1. Sea $\mathbb{S}^2$ la esfera unitaria en $\mathbb{R}^3$. En $\mathbb{S}^2$ podemos definir dos cartas por proyección estereográfica desde el polo norte $N = (0, 0, 1)$ y desde el polo sur $S = (0, 0, -1)$. Esto define dos sistemas de coordenadas (x_N, y_N) en $U = \mathbb{S}^2 \setminus \{N\}$ y (x_S, y_S) en $V = \mathbb{S}^2 \setminus \{S\}$. Recordamos que la formula de cambio de coordenadas es

$$(x_S, y_S) = \frac{(x_N, y_N)}{r_N}$$

donde $r_N = x_N^2 + y_N^2$.

1. Escribir dx_S, dy_S, y $dx_S \wedge dy_S$ en términos de dx_N, dy_N, y $dx_N \wedge dy_N$.
2. Verificar que la 2-forma diferencial ω definida en U y V por las formulas

   $$\omega|_U = \frac{-4}{(1 + r_N)^2} \cdot dx_N \wedge dy_N, \quad \omega|_V = \frac{4}{(1 + r_S)^2} \cdot dx_S \wedge dy_S$$

   respectivamente, esta bien definida en la esfera.
3. Sea (x, y, z) el sistema de coordenadas canónico en $\mathbb{R}^3$ y $X \coloneqq x\frac{\partial}{\partial x} + y\frac{\partial}{\partial y} + z\frac{\partial}{\partial z}$. Demuestra que $X, \Omega \coloneqq dx \wedge dy \wedge dz$, y $\iota_X\Omega$ son invariantes bajo rotaciones (cuyo eje sea una recta que pasa por el origen) (recordemos que, por definición, para todo $p \in \mathbb{R}^3$ y $u, v \in T_p\mathbb{R}^3 \cong \mathbb{R}^3$,

   $$(\iota_X\Omega)_p\,(u, v) = \Omega(X(p), u, v)$$

   Verifica que $\iota_X\Omega$ es una forma volumen.

Demostración.

1. Como $x_N = r_N \cdot x_S$, entonces

   $$\begin{aligned} dx_N &= d\left(r_N \cdot x_S\right) \\ &= x_S \cdot dr_N + r_N \cdot dx_S \\ &= x_S \cdot d\left(x_N^2 + y_N^2\right) + r_N \cdot dx_S \\ &= x_S \cdot (2x_N \cdot dx_N + 2y_N \cdot dy_N) + r_N \cdot dx_S \\ &= \frac{x_N}{r_N} \cdot (2x_N \cdot dx_N + 2y_N \cdot dy_N) + r_N \cdot dx_S \end{aligned}$$

   Despejando dx_S obtenemos

   $$\begin{aligned} dx_S &= \frac{dx_N}{r_N} - \frac{x_N}{r_N^2} \cdot (2x_N \cdot dx_N + 2y_N \cdot dy_N) \\ &= \left(\frac{1}{r_N} - \frac{2x_N^2}{r_N^2}\right) dx_N + \frac{2x_N y_N}{r_N^2} \cdot dy_N \end{aligned}$$

Por simetría también tenemos

$$dy_S = \left(\frac{1}{r_N} - \frac{2y_N^2}{r_N^2}\right) dy_N + \frac{2x_N y_N}{r_N^2} \cdot dx_N$$

Entonces,

$$\begin{aligned}
dx_S \wedge dy_S &= \left(\left(\frac{1}{r_N} - \frac{2x_N^2}{r_N^2}\right) \cdot dx_N\right) \wedge \left(\left(\left(\frac{1}{r_N} - \frac{2y_N^2}{r_N^2}\right) \cdot dy_N\right) + \left(\frac{2x_N y_N}{r_N^2} \cdot dy_N\right) \wedge \left(\frac{2x_N y_N}{r_N^2} \cdot dx_N\right)\right. \\
&= \left(\frac{1}{r_N^2} - \frac{2y_N^2}{r_N^3} - \frac{2x_N^2}{r_N^3} + \frac{4x_N^2 y_N^2}{r_N^4}\right) \cdot dx_N \wedge dy_N - \frac{4x_N^2 y_N^2}{r_N^4} \cdot dx_N \wedge dy_N \\
&= \left(\frac{1}{r_N^2} - \frac{2y_N^2}{r_N^3} - \frac{2x_N^2}{r_N^3}\right) \cdot dx_N \wedge dy_N \\
&= \left(\frac{1}{r_N^2} - \frac{2y_N^2 + 2x_N^2}{r_N^3}\right) \cdot dx_N \wedge dy_N \\
&= \left(\frac{1}{r_N^2} - \frac{2r_N}{r_N^3}\right) \cdot dx_N \wedge dy_N \\
&= -\frac{1}{r_N^2} \cdot dx_N \wedge dy_N
\end{aligned}$$

Cabe aclarar que en la primera igualdad omitimos los términos que contienen $dx_N \wedge dx_N$ o $dy_N \wedge dy_N$ porque son igual a 0.

2. Antes de empezar, notemos que

$$r_S = x_S^2 + y_S^2 = \left(\frac{x_N}{r_N}\right)^2 + \left(\frac{y_N}{r_N}\right)^2 = \frac{r_N}{r_N^2} = \frac{1}{r_N}$$

Por lo tanto, $r_S r_N = 1$. Usando esto y el inciso anterior, veamos que ω esta bien definida.

$$\begin{aligned}
\frac{4}{(1+r_S)^2} \cdot dx_S \wedge dy_S &= \frac{4}{1 + 2r_S + r_S^2} \left(-\frac{1}{r_N^2} dx_N \wedge dy_N\right) \\
&= \frac{-4}{r_N^2 + 2r_S r_N^2 + r_S^2 r_N^2} \cdot dx_N \wedge dy_N \\
&= \frac{-4}{r_N^2 + 2(r_S r_N) r_N + (r_S r_N)^2} \cdot dx_N \wedge dy_N \\
&= \frac{-4}{r_N^2 + 2r_N + 1} \cdot dx_N \wedge dy_N \\
&= \frac{-4}{(1 + r_N^2)} \cdot dx_N \wedge dy_N
\end{aligned}$$

3. Por definición, $\Omega_p(u,v,w) = \det(u,v,w) =$ el volumen del paralelepípedo generado por u, v, w. Claramente, este valor es invariante bajo rotaciones por rectas que pasan por el origen. Por la misma razón, $\iota_X\Omega$ es invariante bajo rotaciones. Finalmente, $\iota_X\Omega$ es una forma volumen en $\mathbb{S}^2$ porque $X(x)$ es ortogonal al plano tangente a $\mathbb{S}^2$ y por lo tanto, el volumen del paralelepípedo generado por $X(p)$ y cualesquiera dos vectores linealmente independientes en $T_p\mathbb{S}^2$ es distinto de cero. En otras palabras, si $p \in \mathbb{S}^2$ y $u, v \in T_p\mathbb{S}^2$, entonces $\Omega_p(X(p), u, v) \neq 0$. En particular, $(\iota_X\Omega)_p$ es distinto de cero.

$\square$

Observación 1. Si $k \in \mathbb{N}$, M es una variedad suave, y $p \in M$, entonces $f : M \to \mathbb{R}^k$ es una inmersión en p si y solo si existe una carta (φ, U) de M en p tal que $f \circ \varphi^{-1}$ es inmersión en $\varphi^{-1}(p)$: Esto es una sencilla consecuencia de la regla de la cadena.

Lema 1. Si $n \leq m$, $A \in \mathbb{M}_{m\times n}(\mathbb{R})$, y A tiene una submatriz $B \in \mathbb{M}_{n\times n}(\mathbb{R})$ tal que $\det B \neq 0$, entonces la función lineal $x \in \mathbb{R}^n \mapsto Ax \in \mathbb{R}^m$ es inyectiva.

Demostración. Como $\det B \neq 0$, B tiene rank n, pero como B es submatriz de A, $\text{rank}B \leq \text{rank}A$. Entonces, rank $A \geq n$. Como $x \mapsto Ax$ tiene dominio $\mathbb{R}^n$, esto es equivalente a que $x \mapsto Ax$ sea inyectiva. $\square$

2. Sea $\mathbb{P}^2$ el plano proyectivo real.

1. Explicar si el siguiente mapeo es una inmersión o encaje de $\mathbb{P}^2$ en $\mathbb{R}^3$.

$$[x : y : z] \overset{f}{\mapsto} \frac{(yz, xz, xy)}{x^2 + y^2 + z^2}$$

2. Demostrar que el siguiente mapeo es un encaje de $\mathbb{P}^2$ en $\mathbb{R}^4$.

$$[x : y : z] \overset{g}{\mapsto} \frac{(yz, xz, xy, x^2 + 2y^2 + 3y^2)}{x^2 + y^2 + z^2}$$

Demostración.

1. Sea $[x : y : z] \in \mathbb{P}^2$ y supongamos que $x \neq 0$. Entonces, una carta de $\mathbb{P}^2$ en $[x : y : z]$ esta dada por $(\varphi_1)^{-1}$, donde

$$\begin{aligned} \varphi_1 : \mathbb{R}^2 &\to \mathbb{P}^2 \\ (a, b) &\mapsto [1 : a : b] \end{aligned}$$

Por definición,

$$f \circ \varphi_1(a, b) = \frac{(ab, b, a)}{1 + a^2 + b^2}$$

Por la observación 1, queremos ver que $f \circ \varphi_1$ es inmersión y por eso calculamos

$$\begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial a}\left(\frac{ab}{1+a^2+b^2}\right) &= b\frac{\partial}{\partial a}\left(\frac{a}{1+a^2+b^2}\right) \\
&= b\left(1\left(\frac{1}{1+a^2+b^2}\right)+a\left(\frac{-2a}{\left(1+a^2+b^2\right)^2}\right)\right) \\
&= b\left(\frac{-a^2+b^2+1}{\left(1+a^2+b^2\right)^2}\right) \qquad (1)
\end{aligned}$$

Además, por simetría,

$$\frac{\partial}{\partial b}\left(\frac{ab}{1+a^2+b^2}\right) = a\left(\frac{-b^2+a^2+1}{\left(1+a^2+b^2\right)^2}\right)$$

También, si dividimos (1) por b, entonces

$$\frac{\partial}{\partial a}\left(\frac{a}{\left(1+a^2+b^2\right)^2}\right) = \frac{-a^2+b^2+1}{\left(1+a^2+b^2\right)^2}$$

De nuevo por simetría,

$$\frac{\partial}{\partial b}\left(\frac{b}{\left(1+a^2+b^2\right)^2}\right) = \frac{-b^2+a^2+1}{\left(1+a^2+b^2\right)^2}$$

Finalmente, calculemos

$$\begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial a}\left(\frac{b}{\left(1+a^2+b^2\right)^2}\right) &= b\frac{\partial}{\partial a}\left(\frac{1}{\left(1+a^2+b^2\right)^2}\right) = \frac{-2ab}{\left(1+a^2+b^2\right)^2} \\
\frac{\partial}{\partial b}\left(\frac{a}{\left(1+a^2+b^2\right)^2}\right) &= a\frac{\partial}{\partial b}\left(\frac{1}{\left(1+a^2+b^2\right)^2}\right) = \frac{-2ab}{\left(1+a^2+b^2\right)^2}
\end{aligned}$$

Por lo tanto, juntando lo anterior,

$$d\left(f\circ\varphi_1\right)_{(a,b)} = \frac{1}{\left(1+a^2+b^2\right)^2}\begin{pmatrix} b\left(-a^2+b^2+1\right) & a\left(a^2-b^2+1\right) \\ -2ab & a^2-b^2+1 \\ -a^2+b^2+1 & -2ab \end{pmatrix} \qquad (2)$$

Ahora bien, por el lema 1 calculamos

$$\begin{aligned}
\det\begin{pmatrix} -2ab & a^2-b^2+1 \\ -a^2+b^2+1 & -2ab \end{pmatrix} &= (-2ab)(-2ab)-\left(-a^2+b^2+1\right)\left(a^2-b^2+1\right) \\
&= 4a^2b^2-\left(-a^4+a^2b^2-a^2+b^2a^2-b^4+b^2+a^2-b^2+1\right) \\
&= a^4+b^4+2a^2b^2-1 \\
&= \left(a^2+b^2\right)^2-1,
\end{aligned}$$

entonces $d\left(f\circ\varphi_1\right)_{(a,b)}$ tiene rank 2 si $\left(a^2+b^2\right)^2-1\neq 0$. Por eso, supongamos que $\left(a^2+b^2\right)^2=1$. Entonces,

$$\begin{aligned}
d\left(f\circ\varphi_1\right)_{(a,b)} &= \frac{1}{4}\begin{pmatrix} b\left(\left(b^2-1\right)+b^2+1\right) & a\left(\left(a^2-1\right)+a^2+1\right) \\ -2ab & \left(a^2-1\right)+a^2+1 \\ \left(b^2-1\right)+b^2+1 & -2ab \end{pmatrix} \\
&= \frac{1}{4}\begin{pmatrix} 2b^3 & 2a^3 \\ -2ab & 2a^2 \\ 2b^2 & -2ab \end{pmatrix} \\
&= \frac{1}{2}\begin{pmatrix} b^3 & a^3 \\ -ab & a^2 \\ b^2 & -ab \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

De nuevo, por el lema 1 calculamos

$$\det\begin{pmatrix} b^3 & a^3 \\ -ab & a^2 \end{pmatrix} = b^3a^2-a^4b = a^2b(b^2+a^2) = a^2b,$$

entonces $df_{(a,b)}$ tiene rank 2 si $a^2+b^2\neq 1$ y $a^2b\neq 0$. Por eso, supongamos que $a^2+b^2=1$ y $a^2b=0$, entonces $(a,b)=(\pm 1,0),(0,\pm 1)$. Sin embargo, es fácil ver que en estos puntos, $d\left(f\circ\varphi_1\right)_{(a,b)}$ no es inyectiva. Entonces, por la observación 1, f es inmersión en todos los puntos de la forma $[1:a:b]$ con $(a,b)\neq(\pm 1,0),(0,\pm 1)$. Análogamente, si $[x:y:z]$ es tal que $y\neq 0$ y ocupamos la carta

$$\begin{aligned}
\varphi_2 : \mathbb{R}^2 &\to \mathbb{P}^2 \\
(a,b) &\mapsto [a:1:b]
\end{aligned}$$

encontramos que f es inmersión en todos los puntos de la forma $[a:1:b]$ con $(a,b)\neq(\pm 1,0),(0,\pm 1)$. Haciendo lo mismo para el caso $z\neq 0$, encontramos que f es inmersión en todos los puntos de la forma $[a:b:1]$ con $(a,b)\neq(\pm 1,0),(0,\pm 1)$. En resumen, f es inmersión en

$$\mathbb{P}^2\setminus\left\{[1:1:0],[1:-1:0],[1:0:1],[1:0:-1],[0:1:1],[0:-1:1]\right\} \tag{3}$$

En particular, no es encaje en $\mathbb{P}^2$.

2. Para toda $\alpha,\beta,\gamma\in\mathbb{R}$ son distintos por pares, sea $h:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}$ tal que

$$(x,y,z)\overset{h}{\mapsto}\frac{\alpha x^2+\beta y^2+\gamma y^2}{x^2+y^2+z^2}.$$

La razón por la que hacemos esta generalización de g es para evitar diferencias entre las cartas y poder hacer argumentos de simetría. Veamos que $G:=(f,h)$ es inmersión. Como f no tiene rank 2 únicamente en los puntos mencionados en (3), entonces basta ver que G tiene rank 2 en estos puntos para demostrar que es inmersión. De la misma manera que en el inciso anterior, primero consideremos φ_1. Entonces,

$$h \circ \varphi_1(a,b) = \frac{\alpha + \beta a^2 + \gamma b^2}{1 + a^2 + b^2};$$

$$\begin{aligned}
\frac{\partial\left(h \circ \varphi_1\right)}{\partial a}(a,b) &= (\beta 2a)\left(\frac{1}{1+a^2+b^2}\right) + \left(\alpha + \beta a^2 + \gamma b^2\right)\left(\frac{-2a}{\left(1+a^2+b^2\right)^2}\right) \\
&= 2a\left(\frac{\beta\left(1+a^2+b^2\right)}{\left(1+a^2+b^2\right)^2} - \frac{\alpha+\beta a^2+\gamma b^2}{\left(1+a^2+b^2\right)^2}\right) \\
&= 2a\left(\frac{\beta + \beta a^2 + \beta b^2 - \alpha + \beta a^2 + \gamma b^2}{\left(1+a^2+b^2\right)^2}\right) \\
&= \frac{2a\left(\beta - \alpha + (\beta - \gamma) b^2\right)}{\left(1+a^2+b^2\right)^2};
\end{aligned}$$

$$\frac{\partial\left(h \circ \varphi_1\right)}{\partial b}(a,b) = \frac{2b\left(\gamma - \alpha + (\gamma - \beta) a^2\right)}{\left(1+a^2+b^2\right)^2}$$

(por lo anterior y por simetría)

Entonces,

$$dG_{(a,b)} = \frac{1}{\left(1+a^2+b^2\right)^2}\begin{pmatrix} b\left(\left(b^2-1\right)+b^2+1\right) & a\left(\left(a^2-1\right)+a^2+1\right) \\ -2ab & \left(a^2-1\right)+a^2+1 \\ \left(b^2-1\right)+b^2+1 & -2ab \\ 2a\left(\beta-\alpha+(\beta-\gamma)b^2\right) & 2b\left(\gamma-\alpha+(\gamma-\beta)a^2\right) \end{pmatrix}$$

y por lo tanto,

$$dG_{(0,\pm1)} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} \pm1 & 0 \\ 0 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & \pm(\gamma-\alpha) \end{pmatrix}, \quad dG_{(\pm1,0)} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 0 & \pm1 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \\ \pm(\beta-\alpha) & 0 \end{pmatrix}$$

Como α, β, γ son distintos por pares, $dG_{(0,\pm1)}$ y $dG_{(\pm1,0)}$ tienen rank 2. Por lo tanto, g es inmersión en $[1:0:\pm1]$ y $[1:\pm1:0]$. Procediendo de la misma manera con φ_2 y φ_3, por simetría obtenemos que g es inmersión en $[0,\pm1,1]$ y por lo tanto, en todo $\mathbb{P}^2$.

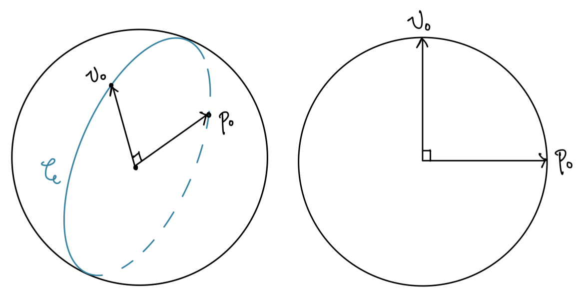
□

3. Muestra que todas las geodésicas de la esfera unitaria $\mathbb{S}^n$ en $\mathbb{R}^{n+1}$ son círculos máximos, es decir, intersección de $\mathbb{S}^n$ con planos que pasan por el origen.

Demostración.

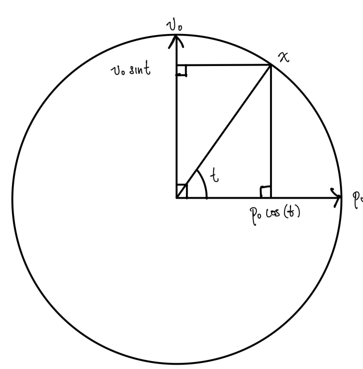
Aclaración.
No cualquier curva que tenga su imagen contenida en un circulo máximo es geodésica. Demostraremos que para cada circulo máximo existe una parametrizacion (por longitud de arco) que es una geodésica; y conversamente, veremos que todas las geodésicas son de esta forma.

La parametrizacion de un circulo máximo.
Supongamos que $\mathcal{C}$ es un circulo máximo y que P es el plano (que pasa por el origen) que lo determina. Es decir, $\mathcal{C} = \mathbb{S}^n \cap P$. Sea $\{p_0, v_0\}$ cualquier base ortonormal de P. La figura (a) a continuación ilustra nuestra situación en $n = 2$.



(a) (b)

Ahora bien, independientemente de la n, si restringimos nuestra atención a P, la situación es la ilustrada en la figura (b). Luego, por trigonometría básica, tenemos la siguiente situación para toda $x \in \mathcal{C}$.



Por lo tanto, para todo $x \in \mathcal{C}$, existe $t \in \mathbb{R}$ tal que

$$x = \cos t \cdot p_0 + \sin t \cdot v_0$$

En resumen, dado un circulo máximo $\mathcal{C}$ y una base ortonormal $\{p_0, v_0\}$ del plano que lo define, tenemos la siguiente parametrizacion de $\mathcal{C}$

$$\begin{aligned} \gamma : \mathbb{R} &\to \mathbb{S}^n \\ t &\mapsto \cos t \cdot p_0 + \sin t \cdot v_0 \end{aligned}$$

Los círculos máximos son geodésicas.
Usaremos el ejemplo 3 de las notas 4.8 del semestre pasado.

Ejemplo 3. *Si $M \subset \mathbb{R}^n$ es una subvariedad, una curva $\gamma : I \to M$ es una geodésica si y solo si $\forall t$ $\gamma''(t) \in (T_{\gamma(t)}M)^\perp$. En efecto,*

$$\frac{D}{dt}\gamma' = (\gamma'')^T = 0 \quad \text{si y solo si} \quad \gamma''(t) \perp T_{\gamma(t)}M \ \ \forall t \in I.$$

Recordemos que el exponente $(.)^T$ denota la proyección ortogonal sobre el espacio tangente a la subvariedad.

Por una cuenta directa,

$$\gamma'(t) = -\sin t \cdot p_0 + \cos t \cdot v_0 \quad \text{y}$$
$$\gamma''(t) = -\cos t \cdot p_0 - \sin t \cdot v_0 = -\gamma(t)$$

En particular, $\gamma(t)||\gamma''(t)$. Como para toda $x \in \mathbb{S}^n$ tenemos $x \perp T_x\mathbb{S}^n$, entonces $\gamma''(t) \perp T_{\gamma(t)}M$. Por el ejemplo 3 obtenemos lo deseado.

Toda geodésica es un circulo máximo.
Usaremos el teorema 1 de las notas 4.8 del semestre pasado

Teorema 1. *Sea $x_0 \in M$ y $v \in T_{x_0}M$. Existe una geodésica $\gamma : (-\varepsilon, \varepsilon) \to M$ tal que*

$$\gamma(0) = x_0, \qquad \gamma'(0) = v.$$

Existe una única geodésica maximal $\gamma : I \to M$ tal que $\gamma(0) = x_0$ y $\gamma'(0) = v$ (se dice que una geodésica $\gamma : I \to M$ es maximal si I es el intervalo maximal de definición de la geodésica, es decir si γ no se puede extender en una geodésica $\widetilde{\gamma} : J \to M$ definida sobre un intervalo J más grande que I).

Es fácil ver que si $p_0 \in \mathbb{S}^n$ y $v_0 \in T_{p_0}\mathbb{S}^n$, entonces

$$\begin{aligned} \gamma : \mathbb{R} &\to \mathbb{S}^n \\ t &\mapsto \cos t \cdot p_0 + \sin t \cdot v_0 \end{aligned}$$

es tal que $\gamma(0) = p_0$ y $\gamma'(0) = v_0$. Como el dominio de γ es todo $\mathbb{R}$, es maximal y por la unicidad del teorema 1, obtenemos lo deseado. $\square$

4. Sean (M_i, g_i), $i = 1, 2$, variedades riemannianas. Define la métrica producto en $M_1 \times M_2$ y sea ∇ la conexión riemanniana compatible con esta métrica. Sean $X \in \mathfrak{X}(M_1)$ y $Y \in \mathfrak{X}(M_2)$. Considéralos como campos en $M_1 \times M_2$ (¿como?). Muestra que $\nabla_X Y = 0$.

Demostración. Antes de empezar, introducimos un poco de notación. Para cada $X \in \mathfrak{X}(M_1)$, sea $\widehat{X} \in \mathfrak{X}(M_1 \times M_2)$ tal que

$$(x, y) \in M_1 \times M_2 \overset{\widehat{X}}{\longmapsto} (X(x), 0) \in T_{(x,y)}(M_1 \times M_2) = T_x M_1 \times T_y M_2$$

De manera completamente análoga, definimos $\widehat{Y} \in \mathfrak{X}(M_1 \times M_2)$ para todo $Y \in \mathfrak{X}(M_2)$. Por supuesto, esta es la respuesta al "¿como?" en el enunciado del problema y por eso demostraremos $\nabla_{\widehat{X}} \widehat{Y} = 0$.

Observación 1. Si $\varphi = (x_1, \ldots, x_n)$ y $\psi = (y_1, \ldots, y_m)$ son cartas de M_1 y M_2 respectivamente, entonces $\varphi \times \psi = (z_1, \ldots, z_{n+m})$ es carta de $M_1 \times M_2$ y su base inducida es

$$\widehat{\frac{\partial}{\partial x_1}}, \ldots, \widehat{\frac{\partial}{\partial x_n}}, \widehat{\frac{\partial}{\partial y_1}}, \ldots, \widehat{\frac{\partial}{\partial y_m}}$$

En particular, para todo $X = \sum_i a_i \frac{\partial}{\partial x_i} \in \mathfrak{X}(M_1)$ y $Y = \sum_j b_j \frac{\partial}{\partial y_j} \in \mathfrak{X}(M_2)$,

$$\widehat{X} = \sum_k \widehat{a}_k \frac{\partial}{\partial z_k} \quad \text{y} \quad \widehat{Y} = \sum_k \widehat{b}_k \frac{\partial}{\partial z_k}$$

donde

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial z_k} &= \begin{cases} \widehat{\frac{\partial}{\partial x_k}} & \text{si } k = 1, \ldots, n \\ \widehat{\frac{\partial}{\partial y_k}} & \text{si } k = n+1, \ldots, n+m \end{cases} \\ \widehat{a}_k &= \begin{cases} a_k & \text{si } k = 1, \ldots, n \\ 0 & \text{si } k = n+1, \ldots, n+m \end{cases} \\ \widehat{b}_k &= \begin{cases} 0 & \text{si } k = 1, \ldots, n \\ b_k & \text{si } k = n+1, \ldots, n+m \end{cases} \end{aligned} \tag{4}$$

Fin de observación 1.

Por definición, la métrica producto g, de g_1 y g_2 esta dada por

$$g_{(x,y)}\big((u, v), (u', v')\big) := (g_1)_x(u, u') + (g_2)_y(v, v')$$

Entonces, para toda $i, j \in \{1, \dots, n+m\}$

$$g_{ij}(x,y) = g_{(x,y)}\left(\widehat{\frac{\partial}{\partial z_i}}, \widehat{\frac{\partial}{\partial z_j}}\right) = \begin{cases} g_{(x,y)}\left(\left(\frac{\partial}{\partial x_i}, 0\right), \left(\frac{\partial}{\partial x_j}, 0\right)\right) & \text{si } i, j \leq n \\ g_{(x,y)}\left(\left(\frac{\partial}{\partial x_i}, 0\right), \left(0, \frac{\partial}{\partial y_{j-n}}\right)\right) & \text{si } i \leq n < j \\ g_{(x,y)}\left(\left(0, \frac{\partial}{\partial y_{i-n}}\right)\left(0, \frac{\partial}{\partial y_{j-n}}\right)\right) & \text{si } i, j > n \end{cases}$$

$$= \begin{cases} (g_1)_{ij}(x) & \text{si } i, j \leq n \\ 0 & \text{si } i \leq n < j \\ (g_2)_{i-n,j-n}(y) & \text{si } i, j > n \end{cases}$$

$$= \begin{cases} \left((g_1)_{ij} \circ \pi_1\right)(x,y) & \text{si } i, j \leq n \\ 0 & \text{si } i \leq n < m \\ \left((g_2)_{i-n,j-n} \circ \pi_2\right)(x,y) & \text{si } i, j > n \end{cases} \tag{5}$$

Donde $\pi_1 : M_1 \times M_2 \to M_1$ y $\pi_2 : M_1 \times M_2 \to M_2$ son las proyecciones canónicas.

Ahora, haremos una (aparentemente irrelevante) digresión: supongamos que $i = 1, \dots, n$ y $j = n+1, \dots, n+m$. Entonces, para toda $(x,y) \in M_1 \times M_2$ y $l \in \{1, \dots, n+m\}$

$$\frac{\partial}{\partial z_i} g_{jl}(x,y) = \begin{cases} 0 & \text{si } l \leq n \\ \left(\frac{\partial}{\partial z_i}(g_2)_{j-n,l-n} \circ \pi_2\right)(x,y) & \text{si } l > n \end{cases} \qquad \text{(por (5))}$$

$$= \begin{cases} 0 & \text{si } l \leq n \\ d\left((g_2)_{j-n,l-n} \circ \pi_2\right)_{(x,y)}\left(\frac{\partial}{\partial z_i}(x,y)\right) & \text{si } l > n \end{cases}$$

$$= \begin{cases} 0 & \text{si } l \leq n \\ d\left((g_2)_{j-n,l-n}\right)_y \circ d(\pi_2)_{(x,y)}\left(\frac{\partial}{\partial x_i}(x), 0\right) & \text{si } l > m \end{cases}$$

(por (4) y porque $i = 1, \dots, n$)

$$= \begin{cases} 0 & \text{si } l \leq n \\ d\left((g_2)_{j-n,l-n}\right)_y(0) & \text{si } l > n \end{cases}$$

$$= 0 \tag{6}$$

De manera completamente análoga, si $i = 1, \dots, m$ y $j = n+1, \dots, n+m$, entonces

$$\frac{\partial}{\partial z_j} g_{li} = 0 \tag{7}$$

Por eso, si denotamos por Γ_{ij}^k, a los símbolos de Christoffel asociados a g, entonces para $i = 1, \ldots, n$ y $j = n+1, \ldots, n+m$

$$\Gamma^k_{ij} = \sum_l \left(\underbrace{\frac{\partial}{\partial z_i} g_{jl}}_{\text{se anula por (6)}} + \underbrace{\frac{\partial}{\partial z_j} g_{li}}_{\text{se anula por (7)}} - \underbrace{\frac{\partial}{\partial z_l} g_{ij}}_{\text{se anula por (5)}} \right) g^{lk} = 0 \tag{8}$$

Por eso, si $X = \sum_i a_i \frac{\partial}{\partial x_i} \in \mathfrak{X}(M_1)$ y $Y = \sum_j b_j \frac{\partial}{\partial y_j} \in \mathfrak{X}(M_2)$, entonces

$$\begin{aligned}
\nabla_{\widehat{X}} \widehat{Y} &= \sum_k \left(\sum_{ij} \widehat{a}_i \widehat{b}_j \Gamma^k_{ij} + \widehat{X}(\widehat{b}_k) \right) \frac{\partial}{\partial z_k} \\
&= \sum_k \left(\underbrace{\sum_{\substack{i \leq n \\ j > n}} \widehat{a}_i \widehat{b}_j \Gamma^k_{ij}}_{\text{se anula por (8)}} + \underbrace{\sum_{\substack{i > n \\ j \leq n}} \widehat{a}_i \widehat{b}_j \Gamma^k_{ij}}_{\text{se anula por (8)}} + \underbrace{\sum_{i,j \leq n} \widehat{a}_i \widehat{b}_j \Gamma^k_{ij}}_{\text{se anula por (4)}} + \underbrace{\sum_{i,j > n} \widehat{a}_i \widehat{b}_j \Gamma^k_{ij}}_{\text{se anula por (4)}} \right) \frac{\partial}{\partial z_k} \\
&= 0
\end{aligned}$$

Específicamente, el segundo sumando se anula por (8) y porque $\Gamma^k_{ij} = \Gamma^k_{ji}$; el tercer sumando se anula porque $\widehat{b}_j = 0$ cuando $j \leq n$; y el cuarto sumando se anula porque $\widehat{a}_i = 0$ cuando $i > n$. $\square$

Diego Leipen Lara
418002038