1. Supongamos que $\{(x_\alpha, U_\alpha)\}$ y $\{(y_\beta, V_\beta)\}$ son estructuras diferenciables sobre M y N. Como $U_\alpha \times V_\beta$ es abierto en $\mathbb{R}^{n+m}$ entonces, $z_{\alpha\beta} : U_\alpha \times V_\beta \to M \times N$ dada por

$$z_{\alpha\beta}(p,q) = (x_\alpha(p), y_\beta(q))$$

es una función de un abierto de $\mathbb{R}^{n+m} \to M \times N$. Verifiquemos el resto de las condiciones:

$z_{\alpha\beta}$ es inyectiva.

Supongamos que $z_{\alpha\beta}(p_1, q_1) = z_{\alpha\beta}(p_2, q_2)$. Por definición, $(x_\alpha(p_1), y_\beta(q_1)) = (x_\alpha(p_2), y_\beta(q_2))$. Luego, por inyectividad de x_α & y_β obtenemos, $p_1 = p_2$ & $q_1 = q_2$.

Las imágenes de las parametrizaciones cubren $M \times N$.

Sea $(m,n) \in M \times N$. Como por hipótesis $\bigcup_\alpha x_\alpha(U_\alpha) = M$ & $\bigcup_\beta y_\beta(V_\beta) = N$ entonces, $\exists \alpha, \beta$ & $\exists u_\alpha \in U_\alpha$ & $\exists v_\beta \in V_\beta$ tales que $m = x_\alpha(u_\alpha)$ & $n = y_\beta(v_\beta)$. Por lo tanto,

$$(m,n) = (x_\alpha(u_\alpha), y_\beta(v_\beta)) \in z_{\alpha\beta}(U_\alpha \times V_\beta).$$

Cambio de cartas.

Antes de verificar el axioma de cambio de cartas, hagamos la siguiente *Observación.*

$$\begin{aligned}
(m,n) \in z_{\alpha\beta}(U_\alpha \times V_\beta) &\iff \exists u \in U_\alpha \ \& \ \exists v \in V_\beta \ \big((m,n) = (x_\alpha(u), y_\beta(v))\big) \\
&\iff (m,n) \in x_\alpha(U_\alpha) \times y_\beta(V_\beta)
\end{aligned}$$

Por lo tanto, $z_{\alpha\beta}(U_\alpha \times V_\beta) = x_\alpha(U_\alpha) \times y_\beta(V_\beta)$.

Ahora si, sean $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ índices tales que,

$$z_{\alpha\beta}(U_\alpha \times V_\beta) \cap z_{\gamma\delta}(U_\gamma \times V_\delta) =: W \neq \varnothing.$$

Por la observación anterior,

$$\begin{aligned}
W &= \big(x_\alpha(U_\alpha) \times y_\beta(V_\beta)\big) \cap \big(x_\gamma(U_\gamma) \times y_\delta(V_\delta)\big) \\
&= \big(x_\alpha(U_\alpha) \cap x_\gamma(U_\gamma)\big) \times \big(y_\beta(V_\beta) \cap y_\delta(V_\delta)\big).
\end{aligned}$$

Por otro lado, notemos que tenemos la siguiente cadena de equivalencias,

$$\begin{aligned}
(p,q) \in z_{\alpha\beta}^{-1}(W) &\iff (x_\alpha(p), y_\beta(q)) \in W \\
&\iff x_\alpha(p) \in \big(x_\alpha(U_\alpha) \cap x_\gamma(U_\gamma)\big) \ \& \ y_\beta(q) \in \big(y_\beta(V_\beta) \cap y_\delta(V_\delta)\big) \\
&\iff p \in x_\alpha^{-1}\big(x_\alpha(U_\alpha) \cap x_\gamma(U_\gamma)\big) \ \& \ q \in y_\beta^{-1}\big(y_\beta(V_\beta) \cap y_\delta(V_\delta)\big)
\end{aligned}$$

Por lo tanto, $z_{\alpha\beta}^{-1}(W) = x_\alpha^{-1}\big(x_\alpha(U_\alpha) \cap x_\gamma(U_\gamma)\big) \times y_\beta^{-1}\big(y_\beta(V_\beta) \cap y_\delta(V_\delta)\big)$. Como por hipótesis, los factores son abiertos, $z_{\alpha\beta}^{-1}(W)$ también. Análogamente, $z_{\gamma\delta}^{-1}(W)$ es abierto. Además, por definición tenemos

$$\begin{aligned}
z_{\gamma\delta}^{-1} \circ z_{\alpha\beta}(p,q) &= z_{\gamma\delta}^{-1}(x_\alpha(p), y_\beta(q)) \\
&= (x_\gamma^{-1} \circ x_\alpha(p), y_\delta^{-1} \circ y_\beta(q))
\end{aligned}$$

Como $x_\gamma^{-1} \circ x_\alpha(p)$ & $y_\delta^{-1} \circ y_\beta(q)$ son difeos por hipótesis, $z_{\gamma\delta}^{-1} \circ z_{\alpha\beta}$ también.
$\therefore \{(z_{\alpha\beta}, U_\alpha \times V_\beta)\}$ es un atlas sobre $M \times N$. Finalmente, veamos que,
Las proyecciones son continuas.
Queremos demostrar que $\forall (m,n) \in M \times N$ $\exists z_{\alpha\beta}$ carta de $M \times N$ en (m,n) & $\exists x_\gamma$ carta de M en m tal que $x_\gamma^{-1} \circ \pi_1 \circ z_{\alpha\beta}$ es suave.
Sea $z_{\alpha\beta}$ cualquier carta de $M \times N$ en (m,n); y pongamos $x_\gamma = x_\alpha$. Por definición,

$$\begin{aligned} x_\gamma^{-1} \circ \pi_1 \circ z_{\alpha\beta}(p,q) &= x_\alpha^{-1} \circ \pi_1 \circ z_{\alpha\beta}(p,q) \\ &= x_\alpha^{-1} \circ \pi_1 \circ (x_\alpha(p), y_\beta(q)) \\ &= x_\alpha^{-1}(x_\alpha(p)) = p \end{aligned}$$

claramente es suave. Análogamente, π_2 es suave. $\square$

2. Notemos que x_2 no pertenece a la estructura diferencial maximal determinada por x_1: de lo contrario, $x_1^{-1} \circ x_2 = x_2$ seria difeomorfismo. Sin embargo, $x_2^{-1}(t) = \sqrt[3]{t}$ no es diferenciable en 0.
Veamos que $\phi : \{(\mathbb{R}, x_1)\} \to \{(\mathbb{R}, x_2)\}$ dada por $\phi(t) = t^3$ es suave. Claramente, $\forall t \in \mathbb{R}$, las cartas x_1, x_2 de $\{(\mathbb{R}, x_1)\}, \{(\mathbb{R}, x_2)\}$ (respectivamente) en t, cumplen que $x_2^{-1} \circ \phi \circ x_1 = x_1 = \mathrm{id}_\mathbb{R}$ es difeo. $\square$

3a. Sean $\phi_1, \phi_2 : \mathbb{R}^2 \to P^1\mathbb{C}$ tales que

$$\begin{aligned} \phi_1(x,y) &= [x+iy, 1] \\ \phi_2(x,y) &= [1, x+iy]. \end{aligned}$$

ϕ_i es inyectiva.

$$\begin{aligned} \phi_1(x,y) = \phi_1(z,w) &\implies [x+iy, 1] = [z+iw, 1] \\ &\implies \exists \lambda \in \mathbb{C} \setminus \{0\} \text{ tal que } (x+iy, 1) = \lambda(z+iw, 1) \\ &\implies \lambda = 1 \ \& \ \therefore x+iy = z+iw \\ &\implies x = z \ \& \ y = w. \end{aligned}$$

Analogamente, ϕ_2 es inyectiva.
Las imagenes de las parametrizaciones cubren $P^1\mathbb{C}$. Si $[x,y] \in P^1\mathbb{C}$ entonces, $x \neq 0$ o $y \neq 0$. Supongamos que $y \neq 0$, el caso $x \neq 0$ es analogo. Entonces, $[x,y] = \left[\frac{x}{y}, 1\right]$. Si $x = a+ib$, $y = c+id$. Si $x = a+ib$, $y = c+id$ entonces,

$$\phi_1\left(\frac{ac+bd}{c^2+d^2}, \frac{bc-ad}{c^2+d^2}\right) = \left[\frac{ac+bd}{c^2+d^2} + i\frac{bc-ad}{c^2+d^2}, 1\right] = \left[\frac{x}{y}, 1\right] = [x,y].$$

Donde la primera igualdad se cumple porque $\frac{ac+bd}{c^2+d^2} + i\frac{bc-ad}{c^2+d^2} = \frac{x}{y}$.
Cambio de cartas. Primero notemos que

$$\varnothing \neq \phi_1(\mathbb{R}^2) \cap \phi_2(\mathbb{R}^2) = \{[x,y] \in P^1\mathbb{C} \mid x \neq 0 \neq y\}$$

Ademas, tenemos

$$
\begin{aligned}
\phi_2^{-1} \circ \phi_1(x,y) &= \phi_2^{-1}[x+iy, 1] \\
&= \phi_2^{-1}[1, \frac{1}{x+iy}] \\
&= \left(\frac{x}{x^2+y^2}, \frac{-y}{x^2+y^2} \right)
\end{aligned}
$$

Donde la ultima igualdad se cumple porque

$$
\begin{aligned}
\frac{1}{x+iy} &= \frac{x}{x^2+y^2} + i\frac{-y}{x^2+y^2} \ \& \\
\phi_2\left(\frac{x}{x^2+y^2}, \frac{-y}{x^2+y^2} \right) &= \left[1, \frac{x}{x^2+y^2} + i\frac{-y}{x^2+y^2} \right]
\end{aligned}
$$

Por lo tanto, $\phi_2^{-1} \circ \phi_1$ es un difeomorfismo de $\phi_1^{-1}(W) = \mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$ & $\phi_2^{-1}(W) = \mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$ con inversa igual a el mismo:

$$
\frac{\frac{x}{x^2+y^2}}{\left(\frac{x}{x^2+y^2}\right)^2 + \left(\frac{-y}{x^2+y^2}\right)^2} = \frac{\frac{x}{x^2+y^2}}{\frac{x^2}{(x^2+y^2)^2} + \frac{y^2}{(x^2+y^2)^2}} = \frac{\frac{x}{x^2+y^2}}{\frac{x^2+y^2}{(x^2+y^2)^2}} = x
$$

3b. Definimos $\psi_N, \psi_S : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{S}^2$ dadas por

$$
\begin{aligned}
\psi_N(x,y) &= \left(\frac{2x}{1+x^2+y^2}, \frac{2y}{1+x^2+y^2}, \frac{-1+x^2+y^2}{1+x^2+y^2} \right) \\
\psi_S(x,y) &= \left(\frac{2x}{1+x^2+y^2}, \frac{2y}{1+x^2+y^2}, \frac{1-x^2-y^2}{1+x^2+y^2} \right).
\end{aligned}
$$

Por una cuenta directa, vemos que $\forall x, y \in \mathbb{R}^2$, $\psi_N(x,y), \psi_S(x,y) \in \mathbb{S}^2$ y además, ψ_N y ψ_S son inyectivas. Además, directo de la definición tenemos

$$
\begin{aligned}
\psi_N(\mathbb{R}^2) &= \mathbb{S}^2 \setminus \{(0,0,1)\} \\
\psi_S(\mathbb{R}^2) &= \mathbb{S}^2 \setminus \{(0,0,-1)\}
\end{aligned}
$$

De esta manera,

$$
\varnothing = W := \phi_N(\mathbb{R}^2) \cap \phi_S(\mathbb{R}^2) = \mathbb{S}^2 \setminus \{(0,0,1), (0,0,-1)\}
$$

Por una cuenta directa, vemos que $\forall x, y \in \mathbb{R}^2$, $\psi_N(x,y), \psi_S(x,y) \in \mathbb{S}^2$ y además ψ_N y ψ_S son inyectivas. Además, por definición tenemos

$$
\begin{aligned}
\psi_N(\mathbb{R}^2) &= \mathbb{S}^2 \setminus \{(0,0,1)\} \\
\psi_S(\mathbb{R}^2) &= \mathbb{S}^2 \setminus \{(0,0,-1)\}
\end{aligned}
$$

Es fácil verificar que las funciones inversas $\phi_N^{-1}(W) = \mathbb{R}^2 \setminus \{0\} = \phi_S^{-1}(W)$ estan dadas por

$$\begin{aligned}
\phi_S^{-1} \circ \phi_N(x,y) &= \phi_S^{-1}\left(\frac{2x}{1+x^2+y^2}, \frac{2y}{1+x^2+y^2}, \frac{-1+x^2+y^2}{1+x^2+y^2}\right) \\
&= \frac{1}{1+\frac{-1+x^2+y^2}{1+x^2+y^2}}\left(\frac{2x}{1+x^2+y^2}, \frac{2y}{1+x^2+y^2}\right) \\
&= \frac{1}{\frac{1+x^2+y^2-1+x^2+y^2}{1+x^2+y^2}}\left(\frac{2x}{1+x^2+y^2}, \frac{2y}{1+x^2+y^2}\right) \\
&= \frac{1+x^2+y^2}{2x^2+2y^2}\left(\frac{2x}{1+x^2+y^2}, \frac{2y}{1+x^2+y^2}\right) \\
&= \frac{1}{x^2+y^2}(x,y) = \frac{(x,y)}{\|(x,y)\|^2}.
\end{aligned}$$

Por lo tanto, son difeomorfismos y ademas, su inversa es ella misma:

$$\frac{\frac{(x,y)}{\|(x,y)\|^2}}{\left\|\frac{(x,y)}{\|(x,y)\|^2}\right\|^2} = \frac{\frac{(x,y)}{\|(x,y)\|^2}}{\frac{\|(x,y)\|^2}{\|(x,y)\|^4}} = (x,y)$$

3c. Sean $f : \mathbb{S}^2 \to P^1\mathbb{C}$, $g : P^1\mathbb{C} \to \mathbb{S}^2$ tales que
$f(x,y,z) = \begin{cases} [x+iy, 1-z] \text{ si } z \neq 1 \\ [1+z, x-iy] \text{ si } z \neq -1 \end{cases}$
$g[u,v] = \left(\frac{2u\overline{v}}{|u|^2+|v|^2}, \frac{|u|^2-|v|^2}{|u|^2+|v|^2}\right) = \left(\frac{2(ac+bd)}{|u|^2+|v|^2}, \frac{2(bc-ad)}{|u|^2+|v|^2}, \frac{|u|^2-|v|^2}{|u|^2+|v|^2}\right)$.
Donde $u = a+ib, v = c+id$.
f esta bien definida. Supongamos que $1 \neq z \neq -1$. Tenemos la siguiente cadena de equivalencias.

$$\begin{aligned}
[x+iy, 1-z] = [1+z, x-iy] &\iff [\frac{x+iy}{1-z}, 1] = [\frac{1+z}{x-iy}, 1] \\
&\iff \exists \lambda \in \mathbb{C} \setminus \{0\} \text{ tq } \frac{x+iy}{1-z} = \lambda \frac{1+z}{x-iy} \;\&\; 1 = \lambda \\
&\iff \frac{x+iy}{1-z} = \frac{1+z}{x-iy} \\
&\iff (x+iy)(x-iy) = (1+z)(1-z) \\
&\iff x^2+y^2 = 1-z^2 \\
&\iff (x,y,z) \in \mathbb{S}^2
\end{aligned}$$

Como el dominio de f es precisamente $\mathbb{S}^2$, esto es suficiente; pues no hay ambigüedad en el caso $z \in \{1, -1\}$.
g esta bien definida. Supongamos que $[u,v] = [z,w]$. Entonces, $\exists \lambda \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ tal

que $u = \lambda z$ & $v = \lambda w$. Entonces,

$$\frac{2u\overline{v}}{|u|^2+|v|^2} = \frac{2(\lambda z)\overline{(\lambda w)}}{|\lambda z|^2+|\lambda w|^2} = \frac{2\lambda\overline{\lambda}z\overline{w}}{|\lambda|^2(|z|^2+|w|^2)} = \frac{2z\overline{w}}{|z|^2+|w|^2} \ \&$$
$$\frac{|u|^2-|v|^2}{|u|^2+|v|^2} = \frac{|\lambda z|^2-|\lambda w|^2}{|\lambda z|^2+|\lambda w|^2} = \frac{|\lambda|^2}{|\lambda|^2}\frac{|z|^2-|w|^2}{|z|^2+|w|^2} = \frac{|z|^2-|w|^2}{|z|^2+|w|^2}.$$

Juntando las ecuaciones anteriores obtenemos $g[u,v] = g[z,w]$ cuando $[u,v] = [z,w]$ ie, g esta bien definida.
f es suave.
Veamos que f es suave en todo punto $(x,y,z) \in \mathbb{S}^2$.
Caso 1. $z \neq 1$. Entonces, $(x,y,z) \neq (0,0,1)$ y por lo tanto, $(\psi_N, \mathbb{R}^2)$ es carta de $\mathbb{S}^2$ en (x,y,z). Mas aun, como $f(x,y,z) = [x+iy, 1-z]$ y $1-z \neq 0$ entonces, $f(x,y,z) = \left[\frac{x+iy}{1-z}, 1\right]$. Por lo tanto, $(\phi_1, \mathbb{R}^2)$ es carta de $P^1\mathbb{C}$ en $f(x,y,z)$. Finalmente, por cuentas directas,

$$\begin{aligned}
\phi_1^{-1} \circ f \circ \psi_N(x,y) &= \phi_1^{-1} \circ f\left(\frac{2x}{1+x^2+y^2}, \frac{2y}{1+x^2+y^2}, \frac{-1+x^2+y^2}{1+x^2+y^2}\right) \\
&= \phi_1^{-1}\left[\frac{2x}{1+x^2+y^2} + i\frac{2y}{1+x^2+y^2}, 1 - \frac{-1+x^2+y^2}{1+x^2+y^2}\right] \\
&= \phi_1^{-1}\left[\frac{2x}{1+x^2+y^2} + i\frac{2y}{1+x^2+y^2}, \frac{2}{1+x^2+y^2}\right] \\
&= \phi_1^{-1}[x+iy] = (x,y)
\end{aligned}$$

$\therefore f$ es suave en (x,y,z) cuando $z \neq 1$.
Caso 2. $z = 1$. Entonces, $(x,y,z) = (0,0,1)$ y por lo tanto, $(\psi_N, \mathbb{R}^2)$ es carta de $\mathbb{S}^2$ en (x,y,z). Mas aun, como $f(0,0,1) = [1+1, 0+i0] = [2,0] = [1,0]$ entonces, $(\phi_2, \mathbb{R}^2)$ es carta de $P^1\mathbb{C}$ en $f(0,0,1)$. De nuevo, por cuentas directas,

$$\begin{aligned}
\phi_2^{-1} \circ f \circ \psi_S(x,y) &= \phi_2^{-1} \circ f\left(\frac{2x}{1+x^2+y^2}, \frac{2y}{1+x^2+y^2}, \frac{1-x^2-y^2}{1+x^2+y^2}\right) \\
&= \phi_2^{-1}\left[1 + \frac{1-x^2+y^2}{1+x^2+y^2}, \frac{2x}{1+x^2+y^2} - i\frac{2y}{1+x^2+y^2}\right] \\
&= \phi_2^{-1}[1, x-iy] = (x,-y)
\end{aligned}$$

$\therefore f$ es suave en $(0,0,1)$ y por el caso anterior, en todo $\mathbb{S}^2$.
g es suave.
Sea $[u,v] \in P^1\mathbb{C}$.
Caso 1. $v \neq 0$. Entonces, $[u,v] = [\frac{u}{v}, 1]$ y por lo tanto, $(\phi_1, \mathbb{R}^2$ es carta de $P^1\mathbb{C}$ en $[u,v]$. Mas aun, como $g[u,v] = \left(\frac{2u\overline{v}}{|u|^2+|v|^2}, \frac{|u|^2-|v|^2}{|u|^2+|v|^2}\right)$ entonces, $(\psi_N, \mathbb{R}^2)$ es carta de $g[u,v]$ pues su tercera coordenada (recordemos que $\frac{2u\overline{v}}{|u|^2+|v|^2} \in \mathbb{C} \cong \mathbb{R}^2$)

es distinta de 1. En efecto, si $\frac{|u|^2-|v|^2}{|u|^2+|v|^2} = 1$ tendríamos, $v = 0$, contradiciendo nuestra suposición. Finalmente, por una cuenta directa,

$$\begin{aligned}\psi_N^{-1} \circ g \circ \phi_1(x, y) &= \psi_N^{-1} \circ g[x + iy, 1] \\ &= \psi_N^{-1}\left(\frac{2x}{1 + x^2 + y^2}, \frac{2y}{1 + x^2 + y^2}, \frac{-1 + x^2 + y^2}{1 + x^2 + y^2}\right) \\ &= (x, y)\end{aligned}$$

$\therefore$ g es suave en $[u, v]$ cuando $v \neq 0$. Caso 2. $u \neq 0$. Procediendo de manera completamente analoga al caso anterior, vemos que ϕ_2 y psi_S son cartas en $[u, v]$ y $g[u, v]$ respectivamente. Finalmente, por una cuenta directa obtenemos $\phi_S^{-1} \circ g \circ \phi_2(x, y) = (x, -y)$. $\therefore$ g es suave en $[u, v]$ cuando $u \neq 0$ y por el caso anterior, en todo $P^1\mathbb{C}$
f y g son inversos.
Si $\frac{|u|^2-|v|^2}{|u|^2+|v|^2} \neq 1$ entonces,

$$\begin{aligned}f \circ g[u, v] &= f\left(\frac{2u\overline{v}}{|u|^2 + |v|^2}, \frac{|u|^2 - |v|^2}{|u|^2 + |v|^2}\right) \\ &= f\left(\frac{2(ac + bd)}{|u|^2 + |v|^2}, \frac{2(bc - ad)}{|u|^2 + |v|^2}, \frac{|u|^2 - |v|^2}{|u|^2 + |v|^2}\right) \\ &= \left[\frac{2(ac + bd)}{|u|^2 + |v|^2} + i\frac{2(bc - ad)}{|u|^2 + |v|^2}, 1 - \frac{|u|^2 - |v|^2}{|u|^2 + |v|^2}\right] \\ &= \left[\frac{2(ac + bd)}{|u|^2 + |v|^2} + i\frac{2(bc - ad)}{|u|^2 + |v|^2}, \frac{2|v|^2}{|u|^2 + |v|^2}\right] \\ &= \left[ac + bd + i(bc - ad), |v|^2\right] \\ &= [u\overline{v}, |v|^2] = [u\overline{v}, v\overline{v}] = [u, v]\end{aligned}$$

Si $\frac{|u|^2-|v|^2}{|u|^2+|v|^2} = 1$ entonces, $v = 0$ y por lo tanto,

$$\begin{aligned}f \circ g[u, v] &= f \circ g[u, 0] \\ &= f \circ g[1, 0] \\ &= f(0, 0, 1) = [2, 0] = [1, 0]\end{aligned}$$

Si $z \neq 1$ entonces,

$$\begin{aligned}g \circ f(x, y, z) &= g[x + iy, 1 - z] \\ &= \left(\frac{2x(1 - z)}{|x + iy|^2 + |1 - z|^2}, \frac{2y(1 - z)}{|x + iy|^2 + |1 - z|^2}, \frac{|x + iy|^2 - |1 - z|^2}{|x + iy|^2 + |1 - z|^2}\right) \\ &= \left(\frac{2x(1 - z)}{2 - 2z}, \frac{2y(1 - z)}{2 - 2z}, \frac{z(2 - 2z)}{2 - 2z}\right) \\ &= (x, y, z)\end{aligned}$$

Donde la tercera igualdad se cumple por

$$\begin{aligned}
|x+iy|^2+|1-z|^2 &= x^2+y^2+1-2z+z^2\\
&= (x^2+y^2+z^2)+1-2z = 2-2z\\
&\&\\
|x+iy|^2-|1-z|^2 &= x^2+y^2-1+2z-z^2\\
&= (1-z^2)-1+2z-z^2\\
&= 2z-2z^2 = z(2-2z)
\end{aligned}$$

Si $z=1$ entonces, $g\circ f(0,0,1)=g[1,0]=(0,0,1)$. Por lo tanto, como f y g son ambas suaves, $\square$

4. Sea M una variedad diferenciable de dimensión n.
$Int(M)$ es una variedad de la misma dimensión. Sea $x\in Int(M)$.
Para no hacer tan engorrosa la notación, voy a demostrar que existe una familia $\{(\psi_\beta,V_\beta)\}_\beta$ de funciones $\psi_\beta : V_\beta\subset\mathbb{R}^{n-1}\times\{0\}\to\partial M$ que cumplen las mismas propiedades que un atlas usual. Es decir, son funciones inyectivas que salen de abiertos (en $\mathbb{R}^{n-1}\times\{0\}$) tales que

1. Sus imágenes cubren ∂M
2. Cumplen el axioma de cambio de cartas.

Como podemos identificar $\mathbb{R}^{n-1}$ con $\mathbb{R}^{n-1}\times\{0\}$ via $x\mapsto(x,0)$ entonces, esto es suficiente. Ahora si, sea $\{(\phi_\alpha,U_\alpha)\}_\alpha$ el atlas de M. Definimos,

$$\begin{aligned}
&V_\alpha := U_\alpha\cap(\mathbb{R}^{n-1}\times\{0\})\\
&\psi_\alpha := \phi_\alpha|_{V_\alpha}
\end{aligned}$$

Veamos que $\{\psi_\alpha,V_\alpha)\}_\alpha$ cumple lo deseado.
Por definición, V_α es abierto en $\mathbb{R}^{n-1}\times\{0\}$ y como ψ_α es la restricción de una función inyectiva, ψ_α también es inyectiva. Solo falta probar (1) y (2).

1. La igualdad $\partial M=\bigcup_\alpha\psi_\alpha(V_\alpha)$, se sigue de las siguientes equivalencias:

$$\begin{aligned}
x\in\partial M &\iff \exists\alpha\ \&\ \exists u\in U_\alpha \text{ tal que } \phi_\alpha(u)=x\ \&\ u_n=0\\
&\iff \exists\alpha\ \&\ \exists u\in V_\alpha \text{ tal que } \psi_\alpha(u)=x\\
&\iff x\in\bigcup_\alpha\psi_\alpha(V_\alpha)
\end{aligned}$$

2. Supongamos que α,β son indices tales que

$$W' := \psi_\alpha(V_\alpha)\cap\psi_\beta(V_\beta)\neq\varnothing$$

Tambien, definamos

$$W := \phi_\alpha(U_\alpha)\cap\phi_\beta(U_\beta)$$

Como $\varnothing \neq W' \subset W$, por definicion de atlas, $\phi_\alpha^{-1}(W)$ es abierto. Ahora veamos que

$$\phi_\alpha^{-1}(W) \cap (\mathbb{R}^{n-1} \times \{0\}) = \psi_\alpha^{-1}(W')$$

Esto se sigue de la siguiente cadena de equivalencias:

$$\begin{aligned} u \in \phi_\alpha^{-1}(W) \cap (\mathbb{R}^{n-1} \times \{0\}) &\iff \phi_\alpha(u) \in \phi_\alpha(U_\alpha) \cap \phi_\beta(U_\beta) = W \ \&\ u_n = 0 \\ &\iff \psi_\alpha(u) \in \psi_\alpha(V_\alpha) \cap \psi_\beta(V_\beta) = W' \\ &\iff u \in \psi_\alpha^{-1}(W') \end{aligned}$$

Por lo tanto, como $\phi_\alpha^{-1}(W)$ y $\mathbb{R}^{n-1} \times \{0\}$ son abiertos, $\psi_\alpha^{-1}(W')$ también. Finalmente, veamos que

$$\psi_\beta^{-1} \circ \psi_\alpha : \psi_\alpha^{-1}(W') \to \psi_\beta^{-1}(W')$$

es suave. Precisamente, queremos ver que

$$\left(\psi_\beta|_{\psi_\beta^{-1}(W')}\right)^{-1} \circ \left(\psi_\alpha|_{\psi_\alpha^{-1}(W')}\right)$$

es suave. Para esto, recordemos que en general, $(f \circ g)|_A = f|_{g(A)} \circ g|_A$. Entonces,

$$\begin{aligned} \left(\phi_\beta^{-1} \circ \phi_\alpha\right)|_{\psi_\alpha^{-1}(W')} &= \phi_\beta^{-1}|_{\phi_\alpha(\psi_\alpha^{-1}(W'))} \circ \phi_\alpha|_{\psi_\alpha^{-1}(W')} \\ &= \psi_\beta^{-1}|_{\psi_\alpha(\psi_\alpha^{-1}(W'))} \circ \psi_\alpha|_{\psi_\alpha^{-1}(W')} \\ &= \psi_\beta^{-1}|_{W'} \circ \psi_\alpha|_{\psi_\alpha^{-1}(W')} \\ &= \left(\psi_\beta|_{\psi_\beta^{-1}(W')}\right)^{-1} \circ \psi_\alpha|_{\psi_\alpha^{-1}(W')} \end{aligned}$$

La segunda igualdad se cumple porque ψ es restricción de ϕ y solo nos estamos moviendo dentro de las limitaciones de ψ. En particular, podemos cambiar todas las ϕ por ψ.

Por lo tanto, como la restricción de un difeomorfismo es un difeomorfismo, obtenemos lo deseado. □

Diego Leipen Lara
418002038