Universidad de los Andes-Dpto. de Física
Mecánica Cuántica I - Semestre II/2014

Solución Parcial 2

1. **Nota=2/5** *Determine (con justificación) las dimensiones físicas de:*
(a) *Función de onda en representación de espacio real $\psi(\vec{r})$ de una partícula que se mueve en 3 dimensiones.*

Como la función de onda $\psi(\vec{r})$ al estar normalizada debe cumplir

$$\int dr^3 |\psi(\vec{r})|^2 = 1 \tag{1}$$

se tiene que $|\psi(\vec{r})|^2$ debe tener dimensiones de L^{-3}. Por lo tanto las dimensiones de $\psi(\vec{r})$ son $L^{-3/2}$.

(b) *Función de onda en representación de momentum lineal $\psi(\vec{p})$ de una partícula que se mueve en 3 dimensiones.*

Como la función de onda $\psi(\vec{p})$ al estar normalizada debe cumplir

$$\int dp^3 |\psi(\vec{p})|^2 = 1 \tag{2}$$

se tiene que $|\psi(\vec{p})|^2$ debe tener dimensiones de $\left(\frac{ML}{T}\right)^{-3}$. Por lo tanto las dimensiones de $\psi(\vec{p})$ son $\left(\frac{ML}{T}\right)^{-3/2}$.

(c) *Distribución delta de Dirac en dos dimensiones espaciales $\delta(\vec{r})$ donde $\vec{r} = x\hat{i} + y\hat{j}$.*

Se debe cumplir que

$$\int\int dx\, dy\, \delta(\vec{r}) = 1 \tag{3}$$

Por lo tanto las dimensiones de $\delta(\vec{r})$ deben ser L^{-2}.

Se tiene un sistema cuántico caracterizado por una masa m y una distancia a. Con combinaciones de estas dos últimas magnitudes y la constante de Planck $\hbar$ forme magnitudes físicas que tengan dimensiones de:

(d) Momentum lineal.

Como $p = \hbar\, k$ entonces $\hbar/a$ es una magnitud que tiene dimensiones de momentum lineal.

(e) *Frecuencia.*

Como $\sqrt{\frac{\hbar}{m\omega}}$, con ω una frecuencia, corresponde a una longitud, entonces $\frac{\hbar}{ma^2}$ es una magnitud física con dimensiones de frecuencia.

2. **Nota=1/5** *Se tiene un sistema cuántico descrito en un espacio de Hilbert de dimensión 3. Sus estados estacionarios (estados propios del Hamiltoniano) se notan como $|u\rangle, |v\rangle$ y $|q\rangle$ con valores correspondientes de energía $\hbar\omega, 0$ y $-\hbar\omega$, respectivamente. Se sabe que otro observable $\hat{Z}$ está definido por las siguientes acciones sobre la base de estados estacionarios:*

$$\hat{Z}|u\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}|v\rangle \quad , \quad \hat{Z}|v\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\left[|u\rangle - i|q\rangle\right] \quad , \quad \hat{Z}|q\rangle = \frac{i}{\sqrt{2}}|v\rangle \tag{4}$$

(a) *Escribir la matriz que representa a $\hat{Z}$ en la base de estados estacionarios (base ordenada en la forma $\{|u\rangle, |v\rangle, |q\rangle\}$), calcular los valores propios $\lambda_1 > \lambda_2 > \lambda_3$ de $\hat{Z}$, y los vectores propios correspondientes (normalizados!) que se van a notar como $|I\rangle, |II\rangle$ y $|III\rangle$, respectivamente.*

En la base $\{|u\rangle, |v\rangle, |q\rangle\}$, $\hat{Z}$ está representada por la matriz

$$\hat{Z} = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & i \\ 0 & -i & 0 \end{pmatrix} \tag{5}$$

Los valores propios de $\hat{Z}$ son $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = 0$ y $\lambda_3 = -1$. Los vectores propios correspondientes normalizados son

$$|I\rangle = \frac{1}{2}\left[|u\rangle + \sqrt{2}|v\rangle - i|q\rangle\right] = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 \\ \sqrt{2} \\ -i \end{pmatrix} \tag{6}$$

$$|II\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\left[|u\rangle + i|q\rangle\right] = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ i \end{pmatrix} \tag{7}$$

$$|III\rangle = \frac{1}{2}\left[|u\rangle - \sqrt{2}|v\rangle - i|q\rangle\right] = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 \\ -\sqrt{2} \\ -i \end{pmatrix} \tag{8}$$

(b) *Suponer que al instante $t = 0$ el estado del sistema es $|\Psi(0)\rangle = |I\rangle$. Si se mide el observable $\hat{Z}$ al instante $t > 0$, qué posibles resultados se van a obtener y con cuáles probabilidades.*

Primero calculamos el estado al instante $t > 0$. Al expresar $|\Psi(0)\rangle$ en la base de estados propios del Hamiltoniano, se obtiene inmediatamente

$$|\Psi(t)\rangle = \frac{1}{2}\left[e^{-i\omega t}|u\rangle + \sqrt{2}|v\rangle - ie^{i\omega t}|q\rangle\right] \tag{9}$$

Los posibles resultados no son otros que los valores propios de $\hat{Z}$, es decir $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = 0$ y $\lambda_3 = -1$ con probabilidades

$$\mathcal{P}(\lambda_1) = |\langle I|\Psi(t)\rangle\rangle|^2 = \frac{1}{16}|\left[\langle u| + \sqrt{2}\langle v| + i\langle q|\right]\left[e^{-i\omega t}|u\rangle + \sqrt{2}|v\rangle - ie^{i\omega t}|q\rangle\right]|^2 = \left(\frac{1+\cos(\omega t)}{2}\right)^2 \quad (10)$$

$$\mathcal{P}(\lambda_2) = |\langle II|\Psi(t)\rangle\rangle|^2 = \frac{1}{8}|\left[\langle u| - i\langle q|\right]\left[e^{-i\omega t}|u\rangle + \sqrt{2}|v\rangle - ie^{i\omega t}|q\rangle\right]|^2 = \frac{\mathrm{sen}^2(\omega t)}{2} \quad (11)$$

$$\mathcal{P}(\lambda_3) = |\langle III|\Psi(t)\rangle\rangle|^2 = \frac{1}{16}|\left[\langle u| - \sqrt{2}\langle v| + i\langle q|\right]\left[e^{-i\omega t}|u\rangle + \sqrt{2}|v\rangle - ie^{i\omega t}|q\rangle\right]|^2 = \left(\frac{1-\cos(\omega t)}{2}\right)^2 \quad (12)$$

Como debe ser $\mathcal{P}(\lambda_1) + \mathcal{P}(\lambda_2) + \mathcal{P}(\lambda_3) = 1$.

3. **Nota=2/5** *Una partícula de spin 1/2 (factor giromagnético γ) se prepara en el estado propio de $\hat{S}_z$ con valor propio positivo. Se la somete durante un tiempo τ a un campo magnético uniforme y constante de intensidad B_0 apuntando en la dirección x (defina $\omega = -\gamma B_0$). Escriba el Hamiltoniano para esta partícula sometida a ese campo magnético. Al cabo de un tiempo τ, se mide la componente de spin en la dirección y. Determine los valores que se pueden encontrar en esta última medición, la probabilidad de hallar cada uno de ellos, el valor medio $\langle \hat{S}_y(\tau)\rangle$ y la incertidumbre $\Delta S_y(\tau)$.*

El Hamiltoniano de interacción del spin de la partícula con el campo magnético en x viene dado por

$$\hat{H} = -\hat{\vec{M}} \cdot \vec{B} = -\gamma \hat{\vec{S}} \cdot \vec{B} = -\gamma B_0 \hat{S}_x = \frac{\hbar\omega}{2}\hat{\sigma}_x \quad (13)$$

donde $\hat{\sigma}_x$ es una de las matrices de Pauli. Para encontrar el estado de spin de la partícula al cabo de un tiempo τ se debe resolver la Ecuación de Schrödinger correspondiente al Hamiltoniano de la Ec.(13), cuya solución es

$$\begin{aligned}
|\psi(\tau)\rangle &= e^{-\frac{i}{\hbar}\hat{H}\tau}|+\rangle \\
&= e^{-i\frac{\omega\tau}{2}\hat{\sigma}_x}\left[|+_x\rangle\langle +_x| + |-_x\rangle\langle -_x|\right]|+\rangle \\
&= \frac{1}{\sqrt{2}}\left[e^{-i\frac{\omega\tau}{2}}|+_x\rangle + e^{i\frac{\omega\tau}{2}}|-_x\rangle\right] \\
&= \frac{1}{2}\left[e^{-i\frac{\omega\tau}{2}}(|+\rangle + |-\rangle) + e^{i\frac{\omega\tau}{2}}(|+\rangle - |-\rangle)\right] \\
&= \cos(\frac{\omega\tau}{2})|+\rangle - i\mathrm{sen}(\frac{\omega\tau}{2})|-\rangle \quad (14)
\end{aligned}$$

donde en la segunda línea de la ecuación anterior se ha insertado la relación de completez de la base de $\hat{S}_x$. También se ha hecho uso de las relaciones

$$\begin{aligned} |+_x\rangle &= \frac{1}{\sqrt{2}}\left(|+\rangle + |-\rangle\right) \\ |-_x\rangle &= \frac{1}{\sqrt{2}}\left(|+\rangle - |-\rangle\right) \end{aligned} \tag{15}$$

Estando la partícula en el estado de spin $|\ \psi(\tau)\rangle$ dado por la Ec.(14), se mide la componente de spin en la dirección y. Los posibles resultados de esta medición sólo pueden ser $+\hbar/2$ o $-\hbar/2$, con probabilidades dadas por

$$\begin{aligned} \mathcal{P}_y(+\frac{\hbar}{2}) &= |\langle +_y|\psi(\tau)\rangle|^2 = \frac{1}{2}|\cos(\frac{\omega\tau}{2}) - \mathrm{sen}(\frac{\omega\tau}{2})|^2 = \frac{1}{2}(1 - \mathrm{sen}(\omega\tau)) \\ \mathcal{P}_y(-\frac{\hbar}{2}) &= |\langle -_y|\psi(\tau)\rangle|^2 = \frac{1}{2}|\cos(\frac{\omega\tau}{2}) + \mathrm{sen}(\frac{\omega\tau}{2})|^2 = \frac{1}{2}(1 + \mathrm{sen}(\omega\tau)) \end{aligned} \tag{16}$$

donde se ha utilizado

$$\begin{aligned} |+_y\rangle &= \frac{1}{\sqrt{2}}\left(|+\rangle + i|-\rangle\right) \\ |-_y\rangle &= \frac{1}{\sqrt{2}}\left(|+\rangle - i|-\rangle\right) \end{aligned} \tag{17}$$

El valor medio de la medición de $\hat{S}_y$ es

$$\langle \hat{S}_y\rangle(\tau) = \langle\psi(\tau)|\hat{S}_y|\psi(\tau)\rangle = \frac{\hbar}{2}\mathcal{P}_y(+\frac{\hbar}{2}) - \frac{\hbar}{2}\mathcal{P}_y(-\frac{\hbar}{2}) = -\frac{\hbar}{2}\mathrm{sen}(\omega\tau) \tag{18}$$

Para obtener la incertidumbre, primero se calcula $\langle \hat{S}_y^2\rangle$. Esto lleva a:

$$\langle \hat{S}_y^2\rangle(\tau) = \langle\psi(\tau)|\hat{S}_y^2|\psi(\tau)\rangle = \left(\frac{\hbar}{2}\right)^2 \mathcal{P}_y(+\frac{\hbar}{2}) + \left(-\frac{\hbar}{2}\right)^2 \mathcal{P}_y(-\frac{\hbar}{2}) = \left(\frac{\hbar}{2}\right)^2 \tag{19}$$

Por lo tanto

$$\Delta S_y(\tau) = \sqrt{\left(\frac{\hbar}{2}\right)^2 - \left(-\frac{\hbar}{2}\mathrm{sen}(\omega\tau)\right)^2} = \frac{\hbar}{2}\,|\cos(\omega\tau)| \tag{20}$$