Control por Computador

Unidad Docente Automática. Departamento Automática, Ing. Electrónica e Informática Indust.

Muestreo y Reconstrucción

José María Sebastián

Rafael Aracil

Manuel Ferre

Departamento de Automática, Ingeniería Electrónica e Informática Industrial

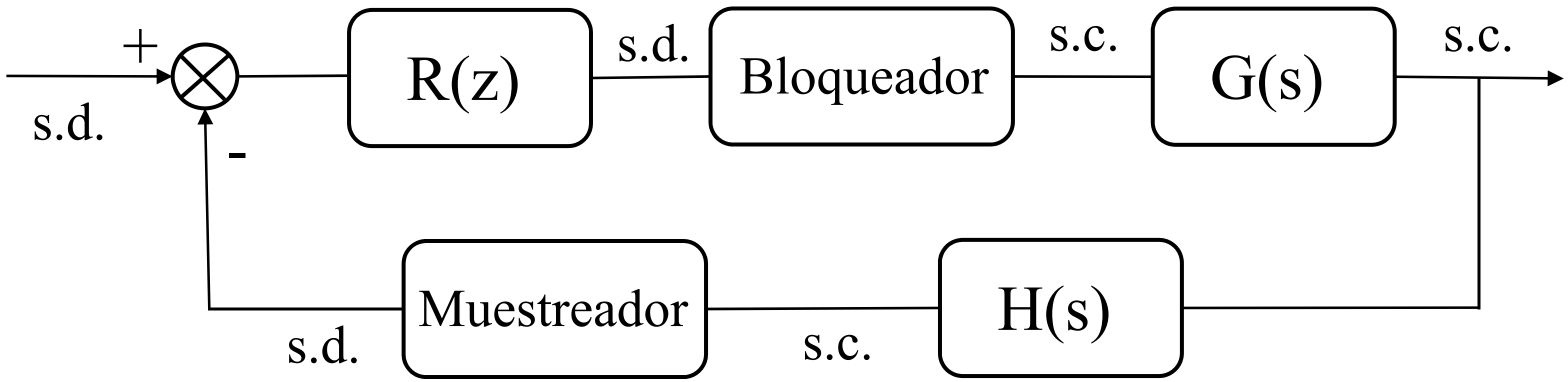
POLITÉCNICA

Muestreo y Reconstrucción

- Introducción
- Muestreo de señales
- Estudio frecuencial del muestreo
- Teorema del muestreo
- Sistemas híbridos
- Reconstrucción ideal
- Bloqueadores causales
  - Bloqueadores de orden cero
  - Bloqueadores de orden uno

Introducción

Sistema discreto de control



Elementos:

- Sistemas continuos: G(S) , H(S)
- Sistema discreto: R(z)
- Muestreador. Muestreo: es la toma de muestras de una señal continua en sucesivos instantes de tiempo.
- Bloqueador. Reconstrucción: es la generación de una señal continua a partir de una secuencia.

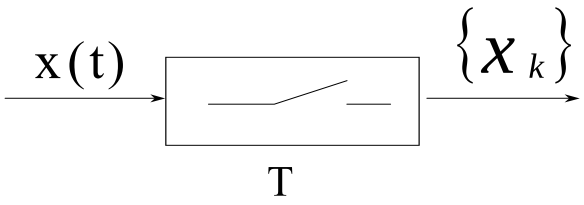
Muestreo y Reconstrucción

- Introducción
- Muestreo de señales
- Estudio frecuencial del muestreo
- Teorema del muestreo
- Sistemas híbridos
- Reconstrucción ideal
- Bloqueadores causales
  - Bloqueadores de orden cero
  - Bloqueadores de orden uno

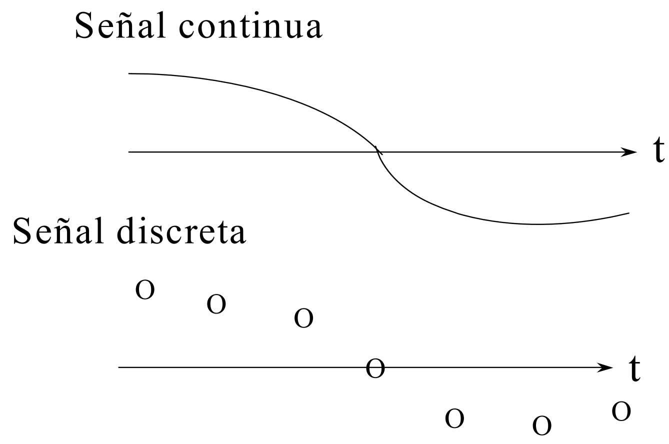
Muestreo de señales

Problema: se produce una pérdida de información

MUESTREADOR



$$x_k = x(kT)$$



Periodo de muestreo periódico T

Problemática

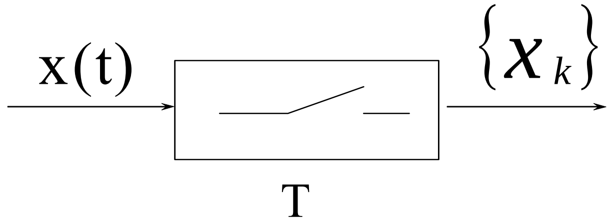
- Condiciones de la señal, para que con una T determinada, no se produzca pérdida de información.
- Para una señal determinada, valores de T para que no se produzca perdida de información.

Muestreo y Reconstrucción

- Introducción
- Muestreo de señales
- Estudio frecuencial del muestreo
- Teorema del muestreo
- Sistemas híbridos
- Reconstrucción ideal
- Bloqueadores causales
  - Bloqueadores de orden cero
  - Bloqueadores de orden uno

Estudio frecuencial del muestreo

MUESTREADOR



$$x_k = x(kT)$$

Transformada de Fourier de la señal continua

$$X(w) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t) e^{-jwt} dt \quad \Leftrightarrow \quad x(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} X(w) e^{jwt} dw$$

Transformada de Fourier de la señal discreta

$$\mathscr{X}(w) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x_k e^{-jwkT} \quad \Leftrightarrow \quad x_k = \frac{T}{2\pi} \int_{-\pi/T}^{\pi/T} \mathscr{X}(w)\, e^{jwkT} dw$$

¿Existirá alguna relación entre $X(w)$ y $\mathscr{X}(w)$?

Estudio frecuencial del muestreo

Particularizando la expresión de $x(t)$ en función de $X(w)$ para el instante $t=kT$

$$x_k = x(kT) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} X(w)\, e^{jwkT}\, dw$$

Dividiendo el intervalo de integración, entre $-\infty$ e ∞, en tramos de longitud $2\pi/T$

$$x_k = \frac{1}{2\pi}\sum_{r=-\infty}^{\infty} \int_{\frac{(2r-1)\pi}{T}}^{\frac{(2r+1)\pi}{T}} X(w)\, e^{jwkT}\, dw$$

Realizando el cambio:

$$w = \hat{w} + \frac{2\pi r}{T}$$

Estudio frecuencial del muestreo

$$x_k = \frac{1}{2\pi} \sum_{r=-\infty}^{\infty} \int_{\frac{(2r-1)\pi}{T}}^{\frac{(2r+1)\pi}{T}} X(w) e^{jwkT} dw \qquad w = \hat{w} + \frac{2\pi r}{T}$$

La anterior ecuación sufrirá las siguientes variaciones

$$w_2 = \frac{(2r+1)\pi}{T} \Rightarrow \hat{w}_2 + \frac{2\pi r}{T} = \frac{2\pi r + \pi}{T} \Rightarrow \hat{w}_2 = \frac{\pi}{T}$$

$$w_1 = \frac{(2r-1)\pi}{T} \Rightarrow \hat{w}_1 + \frac{2\pi r}{T} = \frac{2\pi r - \pi}{T} \Rightarrow \hat{w}_1 = -\frac{\pi}{T}$$

$$X(w) = X\left(\hat{w} + \frac{2\pi r}{T}\right) \quad ; \quad dw = d\hat{w}$$

$$e^{jwkT} = e^{j(\hat{w}+\frac{2\pi r}{T})kT} = e^{j\hat{w}kT} e^{j2\pi rk} = e^{j\hat{w}kT}$$

Estudio frecuencial del muestreo

Por lo que quedará

$$x_k = \frac{1}{2\pi} \sum_{r=-\infty}^{\infty} \int_{-\frac{\pi}{T}}^{\frac{\pi}{T}} X\left(\hat{w} + \frac{2\pi r}{T}\right) e^{j\hat{w}kT} d\hat{w}$$

Intercambiando el sumatorio y la integral

$$x_k = \frac{1}{2\pi} \int_{-\frac{\pi}{T}}^{\frac{\pi}{T}} \left[\sum_{r=-\infty}^{\infty} X\left(\hat{w} + \frac{2\pi r}{T}\right)\right] e^{j\hat{w}kT} d\hat{w}$$

Comparándola con la expresión ya hallada de x_k

$$x_k = \frac{T}{2\pi} \int_{-\pi/T}^{\pi/T} \mathscr{X}(w) e^{jwkT} dw$$

Se deduce que

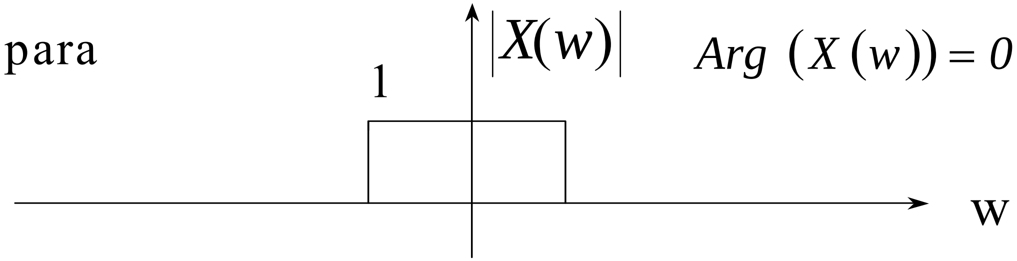
$$\mathscr{X}(w) = \frac{1}{T} \sum_{r=-\infty}^{\infty} X\left(w + \frac{2\pi r}{T}\right)$$

POLITÉCNICA

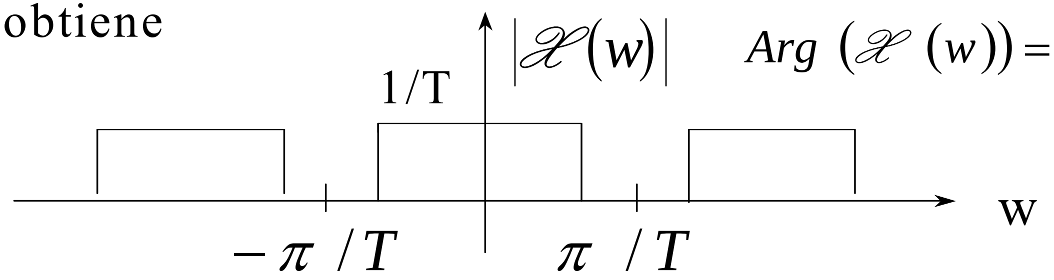
Estudio frecuencial del muestreo

Así para

$$\boxed{\mathscr{X}(w) = \frac{1}{T}\sum_{r=-\infty}^{\infty} X\left(w + \frac{2\pi r}{T}\right)}$$



Se obtiene



Una conclusión importante es que no existe una función de transferencia entre las dos secuencias

$$X(w) \neq G(w)\mathscr{X}(w)$$

Igualmente se puede obtener la relación entre las transformadas de Laplace de la señal continua y de la secuencia procedente del muestreo:

$$\mathscr{X}(s) = \frac{1}{T}\sum_{r=-\infty}^{\infty} X\left(s + j\frac{2\pi r}{T}\right)$$

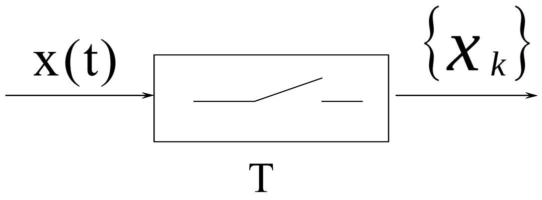
POLITÉCNICA

Muestreo y Reconstrucción

- Introducción
- Muestreo de señales
- Estudio frecuencial del muestreo
- Teorema del muestreo
- Sistemas híbridos
- Reconstrucción ideal
- Bloqueadores causales
  - Bloqueadores de orden cero
  - Bloqueadores de orden uno

Teorema del muestreo

MUESTREADOR

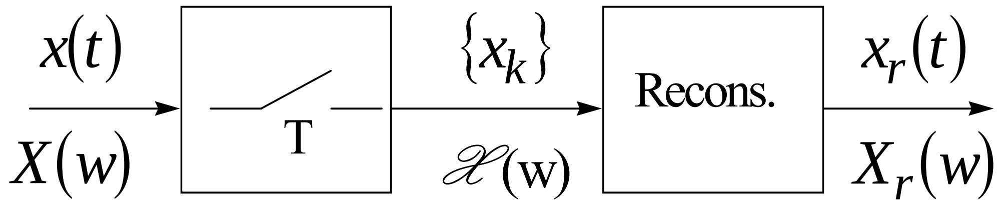


$$x_k = x(kT)$$

Problema: se produce una pérdida de información

- Condiciones de la señal, para que con una *T* determinada, no se produzca pérdida de información.
- Para una señal determinada, valores de *T* para que no se produzca perdida de información.

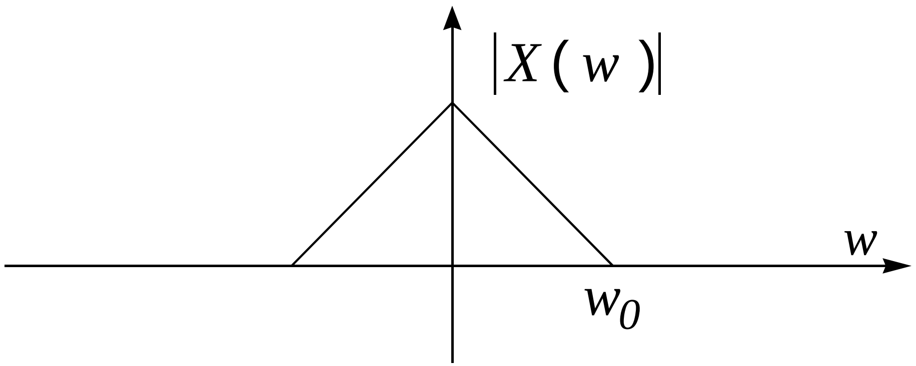
Una idea intuitiva para que no se produzca pérdida de información, es que a partir de la secuencia sea posible reconstruir la señal continua



$$x(t) \cong x_r(t) \quad \Leftrightarrow \quad X(w) \cong X_r(w)$$

Teorema del muestreo

Idea intuitiva: Sea una señal $x(t)$ de “banda limitada”: señal continua $x(t)$ con transformada de Fourier $X(w)$ que sea nula a partir de una determinada frecuencia w_0 $\longrightarrow$ $X(w)=0$ para $|w|>w_0$

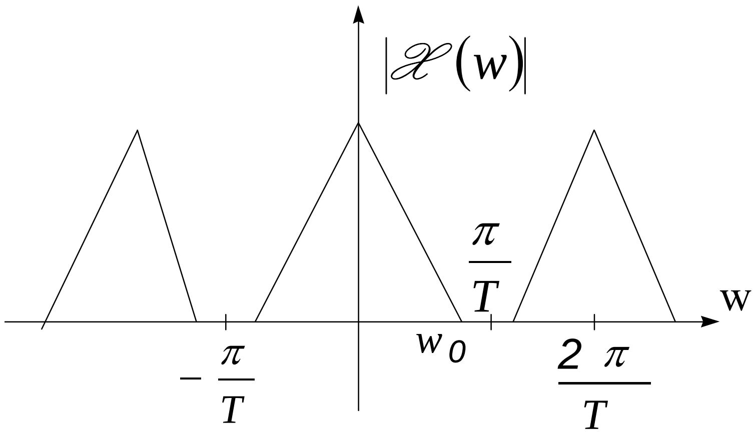


$$\angle X(w)=0$$

Teorema del muestreo

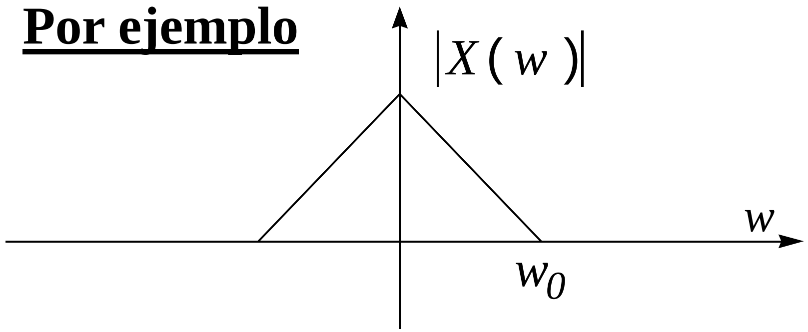
Si esta señal se muestrea con un período que verifique:

$$\frac{2\pi}{T} > 2w_0 \quad \Rightarrow \quad T < \frac{\pi}{w_0}$$



$$\angle \mathscr{X}(w) = 0$$

Por ejemplo



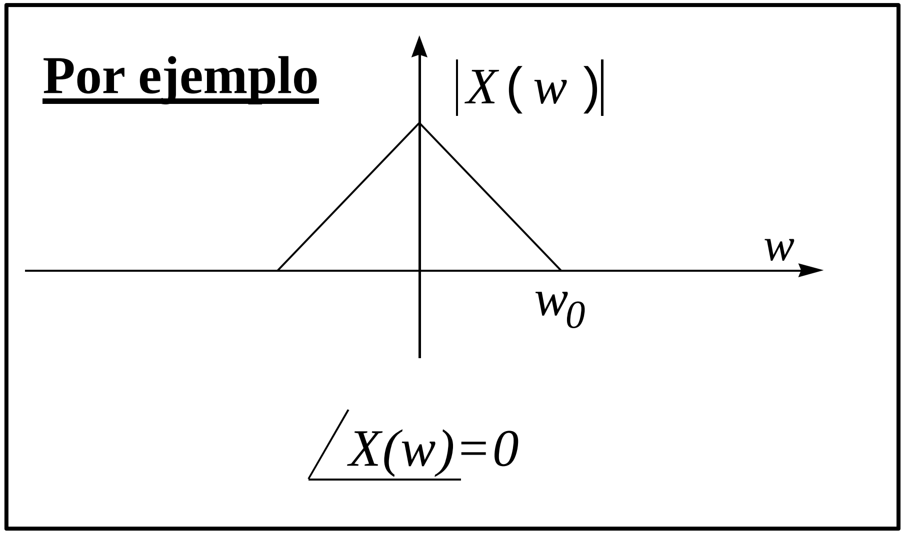
$$\angle X(w) = 0$$

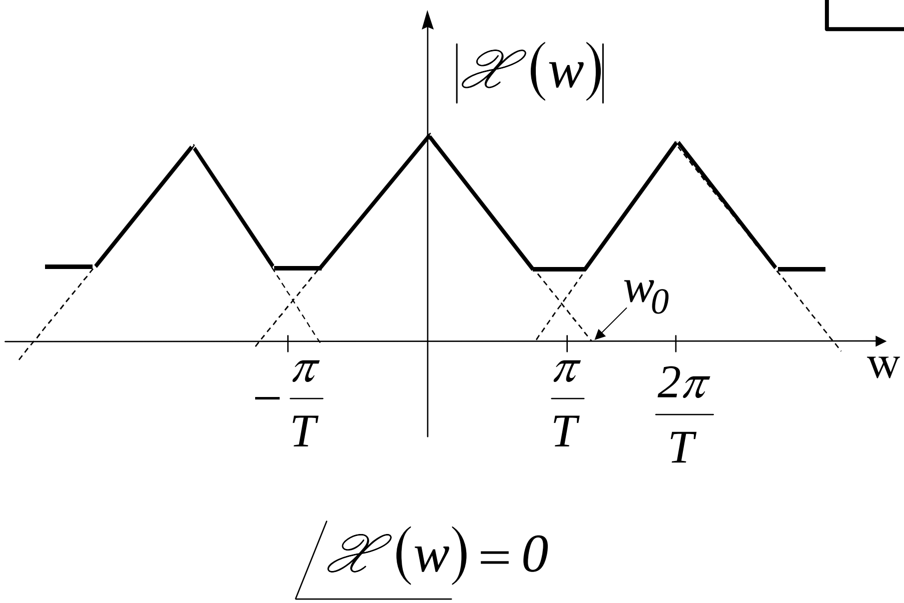
Se observa que la transformada de Fourier de la secuencia mantiene la misma forma que la de la señal continua (simplemente se repite), por lo que teóricamente será posible reconstruir (aislándola) la señal

Teorema del muestreo

Si por contra esta señal se muestrea con un período que no verifique la anterior condición:

$$T > \frac{\pi}{w_0}$$





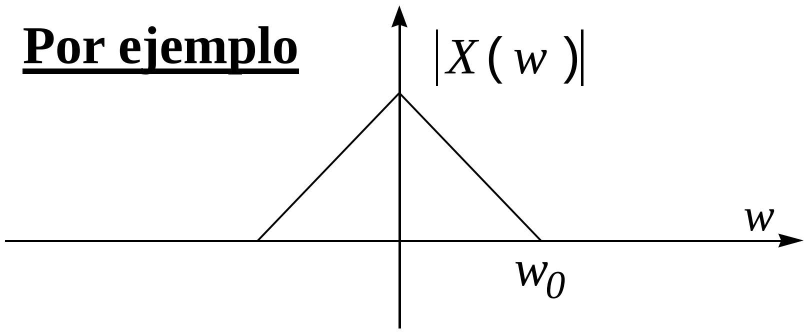
Se aprecia como por culpa del solapamiento la transformada de Fourier de la secuencia muestreada ya no conserva la forma original de la transformada de Fourier de la señal continua, por lo que no será posible su reconstrucción. Hay una pérdida de información.

Teorema del muestreo

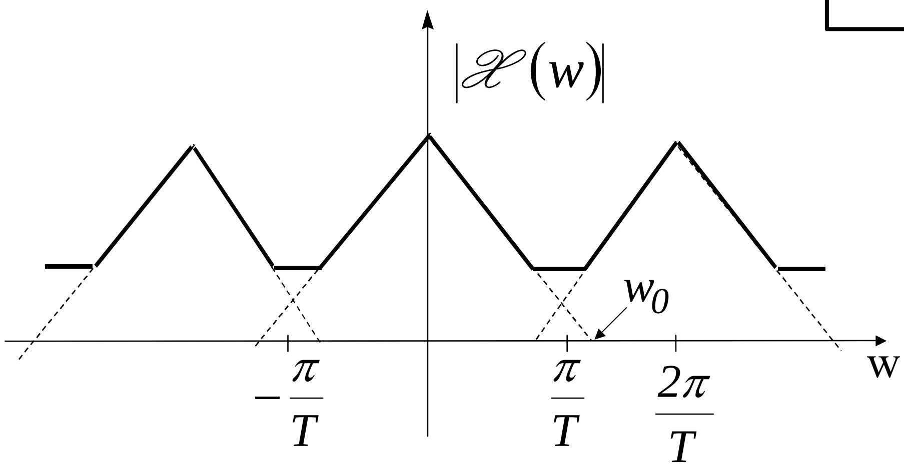
Si por contra esta señal se muestrea con un período que no verifique la anterior condición:

$$T > \frac{\pi}{w_0}$$

Por ejemplo



$$\angle X(w) = 0$$



$$\angle \mathscr{X}(w) = 0$$

A esta misma situación se llega si la señal continua no es de banda limitada, pues entonces siempre existirá solape entre las réplicas de la señal continua.

Teorema del muestreo

<u>Teorema del muestreo</u>: Si una señal continua $x(t)$ tiene transformada de Fourier $X(w)$, cumpliendo que $X(w)=0$ para valores $|w|>w_0$, entonces dicha señal estará completamente determinada por la secuencia $\{x_k\}$ obtenida por muestreo de la misma con periodo $T = \frac{\pi}{w_0}$

En general las señales muestreadas son las salidas de sistemas físicos, cuya transformada de Fourier tenderán a cero según aumenta la frecuencia (aunque estrictamente sea distinta de cero). Por tal motivo será necesario llegar a un compromiso entre un periodo muy estricto (con un mayor coste) o un periodo menos exigente (con una pérdida de información).

Un criterio aproximado puede ser: $T = \frac{\pi}{w_0} \approx \frac{\pi}{30\ B} \approx \frac{1}{10\ B}$

Siendo B el ancho de banda de la señal.

Muestreo y Reconstrucción

- Introducción
- Muestreo de señales
- Estudio frecuencial del muestreo
- Teorema del muestreo
- Sistemas híbridos
- Reconstrucción ideal
- Bloqueadores causales
  - Bloqueadores de orden cero
  - Bloqueadores de orden uno

Sistemas híbridos

Se denomina <u>sistema híbrido</u> a aquel cuya entrada es una secuencia y cuya salida es una señal continua. Sólo se consideran los lineales e invariantes.

<u>Respuesta impulsional de un sistema híbrido</u>: salida $h(t)$ cuando la entrada es la secuencia impulso

La respuesta impulsional de un sistema híbrido caracteriza su comportamiento. Para cualquier entrada:

$$\{x_k\} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x_n \{\delta_{k-n}\}$$

Por linealidad, la salida será:

$$y(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x_n h(t - nT)$$

A esta expresión se la conoce como convolución híbrida

Sistemas híbridos

<u>Respuesta en frecuencia del sistema híbrido</u>: $H(w)$. Es la transformada de Fourier de la respuesta impulsional. Si se denomina a $\mathscr{X}(w)$ a la transformada de Fourier de la secuencia de entrada, y a $Y(w)$ a la transformada de Fourier de la señal de salida, se cumple:

$$Y(w) = H(w)\mathscr{X}(w)$$

Siendo $Y(w)$, $H(w)$ señales no periódicas.

Igualmente se cumple: $Y(s) = H(s)\mathscr{X}(s)$

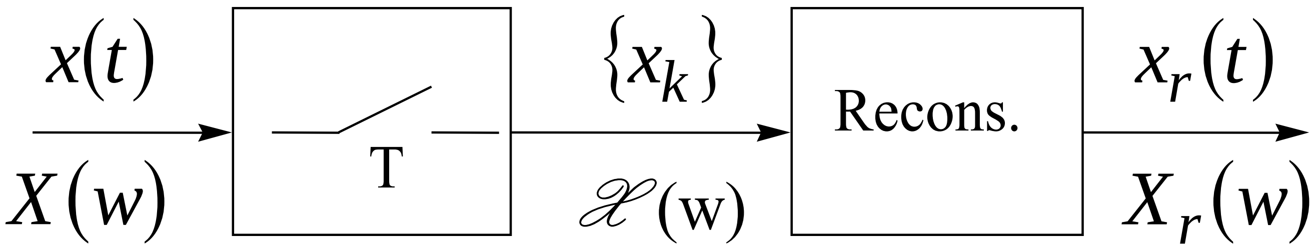
Muestreo y Reconstrucción

- Introducción
- Muestreo de señales
- Estudio frecuencial del muestreo
- Teorema del muestreo
- Sistemas híbridos
- Reconstrucción ideal
- Bloqueadores causales
  - Bloqueadores de orden cero
  - Bloqueadores de orden uno

POLITÉCNICA

Reconstrucción ideal

El objetivo de la reconstrucción es obtener un sistema híbrido (ver figura) que teniendo como entrada una secuencia $\{x_k\}$ obtenida por muestreo con periodo T de una señal $x(t)$, presente en la salida una señal $x_r(t)$ que sea idéntica o tenga el mayor parecido posible a la señal $x(t)$.

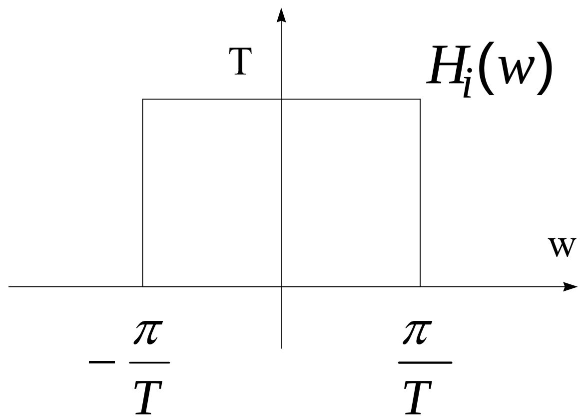


$$x(t) \cong x_r(t) \quad \Leftrightarrow \quad X(w) \cong X_r(w)$$

A dichos sistemas híbridos se les conoce como bloqueadores.

Reconstrucción ideal

Si se cumple el teorema del muestreo, la solución es sencilla. Vale con un sistema cuya respuesta en frecuencia sea la siguiente



A este tipo de bloqueadores se les conoce como bloqueadores ideales.

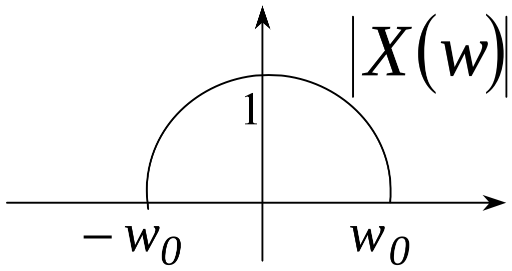
Así si la transformada de Fourier de la señal es $X(w)$, la transformada de la secuencia es $\mathscr{X}(w)$, y la transformada de la señal reconstruida es $X_r(w)$, se cumple

$$\mathscr{X}(w) = \frac{1}{T} \sum_{r=-\infty}^{\infty} X\left(w + \frac{2\pi r}{T} \right)$$

$$X_r(w) = H_i(w)\,\mathscr{X}(w)$$

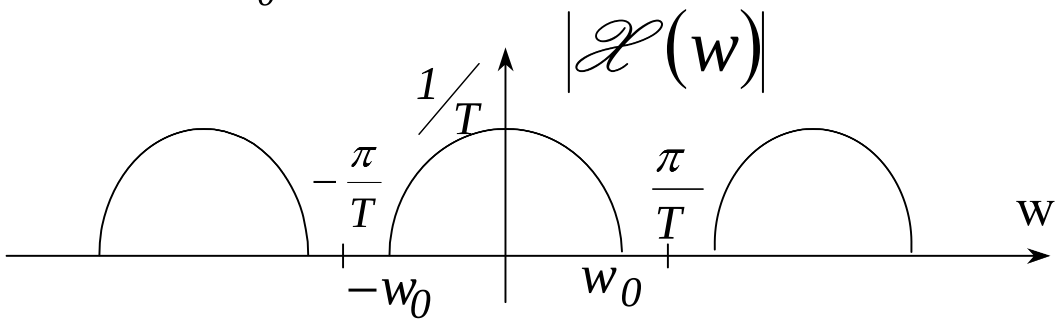
Reconstrucción ideal

Por ejemplo si X(w) es

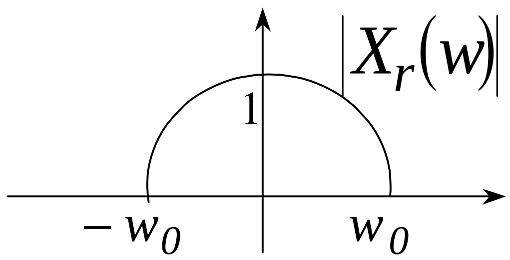


Al ser muestreada con

$$T < \frac{\pi}{w_0}$$



Y la reconstruida sería



Reconstrucción ideal

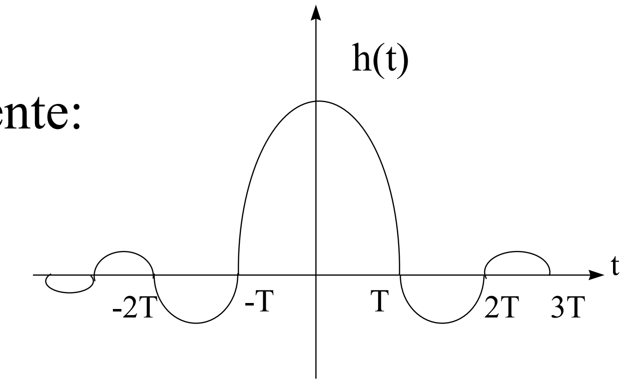
El bloqueador que realiza esta operación tendrá como función de transferencia:

$$H_i(w) = \begin{cases} T & \text{si} \quad |w| \leq \dfrac{\pi}{T} \\ 0 & \text{si} \quad |w| > \dfrac{\pi}{T} \end{cases}$$

La respuesta impulsional de este bloqueador, con transformada inversa de $H_i(w)$, es:

$$h_i(t) = \frac{\operatorname{sen} w_0 t}{w_0 t} \qquad \text{con} \quad w_0 = \frac{\pi}{T}$$

Su forma es la siguiente:



Reconstrucción ideal

De esta forma ante una secuencia de entrada $\{x_k\}$, la señal reconstruida según la fórmula de convolución híbrida sería $x_r(t)$:

$$x_r(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x_n \frac{\operatorname{sen} w_0 (t - nT)}{w_0 (t - nT)}$$

La señal continua se obtiene sumando estas funciones senoidales desplazadas, multiplicadas por los términos de la secuencia de entrada.

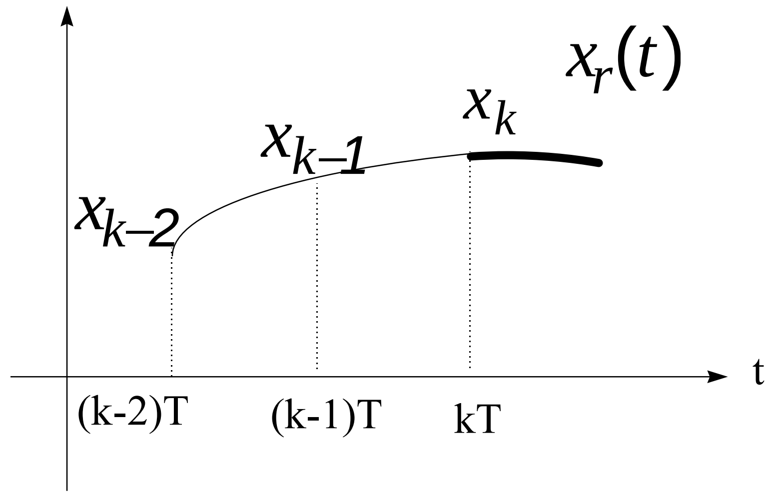
<u>Problema generado</u>: para obtener el valor de la señal de salida en el instante t , se necesita conocer todos los valores de la secuencia. Es un bloqueador no causal. Esto no es válido para los sistemas de control. Por este motivo se le conoce como bloqueador ideal.

Muestreo y Reconstrucción

- Introducción
- Muestreo de señales
- Estudio frecuencial del muestreo
- Teorema del muestreo
- Sistemas híbridos
- Reconstrucción ideal
- Bloqueadores causales
  - Bloqueadores de orden cero
  - Bloqueadores de orden uno

Bloqueadores causales

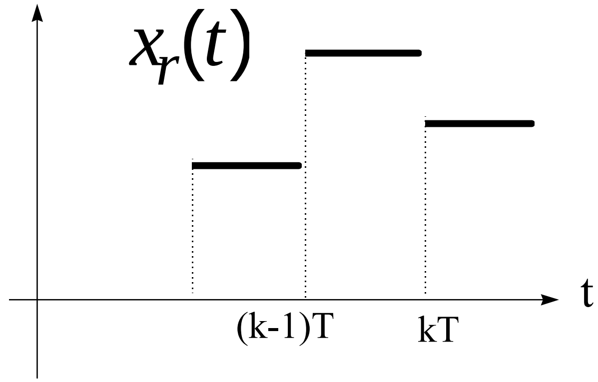
En sistemas de control es necesario que la reconstrucción en el instante t se realice sólo con la información de los valores de la secuencia correspondientes a instantes k tales que kT<t



Método: partiendo de un número determinado de valores de la secuencia de entrada, se interpola la curva que pasa por ellos. Esta curva es extrapolada en el periodo siguiente, originando la señal reconstruida.

Bloqueadores de orden cero

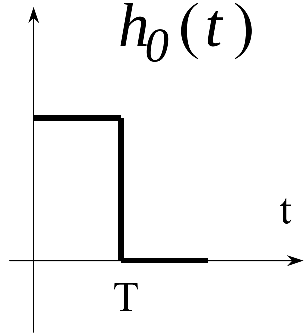
El bloqueador más sencillo es aquel que sólo considera el último valor de la secuencia de entrada



$$x_r(t) = x(kT) = x_k \quad en \quad [kT, (k+1)T)$$

Para calcular la función de transferencia del bloqueador, basta con calcular la transformada de Fourier de la respuesta impulsional. Será la salida ante la entrada secuencia impulso:

$$\{\delta_k\} = \{1, 0, 0, 0, \ldots\}$$



$$h_0(t) = \begin{cases} 0 & t < 0 \\ 1 & 0 \le t < T \\ 0 & t \ge T \end{cases}$$

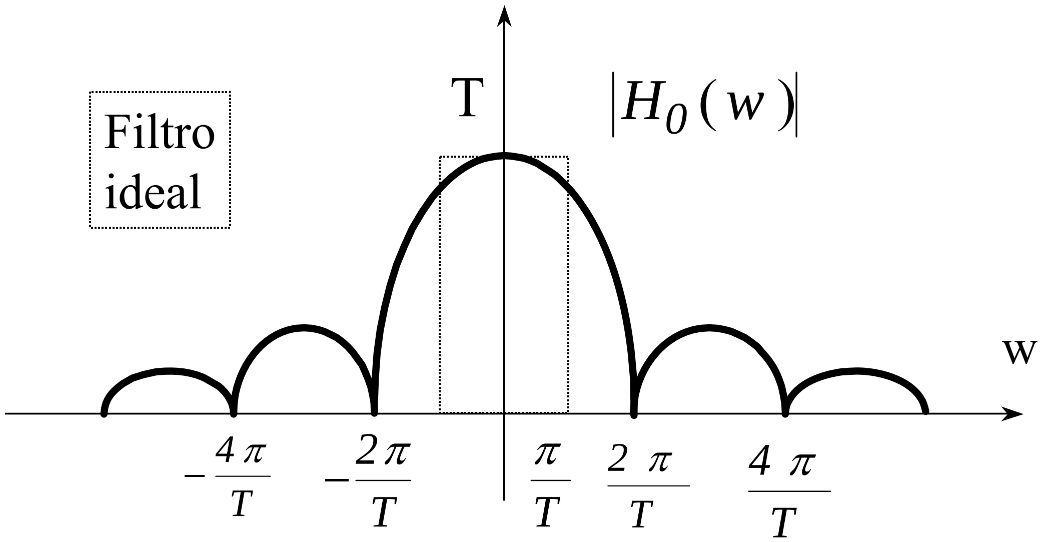
Bloqueadores de orden cero

La transformada de Fourier de la respuesta impulsional será:

$$H_0(w) = \int_{-\infty}^{\infty} h(t) e^{-jwt} dt = \int_0^T e^{-jwt} dt = \left[-\frac{e^{-jwt}}{jw} \right]_0^T = \frac{1 - e^{-jwT}}{jw}$$

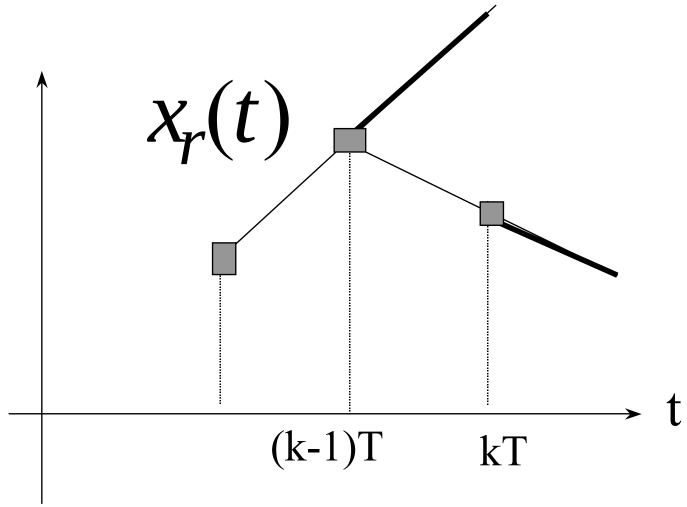
Que se corresponde con la función de transferencia del bloqueador, relación entre las transformadas de la señal continua de salida y la secuencia de entrada. Tiene como representación gráfica:

En la figura se aprecia que el bloqueador no selecciona de una forma exacta la función básica de la transformada de la secuencia, si no que deja pasar armónicos de frecuencias superiores que distorsionan la señal.



Bloqueadores de orden uno

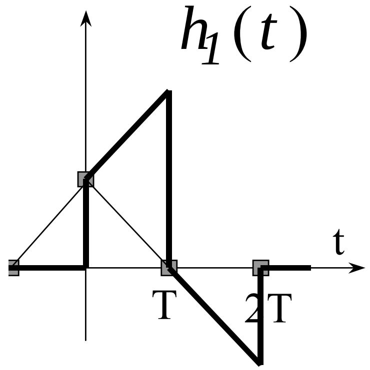
El siguiente bloqueador en complejidad es aquel que sólo utiliza las dos últimas muestras. Halla la recta que pasa por las dos últimas muestras y extrapola el resultado al intervalo considerado



$$x_r(t) = x(kT) + \frac{x(kT) - x((k-1)T)}{T}(t - kT) \quad en \quad [kT, (k+1)T)$$

Para calcular la función de transferencia del bloqueador, basta con calcular la transformada de Fourier de la respuesta impulsional. Será la salida ante la entrada secuencia impulso:

$$\{\delta_k\} = \{1, 0, 0, 0, \ldots\}$$



$$h_1(t) = \begin{cases} 0 & t < 0 \\ \frac{1}{T}t + 1 & 0 \le t < T \\ -\frac{1}{T}t + 1 & T \le t < 2T \\ 0 & 2T \le t \end{cases}$$

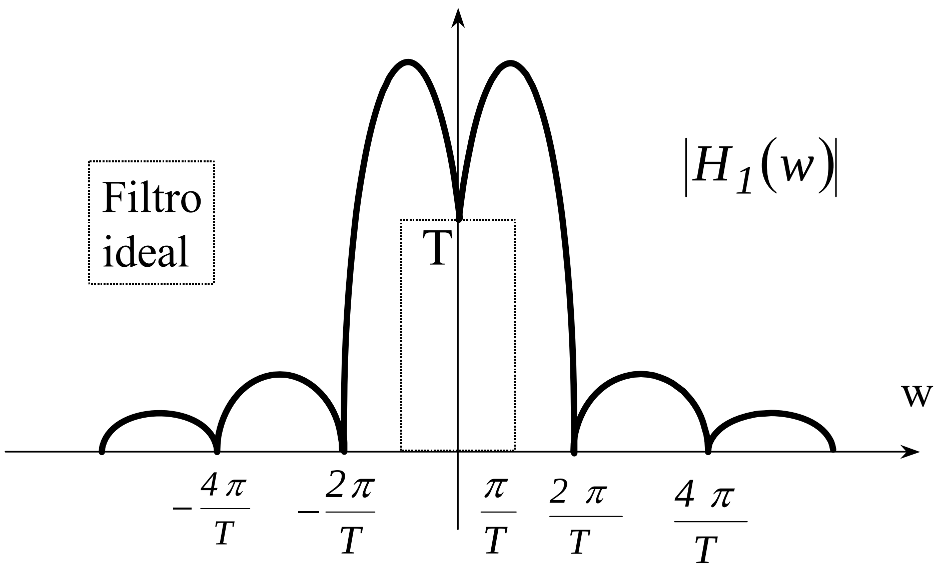
Bloqueadores de orden uno

La transformada de Fourier de la respuesta impulsional será:

$$H_1(w) = \int_{-\infty}^{\infty} h_1(t) e^{-jwt} dt = \int_0^T \left(\frac{1}{T} t + 1 \right) e^{-jwt} dt + \int_T^{2T} \left(-\frac{1}{T} t + 1 \right) e^{-jwt} dt$$

$$H_1(w) = \left(\frac{1 + jwT}{T} \right) \left(\frac{1 - e^{-jwT}}{jw} \right)^2$$

Esta es la función de transferencia del bloqueador, relación entre las transformadas de la señal continua de salida y la secuencia de entrada. Se aproxima más al bloqueador ideal que el de orden cero, aunque no resulta una mejora sustancial sobre aquel, como se aprecia en la figura.



Bloqueadores de orden cero y uno

En el transcurso de la asignatura se usarán las transformada de Laplace de los bloqueadores previamente definidos:

$$\text{Bloqueador de orden cero:} \qquad H_0(s) = \frac{1 - e^{-sT}}{s}$$

$$\text{Bloqueador de orden uno:} \qquad H_1(s) = \left(\frac{1 + sT}{T}\right)\left(\frac{1 - e^{-sT}}{s}\right)^2$$