NOMBRE DEL ALUMNO:

Diego Moisés González Solís

CARRERA:

Ing. Mecatrónica

MATERIA:

DINAMICA Y CONTROL DE ROBOTS

PROFESOR:

CARLOS ENRIQUE MORAN GARABITO

GRADO Y GRUPO:

8°-B

CUATRIMESTRE:
ENERO-ABRIL

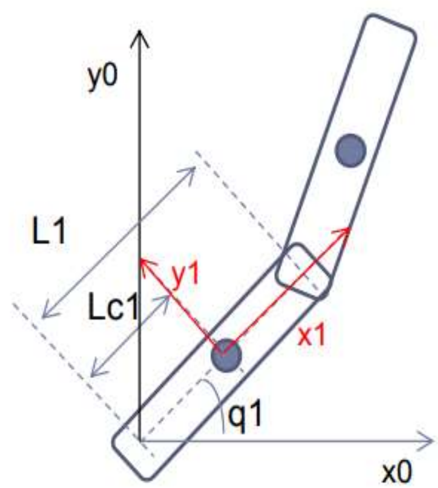
MODELO DINAMICO MEDIANTE LA FORMULACION EULER-LAGRANGE

En la formulación de *Newton-Euler*, las ecuaciones de movimiento fueron derivadas a partir de la *Segunda Ley de Newton*, la cual relaciona fuerza y momento, así como torque y momento angular. Las ecuaciones resultantes incluyen fuerzas de restricción, las cuales deben ser eliminadas para poder obtener ecuaciones dinámicas de forma cerrada. En la formulación de *Newton-Euler*, las ecuaciones no son expresadas en términos de variables independientes, y no incluyen explícitamente torques de junta de entrada, pues se necesitan operaciones aritméticas para derivar las ecuaciones dinámicas de forma cerrada. Esto representa un complejo procedimiento que requiere cierta intuición física.

Una alternativa al método de *Newton-Euler*, para dinámica de manipuladores, es la formulación de *Lagrange-Euler*, la cual describe el comportamiento de un sistema dinámico en términos del trabajo y la energía almacenados en el sistema, en vez de las fuerzas y momentos de los miembros individuales involucrados. Las fuerzas de restricción comprometidas en el sistema quedan automáticamente eliminadas en las ecuaciones dinámicas obtenidas por este método. Las ecuaciones dinámicas de forma cerrada pueden ser derivadas sistemáticamente en cualquier sistema de coordenadas.

EJEMPLO:

ROBOT PLANO DE 2 GRADOS DE LIBERTAD



cálculo de la Energía cinética (K)

Eslabón 1: $K_1 = \boxed{\frac{1}{2} m_1 v_1^T v_1} + \boxed{\frac{1}{2} \omega_1^T I_1 \omega_1}$

Calculamos inicialmente la MATRIZ del primer eslabón.

$$
{}^0_1A = \begin{bmatrix} Cq1 & -Sq1 & 0 & \boxed{L_{c1}Cq1} \\ Sq1 & Cq1 & 0 & \boxed{L_{c1}Sq1} \\ 0 & 0 & 1 & \boxed{0} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}
\begin{matrix} \rightarrow x = L_{c1}Cq1 \\ \rightarrow y = L_{c1}Sq1 \\ \rightarrow z = 0 \\ \end{matrix}
$$

Haciendo uso del jacobiano este nos queda de la siguiente manera:

La velocidad lineal del eslabón 1 seria:

$$J=\begin{bmatrix}\frac{\partial x}{\partial q_1} & \frac{\partial x}{\partial q_2} & \frac{\partial x}{\partial q_3}\\ \frac{\partial y}{\partial q_1} & \frac{\partial y}{\partial q_2} & \frac{\partial y}{\partial q_3}\\ \frac{\partial z}{\partial q_1} & \frac{\partial z}{\partial q_2} & \frac{\partial z}{\partial q_3}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-L_{c1}Sq1 & 0 & 0\\ L_{c1}Cq1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\end{bmatrix} \Rightarrow v_1=\begin{bmatrix}-L_{c1}Sq1 & 0 & 0\\ L_{c1}Cq1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\dot{q}1\\ 0\\ 0\end{bmatrix}=\boxed{\begin{bmatrix}-L_{c1}Sq1\,\dot{q}1\\ L_{c1}Cq1\,\dot{q}1\\ 0\end{bmatrix}=v_1}$$

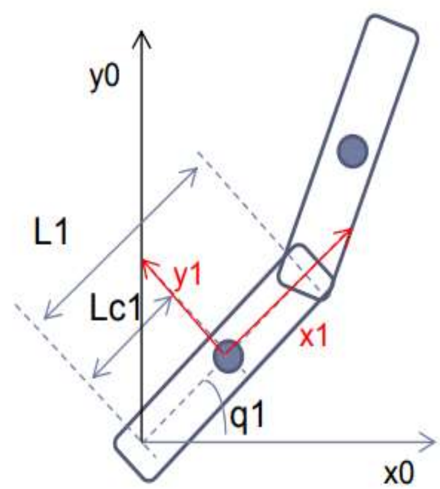
$$\boxed{\begin{bmatrix}v\\ \omega\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}J_v(q)\\ J_\omega(q)\end{bmatrix}\cdot\dot{q}}$$

Energía cinética $K_1=\boxed{\frac{1}{2}m_1 v_1^T v_1}+\boxed{\frac{1}{2}\omega_1^T I_1 \omega_1}$

$$v_1^T v_1=\begin{bmatrix}-L_{c1}Sq1\,\dot{q}1 & L_{c1}Cq1\,\dot{q}1 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}-L_{c1}Sq1\,q1\\ L_{c1}Cq1\,\dot{q}1\\ 0\end{bmatrix}=L_{c1}{}^2\,\dot{q}_1{}^2$$

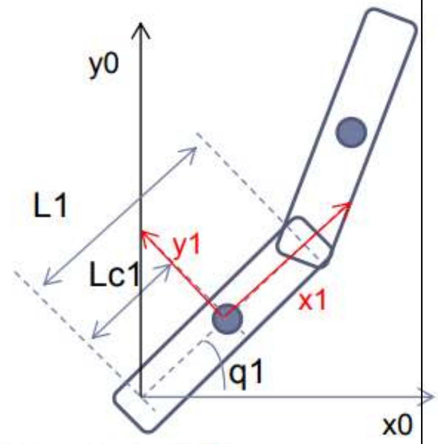
La velocidad angular del eslabón 1 seria:

$$\boxed{\vec{w}_1=\dot{q}_1\,\vec{z}_0}$$



Por lo que la energía cinética del eslabón 1:

$$\boxed{K_1=\boxed{\frac{1}{2}m_1 L_{c1}{}^2\,\dot{q}_1{}^2}+\boxed{\frac{1}{2}I_1\,\dot{q}_1^2}}$$



$$K_2 = \boxed{\frac{1}{2} m_2 v_2^T v_2} + \boxed{\frac{1}{2}\omega_2^T I_2 \omega_2}$$

Eslabón 2:

Calculamos inicialmente la MATRIZ del segundo eslabón

$$ {}^0_2A = {}^0_1A\,{}^1_2A = \begin{bmatrix} Cq1 & -Sq1 & 0 & L_1Cq1 \\ Sq1 & Cq1 & 0 & L_1Sq1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} Cq2 & -Sq2 & 0 & L_{c2}Cq2 \\ Sq2 & Cq2 & 0 & L_{c2}Sq2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$ {}^0_2A = {}^0_1A\,{}^1_2A = \begin{array}{cl} \begin{bmatrix} Cq1Cq2 - Sq1Sq2 & -Cq1Sq2 - Sq1Cq2 & 0 & \boxed{Cq1L_{c2}Cq2 - Sq1L_{c2}Sq2 + L_1Cq1} \\ Sq1Cq2 + Cq1Cq2 & -Sq1Sq2 + Cq1Cq2 & 0 & \boxed{Sq1L_{c2}Cq2 - Cq1L_{c2}Sq2 + L_1Sq1} \\ 0 & 0 & 1 & \boxed{0} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} & \begin{matrix} =x \\ =y \\ =z \\ \end{matrix} \end{array}$$

$$K_2 = \boxed{\frac{1}{2} m_2 v_2^T v_2} + \boxed{\frac{1}{2}\omega_2^T I_2 \omega_2}$$

Eslabón 2:

Haciendo uso del jacobiano, nos queda de la siguiente manera:

$$J = \begin{bmatrix} \frac{\partial x}{\partial q_1} & \frac{\partial x}{\partial q_2} & \frac{\partial x}{\partial q_3} \\ \frac{\partial y}{\partial q_1} & \frac{\partial y}{\partial q_2} & \frac{\partial y}{\partial q_3} \\ \frac{\partial z}{\partial q_1} & \frac{\partial z}{\partial q_2} & \frac{\partial z}{\partial q_3} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -L_1Sq1 - L_{c2}[S(q1+q2)] & -L_{c2}[S(q1+q2)] & 0 \\ L_1Cq1 - L_{c2}[C(q1+q2)] & L_{c2}[C(q1+q2)] & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$v_2 = \begin{bmatrix} -L_1Sq1 - L_{c2}[S(q1+q2)] & -L_{c2}[S(q1+q2)] & 0 \\ L_1Cq1 - L_{c2}[C(q1+q2)] & L_{c2}[C(q1+q2)] & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{q}1 \\ \dot{q}2 \\ 0 \end{bmatrix} = \boxed{\begin{bmatrix} (-L_1Sq1 - L_{c2}[S(q1+q2)])\dot{q}1 - L_{c2}[S(q1+q2)]\dot{q}2 \\ (L_1Cq1 - L_{c2}[C(q1+q2)])\dot{q}1 + L_{c2}[C(q1+q2)]\dot{q}2 \\ 0 \end{bmatrix} = v_2}$$

$$K_2 = \boxed{\frac{1}{2} m_2 v_2^T v_2} + \boxed{\frac{1}{2} \omega_2^T I_2 \omega_2}$$

Eslabón 2:

$$^T v_2 = \left[(-L_1 Sq1 - L_{c2}[S(q1+q2)])\dot{q}1 - L_{c2}[S(q1+q2)]\dot{q}2 \quad (L_1 Cq1 - L_{c2}[C(q1+q2)])\dot{q}1 + L_{c2}[C(q1+q2)]\dot{q}2 \quad 0 \right] \begin{bmatrix} (-L_1 Sq1 - L_{c2}[S(q1+q2)])\dot{q}1 - L_{c2}[S(q1+q2)]\dot{q}2 \\ (L_1 Cq1 - L_{c2}[C(q1+q2)])\dot{q}1 + L_{c2}[C(q1+q2)]\dot{q}2 \\ 0 \end{bmatrix}$$

La velocidad angular del eslabón 2 seria:

$$\boxed{\vec{w}_2 = (\dot{q}_1 + \dot{q}_2)\vec{z}_0}$$

La energía cinética queda finalmente:

$$\boxed{K_2 = \boxed{\frac{1}{2} m_2 \left[L_1^2 \dot{q}_1^2 + L_{c2}(\dot{q}_1 + \dot{q}_2)^2 + 2L_1 L_{c2}(\dot{q}_1^2 + \dot{q}_1\dot{q}_2)\cos q_2 \right]} + \boxed{\frac{1}{2} I_2 (\dot{q}_1 + \dot{q}_2)^2}}$$

cálculo de Lagrangiano y ecuación de movimiento

$$L(q,\dot{q}) = K(q,\dot{q}) - U(q)$$

El lagrangiano en forma matricial : $L(q,\dot{q}) = \frac{1}{2}\dot{q}^T D(q)\dot{q} - U(q) = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} d_{ij}(q)\cdot\dot{q}_i\cdot\dot{q}_j - U(q)$

Ecuación de movimiento :

$$\boxed{\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}}\right) - \frac{\partial L}{\partial q} = \tau}$$

$$\boxed{\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k} = \sum_{j=1}^{n} d_{kj}(q)\cdot\dot{q}_j}$$

$$\boxed{\frac{\partial L}{\partial q_k} = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\frac{\partial d_{ij}}{\partial q_k}\dot{q}_i\cdot\dot{q}_j - \frac{\partial U}{\partial q_k}}$$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k}\right) = \sum_{j=1}^{n} d_{kj}(q)\cdot\ddot{q}_j + \sum_{j=1}^{n}\frac{d}{dt}d_{kj}(q)\cdot\dot{q}_j =$$

$$\boxed{= \sum_{j=1}^{n} d_{kj}(q)\cdot\ddot{q}_j + \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\frac{\partial d_{kj}}{\partial q_j}\dot{q}_i\cdot\dot{q}_j}$$

$$\boxed{\sum_{j=1}^{n} d_{kj}(q)\cdot\ddot{q}_j + \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\left(\frac{\partial d_{kj}}{\partial q_i} - \frac{1}{2}\frac{\partial d_{ij}}{\partial q_k}\right)\dot{q}_i\cdot\dot{q}_j - \frac{\partial U}{\partial q_k} = \tau_k}$$

$$\boxed{\sum_{j=1}^{n} d_{kj}(q)\cdot\ddot{q}_j + \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} c_{ijk}(q)\dot{q}_i\cdot\dot{q}_j + \phi(q) = \tau_k}$$

Forma matricial $\boxed{D(q)\cdot\ddot{q} + C(q,\dot{q})\cdot\dot{q} + g(q) = \tau}$

Inercial Coriolis gravedad

cálculo de Lagrangiano

$$L(q,\dot{q}) = K - U \Rightarrow \boxed{L(q,\dot{q}) = \frac{1}{2}\dot{q}^T D(q)\dot{q} - U(q)}$$

$$K = \frac{1}{2}\dot{q}^T D(q)\dot{q} = \frac{1}{2}\begin{bmatrix}\dot{q}_1 & \dot{q}_2\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix} d_{11} & d_{12} \\ d_{21} & d_{22}\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}\dot{q}_1 \\ \dot{q}_2\end{bmatrix} = \frac{1}{2}\begin{bmatrix}\dot{q}_1 d_{11} + \dot{q}_2 d_{21} & \dot{q}_1 d_{12} + \dot{q}_2 d_{22}\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}\dot{q}_1 \\ \dot{q}_2\end{bmatrix}$$

$$= \frac{1}{2}\left[d_{11}\dot{q}_1\dot{q}_1 + d_{21}\dot{q}_1\dot{q}_2 + d_{12}\dot{q}_1\dot{q}_2 + d_{22}\dot{q}_2\dot{q}_2\right]$$

$$d_{12} = d_{21}$$

$$\boxed{K = \frac{1}{2}\left[d_{11}\dot{q}_1\dot{q}_1 + 2\cdot d_{21}\dot{q}_1\dot{q}_2 + d_{22}\dot{q}_2\dot{q}_2\right]}$$

$$\boxed{L(q,\dot{q}) = \frac{1}{2}\dot{q}^T D(q)\dot{q} - U(q) = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} d_{ij}(q)\cdot\dot{q}_i\cdot\dot{q}_j - U(q)}$$

Teniendo en cuenta las ecuaciones obtenidas anteriormente:

$$L(q,\dot{q}) = K - U$$

$$\boxed{L(q,\dot{q}) = \frac{1}{2}\dot{q}^T D(q)\dot{q} - U(q) = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} d_{ij}(q)\cdot\dot{q}_i\cdot\dot{q}_j - U(q)}$$

$$\boxed{L(q,\dot{q}) = K_1 + K_2 - U_1 - U_2}$$

$$L = \frac{1}{2}\underbrace{m_1 L_{c1}^2}_{d_{11}}\dot{q}_1^2 + \frac{1}{2}\underbrace{I_1}_{d_{11}}\dot{q}_1^2 + \frac{1}{2}\underbrace{m_2}\left[\underbrace{L_1^2\dot{q}_1^2}_{d_{11}} + \underbrace{L_{c2}^2}_{\substack{d_{11}\\ d_{22}\\ d_{12}=d_{12}}}(\dot{q}_1+\dot{q}_2)^2 + \underbrace{2L_1L_{c2}}_{\substack{d_{11}\\ d_{12}=d_{21}}}(\dot{q}_1^2+\dot{q}_1\dot{q}_2)\cos q_2\right] + \frac{1}{2}\underbrace{I_2}_{\substack{d_{11}\\ d_{22}\\ d_{12}=d_{12}}}(\dot{q}_1+\dot{q}_2)^2 - m_1 g L_{c1} sen\, q_1 - m_2 g[L_1 sen\, q_1 + L_{c2} sen(q_1+q_2)]$$

Como se puede observar en la fórmula, los términos $\mathbf{d_{ij}}$: solo aparecen en la energía cinética.

Los términos donde aparece d_{11} es porque el término q_1 está elevado al cuadrado (q_1 * q_1) y aparece dos veces

Los términos donde aparece d_{22} es porque el término q_2 está elevado al cuadrado (q_2 * q_2) y aparece dos veces

Los términos donde aparece d_{12} o d_{21} es porque el término q_1 y q_2