Práctica 2. Funciones de una variable: representaciones gráficas, límites y continuidad

1. Vectores

Uno de los aspectos más notables de MATLAB lo constituye la forma en que permite manipular y operar con vectores y matrices.

1.1. Vectores fila

- En general, se introducen escribiendo entre corchetes cada una de sus coordenadas separadas por un espacio o una coma. Por ejemplo:

```
>> v=[4 -6 5]
>> v=[4,-6,5]
```

- También se pueden introducir especificando el valor de cada coordenada en el orden que se desee:

```
>> w(2)=-6, w(1)=4, w(3)=5
>> w
```

- Otras órdenes para casos particulares:

`v=[a:h:b]`	Define un vector fila cuya primera coordenada es `a` y las demás coordenadas aumentan de `h` en `h` sin superar `b`. Si no se especifica `h` toma, por defecto, el valor 1. También se puede escribir sin los corchetes.
`v=linspace(a,b,n)`	Define un vector fila de `n` coordenadas, cuyo primera coordenada es `a` y cuya última coordenada es `b`, con diferencia constante entre coordenadas consecutivas. Si no se especifica `n` toma, por defecto, 100.

```
>> u=linspace(-4,7,6)
>> u=linspace(1,3,5)
>> u=linspace(1,100)
>> v=[-4:2:7]
>> v=-4:2:7   % se puede escribir sin corchetes
>> v=1:10
```

La diferencia entre $v = [-4 : 2 : 7]$ y linspace(-4,7,6) es que la primera orden usa un paso de 2, produce seis elementos y termina en 6, la segunda orden termina en 7 y también crea seis elementos, pero el paso es $(7 + 4)/5 = 2.2$

1.2. Vectores columna

En general, se introducen como los vectores fila, pero separando los elementos por un *punto y coma* introducimos vectores columna:

```
>> u=[0;1;-5]
>> w=[1 2 3 4].'
```

Además, la orden `u.'` calcula la traspuesta de un vector `u` (así como de cualquier matriz).

1.3. Operaciones con vectores

Sean v y u vectores con n coordenadas y sea α un escalar:

α*v	multiplica α por v
v/α	multiplica $1/\alpha$ por v
u+v	suma u y v
u-v	resta u menos v

```
>> u=[1,5,6];
>> v=[2,6,-1];
>> u+v
>> 3*u
>> u/2
>> u-v
```

Además de las operaciones matemáticas con vectores el programa MATLAB permite realizar otras *operaciones* que se realizan coordenada a coordenada.

u.*v	multiplica u por v coordenada a coordenada
u./v	divide u por v coordenada a coordenada
u.^v	eleva u a v coordenada a coordenada
α+v	suma α a cada coordenada de v
v-α	resta α a cada coordenada de v
v.^α	eleva a α cada coordenada de v
α.^v	eleva α a cada coordenada de v
α./v	divide α por cada coordenada de v

Es importante recordar que el "." que aparece en algunas de las operaciones anteriores forma parte de la sintaxis del operador: indica que trabajamos con los vectores coordenada a coordenada.

```
>> u=[1,2,1];
>> v=[3,2,0];
>> u.*v
>> u.^v
>> v.^u
>> u.^2
>> 2.^u
>> u+3
>> u-5
>> 1./u
```

Muchas de las funciones definidas en MATLAB se pueden aplicar directamente a vectores (coordenada a coordenada) y el resultado es de nuevo un vector.

```
>> u=[1,0,2];
>> exp(u)
>> cos(u)
>> sqrt(u)
```

2. Representaciones gráficas

2.1. La orden plot

La orden `plot` es una de las órdenes básicas de MATLAB para dibujar la gráfica de una función.

- `plot(x,y)`: dibuja el conjunto de puntos (x_i, y_i), donde x e y son vectores fila con el mismo número de coordenadas. Para dibujar la gráfica de $y = f(x)$ hay que especificar un conjunto de puntos $(x_i, f(x_i))$.

  Por ejemplo, para dibujar la función $y = x^2$ en el intervalo $[-3, 3]$ podemos teclear:

  ```
  >> x=[-3:0.01:3];
  >> y=x.^2;
  >> plot(x,y)
  ```

  Las características de los gráficos (color, trazo, ejes, título, textos, etc.) pueden cambiarse utilizando los botones de la barra de herramientas de la ventana gráfica.

- `plot(x,y,S)`: lo mismo que `plot(x,y)` pero con las opciones especificadas en `S`. En `S` se describe entre comillas simples, el tipo de trazo, el color y el tipo de marca de los puntos usados. Los códigos de los trazos, colores y marcas posibles pueden consultarse utilizando `doc plot`.

  Para dibujar $y = x^3 - 1$ en el intervalo $[0, 5]$ con linea intermitente roja y asteriscos en los puntos:

  ```
  >> x=[0:0.1:5];
  >> y=x.^3-1;
  >> plot(x,y,'--r*')
  ```

- `plot(x1,y1,S1,x2,y2,S2,...)`: presenta sobre los mismos ejes, los gráficos definidos por las ternas `xi,yi,Si`. Esta orden permite representar varias funciones en un mismo gráfico.

  Por ejemplo, para dibujar la función coseno de color verde y la función seno de color rojo en $[-\pi, \pi]$:

```
>> x=[-pi:0.01:pi];
>> y1=cos(x);
>> y2=sin(x);
>> plot(x,y1,'g',x,y2,'r')
>> axis([-pi pi -1 1])
```

Hemos redefindo los ejes con x en $[-\pi, \pi]$ e y en $[-1, 1]$.

2.1.1. Ejemplo

Se tienen los siguientes datos relativos a la desintegración de una sustancia radiactiva:

Tiempo (horas)	Cantidad (mg)
0	102.9
1	75.8
2	56.1
3	42.2
4	31.1
5	23.6

Comprueba gráficamente que la curva exponencial $y = 102.04e^{-0.29x}$ ajusta de forma aproximada los datos anteriores.

Solución.- Representamos simultáneamente la curva y los puntos descritos en la tabla (utilizamos `*` de color rojo para los puntos de la tabla, y color azul claro para la curva exponencial):

```
>> x1=[0:5];
>> y1=[102.9, 75.8, 56.1, 42.2, 31.1, 23.6];
>> x2=[0:0.01:5];
>> y2=102.04*exp(-0.29*x2);
>> plot(x1,y1,'r*',x2,y2,'c')
```

2.2. La orden ezplot

La orden `ezplot(función,[xmin xmax])` dibuja la función definida simbólicamente en el intervalo dado por `[xmin,xmax]`.

Por ejemplo, para dibujar la función $y = x^2$ en el intervalo $[-3, 3]$

```
>> syms x
>> ezplot(x^2,[-3,3])
```

2.3. Otras órdenes de interés

Cada vez que se ejecutan las órdenes `plot` y `ezplot`, MATLAB crea una ventana gráfica y elimina la ventana anterior. A veces es interesante dibujar dos o más funciones sobre la misma ventana o tener varias ventanas gráficas:

`hold on`	Mantiene fija la gráfica para que las siguientes órdenes de representación gráfica se añadan sobre ella.
`hold off`	Restaura todas las propiedades de una gráfica a sus valores por defecto.
`figure(n)`	Selecciona la ventana gráfica Figure No. n como ventana activa; si no existiese, la crea.
`close all`	Cierra todas las ventanas gráficas.
`grid`	Para usar una rejilla en el dibujo, `grid on` para crearla, `grid off` para quitarla.

Además, con la orden `axis` y sus opciones se pueden modificar la apariencia y el escalado de los ejes de una gráfica. Por ejemplo (la lista no es exhaustiva)

`axis([x1 x2 y1 y2])`	Determina los intervalos visibles para los ejes OX y OY.
`axis equal`	Establece la misma escala en cada eje.

2.4. Ejemplo

Representa gráficamente en el intervalo $[-5, 5]$ la función

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{2x^2+3}{5} & \text{si} \quad x \leq 1, \\ 6-5x & \text{si} \quad 1 < x < 3, \\ x-3 & \text{si} \quad x \geq 3. \end{cases}$$

Solución.- Vamos a resolverlo con `plot` a la izquierda y con `ezplot` a la derecha. Con `plot` representamos simultáneamente los tres tramos de la función respectivamente en los intervalos $[-5, 1]$, $[1, 3]$ y $[3, 5]$:

```
>> x1=[-5:0.01:1];
>> x2=[1:0.01:3];
>> x3=[3:0.01:5];
>> y1=(2*x1.^2+3)/5;
>> y2=6-5*x2;
>> y3=x3-3;
>> plot(x1,y1,x2,y2,x3,y3)
```

```
>> syms x
>> f1=(2*x^2+3)/5;
>> f2=6-5*x;
>> f3=x-3;
>> figure(2)
>> ezplot(f1,[-5,1])
>> hold on
>> ezplot(f2,[1,3])
>> ezplot(f3,[3,5])
>> axis([-5,5,-10 12])
```

hemos redefinido los ejes para ver bien la gráfica tomando el dominio en x y aproximadamente el rango en y. Puedes usar también fplot desde el principio sin tener que redefinir los ejes. Cierra las figuras con `close all`.

2.5. Ejemplo

Representa gráficamente la función

$$f(x) = \frac{1}{1+2^{1/x}}, \quad x \in [-1, 1], \; x \neq 0.$$

- Podemos utilizar la orden `ezplot` usando como intervalo $[-1, 1]$:

```
>> syms x
>> f=1/(1+2^(1/x))
>> pretty(f)
>> ezplot(f,[-1 1])
```

¿Es correcta la representación gráfica? ¿Qué sucede en $x = 0$?

- Podemos representarla en $[-1, 0)$ y en $(0, 1]$, haciendo lo siguiente:

```
>> figure(2)
>> ezplot(f,[-1 0])
>> hold on
>> ezplot(f,[0 1])
```

¿Se obtiene el resultado esperado? Compara los intervalos de los ejes con los de la gráfica del apartado anterior. ¿Coinciden? Si no coinciden, modifícalos para obtener una gráfica similar añadiendo la orden

```
>> axis([-1,1,-0.2,1.2])
```

2.6. Ejemplo

Sean las funciones $f(x) = e^{-x}$ y $g(x) = x^2$. Calcula y representa en distintas ventanas y en el intervalo $[-3, 3]$ las funciones $f \circ g$ y $g \circ f$.

```
>> syms x
>> f=exp(-x)
>> g=x^2
>> h1=compose(g,f)
>> h2=compose(f,g)
>> ezplot(h1,[-3,3])
>> figure(2)
>> ezplot(h2,[-3,3])
```

3. Límites y continuidad de funciones

Como veremos a continuación, el módulo de cálculo simbólico Symbolic Math Toolbox proporciona a Matlab la capacidad de realizar algunas de las operaciones fundamentales del Análisis Matemático de funciones de una variable. Comenzaremos con el cálculo de límites y el análisis de la continuidad de una función.

`limit(f,x,a)`	Calcula el límite de f cuando x tiende hacia el punto a: $\lim\limits_{x\to a} f(x)$. Si no se especifica la variable tomará, por defecto, x. Si no se especifica a tomará, por defecto, 0.
`limit(f,x,a,'right')`	Calcula el límite por la derecha : $\lim\limits_{x\to a^+} f(x)$
`limit(f,x,a,'left')`	Calcula el límite por la izquierda : $\lim\limits_{x\to a^-} f(x)$
`limit(f,x,inf)`	Calcula el límite de f en *más infinito*: $\lim\limits_{x\to +\infty} f(x)$
`limit(f,x,-inf)`	Calcula el límite de f en *menos infinito*: $\lim\limits_{x\to -\infty} f(x)$

Por ejemplo, calcula: $\lim_{x\to 0}\dfrac{\operatorname{sen} x}{x}$, $\lim_{x\to 2}\dfrac{x-2}{x^2-4}$, $\lim_{x\to 0}\dfrac{1}{x}$, $\lim_{x\to 0^+}\dfrac{1}{x}$, $\lim_{x\to 0^-}\dfrac{1}{x}$, $\lim_{x\to +\infty}\dfrac{1}{x}$, $\lim_{x\to -\infty}\dfrac{1}{x}$

```
>> syms x
>> limit(sin(x)/x,x,0)
>> limit((x-2)/(x^2-4),x,2)
>> limit(1/x,x,0)
>> limit(1/x,x,0,'right')
>> limit(1/x,x,0,'left')
>> limit(1/x,x,+inf)
>> limit(1/x,x,-inf)
```

3.1. Ejemplo

Calcula los siguientes límites

$$\lim_{x\to 0}\frac{\operatorname{sen} 5x}{\ln(1+4x)} \qquad \lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+\operatorname{sen} 4x)}{e^{\operatorname{sen} 5x}-1} \qquad \lim_{x\to 0}(\cos x)^{\frac{1}{\operatorname{sen} x}}$$

```
>> syms x
>> f=sin(5*x)/log(1+4*x);pretty(f)
>> limit(f,x,0)
>> g=log(1+sin(4*x))/(exp(sin(5*x))-1);pretty(g)
>> limit(g,x,0)
>> h=cos(x)^(1/sin(x));pretty(h)
>> limit(h,x,0)
```

3.2. Ejemplo

Estudia la continuidad de la función

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{2x^2+3}{5} & \text{si} \quad x\le 1,\\ 6-5x & \text{si} \quad 1<x<3,\\ x-3 & \text{si} \quad x\ge 3.\end{cases}$$

Solución.- En los intervalos abiertos: $(-\infty,1)$, $(1,3)$ y $(3,+\infty)$ es continua por ser el resultado de realizar operaciones con funciones continuas. Ahora tenemos que estudiar qué ocurre en los puntos $x=1$ y $x=3$.

Estudio en el punto $x=1$:

```
>> syms x
>> f1=(2*x^2+3)/5;
>> limit(f1,x,1,'left')
ans =
1
>> f2=6-5*x;
>> limit(f2,x,1,'right')
ans =
1
>> subs(f1,x,1)
ans =
     1
```

Como $\lim_{x\to 1^-} f(x)=\lim_{x\to 1^+} f(x)=f(1)$, entonces f es continua en $x=1$.

Estudio en el punto $x = 3$:

```
>> limit(f2,x,3,'left')
ans =
-9
>> f3=x-3;
>> limit(f3,x,3,'right')
ans =
0
```

Como $\lim_{x\to 3^-} f(x) \neq \lim_{x\to 3^+} f(x)$, entonces $\lim_{x\to 3} f(x)$ no existe, luego f no es continua en $x = 3$.

Por tanto, la función f es continua en $\mathbb{R} - \{3\}$.

4. Ejercicios

1. Representa gráficamente las funciones:

   a) $f(x) = \dfrac{x^2+2}{x-3}$ *b)* $f(x) = \sqrt{x^2+2}$

   c) $f(x) = x^2 e^{-x}$ *d)* $f(x) = \dfrac{\ln x^2}{x}$

2. Estudia la continuidad de la siguiente función y represéntala gráficamente en el intervalo $[-5, 5]$.

$$f(x) = \begin{cases} -2x+1 & \text{si} \quad x \leq -1 \\ x^2 & \text{si} \quad -1 < x < 0 \\ \operatorname{sen} x & \text{si} \quad x \geq 0 \end{cases}$$

Sol: f es continua en $\mathbb{R} - \{-1\}$.

3. Calcula los siguientes límites:

   a) $\lim_{x\to 0} \dfrac{e^{-x}-1}{x}$ *b)* $\lim_{x\to 0} (\cos x)^{\frac{1}{x}}$ *c)* $\lim_{x\to +\infty} \left(\dfrac{2x+3}{2x+1}\right)^{x+1}$ *d)* $\lim_{x\to \pi/2} e^{\tan x}$

Sol.: *a)* -1, *b)* 1, *c)* e, *d)* No existe, es Infinito por la izquierda y cero por la derecha .