Diego Andrés Gómez Polo – 201713198. **Tarea 1 Procesos Estocásticos**

1)

$X_n \to Y$ $\mathbb{P}$ – c.s.

Convergencia Casi Segura

↳ Si Eexiste evento A con $\mathbb{P}(A)=1$. tq $\forall \omega \in A$

$X_n(\omega) \to Y(\omega)$

$\Leftrightarrow$ $\forall \varepsilon > 0$ $\mathbb{P}\left(\limsup_{n\to\infty}\{|X_n - X| > \varepsilon\}\right) = 0$

$X_n \xrightarrow{L^p} Y$

Convergencia en L^p

(X_n) converge a Y en L^p si

Para $p \in [1,\infty)$ $\lim_{n\to\infty} \mathbb{E}\left[|X_n - Y|^p\right] = 0$

↳ Es la convergencia casi segura pero uniformemente

Por convergencia monótona

Desigualdad Markov

Convergencia en Probabilidad

$X_n \xrightarrow{\mathbb{P}} Y$

ej;

$(X_n)_n^{iid}$ con $X_n \sim B_{1/n}$

↳ $X_n \xrightarrow{P} 0$ pero con probabilida 1 X_n No converge c.s a 0.

(X_i) converge a Y en prob si:

$\forall \varepsilon > 0$ tenemos: $\lim_{n\to\infty} \mathbb{P}(|X_n - Y| > \varepsilon) = 0$ $(*)$

↳ Convergen también casi seguro solo si $(*)$ converge lo suficientemente rápido a 0.

↳ Siempre hay una subsucesión $n_k : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ tq $X_{n_k} \to Y$ $\mathbb{P}$ – c.s.

Solo si $Y = c$.

$X_n \xrightarrow{d} Y$

Convergencia en Distribución

Converge si $\mathbb{E}[f(X_n)] \to \mathbb{E}[f(X)]$. Es la más débil ya que solo se enfoca en el espacio de las medidas (Distribuciones) y no en las variables subyacentes.

Ley de Los G. N: $(X_i)_{i\in\mathbb{N}}$ no correlacionadas con $\mathbb{E}[X_i] = \mathbb{E}[X_1]$ y $\mathbb{V}(X_i) = \mathbb{V}(X_1)$

Débil $\bar{X}_n \xrightarrow{\mathbb{P}} \mathbb{E}[X_1]$ $n \to \infty$ NO podemos afirmar convergencia c.s.

Fuerte: Si además, $a < X_i - \mathbb{E}[X_i] < b$ cs por Hoeffding

$\bar{X}_n \to \mathbb{E}[X_1]$ $\mathbb{P}$ – c.s.

2.

2.) $f_X(x_1, x_2) = C\left(-(x_1^2 + x_2^2) + 1\right) \mathbb{1}_{[x_1^2 + x_2^2 \leq 1]}$ $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$

1. $\int_{\mathbb{R}} f_X(x_1, x_2) = 1 \Rightarrow$ $x_1^2 + x_2^2 = r^2$ $dx_1 \cdot dx_2 = r\,dr\,d\theta$

$$= C \int_0^{2\pi} \int_0^1 (1 - r^2) \cdot r\,dr\,d\theta$$

$$= C\,2\pi \left[\frac{r^2}{2} - \frac{r^4}{4}\Big|_0^1\right] = C \cdot 2\pi\left[\frac{1}{2} - \frac{1}{4}\right] = C \cdot 2\pi \cdot \frac{1}{4} = \frac{C \cdot 2\pi}{4} = 1$$

$$\Rightarrow C = \frac{2}{\pi}$$

$$C = \frac{2}{\pi}$$

2. $f_{X_1}(x_1) = \int_{\mathbb{R}} f_X(x_1, x_2)\,dx_2$ $\therefore$ $f_X(x_1, x_2) = \frac{2}{\pi}\left(1 - (x_1^2 + x_2^2)\right) \cdot \mathbb{1}_{[x_1^2 + x_2^2 \leq 1]}$

$\Rightarrow$ $x_2^2 \leq 1 - x_1^2 \Rightarrow -\sqrt{1 - x_1^2} \leq x_2 \leq \sqrt{1 - x_1^2}$

$$f_{X_1}(x_1) = \frac{2}{\pi}\int_{-\sqrt{1-x_1^2}}^{\sqrt{1-x_1^2}} 1 - (x_1^2 + x_2^2)\,dx_2 = 2 \cdot \frac{2}{\pi}\int_0^{\sqrt{1-x_1^2}} 1 - x_1^2 - x_2^2\,dx_2$$

$$= \frac{4}{\pi}\left[x_2 - x_1^2 \cdot x_2 - \frac{x_2^2}{2}\Big|_0^{\sqrt{1-x_1^2}}\right] = \frac{4}{\pi} \cdot \left[\sqrt{1-x_1^2} - x_1^2\sqrt{1-x_1^2} - \frac{(1-x_1^2)}{2}\right]$$

$f_{X_1}(x_1) = \frac{4}{\pi} \cdot \sqrt{1 - x_1^2}\left(1 - x_1^2 - \frac{\sqrt{1-x_1^2}}{2}\right)$ por simetría $f_{X_2}(x_2) = \frac{4}{\pi}\sqrt{1-x_2^2}\left(1 - x_2^2 - \frac{\sqrt{1-x_2^2}}{2}\right)$

3. $$f(x_1 | x_2) = \frac{f_X(x_1, x_2)}{f_{X_2}(x_2)} = \frac{\frac{2}{\pi} \cdot \left(1 - (x_1^2 + x_2^2)\right)}{\frac{4}{\pi}\sqrt{1-x_2^2}\left(1 - x_2^2 - \frac{\sqrt{1-x_2^2}}{2}\right)}$$

2.4.

$$\mathbb{E}[X_1|X_2=x_2] = \int_{\mathbb{R}} f(x_1|X_2=x_2)\, x_1\, dx_1 = \int_{-1}^{1} \frac{(1-x_1^2-x_2^2)\cdot x_1}{2\cdot\sqrt{1-x_2^2}\,\left(1-x_2^2-\frac{\sqrt{1-x_2^2}}{2}\right)}\, dx_1$$

$$= \frac{1}{2\cdot\sqrt{1-x_2^2}\,\left(1-x_2^2-\frac{\sqrt{1-x_2^2}}{2}\right)} \left[\frac{x_1^2}{2} - \frac{x_1^4}{4} - \frac{x_2^2\cdot x_1^2}{2} \Big|_{-1}^{1} \right] =$$

$$\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{\sqrt{1-x_2^2}\,\left(1-x_2^2-\frac{\sqrt{1-x_2^2}}{2}\right)} \left[\frac{1}{2} - \frac{1}{4} - \frac{x_2^2}{2} - \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{x_2^2}{2} \right] = 0.$$

2.5

$$V(X_1|X_2=x_2) = \mathbb{E}[X_1^2|X_2=x_2] - \underbrace{\mathbb{E}[X_1|X_2=x_2]^2}_{=0}$$

$$= \int_{\mathbb{R}} f(x_1|X_2=x_2)\, x_1^2\, dx_1 = \int_{-1}^{1} \frac{(1-x_1^2-x_2^2)\, x_1^2}{2\sqrt{1-x_2^2}\,\left(1-x_2^2-\frac{\sqrt{1-x_2^2}}{2}\right)}\, dx_1$$

$$= \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{\sqrt{1-x_2^2}\,\left(1-x_2^2-\frac{\sqrt{1-x_2^2}}{2}\right)} \left[\frac{x_1^3}{3} - \frac{x_1^6}{5} - \frac{x_2^2\cdot x_1^3}{3} \Big|_{-1}^{1} \right]$$

$$= \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{\sqrt{1-x_2^2}\,\left(1-x_2^2-\frac{\sqrt{1-x_2^2}}{2}\right)} \left[\frac{1}{3} - \frac{1}{5} - \frac{x_2^2}{3} + \frac{1}{3} - \frac{1}{5} - \frac{x_2^2}{3} \right]$$

$$= \frac{1}{2}\cdot\frac{\frac{2}{3} - \frac{2}{5} - \frac{2x_2^2}{3}}{\sqrt{1-x_2^2}\,\left(1-x_2^2-\frac{\sqrt{1-x_2^2}}{3}\right)}$$

3.

3)

$$f(x) = \frac{a - x^2}{C_a} \cdot \mathbb{1}_{[-\sqrt{a}, \sqrt{a}]}(x)$$

$$\Rightarrow 1 = \frac{1}{C_a}\int_{-\sqrt{a}}^{\sqrt{a}} a - x^2 \, dx = \frac{1}{C_a}\cdot\left[a \cdot x - \frac{x^3}{3}\Big|_{-\sqrt{a}}^{\sqrt{a}}\right] = \left(a\sqrt{a} - \frac{a\sqrt{a}}{3} + a\sqrt{a} - \frac{a\sqrt{a}}{3}\right)\cdot\frac{1}{C_a}$$

$$1 = a\sqrt{a}\left(2 - \frac{2}{3}\right)\cdot\frac{1}{C_a} = \frac{4}{3}\cdot\frac{a\sqrt{a}}{C_a} \Rightarrow C_a = \frac{4}{3}a\sqrt{a}$$

2)

$$\boxed{f(x) = \frac{a - x^2}{\frac{4}{3}a\sqrt{a}}\cdot \mathbb{1}_{[-\sqrt{a}, \sqrt{a}]}} \Rightarrow \mathbb{E}[X] = \int_{-\sqrt{a}}^{\sqrt{a}} \frac{ax - x^3}{\frac{4}{3}a\sqrt{a}}\, dx$$

$$= \frac{3}{4a\sqrt{a}}\left[\frac{ax^2}{2} - \frac{x^4}{4}\Big|_{-\sqrt{a}}^{\sqrt{a}}\right] = \frac{3}{4}\cdot\frac{1}{a\sqrt{a}}\left[\frac{a^2}{2} - \frac{a^2}{4} - \left(\frac{a^2}{2} - \frac{a^2}{4}\right)\right] = 0$$

- $$\mathbb{E}[X^2] = \frac{1}{\frac{4}{3}a\sqrt{a}}\int_{-\sqrt{a}}^{\sqrt{a}} ax^2 - x^4\, dx = \frac{1}{\frac{4}{3}a\sqrt{a}}\left[\frac{ax^3}{3} - \frac{x^5}{5}\Big|_{-\sqrt{a}}^{\sqrt{a}}\right] =$$

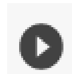
$$\frac{3}{4}\cdot\frac{1}{a\sqrt{a}}\cdot\left[\frac{a^2\sqrt{a}}{3} - \frac{a^2\sqrt{a}}{5} - \left(-\frac{a^2\sqrt{a}}{3} + \frac{a^2\sqrt{5}}{5}\right)\right] = \frac{3}{4}\cdot\frac{1}{a\sqrt{a}}\left[\frac{2}{3}a^2\sqrt{a} - \frac{2}{5}a^2\sqrt{a}\right]$$

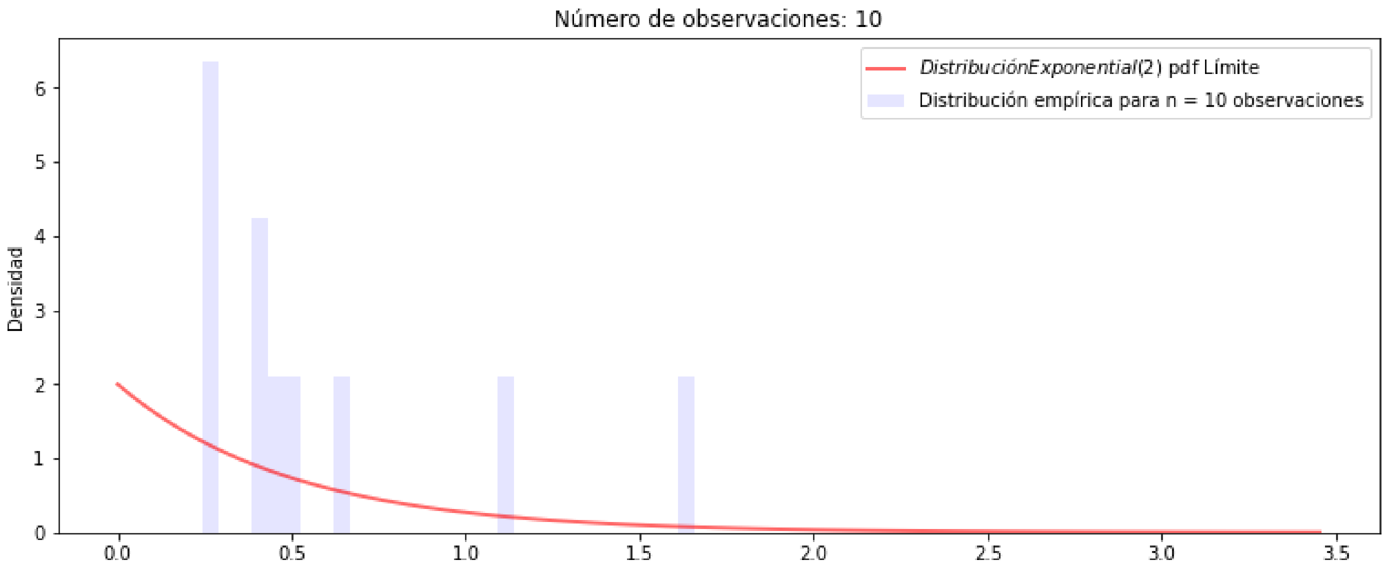
$$= \frac{3}{4}\,\frac{1}{a\sqrt{a}}\cdot\frac{4}{15}a^2\sqrt{a} = \frac{1}{5}\cdot a \rightarrow \text{El estimador } \hat{a} = 5\cdot \underbrace{\bar{S}^2}_{\text{Segundo momento muestral}} = 5\cdot S^2.$$

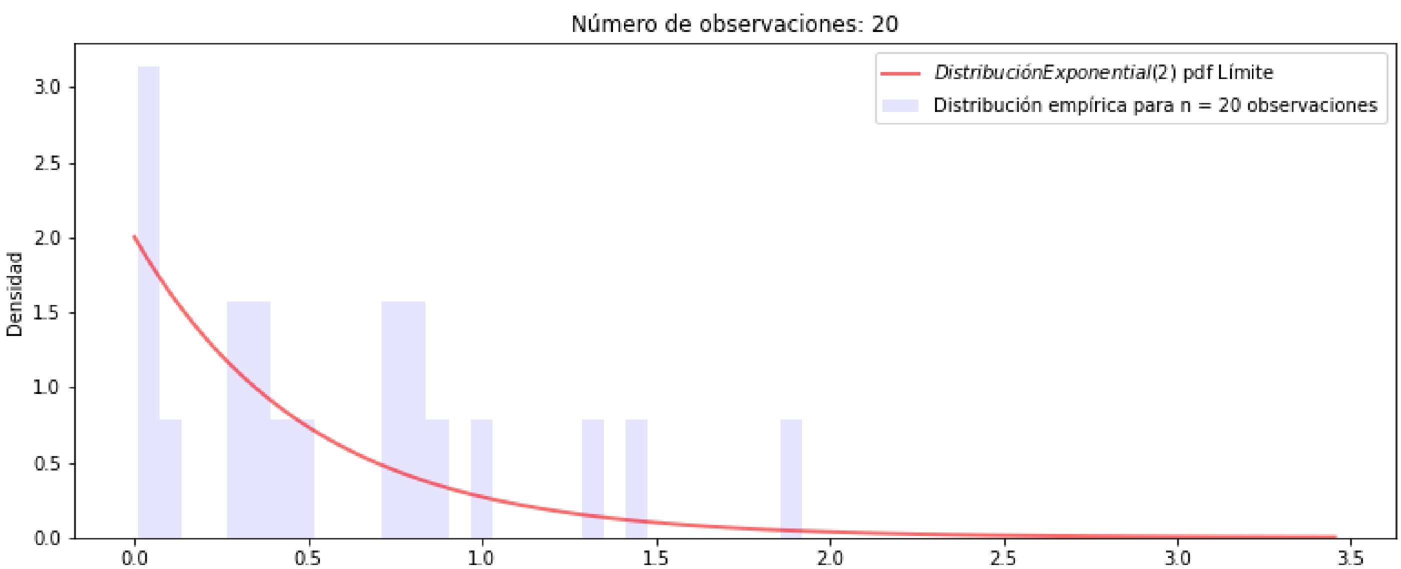
Para $a = 2$, $C_a = \frac{4}{3}\cdot 2\cdot\sqrt{2} = \frac{8}{3}\sqrt{2} \approx 3{,}7712.$

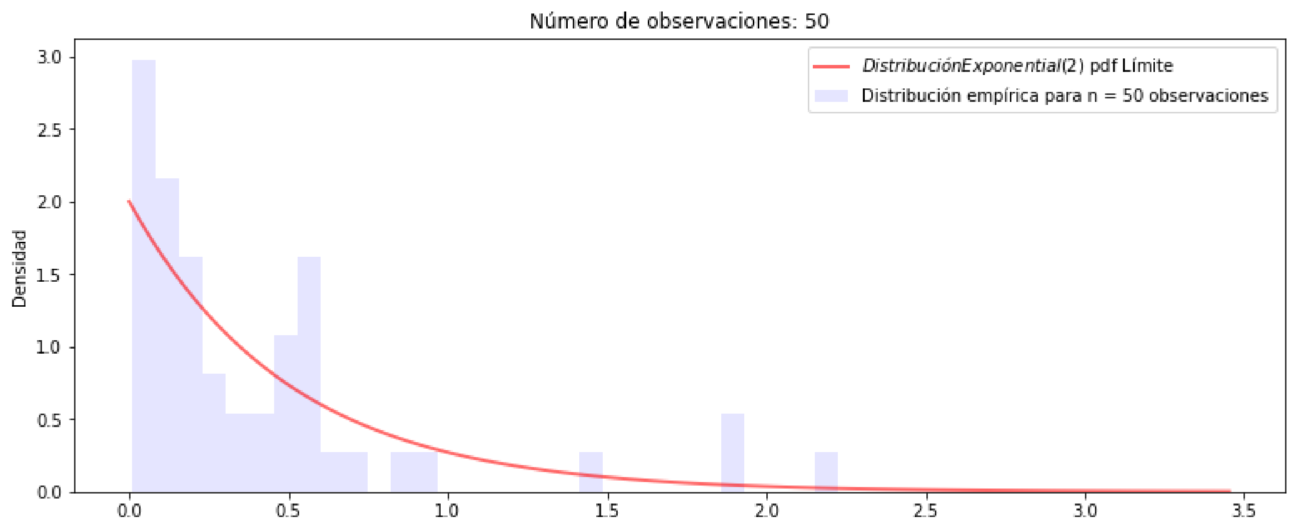
4.

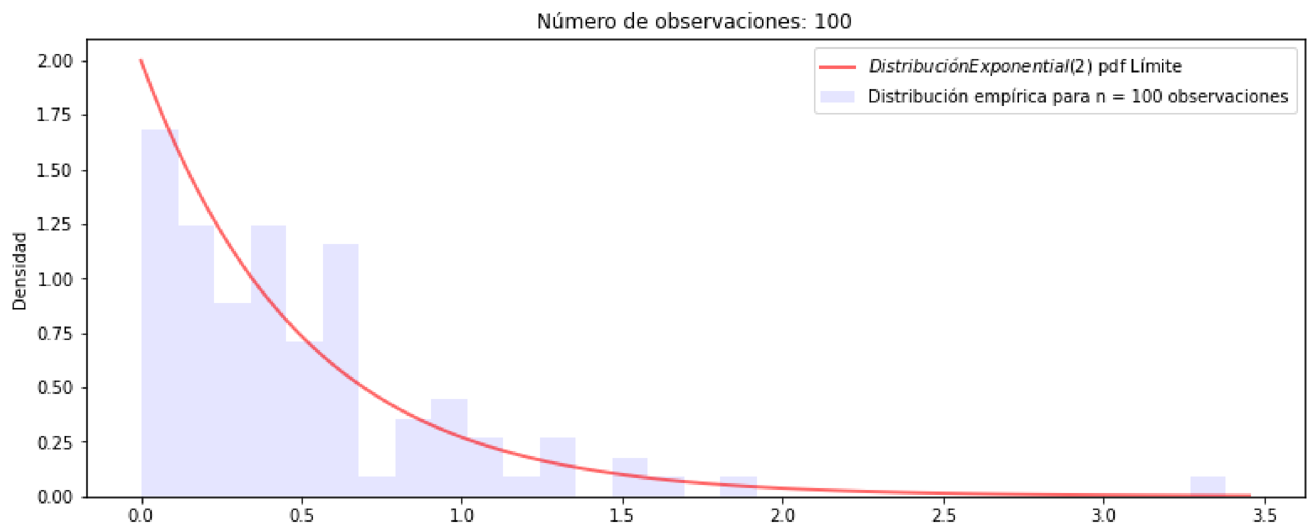
El código comentado y listo para ejecución lo puede encontrar en el siguiente enlace:
https://colab.research.google.com/drive/1rspLVZQkgdkeGUdxFvdPTIY_GWzxGE98?usp=sharing

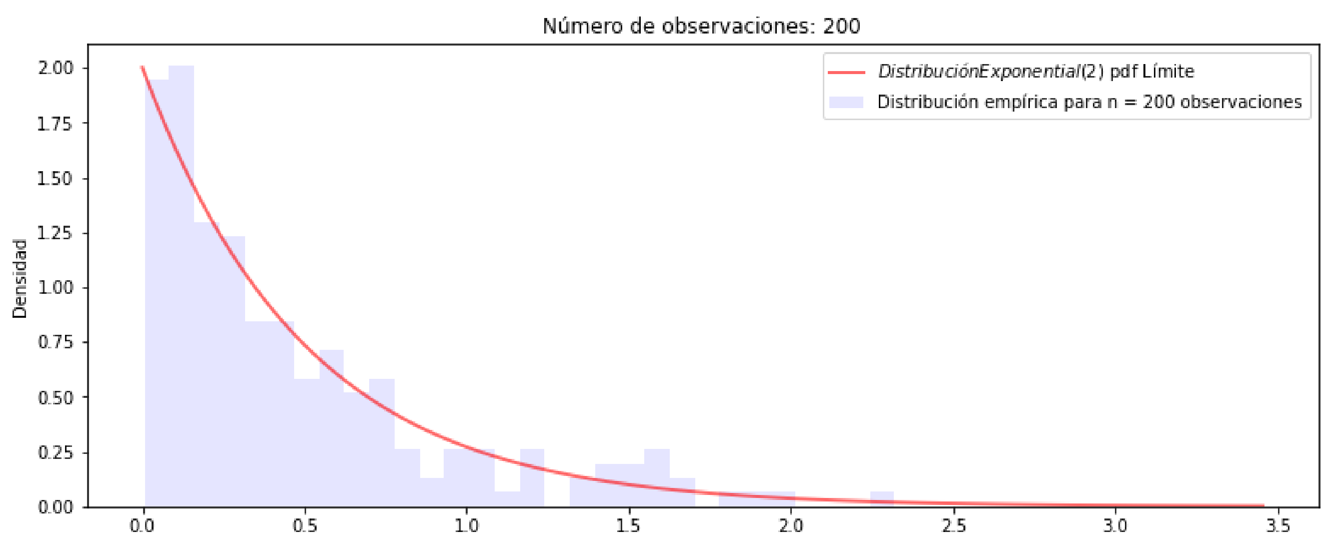
Puede correrlo dándole al botón de “Play”  en cada celda de código

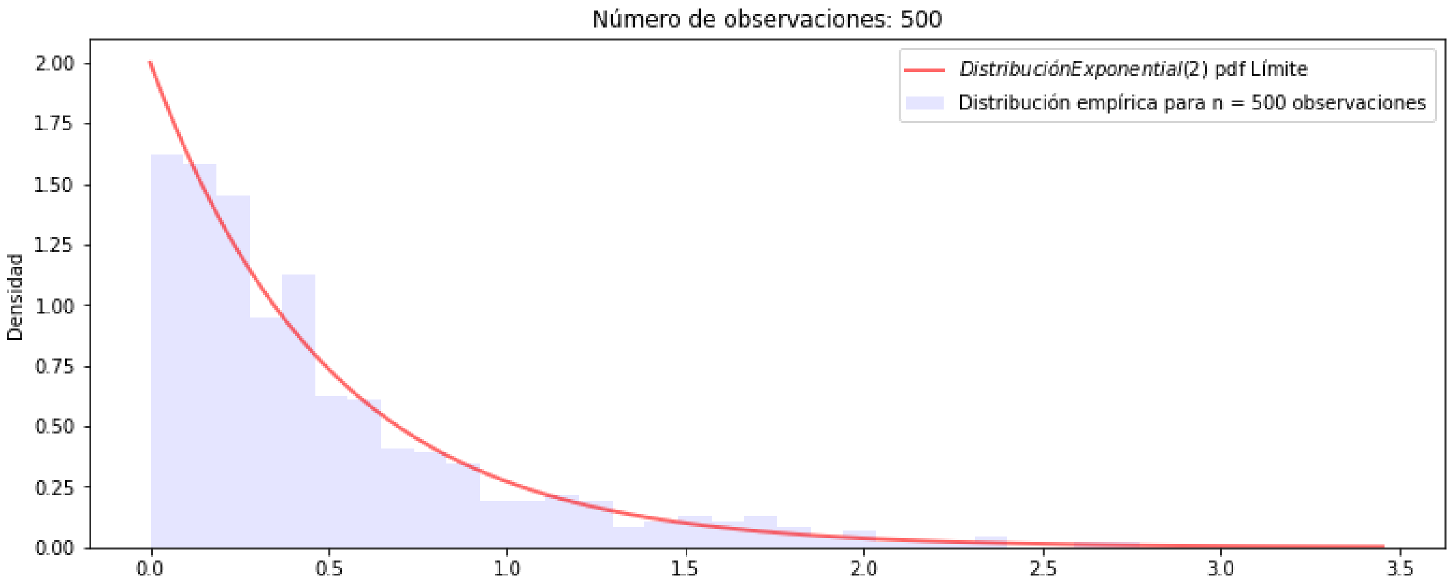





Número de observaciones: 50
$Distribución Exponential(2)$ pdf Límite
Distribución empírica para n = 50 observaciones
Densidad


Número de observaciones: 100
$Distribución Exponential(2)$ pdf Límite
Distribución empírica para n = 100 observaciones
Densidad


Número de observaciones: 200
$Distribución Exponential(2)$ pdf Límite
Distribución empírica para n = 200 observaciones
Densidad


Número de observaciones: 500
DistribuciónExponential(2) pdf Límite
Distribución empírica para n = 500 observaciones
Densidad
2.00
1.75
1.50
1.25
1.00
0.75
0.50
0.25
0.00
0.0
0.5
1.0
1.5
2.0
2.5
3.0
3.5