Universidad de los Andes-Dpto. de Física
Mecánica Cuántica I-2014/II

Solución Tarea 8

1. *Cohen-Tannoudji et al., Complemento FVI, ejercicio 1.*

Sistema con $j = 1$, en un estado

$$|\Psi\rangle = \alpha|+1\rangle + \beta|0\rangle + \gamma|-1\rangle \tag{1}$$

(a) Calculamos el valor medio de cada una de las componentes cartesianas del vector momentum angular:

$$\langle \hat{J}_x \rangle = \langle \Psi|\hat{J}_x|\Psi\rangle = \frac{\hbar}{\sqrt{2}}(\alpha^*, \beta^*, \gamma^*) \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{pmatrix} = \hbar\sqrt{2}\mathcal{R}\left\{(\alpha+\gamma)\beta^*\right\} \tag{2}$$

$$\langle \hat{J}_y \rangle = \langle \Psi|\hat{J}_y|\Psi\rangle = \frac{\hbar}{\sqrt{2}}(\alpha^*, \beta^*, \gamma^*) \begin{pmatrix} 0 & -i & 0 \\ i & 0 & -i \\ 0 & i & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{pmatrix} = \hbar\sqrt{2}\mathcal{I}\left\{(\gamma-\alpha)\beta^*\right\} \tag{3}$$

$$\langle \hat{J}_z \rangle = \langle \Psi|\hat{J}_z|\Psi\rangle = \hbar\,(\alpha^*, \beta^*, \gamma^*) \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{pmatrix} = \hbar\left[|\alpha|^2 - |\gamma|^2\right] \tag{4}$$

donde $\mathcal{R}$ y $\mathcal{I}$ representan parte real y parte imaginaria, respectivamente. Entonces

$$\langle \hat{\vec{J}} \rangle = \hbar\sqrt{2}\mathcal{R}\left\{(\alpha+\gamma)\beta^*\right\}\hat{x} + \hbar\sqrt{2}\mathcal{I}\left\{(\gamma-\alpha)\beta^*\right\}\hat{y} + \hbar\left[|\alpha|^2 - |\gamma|^2\right]\hat{z} \tag{5}$$

donde $\{\hat{x}, \hat{y}, \hat{z}\}$ representan vectores unitarios a lo largo de los ejes cartesianos, X, Y, Z.

(b) Similarmente

$$\langle \hat{J}_x^2 \rangle = \langle \Psi|\hat{J}_x^2|\Psi\rangle = \frac{\hbar^2}{2}(\alpha^*, \beta^*, \gamma^*) \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{pmatrix} = \frac{\hbar^2}{2}\left[|\alpha+\gamma|^2 + 2|\beta|^2\right] \tag{6}$$

$$\langle \hat{J}_y^2 \rangle = \langle \Psi|\hat{J}_y^2|\Psi\rangle = \frac{\hbar^2}{2}(\alpha^*, \beta^*, \gamma^*) \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{pmatrix} = \frac{\hbar^2}{2}\left[|\alpha-\gamma|^2 + 2|\beta|^2\right] \tag{7}$$

$$\langle \hat{J}_z^2 \rangle = \langle \Psi|\hat{J}_z^2|\Psi\rangle = \hbar^2\,(\alpha^*, \beta^*, \gamma^*) \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{pmatrix} = \hbar^2\left[|\alpha|^2 + |\gamma|^2\right] \tag{8}$$

2. *Cohen-Tannoudji et al., Complemento FVI, ejercicio 2.*

Sea la base standard aquella formada por vectores propios simultáneos de $\hat{J}^2$ y $\hat{J}_z$, que notaremos $\{|j,m\rangle\}$.

(a) Para encontrar los valores y vectores propios de $\hat{J}_x$ basta diagonalizar la matriz que representa a $\hat{J}_x$ en la base standard. Los valores propios siguen siendo $m_x\hbar$ con $m_x = 0$ si $j = 0$ y $m_x = 1, 0, -1$ si $j = 1$, con vectores propios normalizados correspondientes a

$$\begin{aligned} |0, m_x = 0\rangle &= |0,0\rangle \\ |1, m_x = 1\rangle &= \frac{1}{2}\left(|1,1\rangle + \sqrt{2}|1,0\rangle + |1,-1\rangle\right) \\ |1, m_x = 0\rangle &= \frac{1}{\sqrt{2}}\left(|1,1\rangle - |1,-1\rangle\right) \\ |1, m_x = -1\rangle &= \frac{1}{2}\left(|1,1\rangle - \sqrt{2}|1,0\rangle + |1,-1\rangle\right) \end{aligned} \tag{9}$$

(b) El sistema se encuentra en el estado normalizado

$$|\Psi\rangle = \alpha|1,1\rangle + \beta|1,0\rangle + \gamma|1,-1\rangle + \delta|0,0\rangle \tag{10}$$

Expresar antes que nada, cada uno de los vectores de la base standard en términos de la base $\{|j, m_x\rangle\}$, con $j = 0, 1$, invirtiendo las Ecs.(23). Se obtiene

$$\begin{aligned} |0,0\rangle &= |0, m_x = 0\rangle \\ |1,1\rangle &= \frac{1}{2}\left(|1, m_x = 1\rangle + \sqrt{2}|1, m_x = 0\rangle + |1, m_x = -1\rangle\right) \\ |1,0\rangle &= \frac{1}{\sqrt{2}}\left(|1, m_x = 1\rangle - |1, m_x = -1\rangle\right) \\ |1,-1\rangle &= \frac{1}{2}\left(|1, m_x = 1\rangle - \sqrt{2}|1, m_x = 0\rangle + |1, m_x = -1\rangle\right) \end{aligned} \tag{11}$$

Por lo tanto, el estado de la Ec.(25) se expresa en la base $\{|j, m_x\rangle\}$ como

$$\begin{aligned} |\Psi\rangle &= \left(\frac{\alpha + \sqrt{2}\beta + \gamma}{2}\right)|1, m_x = 1\rangle + \left(\frac{\alpha - \gamma}{\sqrt{2}}\right)|1, m_x = 0\rangle \\ &+ \left(\frac{\alpha - \sqrt{2}\beta + \gamma}{2}\right)|1, m_x = -1\rangle + \delta|0, m_x = 0\rangle \end{aligned} \tag{12}$$

(i) Entonces, la probabilidad de encontrar $2\hbar^2$ y $\hbar$ al medir simultáneamente $\hat{J}^2$ y $\hat{J}_x$ viene dada por

$$\mathcal{P}(2\hbar^2, \hbar) = \left|\frac{\alpha + \sqrt{2}\beta + \gamma}{2}\right|^2 \tag{13}$$

que corresponde a seleccionar el estado $|1, m_x = 1\rangle$ en la Ec.(12).

(ii) Para calcular el valor medio de $\hat{J}_z$ usar la expresión en la Ec.(25). Se obtiene

$$\langle \hat{J}_z \rangle = \langle \Psi | \hat{J}_z | \Psi \rangle = \hbar (|\alpha|^2 - |\gamma|^2) \tag{14}$$

Al medir $\hat{J}_z$ para el sistema preparado en el estado de la Ec.(25), los valores que se pueden encontrar y sus correspondientes probabilidades son

$$\begin{aligned} +\hbar &\longrightarrow \mathcal{P}(+\hbar) = |\alpha|^2 \\ 0 &\longrightarrow \mathcal{P}(0) = |\beta|^2 + |\delta|^2 \\ -\hbar &\longrightarrow \mathcal{P}(-\hbar) = |\gamma|^2 \end{aligned} \tag{15}$$

Como el estado de la Ec.(25) está normalizado, se ve fácilmente que se respeta la normalización de la distribución de probabilidades porque $\mathcal{P}(+\hbar) + \mathcal{P}(0) + \mathcal{P}(-\hbar) = 1$, como debe ser.

(iii) El valor medio de $\hat{J}^2$ en el estado de la Ec.(25) es

$$\langle \hat{J}^2 \rangle = \langle \Psi | \hat{J}^2 | \Psi \rangle = 2\hbar^2 \left(|\alpha|^2 + |\beta|^2 + |\gamma|^2 \right) \tag{16}$$

Los valores que se pueden encontrar al medir $\hat{J}^2$ y sus correspondientes probabilidades son

$$\begin{aligned} 2\hbar^2 &\longrightarrow \mathcal{P}(2\hbar^2) = |\alpha|^2 + |\beta|^2 + |\gamma|^2 \\ 0 &\longrightarrow \mathcal{P}(0) = |\delta|^2 \end{aligned} \tag{17}$$

que como debe ser $\mathcal{P}(2\hbar^2) + \mathcal{P}(0) = 1$.

El valor medio de $\hat{J}_x$ en el estado de la Ec.(25), o de manera equivalente en el estado dado por la Ec.(12), es

$$\langle \hat{J}_x \rangle = \langle \Psi | \hat{J}_x | \Psi \rangle = \hbar \left(\left| \frac{\alpha + \sqrt{2}\beta + \gamma}{2} \right|^2 - \left| \frac{\alpha - \sqrt{2}\beta + \gamma}{2} \right|^2 \right) \tag{18}$$

Los valores que se pueden encontrar al medir $\hat{J}_x$ y sus correspondientes probabilidades son

$$\begin{aligned} +\hbar &\longrightarrow \mathcal{P}(+\hbar) = \left| \frac{\alpha + \sqrt{2}\beta + \gamma}{2} \right|^2 \\ 0 &\longrightarrow \mathcal{P}(0) = \frac{|\alpha - \gamma|^2}{2} + |\delta|^2 \\ -\hbar &\longrightarrow \mathcal{P}(-\hbar) = \left| \frac{\alpha - \sqrt{2}\beta + \gamma}{2} \right|^2 \end{aligned} \tag{19}$$

que como debe ser $\mathcal{P}(+\hbar) + \mathcal{P}(0) + \mathcal{P}(-\hbar) = 1$.

(iv) El valor medio de $\hat{J}_z^2$ es

$$\langle \hat{J}_z^2 \rangle = \langle \Psi | \hat{J}_z^2 | \Psi \rangle = \hbar^2 (|\alpha|^2 + |\gamma|^2) \tag{20}$$

Los valores que se pueden encontrar y sus correspondientes probabilidades son

$$\begin{array}{rcl} \hbar^2 & \longrightarrow & \mathcal{P}(\hbar^2) = |\alpha|^2 + |\gamma|^2 \\ 0 & \longrightarrow & \mathcal{P}(0) = |\beta|^2 + |\delta|^2 \end{array} \tag{21}$$

que también cumplen $\mathcal{P}(\hbar^2) + \mathcal{P}(0) = 1$.

3. *Cohen-Tannoudji et al., Complemento FVI, ejercicio 3.*

Dado que

$$\hat{L}_i = \sum_{q,k} \epsilon_{iqk} \hat{R}_q \hat{P}_k \tag{22}$$

el conmutador $[\hat{L}_i, \hat{R}_j]$ se puede desarrollar como

$$\begin{aligned} [\hat{L}_i, \hat{R}_j] &= \sum_{q,k} \epsilon_{iqk} [\hat{R}_q \hat{P}_k, \hat{R}_j] = \sum_{q,k} \epsilon_{iqk} \hat{R}_q [\hat{P}_k, \hat{R}_j] \\ &= \sum_{q,k} \epsilon_{iqk} \hat{R}_q (-i\hbar) \delta_{jk} = -i\hbar \sum_q \epsilon_{iqj} \hat{R}_q = i\hbar \sum_q \epsilon_{ijq} \hat{R}_q \end{aligned} \tag{23}$$

Para obtener el último término se ha hecho uso de una de las propiedades del símbolo ϵ_{ijk}. Conocidos i y j, sólo hay una posibilidad para q en el último término de la Ec.(23), por lo tanto la suma se puede eliminar de donde queda simplemente $[\hat{L}_i, \hat{R}_j] = i\hbar \epsilon_{ijq} \hat{R}_q$.

De manera análoga

$$\begin{aligned} [\hat{L}_i, \hat{P}_j] &= \sum_{q,k} \epsilon_{iqk} [\hat{R}_q \hat{P}_k, \hat{P}_j] = \sum_{q,k} \epsilon_{iqk} \hat{P}_k [\hat{R}_q, \hat{P}_j] \\ &= i\hbar \sum_{q,k} \epsilon_{iqk} \hat{P}_k \delta_{qj} = i\hbar \sum_k \epsilon_{ijk} \hat{P}_k = i\hbar \epsilon_{ijk} \hat{P}_k \end{aligned} \tag{24}$$

Como $\hat{P}^2 = \hat{P}_x^2 + \hat{P}_y^2 + \hat{P}_z^2$

$$\begin{aligned} [\hat{L}_i, \hat{P}^2] &= [\hat{L}_i, \hat{P}_x^2] + [\hat{L}_i, \hat{P}_y^2] + [\hat{L}_i, \hat{P}_z^2] \\ &= [\hat{L}_i, \hat{P}_x] \hat{P}_x + \hat{P}_x [\hat{L}_i, \hat{P}_x] + [\hat{L}_i, \hat{P}_y] \hat{P}_y + \hat{P}_y [\hat{L}_i, \hat{P}_y] + [\hat{L}_i, \hat{P}_z] \hat{P}_z + \hat{P}_z [\hat{L}_i, \hat{P}_z] \\ &= 2i\hbar \left(\epsilon_{ixk} \hat{P}_k \hat{P}_x + \epsilon_{iyk} \hat{P}_k \hat{P}_y + \epsilon_{izk} \hat{P}_k \hat{P}_z \right) \end{aligned} \tag{25}$$

donde se ha usado la identidad $[\hat{A},\hat{B}\hat{C}]=[\hat{A},\hat{B}]\hat{C}+\hat{B}[\hat{A},\hat{C}]$. Para demostrar que la última expresión en la Ec.(25) se anula, veamos qué sucede si $i=x$: el primer término en el paréntesis es 0, el segundo sólo es diferente de 0 si $k=z$ y el tercero sólo es distinto de 0 si $k=y$. Como $[\hat{P}_i,\hat{P}_j]=0$, $\epsilon_{iyz}=-\epsilon_{izy}$ y repitiendo el argumento para $i=y,z$, se llega a demostrar que $[\hat{L}_i,\hat{P}^2]=0$.

Similarmente se demuestra que $[\hat{L}_i,\hat{R}^2]=0$.

Finalmente,

$$
\begin{aligned}
[\hat{L}_i,\hat{\vec{R}}\cdot\hat{\vec{P}}] &= [\hat{L}_i,\hat{R}_x\hat{P}_x+\hat{R}_y\hat{P}_y+\hat{R}_z\hat{P}_z] \\
&= [\hat{L}_i,\hat{R}_x]\hat{P}_x+\hat{R}_x[\hat{L}_i,\hat{P}_x]+[\hat{L}_i,\hat{R}_y]\hat{P}_y+\hat{R}_y[\hat{L}_i,\hat{P}_y]+[\hat{L}_i,\hat{R}_z]\hat{P}_z+\hat{R}_z[\hat{L}_i,\hat{P}_z] \\
&= i\hbar\epsilon_{ixk}\hat{R}_k\hat{P}_x+i\hbar\epsilon_{ixk}\hat{R}_x\hat{P}_k+i\hbar\epsilon_{iyk}\hat{R}_k\hat{P}_y+i\hbar\epsilon_{iyk}\hat{R}_y\hat{P}_k+i\hbar\epsilon_{izk}\hat{R}_k\hat{P}_z+i\hbar\epsilon_{izk}\hat{R}_z\hat{P}_k \\
&= 0 \qquad (26)
\end{aligned}
$$

con una justificación similar a la descrita arriba.

4. *Cohen-Tannoudji et al., Complemento FVI, ejercicio 5.*

La relación entre coordenadas cartesianas y coordenadas esféricas se puede expresar en términos de armónicos esféricos de la siguiente forma:

$$
\begin{aligned}
x &= r\mathrm{sen}(\theta)\cos(\phi)=-r\sqrt{\frac{2\pi}{3}}\left[Y_1^1(\theta,\phi)-Y_1^{-1}(\theta,\phi)\right] \\
y &= r\mathrm{sen}(\theta)\mathrm{sen}(\phi)=ir\sqrt{\frac{2\pi}{3}}\left[Y_1^1(\theta,\phi)+Y_1^{-1}(\theta,\phi)\right] \\
z &= r\cos(\theta)=r\sqrt{\frac{4\pi}{3}}Y_1^0(\theta,\phi) \qquad (27)
\end{aligned}
$$

Por lo tanto la función de onda del problema se puede escribir

$$\psi(x,y,z)=\psi(r,\theta,\phi)=Nre^{-\frac{r^2}{\alpha^2}}\sqrt{\frac{2\pi}{3}}\left[(i-1)Y_1^1(\theta,\phi)+(i+1)Y_1^{-1}(\theta,\phi)+\sqrt{2}Y_1^0(\theta,\phi)\right] \qquad (28)$$

Recordando que la componente radial de la función de onda debe estar normalizada por sí sola

$$R(r)=4\sqrt{\frac{2\sqrt{2}}{3\alpha^5\sqrt{\pi}}}re^{-\frac{r^2}{\alpha^2}} \quad , \quad \int_0^\infty r^2\mid R(r)\mid^2 dr=1 \qquad (29)$$

la función de onda es

$$\psi(r,\theta,\phi)=N\frac{1}{4}\sqrt{\frac{\alpha^5\pi\sqrt{\pi}}{\sqrt{2}}}R(r)\left[(i-1)Y_1^1(\theta,\phi)+(i+1)Y_1^{-1}(\theta,\phi)+\sqrt{2}Y_1^0(\theta,\phi)\right] \qquad (30)$$

Los armónicos esféricos igualmente están normalizados, por lo que se obtiene

$$N = \sqrt{\frac{8\sqrt{2}}{3\alpha^5 \pi \sqrt{\pi}}} \tag{31}$$

La función de onda ya *normalizada* se escribe

$$\psi(r,\theta,\phi) = \frac{1}{\sqrt{6}} R(r) \left[(i-1) Y_1^1(\theta,\phi) + (i+1) Y_1^{-1}(\theta,\phi) + \sqrt{2} Y_1^0(\theta,\phi) \right] \tag{32}$$

(a) Al medir $\hat{L}^2$ y $\hat{L}_z$, la probabilidad de encontrar $2\hbar^2$ ($l = 1$) y 0 ($m = 0$) respectivamente, es $\mathcal{P}(2\hbar^2, 0) = 1/3$.

(b) Se pueden efectivamente calcular las probabilidades de todos los resultados posibles al medir $\hat{L}^2$ y $\hat{L}_z$. Ellas son

$$\begin{aligned} l &= 1 \quad , \quad m = 0 \Longrightarrow \mathcal{P}(2\hbar^2, 0) = \frac{1}{3} \\ l &= 1 \quad , \quad m = 1 \Longrightarrow \mathcal{P}(2\hbar^2, 1) = \frac{1}{3} \\ l &= 1 \quad , \quad m = -1 \Longrightarrow \mathcal{P}(2\hbar^2, -1) = \frac{1}{3} \end{aligned} \tag{33}$$

5. *Cohen-Tannoudji et al., Complemento FVI, ejercicio 6.*

Tomamos los vectores unitarios como $\hat{u} = \frac{1}{\sqrt{2}}(1,0,1)$ y $\hat{v} = \frac{1}{\sqrt{2}}(1,0,-1)$. Por lo tanto $\hat{L}_u = \frac{1}{\sqrt{2}}(\hat{L}_x + \hat{L}_z)$ y $\hat{L}_v = \frac{1}{\sqrt{2}}(\hat{L}_x - \hat{L}_z)$. El Hamiltoniano es

$$\begin{aligned} \hat{H} &= \frac{\omega_0}{\hbar} \left(\hat{L}_x \hat{L}_z + \hat{L}_z \hat{L}_x \right) \\ &= \frac{\omega_0}{2\hbar} \left[(\hat{L}_+ + \hat{L}_-) \hat{L}_z + \hat{L}_z (\hat{L}_+ + \hat{L}_-) \right] \end{aligned} \tag{34}$$

(a) En la base de $\hat{L}^2$ ($l = 1$) y $\hat{L}_z$, ordenada en la forma $\{| \ 1\rangle, | \ 0\rangle, | \ -1\rangle\}$ la matriz que representa a $\hat{H}$ es

$$\hat{H} = \frac{\hbar\omega_0}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} \tag{35}$$

Los estados propios y energías propias del anterior Hamiltoniano son

$$|E_1\rangle = \frac{1}{2} \left(|1\rangle + \sqrt{2}|0\rangle - |-1\rangle \right) \quad , \quad E_1 = \hbar\omega_0$$

$$
\begin{aligned}
|E_2\rangle &= \frac{1}{\sqrt{2}}\left(|1\rangle + |-1\rangle\right) \quad , \quad E_2 = 0 \\
|E_3\rangle &= \frac{1}{2}\Big(|1\rangle - \sqrt{2}|0\rangle - |-1\rangle\Big) \quad , \quad E_3 = -\hbar\omega_0 \qquad (36)
\end{aligned}
$$

$$(37)$$

(b) Si al instante $t = 0$ se tiene

$$
\begin{aligned}
|\psi(0)\rangle &= \frac{1}{\sqrt{2}}\left(|1\rangle - |-1\rangle\right) \\
&= \frac{1}{\sqrt{2}}\left(|E_1\rangle + |E_3\rangle\right) \qquad (38)
\end{aligned}
$$

al instante $t > 0$ se tendrá

$$
\begin{aligned}
|\psi(t)\rangle &= \frac{1}{\sqrt{2}}\Big(e^{-i\omega_0 t}|E_1\rangle + e^{i\omega_0 t}|E_3\rangle\Big) \\
&= \frac{1}{\sqrt{2}}\Big[\cos(\omega_0 t)\left(|1\rangle - |-1\rangle\right) - i\sqrt{2}\mathrm{sen}(\omega_0 t)|0\rangle\Big] \qquad (39)
\end{aligned}
$$

Si en este instante se mide $\hat{L}_z$ los posibles resultados y probabilidades son

$$
\begin{aligned}
m &= 1 \quad \Longrightarrow \quad \mathcal{P}_z(\hbar) = \frac{1}{2}\cos^2(\omega_0 t) \\
m &= 0 \quad \Longrightarrow \quad \mathcal{P}_z(0) = \mathrm{sen}^2(\omega_0 t) \\
m &= -1 \quad \Longrightarrow \quad \mathcal{P}_z(-\hbar) = \frac{1}{2}\cos^2(\omega_0 t) \qquad (40)
\end{aligned}
$$

Se verifica que las probabilidades están normalizadas $\mathcal{P}_z(\hbar) + \mathcal{P}_z(0) + \mathcal{P}_z(-\hbar) = 1$, como tiene que ser.

(c) Valores medios a t

$$
\begin{aligned}
\langle L_x(t)\rangle &= \frac{1}{2}\langle\psi(t)|\hat{L}_+ + \hat{L}_-|\psi(t)\rangle = 0 \\
\langle L_y(t)\rangle &= -\frac{i}{2}\langle\psi(t)|\hat{L}_+ - \hat{L}_-|\psi(t)\rangle = -\hbar\mathrm{sen}(2\omega_0 t) \\
\langle L_z(t)\rangle &= \langle\psi(t)|\hat{L}_z|\psi(t)\rangle = 0 \qquad (41)
\end{aligned}
$$

El vector $\langle\vec{L}(t)\rangle$ realiza un movimiento armónico simple de frecuencia $2\omega_0$ a lo largo del eje y.

(d) Al medir $\hat{L}_z^2$ al instante t se pueden obtener los siguientes resultados con probabilidades

$$
\begin{aligned}
m^2 &= 1 \quad \Longrightarrow \quad \mathcal{P}_z(\hbar^2) = \cos^2(\omega_0 t) \\
m^2 &= 0 \quad \Longrightarrow \quad \mathcal{P}_z(0) = \mathrm{sen}^2(\omega_0 t) \qquad (42)
\end{aligned}
$$

(i) A los instantes para los cuales $\omega_0 t = n\pi$ con $n = 0, 1, 2, 3...$ se obtendrá con certeza el resultado $m^2 = 1$ es decir $\hbar^2$. Por otro lado en los instantes para los cuales $\omega_0 t = (2n+1)\pi/2$ con $n = 0, 1, 2, 3...$ se obtendrá con certeza el resultado $m^2 = 0$ es decir $0\hbar^2$.

(ii) Si el resultado ha sido $\hbar^2$ el estado del sistema colapsa a $|\psi'\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|1\rangle - |-1\rangle) = |\psi(0)\rangle$, es decir al mismo estado en el cual se preparó al instante $t = 0$. Su evolución será como se ha discutido en (b).