Tarea 3. Procesos Estocásticos

Sunday, March 14, 2021 4:48 PM

Diego Andrés Gómez Polo - 201713198.

1.

1) Sea $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una muestra i.i.d. con Gamma(3). Verificar con el criterio de von Mises adecuado en cuál DAM(H), H, distribuciíon está.

Sean $(X_n)_n$ i.i.d. tq $X_i \sim$ Gamma$(3,1)$, entonces:

$$f(x) = \frac{x^2 \cdot e^{-x}}{\Gamma(3)} = \frac{x^2 \cdot e^{-x}}{2} \qquad F(x) = \int_0^x \frac{z^2 \cdot e^{-z}}{2}\, dz \qquad \bar{F}(x) = 1 - \int_0^x \frac{z^2 \cdot e^{-z}}{2}\, dz$$

y $$f'(x) = \frac{1}{2}\left(2xe^{-x} - x^2 e^{-x}\right) = \frac{e^{-x}}{2}\left(2x - x^2\right)$$

Calculemos: $$\lim_{x\to\infty} \frac{\bar{F}(x) \cdot f'(x)}{f(x)^2}$$

$$= \lim_{x\to\infty} \frac{\left[1 - \int_0^x \frac{z^2 e^{-z}}{2} dz\right] \cdot \left[\frac{1}{2}\left(2xe^{-x} - x^2 e^{-x}\right)\right]}{\left[\frac{x^2 \cdot e^{-x}}{2}\right]^2} \quad \text{pero} \quad \int_0^x \frac{z^2 e^{-z}}{2} dz = 1 - e^{-x}\left(\frac{x^2}{2} + x + 1\right)$$

$$\text{entonces} = \lim_{x\to\infty} \frac{\left[1 - 1 + e^{-x}\left(\frac{x^2}{2} + x + 1\right)\right]\left[\frac{1}{2} \cdot e^{-x}\left(2x - x^2\right)\right]}{\left[\frac{x^2 e^{-x}}{2}\right]^2}$$

$$= \lim_{x\to\infty} \frac{\frac{1}{2} \cdot e^{-2x}\left(\frac{x^2}{2} + x + 1\right)\left(2x - x^2\right)}{\frac{x^4 e^{-2x}}{4}} = \lim_{x\to\infty} \frac{2\left(\frac{x^2}{2} + x + 1\right)\left(2x - x^2\right)}{x^4}$$

$$= 2 \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) = -1.$$

Por el criterio de von Mieses, la Gamma$(3,1)$ está en el DAM de una Gumbell. ∎

2.

2) Sea $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una muestra i.i.d. con CAU$(0,1)$. Verificar con el criterio de von Mises adecuado en cuál DAM(H), H, distribucíon está.

Calculemos $\lim_{x\to\infty} \frac{x\cdot f(x)}{\overline{F}(x)}$ para $f(x) = \frac{1}{\pi(1+x)^2}$ y $F(x) = \frac{1}{2} + \frac{1}{\pi}\arctan(x)$

tq $\overline{F} = 1 - F = \frac{1}{2} - \frac{1}{\pi}\arctan(x)$

tq $\lim_{x\to\infty} \frac{x\cdot f(x)}{\overline{F}(x)} = \frac{\frac{x}{\pi(1+x)^2}}{\frac{1}{2} - \frac{1}{\pi}\arctan(x)} = \frac{\frac{x}{\cancel{\pi}(1+x)^2}}{\frac{\pi - 2\arctan(x)}{2\cancel{\pi}}} = \frac{2x}{(\pi - 2\cdot\arctan(x))\cdot(1+x^2)}$

Aplicamos L'hopital:

$$\lim_{x\to\infty} \frac{2x}{(\pi - 2\cdot\arctan(x))\cdot(1+x^2)} = \frac{2}{\frac{-2\cdot\cancel{(1+x^2)}}{\cancel{1+x^2}} + (2x)\cdot(\pi - 2\arctan(x))} = \lim_{x\to\infty} \frac{\cancel{2}}{-\cancel{2} + \cancel{2}x(\pi - 2\arctan(x))}$$

$$= \lim_{x\to\infty} \frac{1}{x(\pi - 2\arctan(x)) - 1} = \frac{1}{-1 + \lim_{x\to\infty} x(\pi - 2\arctan(x))} \quad (*)$$

pero $\lim_{x\to\infty} x(\pi - 2\arctan(x)) = \lim_{x\to\infty} \frac{\pi - 2\cdot\arctan(x)}{\frac{1}{x}} \overset{\text{L'hopital}}{=} \lim_{x\to\infty} \frac{\frac{-2}{x^2+1}}{\frac{-1}{x^2}} = 2$

Entonces, $(*) = \frac{1}{2-1} = 1$. Por Von Mises, Cauchy$(0,1) \in$ DAM(Φ_1).

3.

3) Sea $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una muestra i.i.d. con Weib(α) (no reflejada!). Verificar con el criterio de von Mises adecuado en cuál DAM(H), H, distribucíon está.

Calculamos $\lim_{x\to\infty} \frac{\overline{F}(x)\cdot f'(x)}{f^2}$ para $\alpha = 3$ tenemos:

$f(x) = 3x^2\cdot e^{-x^3}$, $f'(x) = 6x e^{-x^3} - 9x^4 e^{-x^3}$

$F(x) = 1 - e^{-x^3}$, $\overline{F}(x) = e^{-x^3}$

entonces: $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{\bar{F}(x)\cdot f'(x)}{f(x)^2} = \lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{\cancel{e^{-x^3}}\left(6x\cancel{e^{-x^3}} - 9x^4\cancel{e^{-x^3}}\right)}{\left(3x^2\cancel{e^{-x^3}}\right)^2} = \lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{2x-3x^4}{3x^4}$

$= \lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{2-3x^3}{3x^3} = -1$. Por lo que, Weib(3,1) es función de von-Mises

tq $a(x) = \dfrac{\bar{F}}{f} = (3x^2)^{-1}$ $\rightarrow$ Weibull(3,1) $\in$ DAN(Λ).

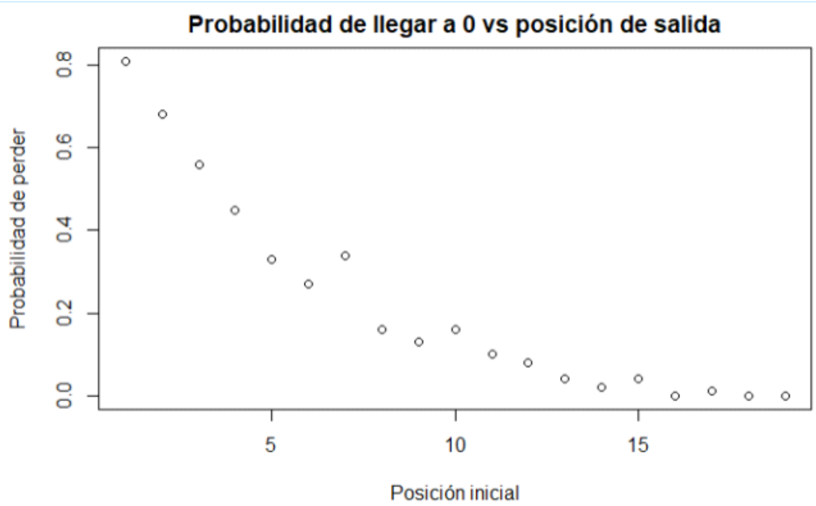
4.

4) Ejercicio computacional en R.
Sea $S = 20$ y $p = 0.55$. Simular para cada $k \in \{1, \ldots, S-1\}$ 100 realizaciónes (hasta el camino toque 0 o S) del juego de al azar que hicimos en clase

1. Calcular con estas simulaciónes la proporcíion de los caminos que termina en 0. Es decir, aproximar

$$\mathbb{P}(R_A \mid S_0 = k)$$

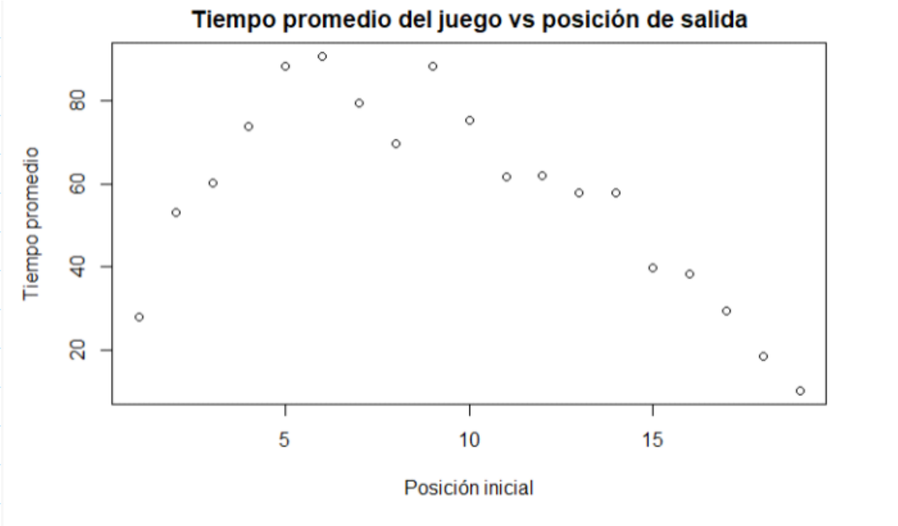
y hacer un diagrama que muestra las probabilidades aproximadas para toda $k = 1, \ldots, 19$.



2. Para cada $k = 1, \ldots, 19$ calcular el promedio de los tiempos que se demoraba el juego. Es decir, aproximar

$$\mathbb{E}[T_{0,S} \mid S_0 = k)$$

y hacer un diagrama que muestra los promedios aproximados para toda $k = 1, \ldots, 19$.


Tiempo promedio del juego vs posición de salida
Tiempo promedio
20
40
60
80
5
10
15
Posición inicial