Universidad de los Andes-Dpto. de Física
Mecánica Cuántica I - Semestre II/2014

Solución Parcial 3

1. **Nota=2.5/5** *Considere un oscilador armónico cuántico (OAC) uni-dimensional de masa m y frecuencia natural ω. Al instante $t=0$ el estado del OAC viene dado por*

$$| \Psi(0)\rangle = A \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^n |n\rangle \tag{1}$$

donde $|n\rangle$ representa estados propios del Hamiltoniano del OAC, $\hat{H} = \hbar\omega(\hat{a}^\dagger \hat{a} + \frac{1}{2})$.

(a) *Determine la constante de normalización A.*

La condición de normalización impone que $\langle\Psi(0)|\Psi(0)\rangle = 1$, lo que lleva a

$$\begin{aligned} 1 &= \langle\Psi(0)|\Psi(0)\rangle \\ &= A^2 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2^n} \\ &= 2A^2 \end{aligned} \tag{2}$$

Por lo tanto

$$A = \frac{1}{\sqrt{2}} \tag{3}$$

(b) *Encuentre el valor esperado de la energía del OAC para $t=0$.*

$$\begin{aligned} \langle\hat{H}(0)\rangle &= \langle\Psi(0)|\hat{H}|\Psi(0)\rangle \\ &= \frac{1}{2} \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{n'=0}^{\infty} \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^n \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^{n'} \langle n|\hat{H}|n'\rangle \\ &= \frac{1}{2} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2^n} \hbar\omega(n + \frac{1}{2}) \\ &= \frac{3}{2}\hbar\omega \end{aligned} \tag{4}$$

(c) *Escriba la expresión del estado del OAC para cualquier instante $t > 0$.*

$$|\Psi(t)\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^n e^{-i\omega t(n+\frac{1}{2})}|n\rangle \tag{5}$$

(d) *Determine la evolución temporal del valor medio de la posición del OAC,* $\langle \hat{X}(t)\rangle$.

$$\begin{aligned}
\langle \hat{X}(t)\rangle &= \langle \Psi(t)|\hat{X}|\Psi(t)\rangle \\
&= \frac{l_0}{\sqrt{2}}\langle \Psi(t)|\hat{a}+\hat{a}^\dagger|\Psi(t)\rangle \\
&= \frac{l_0}{2\sqrt{2}} \sum_{n=0}^{\infty}\sum_{n'=0}^{\infty} \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^n \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^{n'} e^{i\omega t(n+\frac{1}{2})} e^{-i\omega t(n'+\frac{1}{2})}\langle n|\hat{a}^\dagger+\hat{a}|n'\rangle \\
&= \frac{l_0}{2\sqrt{2}} \left[\sum_{n=0}^{\infty} \sqrt{n}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^{2n-1} e^{i\omega t} + \sum_{n=0}^{\infty} \sqrt{n+1}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^{2n+1} e^{-i\omega t}\right] \\
&= \frac{l_0}{2}\left[\sum_{n=0}^{\infty} \sqrt{n+1}\left(\frac{1}{2}\right)^n\right]\cos(\omega t) \\
&= \frac{l_0 S}{2}\cos(\omega t)
\end{aligned} \tag{6}$$

con $S = 2.69451$.

(e) *Determine la evolución temporal del valor medio del momentum lineal del OAC,* $\langle \hat{P}(t)\rangle$.

$$\begin{aligned}
\langle \hat{P}(t)\rangle &= \langle \Psi(t)|\hat{P}|\Psi(t)\rangle \\
&= i\frac{\hbar}{\sqrt{2}l_0}\langle \Psi(t)|\hat{a}^\dagger-\hat{a}|\Psi(t)\rangle \\
&= i\frac{\hbar}{2\sqrt{2}l_0} \sum_{n=0}^{\infty}\sum_{n'=0}^{\infty} \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^n \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^{n'} e^{i\omega t(n+\frac{1}{2})} e^{-i\omega t(n'+\frac{1}{2})}\langle n|\hat{a}^\dagger-\hat{a}|n'\rangle \\
&= i\frac{\hbar}{2\sqrt{2}l_0} \left[\sum_{n=0}^{\infty} \sqrt{n}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^{2n-1} e^{i\omega t} - \sum_{n=0}^{\infty} \sqrt{n+1}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^{2n+1} e^{-i\omega t}\right] \\
&= -\frac{\hbar}{2l_0}\left[\sum_{n=0}^{\infty} \sqrt{n+1}\left(\frac{1}{2}\right)^n\right]\mathrm{sen}(\omega t) \\
&= -\frac{\hbar S}{2l_0}\mathrm{sen}(\omega t)
\end{aligned} \tag{7}$$

2. **Nota=2.5/5** *Sea un sistema para el cual* $\hat{J}^2$ *solo puede tomar los valores propios correspondientes a* $j = 0$ *y* $j = 1$. *Suponga que el sistema se encuentra en el estado*

$$| \psi\rangle = C\,(| 1, 1\rangle - | 1, 0\rangle + | 1, -1\rangle - | 0, 0\rangle) \tag{8}$$

donde cada vector en la parte derecha de la Ec.(8) está escrito en la base standard de vectores propios de $\hat{J}^2$ *y* $\hat{J}_z$, $\{| j, m_z\rangle\}$.

(a) *Normalice este estado.*

La condición de normalización impone que $\langle\psi|\psi\rangle = 1$, lo que lleva a

$$\begin{aligned} 1 &= \langle\psi|\psi\rangle \\ &= 4C^2 \end{aligned} \tag{9}$$

Por lo tanto

$$C = \frac{1}{2} \tag{10}$$

(b) *Encuentre los posibles resultados y probabilidades al medir sólo* $\hat{J}_z$ *en el estado de la Ec.(8).*

Al medir $\hat{J}_z$ para el sistema preparado en el estado de la Ec.(8), los valores que se pueden encontrar y sus correspondientes probabilidades son

$\hat{J}_z$	$\mathcal{P}(\hat{J}_z)$
$+\hbar$	$\frac{1}{4}$
0	$\frac{1}{4} + \frac{1}{4} = \frac{1}{2}$
-$\hbar$	$\frac{1}{4}$

Como el estado de la Ec.(8) con $C = 1/2$ está normalizado, la distribución de probabilidades cumple $\mathcal{P}(+\hbar) + \mathcal{P}(0) + \mathcal{P}(-\hbar) = 1$, como debe ser.

(c) *Determine los estados propios comunes a* $\hat{J}^2$ *y* $\hat{J}_x$. *Expréselos en la base standard* $\{| j, m_z\rangle\}$.

Los vectores propios simultáneos de $\hat{J}^2$ y $\hat{J}_x$, que notaremos $\{|j, m_x\rangle\}$, ya normalizados son:

$$\begin{aligned} |0, m_x = 0\rangle &= |0, 0\rangle \\ |1, m_x = 1\rangle &= \frac{1}{2}\left(|1, 1\rangle + \sqrt{2}|1, 0\rangle + |1, -1\rangle\right) \\ |1, m_x = 0\rangle &= \frac{1}{\sqrt{2}}\left(|1, 1\rangle - |1, -1\rangle\right) \\ |1, m_x = -1\rangle &= \frac{1}{2}\left(|1, 1\rangle - \sqrt{2}|1, 0\rangle + |1, -1\rangle\right) \end{aligned} \tag{11}$$

(d) *Encuentre los posibles resultados y probabilidades al medir sólo $\hat{J}_x$ en el estado de la Ec.(8).*

Primero expresar cada uno de los vectores de la base standard en términos de la base $\{|j, m_x\rangle\}$, con $j = 0, 1$, invirtiendo las Ecs.(11). Se obtiene

$$\begin{aligned}
|0,0\rangle &= |0, m_x = 0\rangle \\
|1,1\rangle &= \frac{1}{2}\left(|1, m_x = 1\rangle + \sqrt{2}|1, m_x = 0\rangle + |1, m_x = -1\rangle\right) \\
|1,0\rangle &= \frac{1}{\sqrt{2}}\left(|1, m_x = 1\rangle - |1, m_x = -1\rangle\right) \\
|1,-1\rangle &= \frac{1}{2}\left(|1, m_x = 1\rangle - \sqrt{2}|1, m_x = 0\rangle + |1, m_x = -1\rangle\right)
\end{aligned} \tag{12}$$

Entonces el estado de la Ec.(8) se expresa en la base $\{|j, m_x\rangle\}$ como

$$|\psi\rangle = \frac{1}{2}\left(1 - \frac{1}{\sqrt{2}}\right)|1, m_x = 1\rangle + \frac{1}{2}\left(1 + \frac{1}{\sqrt{2}}\right)|1, m_x = -1\rangle - \frac{1}{2}|0, m_x = 0\rangle \tag{13}$$

Al medir $\hat{J}_x$ para el sistema preparado en el estado de la Ec.(8) o expresado en la Ec.(13), los valores que se pueden encontrar y sus correspondientes probabilidades son

$\hat{J}_x$	$\mathcal{P}(\hat{J}_x)$
$+\hbar$	$\left\lvert\frac{1}{2}\left(1 - \frac{1}{\sqrt{2}}\right)\right\rvert^2 = \frac{1}{8}(3 - 2\sqrt{2})$
0	$\frac{1}{4}$
$-\hbar$	$\left\lvert\frac{1}{2}\left(1 + \frac{1}{\sqrt{2}}\right)\right\rvert^2 = \frac{1}{8}(3 + 2\sqrt{2})$

La distribución de probabilidades cumple $\mathcal{P}(+\hbar) + \mathcal{P}(0) + \mathcal{P}(-\hbar) = 1$, como debe ser.

(e) *Determine la probabilidad de obtener $2\hbar^2$ y $\hbar$ si se miden simultáneamente $\hat{J}^2$ y $\hat{J}_x$ en el estado de la Ec.(8).*

Esta probabilidad corresponde al módulo al cuadrado del coeficiente que acompaña al estado $|1, m_x = 1\rangle$ en la Ec.(13), lo que deja

$$\mathcal{P}(2\hbar^2, \hbar) = \left|\frac{1}{2}\left(1 - \frac{1}{\sqrt{2}}\right)\right|^2 = \frac{1}{8}(3 - 2\sqrt{2}) \tag{14}$$