Control por Computador

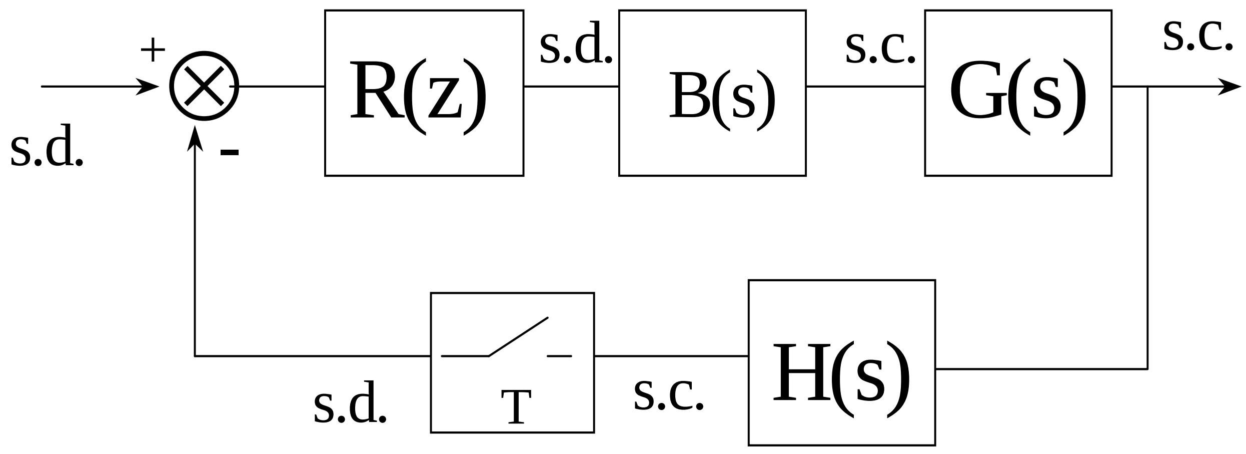
Sistemas Muestreados

José María Sebastián
Rafael Aracil
Manuel Ferre
Departamento de Automática, Ingeniería Electrónica e Informática Industrial

Sistemas muestreados

- Introducción
- Definición de sistema muestreado
- Técnicas y problemas en el estudio de sistemas muestreados
- Representación discreta de un sistema continuo
- Sistemas realimentados

Introducción

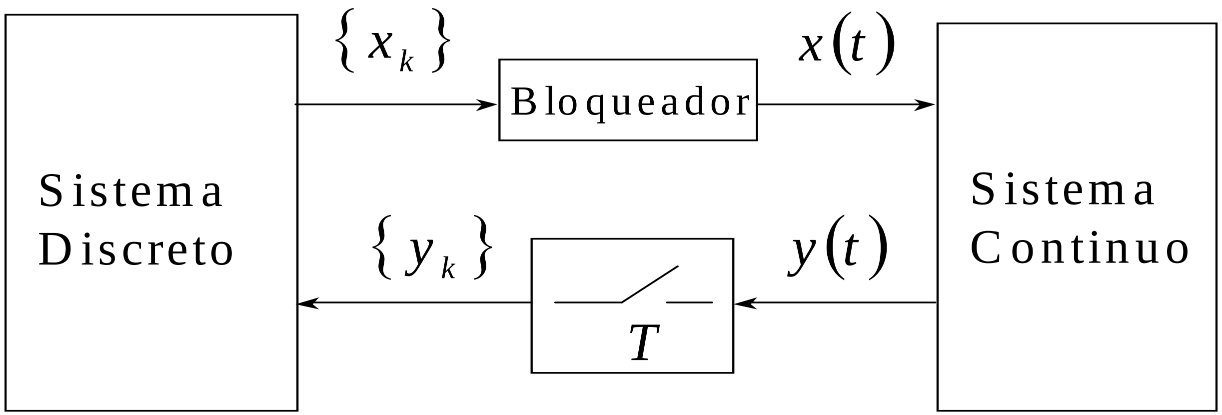


Elementos:

- Sistemas continuo
- Sistemas discreto
- Bloqueador
- Muestreador
- Sistema muestreado

Definición de sistema muestreado

Un <u>sistema</u> se dice que es <u>muestreado</u> cuando alguna de las señales a él asociada sufre el proceso de muestreo. El proceso de muestreo está íntimamente ligado a la toma de datos de un sistema físico por parte de un computador.



El muestreador es el único que no tiene función de transferencia

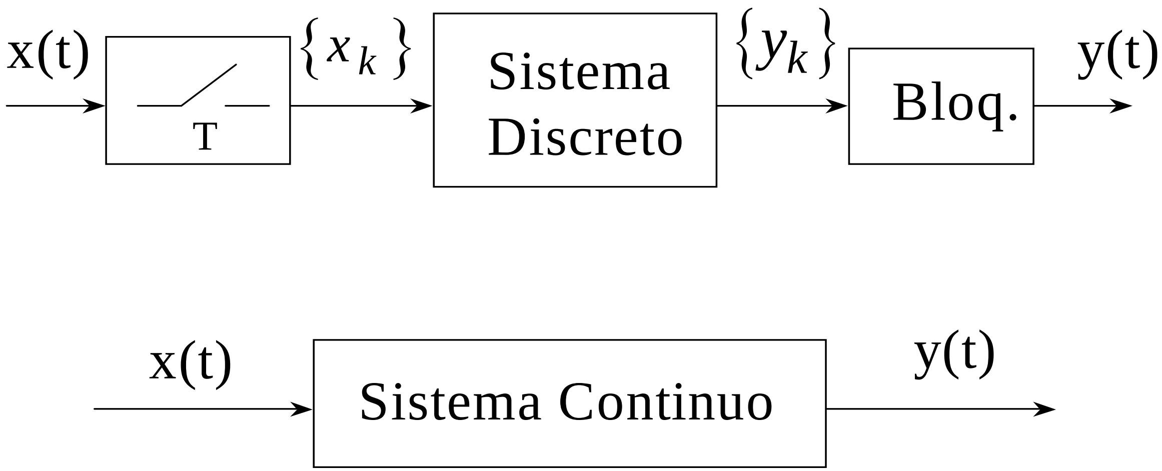
Sistemas muestreados

- Introducción
- Definición de sistema muestreado
- Técnicas y problemas en el estudio de sistemas muestreados
- Representación discreta de un sistema continuo
- Sistemas realimentados

Técnicas y problemas en el estudio de sistemas muestreados

El estudio de los sistemas muestreados incluye técnicas continuas y discretas. Hay dos formas de abordarlo:

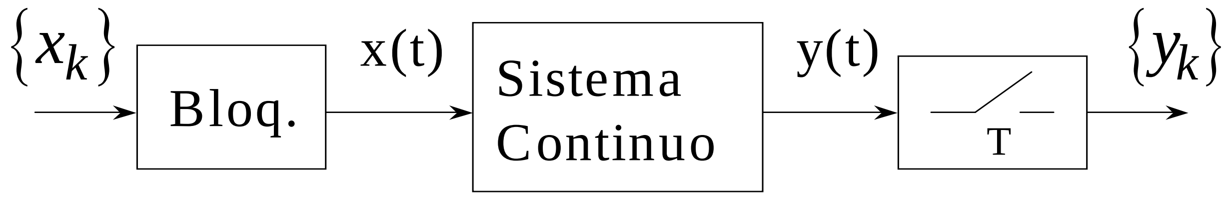
1) Todo como sistemas continuos. Hay que hallar el equivalente continuo del sistema discreto



Técnicas y problemas en el estudio de sistemas muestreados

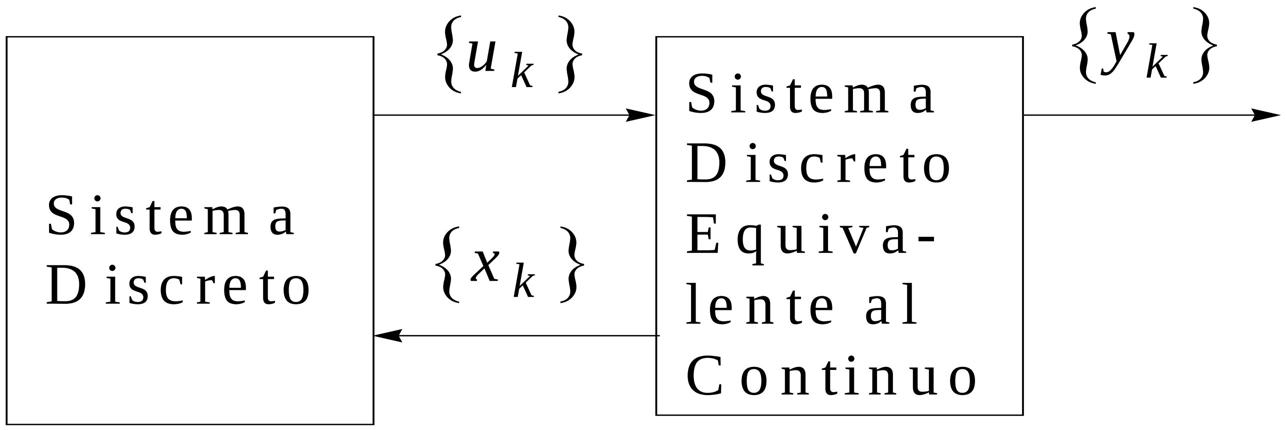
El estudio de los sistemas muestreados incluye técnicas continuas y discretas. Hay dos formas de abordarlo:

2) Todo como sistemas discretos. Hay que hallar el equivalente discreto del sistema continuo



Técnicas y problemas en el estudio de sistemas muestreados

- Decisión: Todo como sistema discreto.
- Motivo: No hay pérdida de información. Existe función de transferencia



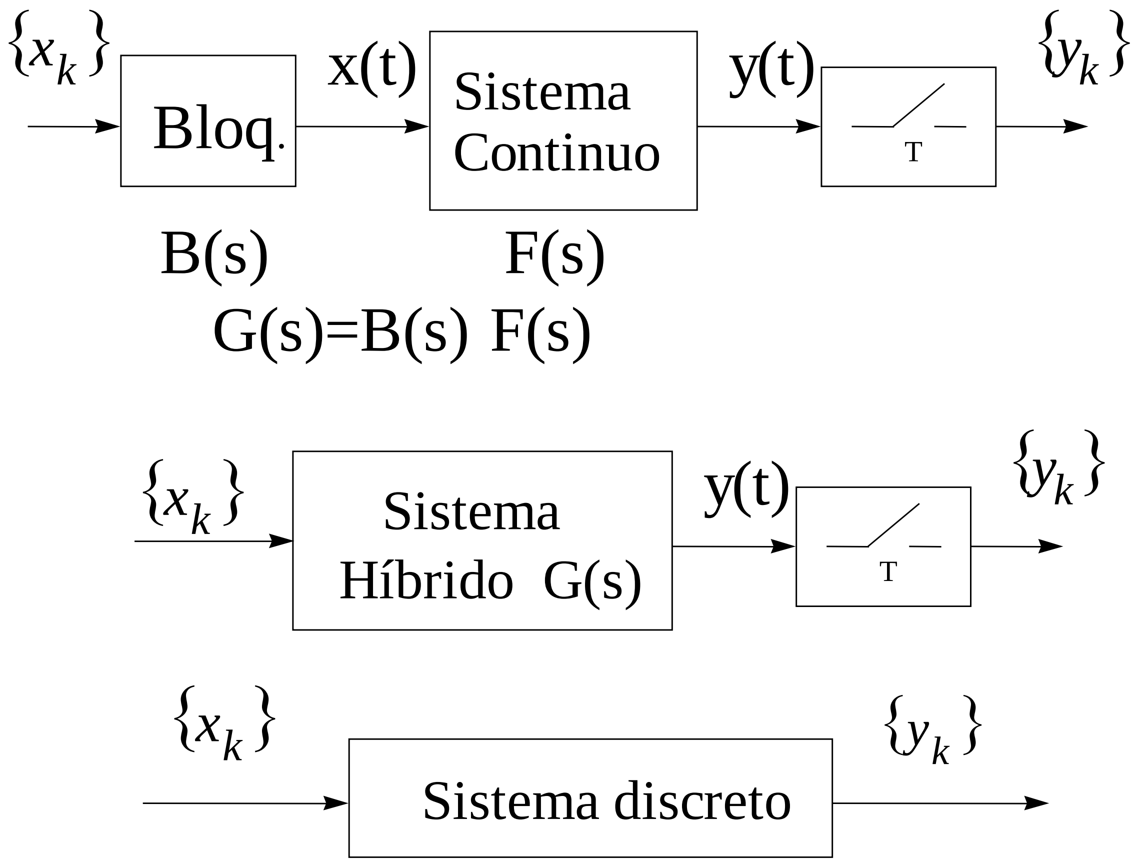
Inconveniente: Sólo se posee información de la variable a controlar en los instantes de muestreo.

Sistemas muestreados

- Introducción
- Definición de sistema muestreado
- Técnicas y problemas en el estudio de sistemas muestreados
- Representación discreta de un sistema continuo
- Sistemas realimentados

Representación discreta de un sistema continuo

- Objetivo: Cálculo del sistema discreto equivalente



Representación discreta de un sistema continuo

Se cumple: $Y(s) = B(s)F(s)\mathscr{X}(s) = G(s)\mathscr{X}(s)$

$$\mathscr{Y}(s) = \frac{1}{T}\sum_{r=-\infty}^{\infty} G\left(s + j\frac{2\pi r}{T}\right)\mathscr{X}\left(s + j\frac{2\pi r}{T}\right)$$

Al ser periódica $\mathscr{X}\left(s + j\frac{2\pi r}{T}\right) = \mathscr{X}(s)$

($\{x_k\}$ es una secuencia temporizada de período T)

$$\mathscr{Y}(s) = \left[\frac{1}{T}\sum_{r=-\infty}^{\infty} G\left(s + j\frac{2\pi r}{T}\right)\right]\mathscr{X}(s) = \mathscr{G}(s)\mathscr{X}(s)$$

$\mathscr{G}(s)$ es la transformada de Laplace de la secuencia obtenida de muestrear la respuesta impulsional del sistema híbrido cuya función de transferencia es $G(s)$

Representación discreta de un sistema continuo

Si se trabaja con transformadas z: $Y(z) = G(z)X(z)$

$G(z)$ es la transformada z de la secuencia obtenida de muestrear la respuesta impulsional del sistema híbrido cuya función de transferencia es $G(s)$. Esta relación se suele escribir como:

$$G(z) = \mathrm{Z}[G(s)]$$

Representación discreta de un sistema continuo

- Opciones de cálculo: $G(z) = \mathcal{Z}[G(s)]$

$$\Rightarrow \quad \mathscr{G}(s) = \left[\frac{1}{T}\sum_{r=-\infty}^{\infty} G\left(s + j\frac{2\pi r}{T}\right)\right]$$ Dificil de calcular

$$\Rightarrow \quad \mathscr{G}(s) = \sum_{polos\ G(p)} residuos\left[G(p)\frac{1}{1-e^{(p-s)T}}\right]$$

$$\left(\text{Válido si } \lim_{p\to\infty} G(p) = 0 \quad ; \text{ Hay más polos que ceros}\right)$$

Fácil de calcular:

$$\text{Como } \left(z = e^{sT}\right) \Rightarrow \quad G(z) = \sum_{polos\ G(p)} residuos\left[G(p)\frac{1}{1-e^{pT}z^{-1}}\right]$$

Representación discreta de un sistema continuo

$$G(z)=\sum_{polos\ G(p)} res.\left[G(p)\frac{1}{1-e^{pT}z^{-1}}\right]$$

<u>Ejemplo 1</u>: Si $G(s)=\dfrac{K}{s+a}$

Para calcular el residuo no se considera el polo (en –a) y se particulariza (-a)

$$G(z)=K\frac{1}{1-e^{-aT}z^{-1}}$$

<u>Ejemplo 2</u>: $G(s)=\dfrac{K}{(s+a)(s+b)}$ (polo en -a, -b)

$$G(z)=\frac{K}{p+b}\left.\frac{1}{1-e^{pT}z^{-1}}\right|_{p=-a}+\frac{K}{p+a}\left.\frac{1}{1-e^{pT}z^{-1}}\right|_{p=-b}=$$

$$=\frac{K}{b-a}\frac{1}{1-e^{-aT}z^{-1}}+\frac{K}{a-b}\frac{1}{1-e^{-bT}z^{-1}}$$

$$G(z)=\frac{K}{a-b}\frac{\left(e^{-aT}-e^{-bT}\right)z^{-1}}{\left(1-e^{-aT}z^{-1}\right)\left(1-e^{-bT}z^{-1}\right)}$$

Representación discreta de un sistema continuo

$$\boxed{G(z) = \sum_{polos\ G(p)} res.\left[G(p) \frac{1}{1 - e^{pT} z^{-1}} \right]}$$

Ejemplo 3: Si $G(s) = \dfrac{K}{s^2}$ $\left(\text{polo en } -0^2\right)$

$$G(z) = K \frac{1}{(2-1)!} \left[\frac{d^{2-1}}{dp^{2-1}} \left(\frac{1}{1 - e^{pT} z^{-1}} \right) \right]_{p=0} =$$

$$= K \left[\frac{T e^{pT} z^{-1}}{\left(1 - e^{-pT} z^{-1}\right)^2} \right]_{p=0} = \frac{KTz^{-1}}{\left(1 - z^{-1}\right)^2} = \frac{KTz}{(z-1)^2}$$

INDUSTRIALES
ETSII | UPM

Representación discreta de un sistema continuo

- Considerando la acción de un bloqueador específico:

$$G(s) \quad \Rightarrow \quad B(s)G(s) \quad \text{con} \quad \begin{cases} B(s) & \textit{Bloqueador} \\ G(s) & \textit{Planta} \end{cases}$$

<u>Bloqueador de orden cero</u>

$$B_0(s)\,G(s) = \frac{1-e^{-sT}}{s}G(s) = \frac{G(s)}{s} - e^{-sT}\,\frac{G(s)}{s}$$

$$\text{Como} \quad e^{-sT} = z^{-1} \quad (\text{Retraso de un período})$$

$$B_0G(z) = Z[B_0(s)G(s)] = Z\left[\frac{G(s)}{s}\right] - z^{-1}Z\left[\frac{G(s)}{s}\right] = \left(1 - z^{-1}\right)Z\left[\frac{G(s)}{s}\right]$$

POLITÉCNICA

Representación discreta de un sistema continuo

- Considerando la acción de un bloqueador específico:

$$G(s) \quad \Rightarrow \quad B(s)G(s) \quad \text{con} \quad \begin{cases} B(s) & \textit{Bloqueador} \\ G(s) & \textit{Planta} \end{cases}$$

<u>Bloqueador de orden uno</u>

$$B_1(s)G(s) = \frac{1+sT}{T}\left(\frac{1-e^{-sT}}{s}\right)^2 G(s) = \left(1-e^{-sT}\right)^2 \frac{1+sT}{Ts^2} G(s)$$

$$B_1G(z) = \mathrm{Z}\left[B_1(s)G(s)\right] = \left(1-z^{-1}\right)^2 \mathrm{Z}\left[\frac{1+sT}{Ts^2}G(s)\right]$$

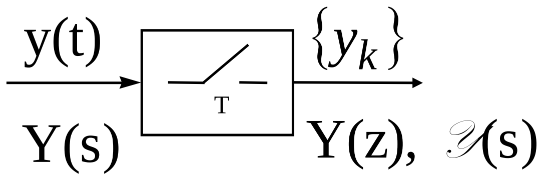
Representación discreta de un sistema continuo

- **Transformada z del muestreo de una señal continua**

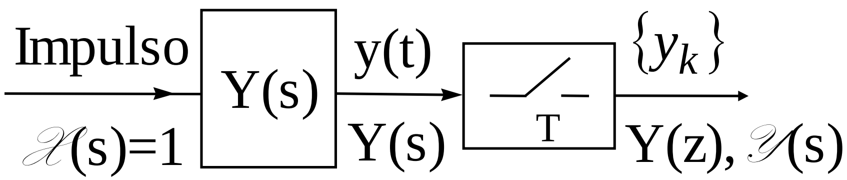
La expresión $Y(z) = \sum_{polos\ Y(p)} residuos \left[Y(p) \frac{1}{1 - e^{pT} z^{-1}} \right]$ permite

igualmente obtener la transformada en z de la secuencia obtenida al muestrear una señal continua, de forma más sencilla que la derivada del muestreo:

$$\mathscr{Y}(s) = \left[\frac{1}{T} \sum_{r=-\infty}^{\infty} Y\left(s + j\frac{2\pi r}{T} \right) \right]$$



Así los dos esquemas de la siguiente figura son equivalentes: Una señal continua muestreada, o la salida de un sistema híbrido de función de transferencia Y(s) y cuya entrada es una secuencia impulso.

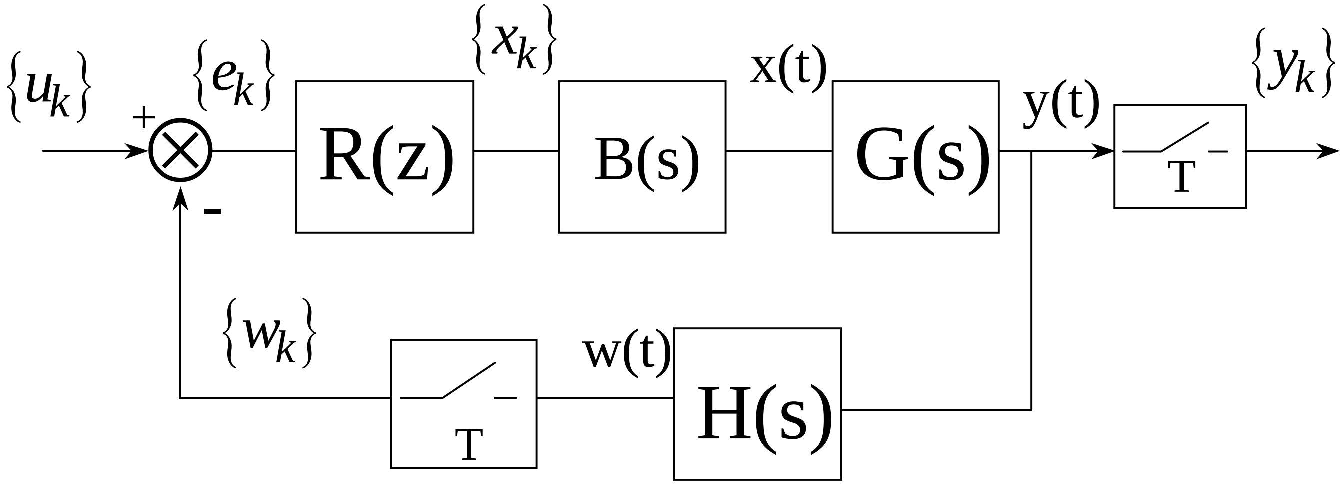


Por lo que se puede aplicar los razonamientos expresados en el presente apartado.

Sistemas muestreados

- Introducción
- Definición de sistema muestreado
- Técnicas y problemas en el estudio de sistemas muestreados
- Representación discreta de un sistema continuo
- Sistemas realimentados

Sistemas realimentados



Hay que hallar $\{y_k\}$ en función de $\{u_k\}$ o lo que es equivalente la función de transferencia : $\dfrac{Y(z)}{U(z)} = M(z)$

Del diagrama de bloques

$$\begin{cases} Y(z) = BG(z)\,X(z) \\ W(z) = BGH(z)\,X(z) \\ X(z) = R(z)\left[U(z) - W(z)\right] \\ Y(z) = BG(z)\,X(z) \end{cases}$$

Sistemas realimentados

Partiendo de :

$$Y(z)=BG(z)\,X(z) \qquad X(z)=R(z)\left[U(z)-W(z)\right]$$
$$W(z)=BGH(z)\,X(z) \qquad Y(z)=BG(z)\,X(z)$$

Sustituyendo y despejando:

$$X(z)=R(z)\left[U(z)-BGH(z)X(z)\right]$$

$$\left[1+R(z)BGH(z)\right]X(z)=R(z)U(z)$$

$$X(z)=\frac{R(z)}{1+R(z)BGH(z)}U(z)$$

Y la salida será : $Y(z)=\dfrac{BG(z)\,R(z)}{1+R(z)BGH(z)}U(z)$

Por lo que se obtendrá : $\dfrac{Y(z)}{U(z)}=M(z)=\dfrac{R(z)\,BG(z)}{1+R(z)BGH(z)}$