Universidad de los Andes-Dpto. de Física
Mecánica Cuántica I-2014/II

Tarea 7

1. Cohen-Tannoudji et al., Complemento MV, ejercicio 1.

2. Cohen-Tannoudji et al., Complemento MV, ejercicio 2.

3. Cohen-Tannoudji et al., Complemento MV, ejercicio 3.

4. **Estados tipo "gato de Schrödinger".-** Considere un oscilador armónico uni-dimensional, de masa m y frecuencia natural ω. El Hamiltoniano es

$$H = \frac{P^2}{2m} + \frac{1}{2}m\omega^2 x^2 \tag{1}$$

Los estados propios de H los marcamos como $|n\rangle$ con energías $E_n = \hbar\omega(n+1/2)$. Trabajaremos con los operadores escalera $\hat{a}$ y $\hat{a}^\dagger$. Los estados propios del operador $\hat{a}$ se denominan *estados cuasi-clásicos* o *estados coherentes*, por razones que reforzaremos a continuación.

(a) Considere un número complejo arbitrario α. Demuestre que el estado

$$|\alpha\rangle = e^{-|\alpha|^2/2} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\alpha^n}{\sqrt{n!}} |n\rangle \tag{2}$$

es un estado normalizado del operador destrucción $\hat{a}$ con valor propio α, es decir $\hat{a}|\alpha\rangle = \alpha|\alpha\rangle$.
(b) Calcule el valor esperado de la energía en el estado coherente $|\alpha\rangle$.
(c) Demuestre que en un estado coherente se tiene siempre la igualdad mínima de incertidumbres de Heisenberg $\Delta x \Delta p = \hbar/2$.
(d) Suponga que al instante $t = 0$, el oscilador está en el estado coherente $|\alpha_0\rangle$ con $\alpha_0 = \rho e^{i\phi}$ donde ρ es un número real positivo. Demuestre que en cualquier instante posterior t el oscilador se encontrará en un estado que se podrá escribir como $|\Psi(t)\rangle = e^{-i\omega t}|\alpha(t)\rangle$. Determine el valor de $\alpha(t)$ en términos de ρ, ϕ, ω y t.
(e) Como continuación del literal anterior, calcule $\langle x(t)\rangle$ y $\langle p(t)\rangle$. Tome el límite $|\alpha| >> 1$ y justifique por qué estos estados son llamados *estados cuasi-clásicos.*

Durante el intervalo de tiempo $[0, T]$ se añade al oscilador armónico un acoplamiento adicional dado por

$$\hat{W} = \hbar g(\hat{a}^\dagger \hat{a})^2 \tag{3}$$

Suponga que g es mucho más grande que ω y también $\omega T << 1$. Por lo tanto, se puede hacer la aproximación que, durante $[0, T]$, el Hamiltoniano del sistema es simplemente $\hat{W}$. Al instante $t = 0$, el sistema está en el estado coherente $|\Psi(0)\rangle = |\alpha\rangle$.
(f) Demuestre que los estados $|n\rangle$ son también estados propios de $\hat{W}$, y escriba la expansión del estado $|\Psi(t)\rangle$ al instante T en la base $\{|n\rangle\}$.
(g) En qué se convierte $|\Psi(t)\rangle$ en los casos particulares $T = 2\pi/g$ y $T = \pi/g$?.
(h) Haga ahora $T = \pi/(2g)$. Demuestre que

$$|\Psi(t)\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(e^{-i\pi/4}|\alpha\rangle + e^{i\pi/4}|-\alpha\rangle) \tag{4}$$

Discuta el significado de este estado de superposición de dos estados cuánticos macroscópicos diferentes cuando $|\alpha| \gg 1$. Estos estados son denominados *estados Gato de Schrödinger*.