Universidad de los Andes-Dpto. de Física
Mecánica Cuántica I - Semestre II/2014

Solución Parcial 1

1. **Nota=2/5** *Se tiene un sistema preparado en el estado cuántico*

$$|\psi\rangle = N\left(|a\rangle - 2i|b\rangle\right) \tag{1}$$

donde i es la unidad imaginaria y $\{|a\rangle, |b\rangle\}$ define una base ortonormal del espacio de Hilbert del sistema. Con respecto a esa misma base un observable $\hat{A}$ se representa como

$$\hat{A} = \alpha\begin{pmatrix} 1 & i \\ -i & -1 \end{pmatrix} \tag{2}$$

con α una constante real.

(a) *Encontrar la constante de normalización N en la Ec.(1).*

La condición de normalización exige

$$\begin{aligned} 1 &= \langle\psi|\psi\rangle \\ &= N^2(\langle a| + 2i\langle b|)(|a\rangle - 2i|b\rangle) \\ &= N^2(1+4) = 5N^2 \end{aligned} \tag{3}$$

Por lo tanto $N = \frac{1}{\sqrt{5}}$ y la Ec.(1) debe escribirse de ahora en adelante como:

$$|\psi\rangle = \frac{1}{\sqrt{5}}\left(|a\rangle - 2i|b\rangle\right) \tag{4}$$

(b) *Al medir $\hat{A}$ cuáles resultados se pueden encontrar y con qué probabilidad cada uno de ellos?.*

Los resultados que se pueden obtener al medir $\hat{A}$ sólo pueden ser sus valores propios. Entonces los valores y vectores propios (normalizados) de $\hat{A}$, es decir $\hat{A}|1\rangle = \lambda_1|1\rangle$ y $\hat{A}|2\rangle = \lambda_2|2\rangle$, son:

$$\begin{aligned} \lambda_1 &= \sqrt{2}\alpha \quad \longrightarrow |1\rangle = \frac{1}{\sqrt{4-2\sqrt{2}}}\Big(|a\rangle - i(\sqrt{2}-1)|b\rangle\Big) \\ \lambda_2 &= -\sqrt{2}\alpha \quad \longrightarrow |2\rangle = \frac{1}{\sqrt{4+2\sqrt{2}}}\Big(|a\rangle + i(\sqrt{2}+1)|b\rangle\Big) \end{aligned} \tag{5}$$

Entonces, posibles resultados al medir $\hat{A}$ son $\pm\sqrt{2}\alpha$, con las siguientes probabilidades:

$$\begin{aligned} \mathcal{P}(\sqrt{2}\alpha) &= |\langle 1|\psi\rangle|^2 = \frac{10+\sqrt{2}}{20} \\ \mathcal{P}(-\sqrt{2}\alpha) &= |\langle 2|\psi\rangle|^2 = \frac{10-\sqrt{2}}{20} \end{aligned} \tag{6}$$

Como tiene que ser $\mathcal{P}(\sqrt{2}\alpha)+\mathcal{P}(-\sqrt{2}\alpha)=1$.

(c) *Calcule el valor esperado (valor medio)* $\langle\hat{A}\rangle$ *y la incertidumbre* ΔA *en el estado* $|\psi\rangle$*.*

Primero calculamos el valor medio $\langle\hat{A}\rangle$:

$$\langle\hat{A}\rangle=\langle\psi|\hat{A}|\psi\rangle=\frac{\alpha}{5}(1,2i)\begin{pmatrix}1 & i\\ -i & -1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\ -2i\end{pmatrix}=\frac{\alpha}{5} \tag{7}$$

Como

$$\hat{A}^2=\alpha^2\begin{pmatrix}1 & i\\ -i & -1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & i\\ -i & -1\end{pmatrix}=2\alpha^2\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}=2\alpha^2\hat{1} \tag{8}$$

donde $\hat{1}$ es el operador identidad. Se tiene que

$$\langle\hat{A}^2\rangle=\langle\psi|\hat{A}^2|\psi\rangle=2\alpha^2 \tag{9}$$

La incertidumbre ΔA en el estado $|\psi\rangle$ resulta ser

$$\Delta A=\sqrt{\langle\hat{A}^2\rangle-\langle\hat{A}\rangle^2}=\frac{7}{5}\alpha \tag{10}$$

2. **Nota=2/5** *Considere un sistema físico descrito en un espacio de Hilbert de 2 dimensiones con una base ortonormal dada por los vectores*

$$|1\rangle=\begin{pmatrix}1\\ 0\end{pmatrix}\quad,\quad|2\rangle=\begin{pmatrix}0\\ 1\end{pmatrix} \tag{11}$$

En esta base el Hamiltoniano $\hat{H}$ *está dado por*

$$\hat{H}=\hbar\omega_0\begin{pmatrix}2 & -i\sqrt{2}\\ i\sqrt{2} & 1\end{pmatrix} \tag{12}$$

donde ω_0 *es constante real positiva. Al instante inicial* $t=0$ *el sistema cuántico se prepara en el estado*

$$|\Psi(0)\rangle=\frac{1}{\sqrt{10}}\left(|1\rangle+3i|2\rangle\right) \tag{13}$$

(a) *A* $t=0$ *se mide la energía. Cuáles valores se pueden encontrar?. Con cuáles probabilidades cada uno de ellos?. Cuál es el valor medio y la incertidumbre de la energía en ese momento?.*

Los valores que se pueden encontrar al medir la energía a cualquier instante sólo pueden ser los valores propios del Hamiltoniano, que en este caso son (junto a sus vectores propios normalizados):

$$\begin{aligned}e_1 &= 0 \quad\longrightarrow|e_1\rangle=\frac{1}{\sqrt{3}}\left(|1\rangle-i\sqrt{2}|2\rangle\right)\\ e_2 &= 3\hbar\omega_0 \quad\longrightarrow|e_2\rangle=\frac{1}{\sqrt{3}}\left(\sqrt{2}|1\rangle+i|2\rangle\right)\end{aligned} \tag{14}$$

Con las siguientes probabilidades:

$$
\begin{aligned}
\mathcal{P}(0) &= |\langle e_1|\Psi(0)\rangle|^2 = \frac{19-6\sqrt{2}}{30} \\
\mathcal{P}(3\hbar\omega_0) &= |\langle e_2|\Psi(0)\rangle|^2 = \frac{11+6\sqrt{2}}{30}
\end{aligned} \tag{15}
$$

Notar que $\mathcal{P}(0)+\mathcal{P}(3\hbar\omega_0)=1$.

El valor medio o esperado de la energía al instante $t=0$ es:

$$
\langle\hat{H}\rangle = \langle\Psi(0)|\hat{H}|\Psi(0)\rangle = 0\times\mathcal{P}(0)+3\hbar\omega_0\times\mathcal{P}(3\hbar\omega_0) = \hbar\omega_0\left(\frac{11+6\sqrt{2}}{10}\right) \tag{16}
$$

Para terminar de calcular la incertidumbre de la energía al instante inicial falta evaluar:

$$
\langle\hat{H}^2\rangle = \langle\Psi(0)|\hat{H}^2|\Psi(0)\rangle = \frac{1}{10}(\hbar\omega_0)^2(1,-3i)\begin{pmatrix} 2 & -i\sqrt{2} \\ i\sqrt{2} & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & -i\sqrt{2} \\ i\sqrt{2} & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 3i \end{pmatrix} \tag{17}
$$

lo que produce:

$$
\langle\hat{H}^2\rangle = \frac{3}{10}(\hbar\omega_0)^2\left(11+6\sqrt{2}\right) \tag{18}
$$

Finalmente, se obtiene para la incertidumbre de la energía al instante $t=0$:

$$
\Delta H(0) = \sqrt{\langle\hat{H}^2\rangle-\langle\hat{H}\rangle^2} = \frac{\hbar\omega_0}{10}\sqrt{137+48\sqrt{2}} \tag{19}
$$

(b) *Determine $|\Psi(t)\rangle$, el estado del sistema a cualquier instante $t>0$, el valor medio y la incertidumbre de la energía del sistema como función del tiempo.*

El estado del sistema a cualquier instante $t>0$ se obtiene resolviendo la Ecuación de Schrödinger:

$$
\begin{aligned}
|\Psi(t)\rangle &= \hat{U}(t)|\Psi(0)\rangle = e^{-\frac{i}{\hbar}\hat{H}t}|\Psi(0)\rangle \\
&= e^{-\frac{i}{\hbar}\hat{H}t}\left(|e_1\rangle\langle e_1|+|e_2\rangle\langle e_2|\right)|\Psi(0)\rangle \\
&= e^{-\frac{i}{\hbar}e_1 t}\langle e_1|\Psi(0)\rangle|e_1\rangle + e^{-\frac{i}{\hbar}e_2 t}\langle e_2|\Psi(0)\rangle|e_2\rangle
\end{aligned}
$$

De las Ecs.(13) y (14) se puede calcular

$$
\begin{aligned}
\langle e_1|\Psi(0)\rangle &= \frac{1-3\sqrt{2}}{\sqrt{30}} \\
\langle e_2|\Psi(0)\rangle &= \frac{\sqrt{2}+3}{\sqrt{30}}
\end{aligned} \tag{20}
$$

lo que lleva a

$$\begin{aligned}|\Psi(t)\rangle &= \langle e_1|\Psi(0)\rangle|e_1\rangle + e^{-i3\omega_0 t}\langle e_2|\Psi(0)\rangle|e_2\rangle \\ &= \frac{1}{\sqrt{30}}\left[\left(1-3\sqrt{2}\right)|e_1\rangle + e^{-i3\omega_0 t}\left(\sqrt{2}+3\right)|e_2\rangle\right] \end{aligned} \tag{21}$$

Al ser un sistema conservativo, es decir $\hat{H}$ no depende del tiempo, el valor medio o esperado de la energía se mantiene constante en el tiempo porque $\frac{d\langle\hat{H}\rangle(t)}{dt} = 0$, o por un cálculo directo al instante t se obtiene:

$$\begin{aligned}\langle\hat{H}\rangle(t) &= \langle\Psi(t)|\hat{H}|\Psi(t)\rangle \\ &= \hbar\omega_0\left(\frac{11+6\sqrt{2}}{10}\right) \\ &= \langle\hat{H}\rangle(0)\end{aligned} \tag{22}$$

y

$$\begin{aligned}\langle\hat{H}^2\rangle(t) &= \langle\Psi(t)|\hat{H}^2|\Psi(t)\rangle \\ &= 3(\hbar\omega_0)^2\left(\frac{11+6\sqrt{2}}{10}\right) \\ &= \langle\hat{H}^2\rangle(0)\end{aligned} \tag{23}$$

lo que indica que la incertidumbre al instante t es idéntica a la obtenida al instante inicial

$$\Delta H(t) = \Delta H(0) \tag{24}$$

3. **Nota=1/5** *Enuncie los postulados de la Mecánica Cuántica.*

   Ver libro de texto o notas de clase.