Control por Computador

Estabilidad

José María Sebastián
Rafael Aracil
Manuel Ferre
Departamento de Automática, Ingeniería Electrónica e Informática Industrial

POLITÉCNICA

Estabilidad

- Introducción
- Transformaciones del plano s al plano z
  - Eje imaginario
  - Semiplano negativo
- Estabilidad en el plano s
- Estabilidad en el plano z
- Métodos algébricos
  - Criterio de Jury

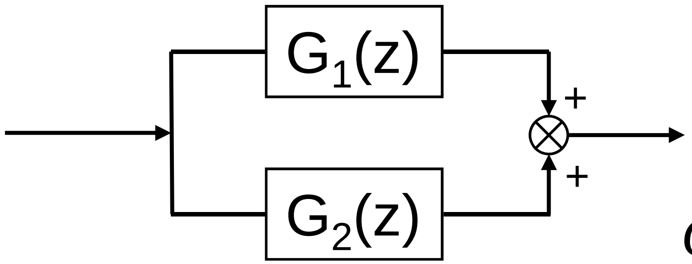
Introducción

<u>Criterio definido previamente</u>:

- Un sistema es estable si ante cualquier entrada acotada, la salida es acotada.
- Un sistema lineal causal, caracterizado por su secuencia de ponderación $\{g_k\}$, será estable si la secuencia de ponderación es absolutamente sumable

$$\boxed{\sum_{k=0}^{\infty} |g_k| < \infty}$$

- Esta definición no es válida cuando el sistema se compone de varios bloques:



$$G_1(z) = \frac{2 - 2.5z^{-1}}{1 - 2.5z^{-1} + z^{-2}} \Rightarrow g_{1k} = 0.5^k + 2^k$$

$$G_2(z) = \frac{-1.5z^{-1}}{1 - 2.5z^{-1} + z^{-2}} \Rightarrow g_{2k} = 0.5^k - 2^k$$

$$G(z) = G_1(z) + G_2(z) = \frac{2}{1 - 0.5z^{-1}} \Rightarrow g_k = 2 \cdot 0.5^k$$

El sistema global es estable, pero cada sistema parcial puede tomar valores no acotados ante entrada acotada.

Introducción

Criterio definido previamente:

•Un sistema es estable si ante cualquier entrada acotada, la salida es acotada.

•Un sistema lineal causal, caracterizado por su secuencia de ponderación $\{g_k\}$, será estable si la secuencia de ponderación es absolutamente sumable

$$\boxed{\sum_{k=0}^{\infty} |g_k| < \infty}$$

•Nueva definición: Un sistema será estable si ante cualquier entrada acotada, todas sus variables son acotadas.

En el presente capítulo se van a definir nuevos criterios de estabilidad basados en la función de transferencia de los sistemas discreto y muestreado. Para poder compararlos con los criterios de los sistemas continuos, es conveniente estudiar en detalle las relaciones entre los planos s y z.

Estabilidad

- Introducción
- Transformaciones del plano s al plano z
  - Eje imaginario
  - Semiplano negativo
- Estabilidad en el plano s
- Estabilidad en el plano z
- Métodos algébricos
  - Criterio de Jury

Transformaciones del plano s al plano z

Relación entre la transformada de Laplace y la transformada z de una secuencia:

$$\mathscr{G}(s) \leftrightarrow G(z) \quad \Rightarrow \quad z = e^{T\,s}$$

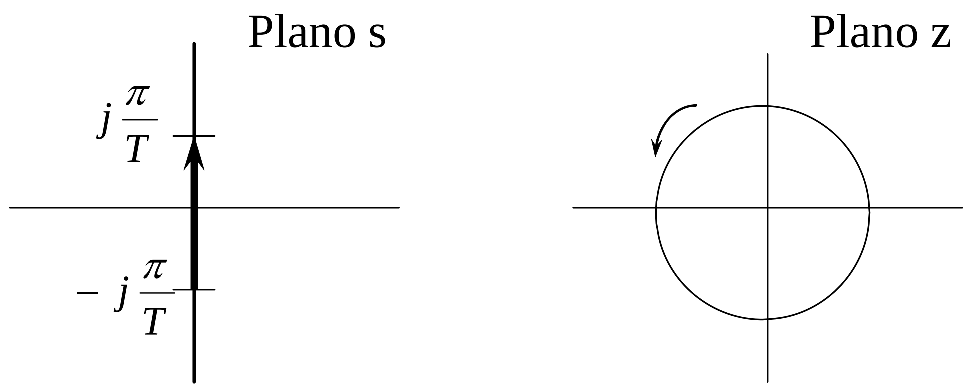
La función periódica $\mathscr{G}(s)$, de periodo $2\pi j\,/T$, se convierte en la no periódica $G(z)$, con lo que las singularidades periódicas de las transformadas de Laplace se superponen en la transformada z. La relación de las propiedades estáticas y dinámicas, están marcadas por la posición de los ceros y polos en ambas transformaciones.

A continuación se detalla como quedarían algunas lugares característicos del plano *s* en el plano *z*.

Transformaciones del plano s al plano z

Eje imaginario

$$z = e^{Ts}$$



Recta imaginaria: $s = jw \quad con \quad -\infty < w < \infty$

$z = e^{jwT}$ Sucesivas vueltas alrededor del origen (radio 1)

Cada tramo de longitud $2\pi/T$ da una vuelta

$$\boxed{\text{El eje imaginario } (s) \Rightarrow \text{ La circunferencia unidad } (z)}$$

Transformaciones del plano s al plano z

Semiplano negativo

Al ser la transformación $z = e^{Ts}$ continua y transformarse el eje imaginario en la circunferencia unidad, el semiplano negativo se transformará o bien en el interior o bien en el exterior de la circunferencia unidad. Bastará con analizar la posición de un punto. Por ejemplo:

$$s = -1 \quad \Rightarrow \quad |z| = \left|e^{Ts}\right| = \left|e^{-T}\right| = \left|\frac{1}{e^{T}}\right| < 1$$

Semiplano izquierdo (s) $\Rightarrow$ Interior circunferencia unidad (z)

Estabilidad

- Introducción
- Transformaciones del plano s al plano z
  - Eje imaginario
  - Semiplano negativo
- Estabilidad en el plano s
- Estabilidad en el plano z
- Métodos algebraicos
  - Criterio de Jury

Estabilidad en el plano s

Un sistema lineal continuo era estable si su función de transferencia, en transformada de Laplace, no presenta ningún polo ni sobre el eje imaginario ni sobre el semiplano positivo. Este criterio es similar para los sistemas muestreados.

Un sistema muestreado lineal y causal, definido por su función de transferencia $\mathscr{G}(s)$, es estable si y sólo si la serie que define

$$\mathscr{G}(s) = \sum_{k=0}^{\infty} g_k e^{-sTk}$$

es absolutamente convergente para todo s complejo, con parte real positiva mayor o igual que cero.

Las dos condiciones son similares, pues si existe algún polo en el semiplano positivo ya no puede converger.

Estabilidad en el plano z

Un sistema discreto lineal y causal, definido por su función de transferencia $G(z)$, es estable si y sólo si la serie que define

$$G(z) = \sum_{k=0}^{\infty} g_k z^{-k}$$

es absolutamente convergente para todo z complejo, con módulo mayor o igual que uno.

Este enunciado es equivalente a que la función $G(z)$ no presente ningún polo ni sobre la circunferencia de radio unidad ni fuera de ella, o lo que es lo mismo, que todos los polos de $G(z)$ estén en el interior de la circunferencia unidad. Este resultado es esperable y equivalente al del plano s por lo visto en las transformaciones del plano s al plano z

Estabilidad

- Introducción
- Transformaciones del plano s al plano z
  - Eje imaginario
  - Semiplano negativo
- Estabilidad en el plano s
- Estabilidad en el plano z
- Métodos algébricos
  - Criterio de Jury

INDUSTRIALES
ETSII | UPM

Métodos algébricos

La estabilidad de un sistema depende de la posición de sus polos: el sistemas discretos, todos han de estar dentro de la circunferencia unidad. La determinación de su ubicación exacta en sistemas de orden elevado es complicada y muy sensible a errores numéricos. Otra opción es determinar, por métodos algébricos, si todas las de raíces del polinomio característico están dentro de la circunferencia unidad.

El método más empleado en sistemas discretos: Criterio de Jury

POLITÉCNICA

Métodos algébricos. Criterio de Jury

Dado el polinomio característico de coeficientes reales (con $a_n>0$):

$$p(z)=a_n z^n+a_{n-1}z^{n-1}+\cdots+a_1 z+a_0$$ se construye la siguiente tabla:

a_n	a_{n-1}	a_{n-2}	$\cdots$	a_k	$\cdots$	a_1	a_0
a_0	a_1	a_2	$\cdots$	a_{n-k}	$\cdots$	a_{n-1}	a_n
b_{n-1}	b_{n-2}	b_{n-3}	$\cdots$	b_{k-1}	$\cdots$	b_0	
b_0	b_1	b_2	$\cdots$	b_{n-k}	$\cdots$	b_{n-1}	
c_{n-2}	c_{n-3}	c_{n-4}	$\cdots$	c_{k-2}	$\cdots$		
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$					
p_3	p_2	p_1	p_0				
p_0	p_1	p_2	p_3				
q_2	q_1	q_0					

donde las filas pares se forman invirtiendo el orden de las anteriores y las impares a partir de las dos anteriores mediante:

$$b_k=a_k a_0-a_{n-k}a_n$$

$$c_k=b_k b_0-b_{n-k-1}b_{n-1}$$

y así sucesivamente

Métodos algébricos. Criterio de Jury

$$p(z) = a_n z^n + a_{n-1} z^{n-1} + \cdots + a_1 z + a_0$$

Las condiciones necesarias y suficientes para que todas las raíces de $p(z)$ estén dentro de la circunferencia unidad son:

1) $P(1) > 0$
2) $P(-1) > 0$ para n par
$P(-1) < 0$ para n impar
3) $/a_0/ < a_n$

$$\text{Mientras que:} \quad \begin{cases} |b_0| > |b_{n-1}| \\ |c_0| > |c_{n-2}| \\ \vdots \\ |p_0| > |p_3| \\ |q_0| > |q_2| \end{cases}$$

a_n	a_{n-1}	a_{n-2}	$\cdots$	a_k	$\cdots$	a_1	a_0
a_0	a_1	a_2	$\cdots$	a_{n-k}	$\cdots$	a_{n-1}	a_n
b_{n-1}	b_{n-2}	b_{n-3}	$\cdots$	b_{k-1}	$\cdots$	b_0	
b_0	b_1	b_2	$\cdots$	b_{n-k}	$\cdots$	b_{n-1}	
c_{n-2}	c_{n-3}	c_{n-4}	$\cdots$	c_{k-2}	$\cdots$		
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$					
p_3	p_2	p_1	p_0				
p_0	p_1	p_2	p_3				
q_2	q_1	q_0					