Tarea 4

Monday, April 5, 2021 1:34 PM

Punto 1

1. Sea $(X_n)_n$ un proceso de ramificación con distribución de reproducción $\mu \sim \text{Geo}(p)$. Construir la matriz (generalizada) de transición.

Recordemos que si tenemos la matriz de transición π, entonces $\pi(i,j) = \mathbb{P}(X_{n+1} = j \mid X_n = i)$ $\forall n \in \mathbb{N}$.

Sea $X_n = i$, definimos la matriz de transición generalizada de $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la siguiente forma:

$\forall j \in \mathbb{N}$, $\pi(i,j) = \sum_{k=1}^{i} P(\theta_k = j)$ tq $\theta_k \sim \text{Geo}(p)$ pero $\sum_{i=1}^{n} \text{Geo}(p) \sim$ Binomial Negativa (n,p)

Por lo que nos queda, $\pi(i,j) = \mathbb{P}(\hat{\theta}_i = j)$ donde $\hat{\theta} \sim$ BinomialNegativa (i,p)

$\Rightarrow \pi(i,j) = \mathbb{P}(\hat{\theta}_i = j) = \binom{j+i-1}{j} (1-p)^i p^j$

2. Sea $(X_n)_n$ un proceso de ramificación con distribución de reproducción $\mu \sim p \cdot \delta_0 + (1-p) \cdot \delta_2$. Construir la matriz (generalizada) de transición.

Primero note que al μ solo tomar los valores de 0 y 2, y como cada X_n es una suma de variables i.i.d $\sim \mu$

entonces, en este proceso $S = 2\mathbb{N}$ (Pares) (sin contar el caso base trivial $X_0 = 1$)

Sea $X_n = i$, tq $i \in 2\mathbb{N}$. y $j \in 2\mathbb{N}$, considere $\{X_{n+1} = j \mid X_n = i\}$

Por definición $X_{n+1} \sim \sum_{k=1}^{i} \theta_k$, tq $(\theta_k) \sim \mu$ iid. Esto implica que X_{n+1} es a lo sumo $X_{n+1} = \sum_{k=1}^{i} 2 = 2 \cdot i$

Por lo que $\mathbb{P}(X_{n+1} = j \mid X_n = i) = 0$ si $j > 2i$. Por otro lado si $0 \le j \le 2i$, la suma anterior se vuelve una

suma iid de Bernoulli donde 0 es exito con probabilidad p y 2 fracaso con $(1-p)$

Pero suma iid de Bernoulli$(p) \sim$ Binomial(n,p). Por lo que para $j \le 2i$ $\sum_{k=1}^{i} \theta_k \sim$ Binomial (i,p)

Entonces, la matriz de transición generalizada nos queda como:

$$\pi(i,j) = \begin{cases} 0 & \text{si } j > 2i \\ \binom{i}{i-j/2} p^{i-j/2} (1-p)^{j/2} & \end{cases}$$ donde $j/2$ es el # de fracasos (Veces que sale 2)

Punto 2.

2)

1. Sea $(Z_n)_n$ una sucesión i.i.d. con $Z_n \sim \sum_{i\in\mathbb{N}} p_i\delta_i$. Mostrar que la sucesión de los máximos es una

2)

1. Sea $(Z_n)_n$ una sucesión i.i.d. con $Z_n \sim \sum_{i\in\mathbb{N}} p_i\delta_i$. Mostrar que la sucesión de los máximos es una cadena de Markov. Construir la matriz de transición.

Para que lo anterior funcione, partimos de la suposición de que $\forall n \in \mathbb{N}$, $\sum_{i=1}^{\infty} p_i = 1$. (con $0 \notin \mathbb{N}$).

- Sea $M_n := \max(Z_1, \dots, Z_n)$

$\mathbb{P}(M_{n+1} \mid M_n = i_n, M_{n-1} = i_{n-1}, \dots, Z_1 = i_1)$ t.q. $i_1, \dots, i_n \in \mathbb{N}$. Claramente $i_1 \le i_2 \le \dots \le i_n$.

es decir que $\max(Z_{n+1}, i_n, \dots, i_1) = \max(Z_{n+1}, i_n)$

por ende $\mathbb{P}(M_{n+1} \mid M_n = i_n, M_{n-1} = i_{n-1}, \dots, Z_1 = i_1) = \mathbb{P}(\max(Z_{n+1}, i_n, \dots, i_1)) = \mathbb{P}(\max(Z_{n+1}, i_n))$

$= \mathbb{P}(M_{n+1} \mid M_n = i_n)$.

Además, note que $\mathbb{P}(M_{n+1} = i_{n+1} \mid M_n = i_n) = \begin{cases} 0 & \text{si } i_{n+1} < i_n \\ \sum_{j=1}^{i_n} p_j & \text{si } i_{n+1} = i_n \\ p_{i_{n+1}} & \text{si } i_{n+1} > i_n \end{cases}$ Vemos que esta distribución es independiente de M_n y M_{n+1}

y es exactamente igual si tuviesemos $\mathbb{P}(M_2 = i_{n+1} \mid M_1 = i_n) = \begin{cases} 0 & \text{si } i_{n+1} < i_n \\ \sum_{j=1}^{i_n} p_j & \text{si } i_{n+1} = i_n \\ p_{i_{n+1}} & \text{si } i_{n+1} > i_n \end{cases}$

Esto implica que $(M_n)_{n\in\mathbb{N}}$ es una Cadena de Markov, con matriz de transición dada por la anterior probabilidad

t.q. $\pi(i,j) = \begin{cases} 0 & \text{si } j < i \\ \sum_{k=1}^{j} p_k & \text{si } j = i \\ p_j & \text{si } j > i. \end{cases}$ =

	1	2	3	4		
1	p_1	p_2	p_3	p_4	p_5	...
2	0	p_1+p_2	p_3	p_4	p_5	...
3	0	0	$p_1+p_2+p_3$	p_4	p_5	...
4	0	0	0	$p_1+p_2+p_3+p_4$	p_5	...
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋱

2. Sea $\mathbb{S} = \{1, \dots, 6\}$ una sucesión i.i.d. de tiros de un dado simétrico. Construir la matriz de transición de los máximos. Existe un único estado absorbente. ¿Cuál es el tiempo promedio de llegar a este estado absorbente? Mostrar la convergencia exponencial de las matrices de transición $\lim_{n\to\infty} \Pi^n = \Pi_\infty$.

$1 \le i, j \le 6$

$\pi(i,j) = \begin{cases} 0 & \text{si } j < i \\ j/6 & \text{si } j = i \\ 1/6 & \text{si } j > i \end{cases}$ =

	1	2	3	4	5	6
1	1/6	1/6	1/6	1/6	1/6	1/6
2	0	1/3	1/6	1/6	1/6	1/6
3	0	0	1/2	1/6	1/6	1/6
4	0	0	0	2/3	1/6	1/6
5	0	0	0	0	5/6	1/6
6	0	0	0	0	0	1

el estado absorbente único de proceso es claramente 6.

Podemos construir el sistema lineal para calcular el tiempo promedio para llegar a 6. i.e. $\mathbb{E}[T_6] = \sum_{k=1}^{6} \frac{1}{6} \cdot \mathbb{E}[T_6 \mid X_1 = k]$

Tenemos que $h_6(k)$, con $k \in (0, \dots, 6)$ $= \mathbb{E}[T_6 \mid X_1 = k] = 1 + \sum_{\ell=1}^{5} \pi(k,\ell) h_6(\ell)$, con esto construimos el siguiente sistema lineal:

$\underbrace{(\tfrac{1}{6} - 1)}_{= -5/6} h_6(1) + \tfrac{1}{6} h_6(2) + \tfrac{1}{6} h_6(3) + \tfrac{1}{6} h_6(4) + \tfrac{1}{6} h_6(5) = -1$ | Las soluciones de este sistema son:

$$\underbrace{\left(\frac{1}{6}-1\right)}_{=-5/6} h_6(1) + \frac{1}{6}h_6(2) + \frac{1}{6}h_6(3) + \frac{1}{6}h_6(4) + \frac{1}{6}h_6(5) = -1$$

$$\underbrace{\left(\frac{1}{3}-1\right)}_{=-2/3} h_6(2) + \frac{1}{6}h_6(3) + \frac{1}{6}h_6(4) + \frac{1}{6}h_6(5) = -1$$

$$\underbrace{\left(\frac{1}{2}-1\right)}_{=-1/2} h_6(3) + \frac{1}{6}h_6(4) + \frac{1}{6}h_6(5) = -1$$

$$\underbrace{\left(\frac{2}{3}-1\right)}_{=-1/3} h_6(4) + \frac{1}{6}h_6(5) = -1$$

$$\underbrace{\left(\frac{5}{6}-1\right)}_{=-1/6} h_6(5) = -1$$

Las soluciones de este sistema son:

$h_6(1) = h_6(2) = h_6(3) = h_6(4) = h_6(5) = 6.$

Por lo tanto, el tiempo promedio para llegar al estado de absorción es $\mathbb{E}[T_6] = 6.$

- Para ver la convergencia, note que:
  - La parte triangular inferior va a seguir siendo ceros para cualquier potencia n de Π
  - $\forall (i,j) \in \Pi^n$ tq $(i,j) \neq (6,6)$ y $j \geq i$ (parte triangular superior incluyendo diag principal sin $(6,6)$)

  Para todo $n \in \mathbb{N}$ $(i,j) = \sum_{i \in I} \prod_{j=1}^{n} p_j$ donde $p_j \in \{1/6, 1/3, 1/2, 2/3, 5/6\}$

  Pero $\lim_{n\to\infty} \prod_{j=1}^{n} p_j = 0$ porque $0 < p_j < 1$. entonces, $(i,j) = 0$ $\forall (i,j) \in \lim_{n\to\infty} \Pi^n(i,j)$ tq $(i,j) \neq (6,6)$

  - Para todo $n \in N$, $\Pi^n(6,6) = [0,0,0,0,0,1] \begin{bmatrix} p_1 \\ p_2 \\ p_3 \\ p_4 \\ p_5 \\ 1 \end{bmatrix} = 1$

- Entonces $\lim_{n\to\infty} \Pi^n(i,j) = \begin{bmatrix} 0&0&0&0&0&0 \\ 0&0&0&0&0&0 \\ 0&0&0&0&0&0 \\ 0&0&0&0&0&0 \\ 0&0&0&0&0&1 \end{bmatrix}$

3. ¿Este enunciado sigue vigente si $(Z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ está remplazado por una cadena de Markov con valores en $\mathbb{S} = \mathbb{N}$? Demuestrelo o construya un contraejemplo.

En el caso de $S = \mathbb{N}$ aplicaría las probabilidades de transición Hallados en el punto 2.1. Claramente, para cualquier estado del máximo hay una probabilidad mayor a 0 de que el siguiente estado sea diferente, i.e., mayor.

Por ende no hay estado de absorción si $S = \mathbb{N} \Rightarrow$ el enunciado anterior NO aplica.

Un contraejemplo sencillo es, $Z_n \sim \sum_{i=1}^{\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^i \delta_i$, sea $M_n = \max(Z_n, \dots, Z_1)$

Un contraejemplo sencillo es, $Z_n \sim \sum_{i=1}^{\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^i \delta_i$, sea $M_n = \max(Z_n, \dots, Z_1)$

si $M_n = k \rightarrow \mathbb{P}(M_{n+1} = k \mid M_n = k) = \mathbb{P}(M_{n+1} \neq k \mid M_n = k) = \sum_{i=k+1}^{\infty} (1/2)^i > 0$ y converge a $1 - \sum_{i=1}^{k} \left(\frac{1}{2}\right)^i$

$\Rightarrow$ No hay estados de absorción.

Punto 3

3) Sea $(X_n)_n$ una cadena de Markov con valores en $\mathbb{S}$ discreto y $\mathbb{S}'$ un conjunto discreto. Sea $f : \mathbb{S} \to \mathbb{S}'$ inyectivo, entonces $Y_n := f(X_n)$ es una cadena de Markov con valores en $\mathbb{S}'$. Construir un contraejemplo para f no inyectivo.

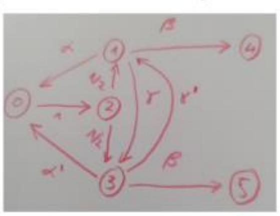
$Y := f(X_n)$ al ser f inyectivo se puede ver simplemente como un cambio de 'etiqueta' de los estados, pero que conserva el mecanismo aleatoreo subyacente que le da la Markovianidad al proceso. De Hecho Y_n puede verse como un elemento del grupo de permutaciones de X_n.

$\rightarrow \mathbb{P}(Y_{n+1} = f(i_{n+1}) \mid Y_n = f(i_n), \dots, Y_1 = f(i_1)) = \mathbb{P}(X_{n+1} = i_{n+1} \mid X_n = i_n, \dots, X_1 = i_1) = \mathbb{P}(X_{n+1} = i_{n+1} \mid X_n = i_n)$

$= \mathbb{P}(Y_{n+1} = f(i_{n+1}) \mid Y_n = f(i_n))$

Punto 4

4) Sea $\mathbb{S} = \{0, 1, 2, 3, 4, 5\}$ y Π es la matriz de transición dado por



de una cadena de Markov $(Z_n)_{n \in \mathbb{N}}$

1. Obviamente el conjunto que incluye a todos los estados absorbentes es $A = \{4, 5\}$. Construir los sistemas lineales para encontrar

$$g_4(k) = \mathbb{P}(Z_{T_A} = 4 \mid Z_0 = k)$$

y

$$g_5(k) = \mathbb{P}(Z_{T_A} = 5 \mid Z_0 = k)$$

en dependencia de $\alpha, \alpha', \beta, \gamma, \gamma'$.

Recuerde que:

$$g_\ell(k) = \sum \Pi(k, m) \cdot g_\ell(m).$$

en dependencia de $\alpha, \alpha', \beta, \gamma, \gamma'$.

Recuerde que: $$g_\ell(k) = \sum_{m\in S} \Pi(k,m)\cdot g_\ell(m).$$

Entonces:

$g_4(k)$:

$$g_4(0) = g_4(2)$$
$$g_4(1) = \alpha g_4(0) + \gamma g_4(3) + \beta$$
$$g_4(2) = \tfrac{1}{2} g_4(1) + \tfrac{1}{2} g_4(3)$$
$$g_4(3) = \alpha' g_4(0) + \gamma' g_4(1)$$
$$g_4(4) = 1, \quad g_4(5) = 0$$

Tiene solución dada por:

$$g_4(0) = \frac{(-\gamma' - 1)\cdot \beta}{\alpha' + \gamma'\alpha + \alpha + \alpha'\gamma + 2\gamma'\gamma - 2}$$
$$g_4(1) = \frac{(\alpha' - 2)\,\beta}{\alpha' + \gamma'\alpha + \alpha + \alpha'\gamma + 2\gamma'\gamma - 2}$$
$$g_4(2) = \frac{(-\gamma' - 1)\beta}{\alpha' + \gamma'\alpha + \alpha + \alpha'\gamma + 2\gamma'\gamma - 2}$$
$$g_4(3) = \frac{(-\alpha' - 2\gamma')\cdot \beta}{\alpha' + \gamma'\alpha + \alpha + \alpha'\gamma + 2\gamma'\gamma - 2}$$

$g_5(k)$:

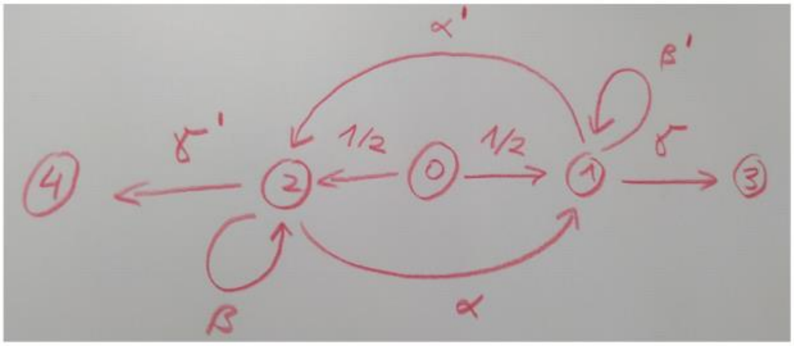
$$g_5(0) = g_5(2)$$
$$g_5(1) = \alpha g_5(0) + \gamma g_5(3)$$
$$g_5(2) = \tfrac{1}{2} g_5(1) + \tfrac{1}{2} g_5(3)$$
$$g_5(3) = \alpha' g_5(0) + \gamma' g_5(1) + \beta$$
$$g_5(4) = 0, \quad g_5(5) = 0$$

Que tiene solución:

$$g_5(0) = \frac{(-\gamma - 1)\,\beta}{\alpha' + \gamma\alpha + \alpha + \alpha'\gamma + 2\gamma'\gamma - 2}$$
$$g_5(1) = \frac{(-\alpha - 2\gamma)\,\beta}{\alpha' + \gamma\alpha + \alpha + \alpha'\gamma + 2\gamma'\gamma - 2}$$
$$g_5(2) = \frac{(-\gamma - 1)\,\beta}{\alpha' + \gamma\alpha + \alpha + \alpha'\gamma + 2\gamma'\gamma - 2}$$
$$g_5(3) = \frac{(\alpha - 2)\beta}{\alpha' + \gamma\alpha + \alpha + \alpha'\gamma + 2\gamma'\gamma - 2}$$

Punto 5.

5) Sea $\mathbb{S} = \{0, 1, 2, 3, 4\}$ y Π es la matriz de transición dado por



de una cadena de Markov $(Z_n)_{n\in\mathbb{N}}$

1. Obviamente el conjunto que incluye a todos los estados absorbentes es $A = \{4, 5\}$. Construir los sistemas lineales para encontrar
$$g_2(k) = \mathbb{P}(Z_{T_A} = 3 \mid Z_0 = k)$$
y
$$g_3(k) = \mathbb{P}(Z_{T_A} = 2 \mid Z_0 = k)$$
en dependencia de $\alpha, \alpha', \beta, \beta', \gamma, \gamma'$.

Armamos los sistemas lineales para hallar g_3 y g_4 no g_2 y g_3, ya que $\{2,3\} \not\subseteq A$, $A = \{3,4\}$

Para esto recuerde que si tenemos $\ell \in A$, $k \in S$, $\rightarrow$ $g_\ell(k) = \sum_{m\in S} \Pi(k,m)\, g_\ell(m)$

· g_3

$$g_3(0) = \tfrac{1}{2} g_3(1) + \tfrac{1}{2} g_3(2) \iff \tfrac{1}{2} g_3(1) + \tfrac{1}{2} g_3(2) - g_3(0) = 0$$

$$g_3(1) = \alpha' g_3(2) + \beta' g_3(1) + \gamma \iff (1-\beta') g_3(1) - \alpha' g_3(2) = \gamma$$

$$g_3(2) = \alpha g_3(1) + \beta g_3(2) \iff \alpha g_3(1) + (\beta - 1) g_3(2) = 0$$

$$g_3(3) = 1 \iff g_3(3) = 1$$

$$g_3(4) = 0 \iff g_3(4) = 0$$

Solucionando este sistema nos queda:

$$g_3(0) = \frac{1}{2} \cdot \frac{\gamma(1-\beta+\alpha)}{\beta' + \alpha\alpha' - \beta'\beta + \beta - 1}$$

$$g_3(1) = \frac{\gamma(1-\beta)}{\beta' + \alpha\cdot\alpha' - \beta'\beta + \beta - 1}$$

$$g_3(2) = \frac{\gamma\alpha}{\beta' + \alpha'\alpha - \beta\beta' + \beta - 1}$$

g_4.

- $-g_4(0) + \frac{1}{2} g_4(1) + \frac{1}{2} g_4(2) = 0.$
- $(\beta' - 1) g_4(1) + \alpha' g_4(2) = 0$
- $\alpha g_4(1) + (\beta - 1) g_4(2) = -\gamma$
- $g_4(3) = 0$
- $g_4(4) = 1$

Solucionando el sistema, nos queda.

$$g_4(0) = \frac{1}{2} \cdot \frac{\gamma(\alpha' + 1 - \beta')}{\beta' + \alpha'\alpha - \beta'\beta + \beta - 1}$$

$$g_4(1) = \frac{\alpha' \gamma}{\beta' + \alpha'\alpha - \beta'\beta + \beta - 1}$$

$$g_4(2) = \frac{\gamma(1 - \beta')}{\beta' + \alpha'\alpha - \beta'\beta + \beta - 1}$$

3. ¿Cuál es el efecto de arrancar en 1 y 2 en vez de 0?

4. ¿Cuál relación tienen que satisfacer los parametros para que

$$g_2(0) = g_3(0) \qquad ?$$

Para que $g_3(0) = g_4(0)$,

$$\gamma(1 - \beta + \alpha) = \gamma'(1 - \beta' + \alpha')$$

$$\frac{\gamma}{\gamma'} = \frac{1 - \beta' + \alpha'}{1 - \beta + \alpha}$$

5. Construir los sistemas lineales para encontrar

$$h_3(k) = \mathbb{E}[T_{\{3\}} \mid Z_0 = k],$$

$$h_4(k) = \mathbb{E}[T_{\{4\}} \mid Z_0 = k]$$

y

$$h_{3,4}(k) = \mathbb{E}[T_{\{3,4\}} \mid Z_0 = k]$$

en dependencia de $\alpha, \alpha', \beta, \beta', \gamma, \gamma'$.

- $h_3(k)$:

$h_3(0) = 1 + 1/2\, h_3(1) + 1/2\, h_3(2)$

$h_3(1) = 1 + \beta' h_3(1) + \alpha' h_3(2)$

$h_3(2) = 1 + \beta\, h_3(2) + \alpha h_3(1)$

- $h_4(k)$:

$h_4(0) = 1 + 1/2\, h_4(1) + \frac{1}{2} h_4(2)$

$h_4(1) = 1 + \beta' h_4(1) + \alpha' h_4(2)$

$h_4(2) = 1 + B h_4(2) + \alpha h_4(1)$

Note que los sistemas tienen coeficientes idénticos, esto es claro si vemos de donde salen:

$$h_A(k) = 1 + \sum_{\ell=0}^{r} \Pi(k,\ell) h_A(\ell)$$

donde A es un elemento del conjunto de estados de absorción.

los coeficientes $\pi(k,\ell)$ no dependen de A. ⇒ serán ,

6. Resolver el sistema de manera explícita e comparar e interpretar los dos resultados. En particular, analizar el efecto de la asimetría $|\alpha - \alpha'|$ sobre $h_3(0)$, $h_4(0)$ y $h_{4,5}(0)$, si se congelan todos los otros parámetros. Adicionalmente, analizar el efecto de la asimetría $|\gamma - \gamma'|$ sobre $g_3(0)$ y $g_4(0)$, si se congelan todos los otros parámetros.

Al ser los coeficientes de los sistemas iguales las soluciones también serán iguales:

entonces, la solucion es:

$$h_3(0) = h_4(0) = \frac{1}{2} \cdot \frac{-\alpha' + 3B' + 2\alpha'\alpha - \alpha - 2B'B + 3B' - 4}{B' + \alpha'\alpha - B'B + B - 1}$$

$$h_3(1) = h_4(1) = \frac{-\alpha' + B - 1}{B' + \alpha'\alpha - B'B + B - 1}$$

$$h_3(2) = h_4(2) = \frac{B' - \alpha - 1}{B' + \alpha'\alpha - B'B + B - 1}$$

7. ¿Cuál relación tienen que satisfacer los parametros para que

$$h_2(0) = h_3(0) \quad ?$$

Ya que 2 no es estado de absorción, supondré que se refiere a $h_3(0) = h_4(0)$

En este caso, como se mencionó previamente, siempre son iguales.

8. ¿Cuál es el efecto de arrancar en los estados "internos" 1 y 2 en vez de 0?