Universidad de los Andes-Dpto. de Física
Mecánica Cuántica I-2014/II

Solución Tarea 3

1. *Considere un sistema físico con un espacio de Hilbert de dimensión 2. Una base ortonormal en este espacio viene dada por* $\{|1\rangle, |2\rangle\}$. *Representados en esa base el Hamiltoniano y dos operadores* $\hat{A}$ *y* $\hat{B}$ *vienen dados por*

$$\hat{H} = \frac{\hbar\omega}{3}\begin{pmatrix} 5 & i\sqrt{2} \\ -i\sqrt{2} & 4 \end{pmatrix} \quad , \quad \hat{A} = \frac{a}{3}\begin{pmatrix} 2\sqrt{2} & -i \\ i & -2\sqrt{2} \end{pmatrix} \quad , \quad \hat{B} = \frac{b}{3}\begin{pmatrix} 1 & -4i\sqrt{2} \\ 4i\sqrt{2} & 5 \end{pmatrix} \tag{1}$$

donde ω, a *y* b *son constantes reales positivas. Al instante* $t = 0$ *el sistema se encuentra en el estado*

$$|\Psi(0)\rangle = N\left(\sqrt{2}|1\rangle + \sqrt{3}|2\rangle\right) \tag{2}$$

(a) *Normalice el estado anterior.*

La condición de normalización impone que

$$\begin{aligned} \langle\Psi(0)|\Psi(0)\rangle &= 1 \\ &= N^2\,(2+3) \end{aligned}$$

Por lo tanto

$$N = \frac{1}{\sqrt{5}} \quad \rightarrow \quad |\Psi(0)\rangle = \sqrt{\frac{2}{5}}|1\rangle + \sqrt{\frac{3}{5}}|2\rangle \tag{3}$$

(b) *Si se mide la energía del sistema a* $t = 0$ *qué resultados se pueden encontrar y con cuáles probabilidades?. Si se realizan muchas mediciones a* $t = 0$ *de la energía cuál es el valor promedio?.*

Los valores de energía que se pueden encontrar a cualquier tiempo son los valores propios del Hamiltoniano. Estos salen de la condición

$$\frac{\hbar\omega}{3}\begin{vmatrix} 5-\lambda & i\sqrt{2} \\ -i\sqrt{2} & 4-\lambda \end{vmatrix} = 0 \quad \Longrightarrow \lambda_1 = 6\left(\frac{\hbar\omega}{3}\right) \quad , \quad \lambda_2 = 3\left(\frac{\hbar\omega}{3}\right) \tag{4}$$

Por lo tanto los valores propios del Hamiltoniano son $E_1 = 2\hbar\omega$ y $E_2 = \hbar\omega$. Para calcular las probabilidades de ocurrencia de cada uno de estos posibles resultados hace falta encontrar el vector propio de $\hat{H}$ correspondiente a cada valor propio, que ya normalizados son

$$\begin{aligned} |E_1\rangle &= \sqrt{\frac{2}{3}}(|1\rangle - \frac{i}{\sqrt{2}}|2\rangle) \\ |E_2\rangle &= \sqrt{\frac{1}{3}}(|1\rangle + i\sqrt{2}|2\rangle) \end{aligned} \tag{5}$$

Las probabilidades son

$$\begin{aligned} \mathcal{P}(E_1) &= |\langle E_1|\Psi(0)\rangle|^2 = \frac{7}{15} \\ \mathcal{P}(E_2) &= |\langle E_2|\Psi(0)\rangle|^2 = \frac{8}{15} \end{aligned} \tag{6}$$

Se verifica que $\mathcal{P}(E_1) + \mathcal{P}(E_2) = 1$, como tiene que ser. El valor medio de la energía a $t = 0$ es

$$\langle E\rangle = E_1\mathcal{P}(E_1) + E_2\mathcal{P}(E_2) = 2\hbar\omega\frac{7}{15} + \hbar\omega\frac{8}{15} = \frac{22}{15}\hbar\omega \tag{7}$$

que como se espera deber estar entre $\hbar\omega$ y $2\hbar\omega$. Este mismo resultado se puede obtener también de esta otra forma

$$\langle E\rangle = \langle\Psi(0)|\hat{H}|\Psi(0)\rangle = \frac{\hbar\omega}{15}(\sqrt{2}, \sqrt{3})\begin{pmatrix} 5 & i\sqrt{2} \\ -i\sqrt{2} & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \sqrt{2} \\ \sqrt{3} \end{pmatrix} = \frac{22}{15}\hbar\omega \tag{8}$$

(c) *Suponga que en lugar de medir la energía a $t = 0$ se midiera el observable correspondiente a $\hat{A}$. Qué resultados se pueden encontrar y con cuáles probabilidades?. Cuál es el valor promedio de $\hat{A}$?.*

Los valores propios de $\hat{A}$, y por lo tanto los posibles resultados de una medición de $\hat{A}$, salen de:

$$\frac{a}{3}\begin{vmatrix} 2\sqrt{2} - \lambda & -i \\ i & -2\sqrt{2} - \lambda \end{vmatrix} = 0 \quad \Longrightarrow \lambda_1 = a \quad , \quad \lambda_2 = -a \tag{9}$$

Los vectores propios normalizados de $\hat{A}$ son:

$$\begin{aligned} |a\rangle &= \frac{1}{\sqrt{6}}\left(\frac{1}{\sqrt{3 - 2\sqrt{2}}}|1\rangle + i\sqrt{3 - 2\sqrt{2}}|2\rangle\right) \\ |-a\rangle &= \frac{1}{\sqrt{6}}\left(\frac{1}{\sqrt{3 + 2\sqrt{2}}}|1\rangle - i\sqrt{3 + 2\sqrt{2}}|2\rangle\right) \end{aligned} \tag{10}$$

Las probabilidades para cada posible resultado son:

$$\begin{aligned}\mathcal{P}(a) &= |\langle a|\Psi(0)\rangle|^2 = \frac{15-2\sqrt{2}}{30} \\ \mathcal{P}(-a) &= |\langle -a|\Psi(0)\rangle|^2 = \frac{15+2\sqrt{2}}{30}\end{aligned} \tag{11}$$

Como debe ser $\mathcal{P}(a)+\mathcal{P}(-a)=1$. El valor medio de $\hat{A}$ es

$$\langle \hat{A}\rangle = \langle\Psi(0)|\hat{A}|\Psi(0)\rangle = \frac{a}{15}(\sqrt{2},\sqrt{3})\begin{pmatrix} 2\sqrt{2} & -i \\ i & -2\sqrt{2}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\sqrt{2}\\ \sqrt{3}\end{pmatrix} = -\frac{2\sqrt{2}}{15}a \tag{12}$$

(d) *Lo mismo del literal anterior pero ahora para* $\hat{B}$.

Los valores propios de $\hat{B}$, y por lo tanto los posibles resultados de una medición de $\hat{B}$, salen de:

$$\frac{b}{3}\begin{vmatrix} 1-\lambda & -4i\sqrt{2} \\ 4i\sqrt{2} & 5-\lambda\end{vmatrix} = 0 \quad \Longrightarrow \lambda_1 = 9\left(\frac{b}{3}\right) = 3b \quad , \quad \lambda_2 = -3\left(\frac{b}{3}\right) = -b \tag{13}$$

Los vectores propios normalizados de $\hat{B}$ son:

$$\begin{aligned}|3b\rangle &= \frac{1}{\sqrt{3}}\left(|1\rangle + i\sqrt{2}|2\rangle\right) \\ |-b\rangle &= \frac{1}{\sqrt{3}}\left(\sqrt{2}|1\rangle - i|2\rangle\right)\end{aligned} \tag{14}$$

Las probabilidades para cada posible resultado son:

$$\begin{aligned}\mathcal{P}(3b) &= |\langle 3b|\Psi(0)\rangle|^2 = \frac{8}{15} \\ \mathcal{P}(-b) &= |\langle -b|\Psi(0)\rangle|^2 = \frac{7}{15}\end{aligned} \tag{15}$$

Como debe ser $\mathcal{P}(3b)+\mathcal{P}(-b)=1$. El valor medio de $\hat{B}$ es

$$\langle \hat{B}\rangle = \langle\Psi(0)|\hat{B}|\Psi(0)\rangle = \frac{b}{15}(\sqrt{2},\sqrt{3})\begin{pmatrix} 1 & -4i\sqrt{2} \\ 4i\sqrt{2} & 5\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\sqrt{2}\\ \sqrt{3}\end{pmatrix} = \frac{17}{15}b \tag{16}$$

(e) *Qué puede decir del producto de incertidumbres* $\Delta A \Delta B$ *a* $t=0$*?.*

Para calcular la incertidumbre $\Delta A = \sqrt{\langle \hat{A}^2\rangle - \langle \hat{A}\rangle^2}$ falta aún calcular $\langle \hat{A}^2\rangle$ que resulta ser

$$\langle \hat{A}^2\rangle = \langle\Psi(0)|\hat{A}^2|\Psi(0)\rangle = \frac{a^2}{45}(\sqrt{2},\sqrt{3})\begin{pmatrix} 2\sqrt{2} & -i \\ i & -2\sqrt{2}\end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2\sqrt{2} & -i \\ i & -2\sqrt{2}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\sqrt{2}\\ \sqrt{3}\end{pmatrix} = a^2 \tag{17}$$

Por lo tanto

$$\Delta A = \frac{217}{15} a \tag{18}$$

De manera similar para ΔB se calcula primero

$$\langle \hat{B}^2 \rangle = \langle \Psi(0)|\hat{B}^2|\Psi(0)\rangle = \frac{b^2}{45}(\sqrt{2}, \sqrt{3}) \begin{pmatrix} 1 & -4i\sqrt{2} \\ 4i\sqrt{2} & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -4i\sqrt{2} \\ 4i\sqrt{2} & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \sqrt{2} \\ \sqrt{3} \end{pmatrix} = \frac{237}{45} b^2 \tag{19}$$

Por lo tanto

$$\Delta B = \frac{\sqrt{896}}{15} b \tag{20}$$

Se tiene que cumplir que

$$\Delta A \Delta B \geq \frac{1}{2} |\langle [\hat{A}, \hat{B}] \rangle| \tag{21}$$

Como

$$[\hat{A}, \hat{B}] = -4iab \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad \rightarrow \quad \Delta A \Delta B \geq \frac{4\sqrt{6}}{5} ab \tag{22}$$

lo que se cumple para los resultados en Ec.(18) y Ec.(20).

(f) *Iniciando con el estado de la Ec.(2) convenientemente normalizado, determine el estado del sistema a un tiempo $t > 0$ arbitrario, es decir $|\Psi(t)\rangle$.*

De la Ec.(5) se pueden obtener los kets $|1\rangle$ y $|2\rangle$ en términos de $|E_1\rangle$ y $|E_2\rangle$

$$\begin{aligned} |1\rangle &= \frac{1}{\sqrt{3}}(\sqrt{2}|E_1\rangle + |E_2\rangle) \\ |2\rangle &= \frac{i}{\sqrt{3}}(|E_1\rangle - \sqrt{2}|E_2\rangle) \end{aligned} \tag{23}$$

El estado inicial, Ec.(3), puede entonces ser escrito también como

$$|\ \Psi(0)\rangle = \frac{1}{\sqrt{15}}(2 + i\sqrt{3})|E_1\rangle + \sqrt{\frac{2}{15}}(1 - i\sqrt{3})|E_2\rangle \tag{24}$$

Por lo tanto, el estado al instante t es

$$|\Psi(t)\rangle = \frac{1}{\sqrt{15}}(2 + i\sqrt{3})e^{-i2\omega t}|E_1\rangle + \sqrt{\frac{2}{15}}(1 - i\sqrt{3})e^{-i\omega t}|E_2\rangle \tag{25}$$

De regreso a la base $\{|1\rangle, |2\rangle\}$ se obtiene

$$|\Psi(t)\rangle = \frac{1}{3}\sqrt{\frac{2}{5}}((2 + i\sqrt{3})e^{-i\omega t} + 1 - i\sqrt{3})|1\rangle + \frac{i}{3\sqrt{5}}(-(2 + i\sqrt{3})e^{-i\omega t} + 2 - 2i\sqrt{3})|2\rangle \tag{26}$$

2. (i) *Sea* $\hat{H}$ *el Hamiltoniano de un sistema físico con ecuación de valores propios* $\hat{H}|E_n\rangle = E_n|E_n\rangle$. *Calcule* $\langle E_n|[\hat{A},\hat{H}]|E_n\rangle$, *donde* $\hat{A}$ *es un observable cualquiera.*

$$\begin{aligned} \langle E_n|[\hat{A},\hat{H}]|E_n\rangle &= \langle E_n|\hat{A}\hat{H} - \hat{H}\hat{A}|E_n\rangle \\ &= \langle E_n|\hat{A}\hat{H}|E_n\rangle - \langle E_n|\hat{H}\hat{A}|E_n\rangle \\ &= E_n\langle E_n|\hat{A}|E_n\rangle - E_n\langle E_n|\hat{A}|E_n\rangle \\ &= 0 \end{aligned} \tag{27}$$

(ii) *Si* $\hat{H} = \frac{\hat{P}^2}{2m} + \hat{V}(x)$, *calcular en función de* $\hat{P}$, $\hat{X}$ *y* $\hat{V}(x)$, *el conmutador:* $[\hat{H},\hat{X}\hat{P}]$.

$$[\hat{H},\hat{X}\hat{P}] = \frac{1}{2m}[\hat{P}^2,\hat{X}\hat{P}] + [\hat{V}(x),\hat{X}\hat{P}] \tag{28}$$

El primer conmutador se convierte en

$$\begin{aligned} [\hat{P}^2,\hat{X}\hat{P}] &= \hat{P}^2\hat{X}\hat{P} - \hat{X}\hat{P}\hat{P}^2 \\ &= \hat{P}^2\hat{X}\hat{P} - \hat{X}\hat{P}^2\hat{P} \\ &= [\hat{P}^2,\hat{X}]\hat{P} \\ &= -2i\hbar\hat{P}^2 \end{aligned} \tag{29}$$

El segundo conmutador produce

$$\begin{aligned} [\hat{V}(x),\hat{X}\hat{P}] &= \hat{V}(x)\hat{X}\hat{P} - \hat{X}\hat{P}\hat{V}(x) \\ &= \hat{X}\hat{V}(x)\hat{P} - \hat{X}\hat{P}\hat{V}(x) \\ &= \hat{X}[\hat{V}(x),\hat{P}] \\ &= i\hbar\hat{X}\frac{d\hat{V}(x)}{dx} \end{aligned} \tag{30}$$

Por lo tanto

$$[\hat{H},\hat{X}\hat{P}] = -i\hbar\left(\frac{\hat{P}^2}{m} - \hat{X}\frac{d\hat{V}(x)}{dx}\right) \tag{31}$$

3. *Se tiene un sistema cuántico descrito en un espacio de Hilbert de dimensión 3. Sus estados estacionarios (estados propios del Hamiltoniano) se notan como* $|a\rangle, |b\rangle$ *y* $|c\rangle$ *con valores correspondientes de energía* $\hbar\omega, 0$ *y* $-\hbar\omega$, *respectivamente. Se sabe que otro observable* $\hat{A}$ *está definido por las siguientes acciones sobre la base de estados estacionarios:*

$$\hat{A}|a\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}|b\rangle \quad , \quad \hat{A}|b\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\left[|a\rangle + |c\rangle\right] \quad , \quad \hat{A}|c\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}|b\rangle \tag{32}$$

(i) *Escribir la matriz que representa a $\hat{A}$ en la base de estados estacionarios (base ordenada en la forma $\{|a\rangle, |b\rangle, |c\rangle\}$).*

En la base $\{|a\rangle, |b\rangle, |c\rangle\}$, $\hat{A}$ está representada por la matriz

$$\hat{A} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \tag{33}$$

(ii) *Calcular los valores propios $\lambda_1 > \lambda_2 > \lambda_3$ de $\hat{A}$, y los vectores propios correspondientes (normalizados!) que se van a notar como $|1\rangle, |2\rangle$ y $|3\rangle$, respectivamente.*

Los valores propios de $\hat{A}$ son $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = 0$ y $\lambda_3 = -1$. Los vectores propios correspondientes normalizados son

$$|1\rangle = \frac{1}{2}\left[|a\rangle + \sqrt{2}|b\rangle + |c\rangle\right] = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 \\ \sqrt{2} \\ 1 \end{pmatrix} \tag{34}$$

$$|2\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\left[|a\rangle - |c\rangle\right] = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \tag{35}$$

$$|3\rangle = \frac{1}{2}\left[|a\rangle - \sqrt{2}|b\rangle + |c\rangle\right] = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 \\ -\sqrt{2} \\ 1 \end{pmatrix} \tag{36}$$

(iii) *Suponer que al instante $t = 0$ el estado del sistema es $|\Psi(0)\rangle = |1\rangle$. Determine $< E >$ y ΔE en este estado.*

Primero expresar el estado inicial $|\Psi(0)\rangle$ en la base de estados propios del Hamiltoniano:

$$|\Psi(0)\rangle = |1\rangle = \frac{1}{2}\left[|a\rangle + \sqrt{2}|b\rangle + |c\rangle\right] \tag{37}$$

Entonces

$$< E > = < \hat{H} > = \frac{\hbar\omega}{4}\left(1, \sqrt{2}, 1\right)\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ \sqrt{2} \\ 1 \end{pmatrix} = 0 \tag{38}$$

De otra parte

$$< E^2 > = < \hat{H}^2 > = \frac{(\hbar\omega)^2}{4}\left(1, \sqrt{2}, 1\right)\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ \sqrt{2} \\ 1 \end{pmatrix} = \frac{(\hbar\omega)^2}{2} \tag{39}$$

Por lo tanto

$$\Delta E = \sqrt{< E^2 > - < E >^2} = \frac{\hbar\omega}{\sqrt{2}} \tag{40}$$

(iv) *Calcular al instante $t > 0$ el estado del sistema $|\Psi(t)\rangle$ y el valor medio $< \hat{A}(t) >$.*

Al expresar $|\Psi(0)\rangle$ en la base de estados propios del Hamiltoniano, se obtiene inmediatamente

$$|\Psi(t)\rangle = \frac{1}{2}\left[e^{-i\omega t}|a\rangle + \sqrt{2}|b\rangle + e^{i\omega t}|c\rangle\right] \tag{41}$$

Entonces

$$\langle\hat{A}(t)\rangle = \langle\Psi(t)|\hat{A}|\Psi(t)\rangle = \frac{1}{4\sqrt{2}}\left(e^{i\omega t}, \sqrt{2}, e^{-i\omega t}\right)\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} e^{-i\omega t} \\ \sqrt{2} \\ e^{i\omega t} \end{pmatrix} = \cos(\omega t) \tag{42}$$

(v) *Si se mide el observable $\hat{A}$ al instante $t > 0$, qué posibles resultados se van a obtener y con cuáles probabilidades.*

Los posibles resultados siguen siendo los valores propios de $\hat{A}$, es decir $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = 0$ y $\lambda_3 = -1$ con probabilidades

$$\mathcal{P}(\lambda_1) = |\langle 1|\Psi(t)\rangle\rangle|^2 = \frac{1}{16}|\left[\langle a| + \sqrt{2}\langle b| + \langle c|\right]\left[e^{-i\omega t}|a\rangle + \sqrt{2}|b\rangle + e^{i\omega t}|c\rangle\right]|^2 = \left(\frac{1+\cos(\omega t)}{2}\right)^2 \tag{43}$$

$$\mathcal{P}(\lambda_2) = |\langle 2|\Psi(t)\rangle\rangle|^2 = \frac{1}{8}|\left[\langle a| - \langle c|\right]\left[e^{-i\omega t}|a\rangle + \sqrt{2}|b\rangle + e^{i\omega t}|c\rangle\right]|^2 = \frac{\mathrm{sen}^2(\omega t)}{2} \tag{44}$$

$$\mathcal{P}(\lambda_3) = |\langle 3|\Psi(t)\rangle\rangle|^2 = \frac{1}{16}|\left[\langle a| + \sqrt{2}\langle b| + \langle c|\right]\left[e^{-i\omega t}|a\rangle - \sqrt{2}|b\rangle + e^{i\omega t}|c\rangle\right]|^2 = \left(\frac{1-\cos(\omega t)}{2}\right)^2 \tag{45}$$

Como debe ser $\mathcal{P}(\lambda_1) + \mathcal{P}(\lambda_2) + \mathcal{P}(\lambda_3) = 1$.