Universidad de los Andes-Dpto. de Física
Mecánica Cuántica I-2014/II

Tarea 9

1. (a) Demuestre que para $l = n - 1$, la función de onda radial del átomo de hidrógeno tiene la forma

$$R_{n,n-1}(r) = Nr^{n-1}e^{-\frac{r}{na_B}} \tag{1}$$

donde a_B es el radio de Bohr. Calcule la constante de normalización N.

(b) Calcule $< r >$ para estos estados y compare con los resultados de las órbitas de Bohr.

(c) Calcule la incertidumbre en r, es decir $\Delta r = \sqrt{\langle r^2 \rangle - \langle r \rangle^2}$.

(d) Compare Δr con $< r >$ y discuta brevemente las implicaciones de sus resultados para $n >> 1$.

2. Considere un oscilador armónico tridimensional de masa m^* con potencial

$$V(r) = \frac{1}{2}m^*\omega^2(x^2 + y^2 + z^2) = \frac{1}{2}m^*\omega^2 r^2 \tag{2}$$

(a) Demuestre que las funciones de onda estacionarias tienen la forma

$$\Psi_{n_x,n_y,n_z}(x, y, z) = \psi_{n_x}(x)\psi_{n_y}(y)\psi_{n_z}(z) \tag{3}$$

con energías correspondientes $E_{n_x,n_y,n_z} = E_x(n_x) + E_y(n_y) + E_z(n_z)$, donde $\psi_{n_j}(x_j)$ y $E_j(n_j)$ son las funciones de onda estacionarias y energías de un oscilador armónico uni-dimensional en la dirección x_j.

(b) Encuentre la fórmula general que da cuenta de los degeneramientos de las energías obtenidas en (a).

(c) Dado que el Hamiltoniano para este sistema es rotacionalmente invariante, las funciones de onda estacionarias pueden ser también escritas en coordenadas esféricas como

$$\Psi_{n,l,m}(r, \theta, \phi) = R_{n,l}(r)Y_l^m(\theta, \phi) \tag{4}$$

Por analogía con el átomo de hidrógeno escriba la ecuación diferencial que debe ser satisfecha por la función de onda radial $R_{n,l}(r)$.

(d) Escriba la función de onda radial como $R(r) = r^l e^{-\frac{r^2}{2a^2}}\rho(r)$, con la longitud a que puede obtener de su conocimiento del oscilador armónico cuántico uni-dimensional y parte (a). Escriba la ecuación diferencial que debe ser satisfecha por $\rho(r)$. Solucione esta ecuación diferencial por serie de potencias como aparece en el texto.

(e) Demuestre que al imponer la condición de terminar la serie de potencias en (d) con un número finito de términos (necesaria para garantizar que la función de onda sea normalizable) se llega a los resultados correctos de las energías.

(f) Demuestre que los degeneramientos de los niveles de energía obtenidos en (a) y (d) son compatibles. Existe una simetría oculta adicional en este sistema que origine degeneramientos extras?. En términos de sus conocimientos de mecánica clásica para osciladores armónicos bi- o tri-dimensionales por qué es natural el haber encontrado degeneramientos extras, más allá de los degeneramientos normales asociados a varios m para n y l dados.