1. Supongamos que

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & A \arrow[r, "i"] \arrow[d, "f"] & B \arrow[r, "j"] \arrow[d, "g"] & C \arrow[r] \arrow[d, "h"] & 0 \\
0 \arrow[r] & A' \arrow[r, "i'"] & B' \arrow[r, "j'"] & C' \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

es un diagrama conmutativo de complejos de cadenas con filas exactas tal que f y g inducen isomorfismos en todos los grupos de homología correspondientes. Usaremos el siguiente teorema del libro de Ivorra:

> **Teorema 4.11** *Consideremos el siguiente diagrama de complejos y homomorfismos de complejos*
>
> $$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & \mathcal{A} \arrow[r, "i"] \arrow[d, "f"] & \mathcal{B} \arrow[r, "j"] \arrow[d, "g"] & \mathcal{C} \arrow[r] \arrow[d, "h"] & 0 \\
0 \arrow[r] & \mathcal{A}' \arrow[r, "i'"] & \mathcal{B}' \arrow[r, "j'"] & \mathcal{C}' \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$
>
> *donde las filas son exactas y cada cuadrado es conmutativo.*
>
> *Entonces en el diagrama siguiente*
>
> $$\begin{tikzcd}
\cdots \arrow[r] & H_p(\mathcal{A}) \arrow[r, "\bar{i}"] \arrow[d, "\bar{f}"] & H_p(\mathcal{B}) \arrow[r, "\bar{j}"] \arrow[d, "\bar{g}"] & H_p(\mathcal{C}) \arrow[r, "\delta_{*p}"] \arrow[d, "\bar{h}"] & H_{p-1}(\mathcal{A}) \arrow[r] \arrow[d, "\bar{f}"] & \cdots \\
\cdots \arrow[r] & H_p(\mathcal{A}') \arrow[r, "\bar{i}'"] & H_p(\mathcal{B}') \arrow[r, "\bar{j}'"] & H_p(\mathcal{C}') \arrow[r, "\delta_{*p}"] & H_{p-1}(\mathcal{A}') \arrow[r] & \cdots
\end{tikzcd}$$
>
> *cada cuadrado es conmutativo.*

Por el teorema, el diagrama

$$\begin{tikzcd}
H_p(A) \arrow[r, "\bar{i}"] \arrow[d, "\bar{f}"] & H_p(B) \arrow[r, "\bar{j}"] \arrow[d, "\bar{g}"] & H_p(C) \arrow[r, "\delta_{*p}"] \arrow[d, "\bar{h}"] & H_{p-1}(A) \arrow[r, "\bar{i}"] \arrow[d, "\bar{f}"] & H_{p-1}(B) \arrow[d, "\bar{g}"] \\
H_p(A') \arrow[r, "\bar{i}'"] & H_p(B') \arrow[r, "\bar{j}'"] & H_p(C) \arrow[r, "\delta_{*p}"] & H_{p-1}(A) \arrow[r, "\bar{i}'"] & H_{p-1}(B')
\end{tikzcd}$$

es conmutativo en cada cuadrado. Como por hipótesis $\bar{f}$ & $\bar{g}$ son isomorfismos, podemos aplicar el lema de los cinco a este diagrama. $\therefore$ $\bar{h}$ es isomorfismo. $\square$

2. Sea $i : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}^2$ tal que $i(z) = (z, 0)$. Tambien, sea $j : \mathbb{Z}^2 \to \mathbb{Z}/2$ tal que $j(n, m) = [m]$. Claramente,

$$0 \longrightarrow \mathbb{Z} \xrightarrow{\ i\ } \mathbb{Z}^2 \xrightarrow{\ j\ } \mathbb{Z}/2 \longrightarrow 0$$

es una sucesion exacta corta. Por otro lado,

$$0 \longrightarrow \mathbb{Z} \xrightarrow{\ 2\cdot\ } \mathbb{Z} \xrightarrow{\ \pi\ } \mathbb{Z}/2 \longrightarrow 0$$

tambien es una sucesion exacta corta y como $\mathbb{Z} \ncong \mathbb{Z}^2$, obtenemos lo deseado. Finalmente, veamos que esto no contradice el lema de los cinco. Como el unico isomorfismo $\mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$ ($\mathbb{Z}/2 \to \mathbb{Z}/2$) es la identidad $\mathbb{1}_{\mathbb{Z}}$ ($\mathbb{1}_{\mathbb{Z}/2}$), basta demostrar que no existe morfismo $f : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}^2$ que haga conmutar el siguiente diagrama.

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & \mathbb{Z} \arrow[r, "2\cdot"] \arrow[d, "\mathbb{1}_{\mathbb{Z}}"] & \mathbb{Z} \arrow[r, "\pi"] \arrow[d, "f"] & \mathbb{Z}/2 \arrow[r] \arrow[d, "\mathbb{1}_{\mathbb{Z}/2}"] & 0 \\
0 \arrow[r] & \mathbb{Z} \arrow[r, "i"] & \mathbb{Z}^2 \arrow[r, "j"] & \mathbb{Z}/2 \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

De lo contrario,

$$f(2) = (f \circ 2\cdot)(1) = (\mathbb{1}_{\mathbb{Z}} \circ i)(1) = (1, 0).$$

Lo cual es imposible porque implicaria $f(1) = (\frac{1}{2}, 0) \notin \mathbb{Z}^2$. $\square$

Diego Leipen Lara
Estoy inscrito