Universidad de los Andes-Dpto. de Física
Mecánica Cuántica I-2014/II

Solución Tarea 5

1. *Cohen-Tannoudji et al., Complemento LIII, ejercicio 6.*

(a) Normalizar es exigir que

$$\begin{aligned} 1 &= \int_{-\infty}^{\infty} dx \int_{-\infty}^{\infty} dy \int_{-\infty}^{\infty} dz |\psi(x,y,z)|^2 \\ &= N^2 \left(\int_{-\infty}^{\infty} dx\, e^{-\frac{|x|}{a}} \right) \left(\int_{-\infty}^{\infty} dy\, e^{-\frac{|y|}{b}} \right) \left(\int_{-\infty}^{\infty} dz\, e^{-\frac{|z|}{c}} \right) \\ &= N^2 (2a)(2b)(2c) \end{aligned} \tag{1}$$

La constante de normalización es entonces

$$N = \frac{1}{2\sqrt{2abc}} \tag{2}$$

(b) Se trata de calcular la probabilidad de encontrar la partícula con x entre 0 y a, SIN IMPORTAR los valores de y y z (por eso se va a integrar sobre todos los y y z). Entonces

$$\begin{aligned} \mathcal{P}(0 \leq x \leq a) &= \frac{1}{8abc} \left(\int_0^a dx\, e^{-\frac{|x|}{a}} \right) \left(\int_{-\infty}^{\infty} dy\, e^{-\frac{|y|}{b}} \right) \left(\int_{-\infty}^{\infty} dz\, e^{-\frac{|z|}{c}} \right) \\ &= \frac{1}{2a} \int_0^a dx\, e^{-\frac{x}{a}} \\ &= \frac{1}{2}(1 - \frac{1}{e}) \\ &\simeq 0.32 \end{aligned} \tag{3}$$

(c) Ahora NO IMPORTA el valor de la coordenada x de la partícula

$$\begin{aligned} \mathcal{P}(-b \leq y \leq b, -c \leq z \leq c) &= \frac{1}{8abc} \left(\int_{-\infty}^{\infty} dx\, e^{-\frac{|x|}{a}} \right) \left(\int_{-b}^{b} dy\, e^{-\frac{|y|}{b}} \right) \left(\int_{-c}^{c} dz\, e^{-\frac{|z|}{c}} \right) \\ &= (1 - \frac{1}{e})^2 \\ &\simeq 0.4 \end{aligned} \tag{4}$$

(d) Para calcular probabilidades de encontrar ciertos valores del momentum lineal de la partícula es más conveniente pasar a la representación de momentum lineal (transformada de Fourier tridimensional)

$$\begin{aligned}
\psi(p_x,p_y,p_z) &= \frac{1}{(2\pi\hbar)^{3/2}}\frac{1}{2\sqrt{2abc}}\left(\int_{-\infty}^{\infty}dx\,e^{-\frac{|x|}{2a}}e^{\frac{i}{\hbar}xp_x}\right)\left(\int_{-\infty}^{\infty}dy\,e^{-\frac{|y|}{2b}}e^{\frac{i}{\hbar}yp_y}\right)\left(\int_{-\infty}^{\infty}dz\,e^{-\frac{|z|}{2c}}e^{\frac{i}{\hbar}zp_z}\right)\\
&= \frac{1}{(2\pi\hbar)^{3/2}}\frac{1}{2\sqrt{2abc}}\left(\frac{4a\hbar^2}{\hbar^2+4a^2p_x^2}\right)\left(\frac{4b\hbar^2}{\hbar^2+4b^2p_y^2}\right)\left(\frac{4c\hbar^2}{\hbar^2+4c^2p_z^2}\right)\\
&= 8\sqrt{\frac{abc}{(\pi\hbar)^3}}\left(\frac{1}{1+\frac{4a^2p_x^2}{\hbar^2}}\right)\left(\frac{1}{1+\frac{4b^2p_y^2}{\hbar^2}}\right)\left(\frac{1}{1+\frac{4c^2p_z^2}{\hbar^2}}\right) \qquad (5)
\end{aligned}$$

La probabilidad que se pide es

$$\begin{aligned}
\mathcal{P}(p_x=0,p_y=0,p_z=\hbar/c)dp_x\,dp_y\,dp_z &= |\psi(p_x=0,p_y=0,p_z=\hbar/c)|^2dp_x\,dp_y\,dp_z\\
&= \frac{64}{25}\frac{abc}{(\pi\hbar)^3}dp_x\,dp_y\,dp_z \qquad (6)
\end{aligned}$$

2. *Cohen-Tannoudji et al., Complemento LIII, ejercicio 11.*

(a) La probabilidad de encontrar la partícula (1) con posición entre x y $x+dx$ **Y** la partícula (2) con posición entre α y β viene dada por:

$$\mathcal{P}(x,\alpha\le x_2\le\beta)dx = \left[\int_\alpha^\beta dx_2\,|\psi(x,x_2)|^2\right]dx \qquad (7)$$

(b) Ahora la probabilidad es:

$$\mathcal{P}(x)dx = \left[\int_{-\infty}^{\infty} dx_2\,|\psi(x,x_2)|^2\right]dx \qquad (8)$$

(c) La probabilidad de encontrar al menos una de las partículas entre α y β es:

$$\mathcal{P} = \mathcal{P}(x_1\in[\alpha,\beta],x_2\notin[\alpha,\beta]) + \mathcal{P}(x_1\notin[\alpha,\beta],x_2\in[\alpha,\beta]) + \mathcal{P}(x_1\in[\alpha,\beta],x_2\in[\alpha,\beta]) \qquad (9)$$

que se expresa finalmente como:

$$\begin{aligned}
\mathcal{P} &= \int_{-\infty}^{\alpha}dx_2\left[\int_\alpha^\beta dx_1\,|\psi(x_1,x_2)|^2\right] + \int_\beta^\infty dx_2\left[\int_\alpha^\beta dx_1\,|\psi(x_1,x_2)|^2\right]\\
&+ \int_{-\infty}^{\alpha}dx_1\left[\int_\alpha^\beta dx_2\,|\psi(x_1,x_2)|^2\right] + \int_\beta^\infty dx_1\left[\int_\alpha^\beta dx_2\,|\psi(x_1,x_2)|^2\right]\\
&+ \int_\alpha^\beta\int_\alpha^\beta dx_1\,dx_2\,|\psi(x_1,x_2)|^2 \qquad (10)
\end{aligned}$$

(d) La probabilidad de encontrar solo una partícula entre α y β es:

$$
\begin{aligned}
\mathcal{P} &= \mathcal{P}(x_1 \in [\alpha,\beta]\,, x_2 \notin [\alpha,\beta]) + \mathcal{P}(x_1 \notin [\alpha,\beta]\,, x_2 \in [\alpha,\beta]) \\
&= \int_{-\infty}^{\alpha} dx_2 \left[\int_{\alpha}^{\beta} dx_1\, |\psi(x_1,x_2)|^2\right] + \int_{\beta}^{\infty} dx_2 \left[\int_{\alpha}^{\beta} dx_1\, |\psi(x_1,x_2)|^2\right] \\
&+ \int_{-\infty}^{\alpha} dx_1 \left[\int_{\alpha}^{\beta} dx_2\, |\psi(x_1,x_2)|^2\right] + \int_{\beta}^{\infty} dx_1 \left[\int_{\alpha}^{\beta} dx_2\, |\psi(x_1,x_2)|^2\right]
\end{aligned}
$$

(e) Para dar respuesta a esta parte es mejor pasar a una representación de momentum lineal para la partícula (1) y mantener la representación de posición para la partícula (2) tal que

$$\psi(p_1,x_2) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\hbar}} \int_{-\infty}^{\infty} dx_1\, \psi(x_1,x_2) e^{-\frac{i}{\hbar} p_1\, x_1} \tag{11}$$

La probabilidad que se pregunta se puede entonces expresar como:

$$\mathcal{P} = \int_{p'}^{p''} dp_1 \int_{\alpha}^{\beta} dx_2\, |\psi(p_1,x_2)|^2 \tag{12}$$

(f) Ahora hacemos uso de la representación de momentum lineal para las dos partículas en la forma:

$$\psi(p_1,p_2) = \frac{1}{2\pi\hbar} \int_{-\infty}^{\infty} dx_1 \int_{-\infty}^{\infty} dx_2\, \psi(x_1,x_2) e^{-\frac{i}{\hbar}(p_1\, x_1 + p_2\, x_2)} \tag{13}$$

de donde se obtiene directamente la probabilidad por la que se pregunta:

$$\mathcal{P} = \int_{p'}^{p''} dp_1 \int_{p'''}^{p''''} dp_2\, |\psi(p_1,p_2)|^2 \tag{14}$$

(g) Si solo se mide el momentum lineal de la partícula (1) se obtiene de la Ec.(12)

$$\mathcal{P} = \int_{p'}^{p''} dp_1 \int_{-\infty}^{\infty} dx_2\, |\psi(p_1,x_2)|^2 \tag{15}$$

mientras que de la Ec.(14) se obtiene:

$$\mathcal{P} = \int_{p'}^{p''} dp_1 \int_{-\infty}^{\infty} dp_2\, |\psi(p_1,p_2)|^2 \tag{16}$$

que resultan ser idénticos resultados de acuerdo al conocido resultado del análisis de Fourier conocido como Teorema de Parseval.

(h) Se define la posición relativa entre las dos partículas (1) y (2) como $y = x_1 - x_2$. La probabilidad por la que se pregunta se encuentra haciendo uso de la distribución de Dirac $\delta(y - x_1 + x_2)$ como:

$$\mathcal{P}(y \in [-d, d]) = \int_{-d}^{d} dy \, \mathcal{P}(y) \tag{17}$$

donde

$$\begin{aligned} \mathcal{P}(y)dy &= \int_{-\infty}^{\infty} dx_1 \int_{-\infty}^{\infty} dx_2 \, |\psi(x_1, x_2)|^2 \delta(y - x_1 + x_2) dy \\ &= \left[\int_{-\infty}^{\infty} dx_1 \, |\psi(x_1, x_1 - y)|^2\right] dy \end{aligned} \tag{18}$$

que cuando se lleva a la Ec.(17) produce finalmente:

$$\mathcal{P}(y \in [-d, d]) = \int_{-d}^{d} dy \, \left[\int_{-\infty}^{\infty} dx_1 \, |\psi(x_1, x_1 - y)|^2\right] \tag{19}$$

El valor medio de la posición relativa se expresa entonces como:

$$\langle x_1 - x_2 \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} dy \, y \int_{-\infty}^{\infty} dx_1 \, |\psi(x_1, x_1 - y)|^2 \tag{20}$$

3. *Cohen-Tannoudji et al., Complemento LIII, ejercicio 12.*

Partícula en pozo infinito de potencial (1-Dim). Estado de la partícula a $t = 0$ es una superposición de los 4 primeros estados estacionarios

$$|\psi(0)\rangle = a_1|\phi_1\rangle + a_2|\phi_2\rangle + a_3|\phi_3\rangle + a_4|\phi_4\rangle \tag{21}$$

donde los estados estacionarios (normalizados) en representación de posición vienen dados por:

$$\begin{aligned} \phi_n(x) &= \langle x|\phi_n\rangle \\ &= \sqrt{\frac{2}{a}} \mathrm{sen}\left(n\frac{\pi x}{a}\right) \end{aligned} \tag{22}$$

con $n = 1, 2, 3, ...$ Vamos a suponer de ahora en adelante que el estado dado por la Ec.(21) está normalizado, es decir

$$\sum_{n=1}^{4} |a_n|^2 = 1 \tag{23}$$

(a) Al medir la energía de la partícula a $t = 0$ se pueden encontrar los siguientes valores posibles de energía E_n (en unidades de $\frac{\pi^2\hbar^2}{2ma^2}$) con sus correspondientes probabilidades $\mathcal{P}_n$ tal como aparecen en la siguiente tabla:

E_n	$\mathcal{P}_n$
1	$\|a_1\|^2$
4	$\|a_2\|^2$
9	$\|a_3\|^2$
16	$\|a_4\|^2$

Entonces, la probabilidad de encontrar un valor de energía menor que $\frac{6\pi^2\hbar^2}{2ma^2}$ es igual a $|a_1|^2+|a_2|^2$, porque sólo se podría encontrar la partícula en los estados $|\phi_1\rangle$ y $|\phi_2\rangle$.

(b) Dado que se cumple $\hat{H}|\phi_n\rangle = E_n|\phi_n\rangle$, el valor medio de la energía se puede escribir como

$$\begin{aligned} \langle H \rangle &= \langle \psi(0)|\hat{H}|\psi(0)\rangle \\ &= |a_1|^2\langle\phi_1|\hat{H}|\phi_1\rangle + |a_2|^2\langle\phi_2|\hat{H}|\phi_2\rangle + |a_3|^2\langle\phi_3|\hat{H}|\phi_3\rangle + |a_4|^2\langle\phi_4|\hat{H}|\phi_4\rangle \\ &= |a_1|^2E_1 + |a_2|^2E_2 + |a_3|^2E_3 + |a_4|^2E_4 \\ &= \left(\frac{\pi^2\hbar^2}{2ma^2}\right)\sum_{n=1}^{4} n^2|a_n|^2 \end{aligned} \tag{24}$$

Para calcular la incertidumbre en energía es necesario antes calcular

$$\begin{aligned} \langle H^2 \rangle &= \langle \psi(0)|\hat{H}^2|\psi(0)\rangle \\ &= |a_1|^2\langle\phi_1|\hat{H}^2|\phi_1\rangle + |a_2|^2\langle\phi_2|\hat{H}^2|\phi_2\rangle + |a_3|^2\langle\phi_3|\hat{H}^2|\phi_3\rangle + |a_4|^2\langle\phi_4|\hat{H}^2|\phi_4\rangle \\ &= |a_1|^2E_1^2 + |a_2|^2E_2^2 + |a_3|^2E_3^2 + |a_4|^2E_4^2 \\ &= \left(\frac{\pi^2\hbar^2}{2ma^2}\right)^2\sum_{n=1}^{4} n^4|a_n|^2 \end{aligned} \tag{25}$$

Por lo tanto la incertidumbre en energía es

$$\Delta E = \sqrt{\langle H^2\rangle - \langle H\rangle^2} = \left(\frac{\pi^2\hbar^2}{2ma^2}\right)\sqrt{\sum_{n=1}^{4} n^4|a_n|^2 - \left(\sum_{n=1}^{4} n^2|a_n|^2\right)^2} \tag{26}$$

(c) Al instante t se tiene como vector de estado

$$|\psi(t)\rangle = a_1e^{-\frac{i}{\hbar}E_1t}|\phi_1\rangle + a_2e^{-\frac{i}{\hbar}E_2t}|\phi_2\rangle + a_3e^{-\frac{i}{\hbar}E_3t}|\phi_3\rangle + a_4e^{-\frac{i}{\hbar}E_4t}|\phi_4\rangle \tag{27}$$

Los resultados obtenidos en (a) y (b) permanecen inalterados y válidos para cualquier tiempo t.

(d) Si al medir la energía el resultado es $\frac{16\pi^2\hbar^2}{2ma^2}$, el estado del sistema colapsa a $|\phi_4\rangle$. Como este estado es estacionario la energía no cambiará a partir de ese momento si el sistema sigue estando sometido al mismo Hamiltoniano, es decir aquel que corresponde a una partícula confinada en un pozo infinito de potencial de ancho a.

4. *Cohen-Tannoudji et al., Complemento LIII, ejercicio 13.*

(a) Como

$$\begin{aligned}\left[\hat{H}_x, \hat{H}_y\right] &= 0 \\ \left[\hat{H}_x, \hat{H}\right] &= 0 \\ \left[\hat{H}_y, \hat{H}\right] &= 0\end{aligned}$$

se pueden identificar dos conjuntos completos de operadores que counmutan. Son ellos: $\left\{\hat{H}_x, \hat{H}_y\right\}$ y $\left\{\hat{H}, \hat{H}_x\right\}$.

(b) Se tiene una partícula descrita por la función de onda

$$\psi(x,y) = N\cos\left(\frac{\pi x}{a}\right)\cos\left(\frac{\pi y}{a}\right)\operatorname{sen}\left(\frac{2\pi x}{a}\right)\operatorname{sen}\left(\frac{2\pi x}{a}\right) \tag{28}$$

(α) Primero, recordar que los valores propios de energía E_{n_x,n_y} y sus estados estacionarios asociados $\Psi_{n_x,n_y}(x,y)$ (normalizados) vienen dados por:

$$E_{n_x,n_y} = \frac{\pi^2\hbar^2}{2ma^2}\left(n_x^2 + n_y^2\right) \longleftrightarrow \Psi_{n_x,n_y}(x,y) = \left[\sqrt{\frac{2}{a}}\operatorname{sen}\left(\frac{n_x\pi x}{a}\right)\right]\left[\sqrt{\frac{2}{a}}\operatorname{sen}\left(\frac{n_y\pi y}{a}\right)\right] \tag{29}$$

donde $n_x, n_y = 1, 2, 3, ...$ Con el uso de la identidad trigonométrica:

$$\operatorname{sen}^3(x) = \frac{3}{4}\operatorname{sen}(x) - \frac{1}{4}\operatorname{sen}(3x) \tag{30}$$

se puede expresar fácilmente la función de onda dada por la Ec.(28) en términos de funciones estacionarias en la siguiente forma:

$$\psi(x,y) = \frac{Na}{2}\left[\Psi_{1,1}(x,y) + \Psi_{1,3}(x,y) + \Psi_{3,1}(x,y) + \Psi_{3,3}(x,y)\right] \tag{31}$$

De la anterior expresión se obtiene inmediatamente la constante de normalización $N = 1/a$. Por lo tanto

$$\psi(x,y) = \frac{1}{2}\left[\Psi_{1,1}(x,y) + \Psi_{1,3}(x,y) + \Psi_{3,1}(x,y) + \Psi_{3,3}(x,y)\right] \tag{32}$$

El valor medio de la energía en el estado de la Ec.(32) es:

$$\begin{aligned}\langle\hat{H}\rangle &= \int_0^a dx\int_0^a dy\,\psi^*(x,y)\hat{H}\psi(x,y) \\ &= \frac{\pi^2\hbar^2}{2ma^2}\frac{1}{4}\left(2 + 10 + 10 + 18\right) \\ &= \frac{5\pi^2\hbar^2}{ma^2}\end{aligned} \tag{33}$$

Al medir la energía de la partícula se pueden encontrar los siguientes valores posibles de energía E (en unidades de $\frac{\pi^2\hbar^2}{2ma^2}$) con sus correspondientes probabilidades $\mathcal{P}(E)$ tal como aparecen en la siguiente tabla:

E	$\mathcal{P}(E)$
2	1/4
10	1/2
18	1/4

(β) En la siguiente tabla con energías E_x (en unidades de $\frac{\pi^2\hbar^2}{2ma^2}$):

E_x	$\mathcal{P}(E_x)$
1	1/2
3	1/2

Si la medida de $\hat{H}_x$ ha dado como resultado $E_x = \frac{\pi^2\hbar^2}{2ma^2}$, entonces el estado del sistema habrá colapsado al estado:

$$\phi(x,y) = \Psi_1(x) \otimes \frac{1}{\sqrt{2}}\left[\Psi_1(y) + \Psi_3(y)\right] \tag{34}$$

Por lo tanto, a partir de este último resultado al medir $\hat{H}_y$ se obtendrán energías E_y (en unidades de $\frac{\pi^2\hbar^2}{2ma^2}$) y probabilidades de acuerdo a:

E_y	$\mathcal{P}(E_y)$
1	1/2
3	1/2

(γ) Empecemos por escribir la Ec.(32) sin recurrir a la represenatción de posición, es decir en términos de kets como:

$$|\psi\rangle = \frac{1}{2}\left[|1_x\rangle + |3_x\rangle\right] \otimes \left[|1_y\rangle + |3_y\rangle\right] \tag{35}$$

La probabilidad que piden se obtiene de:

$$\begin{aligned} \mathcal{P}(n_x = 3, p_y = p_0) &= |\langle n_x = 3, p_y = p_0|\psi\rangle|^2 \\ &= \frac{1}{4}\left|\langle p_y = p_0|1_y\rangle + \langle p_y = p_0|3_y\rangle\right|^2 \end{aligned} \tag{36}$$

donde

$$\langle p_y = p_0|n_y\rangle = \frac{1}{\sqrt{2\pi\hbar}}\int_0^a dy\, e^{-\frac{i}{\hbar}p_0 y}\Psi_{n_y}(y) \tag{37}$$

con $\Psi_{n_y}(y)$ dado en la última parte de la Ec.(29).