Control por Computador

INDUSTRIALES
ETSII | UPM

Unidad Docente Automática. Departamento Automática, Ing. Electrónica e Informática Indust.

POLITÉCNICA

Identificación

José María Sebastián

Rafael Aracil

Manuel Ferre

Departamento de Automática, Ingeniería Electrónica e Informática Industrial

Identificación

- Introducción
- Identificación de sistemas con polos reales
- Métodos de los mínimos cuadrados
  - Planteamiento y resolución del problema
  - Algoritmo iterativo
  - Sistemas con parámetros variantes

Introducción

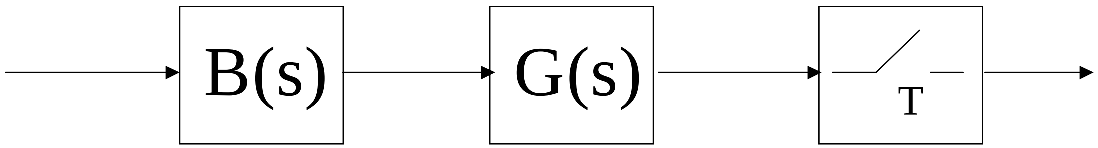
Identificación: proceso de construcción del modelo matemático de un sistema. Se puede realizar de dos formas:

•Con las leyes físicas de los procesos, construyendo con ellas ecuaciones diferenciales

•Con técnicas experimentales

Normalmente se asocia el término identificación a este segundo procedimiento.

En sistemas muestreados:



La identificación se puede realizar:

•Construyendo el modelo de $G(s)$ (el de $B(s)$ es conocido) con técnicas de identificación propias de los sistemas continuos.

•Obteniendo la función de transferencia $BG(z)$ del sistema discreto equivalente al esquema anterior.

Identificación

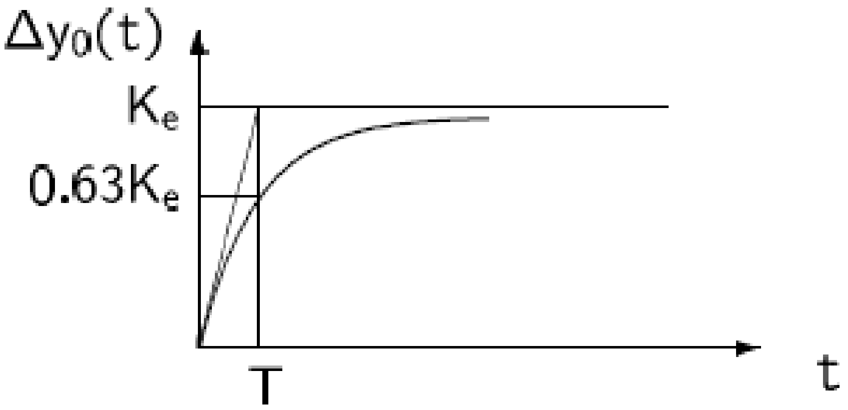
- Introducción
- Identificación de sistemas con polos reales
- Métodos de los mínimos cuadrados
  - Planteamiento y resolución del problema
  - Algoritmo iterativo
  - Sistemas con parámetros variantes

Identificación con polos reales

En la identificación se supone que es posible conocer la salida del sistema ante determinadas entradas (por ejemplo ante escalón unitario) de forma experimental. A partir de dicha salida, y suponiendo que se conoce la estructura del sistema (o se quiere asimilar a un sistema con una determinada estructura) es posible identificar las características del sistema de forma aproximada.

El proceso de identificación es realmente el inverso del de análisis: conocida la respuesta de un sistema ante una determinada señal, en general escalón, determinar la función de transferencia del mismo.

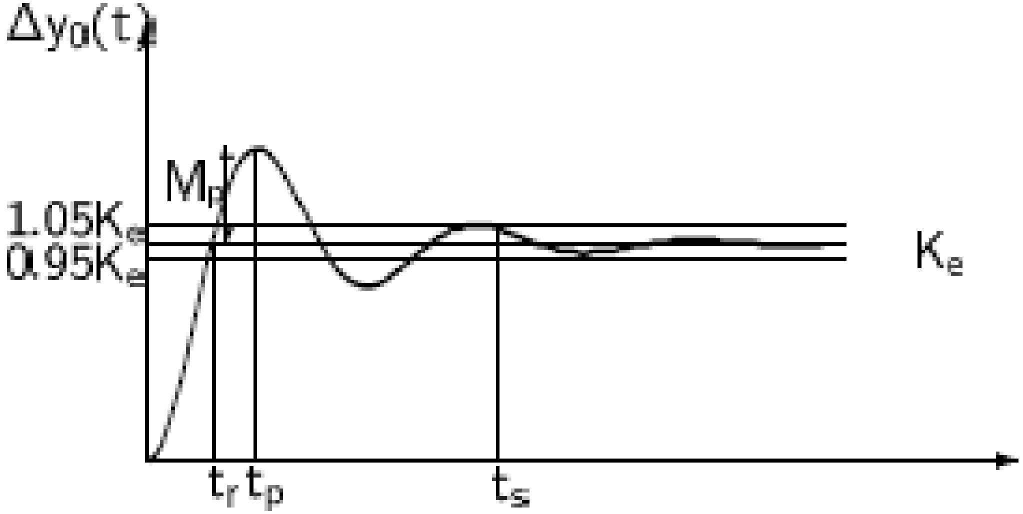
Así pues se hace uso de las conocidas respuestas de los sistemas de 1º y 2º orden ante un escalón y sus relaciones con los parámetros de la función de transferencia.



Sistema de primer orden

Identificación con polos reales

Sistema de segundo orden

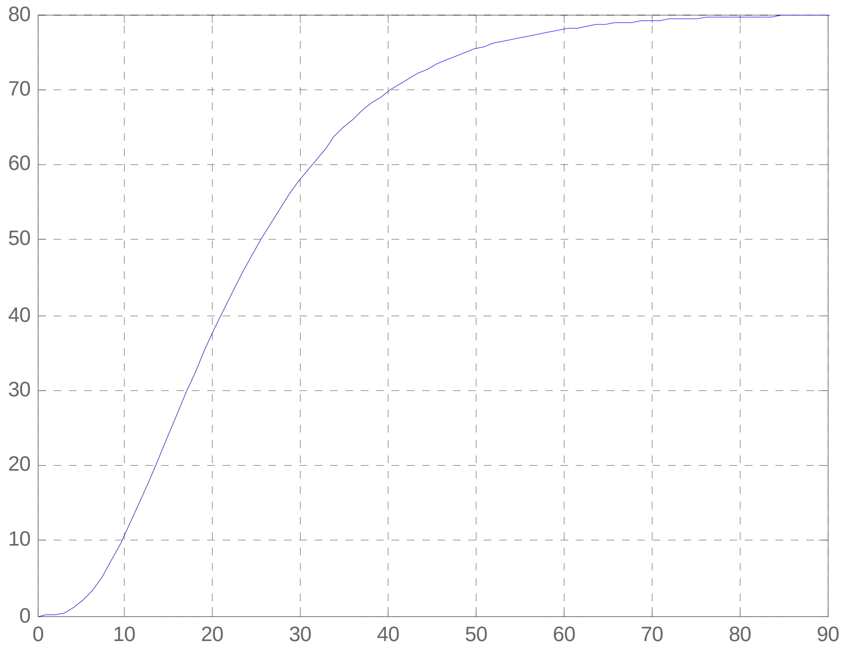


$$t_r = \frac{\pi - \theta}{w_d} \qquad t_p = \frac{\pi}{w_d} \qquad t_s \approx \frac{\pi}{\sigma}$$

$$M_p = e^{-\frac{\sigma\pi}{w_d}}\,100\% = e^{-\frac{\pi}{tg\,\theta}}\,100\% = e^{-\sigma t_p}\,100\% = e^{-\frac{\zeta\pi}{\sqrt{1-\zeta^2}}}\,100\%$$

Identificación con polos reales

Existe una mayoría de procesos reales que tienen un comportamiento sobreamortiguado en el que su respuesta a un escalón no responde a la indicada para los sistemas de 1º orden. Se trata de respuestas del tipo:



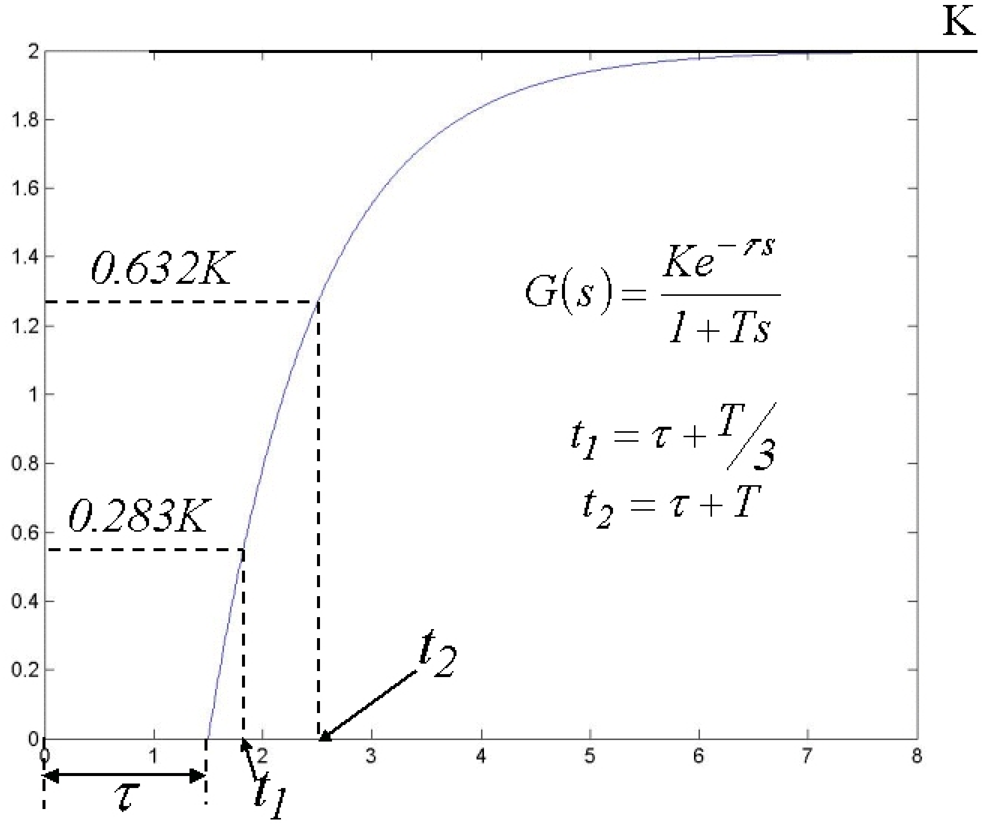
Para su identificación se utilizan funciones de transferencia más complejas

Identificación con polos reales

Una primera es:

$$G(s)=\frac{Ke^{-\tau s}}{1+Ts}$$

Su salida ante entrada escalón cumplirá:



En el ejemplo de la figura:

$$K=2 \quad \Rightarrow$$

$$\begin{cases} 0.632K=1.264 & \Rightarrow \quad t_2=2.5 \\ 0.283K=0.566 & \Rightarrow \quad t_1=1.83 \end{cases}$$

$$t_2-t_1=2\frac{T}{3} \quad \Rightarrow \quad T=1 \quad ; \quad \tau=t_2-T=1.5$$

Luego:

$$G(s)=\frac{2e^{-1.5\,s}}{1+s}$$

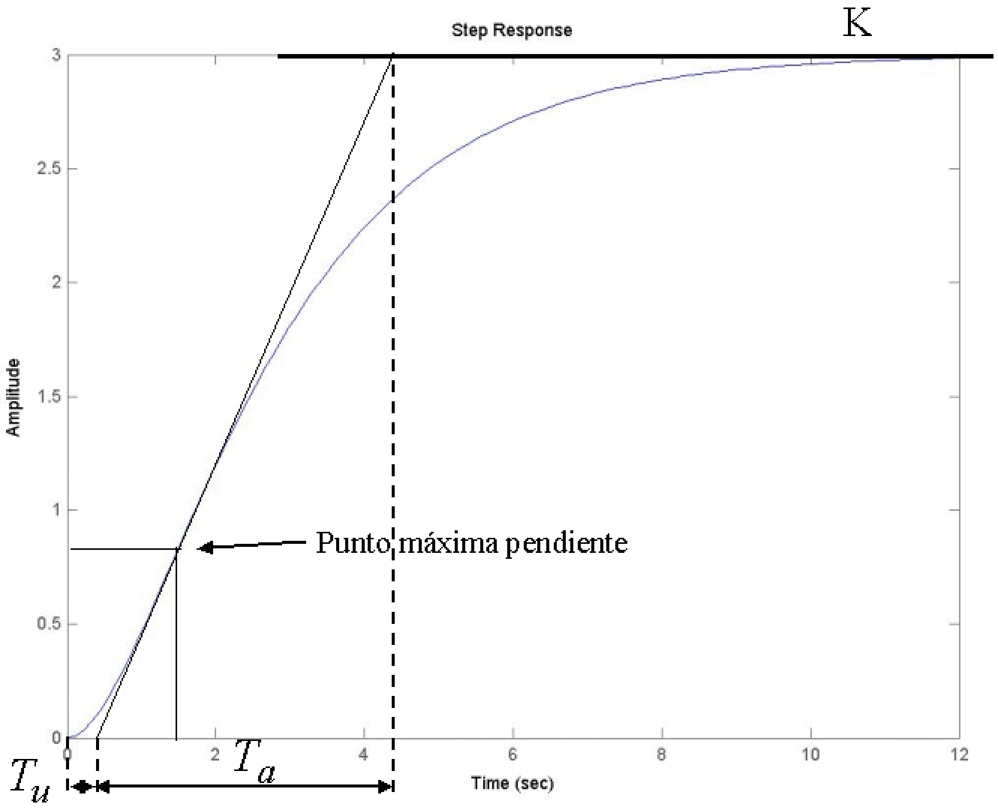
Identificación con polos reales

Una segunda opción es utilizar un modelo de segundo orden con polos reales:

$$G(s) = \frac{K}{(1+T_1 s)(1+T_2 s)}$$

T_2/T_1	T_a/T_1	T_a/T_u
0.99	2.70	9.65
1.11	2.87	9.66
1.2	2.99	9.70
2.0	4.00	10.36
3.0	5.20	11.50
4.0	6.35	12.73
5.0	7.48	13.97
6.0	8.59	15.22
7.0	9.68	16.45
8.0	10.77	17.67
9.0	11.85	18.89
10.0	12.92	20.09

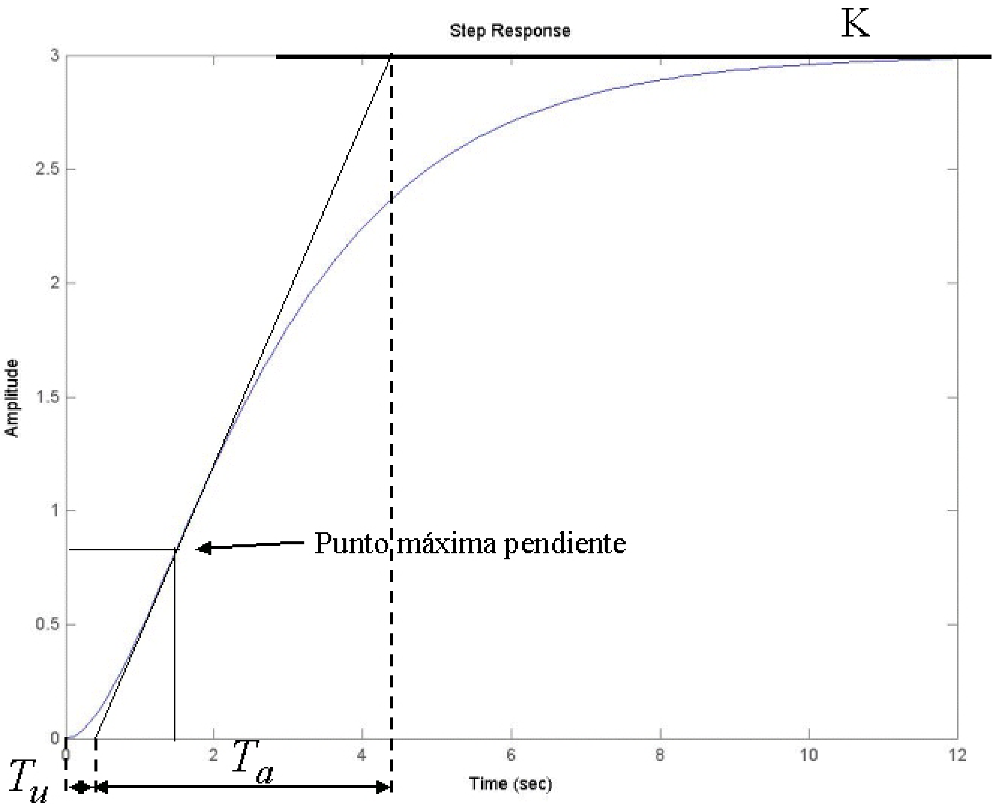
Su salida ante entrada escalón cumplirá:



Esta respuesta se ha tabulado en función de T_a y T_u

Identificación con polos reales

T_2/T_1	T_a/T_1	T_a/T_u
0.99	2.70	9.65
1.11	2.87	9.66
1.2	2.99	9.70
2.0	4.00	10.36
3.0	5.20	11.50
4.0	6.35	12.73
5.0	7.48	13.97
6.0	8.59	15.22
7.0	9.68	16.45
8.0	10.77	17.67
9.0	11.85	18.89
10.0	12.92	20.09



El proceso a seguir es

- Se calcula el valor final $K=3$
- Se mide $T_u=0,39$ y $T_a= 4$
- Se calcula $T_a / T_u=10.26$
- Se elige $T_a / T_1=4.0 \Rightarrow T_1=1.0$
- Se elige $T_2 / T_1=2.0 \Rightarrow T_2=2.0$

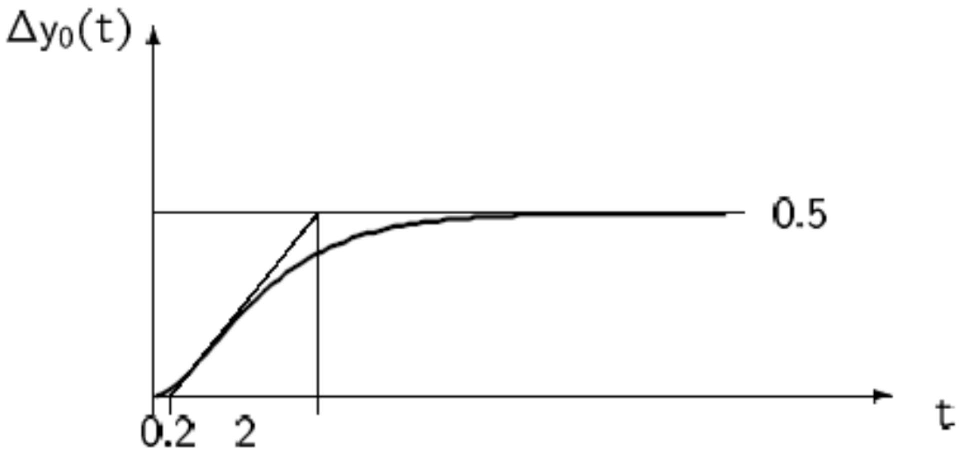
$$\Rightarrow \quad G(s)=\frac{3}{(1+s)(1+2s)}$$

POLITÉCNICA

Identificación con polos reales

Si el cociente T_a/T_u difiere de manera importante con los elementos de la última columna habrá que hacer una interpolación entre los valores de las dos filas adyacentes a este valor.

Por ejemplo →



Obteniéndose como medidas características:

$$K = 0.5$$

$$T_u = 0.2\ sg \quad ; \quad T_a = 2\ sg$$

Se obtiene por tanto la relación $$\frac{T_a}{T_u} = \frac{2}{0.2} = 10 \geq 9.65$$

Interpolación:

T_2/T_1	T_a/T_1	T_a/T_u
1.2	2.99	9.70
1.56	3.45	10.0
2.0	4.00	10.36

Obteniéndose que

$$T_1 = \frac{2}{3.45} = 0.58 \quad ; \quad T_2 = 1.56 \cdot 0.58 = 0.90$$

Identificación con polos reales

Obsérvese que la tabla indicada cubre valores de T_a/T_u superiores a 9,65, situación que corresponde a un sistema con los dos polos iguales. Para valores de este cociente inferiores, el modelo de un sistema con dos polos reales no es válido para este propósito y hay que ir a otro.

Se suele tomar

$$G(s) = \frac{K}{(1+T\,s)^n}$$

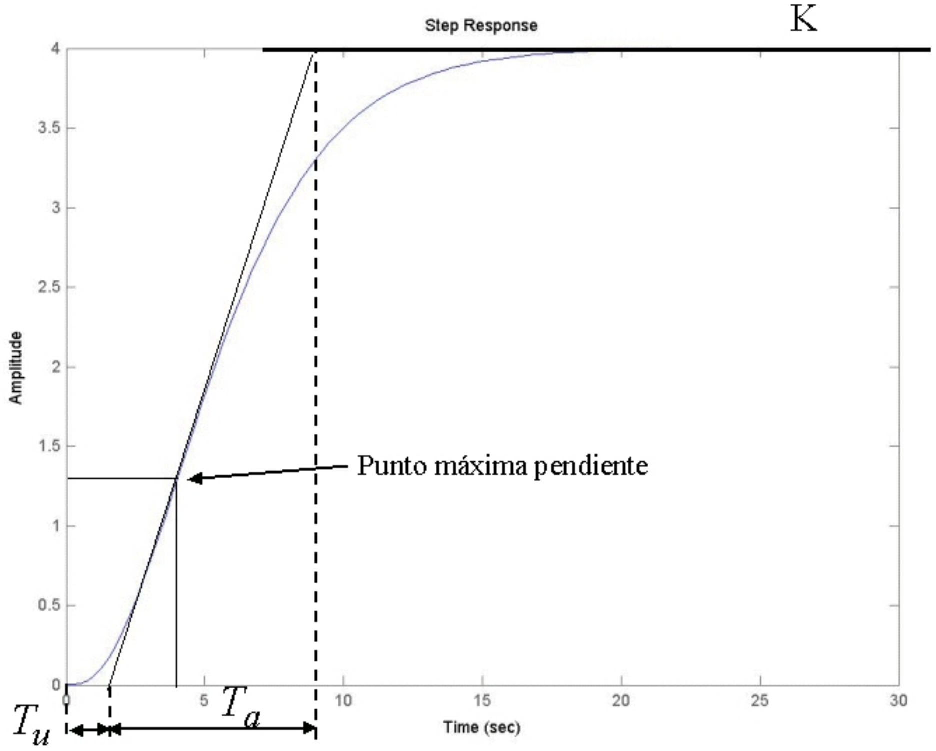
En este caso la tabla a considerar es otra:

n	T_a/T	T_u/T	T_a/T_u
1	1	0	∞
2	2.718	0.282	9.65
3	3.695	0.805	4.59
4	4.463	1.425	3.13
5	5.119	2.100	2.44
6	5.699	2.811	2.03
7	6.226	3.549	1.75
8	6.711	4.307	1.56
9	7.164	5.081	1.41
10	7.590	5.869	1.29

Identificación con polos reales

Como ejemplo de uso de este procedimiento, considérese la respuesta

n	T_a/T	T_u/T	T_a/T_u
1	1	0	∞
2	2.718	0.282	9.65
3	3.695	0.805	4.59
4	4.463	1.425	3.13
5	5.119	2.100	2.44
6	5.699	2.811	2.03
7	6.226	3.549	1.75
8	6.711	4.307	1.56
9	7.164	5.081	1.41
10	7.590	5.869	1.29



El procedimiento sería

- Se calcula el valor final $K=4$
- Se mide $T_u=1.6$ y $T_a=7.35$
- Se calcula $T_a/T_u=4{,}59$
- Se elige n=3 y $T_a/T=3.695 \Rightarrow T=2.001$

$$\boxed{\text{Por tanto: } G(s)=\frac{4}{(1+2s)^3}}$$

POLITÉCNICA

Identificación con polos reales

En este caso no es posible inerpolar entre filas si el cociente T_a/T_u difiere de manera importante con los elementos de la última columna ya que *n* tiene que ser entero. Cuando esto ocurra se va a una función de transferencia de la forma:

$$G(s) = \frac{Ke^{-\tau s}}{(1+T\,s)^n}$$

es decir se presupone que el sistema tiene un retardo puro τ. Este retardo restará del valor de T_u medido de tal manera que esta medida se puede descomponer en dos $T_u = \tau + \tilde{T}_u$

En este caso a la tabla se entrará con $T_a / \tilde{T}_u$

Así si, por ejemplo se mide $K=4$, $T_u=0.9$ y $T_a=2.1$, la operativa sería

- Se calcula $T_a / T_u = 2.33$
- Se elige $T_a / \tilde{T}_u = 2.44$ (valor superior)
- Se obtiene $n = 5$, $T_a / T = 5.12 \quad \rightarrow \quad T = 0.4$
- En la misma fila se lee $\tilde{T}_u / T = 2.1 \rightarrow \quad \tilde{T}_u = 0.86$
- Se calcula $\tau = T_u - \tilde{T}_u = 0.04$

La función identificada será:

$$G(s) = \frac{4e^{-0.04s}}{(1+0.41s)^5}$$

Identificación

- Introducción
- Identificación de sistemas con polos reales
- Métodos de los mínimos cuadrados
  - Planteamiento y resolución del problema
  - Algoritmo iterativo
  - Sistemas con parámetros variantes

Métodos de los mínimos cuadrados

Este método, quizás el más utilizado, permite calcular directamente la función de transferencia $BG(z)$ a partir de un registro de las secuencias de entrada y salida del sistema $\{u_k\}$ e $\{y_k\}$.

Se fundamenta en la ecuación en diferencias del sistema :

$$y_k + a_1 y_{k-1} + \cdots + a_n y_{k-n} = b_1 u_{k-1} + \cdots + b_m u_{k-m}$$

El objetivo del método es a partir de las secuencias citadas obtener el valor de los elementos del vector de parámetros

$$\theta = \left[a_1, \cdots, a_n, b_1, \cdots, b_m\right]$$

que mejor hagan verificarse la ecuación anterior.

Planteamiento y resolución del problema

Para cada k se define el error de la ecuación:

$$\varepsilon_k = y_k + a_1 y_{k-1} + \cdots + a_n y_{k-n} - b_1 u_{k-1} - \cdots - b_m u_{k-m}$$

Asociado a este error se define el índice:

$$J = \sum_{k=1}^{N} \varepsilon_k^2$$

Se elige el θ que minimice el anterior índice.

A fin de poder estimar estos parámetros, se forma un sistema con el error en las diversas muestras (en concreto N). Partiendo de la ecuación:

$$\varepsilon_k = y_k - \left[-a_1 y_{k-1} - \cdots - a_n y_{k-n} + b_1 u_{k-1} + \cdots + b_m u_{k-m} \right]$$

Se obtiene el sistema:

Métodos de los mínimos cuadrados

Planteamiento y resolución del problema

$$\begin{bmatrix} \varepsilon_1 \\ \vdots \\ \varepsilon_N \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_N \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} -y_{1-1} & \cdots & -y_{1-n} & u_{1-1} & \cdots & u_{1-m} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ -y_{N-1} & \cdots & -y_{N-n} & u_{N-1} & \cdots & u_{N-m} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \\ b_1 \\ \vdots \\ b_m \end{bmatrix}$$

$$N \qquad\qquad N \qquad\qquad\qquad N\ _x (n+m) \qquad\qquad\qquad (n+m)$$

O en forma más compacta: $\vec{\Gamma}_N = \vec{Y}_N - \phi_N \vec{\theta}_N$

Si se representa $J = \vec{\Gamma}_N^T \vec{\Gamma}_N = \left[\vec{Y}_N{}^T - \vec{\theta}_N{}^T \Phi_N{}^T\right]\left[\vec{Y}_N - \Phi_N \vec{\theta}_N\right]$, entonces

$$\min\ J \quad \Rightarrow \quad \frac{\partial J}{\partial \theta} = 0 \quad \Rightarrow \quad -2\phi_N^T \left(\vec{Y}_N - \phi_N \vec{\theta}_N\right) = 0$$

Operando se obtiene la solución: $\vec{\theta}_N = \left[\phi_N^T \phi_N\right]^{-1} \phi_N^T \vec{Y}_N$

Métodos de los mínimos cuadrados

Algoritmo iterativo

El paso de *N* muestras a *N+1* no requiere el cálculo completo de la anterior fórmula, si se emplea un algoritmo iterativo.

Así si se emplea la notación: $\varphi_k^T = \begin{bmatrix} -y_{k-1} & \cdots & -y_{k-n} & u_{k-1} & \cdots & u_{k-m} \end{bmatrix}$

Entonces las nuevas matrices involucradas serán:

$$\phi_{k+1} = \begin{bmatrix} \phi_k \\ \varphi_{k+1}^T \end{bmatrix} \quad ; \quad \vec{Y}_{k+1} = \begin{bmatrix} \vec{Y}_k \\ y_{k+1} \end{bmatrix}$$

Y particularizando la expresión $\vec{\theta}_N = \left[\phi_N^T \phi_N\right]^{-1} \phi_N^T \vec{Y}_N$ para $k+1$

$$\vec{\theta}_{k+1} = \left[\begin{bmatrix} \phi_k \\ \varphi_{k+1}^T \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} \phi_k \\ \varphi_{k+1}^T \end{bmatrix} \right]^{-1} \begin{bmatrix} \phi_k \\ \varphi_{k+1}^T \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} \vec{Y}_k \\ y_{k+1} \end{bmatrix} \Rightarrow$$

$$\vec{\theta}_{k+1} = \left[\phi_k^T \phi_k + \varphi_{k+1} \varphi_{k+1}^T\right]^{-1} \begin{bmatrix} \phi_k^T & \varphi_{k+1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \vec{Y}_k \\ y_{k+1} \end{bmatrix}$$

POLITÉCNICA

Métodos de los mínimos cuadrados

Algoritmo iterativo

Y se llega a la expresión: $\vec{\theta}_{k+1} = \vec{\theta}_k + K_k \left[y_{k+1} - \varphi_{k+1}^T \vec{\theta}_k \right] = \vec{\theta}_k + K_k\, e_{k+1}$

Donde e_{k+1} representa el error de la ecuación cuando con los datos de la muestra $k+1$ se emplean los parámetros estimados en la anterior muestra.

La nueva matriz K_k se obtiene a partir de:

$$K_k = P_k\, \varphi_{k+1} \frac{1}{1 + \varphi_{k+1}^T P_k \varphi_{k+1}} \quad \text{con} \quad P_k = \left[\phi_k^T \phi_k \right]^{-1}$$

La matriz P_k se calcula de forma iterativa mediante la expresión:

$$P_{k+1} = P_k - \frac{P_k \varphi_{k+1}^T \varphi_{k+1} P_k}{1 + \varphi_{k+1}^T P_k \varphi_{k+1}}$$

Inicialziación del algoritmo iterativo: en ausencia de información acerca de los parámetros se elige: $\vec{\theta}_0 = 0 \quad ; \quad P_0 = cI$ siendo $c \approx 1000$

Métodos de los mínimos cuadrados

Algoritmo iterativo

RESUMEN:

$$\vec{\theta}_{k+1} = \vec{\theta}_k + K_k \left[y_{k+1} - \varphi_{k+1}^T \vec{\theta}_k \right]$$

$$K_k = P_k \, \varphi_{k+1} \frac{1}{1 + \varphi_{k+1}^T P_k \varphi_{k+1}}$$

$$P_{k+1} = P_k - \frac{P_k \varphi_{k+1}^T \varphi_{k+1} P_k}{1 + \varphi_{k+1}^T P_k \varphi_{k+1}}$$

Sistemas con parámetros variantes

El anterior algoritmo funciona correctamente para sistemas con parámetros fijos desconocidos, pero no es capaz de obtener parámetros que varían lentamente.

Para adaptar mejor los cálculos a estos sistemas se introducen algunas variantes como son la ponderación exponencial de los datos o factor de olvido.

Así el índice a minimizar se define como:

$$J = \sum_{k=1}^{N} \lambda^{N-k} \varepsilon_k^2$$

siendo λ el factor de olvido (varía entre 0.9 y 1.0)

La anterior expresión indica que según se adquieren nuevos datos, los más antiguos van perdiendo peso.

El algoritmo iterativo queda:

$$\vec{\theta}_{k+1} = \vec{\theta}_k + K_k \left[y_{k+1} - \varphi_{k+1}^T \vec{\theta}_k \right]$$

$$K_k = P_k \, \varphi_{k+1} \frac{1}{\lambda + \varphi_{k+1}^T P_k \varphi_{k+1}} \qquad P_{k+1} = \frac{1}{\lambda} \left[P_k - \frac{P_k \varphi_{k+1}^T \varphi_{k+1} P_k}{\lambda + \varphi_{k+1}^T P_k \varphi_{k+1}} \right]$$