

1 Teoremas sin demostración

1.1 Teorema del valor intermedio para funciones continuas

Sea f una función continua en $[a, b]$ sea d entre $f(a)$ y $f(b)$ entonces existe $c \in [a, b]$ tal que $f(c) = d$

1.2 Teorema del valor medio

Sea f una función continua en $[a, b]$ y derivable en (a, b) . Entonces para cada $x, c \in [a, b]$ se cumple que $\left(\frac{f(x) - f(c)}{x - c} \right) = f'(\xi)$, para algún ξ entre x y c

1.3 Teorema del Taylor

Sea $f \in C^{(n)}[a, b]$ y existe $f^{(n+1)}$ en (a, b) , entonces $\forall x, c \in [a, b]$ se tiene:

$$f(x) = \sum_{k=0}^n \frac{1}{k!} f^{(k)}(c)(x - c)^k + E_n(x) \text{ donde}$$

$$E_n(x) = \frac{1}{(n+1)!} f^{(n+1)}(\xi)(x - c)^{n+1} \text{ con } \xi \text{ entre } x \text{ y } c$$

1.4 Metodo Newton Global

Sea una función, tal que f'' continua, f convexa, creciente y tiene una raíz, entonces la raíz es única y el método de Newton converge $\forall x_0 \in \mathbb{R}$

1.5 Unicidad de conjunto linealmente independiente

Si $\{\phi_0(x), \dots, \phi_n(x)\}$ es un conjunto LI (linealmente independiente) en el espacio de polinomios de grado $\leq n$, entonces todo polinomio de grado $\leq n$ puede escribirse de manera única como combinación lineal de $\{\phi_0(x), \dots, \phi_n(x)\}$

1.6 Aproximación por mínimos cuadrados

Si $\{\phi_0, \dots, \phi_n\}$ es un conjunto ortogonal de funciones en $[a, b]$ respecto de w , entonces la aproximación de cuadrados mínimos a f en $[a, b]$ es

$$P(x) = \sum_{k=0}^n a_k \phi_k(x), \text{ para } k = 0, \dots, n, \text{ donde}$$

$$a_k = \frac{\int_a^b w(x)f(x)\phi_k(x)dx}{\int_a^b w(x)(\phi_k(x))^2 dx}$$

1.7 Relación de recurrencia

El conjunto de funciones polinomiales $\{\phi_0, \dots, \phi_n\}$ definido de la siguiente forma ortogonal en $[a, b]$, respecto de la función de $w(x)$

$\phi_0(x) = 1$, $\phi_1(x) = x - B_1$, $x \in [a, b]$, donde

$$B_1 = \frac{\int_a^b w(x)x(\phi_0(x))^2 dx}{\int_a^b w(x)(\phi_0(x))^2 dx},$$

Para $k \geq 2$

$\phi_k(x) = (x - B_k)\phi_{k-1}(x) - C_k\phi_{k-2}(x)$, $x \in [a, b]$, donde

$$B_k = \frac{\int_a^b w(x)x(\phi_{k-1}(x))^2 dx}{\int_a^b w(x)(\phi_{k-1}(x))^2 dx}, \text{ y}$$

$$C_k = \frac{\int_a^b w(x)x(\phi_{k-2}(x))^2 dx}{\int_a^b w(x)(\phi_{k-2}(x))^2 dx}$$

1.8 Corolario

Para todo $n > 0$ el conjunto de funciones generadas en el teorema de Relación de recurrencias(anterior) es LI en $[a, b]$ y $\int_a^b w(x)\phi_n(x)\phi_k(x)dx = 0$ con $k < n$

2 Teoremas con demostracion

2.1 Metodo Biseccion (convergencia)

Si $[a_0, b_0]$, $[a_1, b_1]$, ..., $[a_n, b_n]$, ... denotan los sucesivos intervalos del método de bisección, entonces $\exists \lim_{n \rightarrow \infty} a_n, \lim_{n \rightarrow \infty} b_n$ donde son iguales representan una raíz de f .

Si $C_n = \left(\frac{a_n + b_n}{2} \right)$ y $r = \lim_{n \rightarrow \infty} C_n$ entonces $\frac{a_n + b_n}{2}$

$$|r - C_n| \leq \left| \frac{1}{2^{(n+1)}} (b_0 - a_0) \right|$$

Dem: Si $[a_0, b_0], [a_1, b_1], \dots$ son los intervalos del algoritmo de bisección. Entonces

$$(1) a_0 \leq a_1 \leq \dots \leq b_0$$

$$(2) b_0 \leq b_1 \leq \dots \leq a_0$$

$$(3) b_{n+1} - a_{n+1} = \frac{1}{2}(b_n - a_n)$$

Como sabemos que $\{a_n\}$ es acotada superiormente, además es no decreciente, entonces es convergente (1)

Luego como $\{b_n\}$ es acotada inferiormente, además es no creciente, entonces es convergente (2)

Ademas

$$b_{n+1} - a_{n+1} = \left(\frac{1}{2} \right) (b_n - a_n) = \left(\frac{1}{2^2} \right) (b_{n-1} - a_{n-1}) = \dots = \left(\frac{1}{2^{n+1}} \right) (b_0 - a_0)$$

Entonces

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (b_{n+1} - a_{n+1}) = (\lim_{n \rightarrow \infty} b_{n+1}) - (\lim_{n \rightarrow \infty} a_{n+1})$$

$$= \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{b_0 - a_0}{2^{n+1}} \right) = 0$$

Luego $(\lim_{n \rightarrow \infty} b_{n+1}) - (\lim_{n \rightarrow \infty} a_{n+1}) = 0$ entonces

$$\lim_{n \rightarrow \infty} b_{n+1} = \lim_{n \rightarrow \infty} a_{n+1} = r$$

Veamos que ambos limites tiende a una raíz de f, es decir, veamos que r es una raíz f. Sabemos que $f(a_n) \cdot f(b_n) \leq 0$

Entonces si tomamos limite, como f es continua, obtenemos que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f(a_n) \lim_{n \rightarrow \infty} f(b_n) = f(\lim_{n \rightarrow \infty} a_n) f(\lim_{n \rightarrow \infty} b_n) = f(r)^2 \leq 0$$

Entonces $f(r) = 0$, por ende r es una raíz de f

Veamos que $|r - C_n| \leq \left| \frac{1}{2^{(n+1)}} (b_0 - a_0) \right|$

Tenemos que:

$$|r - C_n| \leq \left| \left(\frac{1}{2} \right) (b_{n+1} - a_{n+1}) \right| \leq \left| \left(\frac{1}{2^2} \right) (b_n - a_n) \right| \leq \dots \leq \left| \left(\frac{1}{2^{n+1}} \right) (b_0 - a_0) \right|$$

■

2.2 Metodo Newton (convergencia)

Sea $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ una funcion tal que f'' es continua y $f'(r) \neq 0$ donde r es raíz de f, entonces existe δ tal que, si el punto inicial de método de Newton X_0 satisface $|r - X_0| \leq \delta$, luego todas las aproximaciones generadas por el algoritmo $\{X_n\}$ satisfacen $|r - X_n| \leq \delta$, la sucesión $\{X_n\}$ converge a r y la convergencia es cuadrática.

$$|X_{n+1} - r| \leq C(\delta) |X_n - r|^2 \text{ (convergencia cuadrática)}$$

Dem: Sea $e_n = r - X_n$ (error en la etapa n)

En la etapa n+1, tenemos:

$$\begin{aligned}
e_{n+1} &= r - X_{n+1} = r - \left(X_n - \frac{f(X_n)}{f'(X_n)} \right) = r - X_n + \frac{f(X_n)}{f'(X_n)} = e_n + \frac{f(X_n)}{f'(X_n)} \\
&= \left(\frac{e_n f'(X_n) + f(X_n)}{f'(X_n)} \right) (1)
\end{aligned}$$

Sabemos por Taylor que f alrededor de X_n tenemos:

$f(X_n + h) = f(X_n) + f'(X_n)h + \frac{1}{2}f''(\xi_n)h^2$, luego si tomamos $h = e_n$ obtenemos

$X_n + h = X_n + e_n = X_n + (r - X_n)$, por ende

$0 = f(r) = (f(X_n) + f'(X_n)e_n + \frac{1}{2}f''(\xi_n)e_n^2)$, ξ_n entre x y r

Entonces $f(X_n) + f'(X_n)e_n = -\frac{1}{2}f''(\xi_n)e_n^2$, (2), de (1) y (2) se obtiene:

$$e_{n+1} = -\frac{1}{2} \frac{f''(\xi_n)}{f'(X_n)} e_n^2 \quad (3)$$

Para acotar (3), definimos

$$C(\delta) = \frac{1}{2} \left(\frac{\max_{\{|x-r| \leq \delta\}} |f''(x)|}{\min_{\{|x-r| \leq \delta\}} |f'(x)|} \right)$$

Como f' y f'' son continuas alrededor de r , luego $|f'(x)|$ y $|f''(x)|$ alcanzan su mínimo y su máximo, respectivamente en el intervalo cerrado y acotado $[r - \delta, r + \delta]$. Luego dado $\delta > 0$, para todo x y ξ talque $|x - r| \leq \delta$ y $|\xi - r| \leq \delta$.

Se tiene que $\frac{1}{2} \frac{f''(\xi)}{f'(x)} \leq C(\delta)$

Ahora elegimos un δ tan pequeño tal que $\delta C(\delta) < \rho$

Esto es posible si $\delta \rightarrow 0$, $C(\delta) \rightarrow \frac{1}{2} \frac{f''(r)}{f'(r)}$, bien definido, pues por hipótesis,

$f'(r) \neq 0$, por lo tanto, $\delta C(\delta) \rightarrow 0$

Supongamos que X_n es tal que $|e_n| = |X_n - r| \leq \delta$

Como ξ_n esta entre X_n y r , $|\xi_n - r| \leq \delta$

Por def de $C(\delta)$ tenemos $\frac{1}{2} \frac{f''(\xi_n)}{f'(X_n)} \leq C(\delta)$. Luego por (3)

$$|e_{n+1}| = \frac{1}{2} \frac{|f''(\xi_n)|}{|f'(X_n)|} e_n^2 \leq C(\delta) e_n^2 = C(\delta) |e_n| |e_n| \leq C(\delta) \delta |e_n| \leq \rho |e_n|$$

Luego $X_{n+1} - r = |e_{n+1}| \leq \rho |e_n| < |e_n| \leq \delta$

Por último si X_0 es talque $|X_0 - r| \leq \delta$, luego por lo anterior $|e_n| \leq \rho |e_{n+1}| \leq$

$\dots \leq \rho^n |e_0|$

Como $0 < \rho < 1$ y $e_0 \leq \delta$, $\lim_{n \rightarrow \infty} f^n = 0$, $\lim_{n \rightarrow \infty} |e_n| = 0$ y $\lim_{n \rightarrow \infty} X_n = r$

■

2.3 Propiedades de Punto Fijo

Sea g continua en $[a, b]$

(1) si $g(a) \in [a, b]$ y $g(b) \in [a, b]$ entonces existe $r \in [a, b]$ tal que $g(r) = r$

(2) si además existe g' tal que $|g'(x)| \leq k \forall x \in (a, b)$ y para algún $k \in (0, 1)$, entonces el punto fijo es único en $(a, b) \forall x \in (a, b)$

Dem:

(1) Si $g(a) = a$ ó $g(b) = b$, entonces nada que probar, si esta no existe, $g(a) > a$ y $g(b) < b$. Definimos $h(x) = g(x) - x$, h continua, en $[a, b]$, tenemos $h(a) = g(a) - a > 0$, $h(b) = g(b) - b < 0$, por lo tanto por Teorema de Valor Intermedio sabemos que existe $r \in (a, b)$ tal que $h(r) = 0$, entonces $g(r) = r$

(2) Supongamos que existen p y q en $[a, b]$ tal que $g(p) = p$, $g(q) = q$, con $p \neq q$. Por Teorema de Valor Medio, $g(p) - g(q) = g'(\xi)(p - q)$, con ξ entre p y q , luego $|p - q| = |g(p) - g(q)| = |g'(\xi)| |p - q| \leq k |p - q| < |p - q|$, absurdo, entonces $p = q$ ■

2.4 Convergencia de Punto Fijo

Sea g una función tal que $g(x) \in [a, b] \forall x \in [a, b]$, además supongamos $|g'(x)| < k$ con $0 < k < 1 \forall x \in (a, b)$. Entonces para cualquier $p_0 \in [a, b]$, la sucesión definida por $p_n = g(p_{n-1})$, para $n \geq 1$, converge al único punto fijo en $[a, b]$

Dem:

Por el teorema anterior sabemos que existe punto fijo p en $[a, b]$. Como la g transforma $[a, b]$ en sí mismo, la sucesión $\{p_n\}_n$ está bien definida $\forall n \geq 0$ y $p_n \in [a, b] \forall n$.

Veamos la convergencia:

$p_n - p = g(p_{n-1}) - g(p) = |g'(\xi_n)| |p_{n-1} - p| \leq k |p_{n-1} - p|$, luego $|p_n - p| \leq k |p_{n-1} - p| \leq \dots \leq k^n |p_0 - p|$, como $0 < k < 1$, entonces $\lim_{n \rightarrow \infty} |p_n - p| = 0$ ■

2.5 Unicidad Polinomio Interpolante

Sean x_0, \dots, x_n reales tal que $x_0 < \dots < x_n$ con y_0, \dots, y_n arbitrarias asociadas, entonces existe un único polinomio $P(x)$ tal que $\deg(P) \leq n$ que interpola a los puntos x_0, \dots, x_n , es decir $P(x_i) = y_i$, con $i = 0, \dots, n$

Dem:

(1) Interpolación

Veamos unicidad, para ello supongamos que existen dos polinomios de grado $\leq n$ tal que $P_n(x_i) = y_i$ y $Q_n(x_i) = y_i$, para $i = 0, \dots, n$. Sea

$h_n(x) = P_n(x) - Q_n(x)$, luego es un polinomio de grado $\leq n$
 Luego se observa que $h_n(x) = P_n(x) - Q_n(x) = 0$ con $i = 0, \dots, n$, pero como h_n
 es un polinomio con $(n+1)$ raíces, entonces
 $h_n(x) = 0 \forall x$, por lo tanto $P_n(x) = Q_n(x) \forall x$

Veamos existencia, vamos a demostrar su existencia mediante el metodo de lagrange y Newton, veamos primero el metodo de lagrange.

$$\ell_i(x) = \left(\frac{(x-x_0)(x-x_1)\dots(x-x_{i-1})(x-x_{i+1})\dots(x-x_n)}{(x_i-x_0)(x_i-x_1)\dots(x_i-x_{i-1})(x_i-x_{i+1})\dots(x_i-x_n)} \right)$$

$$= \prod_{\substack{j=0 \\ j \neq i}}^n \left(\frac{(x-x_j)}{(x_i-x_j)} \right)$$

Como sabemos que

$$\ell_i(x_j) = \begin{cases} 1 & j = i \\ 0 & j \neq i \end{cases}$$

$$\text{Luego } P(x) = \sum_{i=0}^n Y_i \ell_i(x)$$

$$\text{Por lo tanto } P(x_i) = \sum_{i=0}^n Y_i \ell_i(x_i) = Y_i$$

■

2.6 Error Polinomio Interpolante

Sea $f \in C^{n+1}(a, b)$ y P un polinomio de grado $\leq n$ que interpola a f en $(n+1)$ puntos distintos x_0, \dots, x_n en $[a, b]$. Entonces para cada $x \in [a, b]$ existe $\xi \in (a, b)$ tal que

$$f(X) - P(x) = \frac{1}{(n+1)!} f^{(n+1)}(\xi) \prod_{i=0}^n (x - x_i)$$

Dem:

Si $x = x_i$

$$0 = f(x_i) - P(x_i) = \frac{1}{(n+1)!} f^{(n+1)}(\xi) \prod_{j=0}^n (x_i - x_j) = 0, \text{ ya que } i \in \{0, \dots, j, \dots, n\},$$

luego vale para $x = x_i$

Si $x \neq x_i$

$$\text{Sea } w(t) = \prod_{i=0}^n (t - x_i)$$

$$C = \frac{f(x) - P(x)}{w(x)}, \text{ (constante, con } w(t) \neq 0)$$

$$\phi(t) = f(t) - P(t) - Cw(t) \text{ (función en } t), \text{ Por lo tanto}$$

Luego como $\phi(x_i) = 0$ para cada $i \in \{0, \dots, n\}$ y

$$\phi(x) = f(x) - P(x) - Cw(x) = f(x) - P(x) - \frac{f(x) - P(x)}{w(x)}, \text{ luego}$$

ϕ' tiene al menos $n+1$ raíces en $[a,b]$
 ϕ'' tiene al menos n raíces en $[a,b]$
 \vdots
 $\phi^{(n+1)}$ tiene al menos una raíz en $[a,b]$

Entonces sea ξ esa raíz de $\phi^{(n+1)}$, $\xi \in (a,b)$

Así

$$(0 = \phi^{(n+1)}(\xi) = f^{(n+1)}(\xi) - P^{(n+1)}(\xi) - Cw^{(n+1)}(\xi)) \quad (*)$$

Como $w(t) = \prod_{i=0}^n (t - x_i)$, entonces $w(t) = t^{(n+1)} + Q(x)$ $gr(Q) \leq n$

Luego $w(t)^{(n+1)} = (n+1)!$, entonces $w^{(n+1)}(\xi) = (n+1)!$

Finalmente de (*)

$$0 = f^{(n+1)}(\xi) - C(n+1)! = f^{(n+1)}(\xi) - \frac{f(x) - P(x)}{w(x)}(n+1)! = 0$$

$$f(x) - P(x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!} \prod_{i=0}^n (x - x_i) \quad \blacksquare$$

2.7 Diferencias Divididas

Las diferencias divididas satisfacen la ecuación $f[x_0, \dots, x_n] = \frac{f[x_1, \dots, x_n] - f[x_0, \dots, x_{n-1}]}{x_n - x_0}$

Dem:

Sea P_{n-1} el polinomio que interpola a f en x_0, \dots, x_{n-1} , con $gr(P_{n-1}) \leq n-1$

Sea Q el polinomio que interpola a f en x_1, \dots, x_n , con $gr(Q) \leq n-1$

Sea P_n el polinomio dado por $P_n(x) = (Q(x) + \frac{x - x_n}{x_n - x_0}(Q(x) - P_{n-1}(x)))$ (*)

Veamos que P_n interpola a f en x_0, \dots, x_n , con $gr(P_n) \leq n$

Para $i = 1, \dots, n-1$

$P_n(x_i) = f(x_i)$, ya que $Q(x_i) + \frac{x_i - x_n}{x_n - x_0}(Q(x_i) - P_{n-1}(x_i))$,
 como $Q(x_i) = f(x_i) = P_{n-1}(x_i)$, entonces $P_n = Q(x_i)$

Si $i = 0$

$P_n(x_0) = f(x_0)$, ya que $Q(x_0) + \frac{x_0 - x_n}{x_n - x_0}(Q(x_0) - P_{n-1}(x_0))$

Como $\frac{x_0 - x_n}{x_n - x_0} = -1$, entonces

$$Q(x_0) + \frac{x_0 - x_n}{x_n - x_0}(Q(x_0) - P_{n-1}(x_0)) = P_{n-1}(x_0) = f(x_0)$$

Si $i = n$

$P_n(x_n) = f(x_n)$, ya que $Q(x_n) + \frac{x_n - x_n}{x_n - x_0}(Q(x_n) - P_{n-1}(x_n))$

Como $\frac{x_n - x_n}{x_n - x_0} = 0$, entonces

$$Q(x_n) + \frac{x_n - x_n}{x_n - x_0}(Q(x_n) - P_{n-1}(x_n)) = Q(x_n) = f(x_n)$$

Luego P_n y $(*)$ son pol de grado $\leq n$ que interpola a f en los $(n+1)$ puntos x_0, \dots, x_n , por unicidad del polinomio interpolante, P_n y $(*)$ son los mismos polinomios.

Veamos cual es el coeficiente de x^n , como

$$P_n(x) = Q(x) + \frac{x - x_n}{x_n - x_0}(Q(x) - P_{n-1}(x)), \text{ tenemos}$$

$$f[x_0, \dots, x_n] = \frac{f[x_1, \dots, x_n] - f[x_0, \dots, x_{n-1}]}{x_n - x_0}$$

■

2.8 Punto que no pertenece a los puntos de interpolación

Sea P el polinomio de grado $\leq n$ que interpola f en los $(n+1)$ nodos x_0, \dots, x_n (distintos).

Si t es un punto distinto de los nodos, entonces

$$f(t) - P(t) = f[x_0, \dots, x_n, t] \prod_{i=0}^n (t - x_i)$$

Dem: Sea Q el polinomio de grado $\leq n + 1$ que interpola a f en los puntos x_0, \dots, x_n, t . Entonces

$$Q(x) = P(x) + f[x_0, \dots, x_n, t] \prod_{i=0}^n (t - x_i)$$

Como $Q(t) = f(t)$, obtenemos $f(t) - P(t) = f[x_0, \dots, x_n, t] \prod_{i=0}^n (t - x_i)$ ■

2.9 Relacion Diferencias Divididas con derivada n-ésima

Si f es n veces continuamente diferenciable en (a, b) y x_0, \dots, x_n nodos distintos en $[a, b]$, entonces existe $\xi \in (a, b)$ tal que

$$f[x_0, \dots, x_n] = \frac{f^{(n)}(\xi)}{n!}$$

Dem:

Sea P el polinomio de grado $\leq n - 1$ que interpola a f en x_0, \dots, x_{n-1} .

Por el teorema del error en el polinomio interpolante tenemos

$$f(x_n) - P(x_n) = \frac{f^{(n)}(\xi)}{n!} \prod_{i=0}^{n-1} (x_n - x_i) \quad (A)$$

Por el teorema anterior

$$f(x_n) - P(x_n) = f[x_0, \dots, x_n] \prod_{i=0}^{n-1} (x_n - x_i) \quad (\text{B})$$

Por lo tanto de (A) y (B) se obtiene $f[x_0, \dots, x_n] = \frac{f^{(n)}(\xi)}{n!}$

■

2.10 Error en la interpolacion en un punto

Sea f definida en $[a, b]$, n veces continuamente derivable en $[a, b]$. Sean $x_0, \dots, x_n \in [a, b]$ distintos, $y \in [a, b]$. Entonces

$$\lim_{(x_0, \dots, x_n) \rightarrow (y, \dots, y)} f[x_0, \dots, x_n] = \frac{f^{(n)}(y)}{n!}$$

Dem:

Sabemos que $\exists \xi \in (a, b)$ tal que

$$f[x_0, \dots, x_n] = \frac{f^{(n)}(\xi)}{n!}$$

Por ende si $(x_0, \dots, x_n) \rightarrow (y, \dots, y)$, entonces $\xi \rightarrow y$

Luego tomamos el limite:

$$\lim_{(x_0, \dots, x_n) \rightarrow (y, \dots, y)} f[x_0, \dots, x_n] = \lim_{(x_0, \dots, x_n) \rightarrow (y, \dots, y)} \frac{f^{(n)}(\xi)}{n!} = \frac{f^{(n)}(y)}{n!}$$

■

2.11 Linealmente Independiente

Si ϕ_j es un polinomio de grado j , $j = 0, \dots, n$, entonces $\{\phi_0, \dots, \phi_n\}$ es LI en cualquier intervalo $[a, b]$

Dem:

Sean $C_0, \dots, C_n \in \mathbb{R}$ tal que $P(x) = C_0\phi_0(x) + \dots + C_n\phi_n(x) = 0$, para cada $x \in [a, b]$. Queremos ver que $C_j = 0$, para $j = 0, \dots, n$. Como $P(x)$ se anula para cada $x \in [a, b]$, los coeficientes de cada potencia de x debe ser cero. En particular, el coeficiente de x^n es cero. Como el único término que x^n es $C_n\phi_n(x)$, entonces $C_n = 0$. Luego

$P(x) = C_0\phi_0(x) + \dots + C_{n-1}\phi_{n-1}(x)$. Repitiendo esto $(n-1)$ veces obtenemos $C_1 = \dots = C_n = 0$

2.12 $A^T Ax = A^T b \Leftrightarrow x$ minimiza cuadrados minimos

Sea $A \in \mathbb{R}^{n \times m}$, $x \in \mathbb{R}^m$ con $m \leq n$ es solución del problema de cuadrados mínimos si y solo si

$A^T Ax = A^T b$ para algun $b \in \mathbb{R}^n$, Ademas si A tiene rango pmpeto, la solución x es única.

Dem:

Probemos primero \Rightarrow)

Si x es solución del problema de cuadrados minimos debemos ver que resuelve el sistema $A^T Ax = A^T b$, para algún b

Por hipotesis $\|b - Ax\|^2 \leq \|b - Ay\|^2$, para todoy $y \in \mathbb{R}^m$

Sea $y = x + tz$ con $z \in \mathbb{R}^m$, entonces

$\|b - Ax\|^2 \leq \|b - Ay\|^2 = \|b - A(x + tz)\|^2 = \|b - Ax - Atz\|^2$, entonces obtenemos

$$0 \leq -2t\langle b - Ax, Az \rangle + t^2\|Az\|^2$$

$$2t\langle b - Ax, Az \rangle \leq t^2\|Az\|^2, \text{ ahora}$$

Si $t > 0$

$$2\langle b - Ax, Az \rangle \leq t\|Az\|^2$$

si $t < 0$

$$t\|Az\|^2 \leq 2\langle b - Ax, Az \rangle, \text{ por ende si tomo el limite de ambos lados}$$

$\langle b - Ax, Az \rangle = 0$, luego

$$0 = (Az)^T(b - Ax) = z^T A^T(b - Ax) = z^T(A^T b - A^T Ax), \text{ entonces}$$

$$A^T - A^T Ax = 0, \text{ por lo tanto } A^T Ax = A^T b$$

\Leftarrow) Probemos que si \bar{x} es solución de $A^T Ax = A^T b$ entonces es minimizador de $\|b - Ax\|$

Quiero ver que $\|b - A\bar{x}\|^2 \leq \|b - Ax\|^2$, para todo $x \in \mathbb{R}^m$

$$\|Ax - b\|^2 = \|Ax - A\bar{x} + A\bar{x} - b\|^2 = \|Ax - A\bar{x}\|^2 + 2\langle Ax - A\bar{x}, A\bar{x} - b \rangle + \|A\bar{x} - b\|^2$$

$$\text{Veamos que } 0 \leq \langle Ax - A\bar{x}, A\bar{x} - b \rangle$$

$$\langle A(x - \bar{x}), A\bar{x} - b \rangle = \langle A\bar{x} - b, A(x - \bar{x}) \rangle = (A(x - \bar{x}))^T (A\bar{x} - b)$$

$$(x - \bar{x})^T A^T (A\bar{x} - b) = (x - \bar{x})^T (A^T A\bar{x} - A^T b) = 0, \text{ por lo tanto}$$

$$\|A\bar{x}\|^2 \leq \|Ax - b\|^2, \text{ para todo } x \in \mathbb{R}^m \blacksquare$$

2.13 $A^t Ax = A^t b$ única solución $\Leftrightarrow A$ rango completo

Preguntar ■

2.14 Error trapecio integración numérica

$$\text{Error trapecio} = -f''(\xi) \frac{(b-a)^3}{12}$$

Dem:

(1) Error de interpolación

(2) Teorema de valor intermedio para integrales

$$f(x) - P(x) = {}^{(1)} \frac{1}{2!} f''(\xi_x)(x-a)(x-b), \text{ donde } \xi_x \in [a, b]$$

Ahora

$$\begin{aligned} \int_a^b f(x) - P(x) dx &= \frac{1}{2!} \int_a^b f''(\xi_x)(x-a)(x-b) dx \\ &= {}^{(2)} \frac{1}{2!} f''(\xi) \int_a^b (x-a)(x-b) dx = -f''(\xi) \frac{(b-a)^3}{12} \blacksquare \end{aligned}$$

2.15 Error simpson integración numérica

$$\text{Error simpson} = -\frac{(b-a)^5}{90} f^{(4)}(\xi)$$

Dem:

El término de error en la regla de simpson se puede establecer usando la serie de Taylor

$$f(a+h) = f + hf' + \frac{1}{2!} h^2 f'' + \dots, \text{ luego por sustitución obtenemos}$$

$$f(a+2h) = f + 2hf' + \frac{1}{2!} 2h^2 f'' + \dots, \text{ con estas 2 series se obtiene}$$

$$f(a) + 4f(a+h) + f(a+2h) = 6f + 6hf' + 4h^2 f'' + \dots, \text{ y así tenemos}$$

$$\frac{h}{3} [f(a) + 4f(a+h) + f(a+2h)] = 2hf + 2h^2 f' + \frac{4}{3} h^3 f'' + \dots, \text{ luego por serie de Taylor}$$

$$F(a+2h) = F(a) + 2hF'(a) + 2h^2 F''(a) + \dots$$

$$\text{Sea } F(x) = \int_a^x f(t) dt, \text{ por el teorema fundamental del cálculo, } F' = f, \text{ obtenemos}$$

$$\int_a^{a+2h} f(x)dx = 2hf + 2h^2 f' + \frac{4}{3}h^3 f'' + \dots, \text{ luego}$$

$$\int_a^b f(x)dx \approx \frac{(b-a)}{6} \left[f(a) + 4f\left(\frac{a+b}{2}\right) + f(b) \right], \text{ con el termino de error}$$

$$-\frac{1}{90} \left(\frac{b-a}{2} \right)^5 f^{(4)}(\xi), \text{ para algun } \xi \text{ en } (a,b), \text{ ya que}$$

$$\mathcal{O}(h^5) = -\frac{h^5}{90} f^{(4)}(\xi) \blacksquare$$

2.16 Teorema Regla Cuadratura gaussiana

Sea $w(x) > 0, q(x)$ un polinomio distinto de cero y de grado $n+1$ que es ortogonal a Π_n , esto es

$$\int_a^b q(x)p(x)w(x)dx = 0, \text{ para todo } p \in \Pi_n,$$

si x_0, \dots, x_n son los ceros de $q(x)$, entonces $\int_a^b f(x)w(x)dx$ es exacto para Π_{2n+1}

Dem:

Sea $f \in \Pi_{2n+1}$, con

$$f \equiv qP + r, \text{ con } P, r \in \Pi_{2n+1}, \text{ luego}$$

$$f(x_i) = q(x_i)P(x_i) + r(x_i) = r(x_i), \text{ ya que } q(x_i) = 0$$

Por lo tanto

$$\begin{aligned} \int_a^b f(x)w(x)dx &= \int_a^b (q(x)P(x) + r(x))w(x)dx = \int_a^b r(x)w(x)dx = \sum_{i=0}^n r(x_i)A_i = \\ &= \sum_{i=0}^n f(x_i)A_i \blacksquare \end{aligned}$$

2.17 Teorema de numeros de cambio de signo int numerica

Sea $w(x) > 0$, sea f distinta de cero y continua en $a = t_0 < \dots < t_n = b$, donde P es w -ortogonal a Π_n , entonces f cambia de signo $n+1$ veces en el (a,b)

Dem:

Veamos que existe un cambio de signo en el (a,b) , sabemos que $1 \in \Pi_n$, luego

$\int_a^b f(x)w(x)dx = 0$, entonces f tiene al menos un cero en (a,b) .

Ahora veamos que hay $n+1$ cambios de signo

Supongamos que hay $r \leq n$ cambios de signo y sean t_0, \dots, t_{r+1} donde ocurre un cambio de signo, luego

f tiene un signo $[t_0, t_1)$

f tiene un signo (t_1, t_2)

.

.

.

f tiene un signo $[t_r, t_{r+1})$

Ahora, sea

$$P(x) = \prod_{i=1}^r (x - t_i), \text{ entonces } gr(P) \leq r \leq n$$

Como $P(x)$ cambia de signo en los mismos intervalos que f , tiene los mismos signos, luego

$$\int_a^b f(x)P(x)w(x)dx \neq 0, \text{ absurdo, pues } f \text{ es ortogonal a } P \text{ por hipotesis}$$

$$\text{por lo tanto } \int_a^b f(x)P(x)w(x)dx = 0, \text{ por lo tanto } n + 1 \leq r \blacksquare$$

2.18 Convergencia de Gauss Seidel

Si A tiene dominio diagonal, entonces los metodos de Gauss-Seidel converge

Dem:

Sea $\delta(I - Q^{-1}A) < 1$, sea x un autovector de autovalor λ y $\|x\|_\infty = 1$, entonces $(I - Q^{-1}A)x = \lambda x$ ó $Qx - Ax = \lambda Qx$, luego

$$-Ux = \lambda Qx$$

$$- \sum_{j \neq i+1}^n a_{ij}x_j = \lambda \sum_{j=1}^i a_{ij}x_j = \lambda a_{ii} + \lambda \sum_{j=1}^{i-1} a_{ij}x_j, \text{ con } 1 \leq i \leq n$$

$$\lambda a_{ii}x_i = - \sum_{j=i+1}^n a_{ij}x_j - \lambda \sum_{j=1}^{i-1} a_{ij}x_j$$

Sea k tal que $|x_\ell| \leq |x_k| = 1$, para todo ℓ , luego sea $i = k$

$$|\lambda| |a_{kk}| \leq \sum |a_{kj}| + |\lambda| \sum_{j=1}^{k-1} |a_{kj}|, \text{ por lo tanto}$$

$$|\lambda| \leq \frac{\sum_{j=k+1}^n |a_{kj}|}{(|a_{kk}| - \sum_{j=1}^{k-1} |a_{kj}|)} < 1$$

Entonces $\delta(I - Q^{-1}A) < 1$, veamos que Gauss-Seidel converge

$$|a_{kk}| > \sum_{j < k} |a_{kj}| + \sum_{j > k} |a_{kj}|, \text{ luego}$$

$$|a_{kk}| - \sum_{j < k} |a_{kj}| > \sum_{j > k} |a_{kj}|$$

$$1 > \frac{\sum_{j > k} |a_{kj}|}{|a_{kk}| - \sum_{j < k} |a_{kj}|}, \text{ por lo tanto converge} \blacksquare$$