Universidad de los Andes

Departamento de Matemáticas

Procesos estocásticos en tiempo discreto, Semestre 202110 **4+5**

Nombre, Apellidos, Código

Entrega: Martes, 05.04.2021 antes de la clase

en formato .pdf al correo ma.hoegele(arroba)uniandes.edu.co.
Entregas más tarde ya no se reciben.

1)

1. Sea $(X_n)_n$ un proceso de ramificación con distribución de reproducción $\mu \sim \text{Geo}(p)$. Construir la matriz (generalizada) de transición.

2. Sea $(X_n)_n$ un proceso de ramificación con distribución de reproducción $\mu \sim p \cdot \delta_0 + (1-p) \cdot \delta_2$. Construir la matriz (generalizada) de transición.

2)

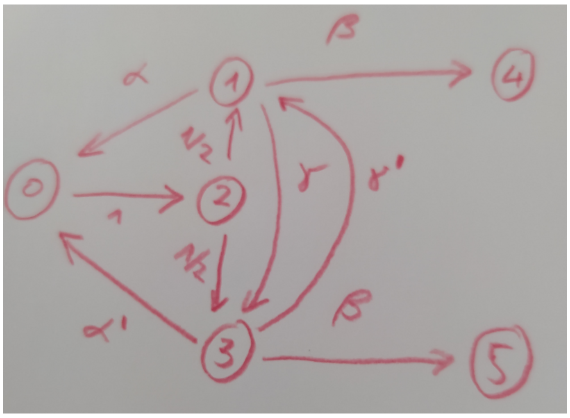
1. Sea $(Z_n)_n$ una sucesión i.i.d. con $Z_n \sim \sum_{i \in \mathbb{N}} p_i \delta_i$. Mostrar que la sucesión de los máximos es una cadena de Markov. Construir la matriz de transición.

2. Sea $\mathbb{S} = \{1, \ldots, 6\}$ una sucesión i.i.d. de tiros de un dado simétrico. Construir la matriz de transición de los máximos. Existe un único estado absorbente. ¿Cuál es el tiempo promedio de llegar a este estado absorbente? Mostrar la convergencia exponencial de las matrices de transición $\lim_{n\to\infty} \Pi^n = \Pi_\infty$.

3. ¿Este enunciado sigue vigente si $(Z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ está remplazado por una cadena de Markov con valores en $\mathbb{S} = \mathbb{N}$? Demuestrelo o construya un contraejemplo.

3) Sea $(X_n)_n$ una cadena de Markov con valores en $\mathbb{S}$ discreto y $\mathbb{S}'$ un conjunto discreto. Sea $f : \mathbb{S} \to \mathbb{S}'$ inyectivo, entonces $Y_n := f(X_n)$ es una cadena de Markov con valores en $\mathbb{S}'$. Construir un contraejemplo para f no inyectivo.

4) Sea $\mathbb{S} = \{0, 1, 2, 3, 4, 5\}$ y Π es la matriz de transición dado por



de una cadena de Markov $(Z_n)_{n\in\mathbb{N}}$

1. Obviamente el conjunto que incluye a todos los estados absorbentes es $A = \{4, 5\}$. Construir los sistemas lineales para encontrar

$$g_4(k) = \mathbb{P}(Z_{T_A} = 4 \mid Z_0 = k)$$

y

$$g_5(k) = \mathbb{P}(Z_{T_A} = 5 \mid Z_0 = k)$$

en dependencia de $\alpha, \alpha', \beta, \gamma, \gamma'$.

2. Resolver el sistema de manera explícita e comparar e interpretar los dos resultados. En particular, analizar el efecto de la asimetría $|\alpha - \alpha'$ sobre $g_4(0)$ y $g_5(0)$, si se congelan todos los otro parámetros.

3. ¿Cuál es el efecto de arrancar en 1, 2 o 3 en vez de 0?

4. Construir los sistemas lineales para encontrar

$$h_4(k) = \mathbb{E}[T_{\{4\}} \mid Z_0 = k],$$

$$h_5(k) = \mathbb{E}[T_{\{5\}} \mid Z_0 = k]$$

y

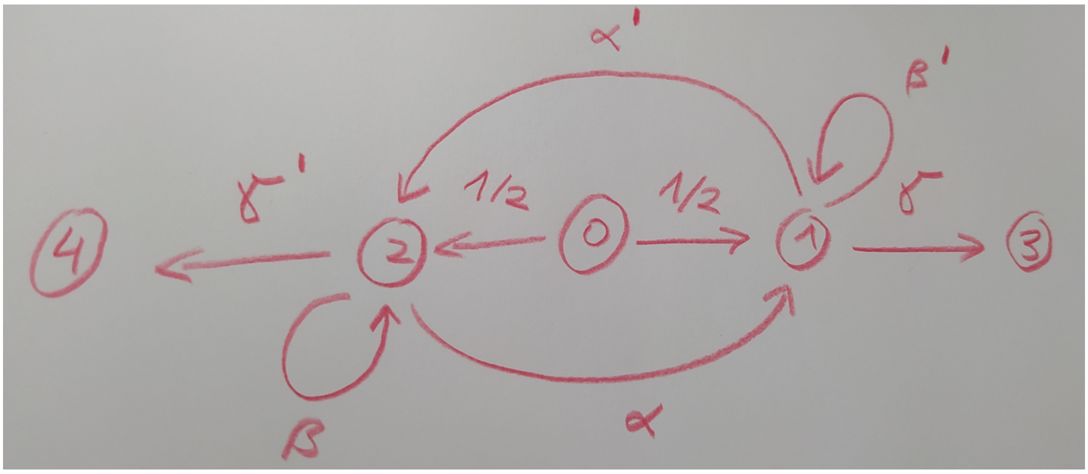
$$h_{4,5}(k) = \mathbb{E}[T_{\{4,5\}} \mid Z_0 = k]$$

en dependencia de $\alpha, \alpha', \beta, \gamma, \gamma'$.

5. Resolver el sistema de manera explícita e comparar e interpretar los dos resultados. En particular, analizar el efecto de la asimetría $|\alpha - \alpha'$ sobre $h_4(0)$, $h_5(0)$ y $h_{4,5}(0)$, si se congelan todos los otro parámetros.

6. ¿Cuál es el efecto de arrancar en 1, 2 o 3 en vez de 0?

5) Sea $\mathbb{S} = \{0, 1, 2, 3, 4\}$ y Π es la matriz de transición dado por



de una cadena de Markov $(Z_n)_{n\in\mathbb{N}}$

1. Obviamente el conjunto que incluye a todos los estados absorbentes es $A = \{4, 5\}$. Construir los sistemas lineales para encontrar
$$g_2(k) = \mathbb{P}(Z_{T_A} = 3 \mid Z_0 = k)$$
y
$$g_3(k) = \mathbb{P}(Z_{T_A} = 2 \mid Z_0 = k)$$
en dependencia de $\alpha, \alpha', \beta, \beta', \gamma, \gamma'$.

2. Resolver el sistema de manera explícita e comparar e interpretar los dos resultados. En particular, analizar el efecto de la asimetría $|\alpha-\alpha'|$ sobre $g_3(0)$ y $g_4(0)$, si se congelan todos los otros parámetros. Adicionalmente, analizar el efecto de la asimetría $|\gamma - \gamma'|$ sobre $g_3(0)$ y $g_4(0)$, si se congelan todos los otros parámetros.

3. ¿Cuál es el efecto de arrancar en 1 y 2 en vez de 0?

4. ¿Cuál relación tienen que satisfacer los parametros para que
$$g_2(0) = g_3(0) \qquad ?$$

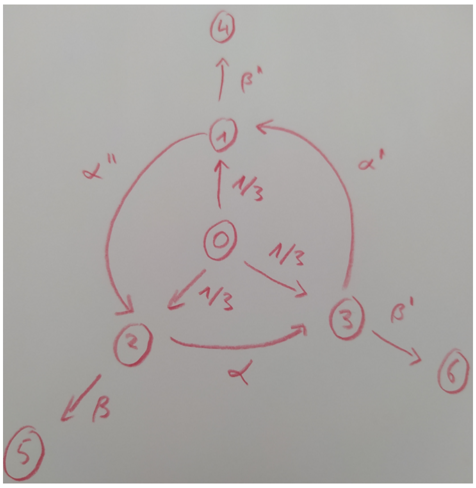
5. Construir los sistemas lineales para encontrar
$$h_3(k) = \mathbb{E}[T_{\{3\}} \mid Z_0 = k],$$
$$h_4(k) = \mathbb{E}[T_{\{4\}} \mid Z_0 = k]$$
y
$$h_{3,4}(k) = \mathbb{E}[T_{\{3,4\}} \mid Z_0 = k]$$
en dependencia de $\alpha, \alpha', \beta, \beta', \gamma, \gamma'$.

6. Resolver el sistema de manera explícita e comparar e interpretar los dos resultados. En particular, analizar el efecto de la asimetría $|\alpha - \alpha'|$ sobre $h_3(0)$, $h_4(0)$ y $h_{4,5}(0)$, si se congelan todos los otros parámetros. Adicionalmente, analizar el efecto de la asimetría $|\gamma - \gamma'|$ sobre $g_3(0)$ y $g_4(0)$, si se congelan todos los otros parámetros.

7. ¿Cuál relación tienen que satisfacer los parametros para que
$$h_2(0) = h_3(0) \qquad ?$$

8. ¿Cuál es el efecto de arrancar en los estados "internos" 1 y 2 en vez de 0?

6) Ahora generalizamos este mecanísmo a 3 estados internos: Sea $\mathbb{S} = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ y Π es la matriz de transición dado por



de una cadena de Markov $(Z_n)_{n\in\mathbb{N}}$

1. Obviamente el conjunto que incluye a todos los estados absorbentes es $A = \{4, 5\}$. Construir los sistemas lineales para encontrar
$$g_4(k) = \mathbb{P}(Z_{T_A} = 4 \mid Z_0 = k),$$
$$g_5(k) = \mathbb{P}(Z_{T_A} = 5 \mid Z_0 = k)$$
y
$$g_6(k) = \mathbb{P}(Z_{T_A} = 6 \mid Z_0 = k)$$
en dependencia de $\alpha, \alpha', \alpha'', \beta, \beta', \beta''$.

2. Resolver el sistema de manera explícita e comparar e interpretar los dos resultados. En particular, analizar el efecto de las asimetrías $|\alpha - \alpha'|$, $\alpha' - \alpha''|$ y $|\alpha - \alpha''|$ sobre $g_4(0)$, $g_5(0)$ y $g_6(0)$.

3. ¿Cuál es el efecto de arrancar en 1, 2 y 3 en vez de 0?

4. Construir los sistemas lineales para encontrar
$$h_4(k) = \mathbb{E}[T_{\{4\}} \mid Z_0 = k],$$
$$h_5(k) = \mathbb{E}[T_{\{5\}} \mid Z_0 = k],$$
$$h_6(k) = \mathbb{E}[T_{\{6\}} \mid Z_0 = k],$$
y
$$h_{4,5,6}(k) = \mathbb{E}[T_{\{4,5,6\}} \mid Z_0 = k]$$
en dependencia de $\alpha, \alpha', \alpha'', \beta, \beta', \beta''$.

5. Resolver el sistema de manera explícita e comparar e interpretar los dos resultados. En particular, analizar el efecto de las asimetrías $|\alpha - \alpha'|$, $\alpha' - \alpha''|$ y $|\alpha - \alpha''|$ sobre $h_4(0)$, $h_5(0)$ y $h_6(0)$ y $h_{4,5,6}$.

6. ¿Cuál relación tienen que satisfacer los parametros para que
$$h_4(0) = h_5(0) = h_6(0) \qquad ?$$

7. ¿Cuál relación hay entre $h_{4,5,6}(0)$ y $h_i(0)$ para $i = 4, 5, 6$?

8. ¿Cuál es el efecto de arrancar en los estados internos 1, 2 o 3 en vez de 0?

7) Ejercicio computacional en R.

1. Simular 20 caminos de longitud adecuada de 1).1 para $p = 1/4$ en una única gráfica.
2. Simular 20 caminos de longitud adecuada de 1).2 para $p = 1/4$ en una única gráfica. Repetir este ejercicio para $p = 1/2$ y $p = \frac{3}{4}$.
3. Simular 20 caminos de longitud adecuada de 2).2 hasta la absorbción en una única gráfica.
4. Simular 20 caminos de longitud adecuada de la cadena de Markov 4) hasta la absorbción en una única gráfica para $\beta = \frac{1}{2}$ y $\alpha = \frac{1}{3}$ y $\alpha' = \frac{1}{2}$.
5. Simular 20 caminos de longitud adecuada de la cadena de Markov 5) hasta la absorbción en una única gráfica para $\gamma = \gamma' = \frac{1}{2}$ y $\alpha = \frac{1}{3}$ y $\alpha' = \frac{1}{2}$.
6. Simular 20 caminos de longitud adecuada de la cadena de Markov 6) hasta la absorbción en una única gráfica para $\alpha = 0.4, \alpha' = 0.5$ y $\alpha'' = 0.6$.

La entrega incluye el programa completo y las visualizaciones en formato .pdf con todos los archivos.