1 Teoremas sin demostracion

1.1 Teorema del valor intermedio para funciones continuas

Sea f una funcion continua en [a,b] sea d entre f(a) y f(b) entonces existe $c \in [a, b]$ tal que$f(c) = d$

1.2 Teorema del valor medio

Sea f una funcion continua en [a,b] y derivable en (a,b). Entonces para cada $x, c \in [a, b]$ se cumple que $\left(\dfrac{f(x) - f(c)}{x - c}\right) = f'(\xi)$, para algún ξ entre x y c

1.3 Teorema del Taylor

Sea $f \in C^{(n)}[a, b]$ y existe $f^{(n+1)}$ en (a,b), entonces $\forall x, c \in [a, b]$ se tiene:
$f(x) = \sum\limits_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} f^{(k)}(c)(x - c)^k + E_n(x)$ donde
$E_n(x) = \frac{1}{(n+1)!} f^{(n+1)}(\xi)(x - c)^{n+1}$ con ξ entre x y c

1.4 Metodo Newton Global

Sea una función, tal que f" continua, f convexa, creciente y tiene un raíz, entoncesraíz es único y el metodo de Newton converge $\forall x_0 \in \mathbb{R}$

1.5 Unicidad de conjunto linealmente independiente

Si $\{\phi_0(x), ..., \phi_n(x)\}$ es un conjunto LI(linealmente independiente) en el espacio de polinomio de grado $\leq n$, entonces todo polinomio de grado $\leq n$ puede escribirse de manera única como combinación lineal de $\{\phi_0(x), ..., \phi_n(x)\}$

1.6 Aproximación por mínimos cuadrados

Si $\{\phi_0, ..., \phi_n\}$ es un conjunto ortogonal de funciones en [a,b] respecto de w, entonces la aproximación de cuadrados mínimos a f en [a,b] es
$P(x) = \sum\limits_{k=0}^{n} a_k \phi_k(x)$, para $k = 0, ..., n$, donde

$$a_k = \frac{\displaystyle\int_a^b w(x)f(x)\phi_k(x)dx}{\displaystyle\int_a^b w(x)(\phi_k(x))^2dx}$$

1.7 Relación de recurrencia

El conjunto de funciones polinomiales $\{\phi_0, ..., \phi_n\}$ definido de la siguiente forma ortogonal en [a,b], respecto de la función de w(x)
$\phi_0(x) = 1$, $\phi_1(x) = x - B_1$, $x \in [a, b]$, donde

$$B_1 = \frac{\displaystyle\int_a^b w(x)x(\phi_0(x))^2dx}{\displaystyle\int_a^b w(x)(\phi_0(x))^2dx},$$

Para $k \geq 2$
$\phi_k(x) = (x - B_k)\phi_{k-1}(x) - C_k\phi_{k-2}(x)$, $x \in [a, b]$, donde

$$B_k = \frac{\displaystyle\int_a^b w(x)x(\phi_{k-1}(x))^2dx}{\displaystyle\int_a^b w(x)(\phi_{k-1}(x))^2dx}, \text{ y}$$

$$C_k = \frac{\displaystyle\int_a^b w(x)x(\phi_{k-2}(x))^2dx}{\displaystyle\int_a^b w(x)(\phi_{k-2}(x))^2dx}$$

1.8 Corolario

Para todo $n > 0$ el conjunto de funciones gemeradas en el teorema de Relación de recurrencias(anterior) es LI en [a,b] y $\displaystyle\int_a^b w(x)\phi_n(x)\phi_k(x)dx = 0$ con $k < n$

1.9 Regla compuesta de simpson

Sean $f \in C^4[a, b]$, n par, $h = \frac{b-a}{n}$, $x_j = a + jh$, con $j = 0, ..., n$, entonces existe $\mu \in (a, b)$ talque la regla compuesta de Simpson para n subintervalos puede escribirse

$$\int_a^b f(x)dx = \frac{h}{3}\left[f(a) + 2\sum_{j=1}^{\frac{n}{2}-1} f(x_{2j}) + 4\sum_{j=1}^{\frac{n}{2}} f(x_{2j} - 1) + f(b)\right] - \frac{b-a}{180}h^4 f^{(4)}(\mu)$$

1.10 Regla del trapecio compuesta

Sean $f \in C^2[a,b]$, $h = \frac{b-a}{n}$, $x_j = a + jh$, con $j = 0, ..., n$, entonces existe $\mu \in (a,b)$ talque la regla compuesta del Trapecio para n subintervalos puede escribirse

$$\int_a^b f(x)dx = \frac{h}{2}\left[f(a) + 2\sum_{j=1}^{n-1} f(x_j) + f(b)\right] - \frac{b-a}{12}h^2 f''(\mu)$$

1.11 Regla del punto medio compuesta

Sean $f \in C^2[a,b]$, $, npar, h = \frac{b-a}{n+2}$, $x_j = a + (j+1)h$, con $j = -1, ..., n+1$, entonces existe $\mu \in (a,b)$ talque la regla del punto medio compuesta para $(n+2)$ subintervalos es:

$$\int_a^b f(x)dx = 2h\sum_{j=0}^{\frac{n}{2}} f(x_{2j}) + \frac{b-a}{6}h^2 f''(\mu)$$

2 Teoremas con demostracion

2.1 Metodo Biseccion (convergencia)

Si $[a_0, b_0]$, $[a_1, b_1]$,....., $[a_n, b_n]$,.... denotan los sucesivos intervalos del método de bisección, entonces $\exists \lim_{n\to\infty} a_n, \lim_{n\to\infty} b_n$ donde son iguales representan una raíz de f.
Si $C_n = \left(\dfrac{a_n + b_n}{2}\right)$ y $r = \lim_{n\to\infty} C_n$ entonces $\frac{a_n+b_n}{2}$
$|r - C_n| \leq |\frac{1}{2^{(n+1)}}(b_0 - a_0)|$

Dem: Si $[a_0, b_0], [a_1, b_1], ...$ son los intervalos del algoritmo de bisección. Entonces
(1) $a_0 \leq a_1 \leq ... \leq b_0$
(2) $b_0 \leq b_1 \leq ... \leq a_0$
(3) $b_{n+1} - a_{n+1} = \frac{1}{2}(b_n - a_n)$
Como sabemos que $\{a_n\}$ es acotada superiormente, además es no decreciente, entonces es convergente (1)
Luego como $\{b_n\}$ es acotada inferiormente, además es no creciente, entonces es convergente (2)
Ademas
$b_{n+1} - a_{n+1} = \left(\dfrac{1}{2}\right)(b_n - a_n) = \left(\dfrac{1}{2^2}\right)(b_{n-1} - a_{n-1}) = ... = \left(\dfrac{1}{2^{n+1}}\right)(b_0 - a_0)$
Entonces

$\lim_{n\to\infty}(b_{n+1}-a_{n+1}) = (\lim_{n\to\infty} b_{n+1}) - (\lim_{n\to\infty} a_{n+1})$
$= \lim_{n\to\infty}\left(\dfrac{b_0-a_0}{2^{n+1}}\right) = 0$

Luego $(\lim_{n\to\infty} b_{n+1}) - (\lim_{n\to\infty} a_{n+1}) = 0$ entonces
$\lim_{n\to\infty} b_{n+1} = \lim_{n\to\infty} a_{n+1} = r$

Veamos que ambos limites tiende a una raíz de f, es decir, veamos que r es una raíz f. Sabemos que f(a_n)*f(b_n) ≤ 0
Entonces si tomamos limite, como f es continua, obtenemos que
$\lim_{n\to\infty} f(a_n)\lim_{n\to\infty} f(b_n) = f(\lim_{n\to\infty} a_n)f(\lim_{n\to\infty} b_n) = f(r)^2 \leq 0$
Entonces $f(r) = 0$, por ende r es una raíz de f
Veamos que $|r - C_n| \leq |2^{-(n+1)}(b_0 - a_0)|$
Tenemos que:
$|r - C_n| \leq \left|\left(\dfrac{1}{2}\right)(b_{n+1} - a_{n+1})\right| \leq \left|\left(\dfrac{1}{2^2}\right)(b_n - a_n)\right| \leq ... \leq \left|\left(\dfrac{1}{2^{n+1}}\right)(b_0 - a_0)\right|$
■

2.2 Metodo Newton (convergencia)

Sea f : $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una funcion tal que f" es continua y f'(r) $\neq 0$ donde r es raíz de f, entonces existe δ tal que, si el punto inicial de método de Newton X_0 satisface $|r - X_0| \leq \delta$, luego todas las aproximaciones generadas por el algoritmo$\{X_n\}$ satisfacen $|r - X_n| \leq \delta$, la sucesión $\{X_n\}$ converge a r y la convergencia es cuadrática.
$|X_{n+1} - r| \leq C(\delta)\,|X_n - r|^2$ (convergencia cuadrática)

Dem: Sea $e_n = r - X_n$(error en la etapa n)
En la etapa n+1, tenemos:
$e_{n+1} = r - X_{n+1} = r - \left(X_n - \dfrac{f(X_n)}{f'(X_n)}\right) = r - X_n + \dfrac{f(X_n)}{f'(X_n)} = e_n + \dfrac{f(X_n)}{f'(X_n)}$
$= \left(\dfrac{e_n f'(X_n) + f(X_n)}{f'(X_n)}\right)(1)$

Sabemos por Taylor que f alrededor de X_n tenemos:
$f(X_n + h) = f(X_n) + f'(X_n)h + \frac{1}{2}f''(\xi_n)h$, luego si tomamos $h = e_n$ obtenemos $X_n + h = X_n + e_n = X_n + (r - X_n)$, por ende
$0 = f(r) = (f(X_n) + f'(X_n)e_n + f''(\xi_n)e_n^2)$, ξ_n entre x y r
Entonces $f(X_n) + f'(X_n)e_n = -\frac{1}{2}f''(\xi_n)e_n^2$, (2), de (1) y (2) se obtiene:
$e_{n+1} = -\frac{1}{2}\frac{f''(\xi_n)}{f'(X_n)}e_n^2$ (3)

Para acotar (3), definimos

$C(\delta) = \frac{1}{2}\left(\frac{\max_{\{|x-r|\leq\delta\}}|f''(x)|}{\min_{\{|x-r|\leq\delta\}}|f'(x)|}\right)$

Como f' y f" son continuas alrededor de r, luego $|f'(x)|$ y $|f''(x)|$ alcanzan su mínimo y su máximo, respectivamente en el intervalo cerrado y acotado $[r-\delta, r+\delta]$. Luego dado $\delta > 0$, para todo x y ξ talque $|x - r \leq \delta|$ y $|\xi - r| \leq \delta$. Se tiene que $\frac{1}{2}\frac{f''(\xi)}{f'(x)} \leq C(\delta)$

Ahora elegimos un δ tan pequeño tal que $\delta C(\delta) < \rho$
Esto es posible si $\delta \to 0$, $C(\delta) \to \frac{1}{2}\frac{f''(r)}{f'(r)}$, bien definido, pues por hipótesis, $f'(r) \neq 0$, por lo tanto, $\delta C(\delta) \to 0$
Supongamos que X_n es tal que $|e_n| = |X_n - r| \leq \delta$
Como ξ_n esta entre X_n y r, $|\xi_n - r| \leq \delta$
Por def de $C(\delta)$ tenemos $\frac{1}{2}\frac{f''(\xi_n)}{f'(X_n)} \leq C(\delta)$. Luego por (3)

$|e_{n+1}| = \frac{1}{2}\frac{|f''(\xi_n)|}{|f'(X_n)|}e_n^2 \leq C(\delta)e_n^2 = C(\delta)|e_n||e_n| \leq C(\delta)\delta|e_n| \leq \rho|e_n|$

Luego $X_{n+1} - r = |e_{n+1}| \leq \rho|e_n| < |e_n| \leq \delta$
Por último si X_0 es talque $|X_0 - r| \leq \delta$, luego por lo anterior $|e_n| \leq \rho|e_{n+1}| \leq ... \leq \rho^n|e_0|$
Como $0 < \rho < 1$ y $e_0 \leq \delta$, $\lim_{n\to\infty} f^n = 0$, $\lim_{n\to\infty}|e_n| = 0$ y $\lim_{n\to\infty} X_n = r$
■

2.3 Propiedades de Punto Fijo

Sea g continua en [a,b]
(1) si $g(a) \in [a,b]$ y $g(b) \in [a,b]$ entonces existe $r \in [a,b]$ tal que $g(r) = r$
(2) si ademas existe g' tal que $|g(x)| \leq k$ $\forall x \in (a,b)$ y para algún $k \in (0,1)$, entonces el punto fijo es único en (a,b) $\forall x \in (a,b)$

Dem:
(1) Si $g(a) = a$ ó $g(b) = b$, entonces nada que probar, si esta no existe, $g(a) > a$ y $g(b) < b$. Definimos $h(x) = g(x) - x$, h continua, en [a,b], tenemos $h(a) = g(a) - a > 0$, $h(b) = g(b) - b < 0$, por lo tanto por Teorema de Valor Intermedio sabemos que existe $r \in (a,b)$ tal que $h(r) = 0$, entonces $g(r) = r$

(2) Supongamos que existen p y q en [a,b] tal que $g(p) = p$, $g(q) = q$, con $p \neq q$
Por Teorema de Valor Medio, $g(p) - g(q) = g'(\xi)(p-q)$, con ξ entre p y q, luego $|p-q| = |g(p) - g(q)| = |g'(\xi)||(p-q)| \leq k|p-q| < |p-q|$, absurdo, entonces $p = q$■

2.4 Convergenca de Punto Fijo

Sea g una función tal que $g(x) \in [a,b]\ \forall x \in [a,b]$, ademas supongamos $|g'(x)| < k$ con $0 < k < 1\ \forall x \in (a,b)$. Entonces para cualquier $p_0 \in [a,b]$, la sucesión definida por $p_n = g(p_{n-1})$, para $n \geq 1$, converge al unico punto fijo en [a,b]

Dem:
Por el teorema anterior sabemos que existe punto fijo p en [a,b]. Como la g transforma [a,b] en si mismo, la sucesión $\{p_n\}_n$ esta bien definida $\forall n \geq 0$ y $p_n \in [a,b] \forall n$.
Veamos la convergencia:
$p_n - p = g(p_{n-1}) - g(p) = |g'(\xi_n)||p_{n-1} - p| \leq k|p_{n-1} - p|$, luego
$|p_n - p| \leq k|p_{n-1} - p| \leq .... \leq k^n|p_0 - p|$, como $0 < k < 1$, entonces
$\lim_{n\to\infty} |p_n - p| = 0$ ■

2.5 Unicidad Polinomio Interpolante

Sean $x_0, ..., x_n$ reales tal que $x_0 < ... < x_n$ con $y_0, ..., y_n$ arbitrarias asociadas, entoces existe un único polinomio $P(x)$ tal que $gr(P) \leq n$ que interpola a los puntos $x_0, ..., x_n$, es decir $P(x_i) = y_i$, con $i = 0, ..., n$

Dem:
(1) Interpolación
Veamos unicidad, para ello supongamos que existen dos polinomios de grado $\leq n$ tal que $P_n(x_i) = y_i$ y $Q_n(x_i) = y_i$, para $i = 0, ..., n$. Sea

$h_n(x) = P_n(x) - Q_n(x)$, luego es un polinomio de grado $\leq n$
Luego se observa que $h_n(x) = P_n(x) - Q_n(x) = 0$ con $i = 0, ..., n$, pero como h_n es un polinomio con (n+1) raíces, entonces
$h_n(x) = 0\ \forall x$, por lo tanto $P_n(x) = Q_n(x)\ \forall x$

Veamos existencia, vamos a demostrar su existencia mediante el metodo de lagrange y Newton, veamos primero el metodo de lagrange.
$\ell_i(x) = \left(\dfrac{(x-x_0)(x-x_1)...(x-x_{i-1})(x-x_{i+1})...(x-x_n)}{(x_i-x_0)(x_i-x_1)...(x_i-x_{i-1})(x_i-x_{i+1}...(x_i-x_n)}\right)$
$= \prod_{\substack{j=0 \\ j\neq i}}^{n} \left(\dfrac{(x-x_i)}{(x_i-x_j)}\right)$
Como sabemos que

$$\ell_i(x_j) = \begin{cases} 1 & j = i \\ 0 & j \neq i \end{cases}$$

Luego $P(x) = \sum\limits_{i=0}^{n} Y_i \ell_i(x)$

Por lo tanto $P(x_i) = \sum\limits_{i=0}^{n} Y_i \ell_i(x_i) = Y_i$

■

2.6 Error Polinomio Interpolante

Sea $f \in C^{n+1}(a,b)$ y P un polinomio de grado$\leq n$ que interpola a f en (n+1) puntos distintos $x_0, ..., x_n$ en [a,b]. Entonces para cada $x \in [a,b]$ existe $\xi \in (a,b)$ tal que

$f(X) - P(x) = \dfrac{1}{(n+1)!} f^{(n+1)}(\xi) \prod\limits_{i=0}^{n}(x - x_i)$

Dem:

Si $x = x_i$

$0 = f(x_i) - P(x_i) = \dfrac{1}{(n+1)!} f^{(n+1)}\xi \prod\limits_{j=0}^{n}(x_i - x_j) = 0$, ya que $i \in \{0, ..., j, ..., n\}$,

luego vale para $x = x_i$

Si $x \neq x_i$

Sea $w(t) = \prod\limits_{i=0}^{n}(t - x_i)$

$C = \frac{f(x) - p(x)}{w(x)}$, (constante, con $w(t) \neq 0$)

$\phi(t) = f(t) - P(t) - Cw(t)$ (función en t), Por lo tanto

Luego como $\phi(x_i) = 0$ para cada $i \in \{0, ..., n\}$ y

$\phi(x) = f(x) - P(x) - Cw(x) = f(x) - P(x) - \frac{f(x) - P(x)}{w(x)}$, luego

ϕ' tiene al menos n+1 raices en [a,b]

ϕ'' tiene al menos n raices en [a,b]

.

.

.

$\phi^{(n+1)}$ tiene al menos una raíz en [a,b]

Entonces sea ξ esa raíz de $\phi^{(n+1)}, \xi \in (a,b)$

Asi

$(0 = \phi^{(n+1)}(\xi) = f^{(n+1)}(\xi) - P^{(n+1)}(\xi) - Cw^{(n+1)}(\xi))$ (*)

Como $w(t) = \prod\limits_{i=0}^{n}(t - x_i)$, entonces $w(t) = t^{(n+1)} + Q(x)\ gr(Q) \leq n$

Luego $w(t)^{(n+1)} = (n+1)!$, entonces $w^{(n+1)}(\xi) = (n+1)!$

Finalmente de (*)
$0 = f^{(n+1)}(\xi) - C(n+1)! = f^{(n+1)}(\xi) - \frac{f(x)-P(x)}{w(x)}(n+1)! = 0$
$f(x) - P(x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!} \prod\limits_{i=0}^{n}(x - x_i)$ ■

2.7 Diferencias Divididas

Las diferencias divididas satisfacen la ecuación $f[x_0, ..., x_n] = \frac{f[x_1,...,x_n]-f[x_0,...,x_{n-1}]}{x_n-x_0}$

Dem:
Sea P_{n-1} el polinomio que interpola a f en $x_0, ..., x_{n-1}$, con $gr(P_{n-1}) \leq n-1$
Sea Q el polinomio que interpola a f en $x_1, ..., x_n$, con $gr(Q) \leq n-1$
Sea P_n el polinomio dado por $P_n(x) = (Q(x) + \frac{x-x_n}{x_n-x_0}(Q(x) - P_{n-1}(x)))$(*)

Veamos que P_n interpola a f en $x_0, ..., x_n$, con $gr(P_n) \leq n$
Para $i = 1, ..., n-1$
$P_n(x_i) = f(x_i)$, ya que $Q(x_i) + \frac{x_i-x_n}{x_n-x_0}(Q(x_i) - P_{n-1}(x_i))$,
como $Q(x_i) = f(x_i) = P_{n-1}(x_i)$, entonces $P_n = Q(x_i)$

Si $i = 0$
$P_n(x_0) = f(x_0)$, ya que $Q(x_0) + \frac{x_0-x_n}{x_n-x_0}(Q(x_0) - P_{n-1}(x_0))$
Como $\frac{x_0-x_n}{x_n-x_0} = -1$, entonces
$Q(x_0) + \frac{x_0-x_n}{x_n-x_0}(Q(x_0) - P_{n-1}(x_0)) = P_{n-1}(x_0) = f(x_0)$

Si $i = n$
$P_n(x_n) = f(x_n)$, ya que $Q(x_n) + \frac{x_n-x_n}{x_n-x_0}(Q(x_n) - P_{n-1}(x_n))$
Como $\frac{x_n-x_n}{x_n-x_0} = 0$, entonces
$Q(x_n) + \frac{x_n-x_n}{x_n-x_0}(Q(x_n) - P_{n-1}(x_n)) = Q(x_n) = f(x_n)$

Luego P_n y (*) son pol de grado $\leq n$ que interpola a f en los (n+1) puntos $x_0, ..., x_n$, por unicidad del polinomio interpolante, P_n y (*) son los mismos polinomios.

Veamos cual es el coeficiente de x^n, como
$P_n(x) = Q(x) + \frac{x-x_n}{x_n-x_0}(Q(x) - P_{n-1}(x))$, tenemos
$f[x_0, ..., x_n] = \frac{f[x_1,...,x_n]-f[x_0,...,x_{n-1}]}{x_n-x_0}$
■

2.8 Punto que no pertenece a los puntos de interpolación

Sea P el polinomio de grado $\leq n$ que interpola f en los (n+1) nodos $x_0, ..., x_n$(distintos). Si t es un punto distinto de los nodos, entonces
$f(t) - P(t) = f[x_0, ..., x_n, t] \prod_{i=0}^{n} (t - x_i)$

Dem: Sea Qel polinomio de grado $\leq n + 1$ que interpola a f en los pintos $x_0, ..., x_n, t$.Entoces
$Q(x) = P(x) + f[x_0, ..., x_n, t] \prod_{i=0}^{n} (t - x_i)$
Como $Q(t) = f(t)$, obtenemos $f(t) - P(t) = f[x_0, ..., x_n, t] \prod_{i=0}^{n} (t - x_i)$■

2.9 Relacion Diferencias Divididas con derivada n-ésima

Si f es n veces continuamente diferenciable en (a,b) y $x_0, ..., x_n$ nodos distintos en [a,b], entonces existe $\xi \in (a, b)$ tal que
$f[x_0, ..., x_n] = \frac{f^{(n)}(\xi)}{n!}$

Dem:
Sea P el polinomio de grado $\leq n - 1$ que interpola a f en $x_0, ..., x_{n-1}$.
Por el teorema del error en el polinomio interpolante tenemos
$f(x_n) - P(x_n) = \frac{f^{(n)}(\xi)}{n!} \prod_{i=0}^{n-1} (x_n - x_i)$ (A)

Por el teorema anterior
$f(x_n) - P(x_n) = f[x_0, ..., x_n] \prod_{i=0}^{n-1} (x_n - x_i)$ (B)

Por lo tanto de (A) y (B) se obtiene $f[x_0, ..., x_n] = \frac{f^{(n)}(\xi)}{n!}$
■

2.10 Error en la interpolacion en un punto

Sea f definida en [a,b], n veces continuamente derivable en [a,b]. Sean $x_0, ..., x_n \in [a, b]$ distintos, $y \in [a, b]$. Entonces
$\lim_{(x_0,...,x_n) \to (y,...,y)} f[x_0, ..., x_n] = \frac{f^{(n)}(y)}{n!}$

Dem:
Sabemos que $\exists \xi \in (a,b)$ tal que
$f[x_0, ..., x_n] = \frac{f^{(n)}(\xi)}{n!}$
Por ende si $(x_0, ..., x_n) \to (y, ..., y)$, entonces $\xi \to y$

Luego tomamos el limite:
$\lim_{(x_0,...,x_n)\to(y,...,y)} f[x_0, ..., x_n] = \lim_{(x_0,...,x_n)\to(y,...,y)} \frac{f^{(n)}(\xi)}{n!} = \frac{f^{(n)}(y)}{n!}$
■

2.11 Linealmente Indenpendiente

Si ϕ_j es un polinomio de grado j, $j = 0, ..., n$, entonces $\{\phi_0, ..., \phi_n\}$ es LI en cualquier intervalo [a,b]

Dem:
Sean $C_0, ..., C_n \in \mathbb{R}$ tal que $P(x) = C_0\phi_0(x) + ... + C_n\phi_n(x) = 0$, para cada $x \in [a,b]$. Queremos ver que $C_j = 0$, para $j = 0, ..., n$. Como $P(x)$ se anula para cada $x \in [a,b]$, los coeficientes de cada potencia de x debe ser cero. En particular, el coeficiente de x^n es cero. Como el único término que x^n es $C_n\phi_n(x)$, entonces $C_n = 0$. Luego
$P(x) = C_0\phi_0(x) + ... + C_{n-1}\phi_{n-1}(x)$. Repitiendo esto (n-1) veces obtenemos
$C_1 = ... = C_n = 0$ ■

2.12 Regla de cuadratura

Supongamos que $x_1, ..., x_n$ son las raices de los polinomios de Legendre $P_n(x)$ y que para cada $i = 1, ..., n$ los coeficientes c_i dados por
$$c_i = \int_{-1}^{1} \prod_{\substack{j=1 \\ j\neq i}}^{n} \frac{x - x_j}{x_i - x_j} dx$$
Si P(x) es un polinomio cualquiera de grado $\leq 2n-1$, entonces
$$\int_{-1}^{1} P(x)dx = \sum_{i=1}^{n} c_i P(x_i)$$
Esto dice que la regla de cuadratura integra exactamente a polinomios con grado $\leq 2n-1$, con n puntos (las n raices de $P_n(x)$)

Dem:
Consideraremos 2 casos
(1) $gr(P) \leq n-1$ y (2) $gr(P) \leq 2n-1$
Caso (1): $gr(P) \leq n-1$

Reescribiremos $P(x)$, usando $x_1, ..., x_n$, como un polinomio interpolante de lagrange, con nodos en las raices de $P_n(x)$ (n raices = n nodos de interpolación) Esta representación es exacta pues el término del error tiene derivada de orden (n+1) y $f = P_n$ que tiene grado n. Tambien esta representación es <u>*exacta*</u> por unicidad del polinomio interpolante

$$\int_{-1}^{1} P(x)dx = \int_{-1}^{1} \sum_{i=1}^{n} P(x_i) \prod_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{n} \frac{x - x_j}{x_i - x_j} dx = \sum_{i=1}^{n} P(x_i) \int_{-1}^{1} \prod_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{n} \frac{x - x_j}{x_i - x_j} dx$$

$= \sum\limits_{i=1}^{n} P(x_i) c_i$ prueba de caso (1)

Caso (2) $n \leq gr(P) \leq 2n - 1$
Dividimos $P(x)$ por $P_n(x)$. Por el algoritmo de la división existen 2 polinomios $Q(x) y R(x)$ tal que
$P(x) = P_n(x)Q(x) + R(x)$ donde $0 \leq gr(Q) \leq n - 1$ y $gr(R) \leq n - 1$

$$\int_{-1}^{1} P(x)dx = \int_{-1}^{1} P_n(x)Q(x)dx + \int_{-1}^{1} R(x)dx$$

Como $0 \leq gr(Q) \leq n - 1$ por propiedad (2) de polinomio ortogonal de Legendre tenemos
$\displaystyle\int_{-1}^{1} P(x)dx = 0$ como $gr(R) \leq n - 1$
Por caso (1) $\displaystyle\int_{-1}^{1} R(x)dx = \sum_{i=1}^{n} c_i R(x_i)$

Reescribiendo R(x), como un polinomio interpolante basado en $x_1, ..., x_n$. Ademas $x_1, ..., x_n$ son raices de $P_n(x)$
$P(x_i) = P_n(x_i)Q(x_i) + R(x_i) = P(x_i)$, con $i = 1, ..., n$
Luego reemplazamos $R(x_i)$ por $P(x_i)$ y obtenemos
$\displaystyle\int_{-1}^{1} P(x)dx = \sum_{i=1}^{n} c_i P(x_i)$ ■