INDUSTRIALES
ETSII | UPM

Control por Computador

Unidad Docente Automática. Departamento Automática, Ing. Electrónica e Informática Indust.

POLITÉCNICA

Sistemas realimentados

José María Sebastián

Rafael Aracil

Manuel Ferre

Departamento de Automática, Ingeniería Electrónica e Informática Industrial

Sistemas realimentados

- Introducción
- Errores en régimen permanente
  - Tipo de un sistemas
  - Constantes de error
- Errores en sistemas con realimentación no unitaria
- Errores ante perturbaciones
- Técnica del lugar de las raíces
  - Propiedades de los puntos del lugar
  - Reglas de construcción

Introducción

Para sistemas en cadena abierta, se han estudiado:

- Estabilidad
- Comportamiento dinámico

A continuación se va a estudiar el comportamiento en cadena cerrada (sistema realimentado). En particular:

- Comportamiento estático: errores
- Comportamiento dinámico: lugar de las raíces
- Estabilidad: Jury y lugar de las raíces

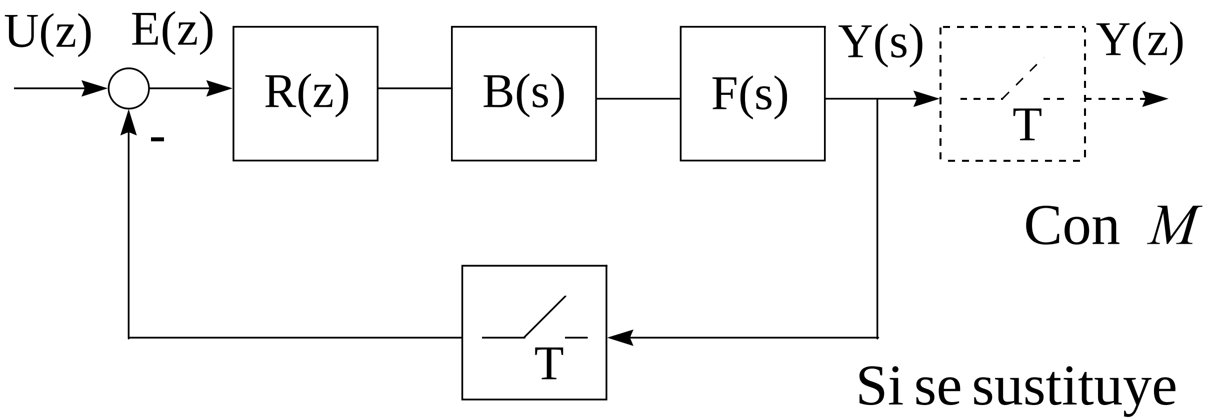
Sistemas realimentados

- Introducción
- Errores en régimen permanente
  - Tipo de un sistemas
  - Constantes de error
- Errores en sistemas con realimentación no unitaria
- Errores ante perturbaciones
- Técnica del lugar de las raíces
  - Propiedades de los puntos del lugar
  - Reglas de construcción

Errores en régimen permanente

Uno de los objetivos en el control de un sistema es su capacidad de respuesta en régimen permanente: la salida debe ser capaz de seguir a la entrada, y no debe ser influida por las perturbaciones.

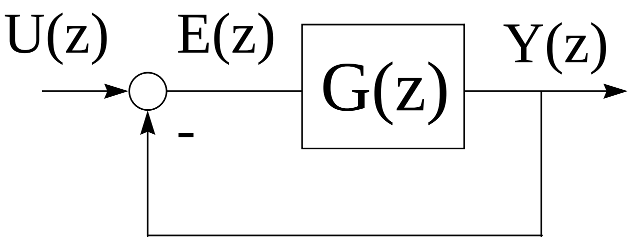
Se parte del sistema con realimentación unitaria:



Con $M(z)=\dfrac{R(z)BF(z)}{1+R(z)BF(z)}$

Si se sustituye $G(z)=R(z)BF(z)$

Será equivalente a:



$$M(z)=\frac{G(z)}{1+G(z)}$$

Errores en régimen permanente

En sistemas con realimentación unitaria, se define la secuencia de error como la diferencia entre el valor deseado de la salida y su valor real.

$$\{e_k\} = \{u_k\} - \{y_k\}$$

Y su transformada z como:

$$E(z) = U(z) - Y(z) = U(z) - \frac{G(z)}{1+G(z)}U(z) = \frac{1}{1+G(z)}U(z)$$

Si el sistema es estable, el valor en régimen permente será:

$$e_\infty = \lim_{k\to\infty} e_k = \lim_{z\to 1}(1-z^{-1})\frac{1}{1+G(z)}U(z)$$

Se aprecia que e_∞ depende de $U(z)$ y de $G(z)$.

Errores en régimen permanente

En función de la entrada:

a) Entrada secuencia escalón: $\{u_k\} = \{1, 1, 1, \cdots\}$

El valor en régimen permanente del error ante esta secuencia de entrada se denomina *error ante escalón*, o también *error de posición* e_p

b) Entrada secuencia rampa: $\{u_k\} = \begin{cases} kT & k \geq 0 \\ 0 & k < 0 \end{cases}$

El valor en régimen permanente del error ante esta secuencia de entrada se denomina *error ante rampa*, o también *error de velocidad* e_v

c) Entrada secuencia parábola: $\{u_k\} = \begin{cases} \frac{1}{2}(kT)^2 & k \geq 0 \\ 0 & k < 0 \end{cases}$

El valor en régimen permanente del error ante esta secuencia de entrada se denomina *error ante parábola*, o también *error de aceleración* e_a

Tipo de un sistema

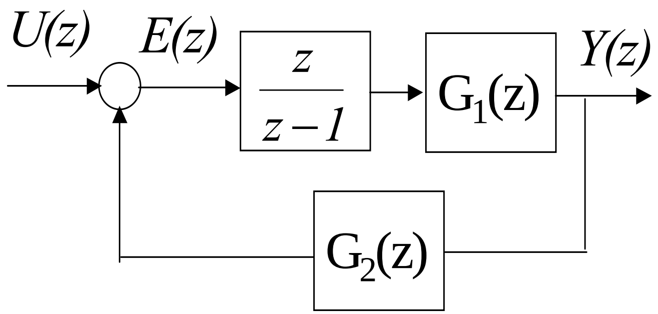
Se denomina tipo de un sistema al número de polos en $z=1$ de la función de transferencia en bucle abierto $G(z)$.

$$\text{Si} \quad G(z) = \frac{1}{(z-1)^r}\hat{G}(z) \quad \text{con} \quad \begin{cases} \hat{G}(z) & \text{sin polos en } z = 1 \\ Tipo \rightarrow & \text{exponente } r \end{cases}$$

Un polo en $z=1$ se comporta como un sumador, de forma idéntica a un polo en $s=0$ para la Transformada de Laplace:

$$y_k = \sum_{i=0}^{k} x_i = x_k + \sum_{i=0}^{k-1} x_i = x_k + y_{k-1} \quad \Rightarrow \quad \frac{Y(z)}{X(x)} = \frac{z}{z-1}$$

Así para el sistema de la figura, supuesto estable, el valor de e_∞, ante entrada escalón, tiene que valer cero.



Errores en régimen permanente

Constantes de error

Los parámetros que determinan el comportamiento estático del error ante secuencias de prueba se denominan constantes de error.

$$e_\infty = \lim_{k\to\infty} e_k = \lim_{z\to 1}(1 - z^{-1})\frac{1}{1+G(z)}U(z)$$

Depende de la secuencia de entrada:

a) Error de posición. Constante de error de posición.

$$U(z) = \frac{1}{1-z^{-1}} \quad \Rightarrow \quad e_p = \lim_{z\to 1}(1 - z^{-1})\frac{1}{1+G(z)}\frac{1}{1-z^{-1}} = \lim_{z\to 1}\frac{1}{1+G(z)}$$

Si se denomina constante de error de posición: $K_p = \lim_{z\to 1} G(z)$

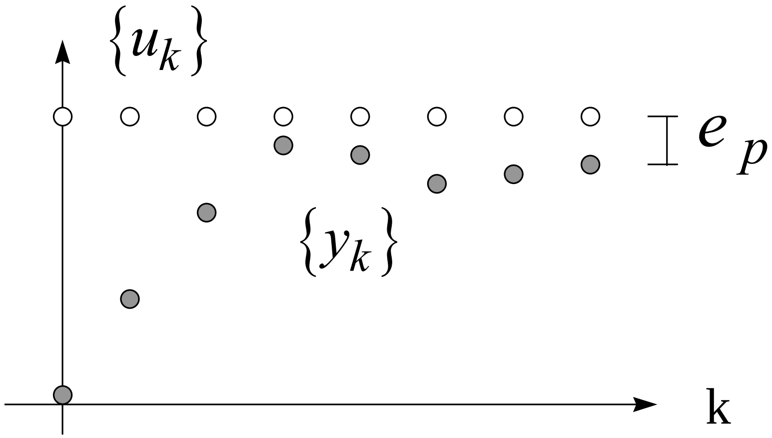
El error de posición viene dado por: $e_p = \dfrac{1}{1+K_p}$

Errores en régimen permanente

Constantes de error

a) Error de posición. Constante de error de posición.

$$e_p = \frac{1}{1+K_p}$$



•Si el sistema es de tipo 0 $\Rightarrow K_p$ finito $\Rightarrow e_p$ finito

•Si es de tipo superior a 0 $\Rightarrow K_p = \infty \Rightarrow e_p = 0$

b) Error de velocidad. Constante de error de velocidad

$$U(z) = \frac{Tz}{(z-1)^2} \Rightarrow e_v = \lim_{z\to 1} (1-z^{-1}) \frac{1}{1+G(z)} \frac{Tz}{(z-1)^2} =$$

$$= \lim_{z\to 1} \frac{T}{(z-1)+(z-1)G(z)} = \frac{T}{\lim_{z\to 1} (z-1)\, G(z)}$$

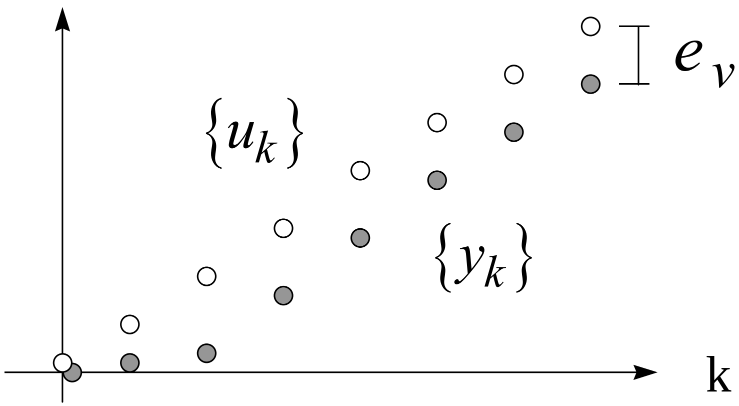
Errores en régimen permanente

Constantes de error

b) Error de velocidad. Constante de error de velocidad.

Si se denomina constante de error de velocidad: $K_v = \lim_{z\to 1}(z-1)G(z)$

El error de velocidad viene dado por: $e_v = \dfrac{T}{K_v}$



- Si el sistema es de tipo 0 $\Rightarrow K_v = 0 \quad \Rightarrow e_v = \infty$
- Si el sistema es de tipo 1 $\Rightarrow K_v = \hat{G}(1) \Rightarrow e_v = \dfrac{T}{K_v}$
- Si es de tipo superior a 1 $\Rightarrow K_v = \infty \quad \Rightarrow e_v = 0$

Errores en régimen permanente

Constantes de error

c) Error de aceleración. Constante de error de aceleración.

$$U(z) = \frac{T^2\, z\,(z+1)}{2\,(z-1)^3} \qquad \Rightarrow \qquad e_a = \lim_{z \to 1} (1 - z^{-1}) \frac{1}{1+G(z)} \frac{T^2\, z\,(z+1)}{2\,(z-1)^3} =$$

$$= \lim_{z \to 1} \frac{T^2}{(z-1)^2 + (z-1)^2\, G(z)} = \frac{T^2}{\lim\limits_{z \to 1} (z-1)^2\, G(z)}$$

Si se denomina constante de error de aceleración: $K_a = \lim\limits_{z \to 1} (z-1)^2 G(z)$

El error de aceleración viene dado por: $e_a = \dfrac{T^2}{K_a}$

Errores en régimen permanente

Constantes de error

c) Error de aceleración. Constante de error de aceleración.

- Si el sistema es de tipo 0 $\Rightarrow K_a = 0 \quad \Rightarrow e_a = \infty$
- Si el sistema es de tipo 1 $\Rightarrow K_a = 0 \quad \Rightarrow e_a = \infty$
- Si el sistema es de tipo 2 $\Rightarrow K_a = \hat{G}(1) \quad \Rightarrow e_a = \dfrac{T^2}{K_a}$

Tipo	e_p	e_v	e_a
0	$1/(1+K_p)$	∞	∞
1	0	T/K_v	∞
2	0	0	T^2/K_a
3	0	0	0

Sistemas realimentados

INDUSTRIALES ETSII | UPM

Unidad Docente Automática. Departamento Automática, Ing. Electrónica e Informática Indust.

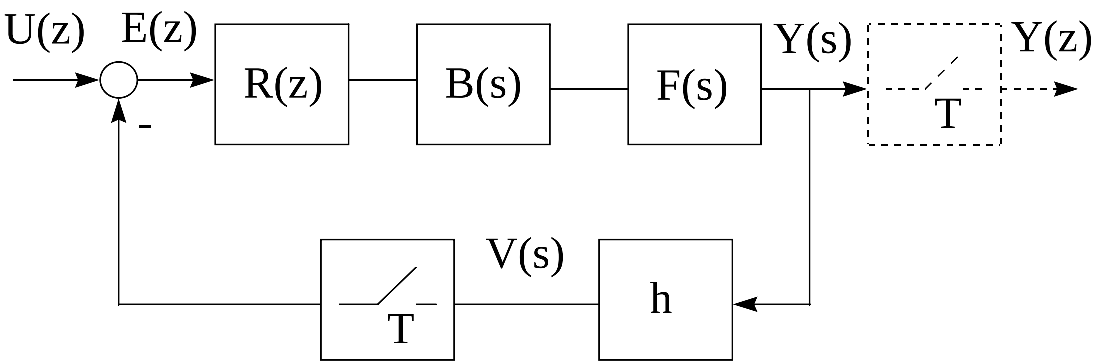
- Introducción
- Errores en régimen permanente
  - Tipo de un sistemas
  - Constantes de error
- Errores en sistemas con realimentación no unitaria
- Errores ante perturbaciones
- Técnica del lugar de las raíces
  - Propiedades de los puntos del lugar
  - Reglas de construcción

POLITÉCNICA

Errores en sistemas con realimentación no unitaria

Una primera posibilidad es que la realimentación se realice mediante una constante h no unitaria. El significado de esta constante es la conversión de unidades realizada en el captador; permite pasar de las unidades de la salida a las unidades de la entrada. No se puede comparar directamente ambas señales.

Parece adecuado definir la secuencia de error como $\{e_k\} = \{u_k\} - h\,\{y_k\}$

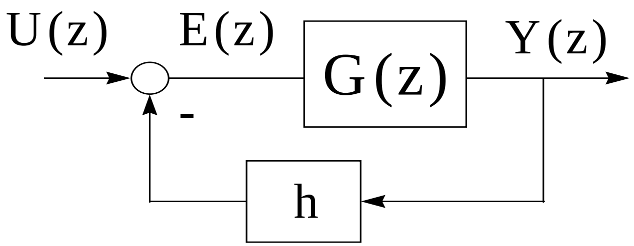


La función de transferencia del sistema será :

$$M(z) = \frac{R(z)BF(z)}{1+hR(z)BF(z)}$$

Si se sustituye $G(z) = R(z)BF(z)$

Será equivalente a : $M(z) = \dfrac{G(z)}{1+h\,G(z)}$



Errores en sistemas con realimentación no unitaria

La transformada en z de la secuencia de error será :

$$E(z) = U(z) - hY(z) = U(z) - h\frac{G(z)}{1+hG(z)}U(z) = \frac{1}{1+hG(z)}U(z)$$

Las expresiones de los errores en régimen permanente se modifican, quedando:

· Error de posición $e_p = \dfrac{1}{1+hK_p}$

· Error de velocidad $e_v = \dfrac{T}{hK_v}$

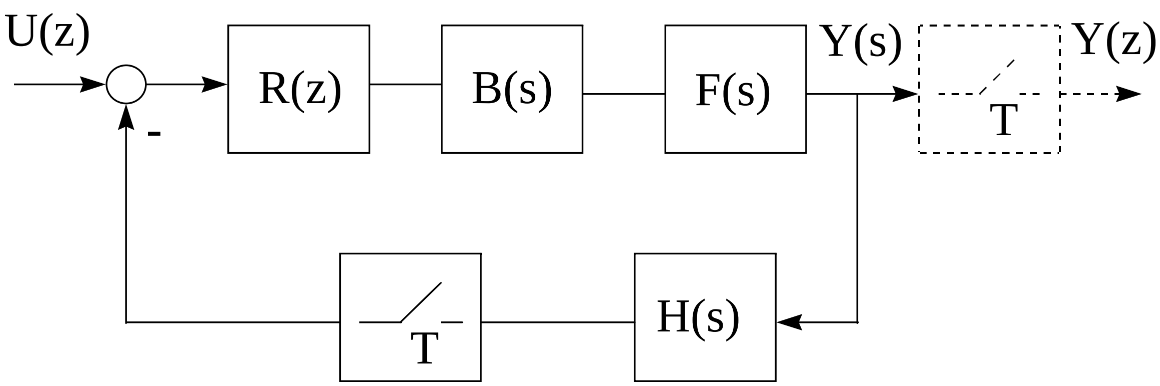
· Error de aceleración $e_a = \dfrac{T^2}{hK_a}$

Las relaciones errores-tipo se detallan en la tabla

Tipo	e_p	e_v	e_a
0	$1/(1+hK_p)$	∞	∞
1	0	$T/(h\,K_v)$	∞
2	0	0	$T^2/(h\,K_a)$
3	0	0	0

Errores en sistemas con realimentación no unitaria

La segunda posibilidad es cuando la realimentación posee una dinámica, es decir tiene una función de transferencia *H(s)* no constante. Esta dinámica afectará tanto al régimen permanente como al transitorio.

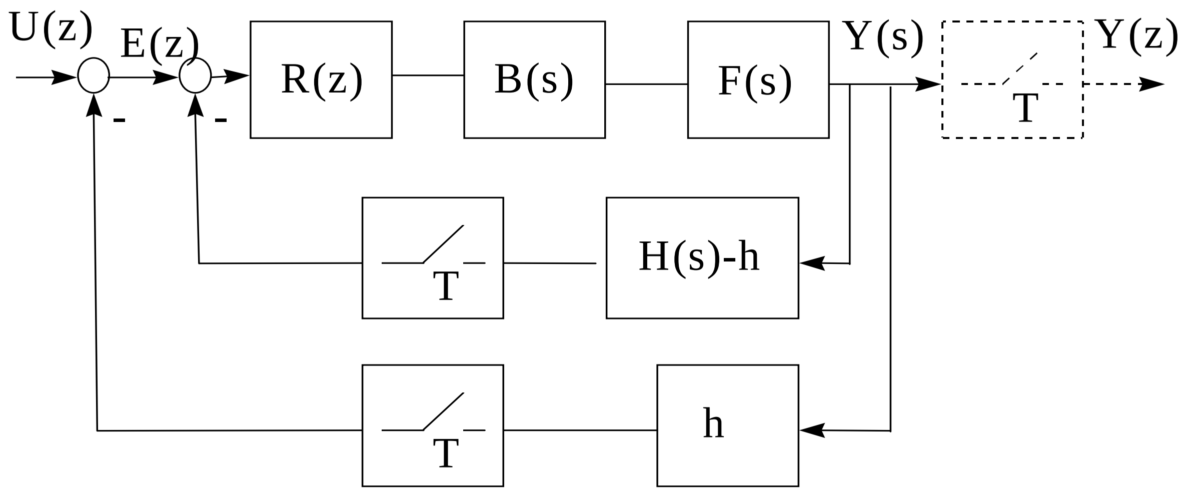


Lo correcto es comparar la entrada con la salida corregida por la ganancia estática del captador $h = [H(s)]_{s=0}$

Siendo la secuencia de error $\{e_k\} = \{u_k\} - h\,\{y_k\}$

Errores en sistemas con realimentación no unitaria

<u>La segunda posibilidad es cuando la realimentación posee una dinámica, es decir tiene una función de transferencia *H(s)* no constante</u>. A fin de homogenizar las fórmulas obtenidas para la realimentación no unitaria pero constante, se puede transformar el anterior diagrama, en el siguiente:



$$G(z) = \frac{R(z)BF(z)}{1 + R(z)BFH(z) - hR(z)BF(z)} \quad \text{siendo} \quad M(z) = \frac{G(z)}{1 + hG(z)}$$

Sistemas realimentados

- Introducción
- Errores en régimen permanente
  - Tipo de un sistemas
  - Constantes de error
- Errores en sistemas con realimentación no unitaria
- Errores ante perturbaciones
- Técnica del lugar de las raíces
  - Propiedades de los puntos del lugar
  - Reglas de construcción

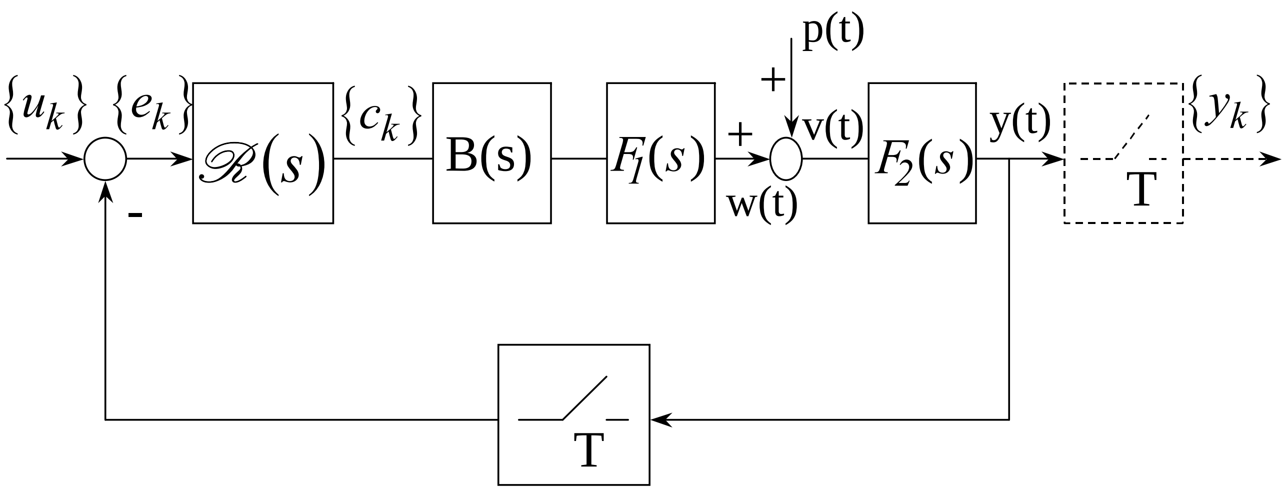
Errores ante perturbación

Capacidad de respuesta en régimen permanente de un sistema viene marcada:

• Error entre la salida obtenida y deseada

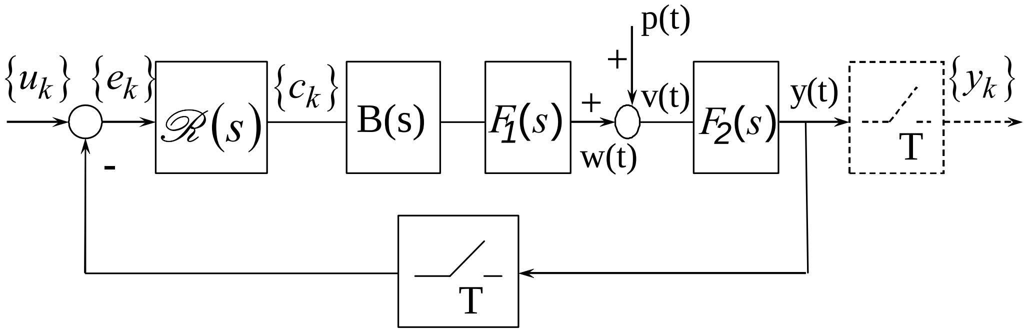
• Capacidad del sistema para eliminar el efecto de las perturbaciones sobre la salida

Un esquema de sistema realimentado de control con perturbación:



Donde la perturbación afecta a parte del sistema continuo.

Errores ante perturbación



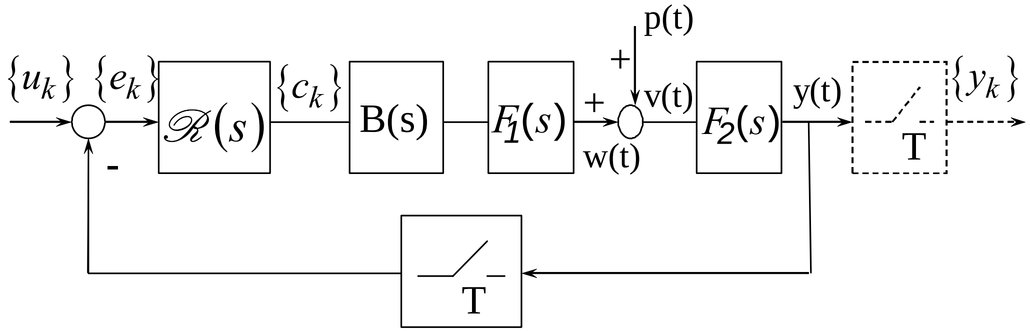
Es necesario destacar que:

•Supuesta la perturbación nula, entre la entrada y la salida hay función de transferencia.

•Supuesta la entrada nula, no existe función de transferencia entre la perturbación y la salida. Existirá una pérdida de información pues se muestrea una señal continua (*y(t)*) que depende de otra señal continua (*p(t)*) que no proviene de la reconstrucción de una secuencia.

Este segundo caso es el que se analiza en el presente apartado. Para realizar el análisis del error ante perturbaciones se puede aplicar el principio de superposición: se considera la entrada $\{u_k\}$ nula y se analiza la influencia de la perturbación sobre la salida, que en este caso coincide con la secuencia de error.

Errores ante perturbación



La salida ante la perturbación se obtiene de forma similar a como es obtuvo ante la secuencia entrada:

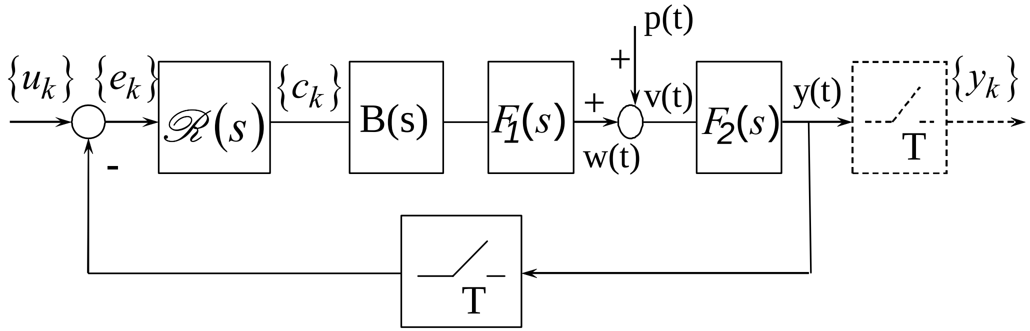
$$\mathscr{Y}(s)=\frac{1}{T}\sum_{r=-\infty}^{\infty}\left[F_2\left(s+j\frac{2\pi}{T}r\right)\left[P\left(s+j\frac{2\pi}{T}r\right)+W\left(s+j\frac{2\pi}{T}r\right)\right]\right]=$$

$$=\frac{1}{T}\sum_{r=-\infty}^{\infty}\left[F_2\left(s+j\frac{2\pi}{T}r\right)P\left(s+j\frac{2\pi}{T}r\right)\right]+\frac{1}{T}\sum_{r=-\infty}^{\infty}\left[F_2\left(s+j\frac{2\pi}{T}r\right)W\left(s+j\frac{2\pi}{T}r\right)\right]=$$

$$=\frac{1}{T}\sum_{r=-\infty}^{\infty}\left[F_2\left(s+j\frac{2\pi}{T}r\right)P\left(s+j\frac{2\pi}{T}r\right)\right]+$$

$$+\frac{1}{T}\sum_{r=-\infty}^{\infty}\left[F_2\left(s+j\frac{2\pi}{T}r\right)F_1\left(s+j\frac{2\pi}{T}r\right)B\left(s+j\frac{2\pi}{T}r\right)\mathscr{C}\left(s+j\frac{2\pi}{T}r\right)\right]=$$

Errores ante perturbación



$$
= \frac{1}{T}\sum_{r=-\infty}^{\infty}\left[F_2\left(s+j\frac{2\pi}{T}r\right)P\left(s+j\frac{2\pi}{T}r\right)\right]+
$$

$$
+\frac{1}{T}\left[\sum_{r=-\infty}^{\infty}\left[F_2\left(s+j\frac{2\pi}{T}r\right)F_1\left(s+j\frac{2\pi}{T}r\right)B\left(s+j\frac{2\pi}{T}r\right)\right]\right]\mathscr{C}(s)=
$$

Por lo que :
$$
\mathscr{Y}(s)=\frac{1}{T}\sum_{r=-\infty}^{\infty}\left[F_2\left(s+j\frac{2\pi}{T}r\right)P\left(s+j\frac{2\pi}{T}r\right)\right]+\mathscr{B}\mathscr{F}_1\mathscr{F}_2(s)\mathscr{C}(s)
$$

Como
$$
\mathscr{C}(s)=-\mathscr{R}(s)\mathscr{Y}(s)
$$
se obtiene :
$$
\mathscr{Y}(s)=\frac{\frac{1}{T}\sum_{r=-\infty}^{\infty}\left[F_2\left(s+j\frac{2\pi}{T}r\right)P\left(s+j\frac{2\pi}{T}r\right)\right]}{1+\mathscr{B}\mathscr{F}_1\mathscr{F}_2(s)\mathscr{R}(s)}
$$

Errores ante perturbación

Al no ser *P(s)* periódica, no puede sacarse fuera del sumatorio, por lo que no existirá función de transferencia.

No obstante, para cada perturbación se puede hallar la salida. Para entrada escalón sería:

$$\mathscr{Y}(s)=\frac{\frac{1}{T}\sum_{r=-\infty}^{\infty}\left[F_2\left(s+j\frac{2\pi}{T}r\right)\Big/\left(s+j\frac{2\pi}{T}r\right)\right]}{1+\mathscr{B}\mathscr{F}_1\mathscr{F}_2(s)\mathscr{R}(s)}$$

O en transformada z :

$$Y(z)=\frac{Z\left[F_2(s)P(s)\right]}{1+R(z)\,BF_1F_2(z)}=\frac{Z\left[F_2(s)/s\right]}{1+R(z)\,BF_1F_2(z)}$$

Si el sistema es estable

$$y_\infty=\lim_{z\to 1}\left(1-z^{-1}\right)Y(z)$$

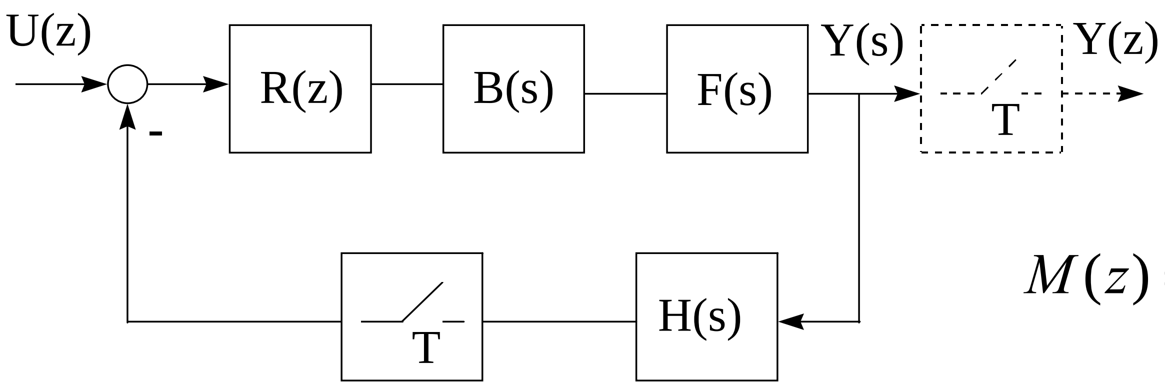
Si $R(z)$ ó $F_1(s)$ son de tipo 1, y el sistema es estable, ante entrada constante y perturbación en escalón la influencia de ésta en régimen permanente será nula, pues las entradas a los bloques integradores o sumatorios deben de ser nulas. Por contra el tipo del sistema $F_2(s)$ no anula el error ante esta perturbación ya que el que $v(t)$ sea nula no supone que lo sea el error.

Sistemas realimentados

- Introducción
- Errores en régimen permanente
  - Tipo de un sistemas
  - Constantes de error
- Errores en sistemas con realimentación no unitaria
- Errores ante perturbaciones
- Técnica del lugar de las raíces
  - Propiedades de los puntos del lugar
  - Reglas de construcción

Técnica del lugar de la raíces

Estudio del comportamiento dinámico de los sistemas realimentados: viene determinado por la posición de los polos y ceros en cadena cerrada. Para el sistema



$$M(z) = \frac{R(z)BF(z)}{1 + R(z)BFH(z)}$$

Los ceros de $M(z)$ serán: los ceros de $R(z)\ BF(z)$ y los polos de $BFH(z)$ que no estén en $BF(z)$. Su obtención es inmediata a partir de los datos en cadena abierta.

Los polos de $M(z)$ vendrán dados por la resolución de la ecuación característica: $1 + R(z)BFH(z) = 0$

Técnica del lugar de la raíces

Polos de $M(z) \quad \Rightarrow \quad 1 + R(z)BFH(z) = 0$

Si se expresa : $G(z) = R(z)BFH(z) = K \dfrac{\prod_{i=1}^{M}(z - z_i)}{\prod_{i=1}^{N}(z - p_i)}$

Que se puede poner : $\prod_{i=1}^{N}(z - p_i) + K\prod_{i=1}^{M}(z - z_i) = 0$

Su obtención se complica si existe algún parámetro que pueda variar. Para un mejor conocimiento de la posición de los polos, se emplea *La técnica del lugar de las raíces*: es un método gráfico que permite el cálculo de la posición de los polos del sistema realimentado, en función de uno de sus parámetros. El más usual es el parámetro K, dibujándose el lugar geométrico de los puntos del plano que verifican la ecuación característica para $0 \le K < \infty$. Para cualquier otro parámetro, siempre se va a poder obtener una ecuación similar.

El lugar de las raíces es una herramienta de idéntica construcción para sistemas continuos y discretos. Sólo cambia la interpretación de la posición de las raíces.

Técnica del lugar de la raíces

Propiedades de los puntos del lugar

La ecuación característica se puede expresar como

$$K = -\frac{\prod_{i=1}^{N}(z-p_i)}{\prod_{i=1}^{M}(z-z_i)}$$

de la que se deduce las siguientes propiedades:

1) Criterio del módulo: Si un punto del plano z pertenece al lugar de las raíces, el valor del parámetro *K* correspondiente se determina por:

$$K = \frac{\prod_{i=1}^{N}\left|z-p_i\right|}{\prod_{i=1}^{M}\left|z-z_i\right|}$$

2) Criterio del argumento: un punto del plano z pertenece al lugar de las raíces si y sólo si los argumentos de los segmentos que unen el punto con los polos y ceros verifican para un *r* entero:

$$\sum_{i=1}^{N}\angle(z-p_i)-\sum_{i=1}^{M}\angle(z-z_i)=(2r+1)\pi$$

Técnica del lugar de la raíces

Reglas de construcción

Reglas que se aplican para la construcción del lugar de las raíces cuando $0 \leq K < \infty$

a) El número de ramas independientes del lugar de las raíces es igual al número de polos de la función de transferencia en bucle abierto $G(z)$.

b) Cada rama comienza, para $K=0$, en un polo de $G(z)$ y termina, para $K=\infty$, en un cero de $G(z)$. Si es distinto el número de polos del número de ceros de $G(z)$ habrá ramas que partan o terminen en puntos del infinito.

c) Un punto del eje real pertenecerá al lugar de las raíces si el número de polos y ceros reales situados a su derecha es impar.

d) El lugar de las raíces es simétrico respecto al eje real.

e) El número de ramas que terminan en el infinito es la diferencia entre polos y ceros de $G(z)$ $\Rightarrow$ $d=N-M$ estas ramas son asintóticas, para grandes valores de K, con rectas cuyos ángulos con el eje real son:

$$\theta = \frac{(2r+1)\pi}{d} \quad \text{con} \quad r = 0, 1, \ldots, d-1$$

Técnica del lugar de la raíces

Reglas de construcción

f) Todas las asíntotas se cortan en un punto del eje real, denominado centroide, determinado por:

$$\sigma_c = \frac{\sum p_i - \sum z_i}{d}$$

g) Ángulos de salida de los polos y llegada a los ceros:

$$\theta_{p_j} = \sum_{i=1}^{M} \angle p_j - z_i - \sum_{i=1; i\neq j}^{M} \angle p_j - z_i + (2r+1)\pi$$

$$\theta_{z_j} = \sum_{i=1}^{N} \angle z_j - p_i - \sum_{i=1; i\neq j}^{M} \angle z_j - z_i + (2r+1)\pi$$

h) Los puntos de dispersión y confluencia de ramas son las soluciones de:

$$\frac{dK}{dz} = \frac{d}{dz}\left[-\frac{\prod_{i=1}^{N}(z-p_i)}{\prod_{i=1}^{M}(z-z_i)} \right] = 0$$