Punto 2.

2)

1. Sea $(Z_n)_n$ una sucesión i.i.d. con $Z_n \sim \sum_{i \in \mathbb{N}} p_i \delta_i$. Mostrar que la sucesión de los máximos es una cadena de Markov. Construir la matriz de transición.

Para que lo anterior funcione, partimos de la suposición de que $\forall n \in \mathbb{N}$, $\sum_{i=1}^{\infty} p_i = 1$. (con $0 \notin \mathbb{N}$).

- Sea $M_n := \max(Z_1, \dots, Z_n)$

$\mathbb{P}(M_{n+1} \mid M_n = i_n, M_{n-1} = i_{n-1}, \dots, Z_1 = i_1)$ tq $i_1, \dots, i_n \in \mathbb{N}$. Claramente $i_1 \leq i_2 \leq \dots \leq i_n$.

es decir que $\max(Z_{n+1}, i_n, \dots, i_1) = \max(Z_{n+1}, i_n)$

por ende $\mathbb{P}(M_{n+1} \mid M_n = i_n, M_{n-1} = i_{n-1}, \dots, Z_1 = i_1) = \mathbb{P}(\max(Z_{n+1}, i_n, \dots, i_1)) = \mathbb{P}(Z_{n+1}, i_n)$

$= \mathbb{P}(M_{n+1} \mid M_n = i_n)$.

Además, note que $\mathbb{P}(M_{n+1} = i_{n+1} \mid M_n = i_n) = \begin{cases} 0 & \text{si } i_{n+1} < i_n \\ \sum_{j=1}^{i_n} p_j & \text{si } i_{n+1} = i_n \\ p_{i_{n+1}} & \text{si } i_{n+1} > i_n \end{cases}$ Vemos que esta distribución es independiente de M_n y M_{n+1}

y es exactamente igual si tuviesemos $\mathbb{P}(M_2 = i_{n+1} \mid M_1 = i_n) = \begin{cases} 0 & \text{si } i_{n+1} < i_n \\ \sum_{j=1}^{i_n} p_j & \text{si } i_{n+1} = i_n \\ p_{i_{n+1}} & \text{si } i_{n+1} > i_n \end{cases}$

Esto implica que $(M_n)_{n \in \mathbb{N}}$ es una Cadena de Markov, con matriz de transición dada por la anterior probabilidad

tq $\Pi(i,j) = \begin{cases} 0 & \text{si } j < i \\ \sum_{k=1}^{j} p_k & \text{si } j = i \\ p_j & \text{si } j > i. \end{cases}$ =

	1	2	3	4		
1	p_1	p_2	p_3	p_4	p_5	$\dots$
2	0	p_1+p_2	p_3	p_4	p_5	$\dots$
3	0	0	$p_1+p_2+p_3$	p_4	p_5	$\dots$
4	0	0	0	$p_1+p_2+p_3+p_4$	p_5	$\dots$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\ddots$

2. Sea $\mathbb{S} = \{1, \dots, 6\}$ una sucesión i.i.d. de tiros de un dado simétrico. Construir la matriz de transición de los máximos. Existe un único estado absorbente. ¿Cuál es el tiempo promedio de llegar a este estado absorbente? Mostrar la convergencia exponencial de las matrices de transición $\lim_{n\to\infty} \Pi^n = \Pi_\infty$.

$1 \leq i, j \leq 6$

$\Pi(i,j) = \begin{cases} 0 & \text{si } j < i \\ j/6 & \text{si } j = i \\ 1/6 & \text{si } j > i \end{cases}$ =

	1	2	3	4	5	6
1	1/6	1/6	1/6	1/6	1/6	1/6
2	0	1/3	1/6	1/6	1/6	1/6
3	0	0	1/2	1/6	1/6	1/6
4	0	0	0	2/3	1/6	1/6
5	0	0	0	0	5/6	1/6
6	0	0	0	0	0	1

el estado absorbente único de proceso es claramente 6.

6

Podemos construir el sistema lineal para calcular el tiempo promedio para llegar a 6. i.e. $\mathbb{E}[T_6] := \sum_{K=1} \frac{1}{6} \cdot \mathbb{E}[T_6 \mid X_1 = K]$

Tenemos que $h_6(K)$, con $K \in (0,\dots,6) = \mathbb{E}[T_6 \mid X_1 = K] = 1 + \sum_{\ell=1}^{5} \pi(K,\ell) h_6(\ell)$, con esto construimos el siguiente sistema lineal:

$$\underbrace{\left(\tfrac{1}{6}-1\right)}_{=-5/6} h_6(1) + \tfrac{1}{6} h_6(2) + \tfrac{1}{6} h_6(3) + \tfrac{1}{6} h_6(4) + \tfrac{1}{6} h_6(5) = -1$$

$$\underbrace{\left(\tfrac{1}{3}-1\right)}_{=-2/3} h_6(2) + \tfrac{1}{6} h_6(3) + \tfrac{1}{6} h_6(4) + \tfrac{1}{6} h_6(5) = -1$$

$$\underbrace{\left(\tfrac{1}{2}-1\right)}_{=-1/2} h_6(3) + \tfrac{1}{6} h_6(4) + \tfrac{1}{6} h_6(5) = -1$$

$$\underbrace{\left(\tfrac{2}{3}-1\right)}_{=-1/3} h_6(4) + \tfrac{1}{6} h_6(5) = -1$$

$$\underbrace{\left(\tfrac{5}{6}-1\right)}_{=-1/6} h_6(5) = -1$$

Las soluciones de este sistema son:

$h_6(1) = h_6(2) = h_6(3) = h_6(4) = h_6(5) = 6.$

$\boxed{\text{Por lo tanto, el tiempo promedio para llegar al estado de absorción es } \mathbb{E}[T_6] = 6.}$

· Para ver la convergencia, note que:

- La parte triangular inferior va a seguir siendo ceros para cualquier potencia n de π
- $\forall (i,j) \in \pi^n$ tq $(i,j) \neq (6,6)$ y $j \geq i$ (parte triangular superior incluyendo diag principal sin $(6,6)$)

Para todo $n \in \mathbb{N}$ $(i,j) = \sum_{i \in I} \prod_{j=1}^{n} p_j$ donde $p_j \in \{1/6, 1/3, 1/2, 2/3, 5/6\}$

Pero $\lim_{n\to\infty} \prod_{j=1}^{n} p_j = 0$ porque $0 < p_j < 1$. entonces, $(i,j) = 0$ $\forall (i,j) \in \lim_{n\to\infty} \pi^n(i,j)$ tq $(i,j) \neq (6,6)$

- Para todo $n \in \mathbb{N}$, $\pi^n(6,6) = [0,0,0,0,0,1] \begin{bmatrix} p_1 \\ p_2 \\ p_3 \\ p_4 \\ p_5 \\ 1 \end{bmatrix} = 1$

$$\boxed{\text{· Entonces } \lim_{n\to\infty} \pi^n(i,j) = \begin{bmatrix} 0&0&0&0&0&0 \\ 0&0&0&0&0&0 \\ 0&0&0&0&0&0 \\ 0&0&0&0&0&0 \\ 0&0&0&0&0&1 \end{bmatrix}}$$

3. ¿Este enunciado sigue vigente si $(Z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ está remplazado por una cadena de Markov con valores en $\mathbb{S} = \mathbb{N}$? Demuestrelo o construya un contraejemplo.

En el caso de $S = \mathbb{N}$ aplicaría las probabilidades de transición Hallados en el punto 2.1. Claramente, para cualquier estado del máximo hay una probabilidad mayor a 0 de que el siguiente estado sea diferente, i.e., mayor.

Por ende no hay estado de absorción si $S = \mathbb{N} \Rightarrow$ el enunciado anterior NO aplica.

Un contraejemplo sencillo es, $Z_n \sim \sum_{i=1}^{\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^i \delta_i$, sea $M_n = \max(Z_n, \dots, Z_1)$

si $M_n = k \to \mathbb{P}(M_{n+1} = k \mid M_n = k) = \mathbb{P}(M_{n+1} \neq k \mid M_n = k) = \sum_{i=k+1}^{\infty} (1/2)^i > 0$ y converge a $1 - \sum_{i=1}^{k} \left(\frac{1}{2}\right)^i$

$\Rightarrow$ No hay estados de absorción.