Tarea 3

Gonzalez Solis Diego Moises

22 de octubre de 2019

NOMBRE DEL ALUMNO:

Diego Moisés González Solís

CARRERA:

Ing. Mecatrónica

MATERIA:

Cinemática de Robots

GRADO Y GRUPO:

7°-B

CUATRIMESTRE:
Septiembre-Diciembre

NOMBRE DEL DOCENTE:

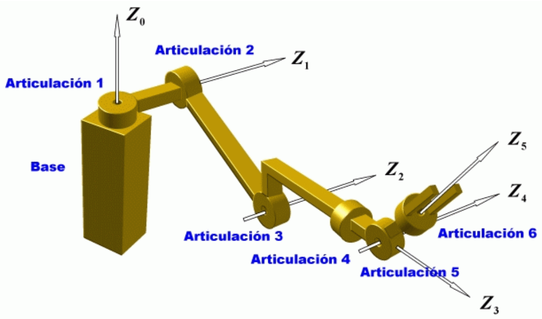
Carlos Enrique Moran Garabito

Danavit-hartenberg

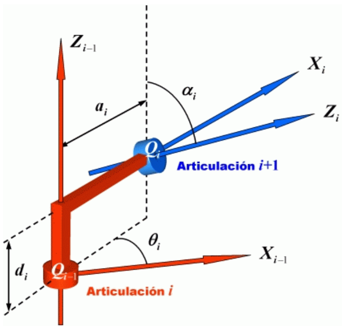
Se trata de un procedimiento sistemático para describir la estructura cinemática de una cadena articulada constituida por articulaciones con. un solo grado de libertad. Para ello, a cada articulación se le asigna un Sistema de Referencia Local con origen en un punto Qi y ejes ortonormales {X Y Z i i i , , } , comenzando con un primer S.R fijo e inmóvil dado por los ejes { X Y Z 0 0 0 , , } , anclado a un punto fijo Q0 de la Base sobre la que está montada toda la estructura de la cadena. Este Sistema de Referencia no tiene por qué ser el Universal con origen en (0,0,0) y la Base canónica.

1. **Asignación de Sistemas de Referencia**

Las articulaciones se numeran desde 1 hasta n. A la articulación i -ésima se le asocia su propio eje de rotación como Eje Zi− 1 , de forma que el eje de giro de la 1ª articulación es Z0 y el de la n-ésima articulación, Zn− 1. En la Figura adjunta se muestra la estructura del Robot PUMA junto con sus articulaciones y ejes de rotación. Para la articulación i -ésima (que es la que gira alrededor de Zi− 1), la elección del origen de coordenadas Qi y del Eje Xi sigue reglas muy precisas en función de la geometría de los brazos articulados. el Eje Yi por su parte, se escoge para que el sistema { X Y Z i i i , , } sea dextrógiro. La especificación de cada Eje Xi depende de la relación espacial entre Zi y Zi− 1, distinguiéndose 2 casos:



1- Zi y Zi− 1 no son paralelos



Entonces existe una única recta perpendicular a ambos, cuya intersección con los ejes proporciona su mínima distancia (que puede ser 0). Esta distancia, i a , medida desde el eje Zi− 1 hacia el eje Zi (con su signo), es uno de los parámetros asociados a la articulación i -ésima. La distancia i d desde Qi− 1 a la intersección de la perpendicular común entre Zi− 1 y Zi con Zi− 1 es el 2º de los parámetros. En este caso, el Eje Xi es esta recta, siendo el sentido positivo el que va desde el Eje Zi− 1 al Zi si 0 i a > . El origen de coordenadas Qi es la intersección de dicha recta con el Eje Zi .

2- Zi y Zi− 1 son paralelos

En esta situación el Eje Xi se toma en el plano conteniendo a Zi− 1 y Zi y perpendicular a. Ambos. El origen Qi es cualquier punto conveniente del eje Zi . El parámetro i a es, como antes, la distancia perpendicular entre los ejes Zi− 1 y Zi , y i d es la distancia desde Qi− 1 . Una vez determinado el Eje Xi , a la articulación i -ésima se le asocia un 3er parámetro fijo i α que es el ángulo que forman los ejes Zi− 1 y Zi en relación al eje Xi . Nótese que cuando el brazo i -ésimo (que une rígidamente las articulaciones i e i + 1) gira en torno al eje Zi− 1 (que es el de rotación de la articulación i), los parámetros i a , i d y i α permanecen constantes, pues dependen exclusivamente de las posiciones/orientaciones relativas entre los ejes Zi− 1 y Zi , que son invariables. Por tanto, i a , i d y i α pueden calcularse a partir de cualquier configuración de la estructura articulada, en particular a partir de una configuración inicial estándar. Precisamente el ángulo i θ de giro que forman los ejes Xi− 1 y Xi con respecto al eje Zi− 1 es el 4º parámetro asociado a la articulación i y el único de ellos que varía cuando el brazo i gira. Es importante observar que el conjunto de los 4 parámetros i a , i d , i α y i θ determina totalmente el Sistema de Referencia de la articulación i + 1 en función del S.R de la articulación i .

2. Transformación de coordenadas

De los 4 parámetros asociados a una articulación, los 3 primeros son constantes y dependen exclusivamente de la relación geométrica entre las articulaciones i e i + 1 , mientras que el 4º parámetro i θ es la única variable de la articulación, siendo el ángulo de giro del eje Xi− 1 alrededor del eje Zi− 1 para llevarlo hasta Xi . Sabemos que dados 2 Sistemas de Referencia R1 1 1 2 3 = { Q u u u , [, ,]} y R2 2 1 2 3 = { Q v v v , [, ,]} con Bases ortonormales asociadas, el cambio de coordenadas del segundo S.R. al primero viene dado por:

$$\begin{bmatrix}\alpha_1\\ \alpha_2\\ \alpha_3\\ 1\end{bmatrix} = \left[\begin{array}{ccc|c} & & & \lambda_1\\ & R & & \lambda_2\\ & & & \lambda_3\\ \hline 0 & 0 & 0 & 1\end{array}\right] \cdot \begin{bmatrix}\beta_1\\ \beta_2\\ \beta_3\\ 1\end{bmatrix}$$

donde 1 2 3 β β β , , son las coordenadas de un punto en el S.R R2 , R es la matriz del Cambio de Base tal que V1|V2| V3| U1| U2| U3| R | | | | = · R y λ1 λ2, λ3, son las coordenadas del origen del segundo S.R., Q2 respecto al primero. La expresión permite entonces obtener las coordenadas α1 α2 α3, del punto en cuestión con respecto al primero de los S.R. En nuestro caso, para pasar de la (1) i + -ésima articulación a la i -ésima, los Sistemas de Referencia son R1 = {Qi-1[Xi-1, Yi-1, Z i-1]} y R2 = {Qi,[Xi, Yi, Zi,] } . Estudiaremos por separado la matriz del Cambio de Base y la expresión de Qi en el primer S.R.

2.1 Matriz del Cambio de Base

Habiendo asignado los ejes a cada articulación mediante la representación Denavit-Hartenberg, tenemos que: 1- El eje Xi se obtiene rotando el eje Xi− 1 alrededor del eje Zi− 1 un ángulo i θ .

2- El eje Zi se obtiene rotando el eje Zi− 1 alrededor del eje Xi un ángulo i α . Por su parte, el eje Yi viene ya determinado por Xi y Zi . • La primera transformación es una rotación alrededor del 3er vector de la 1ª Base, cuyas ecuaciones genéricas son:

$$\left[u_1^{(1)} \mid u_2^{(1)} \mid u_3^{(1)}\right] = \left[u_1 \mid u_2 \mid u_3\right] R_3(\theta_i)$$

- La segunda transformación es una rotación alrededor del 1er vector de la Base ya transformada, y tiene por expresión:

$$\left[u_1^{(2)} \mid u_2^{(2)} \mid u_3^{(2)}\right] = \left[u_1^{(1)} \mid u_2^{(1)} \mid u_3^{(1)}\right] R_1(\alpha_i)$$

Por tanto, concatenándolas: $\left[u_1^{(2)} \mid u_2^{(2)} \mid u_3^{(2)}\right] = \left[u_1 \mid u_2 \mid u_3\right] R_3(\theta_i) R_1(\alpha_i)$

Finalmente, cambiamos la notación para tener: $\left[X_i \mid Y_i \mid Z_i\right] = \left[X_{i-1} \mid Y_{i-1} \mid Z_{i-1}\right] R_3(\theta_i) R_1(\alpha_i)$

Con lo cual, la **matriz del Cambio de Base es**:

$$R = R_3(\theta_i) R_1(\alpha_i) = \begin{bmatrix} \cos\theta_i & -\operatorname{sen}\theta_i & 0 \\ \operatorname{sen}\theta_i & \cos\theta_i & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\alpha_i & -\operatorname{sen}\alpha_i \\ 0 & \operatorname{sen}\alpha_i & \cos\alpha_i \end{bmatrix}$$

$$\boxed{R = \begin{bmatrix} \cos\theta_i & -\operatorname{sen}\theta_i \cos\alpha_i & \operatorname{sen}\theta_i \operatorname{sen}\alpha_i \\ \operatorname{sen}\theta_i & \cos\theta_i \cos\alpha_i & -\cos\theta_i \operatorname{sen}\alpha_i \\ 0 & \operatorname{sen}\alpha_i & \cos\alpha_i \end{bmatrix}}$$

2.2 Coordenadas de Qi en el primer S.R.

Según la representación de Denavit-Hartenberg, el origen del 2º Sistema de Referencia se obtiene mediante: 1- Traslación de Qi− 1 a lo largo del eje Zi− 1 por la magnitud di.

2- Traslación a lo largo del eje Xi por la magnitud ai.

• La primera transformación es: Qi-1 =Qi-1+ di Zi −1

• La segunda transformación es: Q1= Qi-1+ ai Xi

Teniendo ahora en cuenta que:

$$[X_i \mid Y_i \mid Z_i] = [X_{i-1} \mid Y_{i-1} \mid Z_{i-1}] \cdot \begin{bmatrix} \cos\theta_i & -\operatorname{sen}\theta_i \cos\alpha_i & \operatorname{sen}\theta_i \operatorname{sen}\alpha_i \\ \operatorname{sen}\theta_i & \cos\theta_i \cos\alpha_i & -\cos\theta_i \operatorname{sen}\alpha_i \\ 0 & \operatorname{sen}\alpha_i & \cos\alpha_i \end{bmatrix}$$

Se tiene, para el 1er vector:

$$X_i = [X_{i-1} \mid Y_{i-1} \mid Z_{i-1}] \cdot \begin{bmatrix} \cos\theta_i \\ \operatorname{sen}\theta_i \\ 0 \end{bmatrix} = \cos\theta_i \cdot X_{i-1} + \operatorname{sen}\theta_i \cdot Y_{i-1}$$

de donde: $Q_i = Q_{i-1}^{(1)} + a_i X_i = Q_{i-1} + d_i Z_{i-1} + a_i(\cos\theta_i \cdot X_{i-1} + \operatorname{sen}\theta_i \cdot Y_{i-1})$

$$Q_i = Q_{i-1} + (a_i \cos\theta_i) X_{i-1} + (a_i \operatorname{sen}\theta_i) Y_{i-1} + d_i Z_{i-1}$$

y por tanto, las coordenadas de Q_i en el 1er Sistema de Referencia son:

$$\boxed{\begin{bmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \\ \lambda_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_i \cos\theta_i \\ a_i \operatorname{sen}\theta_i \\ d_i \end{bmatrix}}$$

Finalmente, la transformación de coordenadas del S.R. $Q_i,[X_i,Y_i,Z_i]$ al S.R. $Q_{i-1},[X_{i-1},Y_{i-1},Z_{i-1}]$ es:

$$\begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\theta_i & -\operatorname{sen}\theta_i \cos\alpha_i & \operatorname{sen}\theta_i \operatorname{sen}\alpha_i \\ \operatorname{sen}\theta_i & \cos\theta_i \cos\alpha_i & -\cos\theta_i \operatorname{sen}\alpha_i \\ 0 & \operatorname{sen}\alpha_i & \cos\alpha_i \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \\ \beta_3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} a_i \cos\theta_i \\ a_i \operatorname{sen}\theta_i \\ d_i \end{bmatrix}$$

Cambiando la notación para las coordenadas:

$$\begin{bmatrix} x_{i-1} \\ y_{i-1} \\ z_{i-1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\theta_i & -\operatorname{sen}\theta_i \cos\alpha_i & \operatorname{sen}\theta_i \operatorname{sen}\alpha_i \\ \operatorname{sen}\theta_i & \cos\theta_i \cos\alpha_i & -\cos\theta_i \operatorname{sen}\alpha_i \\ 0 & \operatorname{sen}\alpha_i & \cos\alpha_i \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_i \\ y_i \\ z_i \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} a_i \cos\theta_i \\ a_i \operatorname{sen}\theta_i \\ d_i \end{bmatrix}$$

Donde el subíndice denota el Sistema de Referencia respecto al cual están expresadas las coordenadas.

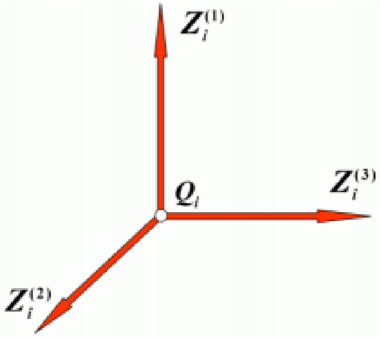
En coordenadas homogéneas:

$$\begin{bmatrix} x_{i-1} \\ y_{i-1} \\ z_{i-1} \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\theta_i & -\operatorname{sen}\theta_i \cos\alpha_i & \operatorname{sen}\theta_i \operatorname{sen}\alpha_i & a_i \cos\theta_i \\ \operatorname{sen}\theta_i & \cos\theta_i \cos\alpha_i & -\cos\theta_i \operatorname{sen}\alpha_i & a_i \operatorname{sen}\theta_i \\ 0 & \operatorname{sen}\alpha_i & \cos\alpha_i & d_i \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_i \\ y_i \\ z_i \\ 1 \end{bmatrix}$$

3. Articulaciones compuestas con 2 o 3 Grados de libertad

Un caso muy frecuente es el de las articulaciones del cuerpo humano o de un animal en el que un hueso puede girar respecto al anterior en 2 o 3 ejes que se cortan en un mismo punto y más aún, podemos suponer que los ejes son mutuamente perpendiculares. Cada uno de estos ejes de rotación constituye una articulación en el sentido de la representación DenavitHartenberg, pero para esta situación especial resulta conveniente cambiar la notación vista en la sección anterior y denominar a los Sistemas de Referencia como:

- Para el 1er grado de libertad: Ejes: $X_i^{(1)}, Y_i^{(1)}, Z_i^{(1)}$
- Para el 2º grado de libertad: Ejes: $X_i^{(2)}, Y_i^{(2)}, Z_i^{(2)}$
- Para el 3er grado de libertad: Ejes: $X_i^{(3)}, Y_i^{(3)}, Z_i^{(3)}$



Y los 3 Sistemas de Referencia tiene origen común Q_i.
Supondremos además que $Z_i^{(2)}$ es perpendicular a $Z_i^{(1)}$, $Z_i^{(3)} = Z_i^{(1)} \otimes Z_i^{(2)}$ y la siguiente articulación con 3 DOF tiene su origen en $Q_{i+1} = r_i \cdot X_i^{(3)}$ y 1er eje de rotación $Z_{i+1}^{(1)} = X_i^{(3)}$

3.1 Transformación para la 1ª articulación:

Los parámetros Denavit-Hartenberg ai, di para la 1ª articulación son ambos nulos y Xi(2)= Zi(1) ⊗ Zi(2) con lo cual αi (1)=90º y la matriz de transformación es:

$$\begin{bmatrix} x_i^{(1)} \\ y_i^{(1)} \\ z_i^{(1)} \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\theta_{i1} & 0 & \operatorname{sen}\theta_{i1} & 0 \\ \operatorname{sen}\theta_{i1} & 0 & -\cos\theta_{i1} & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_i^{(2)} \\ y_i^{(2)} \\ z_i^{(2)} \\ 1 \end{bmatrix}$$

3.2 Transformación para la 2ª articulación:

Los parámetros Denavit-Hartenberg ai(2), di(2) para la 2ª articulación son ambos nulos y Xi(3)= Zi(2) ⊗ Zi(3)con lo cual αi(2) = 90º y la matriz de transformación es:

$$\begin{bmatrix} x_i^{(2)} \\ y_i^{(2)} \\ z_i^{(2)} \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\theta_{i2} & 0 & \operatorname{sen}\theta_{i2} & 0 \\ \operatorname{sen}\theta_{i2} & 0 & -\cos\theta_{i2} & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_i^{(3)} \\ y_i^{(3)} \\ z_i^{(3)} \\ 1 \end{bmatrix}$$

La Transformación total de la articulación con origen en Qi+1 y 3 DOF a la articulación con origen en Qi y 3 DOF es:

$$\begin{bmatrix} x_i \\ y_i \\ z_i \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\theta_{i1} & 0 & \operatorname{sen}\theta_{i1} & 0 \\ \operatorname{sen}\theta_{i1} & 0 & -\cos\theta_{i1} & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \cos\theta_{i2} & 0 & \operatorname{sen}\theta_{i2} & 0 \\ \operatorname{sen}\theta_{i2} & 0 & -\cos\theta_{i2} & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \cos\theta_{i3} & 0 & \operatorname{sen}\theta_{i3} & 0 \\ \operatorname{sen}\theta_{i3} & 0 & -\cos\theta_{i3} & 0 \\ 0 & 1 & 0 & r_i \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_{i+1} \\ y_{i+1} \\ z_{i+1} \\ 1 \end{bmatrix}$$

4. Consideraciones finales

La representación Denavit-Hartenberg presupone que cuando se realiza una rotación alrededor de uno de los ejes, digamos Zi− 1 , la orientación del eje Zi varía debido a la acción del brazo que los une (exceptuando el caso en el que Zi− 1 y Zi son paralelos), aunque naturalmente el ángulo i α entre ambos ejes permanece constante. Esta observación implica que es imposible que el eje Zi tenga una orientación constante e independiente de la rotación que se efectúe alrededor de Zi− 1 , lo cual implica que la transformación de un sistema a otro no puede en ningún caso expresarse como una rotación de ángulos de Euler de Ejes Fijos, como la RPY.