Métodos computacionales para el cálculo de la volatilidad implícita del modelo de Black Scholes

Diego Lupi

Universidad Nacional de Córdoba
FaMAF

Agregar Date

Introducción

- Mercado Financiero.
- Tasas de Interés.
- Productos Básicos.
- Derivados.
- Opciones.
- Payoff y Ganancia.
- Estrategía con opciones.
- Fórmula de Black Scholes.
- Volatilidad.
- Métodos Numéricos.
- Redes Neuronales.
- *k*-fold cross validation.

Introducción

Mercado Financiero

Los instrumentos financieros se comercializan en el mercado financiero. En la práctica existe un mercado formal u organizado y un mercado extrabursátil, denominado también *over the counter market* (mercados OTC).

Introducción

Tipo de Tasas de Interés

- Interés Simple

Definición

$V = V_0(1 + rt)$

Introducción

Tipo de Tasas de Interés

- Interés Simple
- Interés Compuesto

Definición

$$V = V_0(1 + \frac{r}{n})^{nt}$$

Introducción

Tipo de Tasas de Interés

- Interés Simple
- Interés Compuesto
- Interés Continuo

Definición

$\lim_{n\to\infty} V_0(1+\frac{r}{n})^{nt} = V_0 e^{rt}$

Tipo de Tasas de Interés

- Interés Simple
- Interés Compuesto
- Interés Continuo
- Tasa Libre de Riesgo

Definición

Se trata de una tasa de referencia que no tiene riesgo crediticio, es decir, que un inversor sabe que invirtiendo a esa tasa podrá recuperar el capital.

Productos Básicos.

Denominamos productos básicos a aquellos instrumentos financieros cuyo valor no depende de otro activo.

Derivados.

Un derivado puede ser definido como un instrumento financiero cuyo valor depende o deriva de los valores de otros activos subyacentes. Estos activos subyacentes podrían ser activos básicos u otros derivados.

Opciones.

Las opciones son contratos que dan derecho a una de sus partes a comprar (o vender) el subyacente, a un precio determinando en un tiempo futuro. Las opciones que dan derecho a compra se denominan calls y las que dan derecho a venta se denominan puts.

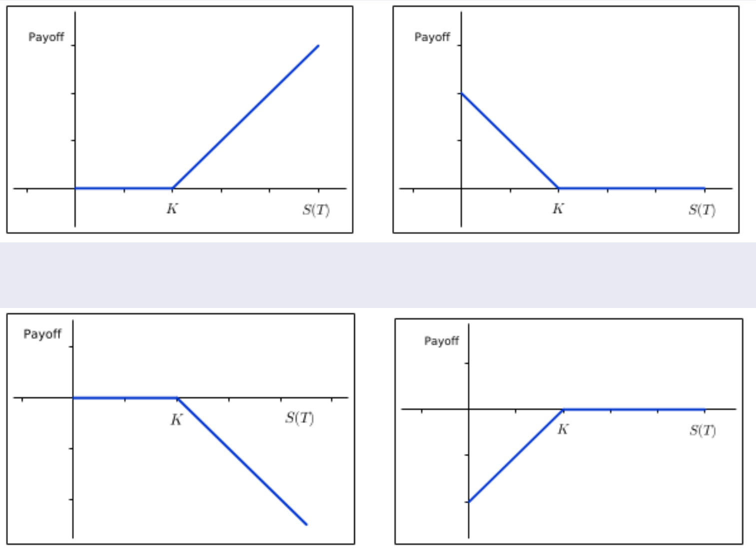
Payoff.

El payoff de una opción europea es el valor del contrato en su madurez en función del valor del subyacente.

Cuadro: Payoffs de call y put europeas

Opción	Payoff
Long en una Call	$\max(S(T) - K, 0)$
Short en una Call	$-\max(S(T) - K, 0) = \min(K - S(T), 0)$
Long en una Put	$\max(K - S(T), 0)$
Short en una Put	$-\max(K - S(T), 0) = \min(S(T) - K, 0))$

Payoff.



Introducción

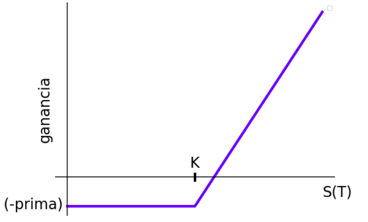
Ganancia.

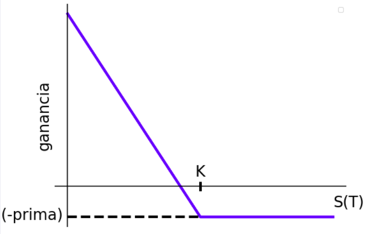
El beneficio o ganancia real del inversor es el payoff mas el costo de la prima

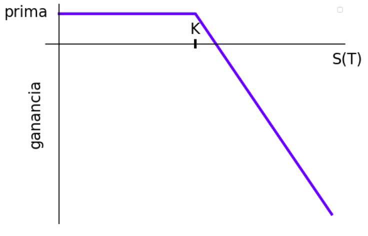
$$\text{Payoff} \pm \text{prima}$$

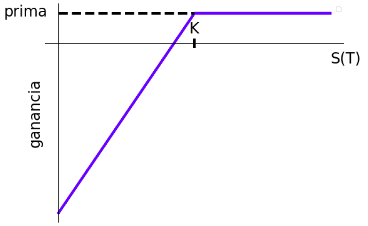
donde $\pm$ dependerá de la posición long $(-)$ o la posición short $(+)$

Ganancia.


ganancia
K
S(T)
(-prima)


ganancia
K
S(T)
(-prima)


prima
K
S(T)
ganancia


prima
K
S(T)
ganancia

Introducción

Estrategias.

Las estrategias son mecanismos que utilizan los inversionistas para obtener ganancia, o cubrirse de posibles casos adversos.

- **Spreads**: Los *spreads* son estrategias que utilizan opciones del mismo tipo (todas call o todas put).
- **Combinaciones**: Las *combinaciones*, son estrategias que consisten en posiciones en distintos tipos de opción, tanto call como puts.

Fórmula de Black Scholes.

Sea c la prima de una opción call europea, con strike K, r la tasa libre de riesgo, madurez T y con precio del subyacente $S(0)$, sobre un activo cuyo precio sigue un movimiento geométrico browniano con tendencia r y volatilidad σ bajo las probabilidades de riesgo neutral. Entonces, bajo una hipótesis de no arbitraje se cumple que:

$$c = S(0)\Phi(d_1) - Ke^{-rT}\Phi(d_2) \tag{1}$$

donde:

Φ es la distribución normal estándar acumulada.

$$d_1 = \frac{Log\left(\frac{S(0)}{K}\right) + \left(r + \frac{\sigma^2}{2}\right)T}{\sigma\sqrt{T}} \qquad d_2 = d_1 - \sigma\sqrt{T}$$

Introducción

Volatilidad Histórica

La volatilidad histórica como su nombre lo indica muestra el riesgo histórico de un periodo de tiempo de hoy hacia atrás. Se calcula midiendo las variaciones que han tenido los rendimiento del activo en cierto periodo de tiempo.

$$x_t = \ln\left(\frac{S_t}{S_{t-1}}\right) \tag{2}$$

$$\overline{X} = \frac{1}{n}\sum_{t=1}^{n} x_t \tag{3}$$

$$\text{Volatilidad Historica} = \frac{1}{\Delta t}\cdot\sqrt{\frac{1}{n-1}\sum_{t=1}^{n}(x_t-\overline{X})^2} \tag{4}$$

Volatilidad Implícita

La volatilidad implícita muestra cual es el riesgo que están percibiendo los inversionistas de hoy en adelante, al contrario de la volatilidad histórica, esta es una volatilidad futura. Es calculada midiendo implícitamente como se están valorando o a que precios se están vendiendo los contratos de opciones de cierto activo.

Introducción

Superficie de Volatilidad

Una superficie de volatilidad es una representación tridimensional de las volatilidades implícitas de un subyacente en relación con los diferentes precios de ejercicio y las diferentes fechas de madurez.

	K/S_0				
	0,9	0,95	1,00	1,05	1,10
1 mes	14,2	13,0	12,0	13,1	14,5
3 meses	14,0	13,0	12,0	13,1	14,2
6 meses	14,1	13,3	12,5	13,4	14,3
1 año	14,7	14,0	13,5	14,0	15,1
2 años	15,0	14,4	14,0	14,5	15,1
5 años	14,8	14,6	14,4	14,7	15,0

Introducción

Método de Bisección

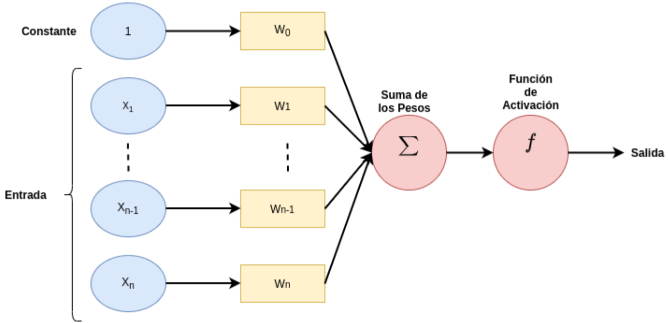
El método de bisección se basa en el teorema de valor intermedio para f función continua. Si f es continua en el intervalo [a,b] y $f(a)f(b) < 0$, entonces f tiene al menos una raíz en (a,b).

Método de Brent

El método de Brent es un algoritmo de búsqueda de raíces que combina el método de bisección, el método secante y la interpolación cuadrática inversa.

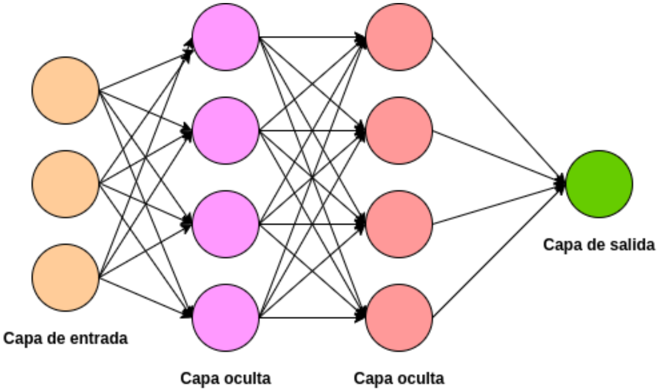
Perceptrón

La unidad básica de una red neuronal son los perceptrones (o neuronas). Un perceptrón toma un vector de entradas de valor real, calcula la combinación lineal de estas entradas con respecto a los pesos, luego genera una salida. Mas precisamente:
$o(x_1, ..., x_n) = \psi(w_0 + x_1 w_1 + ... + x_n w_n)$



Red Feed-Forward

Este tipo de algoritmo recibe el nombre de red porque se construye componiendo funciones (perceptrones).



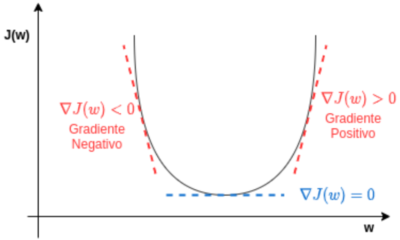
Introducción

Descenso por el Gradiente

El objetivo de una red neuronal es estimar los parámetros óptimos para una función $f(x, W, b)$. Una forma de estimar esos parámetros es reducir el error. Sea

$$J(x, W, b, Y) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(f(x_i, W, b) - y_i)^2$$

una función de costo.



Función de activación

La función de activación en las redes neuronales son las encargadas de enviar señales al siguiente nivel o siguiente capa.

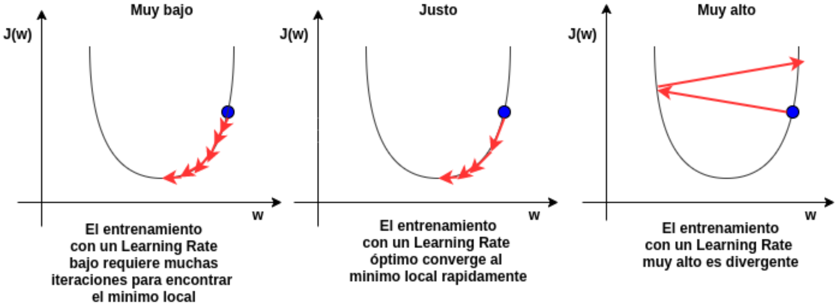
$$ReLu(z) = \max(z, 0) \tag{5}$$

$$\tanh(z) = \frac{e^z - e^{-z}}{e^z + e^{-z}} \tag{6}$$

$$Elu(z) = \begin{cases} \alpha(e^{z-1}) & \text{si } z < 0 \\ z & \text{si } z \geq 0 \end{cases} \tag{7}$$

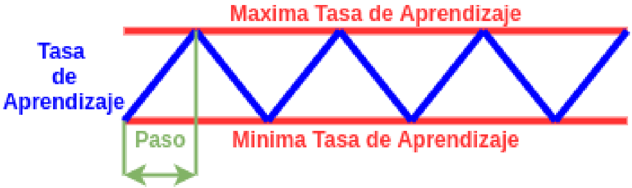
Tasa de aprendizaje

La tasa de aprendizaje determina el tamaño del paso en cada iteración mientras se mueve hacia un mínimo de una función de error.



Tasa de aprendizaje cíclico

En este caso la tasa de aprendizaje varía entre un mínimo y máximo, creciendo y decreciendo.



k-fold cross validation

K-fold cross validation es una técnica utilizada para evaluar modelos propuestos, con el fin de encontrar el mejor modelo.

Modelos para valoración de opciones

Para valorar las opciones existen modelos matemáticos.

- Black-Scholes (1973): Modelo para valorar opciones europeas.
- Rubinstein (1991): Modelo para valorar opciones chooser simples.
- Conze y Viswanathan (1991): Modelo para valorar opciones lookbacks con precio de ejercicio fijo.
- Goldman, Sosin y Gatto (1979): Modelo para valorar opciones lookbacks con precio de ejercicio flotante.
- Kemma y Vorst (1990): Modelo para valorar opciones asiáticas con media geométrica.
- Levy (1992): Modelo para valorar opciones asiáticas con media aritmética.
- Margrabe (1978): Modelo para valorar opciones sobre el intercambio de dos activos.

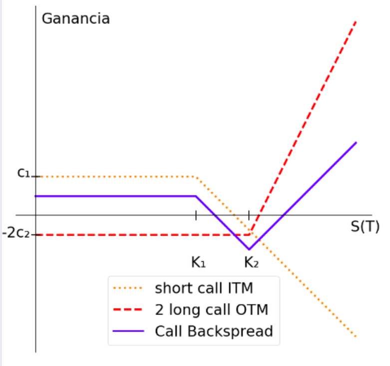
Estrategias

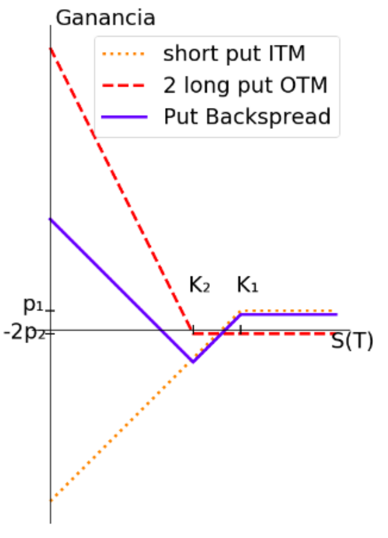
Backspread

- El inversor espera un movimiento particular del mercado, pero teniendo un poco de protección en caso de equivocarse.
- Busca que la volatilidad implícita sea baja al momento de aplicar la estrategia, con esperanza que suba en el futuro.

Estrategias

Backspread

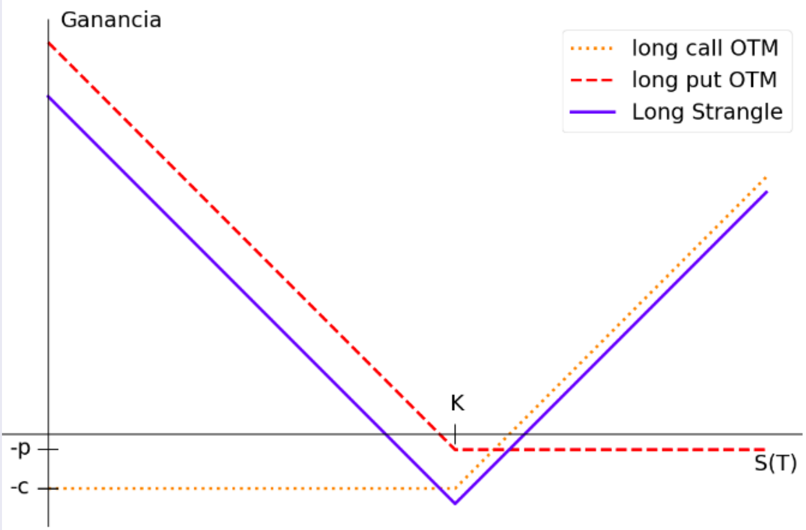




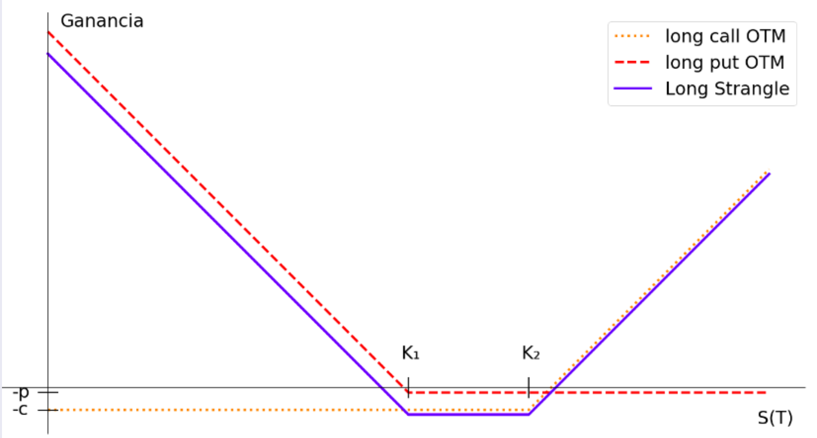
Long Straddle o Long Strangle

- El inversor tiene expectativa que el valor del subyacente tenga un gran cambio, sin importar si el precio sube o baja.
- Se busca que la volatilidad implícita sea baja al momento de aplicar la estrategia.
- Idealmente se busca opciones out-of-the-money.
- Se busca que sean opciones largas.

Long Straddle



Long Strangle



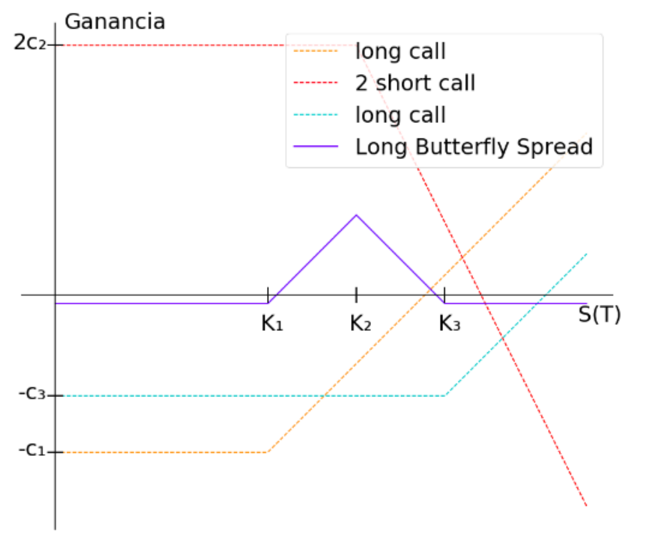
Estrategias

Long Butterfly Spread

- El inversor tiene expectativa que el valor del subyacente no varíe mucho hasta su vencimiento.
- Se busca que la volatilidad implícita sea alta al momento de aplicar la estrategia, cuánto más alta mejor.
- Se invierte en opciones cortas, con un tiempo de expiración menor a 60 días.

Estrategias

Long Butterfly Spread



- Función a aplicar.

Procedimiento

$$g(\hat{\sigma}) = S(0)\Phi(d_1) - Ke^{-rT}\Phi(d_2) - c \tag{8}$$

donde:
c es la prima de la call europea y el resto de las variables definidas en (1)
Φ es la distribución normal estándar acumulada.

$$d_1 = \frac{Log\left(\frac{S(0)}{K}\right) + \left(r + \frac{\hat{\sigma}^2}{2}\right)T}{\hat{\sigma}\sqrt{T}} \qquad d_2 = d_1 - \hat{\sigma}\sqrt{T}$$

- Función a aplicar.
- g es monótona creciente con respecto a σ

Procedimiento

Sabemos que fórmula de Black Scholes es monótona creciente con respecto a σ, entonces g tambien es creciente con respecto a σ

- Función a aplicar.
- g es monótona creciente con respecto a σ
- Inicialización de intervalo para método de bisección y de brent

Procedimiento

Buscamos [a, b] talque $f(a)f(b) < 0$

- Función a aplicar.
- g es monótona creciente con respecto a σ
- Inicialización de intervalo para método de bisección y de brent
- Aplicación de los métodos

Procedimiento

Aplicamos bisección y brent utilizando g, sobre [a,b], hasta encontrar la raíz o cumplir con una cierta tolerancia.

Métricas

$$
\begin{aligned}
\text{ECM} &= \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}(y_i - \hat{y}_i)^2 && (8)\\
\text{EAM} &= \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}|y_i - \hat{y}_i| && (9)\\
\text{EPAM} &= 100\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}\frac{|y_i - \hat{y}_i|}{y_i} && (10)\\
SS_{tot} &= \sum_{i=1}^{N}(y_i - \overline{y})^2, \qquad \text{con } \overline{y} = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} y_i && (11)\\
R^2 &= 1 - \frac{\text{ECM}}{SS_{tot}} && (12)
\end{aligned}
$$

Cálculo de prima de opción call con ratio

Rene Garcia y Ramazan Gençay, invocando la homogeneidad de la fórmula de Black-Scholes, demostraron que las redes neuronales estiman mejor el precio de una opción usando el cociente S/K.

$$\begin{aligned}
\frac{c}{K} &= \frac{B(S(0), K, r, \sigma, T)}{K} && (13)\\
&= \frac{S(0)}{K}\Phi\left(d_1\left(\frac{S(0)}{K}\right)\right) - e^{-rT}\Phi\left(d_2\left(\frac{S(0)}{K}\right)\right) && (14)\\
&= \tilde{B}\left(\frac{S(0)}{K}, T, r, \sigma\right)
\end{aligned}$$

donde d_1, d_2 y Φ son las funciones definidas anteriormente.

Generación de muestra.

	Parametros	muestra amplia	muestra estrecha
Entrada	precio ratio(S_0/K)	[0.4, 1.6]	[0.5, 1.5]
	Madurez(τ)	[0.2, 1.1]	[0.3, 0.95]
	volatilidad(σ)	[0.01, 1]	[0.02, 0.9]
	Tasa libre de riesgo(r)	[0.02, 0.1]	[0.03, 0.08]
Salida	Precio de Call(c/K)	(0, 0.9)	(0, 0.73)

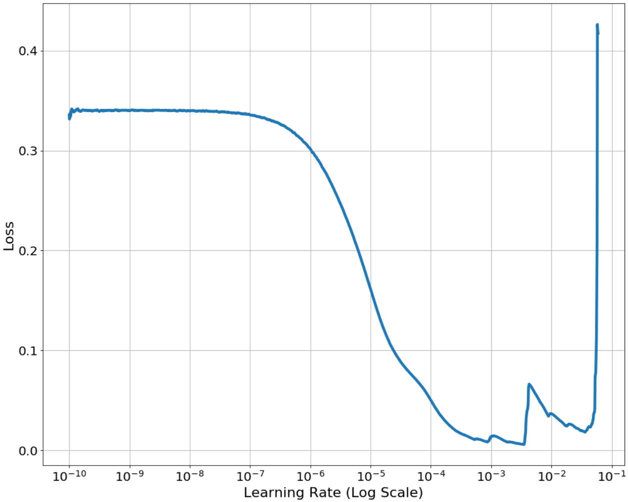
8-fold cross validation.

Parámetros	Opciones o Rango
Capas	[1,10]
Neuronas	[50,1000]
Función de error	ECM, EAM, EPAM
Función de activación	ReLu, Elu, tanh
Inicialización de pesos	uniform, glorot_uniform, he_uniform
Algoritmo de optimización	SGD, RMSprop, Adam
Dropout	[0,0.2]
Tamaño de batch	[256, 2048]

Hiperpárametros obtenidos con cross validation.

Parámetros	Opciones
Capas	3
Neuronas	950
Función de error	ECM
Función de activación	ReLu
Inicialización de pesos	random_uniform
Algoritmo de optimización	Adam
Dropout	0
Tamaño de batch	1024

Método de Smith.



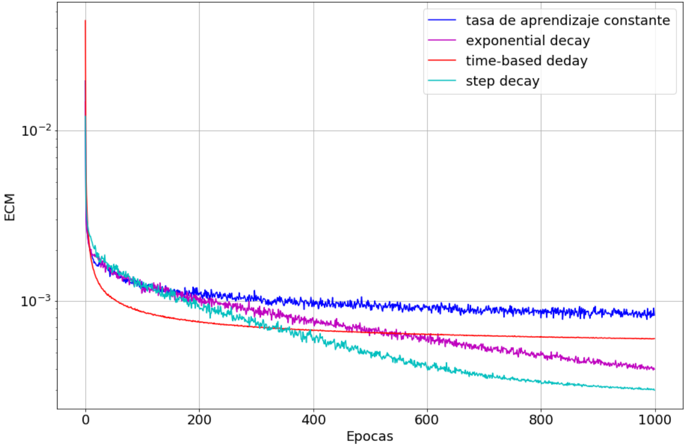
Grid-Search.

Parametros	Step Decay	Exponential Decay	Time-Based Decay
base_lr	$[10^{-2}, 10^{-4}]$	$[10^{-2}, 10^{-4}]$	$[10^{-2}, 10^{-4}]$
decay	[0.9, 0.95]	[0.007, 0.002]	[0.01, 8]
epoch_drop	[5, 50]	-	-

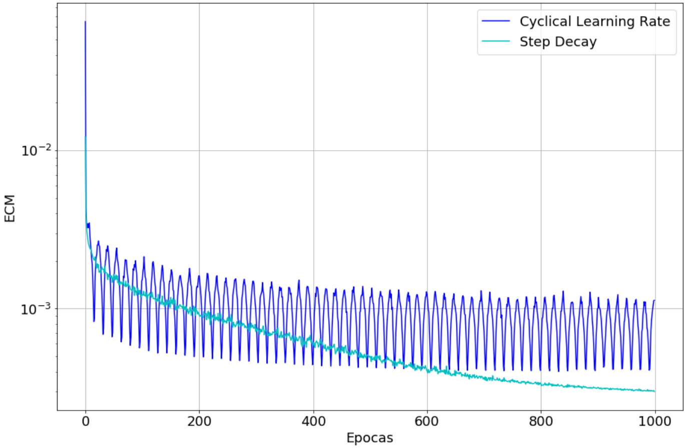
Parámetros de los Algoritmos de Decrecimiento.

Parametros	Step Decay	Exponential Decay	Time-Based Decay
base_lr	$5 * 10^{-4}$	0.0005	0.005
decay	0.9	0.002	0.875
epoch_drop	20	-	-

Comparación algoritmos de decrecimiento de la taza de aprendizaje.



Step Decay contra Cyclical Decay.



Una vez obtenidos los hiperpámetros y la muestra se entrenará la red.

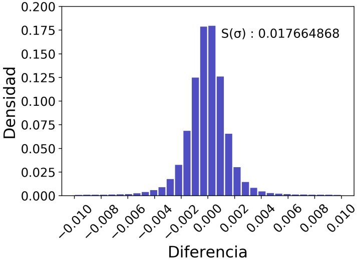


Figura: Predicción muestra amplia.

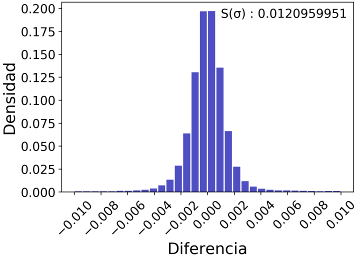


Figura: Predicción muestra estrecha.

Sea $\tilde{C} = C - max(S_0 - Ke^{-r\tau}, 0)$
La entrada de la red será $\{\log(\tilde{C}/\mathrm{K}),\ S_0/\mathrm{K},\ r,\ \tau\}$ y la salida $\{\sigma\}$

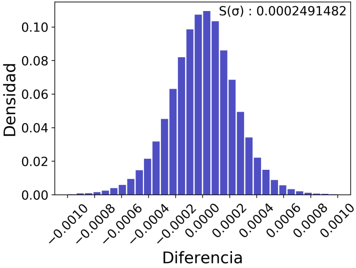


Figura: Predicción muestra amplia.

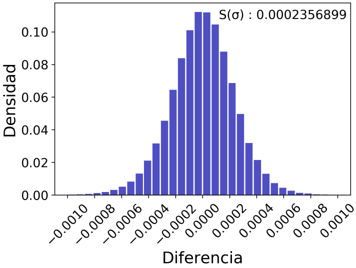


Figura: Predicción muestra estrecha.

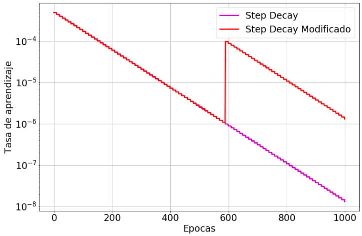


Figura: Learning Rate sobre 1000 epocas.

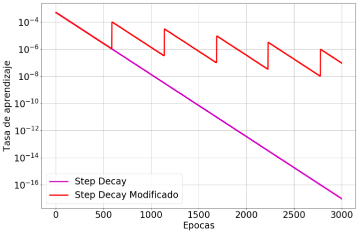


Figura: Learning Rate sobre 3000 epocas.

El resultado final será.

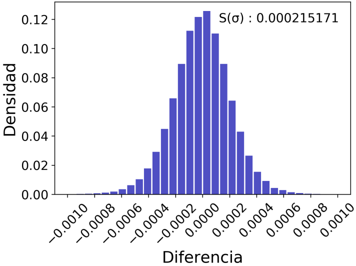


Figura: Predicción muestra amplia 3000 epochs.

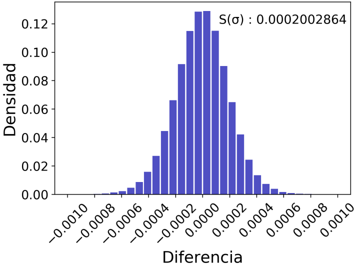


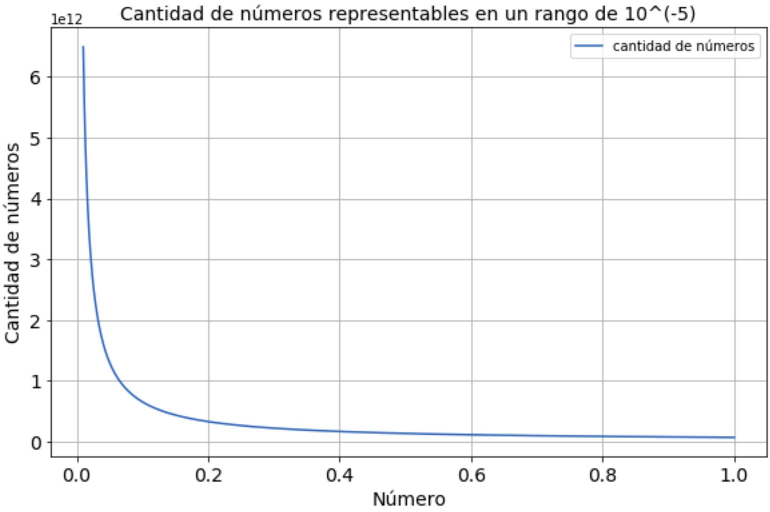
Figura: Predicción muestra estrecha 3000 epochs.

Precisión

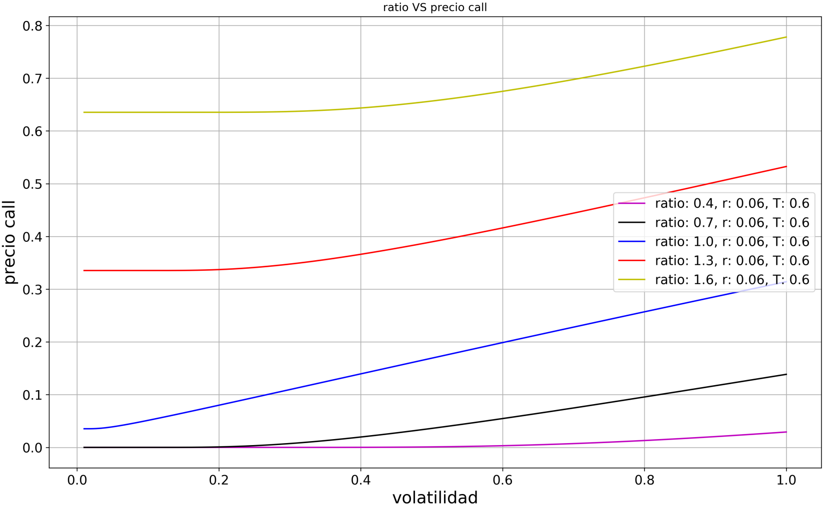
Error en los modelos propuestos.

	ECM	EAM	EPAM	R^2
Red inicial	$3{,}21 \times 10^{-4}$	$6{,}09 \times 10^{-3}$	9,30	0,996031
Red optimizada	$6{,}24 \times 10^{-8}$	$1{,}92 \times 10^{-4}$	0,059	0,999999104
Red definitiva	$4{,}67 \times 10^{-8}$	$1{,}66 \times 10^{-4}$	0,0515	0,999999329
Bisección	$1{,}10 \times 10^{-8}$	$2{,}89 \times 10^{-6}$	0,00469	0,99999986
Brent	$8{,}17 \times 10^{-6}$	$9{,}18 \times 10^{-5}$	0,35894	0,99989551

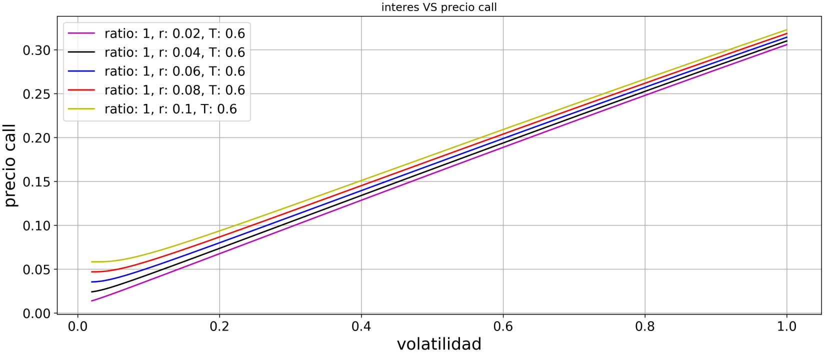
Números Representables



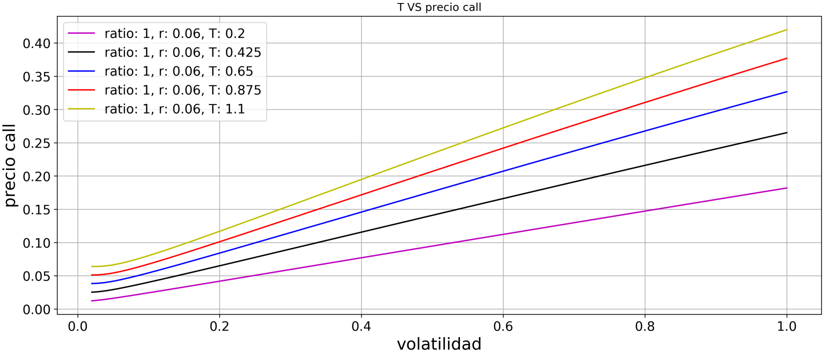
Comparación entre volatilidad implícita y precio call con distintos ratios



Comparación entre volatilidad implícita y precio call con distintas tasas de interés



Comparación entre volatilidad implícita y precio call con distintos tiempos de madurez



Error de estimación en los Métodos Numéricos

Impacto de la volatilidad implícita con respecto al precio de la call

- Menos impacto en las opciones OTM.
- Menos impacto en las opciones cortas.

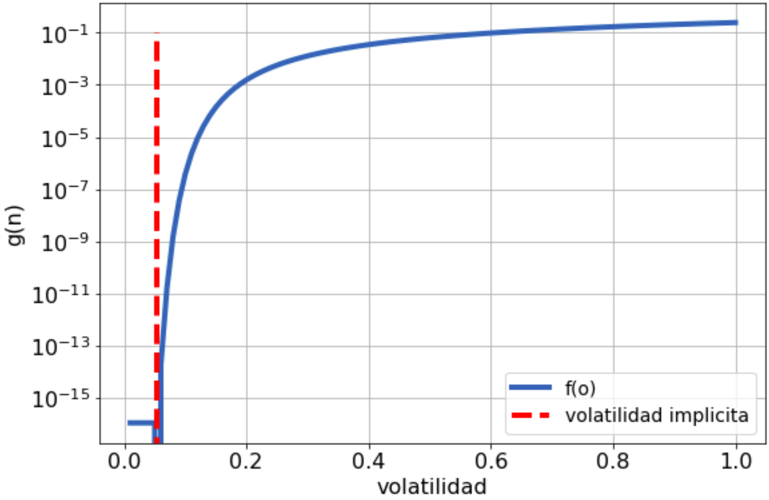
Error

En la práctica se observa mas error en estimación sobre las opciones ITM con $\Phi(d_1)$ y $\Phi(d_2)$ cercanos a 1.

Caso particular donde no se puede aplicar los métodos numéricos.

c:	5,983489610184446
S:	15,752756180327959
k:	10
r:	0,09010364215460305
T:	0,2590760904347537

- Si $\sigma = 0{,}01 \Rightarrow \Phi(d_1) = 1$, $\Phi(d_2) = 1$ y $g(\sigma) = 1{,}7763568394002505 \times 10^{-15}$.
- Si $\sigma = 0{,}11928197090875538 \Rightarrow \Phi(d_1) = 0{,}99999999999999986$, $\Phi(d_2) = 0{,}99999999999999982$ y $g(\sigma) = 0$.



10^{-1}
10^{-3}
10^{-5}
10^{-7}
10^{-9}
10^{-11}
10^{-13}
10^{-15}
g(n)
0.0
0.2
0.4
0.6
0.8
1.0
volatilidad
f(o)
volatilidad implicita

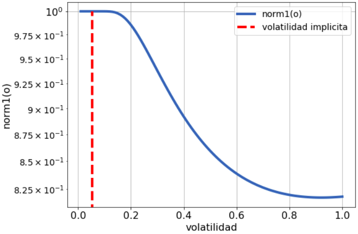


Figura: $\Phi(d_1)$

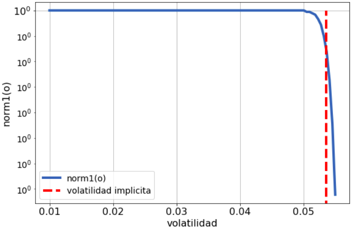


Figura: $\Phi(d_1)$

Una vez entrenada la red (con un tiempo total de entrenamiento de 30 horas aproximadamente) en GPU (GeForce GTX 1080/PCIe/SSE2), RAM (15.6 GiB). Comparamos su tiempo de ejecucíon en CPU (Intel(R) Core(TM) i5-8265U CPU @1.60GHz)

	Red Neuronal	Brent	Bisección
Tiempo (segundos)	7,34	157,05	318,31
Robustez	Si	No	No

Conclusiones

- Importancia de la volatilidad impícita.
- Cálculo de la volatidad impícita.

Trabajos Futuros

- Uso de GPU en la implementación de los modelos numéricos propuestos.
- Soluciones para el problema numérico.
- Proponer otros modelos obtener la volatilidad implícita.

¿Preguntas?