Práctica 4. Funciones de una variable: integración

1. Cálculo integral

Para calcular primitivas o integrales definidas, disponemos de la orden `int`:

`int(f,x)`	Calcula la integral indefinida $\int f(x)\,dx$, pero sin la constante aditiva, es decir, calcula una primitiva de f. Si no se especifica la variable, Matlab elegiría una por defecto, teniendo siempre preferencia por la variable x.
`int(f,x,a,b)`	Calcula la integral definida $\int_a^b f(x)\,dx$.

Por ejemplo, para calcular las integrales siguientes:

$$\int xe^x\,dx\ ,\quad \int_0^1 xe^x\,dx\ ,\quad \int \cos(xy)\ dx\ ,\quad \int \cos(xy)\ dy\ ,\quad \int_a^b \cos x\ dx\ ,\quad \int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^2}\ ,\quad \int_1^{+\infty} \frac{dx}{x}$$

```
>> syms x y
>> int(x*exp(x))
>> int(x*exp(x),0,1)
>> int(cos(x*y))
>> int(cos(x*y),y)
>> syms a b
>> int(cos(x),a,b)
>> int(1/x^2,1,inf)
>> int(1/x,1,inf)
```

con lo que se obtienen los siguientes resultados:

$$\int xe^x\,dx = e^x(x-1)+c\ ,\ \int_0^1 xe^x\,dx = 1\ ,\ \int \cos(xy)\ dx = \frac{\operatorname{sen}(xy)}{y}+c\ ,\ \int \cos(xy)\ dy = \frac{\operatorname{sen}(xy)}{x}+c$$
$$\int_a^b \cos x\ dx = \operatorname{sen} b - \operatorname{sen} a\ ,\quad \int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^2} = 1\ ,\quad \int_1^{+\infty} \frac{dx}{x} = \infty.$$

1.1. Ejemplo

Calcula el área de la región comprendida entre la curva de ecuación $y = 2x^3$ y la recta $y = 8x$, realizando los pasos siguientes:

1. Calcula la intersección entre la curva y la recta mediante la orden `solve`.
2. Dibuja la curva y la recta en un intervalo que contenga a los puntos de intersección.
3. Calcula el área pedida.

Solución.-

1. Calculamos los posibles puntos de corte entre la curva y la recta, llamando f a la expresión de la curva y g a la expresión de la recta, tenemos:

```
>> syms x
>> f=2*x^3
>> g=8*x
>> solve(f-g,x)
ans =
-2
 0
 2
```

2. Representamos f y la recta en el intervalo $[-2, 2]$ (dicho intervalo contiene a todas las raíces):

```
>> ezplot(f,[-2,2])
>> hold on
>> ezplot(g,[-2,2])
>> grid on
>> hold off
```

3. En el gráfico anterior podemos ver que f está por encima de la recta en $[-2, 0]$ y por debajo de la recta en $[0, 2]$. Para hallar el área necesitamos resolver la integral

$$\int_{-2}^{2} |f(x) - g(x)| dx.$$

Si resolvemos el ejercio con lápiz y papel para el cálculo del área necesitamos realizar dos integrales cuyo cálculo con Matlab sería:

```
>> a1=int(f-g,x,-2,0)
a1 =
8
>> a2=int(g-f,x,0,2)
a2 =
8
>> area=a1+a2
area =
16
```

Puesto que Matlab posee la función valor absoluto podemos calcular el área con una sola integral:

```
>> area=int(abs(f-g),x,-2,2)
area =
16
```

4. Podemos dibujar el recinto de un color (rojo) escribiendo las siguientes órdenes

```
>> x1=-2:0.01:2;
>> y1=8*x1;
>> x2=2:-0.01:-2;
>> y2=2*x2.^3;
>> x=[x1 x2];
>> y=[y1 y2];
>> patch(x,y,'r')
```

1.2. Ejemplo

Halla el área de la región del plano comprendida entre la gráfica de la función $f(x) = \frac{x^2-1}{x^2+1}$ y su asíntota horizontal, realizando los pasos siguientes:

1. Encuentra la asíntota horizontal, calculando los límites en el infinito.
2. Estudia si existe intersección entre f y la asíntota horizontal.
3. Determina gráficamente la posición relativa de f respecto de su asíntota.
4. Calcula el área pedida.

Solución.-

1. Calculamos la asíntota horizontal en $+\infty$ y en $-\infty$ (podrían ser distintas):

```
>> syms x
>> f = (x^2-1)/(x^2+1); pretty(f)
>> limit(f,x,inf)
ans =
1
>> limit(f,x,-inf)
ans =
1
```

   La asíntota horizontal (por la derecha y por la izquierda) es $y = 1$.

2. Analizamos si la función f corta a la asíntota, resolviendo la ecuación $f(x) = 1$:

```
>> solve(f-1,x)
ans =

Empty sym: 0-by-1
```

   Observar que la respuesta es que no hay ninguna solución de la ecuación $f(x) - 1 = 0$, por tanto la función f no corta a la asíntota.

3. Representamos f y la asíntota, eligiendo un intervalo adecuado a la función, por ejemplo $[-5, 5]$:

```
>> ezplot(f,[-5,5])
>> hold on
>> ezplot('1',[-5,5])
>> grid on
>> hold off
```

4. Representamos el dominio en azul

```
>> x1=-5:0.01:5;
>> x2=5:-0.01:-5;
>> y1=(x1.^2-1)./(x1.^2+1);
>> y2=ones(size(x2));
>> xn=[x1 x2];
>> yn=[y1 y2];
>> patch(xn,yn,'b')
```

5. Finalmente, calculamos el área

```
>> area = int(1-f,x,-inf,inf)
area =
2*pi
```

1.3. Ejemplo

Calcula el área de la región limitada superiormente por la función

$$f(x) = (-x^2 + x + 3)\ln x$$

e inferiormente por el eje de abscisas. Representa gráficamente esta región.

Solución.- En primer lugar calculamos los puntos de corte de f con el eje de abscisas:

```
>> syms x
>> f=(-x^2+x+3)*log(x);  pretty(f)
>> sol=solve(f,x)
sol =
1/2+1/2*13^(1/2)
1/2-1/2*13^(1/2)
1
>> sol=double(sol)
sol =
2.3028
-1.3028
1.0000
>> sol=sort(sol)
-1.3028
1.0000
2.3028
```

La raíz, -1.3028, no es válida pues f no está definida para valores negativos.

Ahora representamos gráficamente la función en el intervalo $[1, 2.3028]$

```
>> ezplot(f,[sol(2),sol(3)])
>> grid on
```

Puesto que la función es positiva en este intervalo, calculamos el valor del área mediante la integral:

```
>> int(f,x,sol(2),sol(3))
>> double(ans)
ans =
0.8404
```

Para calcular el volumen del sólido generado al rotar esta región alrededor del eje OX, debemos usar la siguiente fórmula

$$V_x = \pi \int_a^b f^2 \, dx$$

donde a y b son los extremos del intervalo sobre el eje OX. Si la región rota alrededor del eje OY, la fórmula es

$$V_y = 2\pi \int_a^b x f \, dx$$

. Aplicando ambas expresiones, obtenemos

```
>> double(pi*int(f^2,sol(2),sol(3)))

ans =

    2.0408

>> double(2*pi*int(x*f,sol(2),sol(3)))

ans =

    8.7232
```

1.4. Ejemplo

La función $f(x) = e^{-x^2}$ no tiene primitivas expresables mediante funciones elementales. Por tanto la integral

$$\int_0^1 e^{-x^2}\,dx$$

tiene que calcularse de forma aproximada. Vamos a aproximar su valor mediante polinomios de Taylor.

En primer lugar vamos a calcular el valor de la integral definida con el comando `int`, y, para ver más cifras decimales, elegimos `format long`:

```
>> format long
>> syms x
>> f=exp(-x^2)
>> int(f,0,1)
ans =
1/2*erf(1)*pi^(1/2)
>> double(ans)
ans =
0.746824132812427
```

Calculamos los polinomios de MacLaurin de f de grados 2, 4, 6, 10 y 14.

Recordar, la orden `taylor(f,x,a,'order',n)` calcula el polinomio de Taylor de f de orden $n-1$ en el punto a.

```
>> p2=taylor(f,x,0,'order',3),p4=taylor(f,x,0,'order',5),p6=taylor(f,x,0,'order',7),
p10=taylor(f,x,0,'order',11),p14=taylor(f,x,0,'order',15)
p2 =
1-x^2
p4 =
1-x^2+1/2*x^4
p6 =
1-x^2+1/2*x^4-1/6*x^6
p10 =
1-x^2+1/2*x^4-1/6*x^6+1/24*x^8-1/120*x^10
p14 =
1-x^2+1/2*x^4-1/6*x^6+1/24*x^8-1/120*x^10+1/720*x^12-1/5040*x^14
```

Vamos a calcular ahora las integrales definidas de estos polinomios en el intervalo $[0,1]$. Observa como mejora la aproximación al tomar polinomios de Taylor de mayor grado:

```
>> double(int(p2,0,1))
ans =
   0.666666666666667
>> double(int(p4,0,1))
ans =
   0.766666666666667
>> double(int(p6,0,1))
ans =
   0.742857142857143
>> double(int(p10,0,1))
ans =
   0.746729196729197
>> double(int(p14,0,1))
ans =
   0.746822806822807
```

2. Ejercicios

1. Calcula las siguientes primitivas:

   a) $\displaystyle\int \frac{dx}{1+e^x}$ *b)* $\displaystyle\int \sec x\, dx$ *c)* $\displaystyle\int e^{ax} \operatorname{sen} bx\, dx$

   d) $\displaystyle\int x^3 \ln x\, dx$ *e)* $\displaystyle\int \operatorname{arc\,sen} x\, dx$ *f)* $\displaystyle\int x \arctan \sqrt{x^2-1}\, dx$

   Sol.:

   a) $x - \ln(1+e^x) + c$ *b)* $\ln|secx + tanx| + c$

   c) $\displaystyle\frac{e^{ax}}{a^2+b^2}(a \operatorname{sen} bx - b\cos bx) + c$ *d)* $\displaystyle x^4\left(\frac{\ln x}{4} - \frac{1}{16}\right) + c$

   e) $x \operatorname{arc\,sen} x + \sqrt{1-x^2} + c$ *f)* $\displaystyle\frac{1}{2}\left(x^2 \arctan\sqrt{x^2-1} - \sqrt{x^2-1}\right) + c$

2. Calcula el valor de las siguientes integrales impropias.

   a) $\displaystyle\int_2^{+\infty} \frac{dx}{x^2-1}$ *b)* $\displaystyle\int_e^{+\infty} \frac{dx}{x\ln^2 x}$ *c)* $\displaystyle\int_{-\infty}^{0} xe^x\, dx$

   d) $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{x^2+1}$ *e)* $\displaystyle\int_3^{5} \frac{xdx}{\sqrt{x^2-9}}$ *f)* $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \operatorname{sen} x\, dx$

   Sol.: *a)* 0.5493 *b)* 1 *c)* -1 *d)* π *e)* 4 *f)* No existe.

3. Representa gráficamente y halla el área de la región limitada por la gráfica de la función

$$f(x) = \frac{x+1}{x^2+x+1}$$

y el eje de abscisas entre 0 y 1.

Sol.: 0.8516

4. Representa gráficamente la región comprendida entre la gráfica de la función $f(x) = \dfrac{x-1}{(x+1)^2}$ y las rectas $y = x$, $x = 0$ y $x = 5$. Calcula el área de la región obtenida.

Sol: 12.3749

5. Dada la curva $f(x) = \operatorname{sen} x + \cos x$

   a) Calcula el volumen del sólido de revolución generado al girar la región comprendida entre la curva y el eje OX en el intervalo $[0, \pi/2]$, alrededor del eje OX.

   b) Calcula el volumen del sólido de revolución generado al girar la región comprendida entre la curva y el eje OX en el intervalo $[0, \pi/2]$, alrededor del eje OY .

Sol.: *a*) $\pi\left(\frac{\pi}{2}+1\right)$ *b*) π^2

6. Se considera la función

$$f(x) = \frac{x^2}{x^2-1}\,.$$

   a) Representa gráficamente la función f.

   b) Aproxima la función f por una parábola en un entorno de 0.

   c) Halla el área de la región limitada por la gráfica de f y el eje OX entre $-1/2$ y $1/2$.

   d) Halla el área de la región limitada por la gráfica de f y la parábola entre $-1/2$ y $1/2$.

Sol.: *b*) $P(x) = -x^2$ *c*) área = 0.0986 *d*) área = 0.0153

7. Sea $f(x) = \dfrac{1}{x^2-4}$.

   a) Traza la gráfica de f. Elige un intervalo adecuado para dibujar la función.

   b) Calcula el área de la superficie limitada por la gráfica de f y el eje $0X$ en el intervalo $[3, +\infty)$.

   c) Calcula el volumen generado por la superficie descrita en el apartado anterior al girar alrededor del eje OX.

   d) Calcula el volumen generado por la superficie descrita en el apartado *b)* al girar alrededor del eje OY.

Sol.: *b*) 0.4024 *c*) 0.0776 *d*) Infinito.