**Universidad de los Andes - Dpto. de Física**
**Mecánica Cuántica I-2014/II**

**Solución Tarea 2**

1. *Sea un sistema con un espacio de Hilbert de dimensión 4. Una base ortonormal en este espacio viene dada por* $\{|0\rangle\ , |1\rangle\ , |2\rangle\ , |3\rangle\}$ *(a y b constantes complejas).*

(a) *Cuáles de los siguientes operadores son Hermíticos?*

(i) $\quad (|0\rangle\ \langle 1| + i|1\rangle\ \langle 0|)^{\dagger} = |1\rangle\ \langle 0| - i|0\rangle\ \langle 1| \neq |0\rangle\ \langle 1| + i|1\rangle\ \langle 0|$

$\Longrightarrow$ NO-HERMÍTICO.

(ii) $(|0\rangle\ \langle 0| + |1\rangle\ \langle 1| + |2\rangle\ \langle 3| + |3\rangle\ \langle 2|)^{\dagger} = |0\rangle\ \langle 0| + |1\rangle\ \langle 1| + |3\rangle\ \langle 2| + |2\rangle\ \langle 3|$

$\Longrightarrow$ HERMÍTICO.

(iii) $\quad (a|0\rangle + |1\rangle)^{\dagger}(a|0\rangle + |1\rangle) = (a^*\langle 0| + \langle 1|)(a|0\rangle + |1\rangle) = |a|^2 + 1 \in Reales$

$\Longrightarrow$ HERMÍTICO.

(iv) $(a|0\rangle + b^*|1\rangle)^{\dagger}(b|0\rangle - a^*|1\rangle) = (a^*\langle 0| + b\langle 1|)(b|0\rangle\ - a^*|1\rangle\ ) = a^*b - ba^* = 0$
$\Longrightarrow (a|0\rangle + b^*|1\rangle)^{\dagger}(b|0\rangle - a^*|1\rangle)|2\rangle\langle 1| + |3\rangle\langle 3| = |3\rangle\langle 3|$

$\Longrightarrow$ HERMÍTICO.

(v) $(|0\rangle\langle 0| + i|1\rangle\langle 0| - i|0\rangle\langle 1| + |1\rangle\langle 1|)^{\dagger} = |0\rangle\langle 0| - i|0\rangle\langle 1| + i|1\rangle\langle 0| + |1\rangle\langle 1|$

$\Longrightarrow$ HERMÍTICO.

(b) *Encuentre la descomposición espectral del siguiente operador:*

$$\mathbf{M} = |0\rangle\ \langle 0| + 2|1\rangle\ \langle 2| + 2|2\rangle\ \langle 1| - |3\rangle\ \langle 3| \tag{1}$$

*Descomposición espectral de un operador significa expresar ese operador como una suma de operadores de proyección sobre cada uno de sus vectores propios.*

Los vectores propios *normalizados* de $\mathbf{M}$ son:

$|\lambda_0\rangle = |0\rangle$.
$|\lambda_1\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|1\rangle + |2\rangle)$.
$|\lambda_2\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|1\rangle - |2\rangle)$.
$|\lambda_3\rangle = |3\rangle$.

con valores propios $\lambda_0 = 1$, $\lambda_1 = 2$, $\lambda_2 = -2$ y $\lambda_3 = -1$. De lo anterior se obtiene la descomposición espectral $\mathbf{M} = \sum_{i=0}^{3} \lambda_i |\lambda_i\rangle\langle\lambda_i|$.

(c) *Sea* $|\Psi\rangle$ *un vector de estado normalizado y* $\mathbf{1}$ *el operador identidad. Es el operador:*

$$\mathbf{Q} = \frac{1}{\sqrt{2}}(\mathbf{1} + |\Psi\rangle\ \langle\Psi|) \tag{2}$$

*un operador proyección?.*

$\mathbf{Q}^2 = \frac{1}{2}(\mathbf{1} + 3|\Psi\rangle\langle\Psi|) \neq \mathbf{Q}$

$\Longrightarrow$ $\mathbf{Q}$ NO ES UN OPERADOR DE PROYECCIÓN.

(d) *Encuentre la descomposición espectral del operador* $\mathbf{Q}$*.*

$|\Psi\rangle$ es vector propio de $\mathbf{Q}$ con valor propio $\sqrt{2}$. Los otros tres vectores propios, que deben ser ortogonales a $|\Psi\rangle$, se encuentran en un sub-espacio de degeneramiento 3 con valor propio de $\mathbf{Q}$ compartido e igual a $\frac{1}{\sqrt{2}}$. Por lo tanto la descomposición espectral es $\mathbf{Q} = \sqrt{2}|\Psi\rangle\langle\Psi| + \frac{1}{\sqrt{2}}(\mathbf{1} - |\Psi\rangle\langle\Psi|)$. Además, $(\mathbf{1} - |\Psi\rangle\langle\Psi|)$ puede descomponerse como la suma de tres operadores de proyección que correspondan a los tres vectores propios de $\mathbf{Q}$ ortogonales a $|\Psi\rangle$ y mutuamente ortogonales entre sí y que comparten todos ellos el valor propio $\frac{1}{\sqrt{2}}$. Existe, por supuesto, libertad para escogerlos dado que sólo existe la restricción de que sean ortogonales a $|\Psi\rangle$.

2. *Considere un sistema físico descrito en un espacio de Hilbert de 2 dimensiones con una base ortonormal dada por los vectores* $\{|1\rangle, |2\rangle\}$*. En esta base el Hamiltoniano* $\hat{H}$ *está dado por*

$$\hat{H} = \frac{\hbar\omega_0}{3}\begin{pmatrix} 5 & i\sqrt{2} \\ -i\sqrt{2} & 4 \end{pmatrix} \tag{3}$$

*donde* $\omega_0$ *es constante real positiva. El sistema se encuentra descrito al instante* $t = 0$ *por*

$$|\Psi(0)\rangle = \sqrt{\frac{2}{5}}|1\rangle + \sqrt{\frac{3}{5}}|2\rangle \tag{4}$$

(a) *A* $t = 0$ *se mide la energía. Cuáles valores se pueden encontrar?. Con cuáles probabilidades cada uno de ellos?. Cuál es el valor medio de la energía en ese momento?.*

Los valores de energía que se pueden encontrar a cualquier tiempo son los valores propios del Hamiltoniano. Estos salen de la condición

$$\frac{\hbar\omega_0}{3}\begin{vmatrix} 5-\lambda & i\sqrt{2} \\ -i\sqrt{2} & 4-\lambda \end{vmatrix} = 0 \quad \Longrightarrow \lambda_1 = 6 \quad , \quad \lambda_2 = 3 \tag{5}$$

Por lo tanto los valores propios del Hamiltoniano son $E_1 = 2\hbar\omega_0$ y $E_2 = \hbar\omega_0$. Para calcular las probabilidades de ocurrencia de cada uno de estos posibles resultados hace falta encontrar el vector propio de $\hat{H}$ correspondiente, que ya normalizados son

$$\begin{aligned} |E_1\rangle &= \sqrt{\frac{2}{3}}(|1\rangle - \frac{i}{\sqrt{2}}|2\rangle) \\ |E_2\rangle &= \sqrt{\frac{1}{3}}(|1\rangle + i\sqrt{2}|2\rangle) \end{aligned} \tag{6}$$

Las probabilidades son

$$\begin{aligned} \mathcal{P}(E_1) &= |\langle E_1|\Psi(0)|^2 = \frac{7}{15} \\ \mathcal{P}(E_2) &= |\langle E_2|\Psi(0)|^2 = \frac{8}{15} \end{aligned} \tag{7}$$

Como tiene que ser $\mathcal{P}(E_1) + \mathcal{P}(E_2) = 1$. El valor medio de la energía a $t = 0$ es

$$\langle E\rangle = E_1\mathcal{P}(E_1) + E_2\mathcal{P}(E_2) = 2\hbar\omega_0\frac{7}{15} + \hbar\omega_0\frac{8}{15} = \frac{22}{15}\hbar\omega_0 \tag{8}$$

que como se espera deber estar entre $\hbar\omega_0$ y $2\hbar\omega_0$. Este mismo resultado se puede obtener también de esta otra forma

$$\langle E\rangle = \langle\Psi(0)|\hat{H}|\Psi(0)\rangle = \frac{\hbar\omega_0}{15}(\sqrt{2},\sqrt{3})\begin{pmatrix} 5 & i\sqrt{2} \\ -i\sqrt{2} & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \sqrt{2} \\ \sqrt{3} \end{pmatrix} = \frac{22}{15}\hbar\omega_0 \tag{9}$$

(b) *Determine $|\Psi(t)\rangle$, el estado del sistema a cualquier instante $t > 0$, y el valor medio de la energía del sistema como función del tiempo.*

De las Ecs.(6) se pueden obtener los kets $|1\rangle$ y $|2\rangle$ en términos de $|E_1\rangle$ y $|E_2\rangle$

$$\begin{aligned} |1\rangle &= \frac{1}{\sqrt{3}}(\sqrt{2}|E_1\rangle + |E_2\rangle) \\ |2\rangle &= \frac{i}{\sqrt{3}}(|E_1\rangle - \sqrt{2}|E_2\rangle) \end{aligned} \tag{10}$$

El estado inicial, Ec.(4), puede entonces ser escrito también como

$$|\Psi(0)\rangle = \frac{1}{\sqrt{15}}(2 + i\sqrt{3})|E_1\rangle + \sqrt{\frac{2}{15}}(1 - i\sqrt{3})|E_2\rangle \tag{11}$$

Por lo tanto el estado al instante $t$ es

$$|\Psi(t)\rangle = \frac{1}{\sqrt{15}}(2+i\sqrt{3})e^{-i2\omega_0 t}|E_1\rangle + \sqrt{\frac{2}{15}}(1-i\sqrt{3})e^{-i\omega_0 t}|E_2\rangle \tag{12}$$

De regreso a la base $\{|1\rangle, |2\rangle\}$ se obtiene

$$|\Psi(t)\rangle = \sqrt{\frac{2}{15}}((2+i\sqrt{3})e^{-i\omega_0 t} + 1 - i\sqrt{3})|1\rangle + \frac{i}{3\sqrt{5}}(-(2+i\sqrt{3})e^{-i\omega_0 t} + 2 - 2i\sqrt{3})|2\rangle \tag{13}$$

El valor medio de la energía a un tiempo $t$ es idéntico al valor inicial, $\langle E(t)\rangle = \langle E(0)\rangle = \frac{22}{15}\hbar\omega_0$. Este resultado se puede fácilmente verificar ya sea calculando directamente $\langle E(t)\rangle = \langle\Psi(t)|\hat{H}|\Psi(t)\rangle$ o notando simplemente que como $\hat{H}$ no depende explícitamente del tiempo

$$\frac{d\langle\hat{H}\rangle}{dt} = -\frac{i}{\hbar}\langle[\hat{H},\hat{H}]\rangle + \frac{\partial\langle\hat{H}\rangle}{\partial t} = 0 \tag{14}$$

lo que implica que $\langle\hat{H}\rangle$ no cambia en el tiempo.

3. *Se tiene un sistema cuántico cuyo espacio de Hilbert es de dimensión 2. Sea $\mathcal{B} = \{|+\rangle, |-\rangle\}$ una base ortonormal en ese espacio de estados. Suponga que este sistema evoluciona de acuerdo al Hamiltoniano $\hat{H} = \hbar\epsilon_x\hat{A}_x + \hbar\epsilon_z\hat{A}_z$, donde $\hat{A}_x$ y $\hat{A}_z$ son operadores hermíticos, mientras que $\epsilon_x$ y $\epsilon_z$ son constantes reales. En la base $\mathcal{B}$ se tiene la siguiente representación matricial para los operadores $\hat{A}_x$ y $\hat{A}_z$:*

$$\hat{A}_x = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad , \quad \hat{A}_z = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \tag{15}$$

(a) *Calcule los valores y vectores propios (normalizados) de $\hat{H}$.*

Si definimos $\omega = \sqrt{\epsilon_x^2 + \epsilon_z^2}$, los valores propios y estados estacionarios de $\hat{H}$ se pueden expresar como:

$$\begin{aligned} E_1 &= \hbar\omega \quad \Longrightarrow | 1\rangle = \frac{1}{\sqrt{2\omega(\omega-\epsilon_z)}}\left(\epsilon_x \mid +\rangle + (\omega-\epsilon_z) \mid -\rangle\right) \\ E_2 &= -\hbar\omega \quad \Longrightarrow | 2\rangle = \frac{1}{\sqrt{2\omega(\omega+\epsilon_z)}}\left(\epsilon_x \mid +\rangle - (\omega+\epsilon_z) \mid -\rangle\right) \end{aligned} \tag{16}$$

*Si a $t = 0$ el sistema se encuentra preparado en el estado $|\psi(0)\rangle = |+\rangle$, determine para cualquier instante posterior $t > 0$:*

(b) *La representación del estado del sistema* $|\psi(t)\rangle$ *en la base* $\mathcal{B}$.

La evolución a partir de $|\psi(0)\rangle = |+\rangle$ es

$$\begin{aligned}
|\psi(t)\rangle &= e^{-\frac{i}{\hbar}\hat{H}t}|\psi(0)\rangle \\
&= e^{-\frac{i}{\hbar}\hat{H}t}\left(|1\rangle\langle 1| + |2\rangle\langle 2|\right)|+\rangle \\
&= \frac{\epsilon_x}{\sqrt{2\omega}}\left(\frac{e^{-i\omega t}}{\sqrt{\omega-\epsilon_z}}|1\rangle + \frac{e^{i\omega t}}{\sqrt{\omega+\epsilon_z}}|2\rangle\right) \\
&= \left[\cos(\omega t) - i\frac{\epsilon_z}{\omega}\mathrm{sen}(\omega t)\right]|+\rangle - i\frac{\epsilon_x}{\omega}\mathrm{sen}(\omega t)|-\rangle
\end{aligned}$$

(c) *Las probabilidades de encontrar al sistema en cada uno de los estados de la base* $\mathcal{B}$.

$$\begin{aligned}
\mathcal{P}_+(t) &= \left|\cos(\omega t) - i\frac{\epsilon_z}{\omega}\mathrm{sen}(\omega t)\right|^2 = \cos^2(\omega t) + \frac{\epsilon_z^2}{\omega^2}\mathrm{sen}^2(\omega t) \\
\mathcal{P}_-(t) &= \left|-i\frac{\epsilon_x}{\omega}\mathrm{sen}(\omega t)\right|^2 = \frac{\epsilon_x^2}{\omega^2}\mathrm{sen}^2(\omega t)
\end{aligned} \tag{17}$$

Se verifica que $\mathcal{P}_+(t) + \mathcal{P}_-(t) = 1$.

(d) *El producto de las incertidumbres al medir cada uno de los observables descritos por* $\hat{A}_x$ *y* $\hat{A}_z$.

Notar primero que como $\hat{A}_x^2 = \hat{A}_z^2 = \hat{1}$, entonces $\langle\hat{A}_x^2(t)\rangle = \langle\hat{A}_z^2(t)\rangle = 1$, cualquiera que sea el estado en el cual se toma el valor medio. Se tiene entonces para cada una de las incertidumbres en el estado $|\psi(t)\rangle$:

$$\begin{aligned}
\langle\hat{A}_x(t)\rangle &= \frac{2\epsilon_x\epsilon_z}{\omega^2}\mathrm{sen}^2(\omega t) \quad\Longrightarrow\quad \Delta A_x(t) = \sqrt{1 - \frac{4\epsilon_x^2\epsilon_z^2}{\omega^4}\mathrm{sen}^4(\omega t)} \\
\langle\hat{A}_z(t)\rangle &= \left(1 - 2\frac{\epsilon_x^2}{\omega^2}\mathrm{sen}^2(\omega t)\right) \quad\Longrightarrow\quad \Delta A_z(t) = \sqrt{1 - \left(1 - 2\frac{\epsilon_x^2}{\omega^2}\mathrm{sen}^2(\omega t)\right)^2}
\end{aligned} \tag{18}$$

Por lo tanto

$$(\Delta A_x(t))(\Delta A_z(t)) = 2\frac{\epsilon_x}{\omega}\left|\mathrm{sen}(\omega t)\right|\sqrt{\left[1 - \frac{4\epsilon_x^2\epsilon_z^2}{\omega^4}\mathrm{sen}^4(\omega t)\right]\left[1 - \frac{\epsilon_x^2}{\omega^2}\mathrm{sen}^2(\omega t)\right]} \tag{19}$$

4. *Cohen-Tannoudji et al., HII-8.*

(a) Calcular primero el conmutador sugerido

$$[\hat{X}, \hat{H}] = \frac{1}{2m}[\hat{X}, \hat{P}^2] + [\hat{X}, \hat{V}(x)] = \frac{1}{2m}[\hat{X}, \hat{P}^2] = \frac{i\hbar}{m}\hat{P} \tag{20}$$

También se debe tener que

$$\begin{aligned} \langle\phi_n|[\hat{X}, \hat{H}]|\phi_{n'}\rangle = \langle\phi_n|\hat{X}\hat{H} - \hat{H}\hat{X}|\phi_{n'}\rangle &= \langle\phi_n|\hat{X}\hat{H}|\phi_{n'}\rangle - \langle\phi_n|\hat{H}\hat{X}|\phi_{n'}\rangle \\ &= (E_{n'} - E_n)\langle\phi_n|\hat{X}|\phi_{n'}\rangle \end{aligned} \tag{21}$$

Por lo tanto, tomando el elemento matricial en la Ec.(20) se obtiene

$$\langle\phi_n|\hat{P}|\phi_{n'}\rangle = -\frac{im}{\hbar}(E_{n'} - E_n)\langle\phi_n|\hat{X}|\phi_{n'}\rangle \tag{22}$$

(b) Considere el elemento matricial

$$\langle\phi_n|[\hat{X}, \hat{H}]^2|\phi_n\rangle = (\frac{i\hbar}{m})^2\langle\phi_n|\hat{P}^2|\phi_n\rangle = -\frac{\hbar^2}{m^2}\langle\phi_n|\hat{P}^2|\phi_n\rangle \tag{23}$$

Por otro lado, si se inserta apropiadamente la relación de completez de la base $\{|\phi_n\rangle\}$, también se tiene

$$\begin{aligned} \langle\phi_n|[\hat{X}, \hat{H}]^2|\phi_n\rangle &= \sum_{n'}\langle\phi_n|[\hat{X}, \hat{H}]|\phi_{n'}\rangle\langle\phi_{n'}|[\hat{X}, \hat{H}]|\phi_n\rangle \\ &= \sum_{n'}(E_{n'} - E_n)\langle\phi_n|\hat{X}|\phi_{n'}\rangle(E_n - E_{n'})\langle\phi_{n'}|\hat{X}|\phi_n\rangle \\ &= -\sum_{n'}(E_{n'} - E_n)^2|\langle\phi_n|\hat{X}|\phi_{n'}\rangle|^2 \end{aligned} \tag{24}$$

Uniendo las Ecs.(23)-(24) se llega finalmente a

$$\sum_{n'}(E_{n'} - E_n)^2|\langle\phi_n|\hat{X}|\phi_{n'}\rangle|^2 = \frac{\hbar^2}{m^2}\langle\phi_n|\hat{P}^2|\phi_n\rangle \tag{25}$$

5. *Cohen-Tannoudji et al., HII-9.*

(a) Como $\hat{H}|\phi_n\rangle = E_n|\phi_n\rangle$ entonces

$$\begin{aligned} \langle\phi_n|[\hat{A}, \hat{H}]|\phi_n\rangle &= \langle\phi_n|\hat{A}\hat{H} - \hat{H}\hat{A}|\phi_n\rangle \\ &= \langle\phi_n|\hat{A}\hat{H}|\phi_n\rangle - \langle\phi_n|\hat{H}\hat{A}|\phi_n\rangle \\ &= E_n\langle\phi_n|\hat{A}|\phi_n\rangle - E_n\langle\phi_n|\hat{A}|\phi_n\rangle \\ &= 0 \end{aligned} \tag{26}$$

(b) Sea

$$\hat{H}] = \frac{1}{2m}\hat{P}^2 + V(\hat{X}) \tag{27}$$

($\alpha$) Los conmutadores que se piden son:

$$\begin{aligned}
[\hat{H},\hat{P}] &= [\frac{1}{2m}\hat{P}^2 + V(\hat{X}),\hat{P}] \\
&= [V(\hat{X}),\hat{P}] \\
&= i\hbar\frac{\partial V(\hat{X})}{\partial x}
\end{aligned} \tag{28}$$

$$\begin{aligned}
[\hat{H},\hat{X}] &= [\frac{1}{2m}\hat{P}^2 + V(\hat{X}),\hat{X}] \\
&= \frac{1}{2m}[\hat{P}^2,\hat{X}] \\
&= -\frac{i\hbar}{m}\hat{P}
\end{aligned} \tag{29}$$

$$\begin{aligned}
[\hat{H},\hat{X}\hat{P}] &= [\frac{1}{2m}\hat{P}^2 + V(\hat{X}),\hat{X}\hat{P}] \\
&= \frac{1}{2m}[\hat{P}^2,\hat{X}\hat{P}] + [V(\hat{X}),\hat{X}\hat{P}] \\
&= \frac{1}{2m}(-2i\hbar\hat{P}^2) + i\hbar\hat{X}\frac{\partial V(\hat{X})}{\partial x} \\
&= -i\hbar\left(\frac{\hat{P}^2}{m} - \hat{X}\frac{\partial V(\hat{X})}{\partial x}\right)
\end{aligned} \tag{30}$$

($\beta$) Con los resultados establecidos en las Ecs.(26) y (29) se demuestra que

$$\begin{aligned}
\langle\phi_n|\hat{P}|\phi_n\rangle &= \frac{im}{\hbar}\langle\phi_n|[\hat{H},\hat{X}]|\phi_n\rangle \\
&= 0
\end{aligned} \tag{31}$$

($\gamma$) De acuerdo a las Ecs.(26) y (30)

$$\begin{aligned}
\langle\phi_n|[\hat{H},\hat{X}\hat{P}]|\phi_n\rangle &= 0 \\
&= -2i\hbar\langle\phi_n|\left(\frac{\hat{P}^2}{2m} - \frac{1}{2}\hat{X}\frac{\partial V(\hat{X})}{\partial x}\right)|\phi_n\rangle
\end{aligned} \tag{32}$$

Por lo tanto

$$\langle\phi_n|\frac{\hat{P}^2}{2m}|\phi_n\rangle = \frac{1}{2}\langle\phi_n|\hat{X}\frac{\partial V(\hat{X})}{\partial x}|\phi_n\rangle \tag{33}$$

Si $V(\hat{X}) = V_0\hat{X}^k$ la Ec.(33) lleva a

$$\langle\phi_n|\frac{\hat{P}^2}{2m}|\phi_n\rangle = \frac{k}{2}\langle\phi_n|V(\hat{X})|\phi_n\rangle \tag{34}$$