1. Sea $f : B_1 \to B_2$ en *Boo*. Demostrar que si f es mono, $f(a) \leq f(b)$ implica $a \leq b$.

Demostración.
Supongamos que $f \in Boo$ es mono. Como $f \in Boo$, por la proposición 1.11. de las notas, para todo $a, b \in B_1$

$$a \leq b \implies f(a) \leq f(b).$$

En particular, por contrapositiva, $f(a) < f(b)$ implica $a < b$. Por otro lado, como f es mono, $f(a) = f(b)$ implica $a = b$. Por lo tanto, como $f(a) \leq f(b)$ implica $f(a) < f(b)$ ó $f(a) = f(b)$, por lo anterior, $a \leq b$. $\square$

2. Demostrar que $(\neg a \wedge -) \dashv (a \vee -)$. Ademas, usando esta adjuncion, probar que $a \vee \bigwedge_{i \in I} b_i = \bigwedge_{i \in I}(a \vee b_i)$.

Demostración.
Por definición, $(a \wedge -) \dashv (a \Rightarrow -)$. Ademas, por la proposición 1.18. de las notas, $(a \Rightarrow -) = (\neg a \vee -)$. Por lo tanto, $(a \wedge -) \dashv (\neg a \vee -)$. En particular, $(\neg a \wedge -) \dashv (\neg(\neg a) \vee -) = (a \vee -)$. Por otro lado, tenemos que

$$\begin{aligned}
x \leq \bigwedge_{i \in I}(a \vee b_i) &\iff \forall i \in I \; x \leq (a \vee b_i) && \text{(propiedades de inf.)} \\
&\iff \forall i \in I \; \neg a \wedge x \leq b_i && \text{(adjunción)} \\
&\iff \neg a \wedge x \leq \bigwedge_{i \in I} b_i && \text{(propiedades de inf.)} \\
&\iff x \leq a \vee \bigwedge_{i \in I} b_i. && \text{(adjunción)}
\end{aligned}$$

Por lo tanto, por el lema 1.12., $a \vee \bigwedge_{i \in I} b_i = \bigwedge_{i \in I}(a \vee b_i)$. $\square$

3. Sea $f : B_1 \to B_2$ en *Boo*. Demostrar que $f^{-1}(1)$ es un filtro. Ademas, si $f : B_1 \to 2$ es un morfismo de algebras, entonces $f^{-1}(1)$ es un ultrafiltro.

Demostración.

i. $0 \notin f^{-1}(1)$ pues, $f(0) = 0 \neq 1$

ii. Sean $x, y \in f^{-1}(1)$. Entonces, $f(x) = f(y) = 1$. Por lo tanto, como $f \in Boo$, $f(x \wedge y) = f(x) \wedge f(y) = 1 \wedge 1 = 1$. Es decir, $a \wedge b \in f^{-1}(1)$.

iii. Supongamos que $x \in f^{-1}(1)$ y $x \leq y$. Como $f \in Boo$, $1 = f(x) \leq f(y)$. Por lo tanto, $f(y) = 1$. Es decir, $y \in f^{-1}(1)$.

Ahora, supongamos que $B_2 = 2$ y veamos que $f^{-1}(1)$ es ultrafiltro. Para esto, basta probar que si $a \in A$, $a \in f^{-1}(1)$ ó $\neg a \in f^{-1}(1)$. Entonces, supongamos que $a \in A$ y $a \notin f^{-1}(1)$. Es decir, $f(a) \neq 1$. Pero como $f(a) \in 2 = \{0,1\}$, debe ser $f(a) = 0$. Ademas, como $f \in Boo$, $f(\neg a) = \neg f(a) = \neg 0 = 1$. Por lo tanto, $\neg a \in f^{-1}(1)$. Para probar que el ó es exclusivo, supongamos que $a, \neg a \in f^{-1}(1)$. Como $f^{-1}(1)$ es filtro, es cerrado bajo toma de ínfimos, entonces $0 = a \wedge \neg a \in f^{-1}(1)$. Contradiciendo (i). $\square$

4. Sea $\mathbb{P}$ un conjunto de letras proposicionales y Φ el conjunto de formulas generado por $\mathbb{P}$. Consideren el espacio $2^{\mathbb{P}}$ con la topología producto.

a. Para cada formula α se define $\hat{\alpha} = \{v \in 2^{\mathbb{P}} \mid \overline{v}(\alpha) = 1\}$. Probar que $\hat{\alpha}$ es aberrado.

b. Demostrar que $\{\hat{\alpha} \mid \alpha \in \Phi\}$ es base de $2^{\mathbb{P}}$.

c. Para cada $\Sigma \subset \Phi$, sea $\hat{\Sigma} = \{v \in 2^{\mathbb{P}} \mid \overline{v} \text{ satisface a } \Sigma\}$. Probar que $\hat{\Sigma}$ es cerrado y que Σ es sat si y solo si $\hat{\Sigma} \neq \phi$.

d. Demostrar que si Σ es fin sat, $\{\hat{\alpha} \mid \alpha \in \Sigma\}$ es una colección de cerrados con pif.

e. Si $s \subset \{\hat{\alpha} \mid \alpha \in \Phi\}$ tiene pif, $\Sigma = \{\alpha \mid \hat{\alpha} \in s\}$ es fin sat.

f. Demostrar que el teorema de compacidad es equivalente a que el espacio $2^{\mathbb{P}}$ es compacto.

Demostración.

a. Primero, recordemos que una subbase de $2^{\mathbb{P}} = \prod_{A \in \mathbb{P}} 2$ esta dada por $\{p_B^{-1}(U) \mid U \in \{\{0\},\{1\}\}\}$, donde $p_B : \prod_{A \in \mathbb{P}} 2 \to 2$ es la proyección de la coordenada $B \in \mathbb{P}$. Es decir, si $v \in \prod_{A \in \mathbb{P}} 2$, $p_B(v) = v(B)$. Ahora, veamos que $\hat{\alpha}$ es abierto. Como $\alpha \in \Phi$, sabemos que α esta formada por una cantidad finita de letras proposicionales, $A_1, \ldots, A_n$. Sea $v \in \hat{\alpha}$, y para cada $i \in \{1, \ldots, n\}$ definamos,

$$A_i^* := \begin{cases} A_i & \text{si } v(A_i) = 1 \\ \neg A_i & \text{si } v(A_i) = 0 \end{cases}$$

Af! $v \in p^{-1}_{A_1^*}(\{1\}) \cap \cdots \cap p^{-1}_{A_n^*}(\{1\}) \subset \widehat{\alpha}$.
Para probar la pertenencia, procederemos por casos.
Caso 1. $v(A_i) = 1$. Entonces, $A_i^* = A_i$. Por lo tanto, $v(A_i^*) = 1$. Es decir, $v \in p^{-1}_{A_i^*}(\{1\})$.
Caso 2. $v(A_i) = 0$. Entonces, $A_i^* = \neg A_i$. Por lo tanto,

$$v(A_i^*) = v(\neg A_i) = \neg v(A_i) = \neg 0 = 1$$

Es decir, $v \in p^{-1}_{A_i^*}(\{1\})$.
Por lo tanto, $\forall i$ $v \in p^{-1}_{A_i^*}(\{1\})$, i.e., $v \in p^{-1}_{A_1^*}(\{1\}) \cap \cdots \cap p^{-1}_{A_n^*}(\{1\})$.
Veamos la contención. Sea $u \in p^{-1}_{A_1^*}(\{1\}) \cap \cdots \cap p^{-1}_{A_n^*}(\{1\})$. Entonces, $\forall i$ $u(A_i^*) = 1$. Por lo tanto, por la forma en la que definimos A_i^*, $\forall i$ $u(A_i) = v(A_i)$. Y como $\overline{v}(\alpha)$ depende únicamente de los $v(A_i)$'s, y $\overline{v}(\alpha) = 1$, debe ser $\overline{u}(\alpha) = 1$. Es decir, $u \in \widehat{\alpha}$.

b. Sea $v \in 2^{\mathbb{P}}$ y V un abierto que lo contiene. Como $\{p^{-1}_{\alpha}(U) \mid \alpha \in 2^{\mathbb{P}}, U = \{0\}, \{1\}\}$ es subbase de $2^{\mathbb{P}}$,

$$V = \bigcup_{i \in I} p^{-1}_{\alpha_{i_1}}(U_{i_1}) \cap \cdots \cap p^{-1}_{\alpha_{i n_i}}(U_{i n_i}).$$

Entonces, existe $i \in I$ tal que

$$x \in p^{-1}_{\alpha_{i_1}}(U_{i_1}) \cap \cdots \cap p^{-1}_{\alpha_{i n_i}}(U_{i n_i}).$$

Para simplificar la notación, pongamos

$$x \in p^{-1}_{\alpha_1}(U_1) \cap \cdots \cap p^{-1}_{\alpha_n}(U_n).$$

Ahora, sea,

$$\alpha_i^* = \begin{cases} \alpha_i & \text{si } U_i = \{1\} \\ \neg\alpha_i & \text{si } U_i = \{0\} \end{cases}$$

P.D. $v \in \widehat{\bigwedge_{i=1}^{n} \alpha_i^*} \subset V$
Veamos la pertenencia. Como $b \in \bigcap_{i=1}^{n} p^{-1}_{\alpha_i}(U_i)$ entonces, $\forall i \in \{1, \ldots, n\}$ $v \in p^{-1}_{\alpha_i}(U_i)$ entonces, $\forall i \in \{1, \ldots, n\}$ $v(\alpha_i) \in U_i = \{0\}, \{1\}$.
Caso 1. $U_i = \{0\}$.
Entonces, $x(\alpha_i) = 0$. Luego, $x(\neg\alpha_i) = 1$ y como $U_i = \{0\}$, por definicion, $\alpha_i^* = \neg\alpha_i$. Por lo tanto, $v(\alpha_i^*) = 1$.
Caso 2. $U_i = \{1\}$.
Entonces, $v(\alpha_i) = 1$. Luego, como $U_i = \{1\}$, por definicion, $\alpha_i^* = \alpha_i$. Por

lo tanto, $v(\alpha_i^*) = 1$.
Como la i fue arbitraria, $\forall i\ v(\alpha_i^*) = 1$. Entonces, $v(\bigwedge_{i=1}^n \alpha_i) = 1$. Por lo tanto, $v \in \widehat{\bigwedge_{i=1}^n \alpha_i}$.
Para ver la contencion, sea $u \in \widehat{\bigwedge_{i=1}^n \alpha_i^*}$. Entonces, $u(\alpha_1^* \wedge \cdots \wedge \alpha_n^*) = 1$. Luego, $\forall i\ u(\alpha_i^*) = 1$. De nuevo, procederemos por casos.
Caso 1. $U_i = \{0\}$.
Entonces, $\alpha_i^* = \neg\alpha_i$. Por lo anterior, $u(\neg\alpha_i) = 1$. Entonces, $u(\alpha_i) = 0$. Por lo tanto, $u \in p_{\alpha_i}^{-1}(\{0\}) = p_{\alpha_i}^{-1}(U_i)$.
Caso 2. $U_i = \{1\}$.
Entonces, $\alpha_i^* = \alpha_i$. Por lo anterior, $u(\alpha_i) = 1$. Por lo tanto, $u \in p_{\alpha_i}^{-1}(\{1\}) = p_{\alpha_i}^{-1}(U_i)$.
Como la i fue arbitraria, $u \in \bigcap_{i=1}^n p_{\alpha_i}^{-1}(U_i) \subset V$.

c. P.D. $\hat{\Sigma}$ es cerrado, i.e., $\forall v \in 2^{\mathbb{P}} - \Sigma\ \exists \alpha \in \Phi\ (v \in \hat{\alpha} \subset 2^{\mathbb{P}} - \Sigma)$. Sea $v \in 2^{\mathbb{P}} - \hat{\Sigma}$ entonces, v no satisface Σ. Es decir, $\exists \sigma \in \Sigma\ (\overline{v}(\sigma) = 0)$.
P.D. $v \in \widehat{\neg\alpha} \subset 2^{\mathbb{P}} - \hat{\Sigma}$.
Como $\overline{v}(\sigma) = 0$ entonces, $\overline{v}(\neg\sigma) = 1$. Por lo tanto, $v \in \widehat{\neg\sigma}$. Ahora, sea $u \in \widehat{\neg\sigma}$. Por definicion, $\overline{v}(\neg\sigma) = 1$ entonces, $\overline{v}(\sigma) = 0$. Por lo tanto, como $\sigma \in \Sigma$, u no satisface Σ i.e., $u \in 2^{\mathbb{P}} - \hat{\Sigma}$.

d. Sea $\{\widehat{\sigma_1}, \ldots \widehat{\sigma_n}\} \subset \widehat{\Sigma}$. Como Σ es fin sat, y $\{\sigma_1, \ldots \sigma_n\} \subset \Sigma$, existe $v \in 2^{\mathbb{P}}$ que satisface $\{\sigma_1, \ldots \sigma_n\}$ i.e., $\forall i \in \{1, \ldots, n\}\ \overline{v}(\sigma_i) = 1$. Por lo tanto, $\forall i \in \{1, \ldots n\}\ v \in \widehat{\sigma_i}$. Entonces, $v \in \bigcap_{i=1}^n \widehat{\sigma_i}$. En particular, $\bigcap_{i=1}^n \widehat{\sigma_i} \neq \phi$.

e. Sean $\sigma_1 \ldots \sigma_n \in \Sigma$. Como $s \subset \{\hat{\alpha} \mid \alpha \in \Phi\}$ tiene pif, $\bigcap_{i=1}^n \widehat{\sigma_i} \neq \phi$. Es decir, $\exists v \in 2^{\mathbb{P}}\ \forall i \in \{1, \ldots, n\}\ v \in \widehat{\sigma_i}$. Por lo tanto, $\forall i \in \{1, \ldots, n\}$ $v(\sigma) = 1$. Es decir, Σ es fin sat.

f. Supongamos que $2^{\mathbb{P}}$ es compacto. Si Σ es sat, claramente es fin sat. Conversamente, supongamos Σ fin sat. Entonces, como $2^{\mathbb{P}}$ es compacto, por la proposicion 3.18. de las notas, toda familia de cerrados con pif tiene interseccion no vacia. Ademas, como Σ es fin sat, por 4d, $s = \{\widehat{\sigma} \mid \sigma \in \Sigma\}$ tiene pif. Entonces, tiene interseccion no vacia i.e., $\bigcap_{\sigma\in\Sigma} \widehat{\sigma} \neq \phi$. Por lo tanto, $\exists v \in 2^{\mathbb{P}}\ \forall \sigma \in \Sigma\ \overline{v}(\sigma) = 1$. Es decir, v satisface Σ.
Conversamente, supongamos el teorema de compacidad. Por 3.18. basta probar que si s es ua coleccion de cerrados con pif, $\bigcap s \neq \phi$. Entonces, sea s una coleccion de cerrados con pif. Por 4e, $\Sigma = \{\sigma \mid \widehat{\sigma} \in s\}$ es fin sat. Entonces, por el teorema de compacidad, Σ es sat. Es decir, $\exists v \in 2^{\mathbb{P}}$ $\forall \sigma \in \Sigma\ \overline{v}(\sigma) = 1$. Entonces, $\forall \widehat{\sigma} \in s\ v \in \widehat{\sigma}$ i.e., $v \in \bigcap s$. En particular, $\bigcap s \neq \phi$. □

5. Sean A, B algebras de Boole y $\phi : A \to B$ un morfismo booleano. Definimos $S(A) = \{U \subset A \mid \text{U es ultrafiltro}\}$ y le damos la topologia τ_A generada por la base $\{V_a \mid a \in A\}$ donde $V_a = \{U \in S(A) \mid a \in U\}$, lo que define un espacio de Stone. Analogamente construimos $S(B)$ y definimos la funcion $S_\phi : S(B) \to S(A)$ como $S_\phi(U) = \{a \in A \mid \phi(a) \in U\}$.

a. Demostrar que S_ϕ es continua.

Sean X, Y espacios de Stone y $f : X \to Y$ una funcion continua. Definimos a $C(X) = \{A \subset X \mid \text{A es aberrado}\}$ y a $Cf : C(Y) \to C(X)$ como $Cf(A) = f^{-1}[A]$.

b. Demuestra que $C(X)$ es un algebra de Boole.

c. Demuestra que Cf es un morfismo booleano.

Demostracion.

a. P.D. $V_{\phi(a)} = S_\phi^{-1}[V_a]$.

$$\begin{aligned} U \in V_{\phi(a)} &\iff \phi(a) \in U \\ &\iff a \in S_\phi(U) \\ &\iff S_\phi(U) \in V_a \\ &\iff U \in S_\phi^{-1}[V_a] \end{aligned}$$

Por lo tanto, la imagen inversa de un basico es un abierto.

b. Veamos que $(C(X), \cap, \cup, X \backslash -, \phi, X)$ es un algebra de Boole. Los axiomas 1-7 de la definicion 1.1. de las notas, son inmediatas de las respectivas propiedades de la interseccion, union y complemento usual de conjuntos. Solo hay que tener cuidado con los complementos, que estan bien definidos pues $C(X)$ es el conjunto de los aberrados, y el complemento conjuntista de un aberrado es un aberrado.

c. Sean $A, B \subset Y$ entonces, por propiedades de la imagen inversa,

i. $Cf(A \cap B) = f^{-1}[A \cap B] = f^{-1}[A] \cap f^{-1}[B] = Cf(A) \cap Cf(B)$

ii. $Cf(A \cup B) = f^{-1}[A \cup B] = f^{-1}[A] \cup f^{-1}[B] = Cf(A) \cup Cf(B)$

iii. $Cf(Y \backslash A) = f^{-1}[X \backslash A] = X \backslash f^{-1}[A] = X \backslash Cf(A)$

6. Para cada algebra de Boole A definimos a la funcion $\eta_A : A \to C(S(A))$ como $\eta_A(a) = \{U \in S(A) \mid a \in U\}$. Sea B un algebra de Boole y $\phi : A \to B$ un morfismo de algebras de Boole.

a. Demuestra que η_A es un isomorfismo

b. Demuestra que $\eta_B \circ \phi = C(S_\phi) \circ \eta_A$

Para cada espacio de Stone X definimos la funcion $\epsilon_X : X \to S(C(X))$ como $\epsilon_X(x) = \{A \in C(X) \mid x \in A\}$. Sea Y un espacio de Stone y $f : X \to Y$ una funcion continua.

c. Demuestra que ϵ_X es un homeomorfismo

d. Demuestra que $\epsilon_Y \circ f = S_{C(X)} \circ \epsilon_X$

Demostracion.

a. η_A *es inyectiva.* Supongamos $a_1 \neq a_2$ entonces, $a_1 \not\leq a_2$ o $a_2 \not\leq a_1$. Sin perdida de generalidad, supongamos $a_1 \not\leq a_2$. Entonces, por el corolario 1.53. de las notas, $\exists U \in S(A)$ $a_1 \in U$ & $a_2 \notin U$ es decir, $U \in V_a \backslash V_b$. Por lo tanto, $V_a \neq V_b$.
η_A *es supra.* Sea $B \in C(S(A))$. Como B es aberrado (en particular, abierto) y $\{V_a \mid a \in A\}$ es una base, $\forall b \in B$ $\exists a_b \in A$ $(b \in V_{a_b} \subset B)$. Mas aun, $B = \bigcup_{b \in B} V_{a_b}$. Entonces, como $S(A)$ es compacto y B es aberrado, (en particular, cerrado) B es compacto. Entonces, como $\bigcup_{b \in B} V_{a_b}$ es una cubierta abierta de B, existen $b_1, \ldots, b_n \in B$ tales que $B = \bigcup_{i=1}^n V_{a_{b_i}}$.
Sea $a = \bigvee_{i=1}^n a_{b_i}$.
P.D. $\eta_A(a) = B$ i.e., $V_a = \bigcup_{i=1}^n V_{a_{b_i}}$.

$$\begin{aligned} U \in V_a &\iff a \in U \\ &\iff \bigvee_{i=1}^n a_{b_i} \in U \\ &\iff \exists i \in \{1, \ldots, n\} \ (a_{b_i} \in U) \\ &\iff \exists i \in \{1, \ldots, n\} \ (U \in V_{a_{b_i}}) \\ &\iff U \in \bigcup_{i=1}^n V_{a_{b_i}} \end{aligned}$$

Donde la tercera equivalencia la ida se da por la el inciso 3 de la proposicion 1.47. de las notas y el regreso se da pues $a_{b_i} \leq \bigvee_{i=1}^n a_{b_i}$.
η_A *es morfismo.*

i. $\eta_A(x \vee y) = \eta_A(x) \cup \eta_A(Y)$

$$\begin{aligned} U \in \eta_A(x \vee y) &\iff U \in S(A) \;\&\; x \vee y \in U \\ &\iff x \in U \text{ o } y \in U \\ &\iff U \in \eta_A(x) \text{ o } U \in \eta_A(y) \\ &\iff U \in \eta_A(x) \cup \eta_A(Y) \end{aligned}$$

Donde la segunda equivalencia se da por el inciso 3 de la proposicion 1.47. de las notas.

ii. $\eta_A(x \wedge y) = \eta_A(x) \cap \eta_A(Y)$

$$\begin{aligned} U \in \eta_A(x \wedge y) &\iff U \in S(A) \;\&\; x \wedge y \in U \\ &\iff x \in U \text{ y } y \in U \\ &\iff U \in \eta_A(x) \text{ y } U \in \eta_A(y) \\ &\iff U \in \eta_A(x) \cap \eta_A(Y) \end{aligned}$$

Donde la segunda equivalencia se da porque U es filtro.

iii. $\eta_A(\neg x) = C(S(A)) \backslash \eta_A(x)$

$$\begin{aligned} U \in \eta_A(\neg x) &\iff U \in S(A) \;\&\; \neg x \in U \\ &\iff U \in S(A) \;\&\; x \notin U \\ &\iff U \notin \eta_A(x) \\ &\iff U \in C(S(A)) \backslash \eta_A(x) \end{aligned}$$

b. $\eta_B \circ \phi = C(S_\phi) \circ \eta_A$

$$\begin{aligned} \eta_B(\phi(a)) &= \{U \in S(B) \mid \phi(a) \in U\} \\ &= V_{\phi(a)} \\ &= S_\phi^{-1}[V_a] \\ &= S_\phi^{-1}[\{U \in S(A) \mid a \in U\}] \\ &= C(S_\phi)(\{U \in S(A) \mid a \in U\}) \\ &= C(S_\phi)(\eta_A(a)) \end{aligned}$$

Donde la segunda igualdad se cumple por 5a.

c. ϵ_X *es inyectiva.* Sean $x, y \in X$ distintos. Como X es de Stone, en particular, es de Hausdorff. Entonces, existe U abierto tal que $x \in U$ y $y \notin U$. Ademas, como X es 0-dimensional, existe una base de aberrados. Por lo

tanto, $\exists B \in C(X)$ $(x \in B \subset U)$. En particular, como $y \notin U$, $y \notin B$. Por lo tanto, $\{A \in C(X) \mid x \in A\} \neq \{A \in C(X) \mid y \in A\}$ i.e., $\epsilon_X(x) \neq \epsilon_X(y)$.
ϵ_X *es suprayectiva.* Sea $U \in S(C(X))$ entonces, U es una coleccion de cerrados con pif pues, U es una coleccion de ultrafiltros y todo filtro tiene pif. Entonces, como X es compacto, por la proposicion 3.18. de las notas, $\bigcap U \neq \phi$. Sea $x \in \bigcap U$.
P.D. $\epsilon_X(x) = U$ i.e., $\{A \in C(X) \mid x \in A\} = U$.
Si $A \in U$, como $x \in \bigcap U$, $x \in A$. Por lo tanto, $A \in \epsilon_X(x)$. Conversamente, sea $A \in C(X)$ tal que $x \in A$. Supongamos que $A \notin U$. Entonces, como U es ultrafiltro, $\neg A \in U$. Pero $x \notin \neg A$, contradiciendo $x \in \bigcap U$.
ϵ_X *es abierta.* Como X es de Stone, tiene una base de aberrados. Por lo tanto, basta probar que si $A \in C(X)$ entonces, $\epsilon_X[A]$ es abierto en $S(C(X))$. Primero notemos que

$$\begin{aligned} \epsilon_X[A] &= \{\epsilon_X(a) \mid a \in A\} \\ &= \{\{B \in C(X) \mid a \in B\} \mid a \in A\}. \end{aligned}$$

P.D. $\epsilon_X[A] = V_A$.
Sea $U \in \epsilon_X[A]$ entonces, $U = \{B \in C(X) \mid a \in B\}$ para alguna $a \in A$. Ademas, $A \in \{B \in C(X) \mid a \in B\} = U$ pues $a \in A$ y $A \in C(X)$. Por lo tanto, $U \in V_A$. Conversamente, sea $U \in V_A$. Entonces, $A \in U$ y como ϵ_X es biyectiva, $\exists! x \in X$ $(\epsilon_X(x) = U)$. Entonces, $A \in U = \epsilon_X(x) = \{B \in C(X) \mid x \in C\}$. Luego, $x \in A$. Por lo tanto, como $U = \epsilon_X(x)$, $U \in \epsilon_X[A]$.
ϵ_X *es continua.* Sea V_A un basico de $S(C(X))$ y $x \in \epsilon_X^{-1}[V_A]$. Como $A \in C(X)$, basta probar $x \in A \subset \epsilon_X^{-1}[V_A]$. Luego, como $x \in \epsilon_X^{-1}[V_A]$ entonces, $\epsilon_X(x) \in V_A$. De donde, $a \in \epsilon_X(x)$. Por lo tanto, $x \in A$. Para ver la contencion, sea $y \in A$. Entonces, $A \in \epsilon_X(y)$. Luego, $\epsilon_X(y) \in V_A$. Por lo tanto, $y \in \epsilon_X^{-1}[V_A]$.

d. $\epsilon_Y \circ f = S_{Cf} \circ \epsilon_X$.
Primero notemos que $f^{-1}[A] \in \epsilon_X(x) \iff x \in f^{-1}[A] \iff f(x) \in A$.

$$\begin{aligned} S_{Cf}(\epsilon_X(x)) &= \{A \in C(Y) \mid Cf(A) \in \epsilon_X(x)\} \\ &= \{A \in C(Y) \mid f^{-1}[A] \in \epsilon_X(x)\} \\ &= \{A \in C(Y) \mid f(x) \in A\} \\ &= \epsilon_Y(f(x)) \end{aligned}$$

$\square$

Diego Leipen Lara
418002038