Universidad de los Andes-Dpto. de Física
Mecánica Cuántica I-2014/II

Solución Tarea 7

1. *Cohen-Tannoudji et al., Complemento MV, ejercicio 1.*

Oscilador armónico en un estado inicial dado por

$$|\psi(0)\rangle = \sum_n c_n |n\rangle \tag{1}$$

donde

$$\hat{H}|n\rangle = \hbar\omega(n + \frac{1}{2})|n\rangle \tag{2}$$

(a) A $t > 0$ el estado del sistema es

$$|\psi(t)\rangle = \sum_n c_n e^{-i\omega t(n+\frac{1}{2})}|n\rangle \tag{3}$$

Para encontrar una energía superior a $2\hbar\omega$ el oscilador debe estar en estados estacionarios con $n \geq 2$. La probabilidad correspondiente a esta situación es

$$\mathcal{P}(n \geq 2) = \sum_{n=2}^{\infty} |\langle n|\psi(t)\rangle|^2 = \sum_{n=2}^{\infty} |c_n|^2 \tag{4}$$

Si $\mathcal{P}(n \geq 2) = 0$ los únicos estados poblados deben ser $n = 0$ y/o $n = 1$, es decir los coeficientes no-nulos deben ser c_0 y/o c_1.

(b) Si

$$|\psi(0)\rangle = c_0|0\rangle + c_1|1\rangle \tag{5}$$

la condición de normalización es

$$|c_0|^2 + |c_1|^2 = 1 \tag{6}$$

El valor medio de la energía es

$$\langle \hat{H} \rangle = \langle \psi(0)|\hat{H}|\psi(0)\rangle = \frac{\hbar\omega}{2}(|c_0|^2 + 3|c_1|^2) \tag{7}$$

Si se impone que $\langle \hat{H} \rangle = \hbar\omega$ y con la condición de normalización Ec.(6), se debe tener que

$$|c_0|^2 = \frac{1}{2} \quad , \quad |c_1|^2 = \frac{1}{2} \tag{8}$$

(c) Si

$$|\psi(0)\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|0\rangle + e^{i\theta_1}|1\rangle) \tag{9}$$

el valor medio de la posición es

$$\langle \hat{X} \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} dx \frac{1}{2}[\psi_0(x)^* + e^{-i\theta_1}\psi_1(x)^*]x[\psi_0(x) + e^{i\theta_1}\psi_1(x)] \tag{10}$$

donde $\psi_n(x) = \langle x|n\rangle$. Para evaluar la anterior integral hacer uso de la relación de recurrencia de los estados estacionarios del oscilador cuántico

$$\sqrt{2}\frac{x}{l_0}\psi_n(x) = \sqrt{n+1}\psi_{n+1}(x) + \sqrt{n}\psi_{n-1}(x) \tag{11}$$

con $l_0 = \sqrt{\hbar/m\omega}$ y la relación de ortonormalidad de las funciones estacionarias

$$\int_{-\infty}^{\infty} dx \psi_m(x)^* \psi_n(x) = \delta_{n,m} \tag{12}$$

Con las expresiones de la Ec.(11) y Ec.(12) en la Ec.(10) se obtiene

$$\langle \hat{X} \rangle = \frac{l_0}{\sqrt{2}} \cos\theta_1 \tag{13}$$

Si se iguala este último resultado a $\langle \hat{X} \rangle = l_0/2$ se obtiene $\theta_1 = \pi/4$.

(d) Al instante $t > 0$ el estado del sistema es

$$|\psi(t)\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} e^{-i\frac{\omega t}{2}}(|0\rangle + e^{i\frac{\pi}{4}}e^{-i\omega t}|1\rangle) = \frac{1}{\sqrt{2}}(|0\rangle + e^{i\theta_1(t)}|1\rangle) \tag{14}$$

con $\theta_1(t) = \frac{\pi}{4} - \omega t$. Por lo tanto

$$\langle \hat{X}(t) \rangle = \frac{l_0}{\sqrt{2}} \cos(\theta_1 - \omega t) = \frac{l_0}{\sqrt{2}} \cos(\frac{\pi}{4} - \omega t) \tag{15}$$

2. *Cohen-Tannoudji et al., Complemento MV, ejercicio 2.*

El Hamiltoniano de este oscilador armónico tri-dimensional anisotrópico es

$$\hat{H} = \hat{H}_x + \hat{H}_y + \hat{H}_z \tag{16}$$

donde

$$\begin{aligned}
\hat{H}_x &= \frac{\hat{P}_x^2}{2m} + \frac{1}{2}m\omega_x^2\hat{X}^2 \quad , \quad \omega_x^2 = \omega^2(1+\frac{2\lambda}{3}) \\
\hat{H}_y &= \frac{\hat{P}_y^2}{2m} + \frac{1}{2}m\omega_y^2\hat{Y}^2 \quad , \quad \omega_y^2 = \omega^2(1+\frac{2\lambda}{3}) \\
\hat{H}_z &= \frac{\hat{P}_z^2}{2m} + \frac{1}{2}m\omega_z^2\hat{Z}^2 \quad , \quad \omega_z^2 = \omega^2(1-\frac{4\lambda}{3})
\end{aligned} \tag{17}$$

(a) Dado que estos tres últimos Hamiltonianos conmutan todos ellos entre sí, el Hamiltoniano total en la Ec.(16) es separable: sus estados propios son el **producto** de los estados propios de los $\hat{H}_\nu, \nu = x, y, z$ y las energías propias de $\hat{H}$ son la **suma** de las energías propias de los $\hat{H}_\nu, \nu = x, y, z$. Como cada uno de los Hamiltonianos $\hat{H}_\nu$ corresponde al de un oscilador armónico uni-dimensional se tiene

$$\begin{aligned}
\hat{H}_x|n_x\rangle &= E_{n_x}|n_x\rangle \quad , \quad E_{n_x} = \hbar\omega_x(n_x+\frac{1}{2}) \quad , \quad n_x = 0,1,2,3... \\
\hat{H}_y|n_y\rangle &= E_{n_y}|n_y\rangle \quad , \quad E_{n_y} = \hbar\omega_y(n_y+\frac{1}{2}) \quad , \quad n_y = 0,1,2,3... \\
\hat{H}_z|n_z\rangle &= E_{n_z}|n_z\rangle \quad , \quad E_{n_z} = \hbar\omega_z(n_z+\frac{1}{2}) \quad , \quad n_z = 0,1,2,3... \qquad (18)
\end{aligned}$$

$$\tag{19}$$

donde la función de onda correspondiente a cada $|n_\nu\rangle$, es decir $\psi_{n_\nu}(x_\nu) = \langle x|n_\nu\rangle$, es bien conocida (ver texto o notas de clase). Por lo tanto si $\hat{H} \mid n_x, n_y, n_z\rangle = E_{n_x,n_y,n_z} \mid n_x, n_y, n_z\rangle$ se tiene

$$\begin{aligned}
|n_x, n_y, n_z\rangle &= |n_x\rangle \otimes |n_y\rangle \otimes |n_z\rangle \\
E_{n_x,n_y,n_z} &= \hbar\omega\sqrt{(1+\frac{2\lambda}{3})}(n_x+n_y+1) + \hbar\omega\sqrt{(1-\frac{4\lambda}{3})}(n_z+\frac{1}{2})
\end{aligned} \tag{20}$$

(b) El estado fundamental está caracterizado por los números cuánticos $n_x = 0, n_y = 0, n_z = 0$, con un ket $|0,0,0\rangle$, y con una energía

$$E_{0,0,0} = \hbar\omega\left[\sqrt{(1+\frac{2\lambda}{3})} + \frac{1}{2}\sqrt{(1-\frac{4\lambda}{3})}\right] \tag{21}$$

Si $\lambda = 0$ se tiene $E_{0,0,0} = 3\hbar\omega/2$ que no es otra cosa que la energía fundamental de un oscilador armónico isotrópico tri-dimensional. Si $\lambda = 3/4$ se tiene $E_{0,0} = \hbar\omega\sqrt{3/2}$ correspondiente a la energía fundamental de un oscilador armónico isotrópico bi-dimensional con frecuencia de confinamiento igual a $\omega\sqrt{3/2}$. Este estado es **no-degenerado** dado que sólo hay una combinación de n_x, n_y, n_z que corresponde a esa energía. Para determinar la paridad se debe examinar cómo cambia la función de onda $\psi_{0,0,0}(x,y,z)$ bajo la transformación de inversión $(x,y,z) \longrightarrow (-x,-y,-z)$. Como

$$\psi_{0,0,0}(x,y,z) = \psi_0(x)\psi_0(y)\psi_0(z) \tag{22}$$

y cada función $\psi_0(x_\nu)$ es una función par de su coordenada, la función de onda del estado fundamental, Ec.(22), es par.

Si $\lambda > 0$ al primer nivel excitado corresponde el estado caracterizado por los números cuánticos $|0,0,1\rangle$ dado que una excitación del oscilador en z siempre es menor en energía que excitaciones en x, y, ver Ec.(20). Por lo tanto, en este caso, el primer estado excitado es no-degenerado y no tiene una paridad bien definida, dado que la función de onda global $\psi_{0,0,1}(x,y,z) = \psi_0(x)\psi_0(y)\psi_1(z)$ no cambia de signo por cambios de signo en x, y pero si cambia de signo por un cambio de signo en z. Si $\lambda = 0$ se tiene un oscilador armónico isotrópico tri-dimensional a cuyo primer nivel excitado de energía corresponden tres estados caracterizados por los números cuánticos $|1,0,0\rangle$, $|0,1,0\rangle$ y $|0,0,1\rangle$, sin paridad bien definida. En este caso, el primer nivel de energía es degenerado 3 veces.

Si $\lambda = 0$ el segundo nivel excitado es 6 veces degenerado al cual corresponden los estados $|2,0,0\rangle$, $|0,2,0\rangle$, $|0,0,2\rangle$, $|1,1,0\rangle$, $|1,0,1\rangle$ y $|0,1,1\rangle$. Los tres primeros son estados pares mientras que los tres últimos no tienen paridad bien definida. Si $0 < \lambda < 1/2$ el segundo nivel excitado es doblemente degenerado asociado a los estados $|1,0,0\rangle$ y $|0,1,0\rangle$. Si $1/2 < \lambda < 3/4$ el segundo estado excitado es no-degenerado y corresponde al estado $|0,0,2\rangle$. Si $\lambda = 1/2$ los tres estados $|1,0,0\rangle$, $|0,1,0\rangle$ y $|0,0,2\rangle$ son degenerados.

3. *Cohen-Tannoudji et al., Complemento MV, ejercicio 3.*

   (a)

$$\hat{H} = \left[\frac{\hat{P}_1^2}{2m} + \frac{1}{2}m\omega^2\hat{X}_1^2\right] + \left[\frac{\hat{P}_2^2}{2m} + \frac{1}{2}m\omega^2\hat{X}_2^2\right] \tag{23}$$

   con energías posibles

$$\begin{aligned} E_{n_1,n_2} &= \hbar\omega(n_1 + \frac{1}{2}) + \hbar\omega(n_2 + \frac{1}{2}) = \hbar\omega(n_1 + n_2 + 1) \\ n_1 &= 0,1,2,3.... \quad , \quad n_2 = 0,1,2,3.... \end{aligned} \tag{24}$$

El estado fundamental corresponde a $\mid 0,0\rangle$ y es no-degenerado. Al primer nivel excitado (2 veces degenerado) están asociados los estados $|1,0\rangle$ y $|0,1\rangle$. En general, al nivel con energía $E_n = \hbar\omega(n+1)$ donde $n = n_1 + n_2$ le están asociados $g_n = n+1$ estados, es decir es $n+1$ veces degenerado. La función de onda correspondiente al estado general $|n_1, n_2\rangle$ viene dada por

$$\psi_{n_1,n_2}(x_1,x_2) = \langle x_1, x_2 \mid n_1, n_2\rangle = \langle x_1 \mid n_1\rangle\langle x_2 \mid n_2\rangle = A_{n_1}A_{n_2}e^{-\frac{x_1^2+x_2^2}{2l_0^2}}H_{n_1}(\frac{x_1}{l_0})H_{n_2}(\frac{x_2}{l_0}) \tag{25}$$

donde

$$\begin{aligned} A_{n_1} &= \frac{1}{\sqrt{\sqrt{\pi}2^{n_1}n_1!}}\frac{1}{\sqrt{l_0}} \\ A_{n_2} &= \frac{1}{\sqrt{\sqrt{\pi}2^{n_2}n_2!}}\frac{1}{\sqrt{l_0}} \\ l_0 &= \sqrt{\frac{\hbar}{m\omega}} \end{aligned} \tag{26}$$

(b) $\hat{H}$ por si sólo no forma un CCOC porque posee estados degenerados. Por el contrario el par de operadores $\{\hat{H}_1, \hat{H}_2\}$ si forma un CCOC porque cada estado puede ser perfectamente identificado con rótulos pertenecientes a estos dos operadores. La relación de ortonormalización de los estados propios de $\hat{H}$, $|n_1, n_2\rangle$, se escribe

$$\langle n_1', n_2'|n_1, n_2\rangle = \delta_{n_1,n_1'}\delta_{n_2,n_2'} \tag{27}$$

y la relación de completez es

$$\sum_{n_1=0}^{\infty}\sum_{n_2=0}^{\infty}|n_1,n_2\rangle\langle n_1,n_2| = \hat{1} \tag{28}$$

(c) Sea el estado (ya normalizado) del sistema

$$|\psi\rangle = \frac{1}{2}\left[|0,0\rangle + |1,0\rangle + |0,1\rangle + |1,1\rangle\right] \tag{29}$$

Al medir la energía total del sistema en este estado se pueden encontrar los siguientes resultados con las siguientes probabilidades

$$\begin{aligned} E_{0,0} &= \hbar\omega \quad , \quad \mathcal{P}_{0,0} = \frac{1}{4} \\ E_{0,1} &= 2\hbar\omega \quad , \quad \mathcal{P}_{0,1} = \frac{1}{4} \\ E_{1,0} &= 2\hbar\omega \quad , \quad \mathcal{P}_{1,0} = \frac{1}{4} \\ E_{1,1} &= 3\hbar\omega \quad , \quad \mathcal{P}_{1,1} = \frac{1}{4} \end{aligned} \tag{30}$$

es decir $\hbar\omega$ con probabilidad 1/4, $2\hbar\omega$ con probabilidad $1/4+1/4 = 1/2$ y $3\hbar\omega$ con probabilidad 1/4.

Al medir la energía de sólo la partícula 1 se pueden obtener los siguientes resultados y probabilidades

$$\begin{aligned} E_0 &= \frac{\hbar\omega}{2} \quad , \quad \mathcal{P}_0 = \frac{1}{2} \\ E_1 &= \frac{3\hbar\omega}{2} \quad , \quad \mathcal{P}_1 = \frac{1}{2} \end{aligned} \tag{31}$$

Al medir la posición de la partícula 1 se puede obtener cualquier valor real entre $-\infty$ y $+\infty$. Para calcular la probabilidad de encontrar cualquiera de estos resultados se pasa a la representación de posición

$$\begin{aligned} \psi(x_1, x_2) &= \langle x_1, x_2 | \psi \rangle = \frac{1}{2} \left[\psi_{0,0}(x_1, x_2) + \psi_{0,1}(x_1, x_2) + \psi_{1,0}(x_1, x_2) + \psi_{1,1}(x_1, x_2) \right] \\ &= \frac{1}{2} \left[\psi_0(x_1)\psi_0(x_2) + \psi_0(x_1)\psi_1(x_2) + \psi_1(x_1)\psi_0(x_2) + \psi_1(x_1)\psi_1(x_2) \right] \end{aligned} \tag{32}$$

Como sólo interesa la probabilidad de presencia de la partícula 1 sin importar donde se encuentre la partícula 2, se tiene finalmente usando la condición de ortonormalidad sobre las funciones de una partícula

$$\begin{aligned} \mathcal{P}(x_1) &= \int_{-\infty}^{\infty} dx_2 |\psi(x_1, x_2)|^2 = \frac{1}{2} \Big[|\psi_0(x_1)|^2 + |\psi_1(x_1)|^2 + 2\psi_0(x_1)\psi_1(x_1) \Big] \\ &= \frac{1}{2\sqrt{\pi} l_0} e^{-\frac{x_1^2}{l_0^2}} \left(1 + \frac{\sqrt{2} x_1}{l_0} \right)^2 \end{aligned} \tag{33}$$

En el caso de la velocidad o momentum lineal se procede de manera similar en representación p

$$\mathcal{P}(p_1) = \int_{-\infty}^{\infty} dp_2 |\psi(p_1, p_2)|^2 \tag{34}$$

donde $\psi(p_1, p_2)$ se obtiene de $\psi(x_1, x_2)$ por una transformada de Fourier en dos dimensiones.

4. **Estados tipo "gato de Schrödinger".-** *Considere un oscilador armónico uni-dimensional, de masa m y frecuencia natural ω. El Hamiltoniano es*

$$H = \frac{P^2}{2m} + \frac{1}{2} m \omega^2 x^2 \tag{35}$$

Los estados propios de H los marcamos como $|n\rangle$ con energías $E_n = \hbar\omega(n+1/2)$. Trabajaremos con los operadores escalera $\hat{a}$ y $\hat{a}^\dagger$. Los estados propios del operador $\hat{a}$ se denominan estados cuasi-clásicos o estados coherentes, por razones que reforzaremos a continuación.

(a) *Considere un número complejo arbitrario α. Demuestre que el estado*

$$|\alpha\rangle = e^{-|\alpha|^2/2} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\alpha^n}{\sqrt{n!}} |n\rangle \tag{36}$$

es un estado normalizado del operador destrucción $\hat{a}$ con valor propio α, es decir $\hat{a}|\alpha\rangle = \alpha|\alpha\rangle$.

Primero demostramos explícitamente que se trata de un estado propio del operador aniquilación de excitaciones:

$$\begin{aligned}
\hat{a}|\alpha\rangle &= e^{-\frac{|\alpha|^2}{2}} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\alpha^n}{\sqrt{n!}} \hat{a}|n\rangle \\
&= e^{-\frac{|\alpha|^2}{2}} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\alpha^n}{\sqrt{n!}} \sqrt{n}|n-1\rangle \\
&= \alpha e^{-\frac{|\alpha|^2}{2}} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\alpha^n}{\sqrt{n!}} |n\rangle \\
&= \alpha|\alpha\rangle
\end{aligned} \tag{37}$$

Ahora demostramos que está correctamente normalizado:

$$\begin{aligned}
\langle\alpha|\alpha\rangle &= e^{-|\alpha|^2} \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{\alpha^n}{\sqrt{n!}} \frac{\alpha^{*m}}{\sqrt{m!}} \langle m|n\rangle \\
&= e^{-|\alpha|^2} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{|\alpha|^{2n}}{n!} \\
&= e^{-|\alpha|^2} e^{|\alpha|^2} \\
&= 1
\end{aligned} \tag{38}$$

(b) *Calcule el valor esperado de la energía en el estado coherente $|\alpha\rangle$.*

$$\begin{aligned}
\langle \hat{H} \rangle &= \langle\alpha|\hat{H}|\alpha\rangle \\
&= \hbar\omega\langle\alpha|\, \hat{a}^\dagger\hat{a} + \frac{1}{2}|\alpha\,\rangle \\
&= \hbar\omega\left(|\alpha|^2 + \frac{1}{2}\right)
\end{aligned} \tag{39}$$

(c) *Demuestre que en un estado coherente se tiene siempre la igualdad mínima de incertidumbres de Heisenberg* $\Delta x \Delta p = \hbar/2$.

$$
\begin{aligned}
\langle \hat{X} \rangle &= \langle \alpha | \hat{X} | \alpha \rangle = \frac{l_0}{\sqrt{2}}(\alpha + \alpha^*) \\
\langle \hat{P} \rangle &= \langle \alpha | \hat{P} | \alpha \rangle = \frac{i\hbar}{l_0\sqrt{2}}(\alpha^* - \alpha) \\
\langle \hat{X}^2 \rangle &= \langle \alpha | \hat{X}^2 | \alpha \rangle = \frac{l_0^2}{2}[(\alpha + \alpha^*)^2 + 1] \\
\langle \hat{P}^2 \rangle &= \langle \alpha | \hat{P}^2 | \alpha \rangle = \frac{\hbar^2}{2l_0^2}[1 - (\alpha - \alpha^*)^2]
\end{aligned} \tag{40}
$$

donde $l_0 = \sqrt{\frac{\hbar}{m\omega}}$. Por lo tanto las incertidumbres en posición y momentum lineal son

$$
\begin{aligned}
\Delta x &= \sqrt{\langle \hat{X}^2 \rangle - \langle \hat{X} \rangle^2} = \frac{l_0}{\sqrt{2}} \\
\Delta p &= \sqrt{\langle \hat{P}^2 \rangle - \langle \hat{P} \rangle^2} = \frac{\hbar}{l_0\sqrt{2}}
\end{aligned} \tag{41}
$$

que son **independientes** del estado coherente $| \alpha \rangle$. El producto de incertidumbres es

$$
\Delta x \Delta p = \frac{\hbar}{2} \tag{42}
$$

que es el producto mínimo de incertidumbres compatible con Heisenberg.

(d) *Suponga que al instante* $t = 0$, *el oscilador está en el estado coherente* $|\alpha_0\rangle$ *con* $\alpha_0 = \rho e^{i\phi}$ *donde* ρ *es un número real positivo. Demuestre que en cualquier instante posterior* t *el oscilador se encontrará en un estado que se podrá escribir como* $|\Psi(t)\rangle = e^{-i\frac{\omega t}{2}}|\alpha(t)\rangle$. *Determine el valor de* $\alpha(t)$ *en términos de* ρ, ϕ, ω *y* t.

$$
\begin{aligned}
| \psi(t) \rangle &= e^{-\frac{i}{\hbar}\hat{H}t}|\alpha_0\rangle \\
&= e^{-\frac{|\alpha_0|^2}{2}} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\alpha_0^n}{\sqrt{n!}} e^{-\frac{i}{\hbar}E_n t}|n\rangle \\
&= e^{-\frac{|\alpha_0|^2}{2}} e^{-i\frac{\omega t}{2}} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\alpha_0^n}{\sqrt{n!}} e^{-in\omega t}|n\rangle \\
&= e^{-i\frac{\omega t}{2}}|\alpha(t)\rangle
\end{aligned} \tag{43}
$$

con $\alpha(t) = \alpha_0 e^{-i\omega t} = \rho e^{-i(\omega t - \phi)}$. El resultado en la Ec.(43) indica que un estado coherente bajo la evolución impuesta por el hamiltoniano de un oscilador armónico cuántico sigue siendo un estado coherente con parámetro α que cambia en el tiempo.

(e) *Como continuación del literal anterior, calcule $\langle x(t)\rangle$ y $\langle p(t)\rangle$. Tome el límite $|\alpha| >> 1$ y justifique por qué estos estados son llamados estados cuasi-clásicos.*

$$\begin{aligned} \langle X(t)\rangle &= l_0\sqrt{2}\rho\cos(\omega t - \phi) = x_0\cos(\omega t - \phi) \\ \langle P(t)\rangle &= -\frac{\hbar\sqrt{2}}{l_0}\rho\mathrm{sen}(\omega t - \phi) = -p_0\mathrm{sen}(\omega t - \phi) \end{aligned} \tag{44}$$

que no son otras que las ecuaciones de movimiento de un oscilador armónico clásico. Si $\mid \alpha_0 \mid >> 1$, o lo que es equivalente $\rho >> 1$, las incertidumbres relativas

$$\begin{aligned} \frac{\Delta x}{x_0} &= \frac{1}{2\rho} << 1 \\ \frac{\Delta p}{p_0} &= \frac{1}{2\rho} << 1 \end{aligned} \tag{45}$$

son insignificantes en todo momento, una de las justificaciones de la identificación de los estados coherentes como estados cuasi-clásicos.

Durante el intervalo de tiempo $[0, T]$ se añade al oscilador armónico un acoplamiento adicional dado por

$$\hat{W} = \hbar g(\hat{a}^\dagger\hat{a})^2 \tag{46}$$

Suponga que g es mucho más grande que ω y también $\omega T << 1$. Por lo tanto, se puede hacer la aproximación que, durante $[0, T]$, el Hamiltoniano del sistema es simplemente $\hat{W}$. Al instante $t = 0$, el sistema está en el estado coherente $|\Psi(0)\rangle = |\alpha\rangle$.

(f) *Demuestre que los estados $|n\rangle$ son también estados propios de $\hat{W}$, y escriba la expansión del estado $|\Psi(t)\rangle$ al instante T en la base $\{|n\rangle\}$.*

$$\hat{W} \mid n\rangle = \hbar g n^2 \mid n\rangle \tag{47}$$

lo que demuestra que los estados estacionarios del oscilador armónico simple $\mid n\rangle$ son también estados propios de $\hat{W}$ con valores propios $\hbar g n^2$. El estado del sistema al instante T se puede escribir como

$$| \psi(T)\rangle = e^{-\frac{|\alpha|^2}{2}} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\alpha^n}{\sqrt{n!}} e^{-ign^2T} \mid n\rangle \tag{48}$$

(g) *En qué se convierte* $|\Psi(t)\rangle$ *en los casos particulares* $T = 2\pi/g$ *y* $T = \pi/g$*?.*

Si $T = \frac{2\pi}{g}$

$$e^{-ign^2T} = e^{-i2\pi n^2} = 1 \quad \Longrightarrow | \psi(T)\rangle =| \alpha\rangle \tag{49}$$

Si $T = \frac{\pi}{g}$

$$e^{-ign^2T} = e^{-i\pi n^2} = (-1)^n \quad \Longrightarrow | \psi(T)\rangle =| -\alpha\rangle \tag{50}$$

(h) *Haga ahora* $T = \pi/(2g)$*. Demuestre que*

$$|\Psi(t)\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(e^{-i\pi/4}|\alpha\rangle + e^{i\pi/4}| - \alpha\rangle) \tag{51}$$

Discuta el significado de este estado de superposición de dos estados cuánticos macroscópicos diferentes cuando $|\alpha| \gg 1$*. Estos estados son denominados estados Gato de Schrödinger.*

Si $T = \frac{\pi}{2g}$ entonces $e^{-ign^2T} = 1$ si n es par mientras que $e^{-ign^2T} = -i$ si n es impar. El par de posibilidades anteriores se puede también escribir en una sola línea como

$$e^{-ign^2T} = \frac{1}{\sqrt{2}} \left[e^{-i\frac{\pi}{4}} + (-1)^n e^{i\frac{\pi}{4}}\right] \tag{52}$$

Al reemplazar el anterior resultado en la Ec.(48) se obtiene finalmente

$$|\psi(\frac{\pi}{2g})\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(e^{-i\pi/4}|\alpha\rangle + e^{i\pi/4}| - \alpha\rangle) \tag{53}$$

El oscilador armónico en el estado coherente $|\alpha\rangle$ está caracterizado por

$$\langle X\rangle = 0 \quad , \quad \langle P\rangle > 0 \tag{54}$$

Por otro lado, en el estado coherente $| - \alpha\rangle$ el oscilador armónico está caracterizado por

$$\langle X\rangle = 0 \quad , \quad \langle P\rangle < 0 \tag{55}$$

El estado de la Ec.(53) es una superposición cuántica de dos estados coherentes $|\alpha\rangle$ y $|-\alpha\rangle$. Por lo tanto, de las Ec.(54) y Ec.(55), se espera que en el estado de la Ec.(53) el oscilador tenga $\langle X\rangle = 0$ pero se encuentre moviendo **simultáneamente** con $\langle P\rangle > 0$ y $\langle P\rangle < 0$. Si $|\ \alpha| >> 1$, los estados $|\alpha\rangle$ y $|-\alpha\rangle$ son clásicamente muy diferentes, por lo tanto se tendría un efecto clásicamente imposible: un oscilador que tiene simultáneamente dos velocidades. El estado $|\psi(\frac{\pi}{2g})\rangle$ con $|\alpha| >> 1$ es un ejemplo de un estado Gato de Schrödinger.