Control por Computador

Transformada z de Secuencias. Modelado de Sistemas

José María Sebastián
Rafael Aracil
Manuel Ferre
Departamento de Automática, Ingeniería Electrónica e Informática Industrial

Transformada z de Secuencias. Modelado de Sistemas

- Revisión de transformadas de Fourier y Laplace de señales y secuencias
- Transformada z de una secuencia
  - Convergencia de la transformada z
- Transformada z inversa
- Propiedades de la transformada z
- Función de transferencia en z
- Representaciones gráficas de los sistemas discretos

Revisión de transformadas de Fourier y Laplace de señales y secuencias

A una señal *x(t)* se le pueden asociar dos transformadas:

Transformada de Fourier

$$X(w) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t)\, e^{-jwt} dt \qquad \text{con} \quad w \in R \qquad \text{por lo que} \quad X : R \to C$$

Se define la transformación inversa : $x(t) = \dfrac{1}{2\pi} \displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} X(w)\, e^{jwt} dw$

Siendo la condición de existencia $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} |x(t)|\, dt < \infty$

La transformada de Fourier se suele analizar a partir de su representación gráfica mediante una curva de módulos y otra de argumentos, ambas en función de la frecuencia. Estas curvas definen las componentes frecuenciales de la señal que se puede desarrollar como:

$$x(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} X(w)\, e^{jwt} dt = a_0 + \frac{1}{\pi} \int_{0}^{\infty} |X(w)| \cos(wt + \arg X(w))\, dt$$

Revisión de transformadas de Fourier y Laplace de señales y secuencias

A una señal $x(t)$ se le pueden asociar dos transformadas:

Transformada de Laplace

$$X(s) = \int_0^\infty x(t) e^{-st} dt \qquad \text{con} \quad s \in C \qquad \text{por lo que} \quad X : C \to C$$

Esta definición presupone que $x(t) = 0$ para $\forall t < 0$

Se define la transformación inversa : $$x(t) = \frac{1}{2\pi j} \int_{\sigma - j\infty}^{\sigma + j\infty} X(s) e^{st} ds$$

Siendo la condición de existencia $$\exists \sigma \in R \; : \; \int_0^\infty \left| x(t) e^{-\sigma t} \right| dt < \infty$$

Revisión de transformadas de Fourier y Laplace de señales y secuencias

Igualmente dada una secuencia $\{x_k\}$ temporizada se puede definir:

Transformada de Fourier

$$\mathscr{X}(w)=\sum_{n=-\infty}^{\infty} x_n e^{-jwnT} \qquad \text{con} \qquad w \in R \qquad \text{por lo que} \qquad \mathscr{X} : R \to C$$

T representa la diferencia de tiempos para cada elemento de la secuencia temporizada (periodo de la secuencia). Nótese también que la transformada de Fourier es una función periódica de periodo $2\pi / T$.

Se define la transformación inversa :

$$x_n = \frac{T}{2\pi} \int_{-\frac{\pi}{T}}^{\frac{\pi}{T}} \mathscr{X}(w) e^{jwnT} dw$$

Siendo la condición de existencia

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} |x_n| < \infty$$

Revisión de transformadas de Fourier y Laplace de señales y secuencias

Transformada de Laplace

Dada la secuencia $\{x_k\}$, tal que $x_k=0$ para $k<0$, se define su transformada de Laplace como:

$$\mathscr{X}(w)=\sum_{k=0}^{\infty} x_k e^{-skT} \quad \text{con} \quad s\in C \quad \text{por lo que} \quad \mathscr{X}:C\to C$$

Siendo la condición de existencia $\exists\sigma\in R \ : \ \sum_{k=0}^{\infty}\left|x_k e^{-\sigma kT}\right|<\infty$

Se define la transformación inversa : $x_k=\dfrac{T}{2j\pi}\displaystyle\int_{\sigma-j\pi/T}^{\sigma+j\pi/T}\mathscr{X}(s)\,e^{skT}ds$

La transformada de Laplace de una secuencia es periódica, de periodo $\dfrac{2\pi j}{T}$

$$\mathscr{X}(s)=\mathscr{X}\left(s+\frac{2\pi j}{T}\right)$$

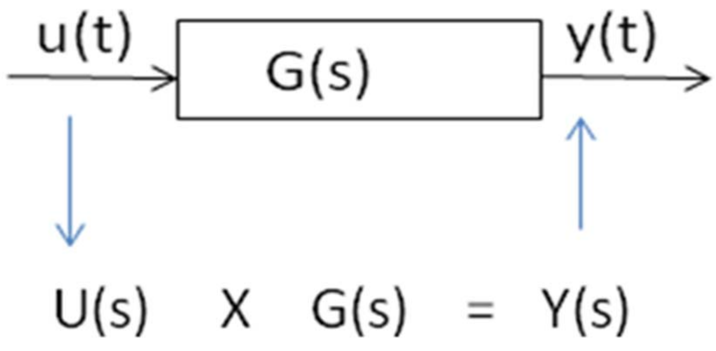
Revisión de transformadas de Fourier y Laplace de señales y secuencias

Teorema fundamental

En sistemas lineales continuos se verifica el teorema fundamental.

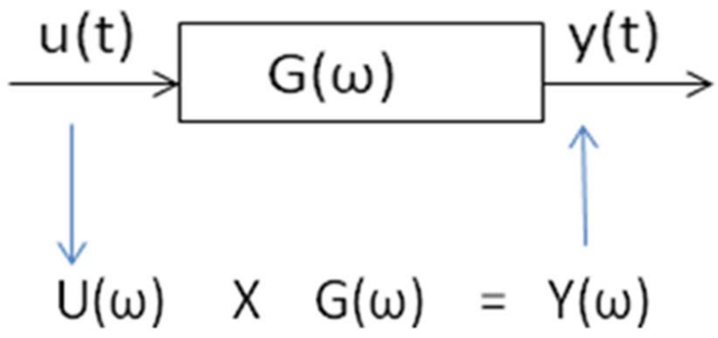
En transformadas de Laplace:

Donde *G(S)* es la transformada de Laplace de la respuesta impulsional *g(t)*



Igualmente en transformadas de Fourier:

Donde *G(w)* es la transformada de Fourier de la respuesta impulsional *g(t)*



Aunque los sistemas se pueden analizar también con la transformada de Fourier, su condición de existencia es muy restrictiva (no existe en señales como, por ejemplo, escalón o seno) y por ello se utiliza más frecuentemente la transformada de Laplace para ello. El análisis se realiza en base al valor de los polos y ceros de G(s).

Revisión de transformadas de Fourier y Laplace de señales y secuencias

Teorema fundamental

En sistemas discretos lineales también se verifica el teorema fundamental, es decir con transformadas de Fourier existe un operador $\mathcal{G}(w)$ tal que

$$\mathcal{Y}(w) = \mathcal{G}(w) \quad \mathcal{U}(w)$$

Y con transformadas de Laplace se verifica una expresión similar

$$\mathcal{Y}(s) = \mathcal{G}(s) \quad \mathcal{U}(s)$$

En la realidad ninguna de las dos trasformadas da buenos resultados para analizar los sistemas discretos. La primera por lo ya dicho de condición de existencia muy restrictiva. La segunda porque da lugar a funciones de transferencia no racionales, cuyos polos y ceros son difíciles de calcular y además son periódicos y por tanto infinitos.

Transformada z de Secuencias. Modelado de Sistemas

- Revisión de transformadas de Fourier y Laplace de señales y secuencias
- Transformada z de una secuencia
  - Convergencia de la transformada z
- Transformada z inversa
- Propiedades de la transformada z
- Función de transferencia en z
- Representaciones gráficas de los sistemas discretos

Transformada z de una secuencia

Es la utilizada para estudiar los sistemas discretos.

Dada una secuencia real $\{x_k\}$ se define su transformada z como la función compleja:

$$X(z) = Z\{x_k\} = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x_k z^{-k} \quad \text{con} \quad z \in C$$

Las transformadas de algunas secuencias tipo son:

- Secuencia impulso unitario $\{\delta_k\} = \{1, 0, 0, 0, 0 \cdots\}$

$$\Delta(z) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta_k z^{-k} = z^0 = 1$$

- Secuencia escalón unitario $\{u_k\} = \{1, 1, 1, 1, 1 \cdots\}$ con $|z| > 1$

$$U(z) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} u_k z^{-k} = \sum_{k=0}^{\infty} z^{-k} = \frac{1}{1 - z^{-1}} = \frac{z}{z - 1}$$

Transformada z de una secuencia

- Secuencia exponencial $\{x_k\} = \{1, \mathrm{a}, a^2, a^3, \cdots\}$ con $|az^{-1}| < 1$, es decir $|z| > a$

$$X(z) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x_k z^{-k} = \sum_{k=0}^{\infty} \left(a z^{-1}\right)^k = \frac{1}{1 - a z^{-1}} = \frac{z}{z - a}$$

Obsérvese que la convergencia de las transformadas de las señales depende de los valores de z. En los dos casos anteriores para valores de z situados en el plano complejo en el exterior de circunferencias, en el primer caso de radio 1 y en el segundo de radio a.

Para aquellas señales en las que existan transformadas de Fourier y Laplace y transformada z , éstas se relacionan con las siguientes expresiones:

- Transformada de Fourier y transformada z $\quad z = e^{jwT}$
- Transformada de Laplace y transformada z $\quad z = e^{sT}$

Convergencia de la transformada z

Para estudiar la convergencia de la transformada z de una secuencia considérese el valor de la misma para la secuencia

$\{x_k\} = \{\cdots, -1, -1, -1, 0_0, 0, 0, 0, \cdots\}$

Su valor es:

$$X(z) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x_k z^{-k} = -\sum_{k=-\infty}^{-1} z^{-k} = -\sum_{k=1}^{\infty} z^{k} = -\frac{z}{1-z} = \frac{z}{z-1}$$

Es el mismo que el de la secuencia escalón pero el tercer sumatorio de la expresión sólo converge para $|z| < 1$, es decir en el interior de una circunferencia de radio 1.

Convergencia de la transformada z

Este ejemplo es generalizable y permite realizar las siguientes afirmaciones:

- Pueden existir dos secuencias que tengan la misma transformada z. Ambas se diferencian por su dominio de convergencia que es el interior o exterior de una circunferencia.
- Las secuencias que tienen nulos los elementos de índice negativo convergen en el exterior de circunferencias cuyo radio lo define la distancia al origen del polo más alejado del mismo.
- Las secuencias que tienen nulos los elementos de índice positivo convergen en el interior de circunferencias cuyo radio lo define el polo más cercano al origen.
- El dominio de convergencia de secuencias en general tiene forma de corona circular.

Transformada z de Secuencias. Modelado de Sistemas

- Revisión de transformadas de Fourier y Laplace de señales y secuencias
- Transformada z de una secuencia
  - Convergencia de la transformada z
- Transformada z inversa
- Propiedades de la transformada z
- Función de transferencia en z
- Representaciones gráficas de los sistemas discretos

Transformada z inversa

Objetivo: Obtención de la secuencia $\{x_k\}$ a partir de $X(z)$

Unicidad: Ya se ha visto que pueden existir dos secuencias que tengan la misma transformada inversa. En la asignatura se trabajará, en general, con las que tienen nulos los elementos de índice negativo con lo que cuando se busque la transformada inversa de una transformada *z* será a esta secuencia de este tipo a la que nos referiremos.

Métodos: Existen tres métodos de obtener la transformada inversa

- Por la división larga $$G(z)=\frac{N(z^{-1})}{D(z^{-1})}=\sum_{k=0}^{\infty}x_k z^{-k}$$

- Por la descomposición en fracciones simples

$$X(z)=\sum_{i=1}^{N}\frac{A_i}{z-a_i}=\sum_{i=1}^{N}\frac{B_i}{1-b_i z^{-1}}$$

Hallando la antitransformada de cada fracción, y sumando las secuencias

Transformada z inversa

Métodos: Existen tres métodos de obtener la transformada inversa

- Por el método de los residuos (si $X(z)$ es racional)

$$x_n = \frac{1}{2j\pi}\oint_C X(z)z^{n-1}dz = \sum_{\text{Polos Interiores a C}} \text{Residuos de } X(z)z^{n-1}$$

La obtención de esta expresión utiliza teoría de variable compleja, cuyo tratamiento no forma parte de los objetivos de esta asignatura.

Cálculo de los residuos:

- Si $X(z)$ tiene un polo en a: $\quad X(z) = \dfrac{f(z)}{z-a}$

  Residuos de $X(z)$ para $a \Rightarrow f(a)$

- Si $X(z)$ tiene un polo múltiple en a: $\quad X(z) = \dfrac{f(z)}{(z-a)^m}$

  Residuos de $X(z)$ para $a \Rightarrow \dfrac{1}{(m-1)!}\left[\dfrac{d^{m-1}f(z)}{dz^{m-1}}\right]_{z=a}$

Transformada z de Secuencias. Modelado de Sistemas

- Revisión de transformadas de Fourier y Laplace de señales y secuencias
- Transformada z de una secuencia
  - Convergencia de la transformada z
- Transformada z inversa
- Propiedades de la transformada z
- Función de transferencia en z
- Representaciones gráficas de los sistemas discretos

Propiedades de la transformada z

Linealidad

La transformada z de una secuencia es un operador lineal.

Así para dos secuencias

$$\{x_k\} \Rightarrow Z[x_k] = X(z) \quad ; \quad \{y_k\} \Rightarrow Z[y_k] = Y(z)$$

Para cualquier α, β reales se cumple

$$\alpha\, Z[x_k] + \beta\, Z[y_k] = Z[\alpha\, x_k + \beta\, y_k]$$

Desplazamiento. Para la secuencia $\{x_k\} \Rightarrow Z[x_k] = X(z)$

Se verifica que la secuencia retrasada n periodos, cumple

$$\{x_{k-n}\} \Rightarrow Z[x_{k-n}] = z^{-n} X(z)$$

Al operador z^{-1} se le conoce como “operador desplazamiento unitario”

Propiedades de la transformada z

Multiplicación por una exponencial

Para la secuencia $\{x_k\} \Rightarrow Z[x_k] = X(z)$

Se cumple para todo a, distinto de cero $\{a^k x_k\} \Rightarrow Z\left[a^k x_k\right] = X\left(a^{-1} z\right)$

Convolución de secuencias

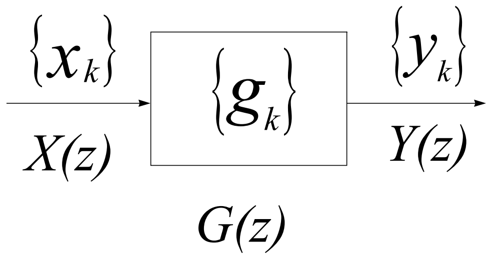
La transformada z del producto de convolución de dos secuencias es el producto de las transformadas. Así para dos secuencias:

$$\{g_k\} \Rightarrow Z[g_k] = G(z) \quad ; \quad \{x_k\} \Rightarrow Z[x_k] = X(z)$$

La secuencia convolución de ambas $y_k = \sum^{\infty} g_n x_{k-n}$

cumple $Y(z) = G(z)\, X(z)$

Esta expresión permite un manejo cómodo de los sistemas discretos



Propiedades de la transformada z

Teorema del valor inicial

En secuencias de índice positivo ($x_k=0$ para $k<0$), se verifica que:

$$x_0 = \lim_{z\to\infty} X(z)$$

(en secuencias de índice positivo, los dominios de convergencia son de la forma $|z|>\rho$)

Teorema del valor final

En secuencias de índice positivo ($x_k=0$ para $k<0$), con transformada $X(z)$ que cumpla que el radio de convergencia de $(1-z^{-1})\,X(z)$ sea $\rho<1$, se verifica que:

$$x_\infty = \lim_{k\to\infty} x_k = \lim_{z\to 1}\left[\left(1-z^{-1}\right)X(z)\right]$$

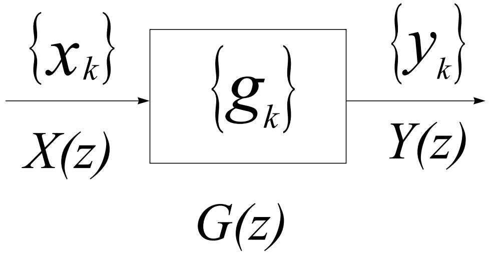
Transformada z de Secuencias. Modelado de Sistemas

- Revisión de transformadas de Fourier y Laplace de señales y secuencias
- Transformada z de una secuencia
  - Convergencia de la transformada z
- Transformada z inversa
- Propiedades de la transformada z
- Función de transferencia en z
- Representaciones gráficas de los sistemas discretos

Función de transferencia en z

Para un sistema discreto, con secuencia de ponderación $\{g_k\}$, se cumple:

$$Y(z) = G(z)\, X(z)$$



A $G(z)$ se le denomina función de transferencia en z

Primera opción de cálculo:

Ecuación en diferencias $\Rightarrow \{g_k\} \Rightarrow G(z)$

Segunda opción de cálculo

Ecuación en diferencias $\Rightarrow G(z)$

La ecuación en diferencias (sistema dinámico y lineal) se puede expresar como:

$$y_k + a_1\, y_{k-1} + \cdots + a_n\, y_{k-n} = b_0 u_k + b_1 u_{k-1} + \cdots + b_m u_{k-m}$$

Función de transferencia en z

$$y_k + a_1\, y_{k-1} + \cdots + a_n\, y_{k-n} = b_0 u_k + b_1 u_{k-1} + \cdots + b_m u_{k-m}$$

Como se cumple para cualquier *k*, se puede expresa

$$\{y_k\} + a_1 \{y_{k-1}\} + \cdots + a_n \{y_{k-n}\} = b_0 \{u_k\} + b_1 \{u_{k-1}\} + \cdots + b_m \{u_{k-m}\}$$

Calculando la transformada z de las dos partes de la igualdad, y teniendo en cuenta las propiedades de linealidad y desplazamiento:

$$Y(z) + a_1 z^{-1} Y(z) + \cdots + a_n z^{-n} Y(z) = b_0 U(z) + b_1 z^{-1} U(z) + \cdots + b_m z^{-m} U(z)$$

La relación entrada-salida del sistema será

$$Y(z) = \frac{b_0 + b_1 z^{-1} + \cdots + b_m z^{-m}}{1 + a_1 z^{-1} + \cdots + a_n z^{-n}} U(z)$$

Por lo que la función de transferencia del sistema será

$$\frac{Y(z)}{U(z)} = G(z) = \frac{b_0 + b_1 z^{-1} + \cdots + b_m z^{-m}}{1 + a_1 z^{-1} + \cdots + a_n z^{-n}}$$

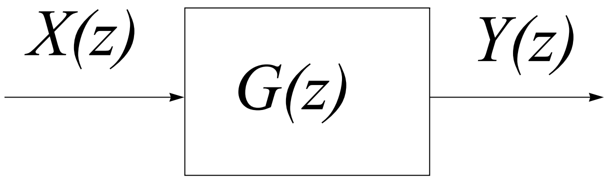
Transformada z de Secuencias. Modelado de Sistemas

- Revisión de transformadas de Fourier y Laplace de señales y secuencias
- Transformada z de una secuencia
  - Convergencia de la transformada z
- Transformada z inversa
- Propiedades de la transformada z
- Función de transferencia en z
- Representaciones gráficas de los sistemas discretos

Representaciones gráficas de los sistemas discretos

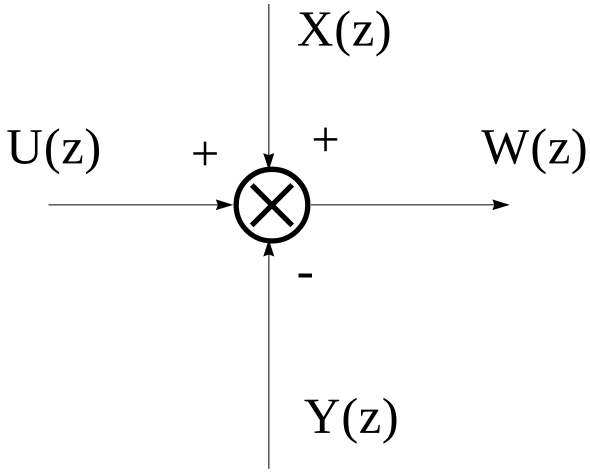
Sistema aislado

$$Y(z)=G(z)\ U(z)$$



Sumador

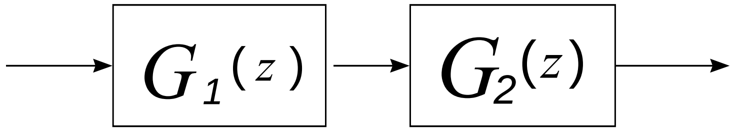
$$W(z)=U(z)+X(z)-Y(z)$$



Representaciones gráficas de los sistemas discretos

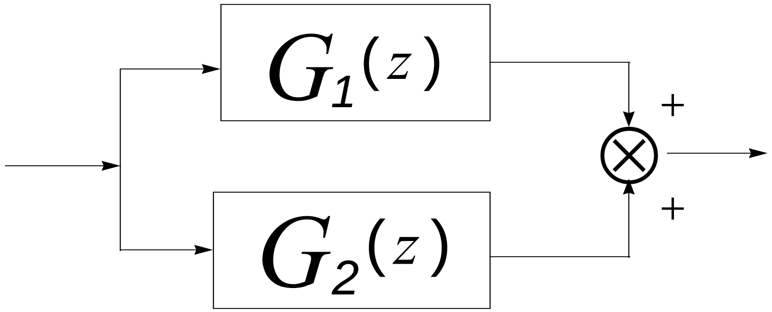
Sistemas en serie

$$G(z)=G_1(z)\ G_2(z)$$



Sistemas en paralelo

$$G(z)=G_1(z)\ +\ G_2(z)$$



Sistemas realimentados

$$G(z)=\frac{G_1(z)}{1+G_1(z)G_2(z)}$$