UNIVERSIDADE ESTADUAL DE CAMPINAS
FACULADE DE ENGENHARIA MECÂNICA

RELATÓRIO DE ALGORITMO IMPLEMENTADO
CÁLCULO DE SOLUÇÕES DE PROBLEMAS DE VALOR INICIAL
MÉTODO DE RUNGE-KUTTA DE 4ª ORDEM PARA SISTEMAS DE EQUAÇÕES DIFERENCIAIS

Aluno: Diego Fernando Luque Martin
Matrícula: 191606

Campinas
2017

SUMÁRIO

1. INTRODUÇÃO

Este relatório tem por fundamento a apresentação à solução numérica para problemas de valor inicial com sistemas de equações diferenciais utilizando o Método de Runge-Kutta de 4ª ordem.

2. MÉTODO

O método de Runge-Kutta para resolver sistemas de equações diferenciais de primeira ordem é uma generalização do método para uma única equação de primeira ordem apresentado em relatório anterior. Para isso, é necessário novamente possuir o valor inicial para cada equação diferencial dada.

Um sistema de ordem m de problemas de valor inicial de primeira ordem tem a seguinte forma:

$$\frac{du_1}{dt} = f_1(t, u_1, u_2, \dots u_m),$$

$$\frac{du_2}{dt} = f_2(t, u_1, u_2, \dots u_m)$$

$$\frac{du_m}{dt} = f_m(t, u_1, u_2, \dots u_m)$$

$$a \leq t \leq b, \qquad u_1(a) = \alpha_1, u_2(a) = \alpha_2, \dots u_m(a) = \alpha_m$$

Com t sendo:

$$t = a + i \cdot h, \qquad h = \frac{(b-a)}{N}$$

O Método de Runge-Kutta será descrito da seguinte maneira:

$$w_{i,j+1} = w_{i,j} + \frac{1}{6}(k_{1,j} + 2.k_{2,j} + 2.k_{3,j} + k_{4,j})$$

Onde os termos informados acima são definidos como:

$$k_{1,j} = h.f_j\left(t_i, w_{1,j}, w_{2,j}, \dots w_{m,j}\right);$$

$$k_{2,j} = h.f_j\left(t_i + \frac{h}{2}, w_{1,j} + \frac{1}{2}.k_{1,1}, w_{2,j} + \frac{1}{2}.k_{1,2}, \dots w_{m,j} + \frac{1}{2}.k_{1,m}\right);$$

$$k_3 = h.f_j(t_i + \frac{h}{2}, w_{1,j} + \frac{1}{2}.k_{2,1}, w_{2,j} + \frac{1}{2}.k_{2,1}, \dots w_{m,j} + \frac{1}{2}.k_{2,m})$$

$$k_4 = h.f_j(t_i + h, w_{1,j} + k_{3,1}, w_{2,j} + k_{3,2}, \dots w_{m,j} + k_{3,m})$$

Para $i = 1, 2, \dots m$

2.1. Algoritmo

O livro Analise Numérica (Burden, Análise Numérica, 2015), fornece o seguinte algoritmo:

ENTRADA: extremidades a e b; número de equações m; número inteiro N; condição inicial $\alpha_1, ..., \alpha_m$.

SAÍDA: aproximação w_j para u_j (t) nos (N + 1) valores de t.

Passo 1: Faça h = (b – a) / N;
t = a;

Passo 2: Para j = 1,2, ..., m faça $w_j = \alpha_{j,}$

Passo 3: SAÍDA: $(t, w_1, w_2, ..., w_m)$.

Passo 4: Para i = 1,2, ..., N, execute os Passos 5 a 11.

Passo 5: Para j = 1, 2, ..., m, faça
$K_{1,j} = h.f_j(t, w_1, w_2, ..., w_m)$.

Passo 6: Para j = 1, 2, ..., m, faça
$K_{2,j} = h.f_j(t + h/2, w_1 + 1/2k_{1,1}, w_2 + 1/2k_{1,2}, ..., w_m + 1/2k_{1,m})$;

Passo 7: Para j = 1, 2, ..., m, faça
$K_{3,j} = h.f_j(t + h/2, w_1 + 1/2k_{2,1}, w_2 + 1/2k_{2,2}, ..., w_m + 1/2k_{2,m})$;

Passo 8: Para j = 1, 2, ..., m, faça
$K_{4,j} = h.f_j(t + h, w_1 + k_{3,1}, w_2 + k_{3,2}, ..., w_m + k_{2,m})$;

Passo 9: Para j = 1, 2, ..., m, faça
$w_j = w_j + (K_{1,j} + 2K_{2,j} + 2K_{3,j} + K_{4,j})/6$;

Passo 10: Faça t = a + ih.

Passo 11: SAÍDA $(t, w_1, w_2, ..., w_m)$.

Passo 12: PARE.

Com base no descrito acima, é sabido que o algoritmo deverá apresentar ao final de sua execução uma aproximação do problema de valor inicial.

Com base no exemplo dado acima, o algoritmo deverá exigir informações do usuário:

- Valor do início do intervalo [a];
- Valor do fim do intervalo [b];

- Número de pontos da malha [n];
- Número de equações estudadas [m];
- Valores das condições iniciais [α_m].

Após realizadas as iterações de cálculo, o algoritmo deverá apresentar ao final de sua execução uma das seguintes alternativas:

- Aproximação para a solução do problema de valor inicial bem-posto;
- Erro devido a informação de parâmetros informados errados.

Para execução do programa em linguagem de programação, os seguintes parâmetros foram adotados:

- Linguagem de Programação: C;
- Compilador: Code::Blocks 16.01

2.2. Teste

Para teste do código fonte escrito em linguagem de programação C, foi usado exemplo de cálculo dado pelo Livro Análise Numérica (Burden, 2015), página 366:

$$u_1' = -4u_1 + 3u_2 + 6, \qquad u_2' = -2{,}4u_1 + 1{,}6u_2 + 3{,}6$$
$$0 \leq \mathrm{t} \leq 0{,}5, \qquad u_1'(0) = 0, \qquad u_2'(0) = 0, \quad \mathrm{N} = 5$$

Resultados:

```
Digite o início do intervalo [a]: 0
Digite o fim do intervalo [b]: 0,5
Digite o número de equações estudadas [m]: 2
Digite o número de pontos da malha [n]: 5
Digite as condições iniciais do valor [alpha]:
alpha[1]= 0
alpha[2]= 0

Os parâmetros digitados foram: [a]= 0,000 [b]= 0,500 [m]= 2 [n]= 5
alpha[1]= [0,0000] alpha[2]= [0,0000]

i= 0     t= 0,0000       w[1]= 0,00000000       w[2]= 0,00000000
i= 1     t= 0,1000       w[1]= 0,53825520       w[2]= 0,31962624
i= 2     t= 0,2000       w[1]= 0,96849874       w[2]= 0,56878217
i= 3     t= 0,3000       w[1]= 1,31071904       w[2]= 0,76073313
i= 4     t= 0,4000       w[1]= 1,58126524       w[2]= 0,90632062
i= 5     t= 0,5000       w[1]= 1,79350749       w[2]= 1,01440242

y[1]= 0,00000000        y[2]= 0,00000000        e[1]= 0,00000000  e[2]= 0,00000000
y[1]= 0,53826391        y[2]= 0,31963204        e[1]= 0,00000871  e[2]= 0,00000580
y[1]= 0,96851299        y[2]= 0,56879168        e[1]= 0,00001426  e[2]= 0,00000950
y[1]= 1,31073655        y[2]= 0,76074480        e[1]= 0,00001751  e[2]= 0,00001167
y[1]= 1,58128435        y[2]= 0,90633336        e[1]= 0,00001911  e[2]= 0,00001274
y[1]= 1,79352705        y[2]= 1,01441545        e[1]= 0,00001956  e[2]= 0,00001304
```

2.3. Validação

Para validação do algoritmo escrito foi utilizado o exemplo de cálculo demonstrado no livro Análise Numérica, (Burden, 2015), página 366, onde o autor demostra o método de Euler com os seguintes parâmentros:

$$u_1' = -4u_1 + 3u_2 + 6, \qquad u_2' = -2{,}4u_1 + 1{,}6u_2 + 3{,}6$$
$$0 \leq \mathrm{t} \leq 0{,}5, \qquad u_1'(0) = 0, \qquad u_2'(0) = 0, \quad \mathrm{N} = 5$$

Os resultados obtidos pelo autor estão na tabela 1 a seguir:

Tabela 1 (Burden, 2011)

t_j	$w_{1,j}$	$w_{2,j}$	$\lvert I_1(t_j) - w_{1,j}\rvert$	$\lvert I_2(t_j) - w_{2,j}\rvert$
0.0	0	0	0	0
0.1	0.5382550	0.3196263	0.8285×10^{-5}	0.5803×10^{-5}
0.2	0.9684983	0.5687817	0.1514×10^{-4}	0.9596×10^{-5}
0.3	1.310717	0.7607328	0.1907×10^{-4}	0.1216×10^{-4}
0.4	1.581263	0.9063208	0.2098×10^{-4}	0.1311×10^{-4}
0.5	1.793505	1.014402	0.2193×10^{-4}	0.1240×10^{-4}

Utilizando os mesmos critérios de aproximação e tolerância do exemplo acima e aplicando ao algoritmo, obteve se os seguintes resultados:

```
i= 0     t= 0,0000       w[1]= 0,00000000       w[2]= 0,00000000
i= 1     t= 0,1000       w[1]= 0,53825520       w[2]= 0,31962624
i= 2     t= 0,2000       w[1]= 0,96849874       w[2]= 0,56878217
i= 3     t= 0,3000       w[1]= 1,31071904       w[2]= 0,76073313
i= 4     t= 0,4000       w[1]= 1,58126524       w[2]= 0,90632062
i= 5     t= 0,5000       w[1]= 1,79350749       w[2]= 1,01440242

y[1]= 0,00000000        y[2]= 0,00000000        e[1]= 0,00000000  e[2]= 0,00000000
y[1]= 0,53826391        y[2]= 0,31963204        e[1]= 0,00000871  e[2]= 0,00000580
y[1]= 0,96851299        y[2]= 0,56879168        e[1]= 0,00001426  e[2]= 0,00000950
y[1]= 1,31073655        y[2]= 0,76074480        e[1]= 0,00001751  e[2]= 0,00001167
y[1]= 1,58128435        y[2]= 0,90633336        e[1]= 0,00001911  e[2]= 0,00001274
y[1]= 1,79352705        y[2]= 1,01441545        e[1]= 0,00001956  e[2]= 0,00001304
```

Com base nos resultados da iteração 5, o algoritmo foi considerado válido pois os valores de w tem igualdade em todas as casas decimais apresentadas pelo autor salvo arredondamentos.

3. EXERCÍCIOS RESOLVIDOS

Exercício 5.9 – 1a (Burden, 2015)

$$u_1' = 3u_1 + 2u_2 - (2t^2+1)e^{2t}, \qquad u_2' = 4u_1 + u_2 + (t^2+2t-4)e^{2t}$$

$$u_1(0) = 0, \qquad u_2(0) = 0, \qquad 0 \le \mathrm{t} \le 1, \qquad \mathrm{h} = 0{,}5$$

```
Os parâmetros digitados foram: [a]= 0,000 [b]= 1,000 [m]= 2 [n]= 5
alpha[1]= [1,0000] alpha[2]= [1,0000]

i= 0     t= 0,0000       w[1]= 1,00000000       w[2]= 1,00000000
i= 1     t= 0,2000       w[1]= 2,12036583       w[2]= 1,50699185
i= 2     t= 0,4000       w[1]= 4,44122776       w[2]= 3,24224021
i= 3     t= 0,6000       w[1]= 9,73913329       w[2]= 8,16341700
i= 4     t= 0,8000       w[1]= 22,67655977      w[2]= 21,34352778
i= 5     t= 1,0000       w[1]= 55,66118088      w[2]= 56,03050296

y[1]= 1,00000000        y[2]= 1,00000000        e[1]= 0,00000000  e[2]= 0,00000000
y[1]= 2,12500839        y[2]= 1,51158743        e[1]= 0,00464256  e[2]= 0,00459558
y[1]= 4,46511961        y[2]= 3,26598528        e[1]= 0,02389186  e[2]= 0,02374507
y[1]= 9,83235869        y[2]= 8,25629549        e[1]= 0,09322540  e[2]= 0,09287849
y[1]= 23,00263945       y[2]= 21,66887674       e[1]= 0,32607967  e[2]= 0,32534896
y[1]= 56,73748265       y[2]= 57,10536209       e[1]= 1,07630178  e[2]= 1,07485913
```

Exercício 5.9 – 1b (Burden, 2015)

$$u_1' = -4u_1 - 2u_2 - cos(t) + 4sen(t), \qquad u_2' = 3u_1 + u_2 - 3sen(t)$$

$$u_1(0) = 0, \qquad u_2(0) = -1, \qquad 0 \le \mathrm{t} \le 2, \qquad \mathrm{h} = 0{,}1$$

```
Os parâmetros digitados foram: [a]= 0,000 [b]= 2,000 [m]= 2 [n]= 20
alpha[1]= [0,0000] alpha[2]= [-1,0000]

i= 0     t= 0,0000       w[1]= 0,00000000       w[2]= -1,00000000
i= 1     t= 0,1000       w[1]= 0,27204137       w[2]= -1,07704549
i= 2     t= 0,2000       w[1]= 0,49548169       w[2]= -1,11554333
...
i= 18    t= 1,8000       w[1]= 1,24978481       w[2]= -0,44123705
i= 19    t= 1,9000       w[1]= 1,20068300       w[2]= -0,40395251
i= 20    t= 2,0000       w[1]= 1,14332436       w[2]= -0,36936318

y[1]= 0,00000000        y[2]= -1,00000000       e[1]= 0,00000000  e[2]= 0,00000000
y[1]= 0,27204675        y[2]= -1,07705075       e[1]= 0,00000538  e[2]= 0,00000526
y[1]= 0,49549074        y[2]= -1,11555217       e[1]= 0,00000906  e[2]= 0,00000884
...
y[1]= 1,24979796        y[2]= -0,44124922       e[1]= 0,00001315  e[2]= 0,00001217
y[1]= 1,20069578        y[2]= -0,40396431       e[1]= 0,00001278  e[2]= 0,00001180
y[1]= 1,14333672        y[2]= -0,36937457       e[1]= 0,00001236  e[2]= 0,00001139
```

Exercício 5.9 – 2c (Burden, 2015)

$$u_1' = u_1 + 2u_2 - 2u_3 + e^{-t}$$

$$u_2' = u_2 + u_3 - 2e^{-t}$$

$$u_3' = u_1 + 2u_2 + e^{-t}$$

$$u_1(0) = 3, \qquad u_2(0) = -1, \qquad u_3(0) = 1, \qquad 0 \leq \mathrm{t} \leq 1, \qquad \mathrm{h} = 0{,}1$$

```
Os parâmetros digitados foram: [a]= 0,000 [b]= 1,000 [m]= 3 [n]= 10 alpha[1]=
[3,0000] alpha[2]= [-1,0000] alpha[3]= [1,0000]

i= 0     t= 0,0000    w[1]= 3,00000000    w[2]= -1,00000000    w[3]= 1,00000000
i= 1     t= 0,1000    w[1]= 2,95601283    w[2]= -1,19086301    w[3]= 1,17431207
i= 2     t= 0,2000    w[1]= 2,82820001    w[2]= -1,36717100    w[3]= 1,29430535
i= 3     t= 0,3000    w[1]= 2,62300502    w[2]= -1,53516737    w[3]= 1,35508120
i= 4     t= 0,4000    w[1]= 2,34715282    w[2]= -1,70213314    w[3]= 1,35096843
i= 5     t= 0,5000    w[1]= 2,00762953    w[2]= -1,87660336    w[3]= 1,27532972
i= 6     t= 0,6000    w[1]= 1,61165492    w[2]= -2,06862759    w[3]= 1,12031748
i= 7     t= 0,7000    w[1]= 1,16664854    w[2]= -2,29008513    w[3]= 0,87656855
i= 8     t= 0,8000    w[1]= 0,68019034    w[2]= -2,55506790    w[3]= 0,53282506
i= 9     t= 0,9000    w[1]= 0,15997622    w[2]= -2,88034679    w[3]= 0,07546587
i= 10    t= 1,0000    w[1]= -0,38623048   w[2]= -3,28594071    w[3]= -0,51207026

y[1]= 3,00000000       y[2]= -1,00000000      y[3]= 1,00000000
y[1]= 2,95601249       y[2]= -1,19086370      y[3]= 1,17431163
y[1]= 2,82819922       y[2]= -1,36717276      y[3]= 1,29430395
y[1]= 2,62300365       y[2]= -1,53517075      y[3]= 1,35507821
y[1]= 2,34715080       y[2]= -1,70213889      y[3]= 1,35096298
y[1]= 2,00762678       y[2]= -1,87661246      y[3]= 1,27532073
y[1]= 1,61165136       y[2]= -2,06864136      y[3]= 1,12030352
y[1]= 1,16664415       y[2]= -2,29010532      y[3]= 0,87654780
y[1]= 0,68018509       y[2]= -2,55509679      y[3]= 0,53279513
y[1]= 0,15997010       y[2]= -2,88038736      y[3]= 0,07542372
y[1]= -0,38623744      y[2]= -3,28599682      y[3]= -0,51212857

e[1]= 0,00000000       e[2]= 0,00000000       e[3]= 0,00000000
e[1]= 0,00000034       e[2]= 0,00000069       e[3]= 0,00000045
e[1]= 0,00000080       e[2]= 0,00000177       e[3]= 0,00000140
e[1]= 0,00000136       e[2]= 0,00000339       e[3]= 0,00000300
e[1]= 0,00000202       e[2]= 0,00000575       e[3]= 0,00000545
e[1]= 0,00000276       e[2]= 0,00000910       e[3]= 0,00000899
e[1]= 0,00000355       e[2]= 0,00001377       e[3]= 0,00001395
e[1]= 0,00000439       e[2]= 0,00002019       e[3]= 0,00002075
e[1]= 0,00000525       e[2]= 0,00002889       e[3]= 0,00002993
e[1]= 0,00000612       e[2]= 0,00004057       e[3]= 0,00004216
e[1]= 0,00000696       e[2]= 0,00005611       e[3]= 0,00005832
```

Exercício 5.9 – 2d (Burden, 2015)

$$u_1' = 3u_1 + 2u_2 - u_3 - 1 - 2sen(t)$$

$$u_2' = u_1 - 2u_2 + 3u_3 + 6 - t + 2sen(t) + \cos(t)$$

$$u_3' = 2u_1 + 4u_3 + 8 - 2t$$

$$u_1(0) = 5, \qquad u_2(0) = -9, \qquad u_3(0) = -5, \qquad 0 \leq \mathrm{t} \leq 2, \qquad \mathrm{h} = 0{,}2$$

```
Os parâmetros digitados foram: [a]= 0,000 [b]= 2,000 [m]= 3 [n]= 10
alpha[1]= [5,0000] alpha[2]= [-9,0000] alpha[3]= [-5,0000]

i= 0  t= 0,0000   w[1]= 5,00000000   w[2]= -9,00000000   w[3]= -5,00000000
i= 1  t= 0,2000   w[1]= 5,85399925   w[2]= -6,58493690   w[3]= -5,51120222
i= 2  t= 0,4000   w[1]= 8,38330900   w[2]= -4,90201610   w[3]= -5,84129949
i= 3  t= 0,6000   w[1]= 13,58890681  w[2]= -2,95418927   w[3]= -4,51808620
i= 4  t= 0,8000   w[1]= 23,41761331  w[2]= 1,48419015    w[3]= 2,56362979
i= 5  t= 1,0000   w[1]= 41,49825592  w[2]= 13,88034475   w[3]= 26,10907731
i= 6  t= 1,2000   w[1]= 74,49594921  w[2]= 47,66792293   w[3]= 92,83361933
i= 7  t= 1,4000   w[1]= 134,58778590 w[2]= 135,26098840  w[3]= 267,46411361
i= 8  t= 1,6000   w[1]= 243,97809713 w[2]= 353,50436485  w[3]= 703,62173367
i= 9  t= 1,8000   w[1]= 443,12659455 w[2]= 882,03172432  w[3]= 1760,52618987
i= 10 t= 2,0000   w[1]= 805,73782145 w[2]= 2136,25111125 w[3]= 4268,95883127

y[1]= 5,00000000        y[2]= -9,00000000        y[3]= -5,00000000
y[1]= 5,85519774        y[2]= -6,58258771        y[3]= -5,50771339
y[1]= 8,38822074        y[2]= -4,89241479        y[3]= -5,82373181
y[1]= 13,60287756       y[2]= -2,92102977        y[3]= -4,45343131
y[1]= 23,45204232       y[2]= 1,58836138         y[3]= 2,77045835
y[1]= 41,57707970       y[2]= 14,18586491        y[3]= 26,71881709
y[1]= 74,66862275       y[2]= 48,52024409        y[3]= 94,53717931
y[1]= 134,95509227      y[2]= 137,55271457       y[3]= 272,04668063
y[1]= 244,74312165      y[2]= 359,49767881       y[3]= 715,60764347
y[1]= 444,69480358      y[2]= 897,37318984       y[3]= 1791,20854025
y[1]= 808,91253390      y[2]= 2174,86317237      y[3]= 4346,18248447

e[1]= 0,00000000        e[2]= 0,00000000         e[3]= 0,00000000
e[1]= 0,00119849        e[2]= 0,00234919         e[3]= 0,00348883
e[1]= 0,00491174        e[2]= 0,00960130         e[3]= 0,01756768
e[1]= 0,01397076        e[2]= 0,03315950         e[3]= 0,06465489
e[1]= 0,03442900        e[2]= 0,10417123         e[3]= 0,20682856
e[1]= 0,07882377        e[2]= 0,30552016         e[3]= 0,60973978
e[1]= 0,17267353        e[2]= 0,85232116         e[3]= 1,70355997
e[1]= 0,36730637        e[2]= 2,29172617         e[3]= 4,58256701
e[1]= 0,76502452        e[2]= 5,99331396         e[3]= 11,98590980
e[1]= 1,56820903        e[2]= 15,34146551        e[3]= 30,68235038
e[1]= 3,17471246        e[2]= 38,61206112        e[3]= 77,22365321
```

Exercício 5.9 – 3a (Burden, 2015)

$$y'' - 2y' + y = te^t - t$$

$$u_1 = y, \qquad u_2 = y'$$

$$u_1' = u_2(t), \qquad u_2' = te^t - t + 2u_2 - u_1$$

$$u_1(0) = 0, \qquad u_2(0) = 0, \ \ 0 \le \mathrm{t} \le 1, \qquad \mathrm{h} = 0{,}1$$

$$y(t) = \frac{1}{6}t^3e^t - te^t + 2e^t - t - 2, \qquad y'(t) = \left(\frac{1}{6}t^3 + \frac{1}{2}t^2 - t + 1\right)e^t - 1$$

```
i= 0     t= 0,0000       w[1]= 0,00000000       w[2]= 0,00000000
i= 1     t= 0,1000       w[1]= 0,00000897       w[2]= 0,00036392
i= 2     t= 0,2000       w[1]= 0,00015352       w[2]= 0,00317882
i= 3     t= 0,3000       w[1]= 0,00083427       w[2]= 0,01171909
i= 4     t= 0,4000       w[1]= 0,00283205       w[2]= 0,03035325
i= 5     t= 0,5000       w[1]= 0,00742968       w[2]= 0,06479839
i= 6     t= 0,6000       w[1]= 0,01656149       w[2]= 0,12242374
i= 7     t= 0,7000       w[1]= 0,03299617       w[2]= 0,21261233
i= 8     t= 0,8000       w[1]= 0,06055896       w[2]= 0,34719028
i= 9     t= 0,9000       w[1]= 0,10440070       w[2]= 0,54093559
i= 10    t= 1,0000       w[1]= 0,17132224       w[2]= 0,81217952

y[1]= 0,00000000     y[2]= 0,00000000     e[1]= 0,00000000     e[2]= 0,00000000
y[1]= 0,00000894     y[2]= 0,00036388     e[1]= 0,00000003     e[2]= 0,00000004
y[1]= 0,00015350     y[2]= 0,00317880     e[1]= 0,00000002     e[2]= 0,00000002
y[1]= 0,00083434     y[2]= 0,01171918     e[1]= 0,00000007     e[2]= 0,00000009
y[1]= 0,00283231     y[2]= 0,03035359     e[1]= 0,00000026     e[2]= 0,00000034
y[1]= 0,00743027     y[2]= 0,06479915     e[1]= 0,00000059     e[2]= 0,00000077
y[1]= 0,01656260     y[2]= 0,12242518     e[1]= 0,00000111     e[2]= 0,00000144
y[1]= 0,03299805     y[2]= 0,21261476     e[1]= 0,00000188     e[2]= 0,00000243
y[1]= 0,06056194     y[2]= 0,34719411     e[1]= 0,00000298     e[2]= 0,00000383
y[1]= 0,10440520     y[2]= 0,54094135     e[1]= 0,00000450     e[2]= 0,00000576
y[1]= 0,17132880     y[2]= 0,81218789     e[1]= 0,00000656     e[2]= 0,00000837
```

Exercício 5.9 – 4d (Burden, 2015)

$$t^3y''' + t^2y'' - 2ty' + 2y = 8t^3 - 2$$

$$u_1 = y, \qquad u_2 = y', \qquad u_3 = y''$$

$$u_1' = u_2(t), \qquad u_2' = u_3(t), \qquad u_3' = \frac{8t^3 - 2 - t^2u_3 + 2tu_2 - 2u_1}{t^3}$$

$$u_1(0) = 2, \qquad u_2(0) = 8, \qquad u_3(0) = 6, \qquad 1 \leq \mathrm{t} \leq 2, \qquad \mathrm{h} = 0{,}1$$

$$y(t) = 2t - t^{-1} + t^2 + t^3 - 1, y'(t) = \frac{3t^4 + 2t^3 + 2t^2 + 1}{t^2}, y''(t) = \frac{6t^5 + 2t^4 - 2t}{t^4}$$

```
i= 0  t= 1,0000    w[1]= 2,00000000   w[2]= 8,00000000    w[3]= 6,00000000
i= 1  t= 1,1000    w[1]= 2,83190807   w[2]= 8,65645799    w[3]= 7,09737343
i= 2  t= 1,2000    w[1]= 3,73466631   w[2]= 9,41446279    w[3]= 8,04259896
i= 3  t= 1,3000    w[1]= 4,71777047   w[2]= 10,26173859   w[3]= 8,88967701
i= 4  t= 1,4000    w[1]= 5,78971770   w[2]= 11,19022983   w[3]= 9,67114868
i= 5  t= 1,5000    w[1]= 6,95833932   w[2]= 12,19447276   w[3]= 10,40742096
i= 6  t= 1,6000    w[1]= 8,23100886   w[2]= 13,27065560   w[3]= 11,11173381
i= 7  t= 1,7000    w[1]= 9,61477670   w[2]= 14,41605350   w[3]= 11,79293302
i= 8  t= 1,8000    w[1]= 11,11645980  w[2]= 15,62867680   w[3]= 12,45708170
i= 9  t= 1,9000    w[1]= 12,74270315  w[2]= 16,90704519   w[3]= 13,10843031
i= 10 t= 2,0000    w[1]= 14,50002274  w[2]= 18,25003893   w[3]= 13,75001864

y[1]= 2,00000000       y[2]= 8,00000000       y[3]= 6,00000000
y[1]= 2,83190909       y[2]= 8,65644628       y[3]= 7,09737040
y[1]= 3,73466667       y[2]= 9,41444444       y[3]= 8,04259259
y[1]= 4,71776923       y[2]= 10,26171598      y[3]= 8,88966773
y[1]= 5,78971429       y[2]= 11,19020408      y[3]= 9,67113703
y[1]= 6,95833333       y[2]= 12,19444444      y[3]= 10,40740741
y[1]= 8,23100000       y[2]= 13,27062500      y[3]= 11,11171875
y[1]= 9,61476471       y[2]= 14,41602076      y[3]= 11,79291675
y[1]= 11,11644444      y[2]= 15,62864198      y[3]= 12,45706447
y[1]= 12,74268421      y[2]= 16,90700831      y[3]= 13,10841231
y[1]= 14,50000000      y[2]= 18,25000000      y[3]= 13,75000000

e[1]= 0,00000000       e[2]= 0,00000000       e[3]= 0,00000000
e[1]= 0,00000102       e[2]= 0,00001171       e[3]= 0,00000303
e[1]= 0,00000035       e[2]= 0,00001834       e[3]= 0,00000637
e[1]= 0,00000124       e[2]= 0,00002262       e[3]= 0,00000928
e[1]= 0,00000341       e[2]= 0,00002575       e[3]= 0,00001166
e[1]= 0,00000598       e[2]= 0,00002831       e[3]= 0,00001356
e[1]= 0,00000886       e[2]= 0,00003060       e[3]= 0,00001506
e[1]= 0,00001199       e[2]= 0,00003274       e[3]= 0,00001626
e[1]= 0,00001536       e[2]= 0,00003482       e[3]= 0,00001723
e[1]= 0,00001894       e[2]= 0,00003688       e[3]= 0,00001800
e[1]= 0,00002274       e[2]= 0,00003893       e[3]= 0,00001864
```

Exercício 5.9 – 5 (Burden, 2015)

$$x_1'(t) = k_1x_1(t) - k_2x_1(t)x_2(t), \qquad x_2'(t) = k_3x_1(t)x_2(t) - k_4x_2(t)$$

Onde $k_1 = 3$, $k_2 = 0{,}002$, $k_3 = 0{,}0006$ e $k_4 = 0{,}5$ temos:

$$x_1'(t) = 3w_1 - 0{,}002w_1w_2, \qquad x_2'(t) = 0{,}0006w_1w_2 - 0{,}5w_2$$

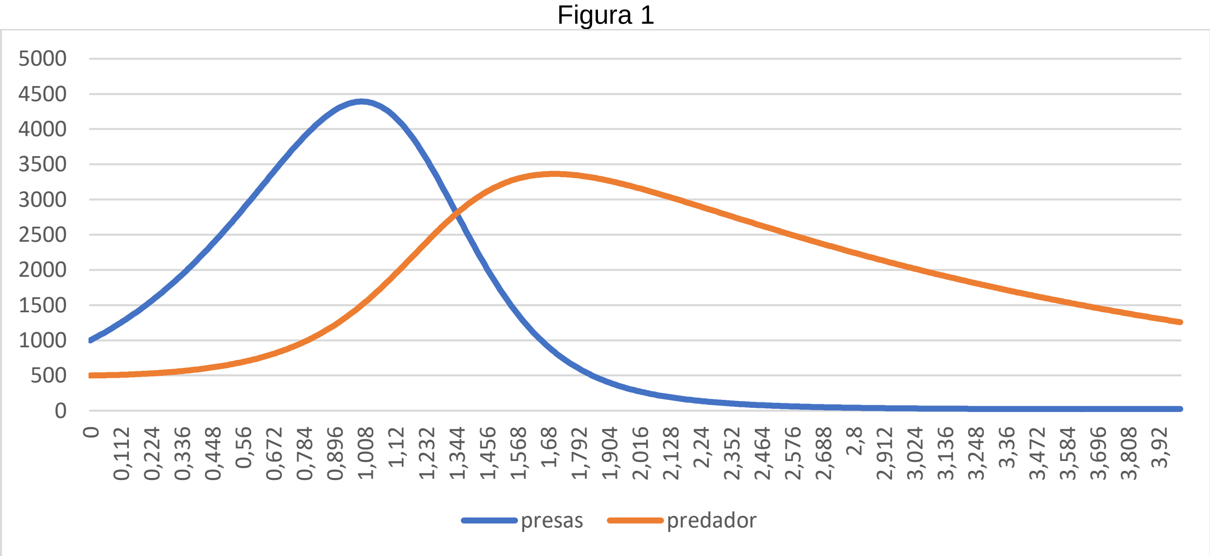
Com: $0 \leq t \leq 4,\ w_{1,0} = 1000,\ w_{2,0} = 500$

Para efeito de cálculo do algoritmo a função f (solução da equação diferencial ordinária) retornará sempre o valor 1, o valor exato (y) e o valor do erro (e) devem ser desconsiderados:

```
Os parâmetros digitados foram: [a]= 0,000 [b]= 4,000 [m]= 2 [n]= 500
alpha[1]= [1000,0000] alpha[2]= [500,0000]
i= 0     t= 0,0000       w[1]= 1000,00000000    w[2]= 500,00000000
i= 1     t= 0,0080       w[1]= 1016,12532840    w[2]= 500,41947602
i= 2     t= 0,0160       w[1]= 1032,50342858    w[2]= 500,87837443
...
i= 498   t= 3,9840       w[1]= 25,20034676      w[2]= 1267,46746974
i= 499   t= 3,9920       w[1]= 25,29527338      w[2]= 1262,56072473
i= 500   t= 4,0000       w[1]= 25,39254703      w[2]= 1257,67355533
```

Esboçando o gráfico dos resultados obtidos:

Figura 1



Com o aumento do número de presas no ambiente o número de predadores cresce em proporção, até que o limite do número de predadores que a população de presas suporta é ultrapassado. O número de presas cai muito rapidamente devido ao alto número de predadores e por consequência o número de predadores cai um pouco mais lentamente devido agora a escassez de presas.

Para avaliarmos se há valores estáveis de $w_{1,0}$ e $w_{2,0}$ precisamos tratar as duas equações como um sistema de equações lineares onde as variações de população tem valores iguais a zero para um sistema estável:

$$\begin{cases} 3w_1 - 0{,}002w_1w_2 = 0 \\ 0{,}0006w_1w_2 - 0{,}5w_2 = 0 \end{cases}$$

Para tal sistema, tem se as respostas:

$$w_1 = 833,\overline{3}, \qquad w_2 = 1500$$

Para comprovarmos os valores da solução estável, reaplicamos o método com os valores acima:

```
Os parâmetros digitados foram: [a]= 0,000 [b]= 4,000 [m]= 2 [n]= 500
alpha[1]= [833,3333] alpha[2]= [1500,0000]
i= 0     t= 0,0000       w[1]= 833,33333333     w[2]= 1500,00000000
i= 1     t= 0,0080       w[1]= 833,33333333     w[2]= 1500,00000000
i= 2     t= 0,0160       w[1]= 833,33333333     w[2]= 1500,00000000
...
i= 498   t= 3,9840       w[1]= 833,33333333     w[2]= 1500,00000000
i= 499   t= 3,9920       w[1]= 833,33333333     w[2]= 1500,00000000
i= 500   t= 4,0000       w[1]= 833,33333333     w[2]= 1500,00000000
```

Pode se observar então a estabilidade dos valores w_1 e w_2..

Exercício 5.9 – 6 (Burden, 2015)

$$x_1'(t) = x_1(t)[4 - 0{,}0003x_1(t) - 0{,}0004x_2(t)]$$

$$x_2'(t) = x_2(t)[2 - 0{,}0002x_1(t) - 0{,}0001x_2(t)]$$

Então temos:

$$x_1'(t) = w_1[4 - 0{,}0003w_1 - 0{,}0004w_2]$$

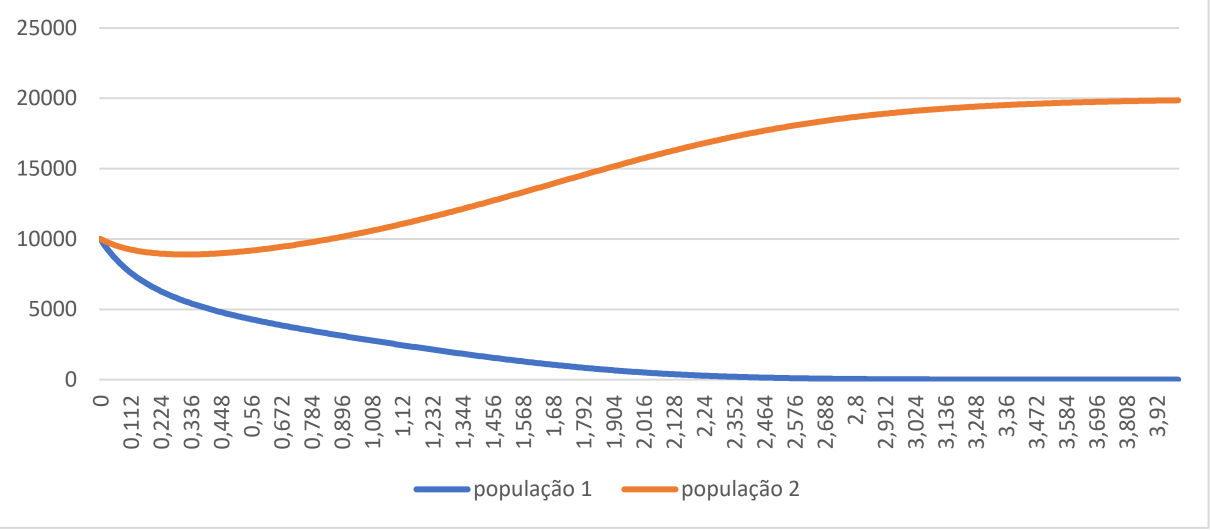
$$x_2'(t) = w_2[2 - 0{,}0002w_1 - 0{,}0001w_2]$$

Com: $0 \leq t \leq 4,\ w_{1,0} = 1000,\ w_{2,0} = 1000$

```
Os parâmetros digitados foram: [a]= 0,000 [b]= 4,000 [m]= 2 [n]= 500
alpha[1]= [10000,0000] alpha[2]= [10000,0000]
i= 0     t= 0,0000       w[1]= 10000,00000000   w[2]= 10000,00000000
i= 1     t= 0,0080       w[1]= 9766,83928765    w[2]= 9922,49844917
i= 2     t= 0,0160       w[1]= 9546,59803688    w[2]= 9849,75964117
...
i= 498   t= 3,9840       w[1]= 0,54050002       w[2]= 19858,77822914
i= 499   t= 3,9920       w[1]= 0,52371192       w[2]= 19860,98744534
i= 500   t= 4,0000       w[1]= 0,50744172       w[2]= 19863,16259825
```

Esboçando o gráfico dos resultados obtidos:

Figura 2



Ambas as populações começam caindo em número de indivíduos pois há uma disputa pelo alimento entre elas, porém a população 1 cai muito mais rapidamente que a população 2. Depois de certo ponto, há um aumento da população 2 devido sobra de alimento deixada pela extinção da população 1.

Para avaliarmos se há valores estáveis de $w_{1,0}$ e $w_{2,0}$ precisamos tratar as duas equações como um sistema de equações lineares onde as variações de população tem valores iguais a zero para um sistema estável:

$$\begin{cases} w_1[4 - 0{,}0003w_1 - 0{,}0004w_2] = 0 \\ w_2[2 - 0{,}0002w_1 - 0{,}0001w_2] = 0 \end{cases}$$

Para tal sistema, tem se as respostas:

$$w_1 = 8000, \qquad w_2 = 4000$$

Para comprovarmos os valores da solução estável, reaplicamos o método com os valores acima:

```
Os parâmetros digitados foram: [a]= 0,000 [b]= 4,000 [m]= 2 [n]= 500
alpha[1]= [8000,0000] alpha[2]= [4000,0000]
i= 0     t= 0,0000       w[1]= 8000,00000000    w[2]= 4000,00000000
i= 1     t= 0,0080       w[1]= 8000,00000000    w[2]= 4000,00000000
i= 2     t= 0,0160       w[1]= 8000,00000000    w[2]= 4000,00000000
...
i= 498   t= 3,9840       w[1]= 8000,00000000    w[2]= 4000,00000000
i= 499   t= 3,9920       w[1]= 8000,00000000    w[2]= 4000,00000000
i= 500   t= 4,0000       w[1]= 8000,00000000    w[2]= 4000,00000000
```

Pode se observar então a estabilidade dos valores w_1 e w_2.

4. CONCLUSÃO

Como avaliado neste relatório e nos relatórios anteriores o método de Rugen-Kutta de 4ª ordem apresenta uma boa exatidão do resultado esperado para problemas de valores iniciais bem-postos. Apresenta facilidade algébrica de cálculo, porém necessita de pelo menos 4 cálculos da função o que pode resultar em lentidão no algoritmo implementado seja em computadores ou manualmente.

Também ficou evidenciado neste relatório através de exercícios resolvidos que transformando se uma equação de ordem superior em um sistema de equações diferenciais de primeira ordem, foi possível realizar o cálculo através do método proposto. O método não exige novas técnicas, apenas renomeação de variáveis, e não restringe a ordem do sistema, além de possuir um resultado muito próximo a solução real da equação diferencial, resultando em um erro de truncamento mínimo.

5. REFERÊNCIAS

Burden, R. L. (2011). *Numerical Analysis* (9th Edition ed.). Boston: Cengage Learning.

Burden, R. L. (2015). *Análise Numérica* (Tradução da 10ª edição norte-americana ed.). São Paulo: Cengage Learning.

ANEXO A. CÓDIGO FONTE

```
/**********************************************
 * \brief   Programa realizado para a Aula de Métodos Númericos em Fenômenos de Transporte
 *          Análise Numérica - Burden, Richard - 10ª edição - Pág. 366
 *          Algoritmo 5.7 - Método de Runge-Kutta de 4ª ordem para Equações Diferenciais

 *
 * \param   Extremidade a
 * \param   Extremidade b
 * \param   Número de Equações m
 * \param   Número de Pontos da Malha n
 * \param   Condições Iniciais w0 ... wn
 * \return  Aproximação wj para uj(t) nos (N+1) valores de t
 *
 **********************************************/

#include <stdio.h>
#include <math.h>
#include <locale.h>
#include <ctype.h>


/*Função f(solução exata do sistema) equação diferencial ordinária*/
double f(int j, double t, double y)
{
    switch (j)
    {
        case 1 :
            /*validação ex. 1 no intervalo [0,0,5], n = 5, w1,0 = 0 e w2,0 = 0*/
            return(-3.375 * exp(-2 * t) + 1.875 * exp(-0.4 * t) + 1.5);

            /*exercicio 5.9-1a no intervalo [0,1], n = 5, w1,0 = 1 e w2,0 = 1
            return(exp(5 * t) / 3 - exp(-t) / 3 + exp(2 * t));*/

            /*exercicio 5.9-1b no intervalo [0,2], n = 20, w1,0 = 0 e w2,0 = -1
            return(2 * exp(-t) - 2 * exp(-2 * t) + sin(t));*/

            /*exercicio 5.9-2c no intervalo [0,1], n = 10, w1,0 = 3, w2,0 = -1 e w3,0 = 1
            return(-3 * exp(-t) - 3 * sin(t) + 6 * cos(t));*/

            /*exercicio 5.9-2d no intervalo [0,2], n = 10, w1,0 = 5, w2,0 = -9 e w3,0 = -5
            return(2 * exp(3 * t) + 3 * exp(-2 * t) + t);*/

            /*exercicio 5.9-3a no intervalo [0,1], n = 10, w1,0 = 0, w2,0 = 0
            return((pow(t, 3) * exp(t)) / 6 - t * exp(t) + 2 * exp(t) - t - 2);*/

            /*exercicio 5.9-4d no intervalo [1,2], n = 10, w1,0 = 2, w2,0 = 8, w3,0 = 6
            return(2 * t - 1 / t + pow(t, 2) + pow(t, 3) - 1);*/

            /*caso não possua a equação diferencial ordinária
            return(1);*/
            break;
        case 2 :
            /*validação ex. 1 no intervalo [0,0,5], n = 5, w1,0 = 0 e w2,0 = 0*/
            return(-2.25 * exp(-2 * t) + 2.25 * exp(-0.4 * t));

            /*exercicio 5.9-1a no intervalo [0,1], n = 5, w1,0 = 1 e w2,0 = 1
            return(exp(5 * t) / 3 + 2 * exp(-t) / 3 + pow(t, 2) * exp(2 * t));*/

            /*exercicio 5.9-1b no intervalo [0,2], n = 20, w1,0 = 0 e w2,0 = -1
            return(-3 * exp(-t) + 2 * exp(-2 * t));*/

            /*exercicio 5.9-2c no intervalo [0,1], n = 10, w1,0 = 3, w2,0 = -1 e w3,0 = 1
            return(1.5 * exp(-t) + 0.3 * sin(t) - 2.1 * cos(t) - 0.4 * exp(2 * t));*/

            /*exercicio 5.9-2d no intervalo [0,2], n = 10, w1,0 = 5, w2,0 = -9 e w3,0 = -5
            return(-8 * exp(-2 * t) + exp(4 * t) - 2 * exp(3 * t) + sin(t));*/

            /*exercicio 5.9-3a no intervalo [0,1], n = 10, w1,0 = 0, w2,0 = 0
            return(((pow(t, 3) / 6) + (pow(t, 2) / 2) - t + 1) * exp(t) - 1);*/
```

```
            /*exercicio 5.9-4d no intervalo [1,2], n = 10, w1,0 = 2, w2,0 = 8, w3,0 = 6
            return(( 3 * pow(t, 4) + 2 * pow(t, 3) + 2 * pow(t, 2) + 1) / pow(t, 2));*/

            /*caso não possua a equação diferencial ordinária
            return(1);*/
            break;
        case 3 :
            /*exercicio 5.9-2c no intervalo [0,1], n = 10, w1,0 = 3, w2,0 = -1 e w3,0 = 1
            return(-1 / exp(t) + 2.4 * cos(t) + 1.8 * sin(t) - 0.4 * exp(2 * t));*/

            /*exercicio 5.9-2d no intervalo [0,2], n = 10, w1,0 = 5, w2,0 = -9 e w3,0 = -5
            return(2 * exp(4 * t) - 4 * exp(3 * t) - exp(-2 * t) - 2);*/

            /*exercicio 5.9-4d no intervalo [1,2], n = 10, w1,0 = 2, w2,0 = 8, w3,0 = 6
            return(( 6 * pow(t, 5) + 2 * pow(t, 4) - 2 * t) / pow(t, 4));*/

            /*caso não possua a 3ª equação diferencial ordinária*/
            return(1);
            break;
        default:
            return 0;
    }
}

/*Função derivada f'*/
double dy(int j, double t, double *w)
{
    switch (j)
    {
        case 1 :
            /*validação ex. 1 no intervalo [0,0,5], n = 5, w1,0 = 0 e w2,0 = 0*/
            return(-4 * w[1] + 3 * w[2] + 6);

            /*exercicio 5.9-1a no intervalo [0,1], n = 5, w1,0 = 1 e w2,0 = 1
            return(3 * w[1] + 2 * w[2] - (2 * pow(t, 2) + 1) * exp(2 * t));*/

            /*exercicio 5.9-1b no intervalo [0,2], n = 20, w1,0 = 0 e w2,0 = -1
            return(-4 * w[1] - 2 * w[2] + cos(t) + 4 * sin(t));*/

            /*exercicio 5.9-2c no intervalo [0,1], n = 10, w1,0 = 3, w2,0 = -1 e w3,0 = 1
            return(w[1] + 2 * w[2] - 2 * w[3] + exp(-t));*/

            /*exercicio 5.9-2d no intervalo [0,2], n = 10, w1,0 = 5, w2,0 = -9 e w3,0 = -5
            return(3 * w[1] + 2 * w[2] - w[3] - 1 - 3 * t - 2 * sin(t));*/

            /*exercicio 5.9-3a no intervalo [0,1], n = 10, w1,0 = 0, w2,0 = -0
            return(w[2]);*/

            /*exercicio 5.9-4d no intervalo [1,2], n = 10, w1,0 = 2, w2,0 = 8, w3,0 = 6
            return(w[2]);*/

            /*exercicio 5.9-5 no intervalo [0,4], n = 40, w1,0 = 1000 e w2,0 = 500
            return(3 * w[1] - 0.002 * w[1] * w[2]);*/

            /*exercicio 5.9-6 no intervalo [0,4], n = 40, w1,0 = 10000 e w2,0 = 10000
            return(w[1] * (4 - 0.0003 * w[1] - 0.0004 * w[2]));*/
            break;
        case 2 :
            /*validação ex. 1 no intervalo [0,0,5], n = 5, w1,0 = 0 e w2,0 = 0*/
            return(-2.4 * w[1] + 1.6 * w[2] + 3.6);

            /*exercicio 5.9-1a no intervalo [0,1], n = 5, w1,0 = 1 e w2,0 = 1
            return(4 * w[1] + w[2] + (pow(t, 2) + 2 * t - 4) * exp(2 * t));*/

            /*exercicio 5.9-1b no intervalo [0,2], n = 20, w1,0 = 0 e w2,0 = -1
            return(3 * w[1] + w[2] - 3 * sin(t));*/

            /*exercicio 5.9-2c no intervalo [0,1], n = 10, w1,0 = 3, w2,0 = -1 e w3,0 = 1
            return(w[2] + w[3] - 2 * exp(-t));*/

            /*exercicio 5.9-2d no intervalo [0,2], n = 10, w1,0 = 5, w2,0 = -9 e w3,0 = -5
            return(w[1] - 2 * w[2] + 3 * w[3] + 6 - t + 2 * sin(t) + cos(t));*/
```

```
            /*exercicio 5.9-3a no intervalo [0,1], n = 10, w1,0 = 0, w2,0 = -0
            return(t * exp(t) - t + 2 * w[2] - w[1]);*/

            /*exercicio 5.9-4d no intervalo [1,2], n = 10, w1,0 = 2, w2,0 = 8, w3,0 = 6
            return(w[3]);*/

            /*exercicio 5.9-5 no intervalo [0,4], n = 40, w1,0 = 1000 e w2,0 = 500
            return(0.0006 * w[1] * w[2] - 0.5 * w[2]);*/

            /*exercicio 5.9-6 no intervalo [0,4], n = 40, w1,0 = 10000 e w2,0 = 10000
            return(w[2] * (2 - 0.0002 * w[1] - 0.0001 * w[2]));*/
            break;
        case 3 :
            /*exercicio 5.9-2c no intervalo [0,1], n = 10, w1,0 = 3, w2,0 = -1 e w3,0 = 1
            return(w[1] + 2 * w[2] + exp(-t));*/

            /*exercicio 5.9-2d no intervalo [0,2], n = 10, w1,0 = 5, w2,0 = -9 e w3,0 = -5
            return(2 * w[1] + 4 * w[3] + 8 - 2 * t);*/

            /*exercicio 5.9-4d no intervalo [1,2], n = 10, w1,0 = 2, w2,0 = 8, w3,0 = 6
            return((8 * pow(t, 3) - 2 - pow(t, 2) * w[3] + 2 * t * w[2] - 2 * w[1]) / pow(t, 3));*/

            /*caso não possua a 3ª equação diferencial*/
            return(1);
            break;
        default:
            return 0;
    }
}

/*Programa principal*/
int main(void)
{
    setlocale(LC_ALL,"");

    /*Declaração de variáveis*/
    int m, n, i, j;
    double a, b, h, t;

    /*Entrada de parâmetros*/
    printf("Digite o início do intervalo [a]: ");           scanf("%lf", &a);
    printf("Digite o fim do intervalo [b]: ");              scanf("%lf", &b);
    printf("Digite o número de equações estudadas [m]: ");  scanf("%d", &m);
    printf("Digite o número de pontos da malha [n]: ");     scanf("%d", &n);

    /*Declaração de variáveis dependentes do número de equações*/
    j = m - 1;
    double w[j], k1[j], k2[j], k3[j], k4[j], y[j], e[j], _k1[j], _k2[j], _k3[j];

    /*Entrada de parâmetros dependentes do número de equações*/
    printf("Digite as condições iniciais do valor [alpha]:\n");
    for (j=1; j<=m; j++){printf("alpha[%d]= ", j); scanf ("%lf", &w[j]);}

    /*Exibição dos parâmetros de cáculo para o usuário*/
    printf ("\nOs parâmetros digitados foram: [a]= %.3f [b]= %.3f [m]= %i [n]= %i", a, b, m, n);
    for (j=1; j<=m; j++){printf(" alpha[%d]= [%.4f]", j, w[j]);}
    printf("\n\n");

    /*Cálculo do Passo h*/
    h = (b - a) / n;
    t = a;

    for(i=0; i<=n; i++)
    {
        /*Cálculo de ti*/
        t = a + i * h;

        /*Cálculo da solução da equação diferencial e erro em relação ao valor exato*/
        for (j=1; j<=m; j++){y[j] = f(j, t , w[j]); e[j] = fabs(y[j] - w[j]);}

        /*Exibição dos valores calculados para o usuário*/
        printf("i= %d \t t= %.4f \t ", i, t);
        for (j=1; j<=m; j++){printf ("w[%d]= %.8f \t", j, w[j]);}
        for (j=1; j<=m; j++){printf ("y[%d]= %.8f \t", j, y[j]);}
```

```
        for (j=1; j<=m; j++){printf ("e[%d]= %.8f \t", j, e[j]);}
        printf("\n");

        /*Cálculo das notações */
        for (j=1; j<=m; j++){k1[j] = h * dy(j, t, w);}

        for (j=1; j<=m; j++){_k1[j] = w[j] + k1[j] / 2;}
        for (j=1; j<=m; j++){k2[j] = h * dy(j, t + h / 2, _k1);}

        for (j=1; j<=m; j++){_k2[j] = w[j] + k2[j] / 2;}
        for (j=1; j<=m; j++){k3[j] = h * dy(j, t + h / 2, _k2);}

        for (j=1; j<=m; j++){_k3[j] = w[j] + k3[j];}
        for (j=1; j<=m; j++){k4[j] = h * dy(j, t + h, _k3);}

        /*Equação de diferença*/
        for (j=1; j<=m; j++){w[j] = w[j] + (k1[j] + 2 * k2[j] + 2 * k3[j] + k4[j]) / 6;}
    }
    return 0;
}
```