Universidad de los Andes-Dpto. de Física
Mecánica Cuántica I-2014/II

Tarea 3

1. Considere un sistema físico con un espacio de Hilbert de dimensión 2. Una base ortonormal en este espacio viene dada por $\{|\,1\rangle\;,|\,2\rangle\;\}$. Representados en esa base el Hamiltoniano y dos operadores $\hat{A}$ y $\hat{B}$ vienen dados por

$$\hat{H}=\frac{\hbar\omega}{3}\begin{pmatrix} 5 & i\sqrt{2} \\ -i\sqrt{2} & 4 \end{pmatrix} \quad , \quad \hat{A}=\frac{a}{3}\begin{pmatrix} 2\sqrt{2} & -i \\ i & -2\sqrt{2} \end{pmatrix} \quad , \quad \hat{B}=\frac{b}{3}\begin{pmatrix} 1 & -4i\sqrt{2} \\ 4i\sqrt{2} & 5 \end{pmatrix} \tag{1}$$

donde ω, a y b son constantes reales positivas. Al instante $t=0$ el sistema se encuentra en el estado

$$|\Psi(0)\rangle = N\left(\sqrt{2}|1\rangle + \sqrt{3}|2\rangle\right) \tag{2}$$

(a) Normalice el estado anterior.

(b) Si se mide la energía del sistema a $t=0$ qué resultados se pueden encontrar y con cuáles probabilidades?. Si se realizan muchas mediciones a $t=0$ de la energía cuál es el valor promedio?.

(c) Suponga que en lugar de medir la energía a $t=0$ se midiera el observable correspondiente a $\hat{A}$. Qué resultados se pueden encontrar y con cuáles probabilidades?. Cuál es el valor promedio de $\hat{A}$?

(d) Lo mismo del literal anterior pero ahora para $\hat{B}$.

(e) Qué puede decir del producto de incertidumbres $\Delta A \Delta B$ a $t=0$?.

(f) Iniciando con el estado de la Ec.(2) convenientemente normalizado, determine el estado del sistema a un tiempo $t>0$ arbitrario, es decir $|\,\Psi(t)\rangle$.

2. (i) Sea $\hat{H}$ el Hamiltoniano de un sistema físico con ecuación de valores propios $\hat{H}|E_n\rangle = E_n|E_n\rangle$. Calcule $\langle E_n|[\hat{A},\hat{H}]|E_n\rangle$, donde $\hat{A}$ es un observable cualquiera.

(ii) Si $\hat{H}=\frac{\hat{P}^2}{2m}+\hat{V}(x)$, calcular en función de $\hat{P}$, $\hat{X}$ y $\hat{V}(x)$, el conmutador: $[\hat{H},\hat{X}\hat{P}]$.

3. Se tiene un sistema cuántico descrito en un espacio de Hilbert de dimensión 3. Sus estados estacionarios (estados propios del Hamiltoniano) se notan como $|a\rangle, |b\rangle$ y $|c\rangle$ con valores correspondientes de energía $\hbar\omega, 0$ y $-\hbar\omega$, respectivamente. Se sabe que otro observable $\hat{A}$ está definido por las siguientes acciones sobre la base de estados estacionarios:

$$\hat{A}|a\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}|b\rangle \quad , \quad \hat{A}|b\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\left[|a\rangle + |c\rangle\right] \quad , \quad \hat{A}|c\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}|b\rangle \tag{3}$$

(i) Escribir la matriz que representa a $\hat{A}$ en la base de estados estacionarios (base ordenada en la forma $\{|a\rangle, |b\rangle, |c\rangle\}$).

(ii) Calcular los valores propios $\lambda_1 > \lambda_2 > \lambda_3$ de $\hat{A}$, y los vectores propios correspondientes (normalizados!) que se van a notar como $|1\rangle, |2\rangle$ y $|3\rangle$, respectivamente.

(iii) Suponer que al instante $t = 0$ el estado del sistema es $|\Psi(0)\rangle = |1\rangle$. Determine $< E >$ y ΔE en este estado.

(iv) Calcular al instante $t > 0$ el estado del sistema $|\Psi(t)\rangle$ y el valor medio $< \hat{A}(t) >$.

(v) Si se mide el observable $\hat{A}$ al instante $t > 0$, qué posibles resultados se van a obtener y con cuáles probabilidades.