Recordatorios de álgebra lineal

Facultad de Ciencias UNAM

Introducción

En esta sección veremos algunas definiciones y resultados básicos de álgebra lineal que usaremos en las siguientes secciones.

Espacios vectoriales

Definición

Una cuarteta ordenada $(V, +, F, \cdot\,)$ es un **espacio vectorial** si

- $(V, +)$ es un grupo abeliano.
- F es un campo.
- $\cdot : F \times V \to V$ es una función denotada $\cdot(\alpha, v) = \alpha \cdot v$ tal que para toda $\alpha, \beta \in F$ y toda $v, w \in V$
  - $(\alpha +_F \beta) \cdot v = \alpha \cdot v + \beta \cdot v$
  - $(\alpha \times_F \beta) \cdot v = \alpha \cdot (\beta \cdot v)$
  - $\alpha \cdot (v + w) = \alpha \cdot v + \alpha \cdot w$
  - $1_F \cdot v = v$

Mas notación

Supongamos que $(V, +, F, \cdot\,)$ es un espacio vectorial.

- A los elementos de V les llamamos **vectores**.
- A los elementos de F les llamamos **escalares**.
- Si relajamos un poco la notación de las operaciones y denotamos $\cdot(\alpha, v) = \alpha v$, $\alpha +_F \beta = \alpha + \beta$, $\alpha \times_F \beta = \alpha\beta$, y $1_F = 1$, entonces las condiciones sobre $\cdot$ se convierten en
  - $(\alpha + \beta)v = \alpha v + \beta v$
  - $(\alpha\beta)v = \alpha(\beta v)$
  - $\alpha(v + w) = \alpha v + \alpha w$
  - $1v = v$

  Gracias a esta convención, en general no hay necesidad de especificar la notación para las operaciones y por eso, en este caso simplemente decimos que V **es un espacio vectorial sobre** F.

  Cabe recalcar que cuando decimos "V es un espacio vectorial sobre F", la hipótesis "F es un campo", viene implícita.

Subespacios

Definición

Supongamos que V es un espacio vectorial sobre F. Decimos que $W \subset V$ es un **subespacio de** V si

- W es un subgrupo aditivo de V.
- Para toda $\alpha \in F$ y toda $w \in W$, tenemos que $\alpha w \in W$.

Combinación lineal

Definición

Supongamos que V es un espacio vectorial sobre F y que $v_1, v_2, \ldots, v_n \in V$. Una F**-combinación lineal de** $v_1, v_2, \ldots, v_n$ es un vector de la forma

$$\alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \cdots + \alpha_n v_n \tag{1}$$

con $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n \in F$. En este caso decimos que $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ son los **coeficientes** de esta F-combinación lineal. Si $\alpha_i = 0$ para toda $i = 1, \ldots, n$, decimos que (1) es la **combinación lineal trivial** de $v_1, \ldots, v_n$.

Subespacio generado

Definición

Supongamos que V es un espacio vectorial sobre F y que $A \subset V$ es un subconjunto de V.

- El F**-subespacio generado por** A es

$$\operatorname{span}_F(A) := \left\{\alpha_1 v_1 + \cdots + \alpha_n v_n \mid n \in \mathbb{Z}_{\geq 1},\ \alpha_i \in F,\ v_j \in V\right\}.$$

  En palabras, el F-subespacio generado por A es el conjunto de todas las F-combinaciones lineales de elementos de A.

  Si A consiste de una cantidad finita de vectores, digamos $A = \{v_1, \ldots, v_n\}$, denotamos $\operatorname{span}_F(A) = \operatorname{span}_F(v_1, \ldots, v_n)$.

- Si $\operatorname{span}_F(A) = V$, decimos que A F**-genera a** V o que A **es un** F**-conjunto generador de** V.

Vectores linealmente independientes

Definición

Supongamos que V es un espacio vectorial sobre F y que $v_1, \ldots, v_n \in V$.

- Si existen $\alpha_1, \ldots, \alpha_n \in F$ tales que

  $$\alpha_1 v_1 + \cdots + \alpha_n v_n = 0 \text{ y no todas las } \alpha_i \text{ son } 0,$$

  entonces decimos que $v_1, \ldots, v_n$ son **F-linealmente dependientes**. En palabras, $v_1, \ldots, v_n$ son F-linealmente dependientes si existe una F-combinación lineal no trivial de $v_1, \ldots, v_n$ que es igual al 0.
- Si $v_1, \ldots, v_n$ no son F-linealmente independientes, entonces decimos que $v_1, \ldots, v_n$ son **F-linealmente independientes**. Esto es equivalente a que para toda $\alpha_1, \ldots, \alpha_n \in F$

  $$\alpha_1 v_1 + \cdots + \alpha_n v_n = 0 \implies \alpha_i = 0 \text{ para toda } i.$$

Bases

Definición

Supongamos que V es un espacio vectorial sobre F y que $A \subset V$ es un subconjunto de V.

- Decimos que A es un **conjunto de vectores F-linealmente independientes** si $v_1, \ldots, v_n$ son F-linealmente independientes para cualesquiera $v_1, \ldots, v_n \in A$.
- Decimos que A es una **F-base de V** si
  - A es un conjunto de vectores F-linealmente independientes.
  - A F-genera a V.

Notación

Supongamos que V es un espacio vectorial sobre F. Cuando no haya ambigüedad respecto al campo F omitimos la "F" en las definiciones anteriores.

Por ejemplo, en vez de decir "F-combinación lineal", simplemente decimos "combinación lineal".

La razón para escribir la "F" en principio, es que la veracidad o falsedad de todas estas propiedades dependen de F.

Por ejemplo, considera a $\mathbb{R}$ como espacio vectorial sobre $\mathbb{Q}$. En este espacio vectorial, los vectores $1, \pi \in \mathbb{R}$ son linealmente independientes[1]. En contraste, considera a $\mathbb{R}$ como espacio vectorial sobre $\mathbb{R}$. En este espacio vectorial, los vectores $1, \pi \in \mathbb{R}$ son linealmente dependientes. En otras palabras, $1, \pi \in \mathbb{R}$ son $\mathbb{Q}$-linealmente independientes, pero *no* son $\mathbb{R}$-linealmente independientes[2].

[1] De lo contrario, se puede demostrar que $\pi \in \mathbb{Q}$. Una contradicción.

[2] $\frac{1}{\pi}\pi + (-1)1 = 1 - 1 = 0$.

Condiciones suficientes para que un conjunto de vectores linealmente independientes sea una base

Proposición 1

Supongamos que V es un espacio vectorial sobre F que tiene un subconjunto generador finito, digamos $A \subset V$. Si B es un conjunto de vectores linealmente independientes tal que $|B| = |A| < +\infty$, entonces B es una base de V.

Demostración. Antes que nada, denotemos

$$n = |A| = |B| < +\infty, \quad A = \{v_1, \ldots, v_n\}, \quad B = \{w_1, \ldots, w_n\}.$$

Por otro lado, notemos que como $w_1, \ldots, w_m$ son linealmente independientes, entonces $w_i \neq 0$ para toda i. En efecto, de lo contrario es fácil verificar que $w_1, \ldots, w_m$ seria linealmente dependiente.

Ahora si, veamos que B es base: Como por hipótesis $w_1, \ldots, w_n$ son linealmente independientes, solo resta probar que $\operatorname{span}(w_1, \ldots, w_n) = V$. Para esto, demostremos por inducción que para toda $i \in \{1, \ldots, n\}$ tenemos

$$\operatorname{span}(w_1, w_2, \ldots, w_i, v_{i+1}, v_{i+2} \ldots, v_{n-1}, v_n) = V. \tag{2}$$

Por supuesto, cuando $i = n$ obtenemos $\operatorname{span}(w_1, \ldots, w_n) = V$ y por lo tanto, en realidad vamos a demostrar un resultado mas fuerte de lo necesario.

Paso base: $i = 1$

Como $\{v_1, \ldots, v_n\}$ genera a V, entonces podemos escribir

$$w_1 = \alpha_1 v_1 + \cdots + \alpha_n v_n \tag{3}$$

para algunas $\alpha_1, \ldots, \alpha_n \in F$.

Mas aun, como $w_1 \neq 0$, entonces existe i tal que $\alpha_i \neq 0$. Sin perdida de generalidad, supongamos que $\alpha_1 \neq 0$. Entonces podemos despejar v_1 en (3) para obtener

$$v_1 = \frac{1}{\alpha_1}\left(w_1 - \alpha_2 v_2 - \cdots - \alpha_n v_n\right).$$

En particular, tenemos que

$$v_1 \in \operatorname{span}\left(w_1, v_2, \ldots, v_n\right). \tag{4}$$

Veamos que esto implica que $\operatorname{span}(w_1, v_2, \ldots, v_n) = V$. Supongamos que $v \in V$. Como $\{v_1, \ldots, v_n\}$ genera a V, entonces existen $\alpha_1, \ldots, \alpha_n \in F$ tales que

$$v = \alpha_1 v_1 + \underbrace{\alpha_2 v_2 + \cdots + \alpha_n v_2}_{\in \operatorname{span}(w_1, v_2, \ldots, v_n)} \tag{5}$$

Juntando (4) y (5) obtenemos $v \in \operatorname{span}(w_1, v_2, \ldots, v_n)$. Por lo tanto $\operatorname{span}(w_1, v_2, \ldots, v_n) = V$, lo cual concluye el paso base.

Paso inductivo.

Supongamos que

$$\operatorname{span}(w_1, \dots, w_i, v_{i+1}, v_{i+2}, \dots, v_n) = V \tag{6}$$

y veamos que

$$\operatorname{span}(w_1, \dots, w_i, w_{i+1}, v_{i+2} \dots, v_n) = V.$$

Por (6), podemos escribir

$$w_{i+1} = \beta_1 w_1 + \cdots + \beta_i w_i + \beta_{i+1} v_{i+1} + \beta_{i+2} v_{i+2} + \cdots + \beta_n v_n \tag{7}$$

para algunas $\beta_1, \dots, \beta_n \in F$.

Veamos que existe $j \in \{i+1, i+2, \dots, n\}$ tal que $\beta_j \neq 0$. De lo contrario, tendríamos

$$w_{i+1} = \beta_1 w_1 + \cdots + \beta_i w_i \text{ con no todas las } \beta_k = 0,$$

contradiciendo que $w_1, \dots, w_m$ son linealmente independientes. Sin perdida de generalidad, supongamos que $\beta_{i+1} \neq 0$.

Entonces podemos despejar v_{i+1} en (7) para obtener

$$v_{i+1} = \frac{1}{\beta_{i+1}} \left(-\beta_1 w_1 - \cdots \beta_i w_i + w_{i+1} - \beta_{i+2} v_{i+2} - \cdots - \beta_n v_n\right).$$

En particular, tenemos que

$$v_{i+1} \in \operatorname{span}\left(w_1, \ldots, w_i, w_{i+1}, v_{i+2}, \ldots, v_n\right) \tag{8}$$

Veamos que esto implica que $\operatorname{span}\left(w_1, \ldots, w_i, w_{i+1}, v_{i+2}, \ldots, v_n\right) = V$. Supongamos que $v \in V$. Por (6), existen $\gamma_1, \ldots, \gamma_n \in F$ tales que

$$v = \gamma_{i+1} v_{i+1} + \underbrace{\gamma_1 w_1 + \cdots + \gamma_i w_i + \gamma_{i+2} v_{i+2} + \cdots + \gamma_n v_n}_{\in \operatorname{span}(w_1, \ldots, w_i, w_{i+1}, v_{i+2}, \ldots, v_n)} \tag{9}$$

Juntado (8) y (9) obtenemos $v \in \operatorname{span}(w_1, \ldots, w_i, w_{i+1}, v_{i+2}, \ldots, v_n)$. Por lo tanto $\operatorname{span}(w_1, \ldots, w_i, w_{i+1}, v_{i+2}, \ldots, v_n) = V$, lo cual concluye el paso inductivo.

$\square$

La cardinalidad de un conjunto finito de vectores linealmente independientes es menor o igual que la cardinalidad de cualquier base

Corolario 2

Supongamos que V es un espacio vectorial sobre F y que $\{v_1, \ldots, v_n\}$ es una base de V. Si $w_1, \ldots, w_m \in V$ son linealmente independientes, entonces $m \leq n$.

Demostración. Procedemos por contradicción. Es decir, supongamos que $m > n$. Como $w_1, \ldots, w_m$ son linealmente independientes, entonces $w_1, \ldots, w_n$ también son linealmente independientes. Usando (i) esto, (ii) que $\text{span}(v_1, \ldots, v_n) = V$ (pues $\{v_1, \ldots, v_n\}$ es base), y (iii) la proposición 4, obtenemos que $\{w_1, \ldots, w_n\}$ es base. Pero entonces, (como $w_{n+1} \neq 0$ pues $w_1, \ldots, w_n, w_{n+1}, \ldots, w_m$ son linealmente independientes)

$$w_{n+1} = \alpha_1 w_1 + \cdots + \alpha_n w_n \text{ con no todas las } \alpha_i = 0.$$

Contradiciendo la independencia lineal de $w_1, \ldots, w_n, w_{n+1}, \ldots, w_m$. $\square$

Todas las bases (finitas) tienen la misma cardinalidad

Corolario 3

Supongamos que V es un espacio vectorial sobre F. Si $\{v_1, \ldots, v_n\}$ y $\{w_1, \ldots, w_m\}$ son bases de V, entonces $n = m$.

Demostración. Como $\{v_1, \ldots, v_n\}$ es una base y $w_1, \ldots, w_m$ son linealmente independientes (pues $\{w_1, \ldots, w_m\}$ es una base), entonces el corolario 2 implica que $m \leq n$. Invirtiendo los roles de $\{v_1, \ldots, v_n\}$ y $\{w_1, \ldots, w_m\}$ en el argumento anterior, obtenemos $n \leq m$. Por lo tanto, $n = m$.

Dimensión de un espacio vectorial

Definición

Supongamos que V es un espacio vectorial sobre F.

- Si V tiene una base finita B, decimos que V es **finito-dimensional** y definimos la **dimensión de V sobre F** (o simplemente la **dimensión de V**) como el entero positivo

$$\dim_F V = |B|.$$

  Cabe recalcar que esta definición es independiente de la base B por el corolario 3.

- Si V no es finito-dimensional, decimos que V es **infinito dimensional** y escribimos

$$\dim_F V = \infty.$$

Cuando no haya ambigüedad respecto al campo F, escribimos $\dim V$ en vez de $\dim_F V$.

Condiciones suficientes para que un conjunto generador sea una base

Proposición 4

Supongamos que V es un espacio vectorial sobre F. Si $B \subset V$ es tal que

- B genera a V.
- Ningún subconjunto propio de B genera a V.

Entonces B es una base de V.

Demostración. Como B genera a V, solo resta probar que B es un conjunto de vectores linealmente independientes. Para esto, supongamos lo contrario. Es decir, supongamos que existen $v_1, \ldots, v_n \in B$ y $\alpha_1, \ldots, \alpha_n \in F$ tales que

$$\alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \cdots + \alpha_n v_n = 0 \text{ y no todas las } \alpha_i \text{ son } 0. \tag{10}$$

Sin perdida de generalidad, supongamos que $\alpha_1 \neq 0$. Como F es campo, α_1 es invertible y por lo tanto, (10) implica que

$$v_1 = -\frac{1}{\alpha_1}\left(\alpha_2 v_2 + \cdots + \alpha_n v_n\right) \in \operatorname{span}\big(B \setminus \{v_1\}\big) \tag{11}$$

Veamos que esto implica que

$$\operatorname{span}\big(B \setminus \{v_1\}\big) = V.$$

Supongamos que $v \in V$. Como B es base, existen $w_1, \ldots, w_n \in B \setminus \{v_1\}$ y $\alpha, \beta_1, \ldots, \beta_m \in F$ tales que

$$v = \alpha v_1 + \underbrace{\beta_1 w_1 + \cdots + \beta_m w_m}_{\in \operatorname{span}(B \setminus \{v_1\})} \tag{12}$$

Juntando (11) y (12) obtenemos $v \in \operatorname{span}(B \setminus \{v_1\})$.

Por lo tanto, $\operatorname{span}\big(B \setminus \{v_1\}\big) = V$, lo cual contradice la hipótesis "ningún subconjunto propio de B genera a V". $\square$

Conjuntos generadores finitos contienen una base

Corolario 5

Supongamos que V es un espacio vectorial sobre F y que $A \subset V$ es un subconjunto generador de V. Si A es finito, entonces existe $B \subset A$ tal que B es una base de V.

Demostración. Por la proposición anterior basta demostrar la existencia de un subconjunto B de A tal que

- B genere a V.
- Ningún subconjunto propio de B genere a V.

Para esto, supongamos que *no* existe semejante B. Es decir, supongamos que

$$\forall B \subset A \left(B \text{ genera a } V \implies \exists B' \subsetneq B \text{ tal que } B' \text{ genera a } V \right) \tag{13}$$

Por la finitud de A, después de usar adecuadamente (13) una cantidad finita de veces, obtendríamos que $\varnothing$ genera a V, una contradicción. $\square$

La cardinalidad de un conjunto generador finito es mayor o igual que la cardinalidad de cualquier base

Corolario 6

Supongamos que V es un espacio vectorial sobre F. Si $\{w_1, \ldots, w_m\}$ genera a V, entonces $m \geq \dim V$.

Demostración. Es consecuencia inmediata del corolario 5. $\square$

Si un conjunto generador o de vectores linealmente independientes tiene la misma cardinalidad que la dimensión, entonces es base

Proposición 7

Supongamos que V es un espacio vectorial sobre F con $\dim V = n < \infty$.

1. Si $\{v_1, \dots, v_n\}$ genera a V, entonces también es base.
2. Si $\{v_1, \dots, v_n\}$ es un conjunto de vectores linealmente independientes, entonces también es base.

Demostración.

1. Supongamos que $\{v_1, \dots, v_n\}$ genera a V. Por la proposición 4, basta probar que ningún subconjunto propio de B genera a V. Por eso, supongamos lo contrario. Sin perdida de generalidad, supongamos que $\{v_1, \dots, v_m\}$ con $m \leq n - 1$ genera a V. Sin embargo, por el corolario 6, $m \geq \dim V = n$. Una contradicción.
2. Esto es precisamente lo que vimos en la proposición 1.

□

Todo espacio vectorial tiene una base

Uno de los resultados mas importantes de la teoría de espacios vectoriales es que el axioma de elección es equivalente a que todo espacio vectorial tenga una base. Como el axioma de elección es un axioma (vaya la redundancia), lo anterior implica que todo espacio vectorial tiene una base.
Desafortunadamente, no nos vamos a dar el tiempo de demostrar este (difícil) resultado, pero en la siguiente proposición damos una pequeña aplicación.

$\dim V = \infty \iff$ existe un conjunto infinito de vectores linealmente independientes

Corolario 8

Supongamos que V es un espacio vectorial sobre F. Entonces V es infinito dimensional si y solo si existe un conjunto infinito de vectores linealmente independientes.

Demostración.

$\Longrightarrow$) Supongamos que V es infinito dimensional. Una base de V es un conjunto infinito de vectores linealmente independientes.

$\Longleftarrow$) Supongamos que V no es infinito dimensional. Por el corolario 2, todo conjunto de vectores linealmente independientes tiene cardinalidad $\leq \dim V$. En particular, no existen conjuntos infinitos de vectores linealmente independientes.

$\square$