Universidad de los Andes-Dpto. de Física
Mecánica Cuántica I -Sem.II/2014

Solución Tarea 1

1. **Cohen-Tannoudji et al., HII-1.-** Si $\hat{U}(m,n) =\mid \phi_m\rangle\langle\phi_n \mid$

(a) El adjunto de $\hat{U}(m,n)$ es $\hat{U}^\dagger(m,n) =\mid \phi_n\rangle\langle\phi_m \mid$.

(b) Como $\hat{H} \mid \phi_n\rangle = E_n \mid \phi_n\rangle$ el conmutador $[\hat{H},\hat{U}(m,n)]$ es

$$\begin{aligned}[\hat{H},\hat{U}(m,n)] &= \hat{H}\hat{U}(m,n) - \hat{U}(m,n)\hat{H} \\ &= \hat{H} \mid \phi_m\rangle\langle\phi_n \mid - \mid \phi_m\rangle\langle\phi_n \mid \hat{H} \\ &= E_m \mid \phi_m\rangle\langle\phi_n \mid -E_n \mid \phi_m\rangle\langle\phi_n \mid = (E_m - E_n)\hat{U}(m,n)\end{aligned} \tag{1}$$

(c) Como los $\{\mid \phi_n\rangle\}$ constituyen una base ortonormal, es decir $\langle\phi_m \mid \phi_n\rangle = \delta_{m,n}$ se tiene

$$\begin{aligned}\hat{U}(m,n)\hat{U}^\dagger(p,q) &=\mid \phi_m\rangle\langle\phi_n \mid \phi_q\rangle\langle\phi_p \mid \\ &=\mid \phi_m\rangle\delta_{n,q}\langle\phi_p \mid \\ &= \delta_{n,q}\hat{U}(m,p)\end{aligned} \tag{2}$$

(d)

$$\begin{aligned}Tr\{\hat{U}(m,n)\} &= \sum_p \langle\phi_p \mid \phi_m\rangle\langle\phi_n \mid \phi_p\rangle \\ &= \sum_p \delta_{p,m}\delta_{n,p} = \delta_{n,m}\end{aligned} \tag{3}$$

(e) Como $A_{m,n} = \langle\phi_m \mid \hat{A} \mid \phi_n\rangle$ y si se inserta dos veces la identidad (completez de la base, $\hat{1} = \sum_p \mid \phi_p\rangle\langle\phi_p \mid$) se tiene

$$\begin{aligned}\hat{A} = \hat{1}\hat{A}\hat{1} &= (\sum_m \mid \phi_m\rangle\langle\phi_m \mid)\hat{A}(\sum_n \mid \phi_n\rangle\langle\phi_n \mid) \\ &= \sum_{m,n} \mid \phi_m\rangle\langle\phi_m \mid \hat{A} \mid \phi_n\rangle\langle\phi_n \mid \\ &= \sum_{m,n} \mid \phi_m\rangle A_{m,n}\langle\phi_n \mid = \sum_{m,n} A_{m,n}\hat{U}(m,n)\end{aligned} \tag{4}$$

(f)

$$A_{p,q} = \langle\phi_p \mid \hat{A} \mid \phi_q\rangle$$

$$
\begin{aligned}
&= \sum_m \langle \phi_p \mid \phi_m \rangle \langle \phi_m \mid \hat{A} \mid \phi_q \rangle \\
&= \sum_m \langle \phi_m \mid \hat{A} \mid \phi_q \rangle \langle \phi_p \mid \phi_m \rangle \\
&= Tr\{\hat{A}\hat{U}^\dagger(p,q)\}
\end{aligned} \tag{5}
$$

2. **Cohen-Tannoudji et al., HII-2.-**

(a)

$$
\hat{\sigma}_y^\dagger = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix} = \hat{\sigma}_y \tag{6}
$$

por lo tanto $\hat{\sigma}_y$ **SÍ ES** hermítico. Los valores propios se encuentran al exigir que sea cero el siguiente determinante

$$
\begin{vmatrix} -\lambda & -i \\ i & -\lambda \end{vmatrix} = 0 \tag{7}
$$

Resulta entonces que $\lambda^2 = 1$, por lo tanto los valores propios de $\hat{\sigma}_y$ son $\lambda = \pm 1$. Los vectores propios (normalizados), escritos en la base $\{\mid 1\rangle, \mid 2\rangle\}$ son

$$
\begin{aligned}
\mid \lambda = +1\rangle &= \frac{1}{\sqrt{2}}(\mid 1\rangle + i \mid 2\rangle) \\
\mid \lambda = -1\rangle &= \frac{1}{\sqrt{2}}(\mid 1\rangle - i \mid 2\rangle)
\end{aligned} \tag{8}
$$

(b) Los proyectores son

$$
\hat{P}(+1) = \mid \lambda = +1\rangle\langle\lambda = +1 \mid = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 \\ i \end{pmatrix}(1, -i) = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & -i \\ i & 1 \end{pmatrix} \tag{9}
$$

y

$$
\hat{P}(-1) = \mid \lambda = -1\rangle\langle\lambda = -1 \mid = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 \\ -i \end{pmatrix}(1, i) = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & i \\ -i & 1 \end{pmatrix} \tag{10}
$$

Estos proyectores son ortogonales porque $\hat{P}(+1) \cdot \hat{P}(-1) = 0$. Además son completos porque $\hat{P}(+1) + \hat{P}(-1) = \hat{1}$.

(c) Como $\hat{M}^\dagger = \hat{M}$ y $\hat{L}_y^\dagger = \hat{L}_y$ **SÍ SON** hermíticas. Los valores propios vienen de

$$
\begin{vmatrix} 2-\lambda & i\sqrt{2} \\ -i\sqrt{2} & 3-\lambda \end{vmatrix} = 0 \quad para \quad \hat{M} \tag{11}
$$

y

$$-i\frac{\hbar}{2}\begin{vmatrix} -\lambda & \sqrt{2} & 0 \\ -\sqrt{2} & -\lambda & \sqrt{2} \\ 0 & -\sqrt{2} & -\lambda \end{vmatrix} = 0 \quad para \quad \hat{L}_y \tag{12}$$

Para $\hat{M}$ los valores propios son $\lambda_1 = 4$ y $\lambda_2 = 1$, con vectores propios (normalizados)

$$\mid \lambda_1\rangle = \sqrt{\frac{1}{3}}(\mid 1\rangle - i\sqrt{2} \mid 2\rangle) \tag{13}$$

y

$$\mid \lambda_2\rangle = \sqrt{\frac{2}{3}}(\mid 1\rangle + \frac{i}{\sqrt{2}} \mid 2\rangle) \tag{14}$$

Los proyectores asociados son

$$\hat{P}(\lambda_1) = \mid \lambda_1\rangle\langle\lambda_1 \mid = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 1 \\ -i\sqrt{2} \end{pmatrix}(1, i\sqrt{2}) = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 1 & i\sqrt{2} \\ -i\sqrt{2} & 2 \end{pmatrix} \tag{15}$$

y

$$\hat{P}(\lambda_2) = \mid \lambda_2\rangle\langle\lambda_2 \mid = \frac{2}{3}\begin{pmatrix} 1 \\ \frac{i}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}(1, -\frac{i}{\sqrt{2}}) = \frac{2}{3}\begin{pmatrix} 1 & -\frac{i}{\sqrt{2}} \\ \frac{i}{\sqrt{2}} & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \tag{16}$$

Claramente estos proyectores son ortogonales, $\hat{P}(\lambda_1) \cdot \hat{P}(\lambda_2) = 0$, y completos, $\hat{P}(\lambda_1) + \hat{P}(\lambda_2) = \hat{1}$.

Para $\hat{L}_y$ los valores propios son $\lambda_1 = \hbar$, $\lambda_2 = 0$ y $\lambda_3 = -\hbar$. Si aceptamos que la matriz representativa de L_y está escrita con referencia a la base ortonormal $\{\mid 1\rangle, \mid 2\rangle, \mid 3\rangle\}$, los vectores propios (normalizados) vienen dados por

$$\mid \lambda_1\rangle = \frac{1}{2}(- \mid 1\rangle - i\sqrt{2} \mid 2\rangle + \mid 3\rangle) = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} -1 \\ -i\sqrt{2} \\ 1 \end{pmatrix} \tag{17}$$

$$\mid \lambda_2\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(\mid 1\rangle + \mid 3\rangle) = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \tag{18}$$

y

$$\mid \lambda_3\rangle = \frac{1}{2}(- \mid 1\rangle + i\sqrt{2} \mid 2\rangle + \mid 3\rangle) = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} -1 \\ i\sqrt{2} \\ 1 \end{pmatrix} \tag{19}$$

con proyectores

$$\hat{P}(\lambda_1) = \frac{1}{4}\begin{pmatrix} 1 & -i\sqrt{2} & -1 \\ i\sqrt{2} & 2 & -i\sqrt{2} \\ -1 & i\sqrt{2} & 1 \end{pmatrix} \tag{20}$$

$$\hat{P}(\lambda_2) = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \tag{21}$$

y

$$\hat{P}(\lambda_3) = \frac{1}{4}\begin{pmatrix} 1 & i\sqrt{2} & -1 \\ -i\sqrt{2} & 2 & i\sqrt{2} \\ -1 & -i\sqrt{2} & 1 \end{pmatrix} \tag{22}$$

que como debe ser, son ortogonales dos a dos, $\hat{P}(\lambda_i) \cdot \hat{P}(\lambda_j) = 0$ si $i \neq j$, y completos, $\hat{P}(\lambda_1) + \hat{P}(\lambda_2) + \hat{P}(\lambda_3) = \hat{1}$.

3. **Cohen-Tannoudji et al., HII-3.-**

(a)

$$\langle \psi_0 \mid \psi_0 \rangle = \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{4} = 1 \tag{23}$$

$$\langle \psi_1 \mid \psi_1 \rangle = \frac{1}{3} + \frac{1}{3} = \frac{2}{3} \tag{24}$$

Por lo tanto $\mid \psi_0 \rangle$ si está normalizado pero $\mid \psi_1 \rangle$ NO está normalizado. Este último quedaría normalizado al expresarlo como

$$\mid \psi_1 \rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(\mid u_1 \rangle + i \mid u_3 \rangle) \tag{25}$$

(b)

$$\hat{\rho}_0 = \mid \psi_0 \rangle \langle \psi_0 \mid = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{i}{2} \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix} (\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{i}{2}, \frac{1}{2}) = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{i}{2\sqrt{2}} & \frac{1}{2\sqrt{2}} \\ \frac{i}{2\sqrt{2}} & \frac{1}{4} & \frac{i}{4} \\ \frac{1}{2\sqrt{2}} & -\frac{i}{4} & \frac{1}{4} \end{pmatrix} \tag{26}$$

y

$$\hat{\rho}_1 = \mid \psi_1 \rangle \langle \psi_1 \mid = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 \\ \frac{i}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} (\frac{1}{\sqrt{2}}, 0, -\frac{i}{\sqrt{2}}) = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 0 & -i \\ 0 & 0 & 0 \\ i & 0 & 1 \end{pmatrix} \tag{27}$$

Estos proyectores son claramente HERMÍTICOS.

4. **Cohen-Tannoudji et al., HII-4.-** (a) Si $\hat{K} = \mid \phi \rangle \langle \psi \mid$ donde $\mid \phi \rangle$ y $\mid \psi \rangle$ son dos estados arbitrarios, $\hat{K}$ será HERMÍTICO sólo si $\mid \phi \rangle = \mid \psi \rangle$.

(b) $\hat{K}^2 = \mid \phi \rangle \langle \psi \mid \phi \rangle \langle \psi \mid$. Para ser un proyector se debe cumplir que $\hat{K}$ sea HERMÍTICO y $\hat{K}^2 = \hat{K}$. Esto sólo se da si $\langle \psi \mid \phi \rangle = 1$, lo que implica que $\mid \phi \rangle = \mid \psi \rangle$ y además que $\mid \phi \rangle$ esté normalizado.

(c) Suponer que $\mid \phi\rangle$ y $\mid \psi\rangle$ no son ortogonales, es decir $\langle\phi \mid \psi\rangle \neq 0$, y que cada uno de ellos está normalizado. En la expresión de $\hat{K}$ multiplicar y dividir por la misma cantidad $\langle\phi \mid \psi\rangle$

$$\hat{K} =\mid \phi\rangle\langle\psi\rangle = \frac{\mid \phi\rangle\langle\phi \mid \psi\rangle\langle\psi\rangle}{\langle\phi \mid \psi\rangle} = \frac{1}{\langle\phi \mid \psi\rangle}(\mid \phi\rangle\langle\phi\rangle)(\mid \psi\rangle\langle\psi\rangle) = \frac{1}{\langle\phi \mid \psi\rangle}\hat{P}(\phi)\hat{P}(\psi) \tag{28}$$

5. **Cohen-Tannoudji et al., HII-6.-** La exponencial de un operador debe ser siempre entendida como la forma compacta de representar la serie que le corresponde, es decir

$$e^{i\hat{A}} = \hat{1} + (i\hat{A}) + \frac{1}{2!}(i\hat{A})^2 + \frac{1}{3!}(i\hat{A})^3 + ... \tag{29}$$

Por lo tanto

$$e^{i\alpha\hat{\sigma_x}} = \hat{1} + (i\alpha\hat{\sigma_x}) + \frac{1}{2!}(i\alpha\hat{\sigma_x})^2 + \frac{1}{3!}(i\alpha\hat{\sigma_x})^3 + ... \tag{30}$$

Notar que

$$\hat{\sigma_x}^2 = \hat{1} \quad , \quad \hat{\sigma_x}^3 = \hat{\sigma_x} \quad , etc. \tag{31}$$

Entonces

$$e^{i\alpha\hat{\sigma_x}} = \hat{1} + i\alpha\hat{\sigma_x} - \frac{1}{2!}\alpha^2\hat{1} - \frac{i}{3!}\alpha^3\hat{\sigma_x} + ... \tag{32}$$

que se puede reorganizar como

$$e^{i\alpha\hat{\sigma_x}} = \hat{1}(1 - \frac{\alpha^2}{2!} + \frac{\alpha^4}{4!} + ...) + i\hat{\sigma_x}(\alpha - \frac{\alpha^3}{3!} + \frac{\alpha^5}{5!} + ...) \tag{33}$$

Se reconoce en el primer paréntesis de la derecha la serie de Taylor de la función cosα mientras que el segundo paréntesis de la derecha es la serie de Taylor de la función senα. Se obtiene finalmente

$$e^{i\alpha\hat{\sigma_x}} = \hat{1}\text{cos}\alpha + i\hat{\sigma_x}\text{sen}\alpha \tag{34}$$