Práctica 3. Funciones de una variable: derivadas

1. Cálculo de derivadas

Para calcular la *función derivada* de una función, MATLAB dispone de la orden `diff`:

`diff(f,x)`	Calcula la derivada de la expresión simbólica f con respecto a la variable x. Si no se especifica la variable, MATLAB elegiría una por defecto.
`diff(f,x,n)`	Calcula la derivada n-ésima de f con respecto a la variable x.

Por ejemplo: (1) Para $f(x) = x^2$, calcular $f'(x)$, o lo que es lo mismo, $\dfrac{df}{dx}$.

(2) Para $z = \cos(xy)$, calcular $\dfrac{dz}{dx}$ y $\dfrac{dz}{dy}$.

(3) Para $g(x) = x \operatorname{sen} x$, calcular $g'''(x)$.

(4) Para $h(x) = \ln x$, calcular $h''(x)$.

(5) Para $f(x) = \dfrac{1}{x}$, calcular $f'(x)$, $f''(x)$ y $f'''(x)$.

```
>> syms x y
>> diff(x^2,x)
>> diff(cos(x*y),x)
>> diff(cos(x*y),y)
>> diff(x*sin(x),x,3)
>> diff(log(x),x,2)
>> f=1/x
>> diff(f,x), diff(f,x,2), diff(f,x,3)
```

1.1. Ejemplo

Dibuja las gráficas de la función

$$f(x) = \frac{x}{1+x^2} ,$$

de su derivada y de su segunda derivada en el intervalo $[-3, 3]$ (en un mismo gráfico). Observa la relación entre los extremos y los puntos de inflexión de las gráficas de las tres funciones.

Solución.- En primer lugar calculamos la primera y la segunda derivada de f.

```
>> syms x
>> f=x/(1+x^2); pretty(f)
>> df=diff(f,x)
>> pretty(df)
>> simplify(df)
>> pretty(ans)
>> d2f=diff(f,x,2), pretty(d2f)
>> d2f=simplify(d2f), pretty(d2f)
```

Representamos gráficamente las función y sus derivadas en el intervalo $[-3,3]$. Cuando tengamos representadas las tres funciones cambiamos el color de los distintos trazos utilizando los botones de la ventana gráfica. Para poder distinguirlas bien podemos añadir una leyenda con la orden `legend`.

```
>> ezplot(f,[-3,3])
>> hold  on
>> ezplot(df,[-3,3])
>> ezplot(d2f,[-3,3])
>> grid on
>> legend('f','df','d2f')
```

1.2. Ejemplo

Estudia los intervalos de monotonía y de concavidad de la función

$$f(x) = \frac{x^2-4}{x^3}\,.$$

Calcular las asíntotas y los puntos de corte con los ejes.

Solución.- Calculamos la derivada primera de f y los puntos que anulan a dicha derivada primera:

```
>> syms x
>> f=(x^2-4)/x^3; pretty(f)
>> df=diff(f)
>> solve(df,x)
ans =
-2*3^(1/2)
 2*3^(1/2)
```

Por tanto los intervalos de monotonía de la función son $(-\infty,-2\sqrt{3})$, $(-2\sqrt{3},0)$, $(0,2\sqrt{3})$, $(2\sqrt{3},+\infty)$ (nótese que la función no está definida en 0). Estudiamos el signo de la primera derivada en los intervalos de monotonía. Para evaluar una expresión simbólica en un punto utilizamos la orden `subs`:

```
>> subs(df,x,-4)
>> subs(df,x,-1)
```

Se obtiene que $f'(-4) = -0.0156 < 0$ y que $f'(-1) = 11 > 0$, por tanto la función es decreciente en $(-\infty,-2\sqrt{3})$ y creciente en $(-2\sqrt{3},0)$, además, como f es impar, se tiene que es creciente en $(0,2\sqrt{3})$ y decreciente en $(2\sqrt{3},+\infty)$. En este caso la función es impar y estudiando su monotonía en el semieje negativo podemos deducir su comportamiento en el semieje positivo, si no existiese simetría tendríamos que realizar cálculos análogos para el semieje positivo.

Calculamos los puntos que anulan a la segunda derivada:

```
>> d2f=diff(f,2)
>> solve(d2f,x)
ans =
2*6^(1/2)
-2*6^(1/2)
```

Por tanto los intervalos de concavidad son $(-\infty,-2\sqrt{6})$, $(-2\sqrt{6},0)$, $(0,2\sqrt{6}),(2\sqrt{6},+\infty)$. Estudiamos el signo de la segunda derivada en estos intervalos:

```
>> subs(d2f,x,-5)
>> subs(d2f,x,-1)
```

Se obtiene que $f''(-5) = -6.4000 \cdot 10^{-4} < 0$ y que $f''(-1) = 46 > 0$, por tanto la función es cóncava hacia abajo en $(-\infty, -2\sqrt{6})$ y $(0, 2\sqrt{6})$ y cóncava hacia arriba en $(-2\sqrt{6}, 0)$ y $(2\sqrt{6}, +\infty)$ (utilizando de nuevo la simetría de la función).

Ahora representamos la función y comprobamos que los resultados obtenidos se corresponden con la representación gráfica.

```
>> ezplot(f,[-8,8])
>> grid on
```

Para calcular las asíntotas verticales:

```
>> limit(f,x,0,'right')
ans =
-Inf
>> limit(f,x,0,'left')
ans =
Inf
```

Luego la recta $x = 0$ es asíntota vertical.

Para calcular las asíntotas oblicuas, primero calculamos la pendiente m y, si $m \in \mathbb{R}$, calculamos n:

```
>> m=limit(f/x,x,inf)
m =
0
>> n=limit(f-m*x,x,inf)
n =
0
```

Luego la recta $y = 0$ es asíntota horizontal cuando x tiende a $+\infty$, y por la simetría, también lo es cuando x tiende a $-\infty$.

Para calcular los cortes de la gráfica de f con el eje x, resolvemos la ecuación $f(x) = 0$:

```
>> solve(f,x)
ans =
 -2
  2
```

Luego corta al eje x en los puntos $(2, 0)$ y $(-2, 0)$. Observar que no hay corte con el eje y, porque la función no está definida en el punto $x = 0$.

1.3. Ejemplo

Calcular el punto de la recta $2x + y = 1$ más cercano al punto $(2, 1)$.

Solución.- Tenemos que calcular un mínimo de la distancia euclídea en el plano

$$d((x_1, y_1), (x_2, y_2)) = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2}.$$

Podemos obviar la raíz cuadrada en la distancia puesto que si la distancia (como función de x e y) presenta un mínimo en un punto, su cuadrado (la función distancia al cuadrado) también presenta un mínimo en el mismo punto. Por tanto se trata de encontrar un mínimo de la función

$$F(x, y) = (x - 2)^2 + (y - 1)^2,$$

donde x e y tienen que verificar la ecuación

$$2x + y = 1.$$

Si sustituimos la expresión anterior en la función F obtenemos una función de una variable:

$$f(x) = (x - 2)^2 + (1 - 2x - 1)^2 = 5x^2 - 4x + 4.$$

Buscamos ahora los puntos críticos de f:

```
>> syms x
>> f=5*x^2-4*x+4
>> df=diff(f)
df =
10*x-4
>> solve(df)
ans =
2/5
```

Comprobamos que la función tiene un mínimo en 2/5:

```
>> d2f=diff(f,2)
d2f =
10
```

La segunda derivada de f es la función constante $f''(x) = 10$. Por tanto el valor de f'' en 2/5 es positivo y en 2/5 la función tiene un mínimo absoluto.

En algunos casos puede complicarse el cálculo de la segunda derivada, para comprobar si un punto es un extremo de una función podemos utilizar el Criterio de la primera derivada para deducir si es máximo o mínimo. Los cálculos —que en este caso son muy sencillos— pueden realizarse utilizando la orden `subs`.

```
>> subs(df,x,0)
ans =
-4
>> subs(df,x,3)
ans =
26
```

La función es decreciente en $(-\infty, 2/5)$ y creciente en $(2/5, +\infty)$, entonces tiene un mínimo absoluto en 2/5.

Ahora calculamos el correspondiente valor de y:

```
>> y=1-2*2/5
y =
0.2000
>> format rat  %pasamos a formato racional
>> y
y =
1/5
```

El punto que nos piden es $(2/5, 1/5)$.

Comprobaremos gráficamente el resultado. Para ello calculamos la recta perpendicular a $2x+y=1$ que pase por el punto $(2,1)$ y obtenemos

$$y = x/2.$$

Finalmente representamos en un mismo gráfico la recta $2x+y=1$, su perpendicular $y=x/2$, y los puntos $(2,1)$ y $(2/5,1/5)$.

```
>> ezplot(1-2*x,[-1,4])
>> hold on
>> ezplot(x/2,[-1,4])
>> axis equal
>> axis([-1,4,-1,2])
>> plot(2,1,'r*')     % dibuja el punto (2,1) rojo
>> plot(2/5,1/5,'m*') % dibuja (2/5,1/5) color magenta
```

2. El Polinomio de Taylor

Para hallar el Polinomio de Taylor de una función utilizaremos la orden:

`taylor(f,x,a,'order',n)`	Calcula el polinomio de Taylor de $f(x)$ de orden $n-1$ en el punto a.
`taylortool`	Es una calculadora interactiva de polinomios de Taylor

Por ejemplo, para las funciones $f(x) = e^x$ y $g(x) = \cos x$, vamos a calcular:

(1) el polinomio de Taylor de f de orden 4 en el punto 0, (o polinomio de MacLaurin de f de orden 4)

(2) el polinomio de Taylor de f de orden 6 en el punto 0, (o polinomio de MacLaurin de f de orden 6)

(3) el polinomio de Taylor de f de orden 3 en el punto 2,

(4) el polinomio de Taylor de g de orden 4 en el punto $\pi/4$,

```
>> syms x
>> f=exp(x), g=cos(x)
>> taylor(f,x,0,'order',5)
>> taylor(f,x,0,'order',7)
>> taylor(f,x,2,'order',4)
>> taylor(g,x,pi/4,'order',5)
```

Observar como, en este último caso, se obtiene el polinomio:

$$T(x) = \frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2}\left(x-\frac{\pi}{4}\right) - \frac{\sqrt{2}}{4}\left(x-\frac{\pi}{4}\right)^2 + \frac{\sqrt{2}}{12}\left(x-\frac{\pi}{4}\right)^3 + \frac{\sqrt{2}}{48}\left(x-\frac{\pi}{4}\right)^4.$$

2.1. Ejemplo

Representa la función $f(x) = \operatorname{sen} x$ y sus polinomios de MacLaurin de grados 1, 3 y 5 en el intervalo $[-\pi, \pi]$.

Solución.- Calculamos en primer lugar los polinomios:

```
>> syms x
>> f=sin(x);
>> tf1=taylor(f,x,0,'order',2), tf3=taylor(f,x,0,'order',4), tf5=taylor(f,x,0,'order',6)
tf1 =
x
tf3 =
x-1/6*x^3
tf5 =
x-1/6*x^3+1/120*x^5
```

Ahora hacemos la representación gráfica de f y sus polinomios de Taylor. Una vez representadas las funciones cambiamos el color de los distintos trazos. Para poder diferenciarlas añadiremos una leyenda.

```
>> ezplot(f,[-pi,pi])
>> hold on
>> ezplot(tf1,[-pi,pi])
>> ezplot(tf3,[-pi,pi])
>> ezplot(tf5,[-pi,pi])
>> grid on
>> legend('f','tf1','tf3','tf5')
```

3. Ejercicios

1. Halla los intervalos de monotonía y de concavidad de la función:

$$f(x) = x + \frac{1}{x-2}$$

Comprueba gráficamente los resultados obtenidos. Calcula las asíntotas y los cortes con los ejes.

Sol.: f es creciente en $(-\infty, 1)$ y $(3, +\infty)$, y decreciente en $(1, 2)$ y $(2, 3)$. f es cóncava hacia abajo en $(-\infty, 2)$ y cóncava hacia arriba en $(2, +\infty)$. Asíntotas: $x = 2$, $y = x$. Cortes: $(1, 0)$, $(0, -1/2)$

2. Se considera la función f definida por:

$$f(t) = \frac{e^{\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{t}\right)}}{t}, \quad t > 0,$$

que representa la evolución a lo largo del tiempo de la concentración de un compuesto en una cierta reacción química. Calcula en qué momento se produce la concentración máxima y cuál es este valor máximo. Estudia los intervalos de monotonía y concavidad de la función, así como su límite en 0. Representa gráficamente la función.

Sol: El máximo se produce en el instante $t = 1$ y la concentración máxima es $e^{-\frac{1}{2}}$. La función es creciente en $(0, 1)$ y decreciente en $(1, \infty)$. Es cóncava hacia arriba en $(0, 1 - \sqrt{2}/2)$, cóncava hacia abajo en $(1 - \sqrt{2}/2, 1 + \sqrt{2}/2)$ y de nuevo cóncava hacia arriba en$(1 + \sqrt{2}/2, \infty)$. El límite es cero.

3. Hallar las dimensiones del rectángulo de perímetro 12 que tiene la diagonal más pequeña.

Sol: Cuadrado de lado 3.

4. Aproxima la función $f(x) = \dfrac{1}{x^2+1}$ por una parábola en $x = 0$. Representa la función y la parábola en un mismo gráfico.

Sol: $y = 1 - x^2$.

5. Se considera la función f definida por:

$$f(x) = \begin{cases} x^2 \ln x & \text{si} \quad x \in (0, +\infty] \\ a & \text{si} \quad x = 0 \end{cases}$$

   a) Calcula a para que la función sea continua en $[0, +\infty)$.
   b) Halla los extremos de f en $[0, +\infty)$.
   c) Aproxima f por una parábola en un entorno del punto 1. Dibuja la función y la parábola.

   Sol: a) $a = 0$. b) En $e^{-\frac{1}{2}}$ se encuentra el mínimo absoluto de f con valor $-e^{-1}/2$ y 0 es máximo relativo de f (en $x = 0$). c) $y = \dfrac{3}{2}x^2 - 2x + \dfrac{1}{2}$.

6. Calcula los polinomios de McLaurin de grados 2, 4, 6 y 8 de la función $f(x) = x \operatorname{sen} x$ y represéntalos junto con la función en un mismo gráfico.

   Sol: $P_2(x) = x^2$
   $P_4(x) = x^2 - 1/6x^4$
   $P_6(x) = x^2 - 1/6x^4 + 1/120x^6$
   $P_8(x) = x^2 - 1/6x^4 + 1/120x^6 - 1/5040x^8$