POLITÉCNICA

Secuencias y Sistemas Discretos

José María Sebastián

Rafael Aracil

Manuel Ferre

Departamento de Automática, Ingeniería Electrónica e Informática Industrial

Secuencias y Sistemas Discretos

- Secuencias
- Sistemas discretos
  - Sistemas lineales: Representación por ecuaciones en diferencias
  - Representación por secuencia de ponderación. Convolución discreta
  - Sistemas no lineales. Linealización
- Estabilidad de un sistema discreto lineal

Secuencias

<u>Concepto</u>: Conjunto ordenado de elementos $\{x_k\}$

Para cada elemento x_k:

- k puede ser positivo o negativo.
- x puede ser real o complejo.

En el contexto de la asignatura se consideran las secuencias temporizadas, donde los elementos están espaciados cada T unidades de tiempo. Este valor T se denomina periodo de la secuencia temporizada.

Igualmente se considerarán secuencias de números, en general reales.

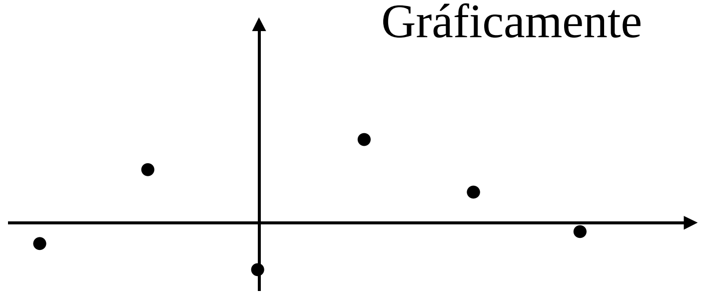
<u>Representación</u> de secuencias:

$$\{x_k\} = \{\cdots, x_{-2}, x_{-1}, x_0, x_1, x_2, \cdots\}$$

$$\{x_k\} = \{1, 3, -2_0, 1, 0, 2, \cdots\}$$

$$\{x_k\} = \{7_0, 5, 9, 3, \cdots\}$$

Gráficamente



Secuencias

Definiciones:

- Una secuencia $\{y_k\}$ es la secuencia retrasada n posiciones de otra $\{u_k\}$ si se cumple $y_k = u_{k-n}$ para cualquier k
- Una secuencia $\{y_k\}$ es la secuencia adelantada n posiciones de otra $\{u_k\}$ si se cumple $y_k = u_{k+n}$ para cualquier k
- Una secuencia $\{y_k\}$ es la suma de otras dos secuencias $\{u_k\}$, $\{x_k\}$ si se cumple $y_k = u_k + x_k$ para cualquier k
- Una secuencia $\{y_k\}$ es el producto de la secuencia $\{u_k\}$ por una constante m , si se cumple $y_k = m * u_k$ para cualquier k
- Secuencia impulso unitario $\{\delta_k\} = \{1, 0, 0, 0, 0 \cdots\}$
- Secuencia escalón unitario $\{u_k\} = \{1, 1, 1, 1, 1 \cdots\}$
- Secuencia acotada $\{x_k\}$. Si existe un C tal que para cualquier k se cumpla $|x_k| \leq C$

Secuencias y Sistemas Discretos

- Secuencias
- Sistemas discretos
  - Sistemas lineales: Representación por ecuaciones en diferencias
  - Representación por secuencia de ponderación. Convolución discreta
  - Sistemas no lineales. Linealización
- Estabilidad de un sistema discreto lineal

Sistemas Discretos

Definición: Algoritmo que permite transformar una secuencia en otra (por ejemplo cualquier programa de computador).

$$\{u_k\} \longrightarrow \boxed{\begin{array}{c}\text{Sistema}\\ \text{Discreto}\end{array}} \longrightarrow \{y_k\}$$

$$\{y_k\} = f\left(\{u_k\}\right)$$

Clasificación:

- Sistemas discreto estático $y_k = f(u_k)$ para cualquier k
- Sistema discreto dinámico. y_k depende de elementos de la secuencia de entrada con algún índice distinto de k: $y_k = f(u_i, y_j)$
- Sistemas discretos causales. La salida del sistema para un índice k concreto no depende de los valores de los elementos de las secuencias de entrada y salida de índices superiores a k. $y_k = f(u_i, y_j)$; $i, j \leq k$

$$y_k = f(y_{k-1}, y_{k-2}, \cdots, y_{k-n}, u_k, u_{k-1}, \cdots, u_{k-m})$$

Sistemas Lineales: Representación por Ecuaciones en Diferencias

Definición: Un sistema discreto dinámico causal es lineal si la salida se puede expresar como una combinación lineal de la entrada y de la salida sin que intervengan términos posteriores.

$$y_k = a_1\, y_{k-1} + a_2\, y_{k-2} + \cdots + a_n\, y_{k-n} + b_0\, u_k + b_1\, u_{k-1} + \cdots + b_m\, u_{k-m}$$

con n , m finitos.

La ecuación anterior se denomina ecuación en diferencias del sistema.

Un sistema discreto lineal es invariante si todos los a_i , b_i son constantes.

- En el contexto de la asignatura, se considerará que los sistemas discretos son lineales e invariantes.

Sistemas Lineales: Representación por Ecuaciones en Diferencias

<ins>Propiedades</ins>: En un sistema discreto lineal se verifica que si ante una secuencia de entrada $\{u_k\}$ la salida es la secuencia $\{y_k\}$, y si ante una secuencia de entrada $\{\tilde{u}_k\}$ la salida es la secuencia $\{\tilde{y}_k\}$; entonces para cualquier α_1 y α_2 reales, la salida ante la entrada $\{\alpha_1 u_k + \alpha_2 \tilde{u}_k\}$ será la secuencia $\{\alpha_1 y_k + \alpha_2 \tilde{y}_k\}$

Asimismo si el sistema es invariante se verifica que si ante una secuencia de entrada $\{u_k\}$ la salida es la secuencia $\{y_k\}$, para cualquier entero n, ante la secuencia de entrada $\{u_{k-n}\}$ la salida es la secuencia $\{y_{k-n}\}$.

Representación por Secuencia de Ponderación. Convolución Discreta

Dado un sistema discreto lineal, se denomina secuencia de ponderación del mismo a su secuencia de salida cuando la secuencia de entrada es una secuencia impulso. Se representa por $\{g_k\}$.

Si el sistema es causal $g_k = 0$ para $k<0$

La secuencia de ponderación contiene la misma información, referente a los sistemas discretos, que la respuesta impulsional respecto a los continuos. Facilita el cálculo de la respuesta del sistema ante cualquier secuencia de entrada.

Así si la entrada se expresa por $\{u_k\} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} u_n \{\delta_{k-n}\}$

Por ejemplo :

$$\{2,4,3\} = 2\{1,0,0\} + 4\{0,1,0\} + 3\{0,0,1\}$$

$$u_0\{\delta_{k-0}\} + u_1\{\delta_{k-1}\} + u_2\{\delta_{k-2}\}$$

POLITÉCNICA

Representación por Secuencia de Ponderación. Convolución Discreta

Aplicando linealidad, la salida del sistema ante ésta entrada será :

$$\{y_k\} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} u_n \{g_{k-n}\}$$

También se puede expresar por :

$$\{y_k\} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} g_n \{u_{k-n}\}$$

Para cualquier elemento :

$$y_k = \sum_{n=-\infty}^{\infty} u_n g_{k-n} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} g_n u_{k-n}$$

Esto permite definir la convolución discreta como :

$$\{y_k\} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} u_n \{g_{k-n}\} = \{u_k\} * \{g_k\} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} g_n \{u_{k-n}\} = \{g_k\} * \{u_k\}$$

Si el sistema es causal y $u_n = 0$ para todo $n < 0$:

$$\{y_k\} = \sum_{n=0}^{k} u_n \{g_{k-n}\} = \{u_k\} * \{g_k\} = \sum_{n=0}^{k} g_n \{u_{k-n}\} = \{g_k\} * \{u_k\}$$

Sistemas no Lineales. Linealización

Los sistemas cuya ecuación en diferencias no tiene la estructura indicada para los sistemas lineales se denominan sistemas no lineales. En el caso de que los elementos de las secuencias asociadas a un sistema varíen en torno a unos valores de equilibrio, es posible linealizar los términos no lineales de la ecuación en diferencias pasando los elementos de las secuencias a ser incrementales de manera similar a como se hace en sistemas continuos.

Así un término no lineal función de una sola secuencia $f\left(x_k\right)$ se puede aproximar por:

$$\Delta f(x_k) \approx \left.\frac{df(x_k)}{dx_k}\right|_{x_k=x_0} \Delta x_k = C\,\Delta x_k$$

Si el término no lineal es función de varias secuencias, se linealiza según:

$$\Delta f(x_k, y_k) = \left.\frac{\partial f(x_k, y_k)}{\partial x_k}\right|_{x_k=x_0, y_k=y_0} \Delta x_k + \left.\frac{\partial f(x_k, y_k)}{\partial y_k}\right|_{x_k=x_0, y_k=y_0} \Delta y_k$$

En el caso de sistemas discretos hay que tener en cuenta que en el punto de equilibrio se verifica que, en todas las secuencias, $x_k=x_{k-1}=x_{k-2}=\cdots=x_0$

Secuencias y Sistemas Discretos

- Secuencias
- Sistemas discretos
  - Sistemas lineales: Representación por ecuaciones en diferencias
  - Representación por secuencia de ponderación. Convolución discreta
  - Sistemas no lineales. Linealización
- Estabilidad de un sistema discreto lineal

Estabilidad de un Sistema Discreto Lineal

Definición:

- Un sistema discreto es estable si ante cualquier entrada acotada la secuencia de salida es acotada.
- Un sistema discreto lineal con secuencia de ponderación $\{g_k\}$, será estable si para cualquier secuencia de entrada $\{u_k\}$ acotada, la secuencia de salida $\{y_k\}$ también es acotada. Esto sucede si y sólo si se cumple

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} |g_n| < \infty$$

Estabilidad de un Sistema Discreto Lineal

Demostración:

Para un término de la secuencia de salida

$$y_k = \sum_{n=-\infty}^{\infty} u_{k-n} g_n \quad \Rightarrow \quad |y_k| = \left| \sum_{n=-\infty}^{\infty} u_{k-n} g_n \right| \leq \sum_{n=-\infty}^{\infty} |u_{k-n}| |g_n|$$

Condición Suficiente:

Si $\{u_k\}$ acotada $\Rightarrow \forall n, k \in Z, \exists C \in R$ tal que $|u_{k-n}| \leq C$

Sustituyendo u_{k-n}, se cumple $|y_k| \leq C \sum_{n=-\infty}^{\infty} |g_n|$

Se deduce que si la secuencia de ponderación es absolutamente sumable, la salida será acotada.

Estabilidad de un Sistema Discreto Lineal

Demostración:

Condición Necesaria:

Se toma como entrada, la secuencia acotada $\{u_{k-n}\} = \{signo(g_n)\}$

siendo n el índice de la secuencia y k un entero que se supone constante.

Se sustituye en : $$y_k = \sum_{n=-\infty}^{\infty} u_{k-n} g_n = \sum_{n=-\infty}^{\infty} g_n \, signo(g_n) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} |g_n|$$

Se deduce que para que $\{y_k\}$ sea acotada, se debe cumplir la condición de estabilidad antes descrita.