Control por Computador

Discretización de reguladores continuos

José María Sebastián
Rafael Aracil
Manuel Ferre
Departamento de Automática, Ingeniería Electrónica e Informática Industrial

POLITÉCNICA

Discretización de reguladores continuos

- Introducción
- Métodos de discretización
- Métodos basados en la aproximación de la evolución temporal
- Discretización por integración numérica
  - Aproximación del operador derivada
  - Discretización por integración trapezoidal
- Reguladores PID discretos
- Elección del período de muestreo

Introducción

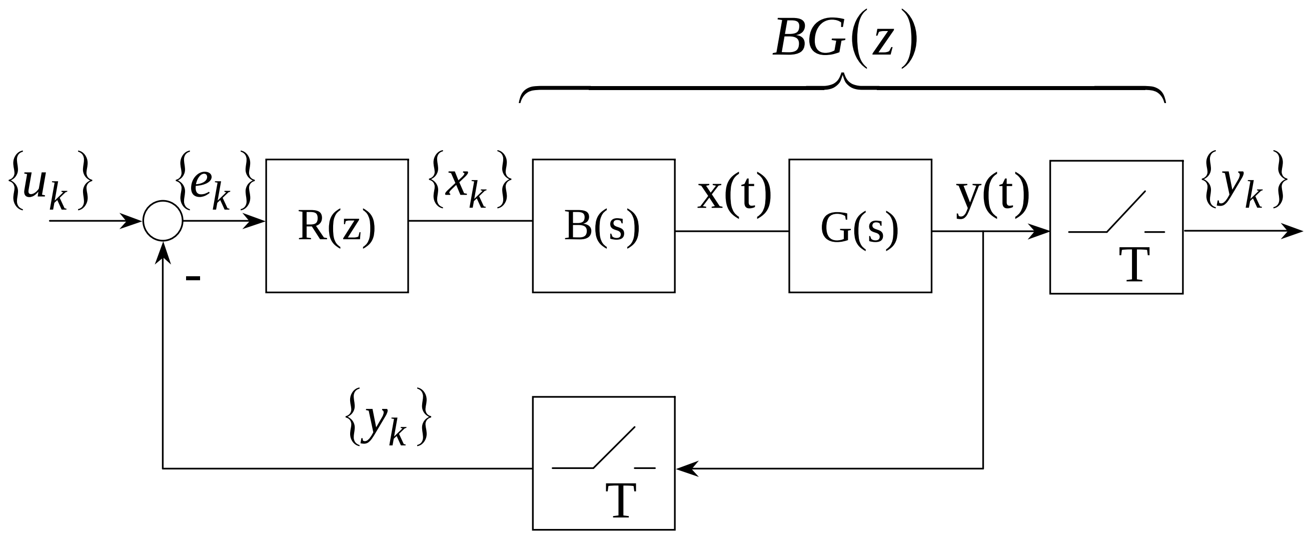
Datos para el diseño:

- Conocimiento del proceso
- Elección de los captadores y accionadores
- Periodo de muestreo del sistema de control
- Condiciones a imponer a la salida del sistema: régimen permanente y régimen transitorio

Introducción

Formas de abordar el diseño de un regulador para controlar con computador un sistema continuo:

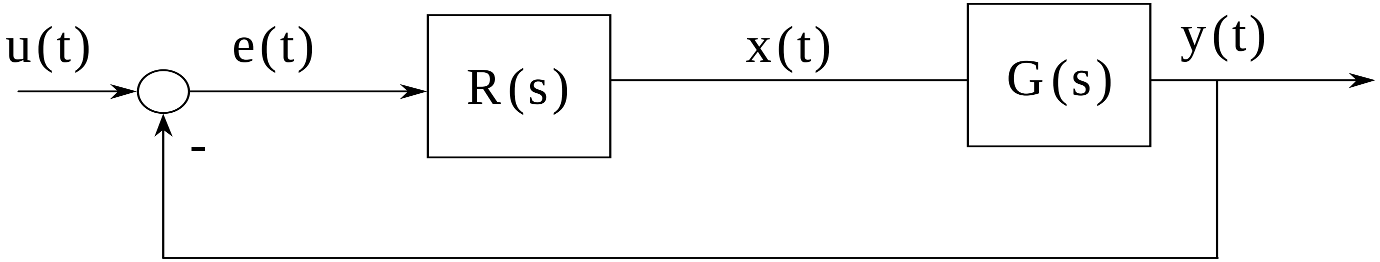
a) Diseño del regulador discreto en el plano z.



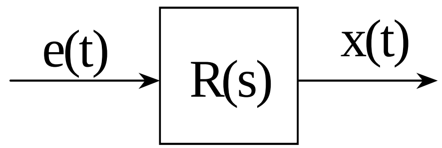
Este caso se abordará en el próximo capítulo

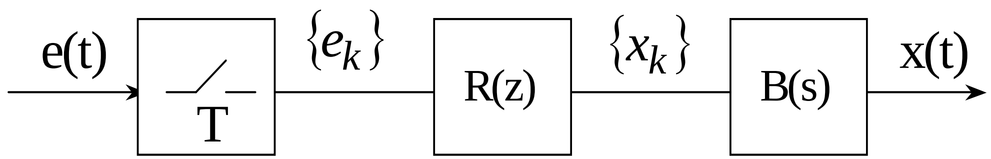
Introducción

b) Diseño del regulador continuo diseñado en el plano s.



El regulador continuo se puede sustituir por:

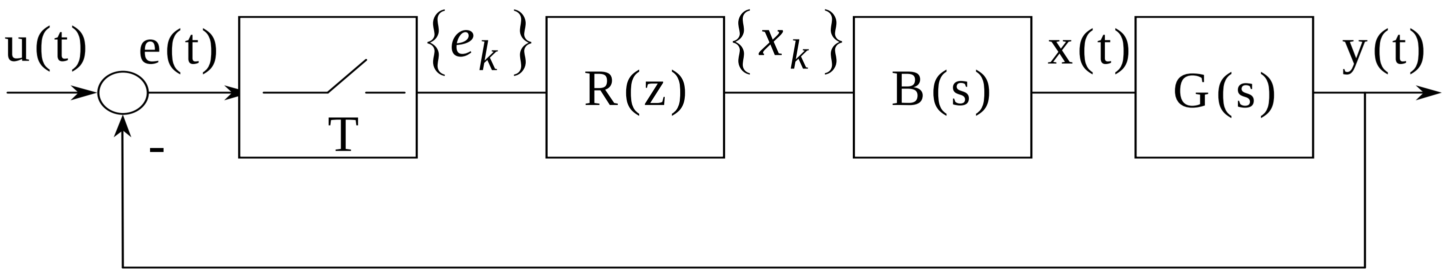




Este paso no es exacto. Cuanto menor sea *T* mejor será la aproximación. Sustituyéndolo se obtiene

Introducción

Esquema c)



El esquema c) es similar al a) , salvo en la referencia, lo cuál no supone ninguna diferencia significativa. Los resultados obtenidos serán pues equivalentes. El enfoque del presente capítulo es partiendo del esquema b) llegar al c)

Discretización de reguladores continuos

- Introducción
- Métodos de discretización
- Métodos basados en la aproximación de la evolución temporal
- Discretización por integración numérica
  - Aproximación del operador derivada
  - Discretización por integración trapezoidal
- Reguladores PID discretos
- Elección del período de muestreo

Métodos de discretización

El problema de la discretización es, dada la función de transferencia de un sistema continuo $R(s)$, encontrar la del sistema discreto $R(z)$ que tenga un comportamiento semejante. Esta aproximación no es exacta; no existe una única solución.

Se van a estudiar dos métodos:

•Aproximación de la evolución temporal de ambos sistemas.

•Técnicas de integración numérica de las ecuaciones diferenciales que definen al sistema continuo.

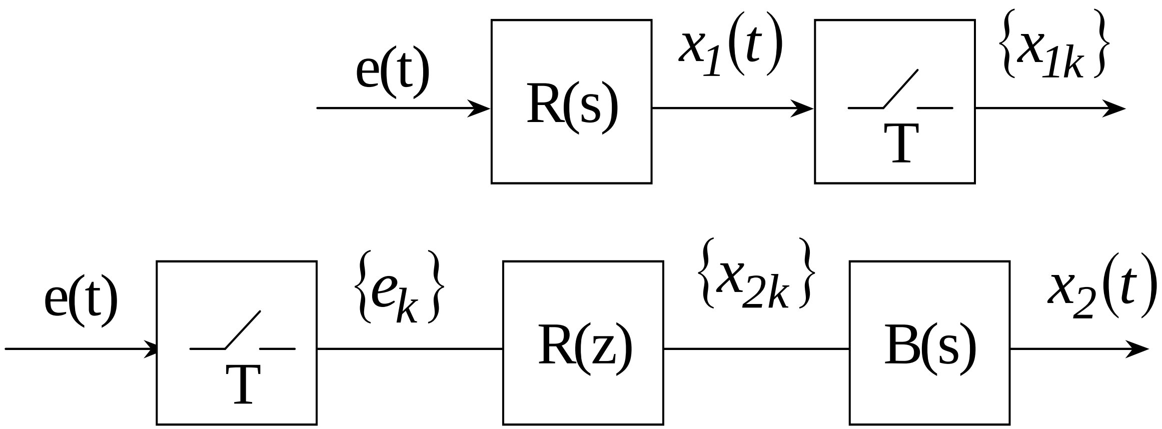
Discretización de reguladores continuos

- Introducción
- Métodos de discretización
- Métodos basados en la aproximación de la evolución temporal
- Discretización por integración numérica
  - Aproximación del operador derivada
  - Discretización por integración trapezoidal
- Reguladores PID discretos
- Elección del período de muestreo

Métodos basados en la aproximación de la evolución temporal

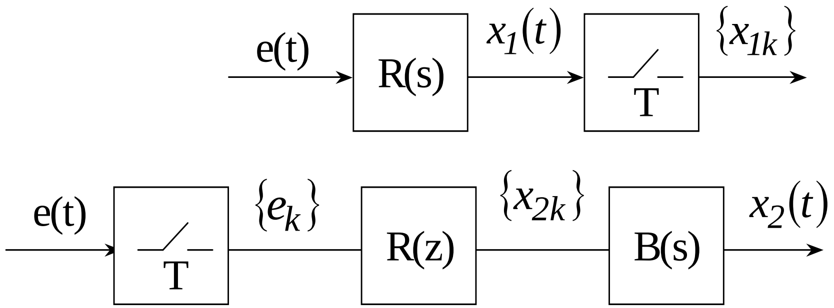
El método consiste en asemejar la salida de ambos sistemas ante la misma entrada. El elemento de comparación será la salida muestreada del regulador continuo y la salida del regulador discreto.

Así ante una entrada $e(t) \;\Rightarrow\; \{x_{1k}\} \approx \{x_{2k}\}$ o $X_1(z) \approx X_2(z)$



Métodos basados en la aproximación de la evolución temporal

FUERA DE TEMARIO



- Si la entrada es un impulso, entonces: $E(s)=1$ y $E(z)=1$

$$X_1(z)=\mathcal{Z}[R(s)E(s)]=\sum_{\text{Polos } R(p)} \text{Residuos}\left[R(p)\frac{1}{1-e^{pT}z^{-1}}\right]$$

$$X_2(z)=R(z)E(z)=R(z)$$

$$X_1(z)\approx X_2(z) \Rightarrow R(z)=\sum_{\text{Polos } R(p)} \text{Residuos}\left[R(p)\frac{1}{1-e^{pT}z^{-1}}\right]$$

No es aplicable si el grado del numerador es igual al del denominador.

Métodos basados en la aproximación de la evolución temporal

INDUSTRIALES ETSII | UPM

FUERA DE TEMARIO

- Si la entrada es un escalón, entonces: $E(s)=\frac{1}{s}$ y $E(z)=\frac{1}{1-z^{-1}}$

$$X_1(z)=Z\left[R(s)E(s)\right]=\sum_{Polos\ \frac{R(p)}{p}} Residuos\left[\frac{R(p)}{p}\frac{1}{1-e^{pT}z^{-1}}\right]$$

$$X_2(z)=R(z)E(z)=R(z)\frac{1}{1-z^{-1}}$$

$$X_1(z)\approx X_2(z) \Rightarrow R(z)=\left(1-z^{-1}\right)\sum_{Polos\ \frac{R(p)}{p}} Residuos\left[\frac{R(p)}{p}\frac{1}{1-e^{pT}z^{-1}}\right]$$

Se puede aplicar para otras entradas.

Discretización de reguladores continuos

- Introducción
- Métodos de discretización
- Métodos basados en la aproximación de la evolución temporal
- Discretización por integración numérica
  - Aproximación del operador derivada
  - Discretización por integración trapezoidal
- Reguladores PID discretos
- Elección del período de muestreo

Discretización por integración numérica

La discretización de un sistema continuo es la obtención de una ecuación en diferencias que asemeje el comportamiento de la ecuación diferencial del sistema continuo.

Opciones:

Aproximación del operador derivada

Discretización por integración trapezoidal

Aproximación del operador derivada

La primera derivada de una variable en los instantes de muestreo puede sustituirse por el cociente incremental:

$$\left.\frac{d\,x(t)}{dt}\right|_{t=KT} \approx \frac{x_k - x_{k-1}}{T} = x_k^{'}$$

Para la segunda derivada:

$$\left.\frac{d^2\,x(t)}{dt^2}\right|_{t=KT} \approx \frac{x_k - 2x_{k-1} + x_{k-2}}{T^2} = x_k^{''}$$

La transformada en z de la secuencia derivada, $\{x'_k\}$

$$X'(z) = Z\left[x_k^{'}\right] = \frac{X(z) - z^{-1}X(z)}{T} = \frac{1-z^{-1}}{T}X(z)$$

$$x(t) \longrightarrow \boxed{s} \longrightarrow \frac{dx(t)}{dt} \qquad\qquad \{x_k\} \longrightarrow \boxed{\frac{1-z^{-1}}{T}} \longrightarrow \{x'_k\}$$

De esta forma, para un regulador continuo *R(s)*, el regulador discreto aproximado se obtendría:

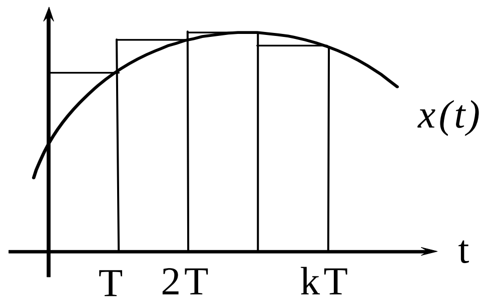
$$R(z) = R(s)\Big|_{s=\frac{1-z^{-1}}{T}}$$

POLITÉCNICA

Discretización por integración numérica

Aproximación del operador derivada

Idéntica expresión se obtiene a partir de la integral, con la aproximación de la integral con rectángulos:



$$w(t) = \int_0^t x(\tau)d\tau$$

$$W(s)=X(s)\ 1/s$$

Para la secuencia $\{x_k\}$ $\quad w_k = \sum_{i=0}^{k} Tx_i = w_{k-1} + Tx_k$

La transformada z: $\quad W(z) = W(z)z^{-1} + T X(z)$

$$W(z) = \frac{T}{1-z^{-1}} X(z)$$

La aproximación

$$s = \frac{1-z^{-1}}{T} = \frac{z-1}{Tz}$$

$$\Rightarrow \quad z = \frac{1}{1-Ts}$$

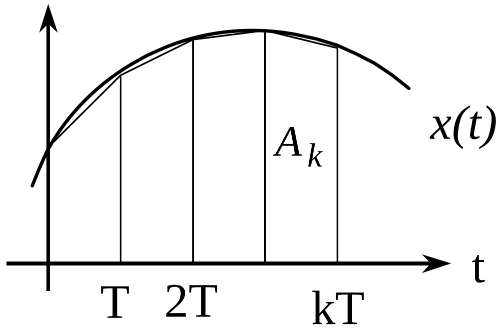
se puede obtener también a partir de:

$$z = e^{Ts} = \frac{1}{e^{-Ts}} = \frac{1}{1-Ts+\frac{1}{2}T^2s^2+\cdots} \approx \frac{1}{1-Ts}$$

POLITÉCNICA

Discretización por integración trapezoidal

Una expresión más exacta de la aproximación de la integral vista se obtiene con la denominada integración trapezoidal:



$$w(t) = \int_0^t x(\tau)d\tau$$

$$W(s)=X(s)\ 1/s$$

Para la secuencia $\{x_k\}$

$$w_k = \sum_{i=0}^{k} A_i \qquad con \qquad A_k = T\frac{x_k + x_{k-1}}{2}$$

$$w_k = w_{k-1} + T\frac{x_k + x_{k-1}}{2}$$

La transformada z: $W(z) = W(z)z^{-1} + \frac{T}{2}\left(1 + z^{-1}\right)X(z)$

$$W(z) = \frac{T}{2}\frac{1 + z^{-1}}{1 - z^{-1}}X(z)$$

Discretización por integración trapezoidal

La equivalencia será:

$$x(t) \longrightarrow \boxed{\;s\;} \xrightarrow{\frac{dx(t)}{dt}} \qquad \{x_k\} \longrightarrow \boxed{\frac{2}{T}\,\frac{1-z^{-1}}{1+z^{-1}}} \xrightarrow{\{x'_k\}}$$

De esta forma, para un regulador continuo $R(s)$, el regulador discreto aproximado se obtendría:

$$R(z) = R(s)\Big|_{s=\frac{2}{T}\frac{1-z^{-1}}{1+z^{-1}}}$$

La aproximación

$$s = \frac{2}{T}\,\frac{1-z^{-1}}{1+z^{-1}} \quad \Rightarrow \quad z = \frac{2+Ts}{2-Ts}$$

se puede obtener también a partir de:

$$z = e^{Ts} = \frac{e^{\frac{T}{2}s}}{e^{-\frac{T}{2}s}} = \frac{1+\frac{T}{2}s+\frac{1}{2!}\frac{T^2}{4}s^2+\cdots}{1-\frac{T}{2}s+\frac{1}{2!}\frac{T^2}{4}s^2+\cdots} \approx \frac{1+\frac{T}{2}s}{1-\frac{T}{2}s}$$

Discretización de reguladores continuos

INDUSTRIALES
ETSII | UPM

POLITÉCNICA

- Introducción
- Métodos de discretización
- Métodos basados en la aproximación de la evolución temporal
- Discretización por integración numérica
  - Aproximación del operador derivada
  - Discretización por integración trapezoidal
- Reguladores PID discretos
- Elección del período de muestreo

Reguladores PID discretos

A pesar de que, tratándose de reguladores discretos, se pueden implantar sin ninguna dificultad adicional reguladores de cualquier función de transferencia, es normal que se sigan empleando algoritmos con las acciones proporcional, integral y diferencial en un gran número de aplicaciones.

Regulador PID continuo: $x(t) = K\left[e(t) + \frac{1}{T_i}\int_0^t e(\tau)d\tau + T_d \frac{d\,e(t)}{dt}\right]$

La discretización con el operador derivada: $x_k = K\left[e_k + \frac{T}{T_i}\sum_{j=0}^{k} e_j + \frac{T_d}{T}(e_k - e_{k-1})\right]$

Para obtener la función de transferencia se tiene en cuenta que: $x_{k-1} = K\left[e_{k-1} + \frac{T}{T_i}\sum_{j=0}^{k-1} e_j + \frac{T_d}{T}(e_{k-1} - e_{k-2})\right]$

Reguladores PID discretos

Restando las dos expresiones:

$$x_k - x_{k-1} = K\left[e_k - e_{k-1} + \frac{T}{T_i}e_k + \frac{T_d}{T}\left(e_k - 2e_{k-1} + e_{k-2}\right)\right]$$

$$x_k - x_{k-1} = K\left(1 + \frac{T}{T_i} + \frac{T_d}{T}\right)e_k + K\left(-1 - 2\frac{T_d}{T}\right)e_{k-1} + K\frac{T_d}{T}e_{k-2}$$

$$q_0 = K\left(1 + \frac{T}{T_i} + \frac{T_d}{T}\right) \qquad q_1 = K\left(-1 - 2\frac{T_d}{T}\right) \qquad q_2 = K\frac{T_d}{T}$$

Que sustituyendo: $x_k - x_{k-1} = q_0 e_k + q_1 e_{k-1} + q_2 e_{k-2}$

Tomando transformada en z, queda:

$$X(z) - z^{-1}X(z) = q_0 E(z) + q_1 z^{-1} E(z) + q_2 z^{-2} E(z)$$

Y despejando: $$R(z) = \frac{X(z)}{E(z)} = \frac{q_0 + q_1 z^{-1} + q_2 z^{-2}}{1 - z^{-1}}$$

Por cuestiones de diseño lo normal es que se cumpla: $T < T_d << T_i$

POLITÉCNICA

Discretización de reguladores continuos

- Introducción
- Métodos de discretización
- Métodos basados en la aproximación de la evolución temporal
- Discretización por integración numérica
  - Aproximación del operador derivada
  - Discretización por integración trapezoidal
- Reguladores PID discretos
- Elección del período de muestreo

POLITÉCNICA

Elecciones del período de muestreo

La elección del período de muestreo es un aspecto crítico en la discretización de reguladores continuos. Como norma general cabe afirmar que va a interesar un período de muestreo lo más pequeño posible, siempre que no condicione al sistema en cuanto a su implantación real. En base a lograr un compromiso se pueden utilizar los siguientes criterios en función de las características en cadena cerrada:

- En función del ancho de banda : $T = \dfrac{\pi}{N_B\, B}$ con $N_B \approx 10 - 20$
- En función del tiempo de subida : $T = \dfrac{t_r}{N_r}$ con $N_r \approx 10 - 20$
- En función del tiempo de establecimiento : $T = \dfrac{t_s}{N_s}$ con $N_s \approx 30 - 60$