1. Consideremos, para todo $r \geq 0$, la aplicacion $\varphi_r : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por

$$\varphi_r(t) = \begin{cases} t & \text{si } t \leq 0 \\ rt & \text{si } t \geq 0 \end{cases}$$

Muestre que los atlas $(\varphi_r)_{r>0}$ definen una familia no numerable de estructuras diferenciables sobre $\mathbb{R}$. ¿Son difeomorfas las variedades diferenciables correspondientes?

Demostración. Antes de empezar, notemos que para toda $r, r' > 0$,

$$\varphi_r \circ \varphi_{r'} = \varphi_{r \cdot r'} \quad \text{y} \quad \varphi_r^{-1} = \varphi_{\frac{1}{r}}$$

Donde la segunda igualdad es consecuencia de la primera. Veamos que si $r, r' > 0$ son tales que $r' \neq \frac{1}{r}$, entonces el atlas $\mathcal{A}_r$ determinado por φ_r es distinto al atlas $\mathcal{A}_{r'}$ determinado por $\varphi_{r'}$. Para esto, basta notar que

$$\varphi_r^{-1} \circ \varphi_{r'} = \varphi_{\frac{1}{r}} \circ \varphi_{r'} = \varphi_{\frac{r'}{r}}$$

no es suave. Por lo tanto, los atlas $(\varphi_r)_{r>0}$ definen una familia no numerable de estructuras diferenciables sobre $\mathbb{R}$.
Por otro lado, como $\varphi_{\frac{r'}{r}} : (\mathbb{R}, \mathcal{A}_r) \to (\mathbb{R}, \mathcal{A}_{r'})$ es tal que

$$\varphi_{r'}^{-1} \circ \varphi_{\frac{r'}{r}} \circ \varphi_r = \mathrm{id}_{\mathbb{R}}$$

entonces, $\varphi_{\frac{r'}{r}}$ es un difeomorfismo. $\square$

2. Consideremos una aplicación diferenciable $\pi : M \to N$. Muestre que π es una submersion si y solo si admite secciones locales en cada punto, es decir, para todo $q = \pi(p)$, $p \in M$, existe una vecindad abierta W de q en N, y una aplicación diferenciable $\sigma : W \to M$ tal que $\sigma(q) = p$ y $\pi \circ \sigma = \mathrm{id}_W$.

Demostración. Supongamos que $\dim M = m$ y $\dim N = n$ y denotemos por i a la inclusión ortogonal $R^m \to R^n$ y por j a la proyección ortogonal $R^n \to R^m$.
$\Longrightarrow$) Como π es submersion, entonces existen (φ, U) y (ψ, V) cartas de M y N (resp.) centradas en p y $\pi(p)$ (resp.) tales que

$$\psi \circ \pi \circ \varphi^{-1}(x_1, \ldots, x_m, x_{m+1}, \ldots, x_m) = (x_1, \ldots, x_m)$$

En otras palabras,

$$\psi \circ \pi \circ \varphi^{-1} = j|_{\varphi(U)} \tag{1}$$

Con esto en mente, y recordando que $j \circ i = \mathrm{id}_{\mathbb{R}^n}$, notamos que nos gustaría despejar π en (1) para obtener

$$\pi|_{W_1} = \psi^{-1} \circ j \circ \varphi|_{W_1}$$

donde $W_1 \subset M$ es una vecindad donde la igualdad anterior tiene sentido. La razon por la que esto nos gustaría es que de esta manera, podríamos definir

$$\sigma \coloneqq \varphi^{-1} \circ i \circ \psi$$

ya que de esta manera,

$$\pi \circ \sigma = \left(\psi^{-1} \circ j \circ \varphi\right) \circ \left(\varphi^{-1} \circ i \circ \psi\right) = \mathrm{id} \tag{2}$$

Para hacer precisa esta idea, necesitamos verificar 3 cosas:

1. Podemos despejar π en (1). Es decir, $\exists W_1 \subset M$ tal que

$$\pi|_{W_1} = \psi^{-1} \circ j \circ \varphi|_{W_1}$$

2. Podemos definir σ. Es decir, $\exists W_2 \subset N$ donde la composición $\varphi^{-1} \circ i \circ \psi$ tiene sentido.

3. Podemos componer como en (2). Por los incisos anteriores, solo necesitamos checar que

$$\mathrm{im}\left(\varphi^{-1} \circ i \circ \psi\right) \subset \mathrm{dom}\left(\psi^{-1} \circ j \circ \varphi\right) = W_1$$

Para esto, basta encontrar $W \subset W_2$ tal que

$$\left(\varphi^{-1} \circ i \circ \psi|_{W_2}\right)(W) \subset W_1.$$

Demostración de 1,2,3:

1. Primero notemos que basta encontrar W_1 tal que la composición $\psi^{-1} \circ j \circ \varphi|_{W_1}$ tenga sentido. En efecto, de existir tal W_1 tendríamos

$$\begin{aligned}
\psi^{-1} \circ j \circ \varphi|_{W_1} &= \psi^{-1} \circ \left(j|_{\varphi(W_1)}\right) \circ \varphi|_{W_1} \\
&= \psi^{-1} \circ \left(\psi \circ \pi \circ \varphi^{-1}|_{\varphi(W_1)}\right) \circ \varphi|_{W_1} && \text{(por (1))} \\
&= \pi|_{W_1}
\end{aligned}$$

Para encontrar W_1, notemos que el único problema en la definición de la composición $\psi^{-1} \circ j \circ \varphi$ es que $j \circ \varphi(x)$ pertenezca al dominio de ψ^{-1}; y como el dominio de ψ^{-1} es $\psi(V)$, entonces W_1 tiene que ser tal que $x \in W_1$ implica $j \circ \varphi(x) \in \psi(V)$. Por eso, basta poner

$$W_1 \coloneqq (j \circ \varphi)^{-1}(\psi(V))$$

Cabe recalcar que $W_1 \neq \emptyset$, pues $p \in W_1$. En efecto,

$$(j \circ \varphi)(p) = j(0) = 0 \in \psi(V)$$

2. De la misma manera que en el inciso anterior, el único problema en la definición de la composición $\varphi^{-1} \circ i \circ \psi$ es que $i \circ \psi(y)$ pertenezca a el dominio de φ^{-1}; y como el dominio de φ^{-1} es $\varphi(U)$, entonces W_2 tiene que ser tal que $x \in W_2$ implica $i \circ \psi(y) \in \varphi(U)$. Por eso, basta poner

$$W_2 \coloneqq \psi^{-1}\Big(\psi(V) \cap j\left(\varphi(U) \cap (\mathbb{R}^n \times 0)\right)\Big)$$

En efecto,

$$\begin{aligned} x \in W_2 &\implies \psi(x) \in j\left(\varphi(U) \cap (\mathbb{R}^n \times 0)\right) \\ &\implies \exists y \in \varphi(U) \cap (\mathbb{R}^n \times 0) \text{ tal que } j(y) = \psi(x) \end{aligned}$$

Pero por definición de j, lo anterior implica que $y = \big(\psi(x), 0\big)$. Como $y \in \varphi(U)$, obtenemos lo deseado.

3. Claramente, $W \coloneqq W_2 \cap \left(\varphi^{-1} \circ i \circ \psi\right)^{-1}(W_1)$ cumple lo deseado. Cabe aclarar que $W_2 \neq \emptyset$, pues $\pi(p) \in W_2$. En efecto,

$$\psi(\pi(p)) = 0 \in \psi(V) \cap j\left(\varphi(U) \cap (\mathbb{R}^n \times 0)\right)$$

Por lo tanto,

$$\begin{aligned} \sigma : W &\to M \\ x &\mapsto \varphi^{-1} \circ i \circ \psi(x) \end{aligned}$$

es una sección local en p.
$\Longleftarrow$) Sea $p \in M$ y supongamos que $\sigma : W \to M$ es una seccion local en p. Por la regla de la cadena, $\pi \circ \sigma = \mathrm{id}_W$ implica $d\pi_p \circ d\sigma_q = \mathrm{id}_{T_qM}$. En particular, $d\pi_p$ tiene inverso derecho. Equivalentemente, $d\pi_p$ es suprayectiva. Como esto es cierto para toda $p \in M$, entonces π es submersion. $\square$

3. Considere la cuadrica proyectiva

$$Q \coloneqq \Big\{[x_1, x_2, x_3, x_4] \in \mathbb{P}^3\mathbb{R} \mid x_1^2 + x_2^2 - x_3^2 - x_4^2 = 0\Big\}$$

y muestre lo siguiente:

1. Q es una subvariedad de $\mathbb{P}^3\mathbb{R}$.

2. Para todo $(u, v) \in \mathbb{R}^2$, el punto

$$P(u, v) = \big[\cos(\pi u), \sin(\pi u), \cos(\pi(u + 2v)), \sin(\pi(u + 2v))\big]$$

pertenece a Q y solo depende de las clases de u y v modulo $\mathbb{Z}$.

3. La aplicación $(u, v) \mapsto P(u, v)$ define, al pasar al cociente $\mathbb{R}^2/\mathbb{Z}^2$, un encaje del toro $T^2 = \mathbb{R}^2/\mathbb{Z}^2$ en $\mathbb{P}^3\mathbb{R}$, de imagen Q.

Demostración.

1. Usaremos el siguiente ejemplo de las notas 1.2 del semestre pasado.

   > **Ejemplo 1.1.** *Sea P un polinomio de $n+1$ variables, homogéneo, tal que $\forall x \neq 0$, existe $i \in \{1, \ldots, n+1\}$ tal que*
   >
   > (1) $$\frac{\partial P}{\partial x_i}(x) \neq 0.$$
   >
   > *Entonces el conjunto*
   > $$S := \{[x] \in \mathbb{P}^n\mathbb{R} |\ P(x) = 0\}$$
   > *es una subvariedad de $\mathbb{P}^n\mathbb{R}$.*

   Denotemos por $f : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}$ a el polinomio

   $$f(x_1, x_2, x_3, x_4) = x_1^2 + x_3^2 - x_3^2 - x_4^2$$

   Entonces, $Q = \big\{[x] \in \mathbb{P}^3\mathbb{R} \mid f(x) = 0\big\}$. Como queremos ocupar el ejemplo 1.1, supongamos que $x = (x_1, x_2, x_3, x_4) \in \mathbb{R}^4$ es distinto de 0 y que $i \in \{1, 2, 3, 4\}$ es tal que $x_i \neq 0$. Entonces,

   $$\frac{\partial f}{\partial x_i}(x) = \pm 2x_i \neq 0$$

   Por lo tanto, Q es subvariedad de $\mathbb{P}^3\mathbb{R}$.

2. Sea $(u, v) \in \mathbb{P}^3\mathbb{R}$. Entonces,

   $$\begin{gathered} \cos^2(\pi u) + \sin^2(\pi u) - \cos^2(\pi(u + 2v)) - \cos^2(\pi(u + 2v)) = \\ \Big(\cos^2(\pi u) + \sin^2(\pi u)\Big) - \Big(\cos^2(\pi(u + 2v)) + \cos^2(\pi(u + 2v))\Big) = 0 \end{gathered}$$

   Donde la ultima igualdad se cumple por la identidad de Euler. Por lo tanto, para toda $(u, v) \in \mathbb{R}^2$, $P(u, v) \in Q$. Veamos que $P(u, v)$ solo depende de las clases de u y v modulo $\mathbb{Z}$. Para esto, supongamos que $n, m \in \mathbb{Z}$. Entonces, usando identidades trigonométricas básicas,

   $$\begin{aligned} \cos(\pi(u + n)) &= \cos(\pi u + \pi n) \\ &= \cos(\pi u) \cdot \cancelto{(-1)^n}{\cos(\pi n)} - \sin(\pi u) \cdot \cancelto{0}{\sin(\pi n)} \\ &= (-1)^n \cos(\pi u) \end{aligned}$$

   $$\begin{aligned} \sin(\pi(u + n)) &= \sin(\pi u + \pi n) \\ &= \sin(\pi u) \cdot \cancelto{(-1)^n}{\cos(\pi n)} + \cancelto{0}{\sin(\pi n)} \cdot \cos(\pi u) \\ &= (-1)^n \sin(\pi u) \end{aligned}$$

$$\cos\left(\pi\left((u+n)+2(v+m)\right)\right)=\cos\left(\pi(u+2v)+\pi(n+2m)\right)=$$

$$\cos\left(\pi(u+2v)\right)\cdot\cancelto{(-1)^{n+2m}}{\cos\left(\pi(n+2m)\right)}-\sin\left(\pi(u+2v)\right)\cdot\cancelto{0}{\sin\left(\pi(n+2m)\right)}=$$

$$(-1)^{n+2m}\cos\left(\pi(u+2v)\right)=$$

$$(-1)^{n}\cancelto{1}{(-1)^{2m}}\cos\left(\pi(u+2v)\right)=$$

$$(-1)^{n}\cos\left(\pi(u+2v)\right)$$

$$\sin\left(\pi\left((u+n)+2(v+m)\right)\right)=\sin\left(\pi(u+2v)+\pi(n+2m)\right)=$$

$$\sin\left(\pi(u+2v)\right)\cdot\cancelto{(-1)^{n+2m}}{\cos\left(\pi(n+2m)\right)}+\cancelto{0}{\sin\left(\pi(n+2m)\right)}\cdot\cos\left(\pi(u+2v)\right)=$$

$$(-1)^{n+2m}\sin\left(\pi(u+2v)\right)=$$

$$(-1)^{n}\cancelto{1}{(-1)^{2m}}\sin\left(\pi(u+2v)\right)=$$

$$(-1)^{n}\sin\left(\pi(u+2v)\right)$$

Como $(-1)^n \neq 0$ y todo elemento equivalente (modulo $\mathbb{Z}$) a u es de la forma $u+n$, $n\in\mathbb{Z}$ y todo elemento equivalente (modulo $\mathbb{Z}$) a v es de la forma $v+m$, $m\in\mathbb{Z}$, obtenemos lo deseado.

3. Por el inciso anterior, $[u,v]\in T^2 \overset{\tilde{P}}{\longmapsto} P(u,v)$ esta bien definida. Para ver que es un encaje, sea $x:=[u,v]\in T^2$ y $\alpha,\beta: I\to T^2$ curvas suaves tal que $\alpha(0)=x=\beta(0)$. Como queremos ver que $d\tilde{P}_x$ es inyectiva, supongamos que $d\tilde{P}_x\left([\alpha]\right)=d\tilde{P}_x\left([\beta]\right)$. Entonces, $\forall(\varphi,U)$ carta de $\mathbb{P}^3\mathbb{R}$ en $\tilde{P}(x)$,

$$\left(\varphi\circ\left(\tilde{P}\circ\alpha\right)\right)'(0)=\left(\varphi\circ\left(\tilde{P}\circ\beta\right)\right)'(0). \tag{3}$$

Pongamos $\varphi=\varphi_i$ donde $i\in\{1,2,3,4\}$ es tal que $\tilde{P}(x)_i\neq 0$ y φ_i es la i-esima carta usual de $\mathbb{P}^3\mathbb{R}$. Específicamente,

abierto de $\mathbb{R}^{n+1}\backslash\{0\}$ (definición de la topología cociente). Definamos un atlas sobre $\mathbb{P}^n\mathbb{R}$. Consideremos, para $i=1,\ldots,n+1$,

$$\mathcal{V}_i=\{x=(x_1,\ldots,x_{n+1})\in\mathbb{R}^{n+1}|\ x_i\neq 0\}.$$

Es un abierto de $\mathbb{R}^{n+1}\backslash\{0\}$, estable por la relación de equivalencia $\sim$ (i.e. es una unión de clases de equivalencia). La aplicación

$$\begin{array}{cccc}\Phi_i: & \mathcal{V}_i & \to & \mathbb{R}^n\\ & x & \mapsto & \left(\dfrac{x_1}{x_i},\ldots,\dfrac{x_{i-1}}{x_i},\widehat{\dfrac{x_i}{x_i}},\dfrac{x_{i+1}}{x_i},\ldots,\dfrac{x_{n+1}}{x_i}\right)\end{array}$$

(ver dibujo 4) define al cociente una aplicación

$$\varphi_i:\quad \mathcal{U}_i:=p(\mathcal{V}_i)\to\mathbb{R}^n,$$

Veamos que con φ definido de esta manera, $j\circ\varphi\circ\tilde{P}$ es una carta de T^2 en x, donde $j:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}^2$ es la proyección ortogonal. Para esto, basta encontrar una carta (ψ, V) de T^2 tal que

$$\left(j \circ \varphi \circ \tilde{P}\right) \circ \psi^{-1}$$

sea diferenciable. Sea $\alpha : B_1(u,v) \to T^2$ tal que $(w,z) \mapsto [w,z] \in T^2$. Pongamos $\psi = \alpha^{-1}$. Entonces, ψ es carta de T^2 en x y

$$\begin{aligned}\left(j \circ \varphi \circ \tilde{P}\right) \circ \psi^{-1}(w,z) &= \left(j \circ \varphi \circ \tilde{P}\right)[w,z] \\ &= j \circ \varphi\left[\cos(\pi w), \sin(\pi w), \cos(\pi(w+2z)), \sin(\pi(w+2z))\right]\end{aligned}$$

Por definición de j y φ, es claro que $\left(j \circ \varphi \circ \tilde{P}\right) \circ \psi^{-1}$ es suave y por lo tanto, $j \circ \varphi \circ \tilde{P}$ es carta de T^2 en x. Por otro lado, por la regla de la cadena,

$$\begin{aligned}\left(\left(j \circ \varphi \circ \tilde{P}\right) \circ \alpha\right)'(0) &= j \circ \left(\varphi \circ \tilde{P} \circ \alpha\right)'(0) && (j \text{ es lineal}) \\ &= j \circ \left(\varphi \circ \tilde{P} \circ \beta\right)'(0) && (\text{por } (3)) \\ &= \left(\left(j \circ \varphi \circ \tilde{P}\right) \circ \beta\right)'(0) && (j \text{ es lineal})\end{aligned}$$

Acabamos de demostrar que existe una carta (ξ, W) de T^2 en x tal que

$$(\xi \circ \alpha)'(0) = (\xi \circ \beta)'(0)$$

Es decir, $[\alpha] = [\beta]$. Por lo tanto, $d\tilde{P}_x$ es inyectiva.

Para ver que $\tilde{P}$ tiene imagen Q, resta probar que Q esta contenido en $\operatorname{im} \tilde{P}$. Para esto, sea $[x_1, x_2, x_3, x_4] \in Q$. Entonces, $x_1^2 + x_2^2 = x_3^2 + x_4^2$ y por lo tanto, los puntos $(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$ y $(x_3, x_4) \in \mathbb{R}^2$ tienen la misma norma. Denotemos $r := x_1^2 + x_2^2 = x_3^2 + x_4^2$ y supongamos que $(x_1, x_2) = r(\cos\theta_1, \sin\theta_1)$ y $(x_3, x_4) = r(\cos\theta_1, \sin\theta_2)$ para algunos $\theta_1, \theta_2 \in \mathbb{R}$. Entonces, $u := \frac{\theta_1}{\pi}$ y $v := \frac{\theta_2 - \theta_1}{2\pi}$ cumplen lo deseado:

$$\begin{aligned}&\left[\cos(\pi u), \sin(\pi u), \cos(\pi(u+2v)), \sin(\pi(u+2v))\right] = \\ &\left[\cos\left(\pi\frac{\theta_1}{\pi}\right), \sin\left(\pi\frac{\theta_1}{\pi}\right), \cos\left(\pi\left(\frac{\theta_1}{\pi} + 2\frac{\theta_2 - \theta_1}{2\pi}\right)\right), \sin\left(\pi\left(\frac{\theta_1}{\pi} + 2\frac{\theta_2 - \theta_1}{2\pi}\right)\right)\right] = \\ &[\cos\theta_1, \sin\theta_1, \cos\theta_2, \sin\theta_2] = \\ &[x_1, x_2, x_3, x_4]\end{aligned}$$

Por lo tanto, $Q \subset \operatorname{im} \tilde{P}$.

$\square$

5. Supongamos que S_1, S_2 son superficies y $\alpha : [a,b] \to \mathbb{R}^3$ es una curva con $\alpha(t) \in S_1 \cap S_2$ para toda $t \in [a,b]$. Sea V un campo vectorial a lo largo de α que es tangente a S_1 y a S_2.

1. Muestre con un ejemplo que V puede ser paralelo a lo largo de α considerando α como una curva en S_1, sin que V sea paralelo a lo largo de α considerando α como una curva en S_2.

2. Muestre que si S_1 es tangente a S_2 a lo largo de α, es decir $T_{\alpha(t)}S_1 = T_{\alpha(t)}S_2$, entonces V es paralelo a lo largo de α en S_1 si y solo si V es paralelo a lo largo de α en S_2.

3. Muestre que si S_1 y S_2 son tangentes a lo largo de α, entonces α es geodésica en S_1 si y solo si α es geodésica en S_2.

Demostración.

1. Sea $S_1 = \mathbb{S}^2$ y $\alpha : I \to S_1$ una geodésica en S_1. Sea S_2 el plano que contiene a α. Entonces, $V = \alpha'(t)$ es paralelo a α considerada como curva en S_1 pero no es paralelo a α considerada como curva en S_2.

2. La derivada covariante de V a lo largo de α en t es el vector obtenido por la proyección normal de $(V \circ \alpha)'(t)$ en el plano $T_p(S)$. Por lo tanto, si S_1 y S_2 son tangentes, la derivada covariante de V a lo largo de α es la misma para ambas superficies. En particular, V es paralelo a lo largo de α en S_1 si y solo si V es paralelo a lo largo de α en S_2.

3. Como α es geodésica si y solo si el campo vectorial $\frac{d\alpha}{dt}$ es paralelo, entonces aplicando el inciso anterior con $V = \frac{d\alpha}{dt}$ obtenemos lo deseado.

$\square$

Diego Leipen Lara
418002038