1 Teoremas mas importantes de Númerico

1.1 Metodo Biseccion (convergencia)

Sea f : [a,b] $\to \mathbb{R}$ continua en [a,b] con f(a)*f(b) < 0
Sea $[a_0, b_0]$, $[a_1, b_1]$,....., $[a_n, b_n]$ la sucesión generada por el método de bisección entonces $\exists \lim_{n\to\infty} a_n, \lim_{n\to\infty} b_n$ donde son iguales y tienden a una raíz de f.
Ademas, sea $r \in [a, b]$ y $C_n = \left(\frac{a_n + b_n}{2}\right)$ tal que f(r) = 0 tal que:
$|r - C_n| \leq |2^{-(n+1)}(b_0 - a_0)|$

Dem: Veamos que existe límite para a_n y b_n cuando n tiende a infinito.
Veamos $\{a_n\}$ y $\{b_n\}$ convergen.
Como sabemos que $\{a_n\}$ es acotada superiormente, además es no decreciente, entonces existe $\lim_{n\to\infty} a_n$
Luego como $\{b_n\}$ es acotada inferiormente, además es no creciente, entonces existe $\lim_{n\to\infty} a_b$
Ademas
$b_{n+1} - a_{n+1} = \left(\frac{1}{2}\right)(b_n - a_n) = \left(\frac{1}{2^2}\right)(b_{n-1} - a_{n-1}) = ... = \left(\frac{1}{2^{n+1}}\right)(b_0 - a_0)$
Entonces
$\lim_{n\to\infty}(b_{n+1} - a_{n+1}) = (\lim_{n\to\infty} b_{n+1}) - (\lim_{n\to\infty} a_{n+1})$
$= \lim_{n\to\infty}\left(\frac{b_0 - a_0}{2^{n+1}}\right) = 0$

Luego $(\lim_{n\to\infty} b_{n+1}) - (\lim_{n\to\infty} a_{n+1}) = 0$ entonces
$\lim_{n\to\infty} b_{n+1} = \lim_{n\to\infty} a_{n+1} = r$

Veamos que ambos limites tiende a una raíz de f, es decir, veamos que r es una raíz f. Sabemos que f(a_n)*f(b_n) ≤ 0
Entonces si tomamos limite, como f es continua, obtenemos que
$\lim_{n\to\infty} f(a_n) \lim_{n\to\infty} f(b_n) = f(\lim_{n\to\infty} a_n) f(\lim_{n\to\infty} b_n) = f(r)^2 \leq 0$
Entonces $f(r) = 0$, por ende r es una raíz de f
Veamos que $|r - C_n| \leq |2^{-(n+1)}(b_0 - a_0)|$
Tenemos que:
$|r - C_n| \leq \left|\left(\frac{1}{2}\right)(b_{n+1} - a_{n+1})\right| \leq \left|\left(\frac{1}{2^2}\right)(b_n - a_n)\right| \leq ... \leq \left|\left(\frac{1}{2^{n+1}}\right)(b_0 - a_0)\right|$
$\blacksquare$

1.2 Metodo Newton (convergencia)

Sea f : $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una funcion tal que f” es continua y f’(r) $\neq 0$ donde r es raíz de f, entonces existe un X_0 perteneciente a un entorno $[r - \delta, r + \delta]$ de r tal que el método de Newton converge. Ademas
$|X_{n+1} - r| \leq C\,|X_n - r|^2$ (convergencia cuadrática)

Dem: Sea $X_n - r = e_n$(error en la etapa n)
Necesitamos ver que en el método de Newton converge y además que lo hace cuadráticamente, pero es lo mismo que ver
$\lim_{n\to\infty} e_n = 0$
$\{e_n\} \to 0$, con $n \to \infty$
$\{X_n\} \to 0$, con $n \to \infty$
Luego queremos llegar a algo de la forma $|e_{n+1}| \leq |e_n|^2$.
Para esto analizamos
$e_{n+1} = X_{n+1} - r = X_n - r - \left(\dfrac{f(X_n)}{f'(X_n)}\right)$
$= e_n - \left(\dfrac{f(X_n)}{f'(X_n)}\right) = \left(\dfrac{e_n f'(X_n) - f(X_n)}{f'(X_n)}\right)$

Por otro lado $e_n = X_n - r$, entonces $r = X_n - e_n$
(1) Taylor centrado en X_n. Entonces tenemos
$0 = f(r) = f(X_n - e_n) =^{(1)} f(X_n) + f'(X_n)(-e_n) + \left(\dfrac{1}{2!}\right) f''(\xi)(-e_n)^2$, con ξ entre r y X_n
Entonces $\left(\dfrac{1}{2!}\right) f''(\xi)e_n^2 = f'(X_n)e_n - f(X_n)$
Luego con nuestra formula anterior obtenemos
$e_{n+1} = \left(\dfrac{f''(\xi){e_n}^2}{2f'(X_n)}\right)$
Queremos acortar esto para ello llamamos
$C(\delta) = \left(\dfrac{\max_{\{|x-r|\leq\delta\}} |f''(x)|}{\min_{\{|x-r|\leq\delta\}} |f'(x)|}\right)$, con $\delta > 0$
Para ello tenemos nuestras hipotesis f" es continua y $f'(r) \neq 0$
Ahora elegimos un δ tal que $\delta C(\delta) < 1$
Tenemos $X_0 \in$ al entorno $|X_0 - r| \leq \delta$, debemos ver que los X_n siguen permaneciendo al entorno.
$|X_1 - r| \leq |e_1| \leq C(\delta)|e_0|^2 = |e_0||e_0|C(\delta) \leq \delta C(\delta)|e_0| \leq |e_0| \leq \delta$
Si continuamos de esta manera notamos que los X_n permanecen al entorno, luego
$\{X_j\} \in [r-\delta, r+\delta]$, para cada $j = 0, 1, 2, ...$
Ahora llamamos $\zeta = \delta C(\delta)$ veamos que $|e_n| \to 0$, donde $n \to \infty$
Por lo visto anteriormente tenemos
$e_1 \leq \zeta|e_0|$
$e_2 \leq \zeta|e_1| \leq \zeta^2|e_0|$
.
.
.
$e_n \leq \zeta^n|e_0|$, como $\zeta < 1$, entonces $|e_n \to 0|$, donde $n \to \infty$ ■

1.3 Metodo Newton Global

Sea una función, tal que f" continua, f convexa, creciente y tiene un cero, entonces el cero es único y el metodo de Newton converge $\forall x_0 \in \mathbb{R}$

Dem:
f es convexa por lo tanto f"(x) $> 0 \forall x \in \mathbb{R}$, ademas
f es creciente por lo tanto f'(x) $> 0 \forall x \in \mathbb{R}$, dando como resultado
$e_n > 0 \ \forall n \in \{0\} \cup \mathbb{N}$, ya que
$e_{n+1} = \left(\dfrac{f''(\xi){e_n}^2}{2f'(X_n)} \right)$
Ahora como $e_n > 0$, entonces $X_n > r \ \forall n$, luego
$f(X_n) > f(r) = 0$
Luego $0 < X_{n+1} - r = X_n - \left(\dfrac{f(X_n)}{f'(X_n)} \right) - r$
Entonces $e_{n+1} = e_n - \left(\dfrac{f(X_n)}{f'(X_n)} \right)$, ya que $\left(\dfrac{f(X_n)}{f'(X_n)} \right) > 0$

Obtenemos $e_{n+1} < e_n \iff X_{n+1} - r < X_n - r \iff X_{n+1} < X_n$
Entonces tenemos que $\{e_n\}$ y $\{X_n\}$ son decrecientes y acotados inferiormente, por lo tanto existe limite cuando $n \to \infty$
Sea e^* tal que $\lim_{n\to\infty} e_n = e^*$
Sea x^* tal que $\lim_{n\to\infty} X_n = x^*$
Tenemos $e_{n+1} = e_n - \left(\dfrac{f(X_n)}{f'(X_n)} \right)$
si tomamos el limite cuando n tiende a infinito obtenemos
$e^* = e^* - \left(\dfrac{f(x^*)}{f'(x^*)} \right)$, dando como resultado $\left(\dfrac{f(x^*)}{f'(x^*)} \right) = 0$
Por ende $f(x^*) = 0$, entonces $x^* = r$, converge a la raíz $\blacksquare$

1.4 Teorema de Aplicación de Funcion Contractiva

Def contractiva: Sea F : $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ se dice contractiva en A(conjunto), si existe $0 < \lambda < 1$ tal que
$|F(x) - F(y)| \leq \lambda |x - y| \ \forall x, y \in A$

Teorema: Sea F: C $\to C$ donde $C \subset \mathbb{R}$ es cerrado y F es contractiva entonces F tiene un único punto fijo y es limite de toda sucesión $X_{n+1} = F(X_n)$, para un $X_0 \in C$

Dem:
(1) Definición de punto fijo
(2) F contractiva

(3) Como F es contractiva, entonces F es continua
(4) Serie geometrica
Analicemos la unicidad
Supongamos que hay 2 puntos fijos x^*y y^*, entonces
$|x^* - y^*| =^{(1)} |F(x^*) - F(y^*)| \leq^{(2)} \lambda|x^* - y^*|$, entonces obtenemos
$|x^* - y^*| \leq \lambda|x^* - y^*|$, con $0 < \lambda < 1$, entonces solo puede suceder si
$x^* - y^* = 0$ por lo tanto $x^* = y^*$

Veamos que $\{X_n\} \to x^*$, con $n \to \infty$, supongamos que existe limite, entonces
$X_{n+1} = F(X_n)$
Sea $x^* = \lim_{n\to\infty} F(X_n) =^{(3)} F(x^*)$, es un punto fijo

Veamos la existencia de este limite
$|X_n - X_{n-1}| = |F(X_{n-1}) - F(X_{n-2})| \leq \lambda|X_{n-1} - X_{n-2}|$
$= \lambda|F(X_{n-2}) - F(X_{n-3})| \leq \lambda^2|X_{n-2} - X_{n-3}| \leq ... \leq \lambda^{n-1}|X_1 - X_0|$
Ahora
$X_n = X_0 + (X_1 - X_0) + ... + (X_n - X_{n-1}) = \sum\limits_{k=1}^{n}(X_k - X_{k-1}) + X_0$

Quiero ver que exista limite en $\sum\limits_{k=1}^{n}(X_k - X_{k-1})$
$\sum\limits_{k=1}^{n}(X_k - X_{k-1}) \leq \sum\limits_{k=1}^{n}\lambda^{k-1}|X_1 - X_0| = |X_1 - X_0|\sum_{k=1}^{n}\lambda^{k-1}$

Luego si tomamos el limite cuando $n \to \infty$, tenemos que
$\sum\limits_{k=1}^{\infty}(X_k - X_{k-1}) \leq \sum\limits_{k=1}^{\infty}\lambda^{k-1} =^{(4)} \left(\dfrac{1}{1-\lambda}\right)$
Entonces converge por el criterio de comparación para series

Luego existe un x^* tal que $\lim_{n\to\infty} X_n = x^*$, por lo anterior vimos que x^* es punto fijo de F ■

1.5 Unicidad Polinomio Interpolante

Sean $x_0, ..., x_n$ reales tal que $x_0 < ... < x_n$ con $y_0, ..., y_n$ arbitrarias asociadas, entoces existe un único polinomio $P(x)$ tal que $gr(P) \leq n$ que interpola a los puntos $x_0, ..., x_n$, es decir $P(x_i) = y_i$, con $i = 0, ..., n$

Dem:
(1) Interpolación
Veamos unicidad, para ello supongamos que existen dos polinomios P, Q de grado $\leq n$ que interpolan a los puntos $x_0, ..., x_n$. Llamamos

$r \equiv P - Q$), luego $gr(r) \leq n$
Pero $r(x_i) = P(x_i) - Q(x_i) = Y_i - Y_i =^{(1)} 0$, para $i = 0, ..., n$, entonces r tiene $n+1$ raices, pero como es un polinomio de grado $\leq n$, por lo tanto $r \equiv 0$, entonces $P(x) = Q(x)$

Veamos existencia, vamos a demostrar su existencia mediante el metodo de lagrange y Newton, veamos primero el metodo de lagrange.
$\ell_i(x) = \left(\dfrac{(x-x_0)(x-x_1)...(x-x_{i-1})(x-x_{i+1})...(x-x_n)}{(x_i-x_0)(x_i-x_1)...(x_i-x_{i-1})(x_i-x_{i+1}...(x_i-x_n)} \right)$
$= \prod\limits_{\substack{j=0 \\ j\neq i}}^{n} \left(\dfrac{(x-x_i)}{(x_i-x_j)} \right)$
Como sabemos que

$$\ell_i(x_j)) = \begin{cases} 1 & j = i \\ 0 & j \neq i \end{cases}$$

Luego $P(x) = \sum\limits_{i=0}^{n} Y_i \ell_i(x)$
Por lo tanto $P(x_i) = \sum\limits_{i=0}^{n} Y_i \ell_i(x_i) = Y_i$

Veamos la forma de Newton
Llamamos $P_{k-1}(x)$ al polinomio que interpola a los puntos $x_0, ..., x_{k-1}$
$P_k(x) = P_{k-1}(x_i) + c(x - x_0)...(x - x_{k-1})$
$P_k(x_i) = P_{k-1}(x_i) + c(x_i - x_0)...(x_i - x_{k-1}) = Y_i$
Luego, $P_k(x_k) = P_{k-1}(x_k) + c(x_k - x_0)...(x_k - x_{k-1})$, entonces $c = \left(\dfrac{Y_k - P_{k-1}(x_k)}{(x_k - x_0)...(x_k - x_{k-1})} \right)$
Por lo tanto
$P_k(x) = \sum\limits_{i=0}^{k} c_i \prod\limits_{j=0}^{i-1} (x - x_i)$, donde $c_i = \left(\dfrac{Y_i - P_{i-1}(x_i)}{(x_i - x_0)...(x_i - x_{i-1})} \right)$ ■

1.6 Error Polinomio Interpolante

Sea f : $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ y sea P el polinomio que interpola a f en los puntos $x_0, ..., x_n$, donde f tiene derivada n+1-esima, entonces
$f(X) - P(x) = \dfrac{f^{(n+1)}(C_x)}{(n+1)!} \prod\limits_{i=0}^{n} (x - x_i)$
Dem:
Si $x = x_i$
$0 = f(x_i) - P(x_i) = \dfrac{1}{(n+1)!} f^{(n+1)} C_i \prod\limits_{j=0}^{n} (x_i - x_j) = 0$, ya que $i \in \{0, ..., j, ..., n\}$, luego vale para $x = x_i$

Si $x \neq x_i$
Sea $w(t) = \prod_{i=0}^{n} (t - x_i)$
$\phi \equiv f - P - \lambda w$
$\phi(t) = f(t) - P(t) - \lambda w(t)$, como $\phi(x) = 0$, entonces $\lambda = \dfrac{f(x) - P(x)}{w(x)}$
Luego como $\phi(x_i) = 0$ para cada $i \in \{0, ..., n\}$ y $\phi(x) = 0$, tenemos n+2 raices
Ahora por el toerema de roole tenemos
ϕ' tiene al menos n+1 raices en [a,b]
ϕ'' tiene al menos n raices en [a,b]
.
.
.
$\phi^{(n+1)}$ tiene al menos una raíz en [a,b], a este lo llamamos C_x
Luego
(1)$gr(P) = n$ entonces $P^{(n+1)} = 0$
(2)Como $w(t) = \prod_{i=0}^{n} (t - x_i)$, entonces $w(t) = t^{(n+1)} + t^n(-x_0) + ... + t^n(-x_n) + ... + ((-x_0)...(-x_n))$ por lo tanto $w(t)^{(n+1)} = (n+1)(n)...1t = (n+1)!t$, entonces $w^{(n+1)} \equiv (n+1)!$
$\phi^{(n+1)} \equiv f^{(x+1)} - P^{(n+1)} - \lambda w^{(n+1)} \equiv f^(n+1) - \lambda(n+1)!$, por (1) y (2)(1 y 2 no hace falta aclararlo, lo pongo para que sepan como se llega al resultado)
Luego
$f^{(n+1)}(C_x) - \lambda(n+1)! = 0$
$f^{(n+1)}(C_x) - \left[\dfrac{f(x) - P(x)}{w(x)}\right](n+1)! = 0$
$f^{(n+1)}(C_x) = (f(x) - P(x))\left(\dfrac{(n+1)!}{w(x)}\right)$
$f^{(n+1)}(C_x)\left(\dfrac{w(x)}{(n+1)!}\right) = f(x) - P(x)$
$\left(\dfrac{f^{(n+1)}(C_x)}{(n+1)!}\right)\prod_{i=0}^{n}(x - x_i) = f(x) - P(x)\blacksquare$

1.7 Relacion recursiva de Diferencias Divididas

Sea P_n el polinomio de grado $\leq n$ que interpola a $x_0, ..., x_n$ usando el polinomio interpolante de Newton
$P_n(x) = \sum_{i=1}^{n} c_i \prod_{j=0}^{i-1} (x - x_j)$, luego
$c_i = \left(\dfrac{Y_i - P_{i-1}(x_i)}{(x - x_0)...(x - x_{i-1})}\right)$, entonces
$c_i = f[x_0, ..., x_i]$, ahora tenemos

$f[x_0, ..., x_n] = \dfrac{f[x_1, ..., x_n] - f[x_0, ..., x_{n-1}]}{x_n - x_0}$
Dem:
Sea P_k el polinomio de grado k que interpola a los puntos $x_0, ..., x_k$, y sea Q el polinomio que interpola a $x_1, ..., x_n$, luego
$P_n(x) = Q(x) + \dfrac{(x - x_n)}{(x_n - x_0)}[Q(x) - P_{n-1}(x)]$
Debemos ver primero que $P_n(x_i) = Y_i$, con $i = 0, ..., n$
$P_n(x_0) = Q(x_0) + \dfrac{(x_0 - x_n)}{(x_n - x_0)}[Q(x_0) - P_{n-1}(x_0)]$

$= Q(x_0) + (-1)[Q(x_0) - P_{n-1}(x_0)] = P_{n-1}(x_0) = Y_0$

Si $x = x_n$

$P_n(x_0) = Q(x_n) + \dfrac{(x_n - x_n)}{(x_n - x_0)}[Q(x_0) - P_{n-1}(x_n)] = Q(x_n) = Y_n$

Si $x = x_i$, con $i = 1, ..., n - 1$

$P_n(x_i) = Q(x_i) + \dfrac{(x_i - x_n)}{(x_n - x_0)}[Q(x_i) - P_{n-1}(x_i)] = Q(x_i) = Y_i$, ya que

$[Q(x_i) - P_{n-1}(x_i)] = [Y_i - Y_i] = 0$

Ahora veamos que
$f[x_0, ..., x_n]$ es el coeficiente del monomio de grado n de P_n
$f[x_1, ..., x_n]$ es el coeficiente del monomio de grado n-1 de Q_n
$f[x_0, ..., x_{n-1}]$ es el coeficiente del monomio de grado n-1 de P_{n+1}
Luego como $gr(P_n) = n$ y
$P_n(x) = Q(x) + (x - x_n)[Q(x) - Pn - 1(x)]\dfrac{1}{x_n - x_0}$
Entonces $Q(x) + (x - x_n)[Q(x) - Pn - 1(x)]\dfrac{1}{x_n - x_0}$ es de grado n, por lo tanto
$f[x_0, ..., x_n] = \dfrac{f[x_1, ..., x_n] - f[x_0, ..., x_{n-1}]}{x_n - x_0}$ ■

1.8 Permutacion De Diferencias Divididas

$f[x_0, ..., x_n] = f[z_0, ..., z_n]$, donde $z_0, ..., z_n$ son permutaciones de los puntos $x_0, ..., x_n$
Dem:

Sea $P(x)$ el polinomio que interpola a $x_0, ..., x_n$ y sea $Q(x)$ el polinomio que interpola $z_0, ..., z_n$, como ambos interpolan a los mismos puntos, por unicidad
$P(x) = Q(x)$
Sea
$P(x) = a_0 + a_1 x + ... + a_n x^n$
$Q(x) = b_0 + b_1 x + ... + b_n x^n$, entonces $a_i = b_i$, para cada $i = 0, ..., n$
$a_n = f[x_0, ..., f_n]$, por lo tanto
$P(x) = f[x_0] + f[x_0, x_1](x - x_0) + ... + f[x_0, ..., x_n](x - x_0)...(x - x_{n-1})$
Haciendo lo mismo con los z_i, entonces $f[x_0, ..., x_n] = f[z_0, ..., z_n]$ ■

1.9 Relacion Diferencias Divididas con derivada n-ésima

$f[x_0, ..., x_n] = \dfrac{1}{n!} f^{(n)}(\xi)$
Dem:
(1) teorema de error de interpolación
Sea P(x) el polinomio que interpola a f(x) en $x_0, ..., x_n$ y $sea x_n = t$, luego

$f(x_n) - P(x_n) =^{(1)} \dfrac{f^{(n)}}{n!}(\xi) \prod_{j=0}^{n-1}(x - x_j) = f[x_0, ..., x_n] \prod_{j=0}^{n-1}(x - x_j)$, entonces
$\dfrac{f^{(n)}}{n!} = f[x_0, ..., x_n]$ ■

1.10 Suavidad Spline cubico

Sea f una funcion tal que $f'' \in C[a, b]$, y sea S una funcion spline cubico natural que interpola a f en t_i, con $a = t_0 < ... < t_n = b$, entonces
$\int_a^b [S''(x)]^2 dx \leq \int_a^b [f''(x)]^2 dx$
Dem:
Sea $g \equiv f - S$, notemos que:
$g(t_i) = f(t_i) - S(t_i) = Y_i - Y_i = 0$, con $i = 0, ..., n$

Ahora $g''(x) = f''(x) - S''(x)$
$g''(x) + S''(x) = f''(x)$

$[g''(x) + S''(x)]^2 = [f''(x)]^2$

$[g''(x)]^2 + 2g''(x)S''(x) + [S''(x)]^2 = [f''(x)]^2$, entonces

$$\int_a^b [g''(x)]^2 dx + 2\int_a^b g''(x)S''(x)dx + \int_a^b [S''(x)]^2 dx = \int_a^b [f''(x)]^2 dx$$
Queremos ver que
$$\int_a^b g''(x)S''(x)dx \leq 0$$
Luego
$$\int_a^b g''S''dx = \sum_{i=1}^{n}\int_{t_{i-1}}^{t_i} g''S''dx = \sum_{i=1}^{n}(s''g'(t_i) - s''g'(t_{i-1})) - \int_{t_{i-1}}^{t_i} g'S''dx$$

$$= \sum_{i=1}^{n} c_i - \int_{t_{i-1}}^{t_i} g'(x)dx = -\sum_{i=1}^{n} c_i(g(t_i) - g(t_{i-1})) = 0\blacksquare$$

1.11 $A^tAx = A^tb \Leftrightarrow$ x minimiza cuadrados minimos

Sea $A \in \mathbb{R}^{nxm}$, $x \in \mathbb{R}^m$ con $m \leq n$ es solución del problema de cuadrados mínimos si y solo si
$A^TAx = A^Tb$ para algun $b \in \mathbb{R}^m$, Ademas si A tiene rango pmpleto, la solución x es única.
Dem:
Probemos primero $\Rightarrow$)
Si x es solución del problema de cuadrados minimos debemos ver que resuelve el sistema $A^TAx = A^Tb$, para algún b
Por hipotesis $||b - Ax||^2 \leq ||b - Ay||^2$, para todo$y \in \mathbb{R}^m$
Sea $y = x + tz$ con $z \in \mathbb{R}^m$, entonces

$||b - Ax||^2 \leq ||b - Ay||^2 = ||b - A(x + tz))||^2 = ||b - Ax - Atz))||^2$, entonces obtenemos

$0 \leq -2t\langle b - Ax, Az\rangle + t^2||Az||^2$

$2t\langle b - Ax, Az\rangle \leq t^2||Az||^2$, ahora

Si $t > 0$
$2\langle b - Ax, Az\rangle \leq t||Az||^2$
si $t < 0$
$t||Az||^2 \leq 2\langle b - Ax, Az\rangle$, por ende si tomo el limite de ambos lados

$\langle b - Ax, Az\rangle = 0$, luego
$0 = (Az)^T(b - Ax) = z^TA^T(b - Ax) = z^T(A^Tb - A^TAx)$, entonces
$A^T - A^TAx = 0$, por lo tanto $A^TAx = A^Tb$

$\Leftarrow$)Probemos que si $\bar{x}$ es solución de $A^TAx = A^Tb$ entonces es minimizador de $||b - Ax||$
Quiero ver que $||b - A\bar{x}||^2 \leq ||b - Ax||$, para todo $x \in \mathbb{R}^m$

$||Ax-b||^2 = ||Ax-A\bar{x}+A\bar{x}-b||^2 = ||Ax-A\bar{x}||^2+2\langle Ax-A\bar{x}, A\bar{x}-b\rangle+||A\bar{x}-b||^2$

Veamos que $0 \leq \langle Ax - A\bar{x}, A\bar{x} - b\rangle$

$\langle A(x - \bar{x}), A\bar{x} - b\rangle = \langle A\bar{x} - b, A(x - \bar{x})\rangle = (A(x - \bar{x}))^T(A\bar{x} - b)$

$(x - \bar{x})^TA^T(A\bar{x} - b) = (x - \bar{x})^T(A^TA\bar{x} - A^Tb) = 0$, por lo tanto

$||A\bar{x}||^2 \leq ||Ax - b||^2$, para todo $x \in \mathbb{R}^m$ $\blacksquare$

1.12 $A^tAx = A^tb$unica solucion$\Leftrightarrow$ A rango completo

Preguntar$\blacksquare$

1.13 Error trapecio integracion numerica

Error trapecio $= -f''(\xi)\dfrac{(b-a)^3}{12}$
Dem:
(1) Error de interpolación
(2)Teorema de valor intermedio para integrales
$f(x) - P(x) =^{(1)} \dfrac{1}{2!}f''(\xi_x)(x - a)(x - b)$, donde $\xi_x \in [a, b]$
Ahora
$\displaystyle\int_a^b f(x) - P(x)dx = \frac{1}{2!}\int_a^b f''(\xi_x)(x - a)(x - b)dx$
$\displaystyle=^{(2)} \frac{1}{2!}f''(\xi_x)\int_a^b (x - a)(x - b)dx = -f''(\xi)\frac{(b-a)^3}{12}$ $\blacksquare$

1.14 Error simpson integracion numerica

Error simpson $= -\dfrac{(b-a)^5}{90}f^{(4)}(\xi)$
Dem:

El termino de error en la regla de simpson se puede establecer usando la serie de Taylor
$f(a+h) = f + hf' + \frac{1}{2!}h^2 f'' + ...$, luego por sustitucion obtenemos

$f(a+2h) = f + 2hf' + \frac{1}{2!}2h^2 f'' + ...$, con estas 2 series se obtiene

$f(a) + 4f(a+h) + f(a+2h) = 6f + 6hf' + 4h^2 f'' + ...$, y asi tenemos

$\frac{h}{3}[f(a) + 4f(a+h) + f(a+2h)] = 2hf + 2h^2 f' + \frac{4}{3}h^3 f'' + ...$, luego por serie de Taylor

$F(a+2h) = F(a) + 2hF'(a) + 2h^2 F''(a) + ...$

Sea $F(x) = \int_a^x f(t)dt$, por el teorema fundamenta del calculo, $F' = f$, obtenemos

$\int_a^{a+2h} f(x)dx = 2hf + 2h^2 f' + \frac{4}{3}h^3 f'' + ...$, luego

$\int_a^b f(x)dx \approx \frac{(b-a)}{6}\left[f(a) + 4f\left(\frac{a+b}{2}\right) + f(b)\right]$, con el termino de error

$-\frac{1}{90}\left(\frac{b-a}{2}\right)^5 f^{(4)}(\xi)$, para algun ξ en (a,b), ya que

$\mathcal{O}(h^5) = -\frac{h^5}{90}f^{(4)}(\xi)\blacksquare$

1.15 Teorema Regla Cuadratura gaussiana

Sea $w(x) > 0$,$q(x)$ un polinomio distinto de cero yde grado n+1 que es ortogonal a $\prod_n$, esto es
$\int_a^b q(x)p(x)w(x)dx = 0$, para todo $p \in \prod_n$,
si $x_0, ..., x_n$ son los ceros de $q(x)$, entonces $\int_a^b f(x)w(x)dx$ es exacto para $\prod_{2n+1}$
Dem:
Sea $f \in \prod_{2n+1}$, con

$f \equiv qP + r$, con $P, r \in \prod_{2n+1}$, luego

$f(x_i) = q(x_i)P(x_i) + r(x_i) = r(x_i)$, ya que $q(x_i) = 0$

Por lo tanto
$\displaystyle\int_a^b f(x)w(x)dx = \int_a^b (q(x)P(x)+r(x))w(x)dx = \int_a^b r(x)w(x)dx = \sum_{i=0}^{n} r(x_i)A_i =$
$\displaystyle\sum_{i=0}^{n} f(x_i)A_i$■

1.16 Teorema de numeros de cambio de signo int numerica

Sea $w(x) > 0$, sea f distinta de cero y continua en $a = t_0 < ... < t_n = b$, donde P es w-ortogonal a $\prod_n$, entonces f cambia de signo n+1 veces en el (a,b)
Dem:
Veamos que existe un cambio de signo en el (a,b), sabemos que $1 \in \prod_n$, luego
$\displaystyle\int_a^b f(x)w(x)dx = 0$, entonces f tiene al menos un cero en (a,b).
Ahora veamos que hay n+1 cambios de signo
Supongamos que hay $r \leq n$ cambios de signo y sean $t_0, ..., t_{r+1}$ donde ocurre un cambio de signo, luego
f tiene un signo $[t_0, t_1)$
f tiene un signo (t_1, t_2)
.
.
.
f tiene un signo $[t_r, t_{r+1})$
Ahora, sea
$P(x) = \prod_{i=1}^{r}(x - t_i)$, entoces $gr(P) \leq r \leq n$
Como P(x) cambia de signo en los mismos intervalos que f, tiene los mismos signos, luego
$\displaystyle\int_a^b f(x)P(x)w(x)dx \neq 0$, absurdo, pues f es ortogonal a P por hipotesis
por lo tanto $\displaystyle\int_a^b f(x)P(x)w(x)dx = 0$, por lo tanto $n + 1 \leq r$■

1.17 Convergencia de Gauss Seidel

Si A tiene dominio diagonal, entonces los metodos de Gauss-Seidel converge

Dem:
Sea $\delta(I-Q^{-1}A)<1$, sea x un autovector de autovalor λ y $||x||_\infty=1$, entonces $(I-Q^{-1}A)x=\lambda x$ ó $Qx-Ax=\lambda Qx$, luego
$-Ux=\lambda Qx$
$-\sum\limits_{j\neq i+1}^{n} a_{ij}x_j=\lambda\sum\limits_{j=1}^{i} a_{ij}x_j=\lambda a_{ii}+\lambda\sum\limits_{j=1}^{i-1} a_{ij}x_j$, con $1\leq i\leq n$
$\lambda a_{ii}x_i=-\sum\limits_{j=i+1}^{n} a_{ij}x_j-\lambda\sum\limits_{j=1}^{i-1} a_{ij}x_j$
Sea k tal que $|x_\ell|\leq|x_k|=1$, para todo ℓ, luego sea $i=k$

$|\lambda||a_{kk}|\leq\sum|a_{kj}|+|\lambda|\sum\limits_{j=1}^{k-1}|a_{kj}|$, por lo tanto

$$|\lambda|\leq\frac{\sum\limits_{j=k+1}^{n}|a_{kj}|}{(|a_{kk}|-\sum\limits_{j=1}^{k-1}|a_{kj}|)}<1$$

Entonces $\delta(I-Q^{-1}A)<1$, veamos que Gauss-Seidel converge

$|a_{kk}|>\sum\limits_{j<k}|a_{kj}|+\sum\limits_{j>k}|a_{kj}|$, luego

$|a_{kk}|-\sum\limits_{j<k}|a_{kj}|>\sum\limits_{j>k}|a_{kj}|$

$1>\dfrac{\sum\limits_{j>k}|a_{kj}|}{|a_{kk}|-\sum\limits_{j<k}|a_{kj}|}$, por lo tanto converge$\blacksquare$