Universidad de los Andes-Dpto. de Física
Mecánica Cuántica I-2014/II

Solución Tarea 6

1. *Cohen-Tannoudji et al., Complemento JIV, ejercicio 1.*

(a) El estado del sistema al instante $t = 0$ es $|\psi(0)\rangle = |+\rangle$. Los resultados posibles al medir $\hat{S}_x$ y sus probabilidades son:

$$\begin{aligned} +\frac{\hbar}{2} &\longrightarrow \mathcal{P}(+_x) = \frac{1}{2} \\ -\frac{\hbar}{2} &\longrightarrow \mathcal{P}(-_x) = \frac{1}{2} \end{aligned} \tag{1}$$

(b) El Hamiltoniano de evolución unitaria es $\hat{H} = \omega \hat{S}_y$, con $\omega = -\gamma B_0$. Se tiene entonces al instante t:

$$\begin{aligned} |\psi(t)\rangle &= e^{-\frac{i}{\hbar}\omega t \hat{S}_y}|+\rangle \\ &= e^{-\frac{i}{\hbar}\omega t \hat{S}_y}\left(|+_y\rangle\langle +_y| + |-_y\rangle\langle -_y|\right)|+\rangle \\ &= \cos\left(\frac{\omega t}{2}\right)|+\rangle + \operatorname{sen}\left(\frac{\omega t}{2}\right)|-\rangle \end{aligned} \tag{2}$$

(c) Al medir $\hat{S}_x$:

$$\begin{aligned} +\frac{\hbar}{2} &\longrightarrow \mathcal{P}(+_x) = \frac{1 + \operatorname{sen}(\omega t)}{2} \\ -\frac{\hbar}{2} &\longrightarrow \mathcal{P}(-_x) = \frac{1 - \operatorname{sen}(\omega t)}{2} \end{aligned} \tag{3}$$

Al medir $\hat{S}_y$:

$$\begin{aligned} +\frac{\hbar}{2} &\longrightarrow \mathcal{P}(+_y) = \frac{1}{2} \\ -\frac{\hbar}{2} &\longrightarrow \mathcal{P}(-_y) = \frac{1}{2} \end{aligned} \tag{4}$$

Al medir $\hat{S}_z$:

$$\begin{aligned} +\frac{\hbar}{2} &\longrightarrow \mathcal{P}(+_z) = \cos^2\left(\frac{\omega t}{2}\right) \\ -\frac{\hbar}{2} &\longrightarrow \mathcal{P}(-_z) = \operatorname{sen}^2\left(\frac{\omega t}{2}\right) \end{aligned} \tag{5}$$

De acuerdo a la Ec.(3) si $\omega t = \pi/2$ se tendrá certeza que al medir $\hat{S}_x$ se obtendrá el resultado $+\frac{\hbar}{2}$. Esto corresponde a lo que se denomina en resonancia magnética nuclear aplicar un pulso $\pi/2$. Pero si $\omega t = \pi$ se tendrá certeza que se obtendrá al medir $\hat{S}_z$ el resultado $-\frac{\hbar}{2}$ lo que corresponde a un pulso π. La interpretación de los anteriores resultados es consistente con una imagen clásica donde se puede pensar en un vector magnetización que precesa alrededor del eje Y, razón por la cual las probabilidades al medir $\hat{S}_y$ no cambian con el tiempo.

2. *Cohen-Tannoudji et al., Complemento JIV, ejercicio 2.*

(a) Si al medir $\hat{S}_y$ a $t = 0$ se ha encontrado el resultado $+\hbar/2$ el vector de estado inmediatamente después de la medición tiene que ser $|\psi(0)\rangle = |+_y\rangle$.

(b) Después de la medición anterior el sistema evoluciona en presencia de un campo magnético uniforme en la dirección z, lo que corresponde a un Hamiltoniano $\hat{H}(t) = \omega_0(t)\hat{S}_z$ con $\omega_0(t) = \frac{\omega_0 t}{T}$. Para encontrar el estado del sistema al instante t, $\mid \psi(t)\rangle$, se tiene que resolver la ecuación de Schrödinger. Para tal fin escribimos

$$\mid \psi(t)\rangle = a(t) \mid +\rangle + b(t) \mid -\rangle \tag{6}$$

donde empleamos la base standard o base $\{\mid +\rangle, \mid -\rangle\}$ de estados propios del operador $\hat{S}_z$. Se trata entonces de encontrar las funciones del tiempo $a(t)$ y $b(t)$. Al insertar la expresión de la Ec.(6) en la ecuación de Schrödinger se obtiene

$$i\hbar \frac{d}{dt}\left[a(t)|+\rangle + b(t)|-\rangle\right] = \omega_0(t)\hat{S}_z\left[a(t)|+\rangle + b(t)|-\rangle\right] \tag{7}$$

o

$$i\hbar\left[\frac{da(t)}{dt}|+\rangle + \frac{db(t)}{dt}|-\rangle\right] = \frac{\hbar\omega_0(t)}{2}\left[a(t)|+\rangle - b(t)|-\rangle\right] \tag{8}$$

Al proyectar la anterior ecuación sucesivamente sobre cada uno de los estados de la base standard se encuentra el siguiente par de ecuaciones diferenciales

$$\begin{aligned} i\hbar\frac{da(t)}{dt} &= \frac{\hbar\omega_0(t)}{2}a(t) \\ i\hbar\frac{db(t)}{dt} &= -\frac{\hbar\omega_0(t)}{2}b(t) \end{aligned} \tag{9}$$

cuyas soluciones son

$$\begin{aligned} a(t) &= a(0)e^{-\frac{i}{2}\int_0^t dt'\omega_0(t')} = a(0)e^{-i\frac{\omega_0 t^2}{4T}} \\ b(t) &= b(0)e^{\frac{i}{2}\int_0^t dt'\omega_0(t')} = b(0)e^{i\frac{\omega_0 t^2}{4T}} \end{aligned} \tag{10}$$

donde la condición inicial implica que $a(0) = \frac{1}{\sqrt{2}}$ y $b(0) = \frac{i}{\sqrt{2}}$. Por lo tanto el estado del sistema al instante t es

$$\mid \psi(t)\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(e^{-i\frac{\omega_0 t^2}{4T}} \mid +\rangle + ie^{i\frac{\omega_0 t^2}{4T}} \mid -\rangle) \tag{11}$$

(c) A un tiempo $t = \tau > T$ el sistema ha dejado de evolucionar y por lo tanto su estado viene dado por el mismo que alcanzó a tener a $t = T$, es decir $\mid \psi(\tau)\rangle = \mid \psi(T)\rangle$. Al medir $\hat{S}_y$, en cualquier momento, sólo se encontrará uno de los dos posibles resultados $\pm\frac{\hbar}{2}$. Las probabilidades correspondientes a cada uno de estos resultados son

$$\begin{aligned} \mathcal{P}(+\frac{\hbar}{2}) &= \mid \langle +_y \mid \psi(T)\rangle \mid^2 = \frac{1}{4} \mid e^{-i\frac{\omega_0 T}{4}} + e^{i\frac{\omega_0 T}{4}} \mid^2 = \cos^2(\frac{\omega_0 T}{4}) \\ \mathcal{P}(-\frac{\hbar}{2}) &= \mid \langle -_y \mid \psi(T)\rangle \mid^2 = \frac{1}{4} \mid e^{-i\frac{\omega_0 T}{4}} - e^{i\frac{\omega_0 T}{4}} \mid^2 = \mathrm{sen}^2(\frac{\omega_0 T}{4}) \end{aligned} \tag{12}$$

Para que la probabilidad de obtener $\frac{\hbar}{2}$ sea máxima (1) se debe cumplir que $\omega_0 T/4 = n\pi$ con $n = 0, 1, 2, ...$ Para esos mismos valores la probabilidad de obtener $-\frac{\hbar}{2}$ es cero. Por lo tanto para esos valores hay certeza absoluta del resultado de la medición de $\hat{S}_y$. De forma análoga si $\omega_0 T/4 = (2n+1)\pi/2$ con $n = 0, 1, 2, ...$ se tendrá $\mathcal{P}(+\frac{\hbar}{2}) = 0$ y $\mathcal{P}(-\frac{\hbar}{2}) = 1$. Estos resultados se pueden interpretar como una precesión de un spin inicialmente preparado en la "dirección" y por estar sometido a un campo magnético en la dirección z. La frecuencia de precesión viene determinada por $\omega_0/4$.

3. *Cohen-Tannoudji et al., Complemento JIV, ejercicio 3.*

El Hamiltoniano viene dado por

$$\hat{H} = -\hat{\vec{M}} \cdot \vec{B} = \frac{\omega}{\sqrt{2}}(\hat{S}_x + \hat{S}_z) \tag{13}$$

con $\hat{\vec{M}} = \gamma \hat{\vec{S}}$. Definir la frecuencia de Larmor como $\omega = -\gamma B_0$.

(a) Recordar la expresión de las componentes de spin en términos de matrices de Pauli en la base standard $\{|+\rangle, |-\rangle\}$

$$\hat{S}_x = \frac{\hbar}{2}\hat{\sigma}_x = \frac{\hbar}{2}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad , \quad \hat{S}_z = \frac{\hbar}{2}\hat{\sigma}_z = \frac{\hbar}{2}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \tag{14}$$

Por lo tanto el Hamiltoniano se escribe

$$\hat{H} = \frac{\hbar\omega}{2\sqrt{2}}(\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}) = \frac{\hbar\omega}{2\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \tag{15}$$

(b) Los valores propios de $\hat{H}$ son $\pm\frac{\hbar\omega}{2}$. Los correspondientes estados propios ya normalizados son

$$\begin{aligned} |+\frac{\hbar\omega}{2}\rangle &= \frac{1}{\sqrt{2(2-\sqrt{2})}}(|+\rangle + (\sqrt{2}-1)|-\rangle) = \cos(\frac{\pi}{8})|+\rangle + \mathrm{sen}(\frac{\pi}{8})|-\rangle \\ |-\frac{\hbar\omega}{2}\rangle &= \frac{1}{\sqrt{2(2+\sqrt{2})}}(|+\rangle - (\sqrt{2}+1)|-\rangle) = \mathrm{sen}(\frac{\pi}{8})|+\rangle - \cos(\frac{\pi}{8})|-\rangle \end{aligned} \tag{16}$$

(c) Al medir la energía sólo se pueden encontrar como resultados los valores propios del Hamiltoniano, es decir $\pm\frac{\hbar\omega}{2}$. Si al momento de hacer la medición de la energía el sistema se encuentra preparado en el estado $|-\rangle$ las probabilidades para cada posible resultado son

$$\begin{aligned} \mathcal{P}(+\frac{\hbar\omega}{2}) &= |\frac{\sqrt{2}-1}{\sqrt{2(2-\sqrt{2})}}|^2 = \frac{3-2\sqrt{2}}{2(2-\sqrt{2})} = \mathrm{sen}^2(\frac{\pi}{8}) \\ \mathcal{P}(-\frac{\hbar\omega}{2}) &= |\frac{\sqrt{2}+1}{\sqrt{2(2+\sqrt{2})}}|^2 = \frac{3+2\sqrt{2}}{2(2+\sqrt{2})} = \cos^2(\frac{\pi}{8}) \end{aligned} \tag{17}$$

Como tiene que ser $\mathcal{P}(+\frac{\hbar\omega}{2}) + \mathcal{P}(-\frac{\hbar\omega}{2}) = 1$.

(d) De las Ecs.(16) se puede obtener

$$|-\rangle = \mathrm{sen}(\frac{\pi}{8})|+\frac{\hbar\omega}{2}\rangle - \cos(\frac{\pi}{8})|-\frac{\hbar\omega}{2}\rangle = |\psi(0)\rangle \tag{18}$$

Dado que el anterior es el estado inicial ya expresado en la base de estados propios del Hamiltoniano (que no depende del tiempo), el estado al instante t es

$$|\psi(t)\rangle = e^{-i\frac{\omega t}{2}}\mathrm{sen}(\frac{\pi}{8})|+\frac{\hbar\omega}{2}\rangle - e^{i\frac{\omega t}{2}}\cos(\frac{\pi}{8})|-\frac{\hbar\omega}{2}\rangle \tag{19}$$

El valor medio de $\hat{S}_x$ en el estado anterior se calcula en la base standard como

$$\langle\hat{S}_x(t)\rangle = \langle\psi(t)|\hat{S}_x|\psi(t)\rangle = \frac{\hbar}{4}(i\mathrm{sen}(\frac{\omega t}{2}), \sqrt{2}\cos(\frac{\omega t}{2}) - i\mathrm{sen}(\frac{\omega t}{2})) \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -i\mathrm{sen}(\frac{\omega t}{2}) \\ \sqrt{2}\cos(\frac{\omega t}{2}) + i\mathrm{sen}(\frac{\omega t}{2}) \end{pmatrix} \tag{20}$$

que finalmente da como resultado

$$\langle\hat{S}_x(t)\rangle = -\frac{\hbar}{2}\mathrm{sen}^2(\frac{\omega t}{2}) \tag{21}$$

Este resultado corresponde a la precesión alrededor de un campo a 45^o entre los ejes x y z, de un vector clásico inicialmente a lo largo del eje $-z$.

4. *Considere un haz de átomos de spin 1/2 que se hace pasar a través de una serie de aparatos de Stern-Gerlach dispuestos de la siguiente forma:*
(a) *Del primer aparato, que mide $\hat{S}_z$, sólo se dejan pasar átomos con $s_z = +\hbar/2$ y se bloquean aquellos átomos con $s_z = -\hbar/2$.*
(b) *El segundo aparato recibe los átomos que provienen de (a) y mide $\hat{S}_u$ con vector unitario $\hat{u} = (\theta, \phi)$. Este aparato sólo dejará continuar aquellos átomos con $s_u = +\hbar/2$ mientras que bloqueará aquellos átomos con $s_u = -\hbar/2$.*
(c) *El tercer aparato mide nuevamente $\hat{S}_z$.*

(i) *Calcule la probabilidad de detectar el spin en un estado final $s_z = -\hbar/2$ al salir de (c), sabiendo que ha pasado con certeza el primer aparato (a).*

La probabilidad de encontrar $s_z = -\hbar/2$ al salir de (c), $\mathcal{P}_c(-_z)$, viene dada por

$$\begin{aligned}\mathcal{P}_c(-_z) &= \mathcal{P}_c(-_z|+_u)\mathcal{P}_b(+_u|+_z)\\ &= |\langle -_z|+_u\rangle|^2|\langle +_u|+_z\rangle|^2\\ &= \mathrm{sen}^2\left(\frac{\theta}{2}\right)\cos^2\left(\frac{\theta}{2}\right)\\ &= \frac{1}{4}\mathrm{sen}^2\left(\theta\right)\end{aligned} \tag{22}$$

(ii) *Cómo debe orientarse el segundo aparato (b) para maximizar la probabilidad encontrada en (i)?. Interprete físicamente su resultado.*

La probabilidad $\mathcal{P}_c(-_z)$ será máxima cuando el segundo Stern-Gerlach se oriente con su campo magnético en el plano x-y, es decir $\theta = \pi/2$. Este problema es análogo al problema de Óptica donde se tienen 3 polarizadores de luz: el (a) deja pasar luz polarizada linealmente en una cierta dirección mientras que el (c) deja sólo pasar luz polarizada linealmente en una dirección perpendicular a la de (a). Sin el polarizador (b) nada saldrá de (c). Sin embargo, insertando el polarizador de la mitad (b) con una dirección de polarización a 45^o entre las de (a) y (c), se podrá trasnmitir por (c) un máximo de 1/4 de la intensidad de la luz que ha salido de (a).

Considere de ahora en adelante que un spin evoluciona de acuerdo al Hamiltoniano

$$\hat{H} = -\frac{1}{2}[\omega_x\hat{\sigma}_x + \omega_y\hat{\sigma}_y + \omega_z\hat{\sigma}_z] \tag{23}$$

donde $\hat{\sigma}_{x,y,z}$ son las matrices de Pauli, mientras que $\omega_{x,y,z}$ son escalares reales con dimensiones de energía.

(iii) *Demostrar que $\hat{H}^2$ es una constante multiplicada por el operador identidad $\hat{1}$. Encontrar el valor de esa constante.*

Se tiene

$$\begin{aligned}\hat{H}^2 &= \frac{1}{4}[\omega_x\hat{\sigma}_x + \omega_y\hat{\sigma}_y + \omega_z\hat{\sigma}_z][\omega_x\hat{\sigma}_x + \omega_y\hat{\sigma}_y + \omega_z\hat{\sigma}_z] \\ &= \frac{1}{4}[\omega_x^2 + \omega_y^2 + \omega_z^2]\hat{1} = \frac{\omega_0^2}{4}\hat{1} \qquad (24)\end{aligned}$$

donde $\omega_0^2 = \omega_x^2 + \omega_y^2 + \omega_z^2$. Este resultado se obtiene rápidamente haciendo uso de $\hat{\sigma}_x^2 = \hat{\sigma}_y^2 = \hat{\sigma}_z^2 = \hat{1}$ y de $\hat{\sigma}_x\hat{\sigma}_y = -\hat{\sigma}_y\hat{\sigma}_x = i\hat{\sigma}_z$ (y permutaciones cíclicas de x, y y z).

(iv) *Demostrar que el operador evolución se puede expresar como*

$$\hat{U}(t,0) = \hat{1}\cos[\alpha(t)] + \hat{G}\mathrm{sen}[\alpha(t)] \qquad (25)$$

donde $\hat{1}$ es el operador identidad. Determinar la función $\alpha(t)$ y el operador $\hat{G}$.

Notar que

$$\hat{H}^{2n} = (\frac{\omega_0}{2})^{2n}\hat{1} \quad y \quad \hat{H}^{2n+1} = (\frac{\omega_0}{2})^{2n}\hat{H} \qquad (26)$$

de donde obtenemos

$$\begin{aligned}\hat{U}(t,0) &= e^{-i\hat{H}t} \\ &= \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-i\hat{H}t)^n}{n!} \\ &= \hat{1}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n(\omega_0 t/2)^{2n}}{(2n)!} - \frac{2i}{\omega_0}\hat{H}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n(\omega_0 t/2)^{2n+1}}{(2n+1)!} \\ &= \hat{1}\cos\left(\frac{\omega_0 t}{2}\right) - \frac{2i}{\omega_0}\hat{H}\mathrm{sen}\left(\frac{\omega_0 t}{2}\right) \qquad (27)\end{aligned}$$

Por lo tanto $\alpha(t) = \frac{\omega_0 t}{2}$ y $\hat{G} = -\frac{2i}{\omega_0}\hat{H}$.

(v) *Considere que el spin se encuentra al instante $t = 0$ en el estado $\mid +\rangle$ (estado propio de $\hat{\sigma}_z$ con valor propio $+1$). Calcular la probabilidad de encontrarlo en el mismo estado $\mid +\rangle$ al instante $t > 0$.*

El estado del spin al instante $t > 0$ viene dado por

$$\begin{aligned}\mid \Psi(t)\rangle &= \hat{U}(t,0)\mid \Psi(0)\rangle \\ &= [\hat{1}\cos\left(\frac{\omega_0 t}{2}\right) - \frac{2i}{\omega_0}\hat{H}\mathrm{sen}\left(\frac{\omega_0 t}{2}\right)]\mid +\rangle \\ &= [\cos\left(\frac{\omega_0 t}{2}\right) + \frac{i}{\omega_0}\left(\omega_x\hat{\sigma}_x + \omega_y\hat{\sigma}_y + \omega_z\hat{\sigma}_z\right)\mathrm{sen}\left(\frac{\omega_0 t}{2}\right)]\mid +\rangle \\ &= [\cos\left(\frac{\omega_0 t}{2}\right) + \frac{i\omega_z}{\omega_0}\mathrm{sen}\left(\frac{\omega_0 t}{2}\right)]\mid +\rangle + \frac{i(\omega_x + i\omega_y)}{\omega_0}\mathrm{sen}\left(\frac{\omega_0 t}{2}\right)]\mid -\rangle\end{aligned}$$

Se pide calcular la probabilidad

$$\begin{aligned}
P_{+,+}(t) &= \mid \langle + \mid \Psi(t) \rangle \mid^2 \\
&= \left[\cos\left(\frac{\omega_0 t}{2}\right)\right]^2 + \left[\frac{\omega_z}{\omega_0}\mathrm{sen}\left(\frac{\omega_0 t}{2}\right)\right]^2 \\
&= 1 - \frac{\omega_x^2 + \omega_y^2}{\omega_0^2}\left[\mathrm{sen}\left(\frac{\omega_0 t}{2}\right)\right]^2 \qquad (28)
\end{aligned}$$