1. Si $\prod_\alpha X_\alpha$ tiene la topología producto y es Hausdorff, regular, normal, entonces, X_α también.
Demostración.
Primero, veamos que el enunciado es cierto si $\prod_\alpha X_\alpha$ es Hausdorff o regular. Sea α un índice fijo. Para todo $\beta \neq \alpha$, fijemos $x_\beta \in X_\beta$. Por Dugundji 4.3.2, $X_\alpha \cong X_\alpha \times \prod_{\beta\neq\alpha}\{x_\beta\}$. Además, por Munkres 31.2, $X_\alpha \times \prod_{\beta\neq\alpha}\{x_\beta\}$ es Hausdorff o regular si $\prod_\alpha X_\alpha$ es Hausdorff o regular, respectivamente. Además, como ser Hausdorff o ser regular son propiedades topológicas, son preservadas bajo homeomorfismos. En particular, X_α es Hausdorff o regular, respectivamente. Resta probar que si $\prod_\alpha X_\alpha$ es normal, X_α también.
Denotemos por p_β a la β-esima proyección. Sean A, B disjuntos y cerrados en X_α. Encontremos abiertos disjuntos que los contengan. Por continuidad de p_α, $p_\alpha^{-1}(A)$ y $p_\alpha^{-1}(B)$ son cerrados en $\prod_\alpha X_\alpha$. Luego, por normalidad de $\prod_\alpha X_\alpha$, existen U, V abiertos en $\prod_\alpha X_\alpha$ tales que $p_\alpha^{-1}(A) \subseteq U$ y $p_\alpha^{-1}(B) \subseteq V$. Ahora, si $\beta \neq \alpha$, aplicando p_β de ambos lados de la contención,

$$X_\beta = p_\beta(p_\alpha^{-1}(A)) \subseteq p_\beta(U) \tag{$*$}$$

Donde la igualdad se cumple pues $p^{-1}(A)$ no restringe en la β-esima coordenada. Por otro lado, sabemos que para cualquier abierto en $\prod_\alpha X_\alpha$, en particular U, existen $U_{\alpha_1}, \ldots, U_{\alpha_n}$ abiertos en $X_{\alpha_1}, \ldots, X_{\alpha_n}$ respectivamente, tales que

$$U = U_{\alpha_1} \times \cdots \times U_{\alpha_n} \times \prod_{\beta\neq\alpha_i} X_\beta$$

Pero como $\forall\beta \neq \alpha$ $(X_\beta \subseteq p_\beta(U))$ por $(*)$ entonces, $\forall\alpha_i \neq \alpha$ $(U_{\alpha_i} = X_{\alpha_i})$. Por lo tanto,

$$U = U_\alpha \times \prod_{\beta\neq\alpha} X_\beta$$

para algún U_α abierto en X_α. Análogamente,

$$V = V_\alpha \times \prod_{\beta\neq\alpha} X_\beta$$

para algun V_α abierto en X_α. Entonces, como $U \cap V = \phi$, debe ser $U_\alpha \cap V_\alpha = \phi$. Mas aun, como $p_\alpha^{-1}(A) \subseteq U$ y $p_\alpha^{-1}(B) \subseteq V$ aplicando p_α de ambos lados de la contención, y por suprayectividad de p_α tenemos que,

$$A = p_\alpha(p_\alpha^{-1}(A)) \subseteq p_\alpha(U) = U_\alpha$$
$$B = p_\alpha(p_\alpha^{-1}(B)) \subseteq p_\alpha(V) = V_\alpha$$

Por lo tanto, U_α y V_α cumplen lo deseado. $\square$

2. X es T_0 si y solo si $\overline{\{x\}} \neq \overline{\{y\}}$ para todo x, y distintos.
Demostración.
$\Rightarrow$) Supongamos que X es T_0. Entonces, para todo x, y distintos existe un abierto U que contiene a exactamente uno de ellos. Sin perdida de generalidad, supongamos que $x \in U$ y $y \notin U$. Entonces, $U \cap \{y\} = \phi$. Por lo tanto, existe una vecindad de x que no interseca a $\{y\}$ i.e., $x \notin \overline{\{y\}}$. Luego, como $x \in \overline{\{x\}}$ entonces, $\overline{\{x\}} \neq \overline{\{y\}}$.
$\Leftarrow$) Supongamos que para todo x, y distintos $\overline{\{x\}} \neq \overline{\{y\}}$. Sin perdida de generalidad, supongamos que $\overline{\{x\}} \not\subseteq \overline{\{y\}}$. Entonces, $\exists z \in \overline{\{x\}} \backslash \overline{\{y\}}$. Como $z \notin \overline{\{y\}}$, existe U abierto tal que $U \cap \{y\} = \phi$. En particular, $y \notin U$. Además, como $z \in \overline{\{x\}}$, toda vecindad de z interseca a $\{x\}$. En otras palabras, x pertenece a toda vecindad de z, en particular, a U. Por lo tanto, existe un abierto que contiene a exactamente uno de los puntos. $\square$

3. De un ejemplo de una función $f : X \to Y$ de forma que f sea abierta y suprayectiva, X sea normal y Y sea T_1 pero no sea Hausdorff.
Lema 1. Si $a, b, c, d \in \mathbb{Z}$ son tales que $\frac{a}{b} < \frac{c}{d}$ entonces, existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $\forall m \geq n \ \exists k_m$ que cumple,

$$\frac{a}{b} < \frac{k_m}{m} < \frac{c}{d} \tag{1}$$

Demostración.
Sea $n \in \mathbb{N}$ tal que

$$n > \frac{1}{\frac{c}{d} - \frac{a}{b}} \tag{2}$$

Entonces, si $m \geq n$

$$\begin{aligned} m \geq n > \frac{1}{\frac{c}{d} - \frac{a}{b}} &\implies m\left(\frac{c}{d} - \frac{a}{b}\right) > 1 \\ &\implies \frac{cm}{d} - \frac{am}{b} > 1 \end{aligned}$$

Por lo tanto como $\frac{cm}{d}$ y $\frac{am}{b}$ distan mas de 1, existe un entero k_m entre ellos. Es decir, existe $k_m \in \mathbb{Z}$ tal que,

$$\frac{am}{b} < k_m < \frac{cm}{d} \tag{3}$$

Luego, de (3) es inmediato (1). $\square$
Lema 2. $\mathbb{R}$ con la topología usual es normal.
Por Munkres 31.1.b, basta ver que para todo básico U y todo $x \in U$ existe

V abierto tal que $x \in V \subseteq \overline{V} \subseteq U$. Además, como $\mathbb{R}$ tiene una base contable, por Munkres 32.1, basta probar que $\mathbb{R}$ es regular. Sea $x \in (a, b)$ y $r = \min\{x - a, b - x\}$ entonces, $(x - \frac{r}{2}, x + \frac{r}{2})$ cumple lo deseado. $\square$

Lema 3. $\mathbb{N}$ con la topología cofinita es T_1 pero no es T_2.

Vemos que es T_1. Sean $m, n \in \mathbb{N}$ distintos. $\mathbb{R}\backslash\{m\}$ y $\mathbb{R}\backslash\{n\}$ son cofinitos que no contienen a m y a n, pero si contienen a n y m respectivamente. Ahora, veamos que no es T_2. Supongamos lo contrario y sean $m, n \in \mathbb{N}$ distintos. Entonces, existen U y V abiertos tales que $m \in U$, $n \in U$ y $U \cap V = \phi$. Como U y V son abiertos, existen F y G subconjuntos de $\mathbb{N}$ finitos tales que $U = \mathbb{N}\backslash F$ y $V = \mathbb{N}\backslash G$. Sea $k = \max\{\max F, \max G\}$. Entonces, $\forall p \geq k$ $p \in U \cap V$, contradiciendo $U \cap V = \phi$. $\square$

Solución al ejercicio.

Sea $X = \mathbb{R}$ con su topología usual, $Y = \mathbb{N}$ con la topología cofinita y $f : X \to Y$ dada por,

$$f(x) = \begin{cases} 1/q & \text{si } p/q = x \in \mathbb{Q} \\ 0 & \text{si } x \notin \mathbb{Q} \end{cases}$$

Donde $\text{mcd}(p, q) = 1$. Claramente f es suprayectiva. Por los lemas 2 y 3, resta probar que es abierta. Para esto, sean $x, y \in \mathbb{R}$ tales que $x < y$. Por densidad existen $p, q \in \mathbb{Q}$ tales que $x < p < q < y$. Luego, por el lema 1, existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $\forall m \geq n$ $\exists k_m$ tal que $p < \frac{k_m}{m} < q$. Por lo tanto, como $f(\frac{k_m}{m}) = \frac{1}{m}$, podemos concluir que entre cualesquiera dos puntos x, y existe un numero natural n que cumple que para todo $m \geq n$ podemos encontrar un numero entre x y y que bajo la función f va a dar a m. Es decir, $f[(x, y)] = \mathbb{R}\backslash\{0, 1, \ldots, n-1\}$ el cual es cofinito. $\therefore$ f es abierta. $\square$

4. Si X es T_1, pruebe que X es perfectamente normal si y solo si para todo abierto U, existe una sucesión de abiertos U_i tal que $\overline{U_i} \subseteq U$ y $U = \bigcup_{i\in\mathbb{N}} U_i$.

Demostración.

$\Rightarrow$) Supongamos que X es normal y todo cerrado es G_δ. Entonces, todo abierto es F_σ (pues en clase vimos que el complemento de un G_δ es un F_σ). Por lo tanto, si U es abierto, existe una sucesión de cerrados $\{F_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ tales que $U = \bigcup_{i\in\mathbb{N}} F_i$. En particular, $\forall i \in \mathbb{N}$ $(F_i \subseteq U)$. Como X es normal, por Munkres 31.1.b, $\forall i \in \mathbb{N}$ $\exists V_i \in \tau$ $(F_i \subseteq V_i \subseteq \overline{V_i} \subseteq U)$. Por lo tanto, como $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} F_n \subseteq \bigcup_{n\in\mathbb{N}} V_n \subseteq U$ y $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} F_n = U$ entonces, $\{V_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ cumple lo deseado.

$\Leftarrow$) Supongamos que para todo abierto U, existe una sucesión de abiertos U_i tal que $\overline{U_i} \subseteq U$ y $U = \bigcup_{i\in\mathbb{N}} U_i$. En particular $\{U_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ cumple, $\bigcup_{i\in\mathbb{N}} \overline{U_i} = U$. Por lo tanto, todo abierto es la unión numerable de conjuntos cerrados i.e.,

es F_σ. Entonces, todo cerrado es G_δ.
Ahora bien, sean A, B disjuntos y cerrados en X. Como $X \setminus A$ y $X \setminus B$ son abiertos, por hipotesis, existen sucesiones de abiertos $\{V_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ y $\{U_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ tales que $\overline{V_i} \subseteq X \setminus A$, $\overline{U_i} \subseteq X \setminus B$ y $X \setminus A = \bigcup_{i\in\mathbb{N}} V_i$, $X \setminus B = \bigcup_{i\in\mathbb{N}} U_i$. Sean,

$$A_n := U_n \setminus \bigcup_{i=1}^{n} \overline{V_i} \text{ y } B_n := V_n \setminus \bigcup_{i=1}^{n} \overline{U_i}$$

Veamos que $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n$ y $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} B_n$ son abiertos, disjuntos y contienen a A y B respectivamente. Primero notemos que para toda $n \in \mathbb{N}$, $\bigcup_{i=1}^{n} \overline{V_i}$ es cerrado pues es la unión finita de cerrados. Entonces, $X \setminus \bigcup_{i=1}^{n} \overline{V_i}$ es abierto. Luego, como todo U_n es abierto, $U_n \setminus \bigcup_{i=1}^{n} \overline{V_i} = U_n \cap (X \setminus \bigcup_{i=1}^{n} \overline{V_i})$ es abierto. Es decir, $\forall n \in \mathbb{N}$ A_n es abierto. Por lo tanto, $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n$ es abierto. Análogamente, $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} B_n$ es abierto. Además, son disjuntos, pues de lo contrario existirían $m, n \in \mathbb{N}$ tales que $A_m \cap B_n \neq \phi$. Supongamos, que $m \leq n$ (el caso $m \geq n$ es análogo) y sea $x \in A_m \cap B_n$. Entonces, $x \in U_m$ y $x \notin \bigcup_{i=1}^{n} \overline{U_i}$. Sin embargo, como $m \leq n$, $U_m \subseteq \overline{U_m} \subseteq \bigcup_{i=1}^{n} \overline{U_i}$. De donde, $x \in \bigcup_{i=1}^{n} \overline{U_i}$, contradiciendo $x \notin \bigcup_{i=1}^{n} \overline{U_i}$. Por lo tanto $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n$ y $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} B_n$ son disjuntos. Por ultimo, veamos que contienen a A y B respectivamente. Primero notemos que

$$\begin{aligned}
\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} \left(U_n \setminus \bigcup_{i=1}^{n} \overline{V_i} \right) &= \bigcup_{n\in\mathbb{N}} \left(U_n \cap \left(X \setminus \bigcup_{i=1}^{n} \overline{V_i} \right) \right) \\
&= \left(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} U_n \right) \cap \bigcup_{n\in\mathbb{N}} \left(X \setminus \bigcup_{i=1}^{n} \overline{V_i} \right) \\
&= \left(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} U_n \right) \cap \bigcup_{n\in\mathbb{N}} \left(\bigcap_{i=1}^{n} X \setminus \overline{V_i} \right) \\
&\supseteq \left(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} U_n \right) \cap \bigcap_{n\in\mathbb{N}} \left(\bigcap_{i=1}^{n} X \setminus \overline{V_i} \right) \\
&= \left(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} U_n \right) \cap \bigcap_{n\in\mathbb{N}} \left(X \setminus \overline{V_n} \right) \\
&= \left(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} U_n \right) \cap \left(X \setminus \bigcup_{n\in\mathbb{N}} \overline{V_n} \right) \qquad (*)
\end{aligned}$$

Como $A \cap B = \phi$, $A \subseteq X \setminus B = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} U_n$. Además, como para todo $n \in \mathbb{N}$ $\overline{V_n} \subseteq X \setminus A$ entonces, $A \subseteq X \setminus \overline{V_n}$ de donde, $A \subseteq X \setminus \bigcup_{n\in\mathbb{N}} \overline{V_n}$. Por lo tanto,

$$A \subseteq \left(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} U_n\right) \cap \left(X \setminus \bigcup_{n\in\mathbb{N}} \overline{V_n}\right) \subseteq \bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n$$

Donde la segunda contención se da por $(*)$. Análogamente, $B \subseteq \bigcup_{n\in\mathbb{N}} B_n$. $\square$

5. Sea $\{A_\alpha\}_{\alpha\in\Gamma}$ una colección de conexos en X. Si $A \subset X$ es conexo y para toda α, $A \cap A_\alpha \neq \phi$ entonces, $A \cup (\bigcup_\alpha A_\alpha)$ es conexo.
Demostración.
Como $A \cap A_\alpha \neq \phi$, por Munkres 23.3, $A \cup A_\alpha$ es conexo. Mas aun,

$$\bigcap_\alpha A \cup A_\alpha = A \cup \bigcap_\alpha A_\alpha \supseteq A \neq \phi$$

Luego, por Munkres 23.3, $\bigcup_\alpha A \cup A_\alpha$ es conexo. $\therefore A \cup (\bigcup_\alpha A)$ también. $\square$

6. Si $A \subset X$, $B \subset Y$, y X, Y son conexos entonces, $X \times Y \setminus A \times B$ es conexo.
Demostración.
Veamos que,

$$X \times Y \setminus A \times B = \left(\bigcup_{y\notin B} X \times \{y\}\right) \cup \left(\bigcup_{x\notin A} \{x\} \times Y\right) \qquad (*)$$

$\subseteq$) Sea $(x, y) \in X \times Y \setminus A \times B$. Entonces, $x \notin A$ o $y \notin B$. Si $x \notin A$, $(x, y) \in \bigcup_{x\notin A}\{x\} \times Y$. Si $y \notin B$, $(x, y) \in \bigcup_{y\notin B} X \times \{y\}$.
$\supseteq$) Claramente, $\forall y \notin B$ $(X \times \{y\} \subseteq X \times Y \setminus A \times B)$. Luego, $\bigcup_{y\notin B} X \times \{y\} \subseteq X \times Y \setminus A \times B$. Analogamente, $\bigcup_{x\in A}\{x\} \times Y \subseteq X \times Y \setminus A \times B$. Por lo tanto,

$$\left(\bigcup_{y\notin B} X \times \{y\}\right) \cup \left(\bigcup_{x\notin A} \{x\} \times Y\right) \subseteq X \times Y \setminus A \times B$$

Por otro lado, $\forall x \notin A$ $((\bigcup_{y\notin B} X \times \{y\}) \cap (\{x\} \times Y) \neq \phi$ pues, si $y \notin B$, $(x, y) \in ((\bigcup_{y\notin B} X \times \{y\}) \cap (\{x\} \times Y)$.
Luego, para usar el ejercicio anterior si ponemos, haciendo abuso de notación, $A = \bigcup_{y\notin B} X \times \{y\}$, $\Gamma = Y \setminus B$, y $A_\alpha = \{\alpha\} \times Y$ entonces, por $(*)$ el resultado es inmediato. $\square$

7. Sea $p : X \to Y$ un mapeo cociente, si para todo $y \in Y$ $p^{-1}(\{y\})$ es conexo, y Y también lo es, X es conexo.
Demostración.
Supongamos que X es disconexo y D, E forman una separación de X. Como $p^{-1}(\{y\})$ es conexo y $p^{-1}(\{y\}) \subset X = D \cup E$, por Munkres 23.2, $p^{-1}(\{y\}) \subseteq D$ ó $p^{-1}(\{y\}) \subseteq E$. Ahora bien, sean

$$A := \{y \in Y \mid \phi \neq p^{-1}(\{y\}) \subseteq D\}$$
$$B := \{y \in Y \mid \phi \neq p^{-1}(\{y\}) \subseteq E\}$$
$$C := \{y \in Y \mid p^{-1}(\{y\}) = \phi\}$$

Veamos que A y $B \cup C$ forman una separación de Y. Por la observación anterior, $A \cup B \cup C = Y$. En efecto, pues se probo que $\forall y \in Y$ $p^{-1}(\{y\}) \subseteq D$ ó $p^{-1}(\{y\}) \subset E$. Además, A, B y C son ajenos por pares pues $D \cap E = \phi$. En particular, $A \cap (B \cup C) = \phi$. Resta probar que A, B y C son abiertos.
Af! $p^{-1}(A) = D$, $p^{-1}(B) = E$ y $p^{-1}(C) = \phi$
Supongamos $p^{-1}(C) \neq \phi$. Entonces, existe $p(x) \in C$. Pero $x \in p^{-1}(\{p(x)\})$ contradice la definición de D. Sea $x \in p^{-1}(A)$ entonces, $p(x) \in A$. Por definición de A, $p^{-1}(\{p(x)\}) \subseteq D$ y como $x \in p^{-1}(\{p(x)\})$ entonces, $x \in D$. Conversamente sea $x \notin p^{-1}(A)$ entonces, $p(x) \notin A$. Luego, como $A \cap B \cap C = \phi$, $p(x) \in B \cup C$. Si $p(x) \in C$ entonces, $x \in p^{-1}(C)$ contradiciendo $p^{-1}(C) = \phi$. Por lo tanto, $p(x) \in B$. Ahora, procedemos de forma análoga a la contención anterior para concluir que $x \in E$ y por lo tanto como $D \cap E = \phi$, $x \notin D$. De forma completamente análoga se demuestra que $p^{-1}(B) = E$. Por lo tanto, como ϕ, D y E son abiertos en X, A y $B \cup C$ forman una separación de Y □

8. Sea X un conjunto infinito, si le damos la topología cofinita, X es conexo.
Demostración.
Por la observación en itálicas de la pagina 148 del Munkres, sabemos que X conexo es equivalente a que los únicos aberrados sean el vació y el total. Para llegar a una contradicción, supongamos que existe un aberrado no trivial A. Como estamos en la topología cofinita esto ultimo se traduce en que, $X \backslash A$ y A son finitos. Por lo tanto, $X = (X \backslash A) \cup A$ es finito, contradiciendo X infinito. □

9. Si $A \subset X$ y dado $C \subseteq X$ un conexo tal que $C \cap A \neq \phi$ y $C \cap (X \backslash A) \neq \phi$ entonces, $C \cap Fr(A) \neq \phi$.
Demostración.
En este ejercicio V_x denotara una vecindad de x. Procedamos por con-

tradicción es decir, $C \cap Fr(A) = \phi$. Entonces, $C \subseteq (X \backslash Fr(A))$. De donde,

$$\forall x \in C \; \forall V_x (V_x \cap A = \phi \text{ o } V_x \cap (X \backslash A) = \phi) \tag{1}$$

Veamos que,

$$C \cap A \subseteq X \backslash \overline{X \backslash A} \tag{2}$$

Si $x \in A \cap C$, x cumple (1), pero como $\forall V_x$ $(x \in V_x \cap A)$ (pues $x \in A$) entonces, $\forall V_x$ $(V_x \cap (X \backslash A) = \phi)$. Por lo tanto, $x \in X \backslash \overline{X \backslash A}$. Análogamente,

$$C \cap (X \backslash A) \subseteq X \backslash \overline{A} \tag{3}$$

Como $X \backslash \overline{A}$ y $X \backslash \overline{X \backslash A}$ son abiertos en X, $C \cap (X \backslash \overline{A})$ y $C \cap (X \backslash \overline{X \backslash A})$ son abiertos en C. Veamos que forman una separación de C. Empecemos por ver que su union es C. Como $C \cap (X \backslash \overline{A})$ y $C \cap (X \backslash \overline{X \backslash A})$ son subconjuntos de C, $(C \cap (X \backslash \overline{A})) \cup (C \cap (X \backslash \overline{X \backslash A})) \subseteq C$. Conversamente, si $x \in C$, sabemos que $x \in A$ o $x \in X \backslash A$. Si $x \in A$, por (2), $x \in X \backslash \overline{X \backslash A}$ entonces, $x \in C \cap (X \backslash \overline{X \backslash A})$. El caso en que $x \in X \backslash A$ se procede análogamente usando (3). Además, son disjuntos pues

$$\begin{aligned}(X \backslash \overline{X \backslash A}) \cap (X \backslash \overline{A}) = (\overline{X \backslash A})^c \cap (\overline{A})^c = (\overline{X \backslash A} \cup \overline{A})^c &= (\overline{(X \backslash A) \cup A})^c \\ &= X^c \\ &= \phi\end{aligned}$$

Por lo tanto, $X \backslash \overline{A}$ y $X \backslash \overline{X \backslash A}$ forman una separación de C. □

10. X es completamente normal si y solo si, para todo par A, B de conjuntos separados en X existen conjuntos abiertos disjuntos conteniéndolos.
Demostración.
$\Rightarrow$) Supongamos que $\overline{A} \cap B = \phi = A \cap \overline{B}$. Entonces, $B \subseteq X \setminus \overline{A}$ y $A \subseteq X \setminus \overline{B}$. Por lo tanto,

$$A \cup B \subseteq (X \setminus \overline{A}) \cup (X \setminus \overline{B}) = X \setminus (\overline{A} \cap \overline{B}) \tag{$*$}$$

Donde la ultima igualdad es por De Morgan. Consideremos el subespacio $Y = X \backslash (\overline{A} \cap \overline{B})$. Como X es completamente normal, Y es normal. Entonces, como $\overline{A} \cap Y$ y $\overline{B} \cap Y$ son disjuntos y cerrados en Y, existen abiertos en Y digamos, U y V tales que $\overline{A} \cap Y \subseteq U$ y $\overline{B} \cap Y \subseteq V$. Además, como Y es abierto (pues es el complemento de un cerrado) entonces, U y V son abiertos en X (pues los abiertos de un subespacio abierto, son abiertos en el total). Además, como $A \subseteq \overline{A}$ y $A \subseteq Y$ (por $(*)$) entonces, $A \subseteq \overline{A} \cap Y \subseteq U$. Análogamente, $B \subseteq \overline{B} \cap Y \subseteq V$. Por lo tanto U y V cumplen lo deseado.

$\Leftarrow$) Si A, B son cerrados y disjuntos entonces, son separados pues, $A = \overline{A}$, $B = \overline{B}$, y $A \cap B = \phi$ implican

$$\overline{A} \cap B = A \cap \overline{B} = A \cap B = \phi$$

Por hipótesis, existen conjuntos abiertos disjuntos conteniéndolos. Por lo tanto, X es normal. $\square$

Diego Leipen Lara
418002038