aligned}
\|I-BA^{-1}\| &= \|(A-B)A^{-1}\| \\
&\le \|A^{-1}\|\|B-A\| \\
&\le \|A^{-1}\|\frac{\epsilon}{2\|A^{-1}\|^2} = \frac{\epsilon}{2\|A^{-1}\|}
\end{aligned}$$

Ahora si, acotemos $\|B^{-1}-A^{-1}\|$.

$$\begin{aligned}
\|B^{-1}-A^{-1}\| &= \|B^{-1}\left(I-BA^{-1}\right)\| \\
&\le \|B^{-1}\|\|I-BA^{-1}\| \\
&\le 2\|A^{-1}\|\|I-BA^{-1}\| && \text{(por (3))} \\
&\le 2\|A^{-1}\|\frac{\epsilon}{2\|A^{-1}\|} = \epsilon && \text{(por (4))}
\end{aligned}$$

$\therefore$ $\forall A \in X$ $\forall \epsilon > 0$ $\exists \delta > 0$ tal que $\|B-A\| < \delta$ implica $\|B^{-1}-A^{-1}\| < \epsilon$. Es decir, $A \mapsto A^{-1}$ es continua. $\square$

3. Sea E un espacio de Hilbert y F, G subespacios cerrados lineales de E tales que $F \perp G$. En particular, $\forall x \in F$ $x \in G^\perp$ i.e., $F \subset G^\perp$. De donde,

$$x \in F \cap G \subset G^\perp \cap G = \{0\}$$

$\therefore F \cap G = \{0\}$.
Ahora, veamos que $F \oplus G$ es cerrado. Para esto, sea $\{x_n + y_n\}_n \subset F \oplus G$ una

sucesión convergente. Por otro lado, notemos que $\forall m, n \in \mathbb{N}$

$$\begin{aligned}
\|(x_n + y_n) - (x_m + y_m)\|^2 &= \|(x_n - x_m) + (y_n - y_m)\|^2 \\
&= \|x_n - x_m\|^2 + 2\langle x_n - x_m, y_n - y_m\rangle + \|y_n - y_m\|^2 \\
&= \|x_n - x_m\|^2 + 0 + \|y_n - y_m\|^2 \\
&\geq \|x_n - x_m\|^2, \|y_n - y_m\|^2 \qquad (1)
\end{aligned}$$

Donde la tercera igualdad se cumple porque $x_n - x_m \in F$, $y_n - y_m \in G$, y $F \perp G$. Usando esto, veamos que $\{x_n\}_n \subset F$ & $\{y_n\}_n \subset G$ son sucesiones de Cauchy. Sea $\epsilon > 0$; como $\{x_n + y_n\}_n$ converge (en particular), es de Cauchy. Entonces, $\exists N \in \mathbb{N}$ tal que

$$\forall n, m \geq N \ \|(x_n + y_n) - (x_m + y_m)\| \leq \epsilon \qquad (2)$$

Juntando (1) y (2) obtenemos lo deseado.
Ahora bien, como E es de Hilbert entonces (por definición) es completo con la métrica inducida por el producto interior. Por lo tanto, $\exists x, y \in E$ tales que $x_n \to x$ & $y_n \to y$. En particular, $x_n + y_n \to x + y$. Mas aun, como $\{x_n\}_n$ es una sucesión en F, y F es cerrado, entonces, $x \in F$. Análogamente, $y \in G$. Por lo tanto, acabamos de demostrar que el limite de toda sucesión convergente en $F \oplus G$ es un elemento de $F \oplus G$. Equivalentemente, $F \oplus G$ es cerrado. $\square$

Diego Leipen Lara
418002038