Universidad de los Andes-Dpto. de Física
Mecánica Cuántica I - 2014/II

Tarea 2

1. Sea un sistema con un espacio de Hilbert de dimensión 4. Una base ortonormal en este espacio viene dada por $\{\mid 0\rangle\ ,\mid 1\rangle\ ,\mid 2\rangle\ ,\mid 3\rangle\}$ (a y b constantes complejas).

   (a) Cuáles de los siguientes operadores son Hermíticos?
   (i) $\mid 0\rangle\ \langle 1\mid +i\mid 1\rangle\ \langle 0\mid$.
   (ii) $\mid 0\rangle\ \langle 0\mid + \mid 1\rangle\ \langle 1\mid + \mid 2\rangle\ \langle 3\mid + \mid 3\rangle\ \langle 2\mid$.
   (iii) $(a\mid 0\rangle\ + \mid 1\rangle\ )^{\dagger}(a\mid 0\rangle\ + \mid 1\rangle\ )$.
   (iv) $(a\mid 0\rangle\ + b^{*}\mid 1\rangle\ )^{\dagger}(b\mid 0\rangle\ - a^{*}\mid 1\rangle\ )\mid 2\rangle\ \langle 1\mid + \mid 3\rangle\ \langle 3\mid$.
   (v) $\mid 0\rangle\ \langle 0\mid +i\mid 1\rangle\ \langle 0\mid -i\mid 0\rangle\ \langle 1\mid + \mid 1\rangle\ \langle 1\mid$.

   (b) Encuentre la descomposición espectral del siguiente operador:

   $$\mathbf{M} =\mid 0\rangle\ \langle 0\mid +2\mid 1\rangle\ \langle 2\mid +2\mid 2\rangle\ \langle 1\mid - \mid 3\rangle\ \langle 3\mid\ . \tag{1}$$

   Descomposición espectral de un operador significa expresar ese operador como una suma de operadores de proyección sobre cada uno de sus vectores propios.

   (c) Sea $\mid \Psi\rangle$ un vector de estado normalizado y $\mathbf{1}$ el operador identidad. Es el operador:

   $$\mathbf{Q} = \frac{1}{\sqrt{2}}(\mathbf{1}+ \mid \Psi\rangle\ \langle \Psi\mid) \tag{2}$$

   un operador proyección?.

   (d) Encuentre la descomposición espectral del operador $\mathbf{Q}$.

2. Considere un sistema físico descrito en un espacio de Hilbert de 2 dimensiones con una base ortonormal dada por los vectores $\{|1\rangle, |2\rangle\}$. En esta base el Hamiltoniano $\hat{H}$ está dado por

   $$\hat{H} = \frac{\hbar\omega_0}{3}\begin{pmatrix} 5 & i\sqrt{2} \\ -i\sqrt{2} & 4 \end{pmatrix} \tag{3}$$

   donde ω_0 es constante real positiva. El sistema se encuentra descrito al instante $t = 0$ por

   $$|\Psi(0)\rangle = \sqrt{\frac{2}{5}}|1\rangle + \sqrt{\frac{3}{5}}|2\rangle. \tag{4}$$

   (a) A $t = 0$ se mide la energía. Cuáles valores se pueden encontrar?. Con cuáles probabilidades cada uno de ellos?. Cuál es el valor medio de la energía en ese momento?.

   (b) Determine $|\Psi(t)\rangle$, el estado del sistema a cualquier instante $t > 0$, y el valor medio de la energía del sistema como función del tiempo.

3. Se tiene un sistema cuántico cuyo espacio de Hilbert es de dimensión 2. Sea $\mathcal{B} = \{|+\rangle, |-\rangle\}$ una base ortonormal en ese espacio de estados. Suponga que este sistema evoluciona de acuerdo al Hamiltoniano $\hat{H} = \hbar\epsilon_x \hat{A}_x + \hbar\epsilon_z \hat{A}_z$, donde $\hat{A}_x$ y $\hat{A}_z$ son operadores hermíticos, mientras que ϵ_x y ϵ_z son constantes reales. En la base $\mathcal{B}$ se tiene la siguiente representación matricial para los operadores $\hat{A}_x$ y $\hat{A}_z$:
$$\hat{A}_x = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad , \quad \hat{A}_z = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \tag{5}$$
(a) Calcule los valores y vectores propios (normalizados) de $\hat{H}$.
Si a $t = 0$ el sistema se encuentra preparado en el estado $|\psi(0)\rangle = |+\rangle$, determine para cualquier instante posterior $t > 0$:
(b) La representación del estado del sistema $|\psi(t)\rangle$ en la base $\mathcal{B}$.
(c) Las probabilidades de encontrar al sistema en cada uno de los estados de la base $\mathcal{B}$.
(d) El producto de las incertidumbres al medir cada uno de los observables descritos por $\hat{A}_x$ y $\hat{A}_z$.

4. Cohen-Tannoudji et al., HII-8.

5. Cohen-Tannoudji et al., HII-9.