Proyecto Final

Fecha de entrega:

Debe entregar un informe que incluiya:

1. Una introducción del problema.
2. Respuestas a las preguntas teóricas.
3. Código y todos los detalles de implementación (número de simulaciones, número de iteraciones, valores de parámetros, etc.).
4. Resultados de las simulaciones.
5. Discusión de los resultados y conclusiones.

Puede usar todas las funciones disponibles en el lenguaje que use.

Este problema presenta algunas propiedades básicas de las variables aleatorias con distribución Exponencial y su aplicación a un modelo de tráfico en redes.

1. Sean $X_1, \ldots, X_n$ variables aleatorias independientes con distribución Exponencial(β_i) para X_i, respectivamente. Sea $Z = \min\{X_1, \ldots, X_n\}$.

   a) Muestre que para todo $s, t > 0$ se tiene que $\mathbb{P}(X_i > t + s | X_i > s) = \mathbb{P}(X_i > t)$.

   b) Muestre que Z tiene una dsitribución Exponencial(β), donde $\beta = \sum_i \beta_i$.

   c) Muestre que $\mathbb{P}(Z = X_i) = \frac{\beta_i}{\beta}$.

Suponga que hay m clientes que se mueven entre k nodos de una red (estaciones de servicio), y suponga que la red es cerrada, por lo tanto ni salen ni entran nuevos clientes. La forma en que los clientes se mueven dentro de la red está dada por una matriz $P = (P_{ij})$, un cliente que sale del nodo i tiene probabilidad P_{ij} de ir al nodo j; asuma que todas las filas de la matriz P suman 1 y además que los clientes pueden ir de todo nodo a cualquier otro. Finalmente, asuma que el tiempo de servicio en el nodo j tiene una distribución Exponencial(β_j) y es independiente del tiempo de servicio de los otro nodos y de los tiempos de servicio anteriores. Sea

$$S = \left\{ \mathbf{n} = (n_1, \ldots, n_k) : 0 \leq n_i \in \mathbb{N}, 1 \leq i \leq k, \sum_{i=1}^{k} n_k = m \right\},$$

entonces S es el conjunto de configuraciones distintas que puede haber en la red. Se define el proceso

$$\mathbf{Q}(t) = (Q_1(t), \ldots, Q_k(t)) \in S,$$

donde $Q_i(t)$ es la cantidad de clientes en el nodo i en el instante t (tanto en servicio como en cola).

2. Suponga que en algún momento el estado de la red es $\mathbf{n} = (n_1, \ldots, n_k) \in S$.

a) Diga qué distribución tiene el tiempo que dura la red en el estado $\mathbf{n}$. Considere el caso que algún nodo no tenga clientes.

b) Suponga que $n_i > 0$. Calcule la probabilidad de que el siguiente estado de la red sea $(n_1, \ldots, n_i - 1, \ldots, n_j + 1, \ldots, n_k)$, para $1 \leq j \leq k$.

3. Escriba un programa de computador que, dado un estado inicial de la red $\mathbf{Q}(0) = \mathbf{n} \in S$, simule el proceso $\mathbf{Q}(t)$ para $t > 0$, a partir de m, $\mathbf{n}$, la matriz P y los parámetros β_j. Note que este proceso es constante a trozos.

Dada $f : S \to \mathbb{R}_+$ se puede mostrar usando el Teorema Ergódico que

$$\lim_{T\to\infty} \frac{1}{T} \int_0^T f(\mathbf{Q}(t))dt$$

existe c.s. y es el mismo sin importar el estado inicial de la red. El teorema también da el valor del límite, pero en este caso vamos a usar simulaciones para aproximarnos a este valor.

4. Tome $k = 5$, $m = 20$ y demás parámetros de su elección. Simule 100 realizaciones de la red y grafique $\frac{1}{T}\int_0^T Q_i(t)dt$ para T entre 0 y 10000 para $i = 1, ..., 5$. Estime el valor del límite cuando $T \to \infty$.

5. Repita el punto anterior (sin hacer las gráficas) tomando $m = 50, 100, 200$ y haga una gráfica con los valores estimados de los límites (aumente el valor de T si es necesario para mejorar la precisión de la estimación).

6. Use el teorema de Perron-Frobenius (debe buscarlo y entenderlo) para mostrar que existe un vector $\pi \in \mathbb{R}_+^k$ tal que $\pi^T P = \pi^T$ y $\sum_{i=1}^{k} \pi_k = 1$. Calcule π para la matriz P que escogió y verifique que el nodo que más acumula clientes es el nodo cuya razón $\frac{\pi_j}{\beta_j}$ es mayor.

Mauricio Junca