Universidad de los Andes-Dpto. de Física
Mecánica Cuántica I-2014/II

Tarea 4

Antes de empezar a solucionar estos ejercicios debe leer completamente el capítulo 1 del texto Cohen-Tannoudji et al..

1. Se mide la posición sobre el eje x de una partícula con una pequeña incertidumbre ϵ. Un tiempo t más tarde, se realiza otra medición de la posición. Se pretende conocer la incertidumbre en la segunda medición de la posición. Con este fin aproximar la función de onda inmediatamente después de la primera medición ($t = 0$) por una Gaussiana

$$\psi(x,0) = Ae^{-\frac{x^2}{4\epsilon^2}} \tag{1}$$

   (a) Normalizar $\psi(x, 0)$.

   (b) Calcular el producto de incertidumbres de posición (Δx) y momentum lineal (Δp) a $t = 0$ y verificar que satisface la relación de incertidumbre de Heisenberg como una igualdad.

   (c) Suponiendo que la partícula es LIBRE (energía potencial nula) calcular la función de onda en representación p al tiempo t. Demostrar que la incertidumbre en p, Δp, no cambia con el tiempo.

   (d) Encuentre la función de onda en representación x al tiempo t. Calcule la incertidumbre en x como función del tiempo. Usando MATHEMATICA grafique la densidad de probabilidad $\mathcal{P}(x, t) =| \psi(x, t) |^2$ para 5 instantes equidistantes en tiempo. Qué observa?.

2. Una partícula confinada en un anillo de circunferencia L y en ausencia de potencial tiene funciones de onda estacionarias relativamente simples. Represente la posición a lo largo del anillo por x, de tal forma que x y $x + L$ indican el mismo punto.

   (a) Encuentre el conjunto completo de funciones estacionarias $\psi_n(x)$ y sus energías correspondientes, E_n. Será conveniente dejar el índice n correr en pasos enteros entre $-\infty$ y $+\infty$, con E_n aumentando a medida que $|n|$ aumenta. Demuestre explícitamente que el conjunto de las $\{\psi_n(x)\}$ es un conjunto ortonormal.

   (b) Un operador que da información sobre en cuál mitad del anillo se encuentra la partícula es $\hat{C} = \cos(2\pi\hat{x}/L)$. Demostrar que $< C >= 0$ en cualquier estado $\phi_n(x)$. Por qué?. Encuentre una combinación lineal de dos $\phi_n(x)$ para la cual $< C >> 0$ y evalúelo.

3. Considere una partícula confinada en un pozo infinito de potencial (1-dimensión) entre $x = 0$ y $x = a$, con energías E_n y funciones de onda estacionarias $\psi_n(x)$.

(a) Cuál de los siguientes operadores: $\hat{X}$, $\hat{P}_x$, $\hat{P}_x^2$ tiene como funciones propias a las $\psi_n(x)$?. Explique.

(b) Calcule las incertidumbres en posición y momentum lineal en un estado estacionario cualquiera $\psi_n(x)$.

(c) Para una partícula *clásica* con rapidez distinta de cero en la misma situación, cuál es la posición promedio y la incertidumbre en posición si se realiza una serie de observaciones a distintos tiempos?. Compare estos resultados con los del caso cuántico obtenidos en (b). Existe algún caso límte donde estos coincidan?.

4. Considere los estados *ligados* ($E < 0$) de una partícula en el potencial

$$V(x) = -\alpha[\delta(x-b) + \delta(x+b)] \tag{2}$$

con $\alpha > 0$. Defina $\kappa = \sqrt{\frac{-2mE}{\hbar^2}}$ y $\gamma = \frac{m\alpha}{\hbar^2}$.

(a) Por la aplicación de exigencias de continuidad en la función de onda en todas partes y discontinuidad en sus derivadas en $x = \pm b$, encuentre una relación entre $\frac{\kappa}{\gamma}$ y $e^{-\kappa b}$ que debe ser satisfecha por cualquier función de onda estacionaria para esta partícula.

(b) Demuestre que las funciones de onda estacionarias pueden ser clasificadas de acuerdo a su simetría bajo la reflexión $x \longrightarrow -x$. Cuál es la simetría del estado fundamental?.

(c) Resuelva la ecuación obtenida en (a) *gráficamente* (use MATHEMATICA) y determine cuántos estados ligados existen. Demuestre que este número depende de qué tan lejos estén las dos *deltas*. Cúal es el valor crítico de b que separa estos dos regímenes?.