Capítulo 1 – Matemática Financeira

1.1 Apresentação do capítulo

A matemática financeira trata da comparação de valores monetários ao longo do tempo. Através de seu estudo, podemos analisar e comparar alternativas de investimento e financiamento, como:

- ✓ qual o valor de R$100.000,00 daqui a um ano?
- ✓ como comparar valores no tempo (R$523.000,00 hoje contra R$532.400,00 daqui a um mês ou com R$597.600,00 daqui a um ano)?
- ✓ quais as alternativas para tomar dinheiro emprestado, considerando os custos embutidos que você deverá arcar para saldar as suas dívidas futuras?

O objetivo deste capítulo é apresentar os conceitos básicos necessários para o bom entendimento das principais fórmulas da matemática financeira, seus elementos e seus respectivos cálculos. Ao final, você terá visto:

- ✓ a definição de juro e de taxas de juro;
- ✓ os regimes de capitalização;
- ✓ a diferença das taxas de juro nominais, efetivas e reais;
- ✓ uma visão geral da análise dos diferentes fluxos de caixa, do valor presente líquido (VPL) e da taxa interna de retorno (TIR).

Na página seguinte, você encontrará o quadro de orientações de estudo para a prova de certificação do PQO BM&FBOVESPA deste capítulo. Identifique a prova que irá fazer e estude os tópicos sugeridos.

Bons estudos!!!

INSTITUTO EDUCACIONAL
BM&FBOVESPA
A Nova Bolsa

Quadro de orientações de estudo para a prova de certificação do PQO BM&FBOVESPA

Tipos de provas	Item 1.2 Pág. 1	Item 1.3 Pág. 4	Item 1.4 Pág. 26	Item 1.5 Pág. 28	Item 1.6 Pág. 37	Item 1.7 Pág. 39
Operações BM&FBOVESPA	✓	✓	✓	✓	✓	✓
Operações segmento Bovespa	✓	✓	✓	✓	✓	✓
Operações segmento BM&F	✓	✓	✓	✓	✓	✓
Comercial	✓	✓	✓	✓	✓	✓
Compliance	✓					
Risco	✓	✓	✓	✓	✓	✓
Back Office BM&FBOVESPA	✓	✓	✓	✓	✓	✓
Back Office segmento Bovespa	✓	✓	✓	✓	✓	✓
Back Office segmento BM&F	✓	✓	✓	✓	✓	✓

1.2 Juro e taxas de juro

O juro representa o custo do dinheiro tomado emprestado ou, analogamente, a remuneração pelo sacrifício de adiar uma decisão de gasto/consumo e aplicar o capital (C_0) por certo número de períodos (n).

Definições

Capital: valor aplicado por meio de alguma operação financeira. Também conhecido como principal, valor atual, valor presente ou valor aplicado.
Em geral, o capital costuma ser denotado por C_0.

Número de períodos: tempo, prazo ou período em determinada unidade de tempo (dias, meses, anos etc.) em que o capital é aplicado.
Em geral, o número de períodos costuma ser simbolizado por n.

Suponha que você resolva vender o seu apartamento pelo valor de R$100.000,00 e receba uma proposta de compra por R$98.000,00 a vista quando da emissão do boleto de compra-venda ou R$80.000,00 nesse ato e mais R$20.000,00 na escrituração, que será realizada 30 dias depois. Qual será o melhor negócio para você: receber R$98.000,00 hoje ou as duas parcelas sugeridas pelo comprador? Para resolver a questão precisamos entender o que são juros.

Qual a diferença entre juro e taxa de juro?

Juro (J): valor expresso em dinheiro (em reais, por exemplo) referente a determinado capital e para determinado período. Pode também ser definido como a remuneração do capital, ou seja, o valor pago pelos devedores aos emprestadores em troca do uso do dinheiro. Ao fazer uma aplicação financeira, o montante final **(Cn)** resgatado após **n** períodos deve ser igual ao capital inicial **(C_0)** aplicado mais os juros **(J)** ganhos na operação. Logo, podemos escrever:

Montante final = Capital inicial + J

ou: $Cn = C_0 + J$

Portanto: $J = Cn - C_0$

Taxa de juro (i): é a porcentagem aplicada ao capital inicial que resulta no montante de juros (J). Conceitualmente, a taxa de juro é o custo de oportunidade do capital, isto é, a taxa paga/recebida para que um capital seja aplicado e resgatado no futuro e não gasto no presente. A taxa de juro pode ser calculada da seguinte forma:

$$i = \left(\frac{C_n}{C_0} - 1 \right)$$

A taxa de juro é sempre expressa em porcentagem; para tal, basta multiplicar o resultado por 100%.

A partir do cálculo da taxa de juro, é possível calcular diretamente o montante de juros. Observe:

– sendo a fórmula da taxa de juro dada por: $i = \left(\frac{C_n}{C_0} - 1\right)$

– esta fórmula pode ser escrita como: $i = \left(\frac{C_n}{C_0} - \frac{C_0}{C_0}\right) \Rightarrow i = \left(\frac{C_n - C_0}{C_0}\right)$

– sendo o montante de juro calculado como: $J = C_n - C_0$

– substituindo J na fórmula da taxa de juros: $i = \left(\frac{J}{C_0}\right)$

Portanto, pode-se obter o montante de juros por: $\mathbf{J = i \times C_0}$

Assimilado este conceito, você optaria por receber R$98.000,00 a vista ou R$80.000,00 hoje e mais R$20.000,00 em um mês? Logicamente, a resposta dependerá da taxa de juro praticada no mercado. Conforme a taxa vigente, poderá ser mais vantajoso receber R$98.000,00 a vista e aplicá-los em uma instituição financeira durante um mês ou receber R$80.000,00 hoje, aplicá-los por um mês e, no final desse período, receber mais R$20.000,00 do comprador. Observe que, para tomar essa decisão, é preciso comparar um valor atual com um valor em uma data futura.

Exemplos de cálculos de juros, taxas de juro e do capital

a) Comprei um título por R$98.039,22 que vai pagar R$100.000,00 em um mês. Qual a taxa mensal da aplicação e o montante de juros recebido?

Solução: pelos dados do problema:

C_0 = R$98.039,22

Cn = R$100.000,00

n = 1 mês

i = ?

J = ?

$$i = \left(\frac{C_n}{C_0} - 1\right) \Rightarrow i = \left(\frac{100.000,00}{98.039,22} - 1\right)$$
$$i = 0{,}0199 \text{ ao mês}$$

Para obter a taxa em porcentagem, basta multiplicá-la por 100: 0,0199 x 100% = 1,99% ao mês.

J = 100.000,00 – 98.039,22 = 1.960,78

Ou, pela fórmula direta: $J = 0{,}0199 \times 98.039{,}22 = 1.960{,}78$

Repare que, ao calcular a taxa de juro, no resultado está especificada a periodicidade da taxa, o que é muito importante. No caso, como a aplicação foi de um mês, a taxa calculada é a taxa mensal, ou ao mês.

b) A taxa de juro é igual a 20% ao ano. Qual o valor, hoje (C_0), de um título cujo valor de resgate é R$50.000,00 e que vence daqui a um ano?

Solução

O enunciado do problema nos diz que:

C_0 = ?

Cn = R$50.000,00

n = 1 ano

i = 20% ao ano

$$i = \left(\frac{C_n}{C_0} - 1\right) \times 100 \Rightarrow 0{,}20 = \left(\frac{50.000,00}{C_0} - 1\right)$$
$$C_0 = 41.666{,}67$$

Ou seja, se uma aplicação for feita hoje no valor de R$41.666,67 à taxa de 20% ano, após um ano será resgatado R$50.000,00.

Utilizando a fórmula para calcular a taxa de juro, $i = \left(\frac{C_n}{C_0} - 1\right)$, o valor futuro pode ser facilmente encontrado:

$$\mathbf{C_n = C_0(1+i)}$$

Pelos dados do exemplo anterior, tem-se:

$$C_n = 41.666,67\ x\ (1+0,20) \Rightarrow C_n = 50.000,00$$

O montante final (C_0) obtido na aplicação financeira também é conhecido como **VALOR FUTURO** (VF).

Exemplo: se eu aplicar R$50.000,00 por um ano à taxa de juro de 13% ao ano, qual o valor futuro do resgate?

$$C_n = 50.000,00 \times (1+0,13) \Rightarrow C_n = 56.500,00$$

Neste caso, o montante de juros é $J = 0,13 \times 50.000,00 = 6.500,00$, que é a diferença entre o capital aplicado e o valor futuro esperado.

1.3 Regimes de capitalização

As taxas de juro foram calculadas apenas para um único período, entretanto, para resolver problemas de cálculo de taxas de juro em dois ou mais períodos é necessário trabalhar com a noção de **regime de capitalização**.

Definições

Regime de capitalização: é a forma como a taxa de juro incide sobre o capital inicial em vários períodos de tempo.

É possível destacar os seguintes regimes de capitalização:

- **Regime de Capitalização Simples**: os juros de cada período são sempre calculados em relação ao capital inicial (C_0);
- **Regime de Capitalização Composta**: os juros de cada período são calculados com base no capital inicial (C_0), acrescido dos juros relativos aos períodos anteriores.

A taxa de juro do Regime de Capitalização Simples é conhecida como taxa de juro simples. Já no Regime de Capitalização Composta, é definida como taxa de juros compostos.

Algumas características são iguais nos dois regimes de capitalização:

- os juros são pagos ou recebidos ao final de cada período de capitalização;
- o capital, aplicado ou emprestado, é capitalizado a cada período de tempo;
- os períodos de tempo são discretos, isto é, são pontuais; por exemplo: dias, meses e anos.

A seguir, serão detalhados os regimes de capitalização.

REGIME DE CAPITALIZAÇÃO SIMPLES OU JUROS SIMPLES

No regime de capitalização simples, como dito anteriormente, as taxas de juro (i) – denominadas de juro simples – recaem sempre sobre o capital inicial (C_0). Dessa forma, ao resgatar a aplicação corrigida por juros simples, o montante final (C_n) – ou valor futuro (VF) – será o capital inicial depositado acrescido do montante de juros ganhos nos n períodos em que o capital ficou aplicado.

Para entender o funcionamento do regime de capitalização simples, suponha que você aplicou R$10.000,00, à taxa de juro simples de 2% ao mês (a.m.), por quatro meses, corrigindo o capital sempre no fim de cada mês. Qual o montante final da aplicação? Vamos acompanhar esta operação passo a passo:

Período	Capitalização	Fórmula
Data 0 (dia da operação)	C_0 = R$10.0000 i = 2% a.m. = 0,02 a.m. n = 4 meses	Não há correção do capital inicial, que ocorrerá somente a partir do primeiro mês da aplicação.
Mês 1	**C_1 = valor futuro (VF) ao final do mês 1**	$C_1 = C_0 + i \times C_0$ $C_1 = C_0 \times (1 + 1 \times i)$

	$C_1 = 10.000 + 0,02 \times 10.000$ $C_1 = 10.000 \times (1 + 1 \times 0,02)$ $C_1 = 10.000 \times (1,02) = 10.200$	
Mês 2	**C_2 = valor futuro (VF) ao final do mês 2** $C_2 = [10.000 + (0,02 \times 10.000)] + (0,02 \times 10.000)$ $C_2 = 10.000 \times [(1 + 0,02) + 0,02]$ $C_2 = 10.000 \times [1 + 2 \times 0,02]$ $C_2 = 10.000 \times [1 + 0,04]$ $C_2 = 10.000 \times [1,04] = 10.400$	$C_2 = [C_0 + (i \times C_0)] + (i \times C_0)$ $C_2 = C_0 \times [(1 + i) + i]$ $C_2 = C_0 \times [1 + 2 \times i]$
Mês 3	**C_3 = valor futuro (VF) ao final do mês 3** $C_3 = [10.000 \times (1 + 2 \times 0,02)] + (0,02 \times 10.000)$ $C_3 = 10.000 \times [(1 + 2 \times 0,02) + 0,02]$ $C_3 = 10.000 \times [1 + 3 \times 0,02]$ $C_3 = 10.000 \times [1 + 0,06]$ $C_3 = 10.000 \times [1,06] = 10.600$	$C_3 = [C_0 + (1 + 2 \times i)] + (i \times C_0)$ $C_3 = C_0[(1 + 2 \times i) + i]$ $C_3 = C_0 \times [1 + 3 \times i]$
Mês 4	**C_4 = valor futuro (VF) ao final do mês 4** $C_4 = [10.000 \times (1 + 3 \times 0,02)] + (0,02 \times 10.000)$ $C_4 = 10.000 \times [(1 + 3 \times 0,02) + 0,02]$ $C_4 = 10.000 \times [1 + 4 \times 0,02]$ $C_4 = 10.000 \times [1 + 0,08]$ $C_4 = 10.000 \times [1,08] = 10.800$	$C_4 = [C_0 + (1 + 3 \times i)] + (i \times C_0)$ $C_4 = C_0[(1 + 3 \times i) + i]$ $C_4 = C_0 \times [1 + 4 \times i]$

Note que, a cada mês, as taxas de juro recaem sempre sobre o capital inicial (i x C_0) em parcelas que são somadas ao valor futuro do mês anterior, até chegar ao valor final de resgate (C_4). Assim, a cada mês, o valor do montante de juros "novos" é sempre o mesmo (neste exemplo, igual a R$200,00).

Assim podemos definir a expressão matemática de Capitalização Simples para um número n de períodos como:

$$\mathbf{C_n = C_0 \times (1 + i \times n)}$$

onde:

C_0 = valor presente (capital inicial)

C_n = valor futuro após n períodos

n = número de períodos

i = taxa de juro

Importante

O prazo da operação (número de períodos – n) e a taxa de juro (i) devem ser expressos na mesma unidade de tempo. Caso, por exemplo, a taxa de juro esteja expressa ao ano, o número de períodos deve se referir à quantidade de anos.

Exemplo de regime de capitalização simples

Ao aplicar um montante de R$1.000,00, à taxa de juro de 3% a.m., por sete meses, qual é o valor de resgate desta operação?

Solução: substituindo os valores dados no problema, na fórmula de capitalização simples, temos:

$$\begin{aligned} C_n &= C_0 \times (1 + i \times n) \\ C_7 &= 1.000 \times (1 + 0{,}03 \times 7) \\ C_7 &= 1.000 \times (1 + 0{,}21) \\ C_7 &= 1.000 \times (1{,}21) = 1.210 \end{aligned}$$

Dessa forma, após sete meses, à taxa de juro simples de 3% ao mês, o valor de resgate será de R$1.210,00.

O montante de juros somado a cada mês ao capital inicial é de:

$J = i \times C_0 = 0{,}03 \times 1.000 = 30$ por mês

No total dos sete meses:

$J = n \times i \times C_0 = 7 \times 0{,}03 \times 1.000 = 210$

que é justamente o montante adicionado ao capital inicial para chegar ao valor de resgate.

VARIÁVEIS DA FÓRMULA DE JUROS SIMPLES

A partir da fórmula de capitalização simples, é possível extrair outras três fórmulas muito úteis para os cálculos financeiros. Observe a seguir:

1) Valor presente

Para encontrar a fórmula do valor presente (ou capital inicial) a partir da fórmula do valor futuro na capitalização simples, basta isolar o termo C_0 na equação:

$$C_0 = \frac{C_n}{(1 + i \times n)}$$

2) Taxa de juro

Conhecendo o valor inicial, o valor final e o prazo da aplicação, é possível encontrar a taxa de juro pela seguinte fórmula:

$$i = \frac{\frac{C_n}{C_0} - 1}{n}$$

3) Prazo da operação

Dada uma determinada taxa de juro, o valor inicial do investimento e o valor final que se deseja alcançar, qual o prazo que o capital deve permanecer na aplicação? Esta pergunta pode ser diretamente respondida pela fórmula a seguir:

$$n = \frac{\frac{C_n}{C_0} - 1}{i}$$

Exemplos

1) Você fez um empréstimo de R$10.000,00 à taxa de juro simples de 1,5% ao mês a ser pago em 12 meses. Qual o montante final do empréstimo?

$$C_n = 10.000 \times (1 + 0{,}015 \times 12)$$
$$C_n = 10.000 \times (1 + 0{,}18)$$
$$C_n = 10.000 \times (1{,}18) = 11.800$$

Logo, ao final do empréstimo você irá pagar ao credor R$11.800,00.

2) Qual é o valor presente de um empréstimo que deve ser pago em seis meses, cujo valor futuro é de R$13.400,00, admitindo uma taxa de juro simples de 2% ao mês?

$$C_0 = \frac{13.400}{(1+0{,}02\times 6)}$$

$$C_0 = \frac{13.400}{(1+0{,}12)}$$

$$C_0 = \frac{13.400}{(1{,}12)} = 11.964{,}28$$

Assim, para resgatar R$13.400,00 em seis meses à taxa de 2% ao mês, deve-se aplicar, hoje, R$11.964,28.

3) Se você aplicar R$50.000,00 à taxa de juro simples de 12% ao ano, quantos anos vai esperar para triplicar este valor, atingindo, portanto, R$150.000,00?

$$n = \frac{\frac{150.000}{50.000} - 1}{0{,}12}$$

$$n = \frac{3-1}{0{,}12} \cong 16{,}67\text{anos}$$

Isto é, para atingir R$150.000,00, aplicando R$50.000,00 à taxa de juros simples de 12% ao ano, o capital deve permanecer aplicado 16,67 anos.

4) Uma aplicação de R$100.000,00 foi resgatada 13 meses depois, resultando em um valor final de R$123.000,00. Qual a taxa de juro da operação, considerando que foi feita capitalização simples?

$$\mathrm{i} = \frac{\frac{123.000}{100.000} - 1}{13}$$

$$\mathrm{i} = \frac{1{,}23-1}{13} \cong 0{,}0177 \text{ ao mês} = 1{,}77\% \text{ ao mês}$$

Assim, o capital inicial de R$100.000,00 deve ser corrigido à taxa de juro simples de 1,77% ao mês para que se resgate R$123.000,00 após 13 meses.

Importante

- Note que a unidade de tempo dos períodos das aplicações e da taxa de juro deve ser a mesma. Ou seja, quando os prazos estiverem em meses, a taxa de juro resultante deve ser expressa ao mês. Se o prazo estiver expresso em anos, a taxa de juro deve ser expressa ao ano.

Taxa proporcional

No regime de capitalização simples, duas taxas são ditas proporcionais quando aplicadas a um mesmo capital, e por um mesmo prazo, geram o mesmo montante. Pelo método de cálculo de juros simples, duas taxas de juro, i_1 e i_2, serão consideradas proporcionais se, ao aplicar dois montantes iniciais iguais (C_0), por dois períodos distintos de capitalização, n_1 e n_2, os montantes finais resgatados forem iguais após determinado período de tempo, ou seja:

$C_n = C_0(1+i_1 \times n_1)$ e $C_n = C_0(1+i_2 \times n_2)$

em que:

C_0 = valor presente

C_n = valor futuro após n períodos

n = número de períodos

i = taxa de juro

Como os montantes finais (C_n) são iguais, é possível escrever:

$$C_0(1+i_1 \times n_1) = C_0(1+i_2 \times n_2)$$

Logo, as taxas i_1 e i_2 são ditas proporcionais quando:

$$i_1 \times n_1 = i_2 \times n_2$$

O que pode ser reescrito da seguinte forma:

$$i_1 = \frac{i_2 \times n_2}{n_1}$$

Esta última fórmula mostra que é possível calcular a taxa de juro i_1 proporcional à taxa de juro i_2 conhecendo-se apenas o prazo de capitalização n_1 e os dados da outra aplicação (i_2 e n_2).

Exemplo

1) Qual é a taxa anual proporcional à taxa de juro de 1,5% ao mês?

i_1 = taxa proporcional anual a ser encontrada

n_1 = 1 ano

i_2 = 1,5% ao mês

n_2 = 12 meses

Logo:

$$i_1 = \frac{1{,}5\% \ \times 12}{1} = 18\% \ ao \ ano$$

2) Qual é a taxa ao dia proporcional à taxa de juro de 20% ao ano, considerando-se 360 dias corridos?

i_1 = taxa proporcional ao dia a ser encontrada

n_1 = 360 dias corridos

i_2 = 20% ao ano

n_2 = 1 ano

logo:

$$i_1 = \frac{20\% \ \times 1}{1360} = 0{,}055\% \ ao \ dia$$

Regime de Capitalização Composta ou Juros Compostos

No regime de Capitalização Composta, os juros de cada período incidem sobre o capital inicial (C_0) acrescido do montante de juros dos períodos anteriores, e não somente sobre o C_0 em cada período, como na capitalização simples. Dessa forma, o crescimento do valor futuro passa a ser exponencial e não mais linear, como no regime de capitalização simples.

Vamos analisar uma aplicação feita sob a capitalização composta para compreender a formação do valor futuro (VF) neste tipo de operação. Suponha que você aplicou R$10.000,00, à taxa de juro composta de 2% ao mês, por quatro meses. Qual será o montante final da aplicação? Vamos acompanhar esta operação passo a passo:

Período	Capitalização	Fórmula
Data 0 (dia da operação)	C_0 = R$10.0000 i = 2% a.m. = 0,02 a.m. n = 4 meses	Não há correção do capital inicial, que ocorrerá somente a partir do primeiro mês da aplicação.
Mês 1	**C_1 = valor futuro (VF) ao final do mês 1** $C_1 = 10.000 + 0{,}02 \times 10.000$ $C_1 = 10.000 \times (1 + 1 \times 0{,}02)$ $C_1 = 10.000 \times (1{,}02) = 10.200$	$C_1 = C_0 + i \times C_0$ $C_1 = C_0 \times (1 + 1 \times i)$
Mês 2	**C_2 = valor futuro (VF) ao final do mês 2** $C_2 = [10.000 \times (1 + 0{,}02)] \times (1 + 0{,}02)$ $C_2 = 10.000 \times (1 + 0{,}02)^2$ $C_2 = 10.000 \times (1{,}02)^2$ $C_2 = 10.000 \times 1{,}0404 = 10.404$	$C_2 = [C_0 \times (1 + 1 \times i)] \times (1 + i)$ $C_2 = C_0 \times (1 + i) \times (1 + i)$ $C_2 = C_0 \times (1 + i)^2$
Mês 3	**C_3 = valor futuro (VF) ao final do mês 3**	$C_3 = [C_0 \times (1 + i)^2] \times (1 + i)$ $C_3 = C_0 \times (1 + i)^2 \times (1 + i)$ $C_3 = C_0 \times (1 + i)^3$

	$C_3 = [10.000 \times (1+0,02)^2] \times (1+0,02)$ $C_3 = 10.000 \times (1+0,02)^3$ $C_3 = 10.000 \times (1,02)^3$ $C_3 = 10.000 \times 1,061208 = 10.612,08$	
Mês 4	**C_4 = valor futuro (VF) ao final do mês 4** $C_4 = [10.000 \times (1+0,02)^3] \times (1+0,02)$ $C_4 = 10.000 \times (1+0,02)^4$ $C_4 = 10.000 \times (1,02)^4$ $C_4 = 10.000 \times 1,082432 = 10.824,32$	$C_4 = [C_0 \times (1+i)^3] \times (1+i)$ $C_4 = C_0 \times (1+i)^3 \times (1+i)$ $C_4 = C_0 \times (1+i)^4$

Veja, na tabela acima, que a taxa de juro (i) é capitalizada sempre sobre o valor inicial, somado aos juros do período anterior. Isso caracteriza o regime de capitalização composta. Assim, podemos definir a expressão matemática da capitalização composta para um número n de períodos como:

$$\mathbf{C_n = C_0 \times (1+i)^n}$$

onde:

C_0 = valor presente (capital inicial)

C_n = valor futuro após n períodos

n = número de períodos

i = taxa de juro em porcentagem

Esta expressão mostra como um capital inicial (C_0), aplicado por n períodos, à de juro (i) composta, transforma-se no valor futuro (C_n).

Importante

Assim como no regime de capitalização simples, o prazo da operação (número de períodos) e a taxa de juro devem ser expressos na mesma unidade de tempo. Caso, por exemplo, a taxa de juro seja expressa ao ano (12% ao ano, por exemplo), o número de períodos deve se referir à quantidade de anos.

Variáveis da fórmula de juros compostos

São quatro (4) as variáveis na composição da fórmula de juros compostos. Observe:

$$C_n = C_0 \times (1+i)^n$$

Conhecendo três elementos da expressão, é possível calcular o restante, bastando, para isso, realizar algumas transformações na fórmula básica.

1) Valor presente

Para calcular o valor do capital inicial (valor presente) que deve ser aplicado, a uma dada taxa de juro, para resgatar um determinado montante, basta isolar C_0 em um dos lados da equação do valor futuro da capitalização composta, resultando em:

$$C_0 = \frac{C_n}{(1+i)^n}$$

Podemos ainda obter o valor presente a partir dos juros do período. Observe abaixo:

$$\frac{C_n}{(1+i)^n} = \frac{C_0 + J}{(1+i)^n}$$

$$C_0 - \frac{C_0}{(1+i)^n} = \frac{J}{(1+i)^n}$$

$$C_0 \times (1+i)^n - C_0 = J$$

$$C_0\left[(1+i)^n - 1\right] = J$$

$$C_0 = \frac{J}{\left[(1+i)^n - 1\right]}$$

2) Montante de juros

Considerando que o montante de juros (J) é definido pela expressão: $J = C_n - C_0$, o valor de J é encontrado diretamente quando substituímos o valor futuro (C_n) pela sua fórmula de cálculo. Assim:

$$J = C_0 \times (1+i)^n - C_0$$

ou: $$J = C_0 \times \left[(1+i)^n - 1\right]$$

3) Taxa de juro

O montante de juros também pode ser encontrado diretamente pela taxa de juro. A fórmula direta da taxa de juro derivada a partir do valor futuro é:

$$i = \left(\frac{C_n}{C_0}\right)^{\frac{1}{n}} - 1$$

4) Prazo da operação

Por fim, o prazo da operação pode ser diretamente calculado por[1]:

$$n = \frac{\ln\left(C_n / C_0\right)}{\ln(1+i)}$$

Exemplos

1) Você aplicou R$10.000,00 à taxa composta de 2,1% ao mês por sete meses. Qual é o montante, C_n, acumulado ao final desse período? Calcule o montante de juros acumulado no período.

Solução

Valor futuro (montante acumulado):

$$C_n = 10.000 \times (1 + 0{,}021)^7$$
$$C_n = 10.000 \times (1{,}021)^7$$
$$C_n = 10.000 \times 1{,}156592 = 11.565{,}92$$

Montante de juros:

$$J = 10.000 \times \left[(1 + 0{,}021)^7 - 1\right]$$
$$J = 10.000 \times [1{,}15692 - 1]$$
$$J = 10.000 \times [0{,}156592] = 1.565{,}92$$

2) Calcule o capital inicial de uma aplicação que, investida por dois meses à taxa de juro de 4% ao mês, acumulou o montante final de R$16.000,00.

[1] No Anexo você encontra os procedimentos para cálculo do logaritmo.

Solução

$$C_0 = \frac{16.000}{(1+0{,}04)^2}$$
$$C_0 = \frac{16.000}{(1{,}04)^2}$$
$$C_0 = \frac{16.000}{1{,}0816} = 14.792{,}89$$

3) Determine o capital que, aplicado durante seis meses à taxa de juro composta de 2% ao mês, obteve rendimento de R$20.000,00 de juro.

Solução

$$C_0 = \frac{20.000}{(1+0{,}02)^6 - 1}$$
$$C_0 = \frac{20.000}{(1{,}02)^6 - 1}$$
$$C_0 = \frac{20.000}{1{,}12616 - 1}$$
$$C_0 = \frac{20.000}{0{,}12616} = 158.528{,}85$$

Logo, ao aplicar R$158.528,85 durante seis meses, à taxa de juro de 2% ao mês, o retorno obtido total será de R$20.000,00.

4) Você aplicou R$50.000,00 à taxa de juro composto de 12% ao ano. Quantos anos serão necessários para triplicar o valor?

Solução

Ao triplicar o valor aplicado de R$50.000, o valor de resgate será de 3 x R$50.000 = R$150.000. Com este dado, é possível chegar à solução usando a fórmula direta do prazo da operação:

$$n = \frac{\ln\left(\frac{150.000}{50.000}\right)}{\ln(1+0{,}12)}$$

$$n = \frac{\ln(3)}{\ln(1{,}12)}$$

$$n = \frac{1{,}0986}{0{,}11333} = 9{,}69 \text{ anos}$$

Este resultado mostra que são necessários 9,69 anos para triplicar o capital inicial de R$50.000 aplicados à taxa de juro de 12% ano.

5) Se forem aplicados R$100.000,00 pelo regime de capitalização composta, obtendo um resgate de R$123.000,00 após 13 meses, qual a taxa de juro da aplicação?

Solução

$$i = \left(\frac{123.000}{100.000}\right)^{\frac{1}{13}} - 1$$

$$i = (1{,}23)^{0{,}076923} - 1$$

$$i = 1{,}01605 - 1 = 0{,}01605 \text{ ao mês}$$

Em porcentagem: 0,01605 x 100% = 1,605% ao mês

Portanto, a taxa de juro da aplicação é de 1,605 % ao mês.

Importante

- Assim como na capitalização simples, a unidade de tempo dos períodos das aplicações e da taxa de juro deve ser a mesma. Ou seja, quando os prazos estão em meses, a taxa de juro resultante deve ser expressa ao mês. Se o prazo está expresso em anos, a taxa de juro deve ser expressa ao ano. No entanto, pode haver a necessidade de alterar a periodicidade da taxa de juro e/ou do prazo. Para que isso seja possível, será preciso analisar o conceito de taxas equivalentes no regime de capitalização composta.

Taxas equivalentes

Duas taxas de juro são equivalentes se, ao aplicar um montante inicial C_0, por prazos idênticos, mas com periodicidades diferentes, o montante final, capitalizado por cada uma das taxas, for o mesmo.

No regime de juros compostos, duas taxas de juro i_1 e i_2 são consideradas equivalentes se, ao capitalizar um montante inicial C_0 pelo mesmo prazo, mas com periodicidades distintas n_1 e n_2, resultar em um mesmo montante final C_n. Dessa forma, é possível escrever que:

$$C_n = C_0(1+i_1)^{n_1} \text{ e } C_n = C_0(1+i_2)^{n_2}$$

em que:

C_0 = valor presente

C_n = valor futuro após n períodos

n = número de períodos

i = taxa de juro em porcentagem

Como os montantes finais C_n são iguais, então:

$$C_0(1+i_1)^{n_1} = C_0(1+i_2)^{n_2}$$

Elevando os dois lados da igualdade por $\frac{1}{n_1}$ e fazendo algumas manipulações algébricas chega-se a:

$$i_1 = \left[(1+i_2)^{\frac{n_2}{n_1}}\right] - 1$$

Assim, é possível encontrar a taxa i_1, equivalente à taxa de juro i_2, conhecendo os períodos de capitalização para cada uma das taxas, n_1 e n_2.

Exemplos de taxa equivalente

1) Qual a taxa diária equivalente a 6% ao mês, pelo regime de capitalização composta?

i_1 = taxa equivalente diária a ser encontrada

n_1 = 30 dias

i_2 = 6% ao mês

n_2 = 1 mês

Logo: $i_1 = \left[(1+0{,}06)^{\frac{1}{30}} - 1\right] = 0{,}00194 \text{ ao dia}$

Em porcentagem: 0,00194 x 100% = 0,194% ao dia

2) Qual a taxa anual equivalente a 1,5% ao mês, pelo regime de capitalização composta?

i_1 = taxa equivalente anual a ser encontrada

n_1 = 1 ano

i_2 = 1,5% ao mês

n_2 = 12 meses

Logo: $i_1 = \left[(1+0{,}015)^{\frac{12}{1}} - 1\right] = 0{,}1956 \text{ ao ano}$

Em porcentagem: 0,1956 x 100% = 19,56% ao ano.

Taxas acumuladas

A taxa acumulada de juros em um período é obtida mediante a aplicação da **Fórmula de Fisher**. Esta taxa é amplamente utilizada no mercado financeiro para cálculo do rendimento de investimentos que mudam sua remuneração a cada período (exemplo: fundos de investimento atrelados aos Depósitos Interfinanceiros de 1 dia).

Fórmula de Fisher:

$$(1+i_{acumulada}) = [(1+i_1)\times(1+i_2)\times(1+i_3)\times\ldots\times(1+i_n)]$$

$$i_{acumulada} = [(1+i_1)\times(1+i_2)\times(1+i_3)\times\ldots\times(1+i_n)] - 1$$

i_1 = taxa de juro referente ao período 1

i_2 = taxa de juro referente ao período 2

i_3 = taxa de juro referente ao período 3

...

i_n = taxa de juro referente ao período n

Lembrete[2]

A fórmula da taxa de juro real advém da **Fórmula de Fisher** com a qual se obtém uma taxa acumulada em um período de tempo a partir das taxas que ocorreram em seus subperíodos. Assim:

$$(1+i_{acumulada}) = (1+i_1)\times(1+i_2)\times(1+i_3)\times\ldots\times(1+i_n)$$

pode-se definir: $(1+i_{efetiva}) = (1+i_{real})\times(1+i_{inflação})$

de onde: $i_{real} = \dfrac{(1+i_{efetiva})}{(1+i_{inflação})} - 1$

Exemplos

- Caso 1

Um investidor aplicou dinheiro em um fundo que apresentou as rentabilidades citadas abaixo. Conhecendo os dados, calcule a rentabilidade acumulada no trimestre.

Outubro: 1,65%

Novembro: 2,01%

Dezembro: 1,86%

$$(1+i_{acumulada}) = (1+0{,}0165)\times(1+0{,}0201)\times(1+0{,}0186)$$

$$i_{acumulada} = (1+0{,}0165)\times(1+0{,}0201)\times(1+0{,}0186) - 1 = 0{,}0562 \, ao trimestre$$

Em porcentagem: $i_{acumulada}$= 0,0562 x 100% = 5,62% ao trimestre

[2] Este conceito será melhor discutido no item 1.4 – Taxas nominal, efetiva e real

- Caso 2

Um agente de mercado aplicou certa quantia em títulos prefixados durante 96 dias, cuja rentabilidade era de 18% a.a. Após o resgate, aplicou novamente em títulos por 120 dias, que garantiram rentabilidade de 18,50%a.a. Calcule a rentabilidade acumulada no período.

Note que, neste caso, é preciso calcular <u>a taxa equivalente para as duas aplicações</u>.

$$
\begin{aligned}
(1+\mathrm{i}_{\text{acumulada}}) &= (1+0{,}18)^{\frac{96}{360}} \times (1+0{,}185)^{\frac{120}{360}} \\
(1+\mathrm{i}_{\text{acumulada}}) &= (1{,}045124)\times(1{,}05821) \\
(1+\mathrm{i}_{\text{acumulada}}) &= 1{,}10596 \\
\mathrm{i}_{\text{acumulada}} &= 1{,}05821-1 = 0{,}10596
\end{aligned}
$$

Em porcentagem: $i_{acumulada}$= 0,10596 x 100% = 10,596% ao período

- Caso 3

Em certo ano, um indexador registrou as taxas de inflação indicadas abaixo. Calcule a inflação acumulada no período.

Janeiro: 2,2%

Fevereiro: 2,0%

Março:1,4%

Abril: 0,5%

Maio: 0,3%

Junho: 0,01%

$$
\begin{aligned}
(1+\mathrm{i}_{\text{acumulada}}) &= (1+0{,}022)\times(1+0{,}02)\times(1+0{,}014)\times(1+0{,}005)\times(1+0{,}003)\times(1+0{,}0001) \\
(1+\mathrm{i}_{\text{acumulada}}) &= (1{,}022)\times(1{,}02)\times(1{,}014)\times(1{,}005)\times(1{,}003)\times(1{,}0001) \\
(1+\mathrm{i}_{\text{acumulada}}) &= 1{,}0656 \\
\mathrm{i}_{\text{acumulada}} &= 1{,}0656-1 = 0{,}0656
\end{aligned}
$$

Em porcentagem: 0,0656 x 100 = 6,56% ao período

Taxas contínuas

Nos regimes de capitalização simples e composta, os juros são pagos ou recebidos ao final de cada período. O valor, aplicado ou emprestado, é capitalizado e tem aumento a cada intervalo de tempo considerado, sendo este discreto.

À diferença dos regimes de capitalização citados, no regime de capitalização contínua, existe pagamento de juros a cada período infinitesimal de tempo. Com isso, o capital cresce continuamente no tempo à taxa de juro instantânea.

Veja, a seguir, os conceitos relativos a este tipo de capitalização, entendendo os procedimentos de cálculos.

No regime de capitalização composta, ao investir um determinado capital (C_0), à taxa de juro (i), pelo período de n anos, obteremos um valor igual a:

$$C_n = C_0 \times (1+i)^n$$

Se a capitalização ocorrer k vezes ao ano, o valor de resgate será dado por:

$$C_n = C_0 \times \left(1+\frac{i}{k}\right)^n \times k$$

Caso o número de capitalizações tenda ao infinito (k → ∞), temos o regime de capitalização contínua. Neste caso, o valor de resgate é dado por:

$$C_n = C_0 \times e^{r \times n}$$

onde: r = taxa de juro instantânea

Para calcular a taxa de juro instantânea (r) equivalente a uma dada taxa de juro composta (i), tem-se:

$$e^{r\times n} = (i+i)^n$$
$$\ln e^{r\times n} = \ln(i+i)^n$$
$$(r\times n)\times \ln e = n \times \ln(i+i)$$
$$r \times \ln e = \ln(i+i)$$
$$r = \ln(i+i)$$

Exemplos de taxas contínuas

1) Considerando uma taxa de juro de 16% ao ano, no regime de capitalização composta, calcule a taxa instantânea de juro para 30 dias.

Solução

A taxa de juro instantânea ao ano é igual a:

r = ln (1 + 0,16) = 0,1484 ao ano

Em porcentagem: r = 0,1484 x 100 = 14,84% ao ano.

Para um período de 30 dias, a taxa é de:

$$r = 0{,}1484 \times \frac{30}{360} = 0{,}0124 \text{ ao mês}$$

Em porcentagem: r = 0,0124 x 100 = 1,24% ao mês

2) A partir de uma taxa de juro composta de 2% ao mês, qual é a taxa instantânea de juro ao semestre?

Solução

Considerando o período de um mês, temos a seguinte taxa de juro instantânea:

r = ln (1 + 0,02) = 0,0198 ao mês

Em porcentagem: r = 0,0198 x 100 = 1,98% ao mês

A taxa ao semestre é:

r = 0,0198 × 6 = 0,1188 ao semestre

Em porcentagem: r = 0,1188 x 100 = 11,88% ao semestre

3) Quais são as taxas de juro mensal e anual no regime de capitalização contínua, sabendo que a taxa instantânea de juro semestral é de 5%.

Solução

r = ln (1 + 0,05) = 0,04879 ao semestre

Em porcentagem: r = 0,04879 x 100 = 4,879% ao semestre

A taxa mensal é de:

$$r = 0{,}04879 \times \frac{1}{6} = 0{,}00813 \text{ ao mês}$$

Em porcentagem: r = 0,00813 x 100% = 0,813% ao mês

Calculando a taxa anual, tem-se:

r anual = 0,04879 × 2 = 0,09758 ao ano

Em porcentagem: 0,09758 x 100 = 9,758% ao ano

TAXAS EQUIVALENTES NA CAPITALIZAÇÃO CONTÍNUA

A razão entre o valor de resgate (Cn) e valor inicial (C0) nos regimes de capitalização contínua e de capitalização composta é dada pelas respectivas fórmulas:

$C_n / C_0 = e^{I\,n}$ = Regime de capitalização contínua

$C_n / C_0 = (1 + r)^n$ = Regime de capitalização composta

Sendo r a taxa de juro na capitalização composta.

É possível, então, concluir que:

$e^{I\,n} = (1 + r)^n \quad \Rightarrow e^{I} = (1 + r)$

e, portanto:

i = ln(1 + r)

Exemplos de taxas equivalentes na capitalização contínua

a) Dadas as taxas de juro compostas, calcule a taxa de juro contínua equivalente.

r	i
10% a.m.	i = ln (1 + 0,10) = 9,53% a.m.
21% a.a.	i = ln (1 + 0,21) = 19,06% a.a.
3,5% a.t.	i = ln (1 + 0,035) = 3,44% a.t.

b) Dadas as taxas de juro instantâneas, calcule a taxa de juro composta equivalente.

i	r
5% a.m.	$r = e^{0,05} - 1 = 5,13\%$ a.m.
17% a.a.	$r = e^{0,17} - 1 = 18,53\%$ a.a.
2% a.t.	$r = e^{0,02} - 1 = 2,02\%$ a.t.

Note que os exemplos apresentados consideraram os mesmos períodos de tempo nas duas taxas de juro. Podem existir casos, no entanto, em que uma taxa de juro (r) no regime de capitalização composta é fornecida para um período e solicita-se a taxa instantânea de juro (i) equivalente para um período diferente do anterior.

O primeiro passo para este tipo de questão consiste em achar a taxa instantânea de juro, considerando o mesmo prazo da taxa de juro composta. Feito isso, obtém-se a taxa de juro equivalente àquela obtida. Para tanto, é fundamental saber que, no regime de capitalização contínua, as taxas de juro equivalentes são linearmente proporcionais. Ou seja, uma taxa de juro instantânea de 6% ao semestre equivale a uma taxa anual de 12%. Veja os exemplos a seguir.

Exemplos de taxas contínuas

a) Considerando uma taxa de juro de 16% a.a. no regime de capitalização composta, calcule a taxa instantânea de juro para 30 dias.

A taxa de juro instantânea para um ano é igual a:

i = ln (1 + 0,16) = 14,84 % a.a.

Para um período de trinta dias, a taxa é de:

i = 0,1484 × 30 / 360 = 1,24% a.m.

b) A partir de uma taxa de juro composta de 2% a.m., qual é a taxa instantânea de juro ao semestre?

Considerando o período de um mês, temos a seguinte taxa de juro instantânea:

i = ln (1 + 0,02) = 1,98% a.m.

A taxa ao semestre é de:

i = 0,0198 × 6 = 11,88% a.s.

c) Quais são as taxas de juro mensal e anual no regime de capitalização contínua, sabendo que a taxa instantânea de juro semestral é de 5%.

i_{mensal} = 0,05 × 1/6 = 0,83% a.m.

i_{anual} = 0,05 × 2 = 10% a.a.

1.4 Taxas nominal, efetiva e real

Uma taxa de juro é definida como **nominal** quando é calculada em relação ao valor nominal da aplicação ou empréstimo, conforme o valor acordado no contrato ou título. Dessa forma, é possível notar que se trata de um valor aparente.

Em situações em que a taxa de juro é calculada sobre o valor efetivamente emprestado ou aplicado, define-se a taxa como **efetiva**. Adicionalmente, quando este valor é corrigido pela inflação do período da operação, a taxa de juro calculada é definida como **real**. Esta última é obtida pela seguinte fórmula:

$$\text{Taxa real} = \frac{(1+\text{Taxa Efetiva})}{(1+\text{Taxa de Inflação})} - 1$$

Exemplos de taxas nominal, efetiva e real

Considere que a empresa TNK obtenha um empréstimo do banco com a qual trabalha no valor de R$70.000,00 sendo que terá que pagar R$85.000,00 após quatro meses da contratação. O banco solicita que o cliente mantenha 10% do valor do empréstimo como saldo médio durante o período da operação. Além disso, foi cobrada uma taxa de abertura de crédito de R$80,00; a qual foi paga no ato da contratação. Nesses quatro meses, a taxa de inflação acumulada foi igual a 7%. Calcule as taxas de juro nominal, efetiva e real da operação.

a) Taxa nominal

$$i_{nominal} = \left(\frac{\text{Juros pagos}}{\text{Capital inicial}}\right) \times 100 = \left[\frac{(85.000 - 70.000)}{70.000}\right] \times 100 = 21{,}43\%\text{a.p} \quad \text{ou} \quad 4{,}97\%\text{a.m.}$$

b) Taxa efetiva

$$i_{efetiva} = \left(\frac{\text{Juros pagos}}{\text{Capital inicial efetivo}}\right) \times 100 =$$

$$\left[\frac{(85.000 - 0{,}10 \times 70.000) - (70.000 - 80 - 0{,}10 \times 70.000)}{70.000 - 80 - 0{,}10 \times 70.000}\right] \times 100$$

$$i_{efetiva} = 23{,}97\%\text{a.p} \quad \text{ou} \quad 5{,}52\%\text{a.m.}$$

Como o banco cobrou uma taxa para o empréstimo e estipulou que a empresa deixasse 10% do valor do empréstimo como saldo médio em conta corrente, observe que o valor efetivo do empréstimo é de R$62.920,00 (= R$70.000,00 – 0,10 × R$70.000,00 – R$80,00) e que o valor de resgate é igual a R$ 78.000 (o pagamento do empréstimo é completado pelos R$7.000,00 mantidos como saldo médio).

c) Taxa real

$$i_{real} = \left[\frac{(1+i_{efetiva})}{(1+i_{inflação})} - 1\right] \times 100 \Rightarrow i_{real} = \left[\frac{(1+0{,}2397)}{(1+0{,}07)} - 1\right] \times 100 \Rightarrow i_{real} = 15{,}86\% a.p.$$

Lembrete

Na literatura sobre este assunto, existe outra abordagem relativa ao conceito de taxa nominal e efetiva. A taxa nominal de juros consiste na taxa em que a unidade de tempo para a qual ela foi definida não coincide com a unidade de tempo para a qual foi capitalizada. Já para a taxa efetiva, existe tal coincidência. Observe:

Suponha que temos uma taxa de juro de 24% a.a. capitalizada mensalmente:

a) Taxa de juro nominal = i / nº de capitalizações = 0,24 / 12 = 0,02 = 2% a.m.

b) Taxa de juro efetiva= $(1+0{,}02)^{12} - 1 = 0{,}2682$ = 26,82% a.a.

1.5 Análise dos diferentes fluxos de caixa

Suponha que você decida comprar uma televisão de 20 polegadas para o seu filho. Para tanto, inicia uma pesquisa de preços em várias lojas da cidade. Ao observar o nível dos preços para esse eletroeletrônico, chega à conclusão que não será possível realizar a compra a vista. Assim, dois orçamentos, considerando vendas a prazo, parecem ser os mais atraentes:

- A loja EletroSom está vendendo televisores de 20 polegadas da marca "X" a R$550,00 a vista ou em 10 parcelas iguais e mensais de R$59,64, sendo o primeiro pagamento feito 30 dias depois da compra;

- A loja MultiSom anuncia o mesmo televisor a R$550,00 a vista ou em 12 parcelas iguais e mensais de R$49,94, sendo o primeiro pagamento feito no ato da compra.

Qual das alternativas é a mais vantajosa?

Analisando conceitualmente este exemplo, podemos perceber que alguns pontos diferem da análise anterior, quando trabalhamos com a ideia da existência de um investimento ou empréstimo de um montante de capital (ou valor presente – VP) por um período de tempo (n) a uma taxa de juros (i) que resultaria em um valor futuro (VF). Neste capítulo:

- ✓ os pagamentos e os recebimentos serão feitos em determinados prazos;
- ✓ as entradas ou saídas terão vencimentos periódicos;
- ✓ a primeira prestação ou aplicação pode incidir no começo do período, ou seja, no ato da compra (termos antecipados) ou no final (termos postecipados).

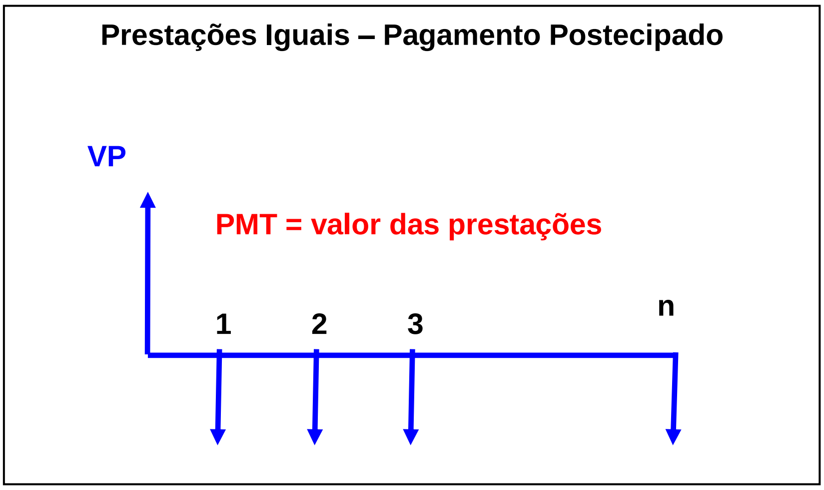
Esta situação ocorre em vários tipos de financiamentos e empréstimos – crediários, leasing, Crédito Direto ao Consumidor (CDC) etc.

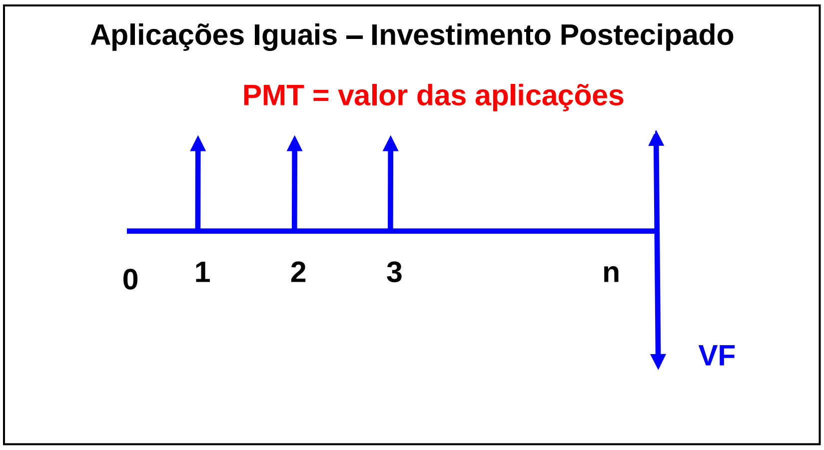
Acompanhe os conceitos apresentados a seguir e ao final você aprenderá como avaliar qual é a melhor opção para a compra do televisor.

FLUXOS DE CAIXA HOMOGÊNEOS

Pagamentos postecipados – Fluxos de caixa homogêneos

Em situações em que a primeira prestação (ou aplicação) é paga (ou recebida) em um período após a contratação, temos um fluxo de caixa com termos postecipados. Quando as prestações são iguais ao longo do período temos um fluxo de caixa homogêneo. Veja os esquemas a seguir:





Observe que, no primeiro caso, o capital inicial (valor presente –VP) será igual à somatória dos valores presentes das prestações (PMT), considerando a taxa de juros (i) praticada. Ou seja:

$$VP = \frac{PMT}{(1+i)} + \frac{PMT}{(1+i)^2} + \frac{PMT}{(1+i)^3} + \cdots + \frac{PMT}{(1+i)^n}$$

A partir desta expressão, é possível concluir que:

$$VP = PMT \times \left[\frac{(1+i)^n - 1}{(1+i)^n \times i}\right] \Rightarrow PMT = VP \times \left[\frac{(1+i)^n \times i}{(1+i)^n - 1}\right]$$

No segundo caso, o Valor Futuro (VF) será igual à somatória das aplicações corrigidas pela taxa de juros vigente. Ou seja:

$$VF = PMT \times (1+i) + PMT \times (1+i)^2 + PMT \times (1+i)^3 + \cdots + PMT \times (1+i)^n$$

Realizando algumas transformações algébricas, chegamos a:

$$VF = PMT \times \left[\frac{(1+i)^n - 1}{i} \right] \Rightarrow PMT = VF \times \left[\frac{i}{(1+i)^n - 1} \right]$$

Em cada fórmula, verifique que temos quatro variáveis: **o capital inicial** (valor presente – VP) **ou** o **capital final** (valor futuro – VF), a **taxa de juros** (i), **o período** (n) e a **prestação** (PMT). Com isso, uma série de situações pode ocorrer, tendo como incógnita uma destas variáveis. Acompanhe os exemplos a seguir.

Exemplos de pagamentos postecipados (fluxos de caixa homogêneos)

1) A loja Promocional está anunciando a venda de televisores de 20 polegadas a R$600,00 a vista ou em 10 parcelas iguais e mensais, sendo o primeiro pagamento feito 30 dias depois da compra. A taxa de juros praticada pela loja é de 1,5% ao mês Com base nestas informações, calcule o valor das prestações.

Solução: note que temos o valor presente (VP = R$600,00), a taxa de juros (i = 1,5% ao mês), período (n = 10 meses) e sabemos que o pagamento é postecipado. O objetivo é calcular o valor das prestações (PMT), cuja fórmula é:

$$PMT = VP \times \left[\frac{(1+i)^n \times i}{(1+i)^n - 1} \right] \Rightarrow PMT = 600 \times \left[\frac{(1+0{,}015)^{10} \times 0{,}015}{(1+0{,}015)^{10} - 1} \right] = R\$65{,}06$$

2) O “Sr. Endividado” obteve um financiamento, na modalidade Crédito Direto ao Consumidor (CDC). Restam 20 parcelas mensais para serem amortizadas, inclusive a que vence no final deste mês, no valor de R$1.759,03. A taxa de juro praticada pela instituição financeira é de 3,5% ao mês. Com tais dados, calcule o valor presente do financiamento.

Solução: foram dados pelo problema: o valor das parcelas (PMT = R$1.759,03), período (n = 20 meses), a taxa de juros (i = 3,5% ao mês) e a informação de que o pagamento é postecipado. Devemos achar o valor presente da seguinte forma:

$$VP = PMT \times \left[\frac{(1+i)^n - 1}{(1+i)^n \times i} \right] \Rightarrow VP = 1.759{,}03 \times \left[\frac{(1+0{,}035)^{20} - 1}{(1+0{,}035)^{20} \times 0{,}035} \right] = R\$25.000{,}04$$

3) A concessionária Bom Passeio está vendendo um carro "X" a R$30.000,00 a vista ou em 36 parcelas mensais de R$1.175,10, sendo o primeiro pagamento feito em 30 dias. Calcule a taxa de juros mensal praticada pela empresa.

Solução: neste caso, temos o Valor Presente (VP = R$30.000,00), o valor das parcelas (PMT = R$1.175,10), período (n = 36 meses) e sabemos que o pagamento é postecipado. Para calcular a taxa de juro, é necessário utilizar uma calculadora financeira, pois o resultado deve ser alcançado por processo iterativos (pois não possuímos uma fórmula como no caso de PV, ou FV):

$$PMT = VP \times \left[\frac{(1+i)^n \times i}{(1+i)^n - 1} \right] \Rightarrow 1.175{,}10 = 30.000 \times \left[\frac{(1+i)^{36} \times i}{(1+i)^{36} - 1} \right] \Rightarrow i = 1{,}99\% a.m.$$

4) Certo cliente necessita fazer um financiamento no valor de R$7.000,00 para a compra de um veículo, porém pode apenas dispor de R$555,00 mensais para pagamento. Sabendo que a taxa de juros da instituição financeira que realizará o financiamento é de 2,25% ao mês e que o pagamento é postecipado, calcule o período de tempo da amortização da dívida.

Solução: foram dados pelo problema: valor presente (VP = R$7.000,00), valor das parcelas (PMT = R$555,00), a taxa de juro (i = 2,25% ao mês) e a informação de que o pagamento é postecipado. Assim, como no caso do cálculo da taxa de juros, é necessário contar com uma calculadora financeira para encontrar o resultado. Neste caso, o resultado é:

$$VP = PMT \times \left[\frac{(1+i)^n - 1}{(1+i)^n \times i} \right] \Rightarrow 7.000 = 555 \times \left[\frac{(1+0{,}0225)^n - 1}{(1+0{,}0225)^n \times 0{,}0225} \right] \Rightarrow n = 15 \; meses$$

5) Sabendo que a caderneta de poupança tem rendimento médio de 0,9% ao mês, um investidor gostaria de saber quanto deve aplicar mensalmente para obter, após 12 meses, a quantia de R$10.000,00. Considere que a primeira aplicação será feita daqui a 30 dias.

Solução: o problema, neste caso, é achar o valor das prestações, PMT. Sabemos o valor futuro (VF = R$10.000,00), a taxa de juros (i = 0,9%ao mês) e o período de tempo (n = 12 meses). Além disso, temos que o pagamento é postecipado. Veja os cálculos abaixo:

$$PMT = VF \times \left[\frac{i}{(1+i)^n - 1}\right] \Rightarrow PMT = 10.000 \times \left[\frac{0,009}{(1+0,009)^{12} - 1}\right] \Rightarrow PMT = R\$\,792,88$$

6) O “Sr. Econômico” aplica todo mês uma quantia de R$2.000,00 em um fundo que vem rendendo 1,5% ao mês Considerando que esta aplicação seja efetuada durante 18 meses, calcule o valor futuro (ou valor de resgate) deste investimento. Utilize o conceito de termos postecipados.

Solução: agora, a questão consiste em achar o Valor Futuro, sabendo a taxa de juros (i = 1,5% ao mês), a prestação (PMT = R$2.000,00) e o período de tempo (n = 18 meses). Observe os cálculos, considerando que os termos são postecipados.

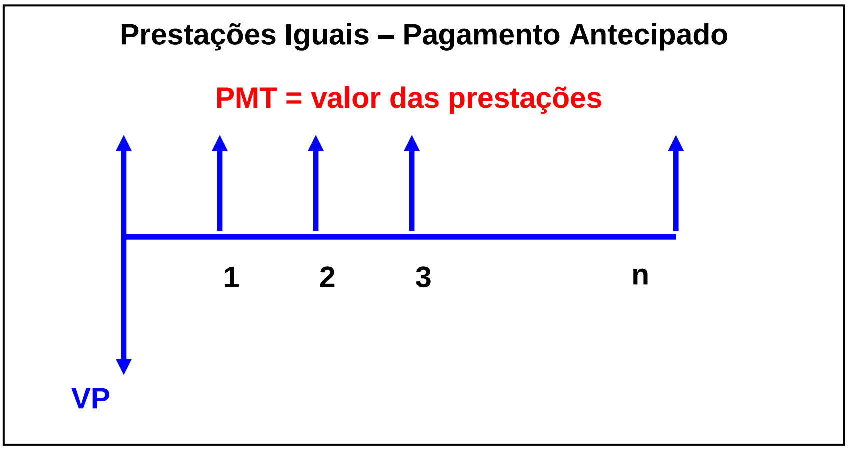
$$VF = PMT \times \left[\frac{(1+i)^n - 1}{i}\right] \Rightarrow VF = 2.000 \times \left[\frac{(1+0,015)^{18} - 1}{0,015}\right] \Rightarrow VF = R\$40.978,75$$

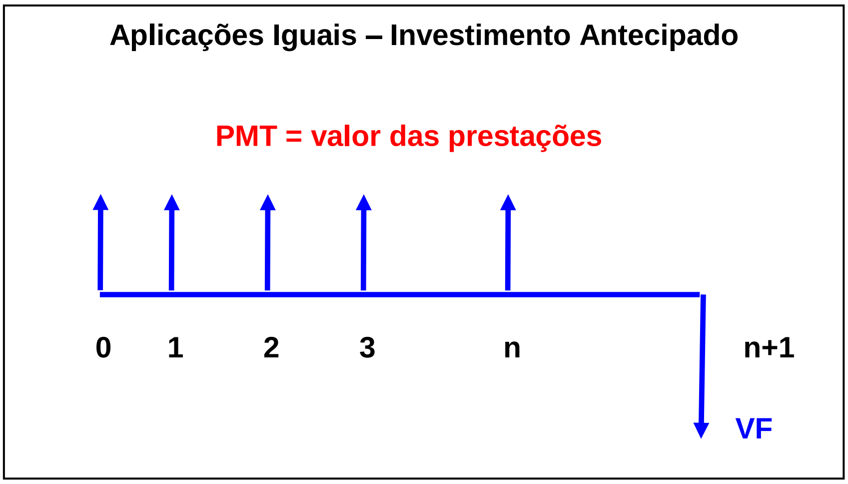
Importante

- Observe que esses problemas seguem sempre a mesma lógica. A partir dos princípios apresentados, é possível também calcular a taxa de juro e o número de prestações em situações em que se realizam aplicações.

Pagamentos Antecipados – Fluxos de caixa homogêneos

Os termos antecipados são caracterizados quando a primeira prestação (ou aplicação) é paga (ou recebida) no ato da contratação. Observe, a seguir, os respectivos fluxos nos casos em que realiza-se o pagamento de prestações para abater o saldo devedor.





No caso apresentado anteriormente, considerando termos antecipados, temos:

$$VP = PMT \times \left[\frac{(1+i)^n - 1}{(1+i)^n \times i} \right] \times (1+i) \quad \Rightarrow \quad PMT = VP \times \left[\frac{(1+i)^n \times i}{(1+i)^n - 1} \right] \times \frac{1}{(1+i)}$$

No caso de aplicações de certos valores (homogêneos) para resgate futuro, temos:

Em situações em que se deseja obter o valor futuro de aplicações iguais e consecutivas, utiliza-se:

$$VF = PMT \times \left[\frac{(1+i)^n - 1}{i} \right] \times (1+i) \quad \Rightarrow \quad PMT = VF \times \left[\frac{i}{(1+i)^n - 1} \right] \times \frac{1}{(1+i)}$$

Da mesma forma que no caso dos pagamentos com termo postecipado, em cada fórmula temos quatro variáveis: **capital inicial** (valor presente – VP) **ou capital final** (valor futuro – VF), a **taxa de juro** (i), o **período** (n) e a **prestação** (PMT). Neste sentido, os problemas fornecerão três variáveis e determinaremos a quarta.

Para efetuar os cálculos é recomendável o uso de calculadoras financeiras que tenham várias das funções discutidas até aqui, inclusive a de diferenciar o cálculo quando o fluxo é postecipado ou antecipado.

Exemplos de pagamentos antecipados (fluxos de caixa homogêneos)

1) Uma pessoa física obteve um financiamento na modalidade CDC (Crédito Direto ao Consumidor) no valor de R$50.000,00, para ser amortizado em 120 parcelas mensais iguais e consecutivas. Sabendo que a taxa de juros praticada é de 16% ao ano e que os pagamentos são antecipados, calcule o valor das aplicações.

Solução: neste problema, temos: o valor presente (VP = R$50.000,00), o período de tempo (n = 120) e a taxa de juros (i = 16% ao ano). Observe que será preciso deixar a taxa de juro e o período com a mesma unidade de tempo. Como é necessário calcular o valor das prestações em termos mensais, passaremos a taxa de juros de anual para mensal.

i = $[(1+0{,}16)^{30/360} - 1] \times 100$ = 1,2445% ao mês

Sabendo que os termos são antecipados, aplicamos a fórmula:

$$PMT = VP \times \left[\frac{(1+i)^n \times i}{(1+i)^n - 1}\right] \times \frac{1}{(1+i)}$$

$$PMT = 50.000 \times \left[\frac{(1+0{,}012445)^{120} \times 0{,}012445}{(1+0{,}012445)^{120} - 1}\right] \times \frac{1}{(1+0{,}012445)} \quad \Rightarrow \quad PMT = R\$794{,}77$$

2) Calcule o valor presente do financiamento feito por um consumidor para a compra de uma geladeira, sabendo que o pagamento deve ser efetuado da seguinte forma: entrada de R$185,00 mais 11 prestações de R$185,00, com taxa de juro de 2,85% ao mês.

Solução: para obter o valor presente deste financiamento, basta aplicar a fórmula:

$$VP = PMT \times \left[\frac{(1+i)^n - 1}{(1+i)^n \times i} \right] \times (1+i)$$

$$VP = 185 \times \left[\frac{(1+0{,}0285)^{12} - 1}{(1+0{,}0285)^{12} \times 0{,}0285} \right] \times (1+0{,}0285) = R\$1911{,}04$$

3) Calcule a taxa de juro mensal de um financiamento no valor de R$35.000,00 para a compra de um veículo, sendo que a amortização ocorrerá em 24 parcelas, mensais e consecutivas de R$1.636,60, com a primeira delas vencendo no ato da contratação.

Solução: sabemos o valor presente, o período do financiamento e o valor das parcelas. Para calcular a taxa de juros, aplicamos a expressão abaixo; porém, em função da complexidade dos procedimentos de cálculo, utiliza-se a calculadora financeira para chegar na taxa de juro.

$$VP = PMT \times \left[\frac{(1+i)^n - 1}{(1+i)^n \times i} \right] \times (1+i) \quad \Rightarrow \quad 35.000 = 1.636{,}60 \times \left[\frac{(1+i)^{24} - 1}{(1+i)^{24} \times i} \right] \times (1+i)$$

i = 1,03%ao mês

4) Um lojista toma um financiamento no valor de R$10.000,00 para realizar alguns reparos em seu estabelecimento. Tendo consciência de que apenas pode honrar parcelas de, no máximo, R$400,00 mensais e sabendo que a taxa de juro do banco com o qual trabalha é de 1,99% ao mês, calcule o período de tempo necessário para quitar a dívida. Considere que o pagamento seja com termos antecipados.

Solução: neste exercício, temos o valor presente, o valor das prestações e a taxa de juro do banco. Assim, para achar o número de parcelas do financiamento, é preciso calcular com ajuda da calculadora financeira, o que produz o resultado indicado abaixo.

$$VP = PMT \times \left[\frac{(1+i)^n - 1}{(1+i)^n \times i}\right] \times (1+i) \quad \Rightarrow \quad 10.000 = 400 \times \left[\frac{(1+0{,}0199)^n - 1}{(1+0{,}0199)^n \times 0{,}0199}\right] \times (1+0{,}0199)$$

n = 34 meses

5) Calcule a quantia que devo aplicar hoje (valor da aplicação) em títulos privados com taxa de juros compostos de 1,60% ao mês para obter um valor futuro (ou de resgate), daqui a 24 meses, de R$30.000,00. Considere que os termos sejam antecipados.

<u>Solução</u>

$$PMT = VF \times \left[\frac{i}{(1+i)^n - 1}\right] \times \frac{1}{(1+i)} \quad \Rightarrow \quad PMT = 30.000 \times \left[\frac{0{,}016}{(1+0{,}016)^{24} - 1}\right] \times \frac{1}{(1+0{,}016)}$$

PMT = R$1.018,87

6) Certo cliente do Banco XLS deseja saber o valor futuro a ser resgatado daqui a 12 meses, caso aplique mensalmente 10% de seu salário de R$3.950,00 em um fundo de renda fixa com taxa de juro de 1,3% ao mês.

<u>Solução</u>

$$\mathrm{VF} = \mathrm{PMT} \times \left[\frac{(1+\mathrm{i})^{\mathrm{n}} - 1}{\mathrm{i}}\right] \times (1+\mathrm{i}) \quad \Rightarrow \quad \mathrm{VF} = 395 \times \left[\frac{(1+0{,}013)^{12} - 1}{0{,}013}\right] \times (1+0{,}013)$$

VF = R$5.160,26

1.6 Valor presente líquido (VPL)

O método do valor presente líquido (VPL) é amplamente utilizado para análise e avaliação de projetos de investimento. Seu objetivo consiste em determinar o valor do projeto no instante inicial do fluxo de caixa, dados a taxa de juro (i), o período de tempo (contínuo ou não), as despesas e as receitas futuras.

Vale ressaltar que <u>a taxa de juro considerada é uma taxa mínima de retorno esperada</u>. Ao se deparar com a possibilidade de um investimento, o agente de mercado possui outras opções que lhe garantem uma taxa de retorno (aplicações no mercado financeiro, por exemplo).

Dessa forma, o investimento será viável se a taxa de retorno obtida no projeto for igual ou maior à taxa de retorno dessas aplicações. Ou seja, o retorno esperado pelo investimento deverá ser maior que o seu custo de oportunidade (neste caso, seria o retorno obtido nas outras aplicações livres de risco), o que, assim, viabilizaria o projeto.

Para obter o VPL, deduzimos o valor do fluxo inicial, sendo, em geral, um investimento (com isso, representa uma saída) dos fluxos futuros de caixa considerados a valor presente. Ou seja:

$$VPL = -VP + \frac{VF_1}{(1+i)^1} + \frac{VF_2}{(1+i)^2} + \frac{VF_3}{(1+i)^3} + \ldots + \frac{VF_n}{(1+i)^n}$$

sendo:

VPL = valor presente líquido

VP = valor presente do fluxo de caixa

VF_t = valor futuro do fluxo de caixa - pode ser tanto negativo (saída) como positivo (entrada)

i = taxa de juro considerada mínima para o investimento

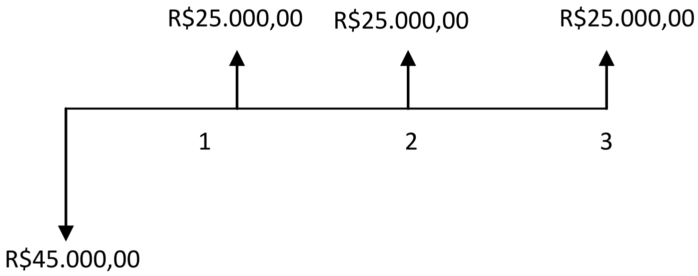
Caso:

- ✓ **VPL < 0**, conclui-se que a taxa de retorno do investimento é **menor** que a mínima desejada (*i*). Ou seja, a realização do projeto **não é** recomendável.
- ✓ **VPL > 0**, conclui-se que a taxa de retorno do investimento é **maior** que a mínima desejada (*i*). Ou seja, a realização do projeto **é** recomendável.
- ✓ **VPL = 0**, conclui-se que a taxa de retorno do investimento é **igual** à mínima desejada (i). Ou seja, existe uma indiferença entre realizar ou não o investimento.

Neste sentido, é possível concluir que quanto maior o VPL, maior será o retorno de um investimento. Com isso, pode-se avaliar a viabilidade de um projeto em comparação com as alternativas existentes.

Exemplo de valor presente líquido (fluxos de caixa homogêneos)

1) O Sr. Build está analisando a possibilidade de realizar um investimento que provavelmente lhe proporcionará receitas anuais de R$25.000,00 durante três anos. O fluxo abaixo mostra que, ao realizar um investimento inicial de R$45.000,00, projetam-se retornos futuros anuais não variáveis. Qual o valor presente líquido do fluxo de caixa apresentado abaixo, considerando uma taxa de juros anual de 14%? O investimento deverá ou não ser realizado?



Solução

$$VPL = -45.000 + \frac{25.000}{(1+0{,}14)^1} + \frac{25.000}{(1+0{,}14)^2} + \frac{25.000}{(1+0{,}14)^3} = R\$13.040{,}80$$

Sendo VPL> 0, conclui-se que o valor do investimento é menor que o valor presente dos retornos futuros. Ou seja, a taxa de retorno obtida no investimento é maior que a taxa mínima aceita. Assim, o Sr. Build deve realizar o investimento.

1.7 Taxa interna de retorno (TIR)

Outro método para análise de projetos de investimento e aplicações financeiras consiste no cálculo da taxa interna de retorno (TIR). É a taxa que equaliza o valor presente de um ou mais pagamentos com o valor presente de um ou mais recebimentos. Ou seja, é a taxa que "zera" o valor presente líquido. Veja a fórmula e o gráfico a seguir:

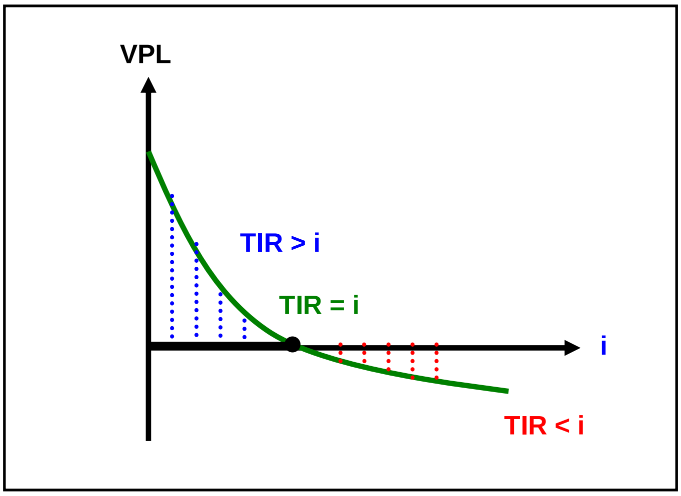
$$-VP + \frac{VF_1}{(1+i)^1} + \frac{VF_2}{(1+i)^2} + \frac{VF_3}{(1+i)^3} + \ldots + \frac{VF_n}{(1+i)^n} = 0$$

sendo:

VP = valor presente do fluxo de caixa

VF_t = valor futuro do fluxo de caixa

i = taxa interna de retorno (TIR)



É importante ressaltar que VF representa as saídas e as entradas nos fluxos, tendo, portanto, valores negativos e positivos, respectivamente.

Observe que para definir a TIR, é preciso obter a raiz que torna a equação polinomial acima igual a zero.

Lembrete

Por se tratar de uma equação polinomial, é possível encontrar duas ou mais raízes (existência de taxas internas de retorno múltiplas). Caso isso ocorra, recomenda-se a utilização do método do valor presente líquido para avaliação do projeto de investimento.

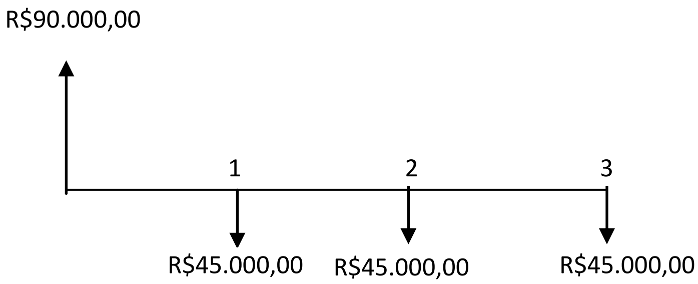
Tal situação pode surgir quando temos mais de uma inversão de sinal no fluxo de caixa. Com isso, pode-se concluir que a TIR só é aplicável em projetos de investimento com apenas uma inversão de sinal, ou seja, quando temos, por exemplo, uma despesa na data inicial e um fluxo de receitas líquidas nas datas futuras (como considerada na fórmula apresentada anteriormente) ou um valor inicial positivo e um fluxo de despesas nas datas posteriores. Nestes casos, é possível provar matematicamente a existência de apenas uma raiz real positiva.

Ao obter a TIR, compara-se com a taxa de juro mínima aceitável ao investimento. Caso a TIR seja maior que a taxa mínima, o projeto pode ser considerado viável.

Exemplo de taxa interna de retorno (fluxos de caixa homogêneos)

1) O Sr. José solicitou um empréstimo de R$90.000,00 que será pago em três prestações mensais consecutivas de R$45.000,00. Determine a taxa interna de retorno dessa operação sob a ótica do credor.

Solução: o credor possui o seguinte fluxo de caixa:



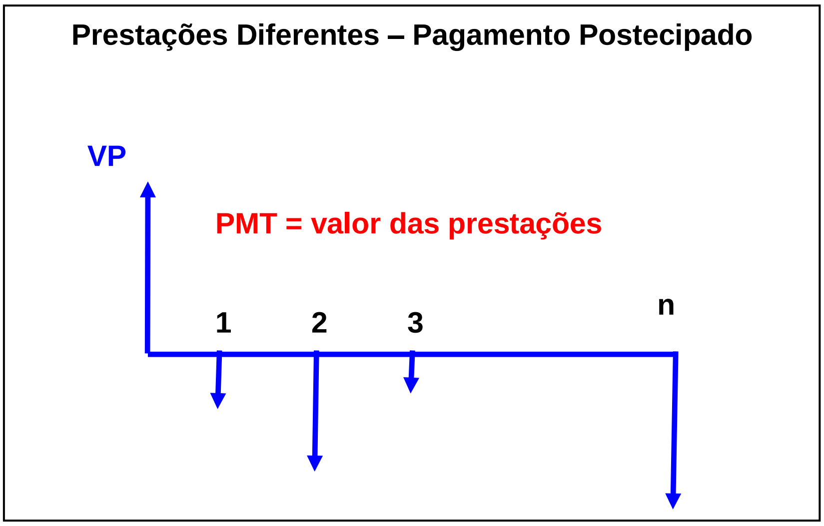
Com o auxílio da calculadora, temos que a TIR corresponde a 23,37%.

Portanto, sendo a taxa mínima desejada para executar este projeto menor que 23,37%, conclui-se que o Sr. José deve realizar o investimento. Se a taxa mínima desejada for maior, o Sr. José não deve realizar o investimento.

FLUXOS DE CAIXA HETEROGÊNEOS

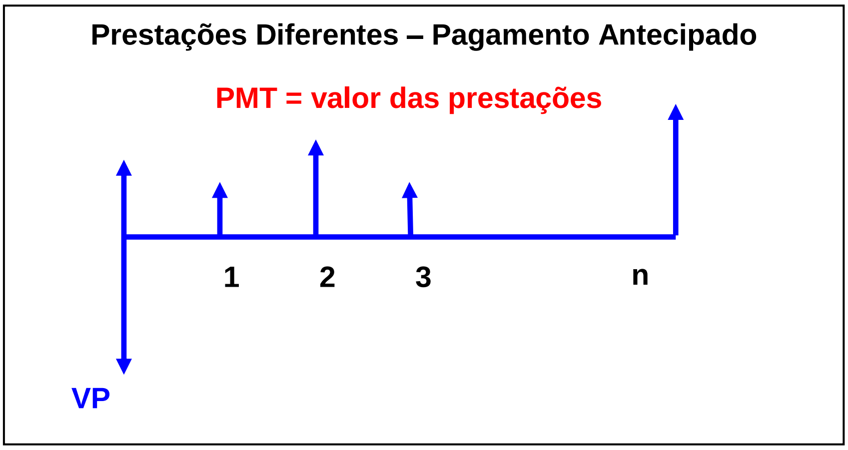
Pagamentos postecipados – Fluxos de caixa heterogêneos

Os pagamentos postecipados são caracterizados pela prestação (ou aplicação) paga (ou recebida) em um período após a contratação. Quando as prestações possuem valores diferentes ao longo do período temos um fluxo de caixa heterogêneo. Veja os esquemas a seguir:



Pagamentos antecipados – Fluxos de caixa heterogêneos

Os pagamentos antecipados são caracterizados pela primeira prestação (ou aplicação) paga (ou recebida) no ato da contratação. Observe, a seguir, o diagrama dos pagamentos antecipados em fluxos de caixas heterogêneos.



Exemplos de valor presente líquido (fluxos de caixa heterogêneos)

1) O Sr. Calculista está analisando um determinado projeto de investimento no qual deseja uma rentabilidade mínima de 2,5% ao mês. O quadro a seguir mostra que ao realizar um investimento inicial de R$28.000,00, projetam-se retornos futuros mensais variáveis. Calcule o valor presente líquido do fluxo de caixa apresentado abaixo e avalie se o investimento deve ou não ser feito.

0	1	2	3	4	5	6
-28.000	5.000	3.000	7.000	2.000	5.000	7.000

Solução

$$VPL = -28.000 + \frac{5.000}{(1+0,025)^1} + \frac{3.000}{(1+0,025)^2} + \frac{7.000}{(1+0,025)^3} + \frac{2.000}{(1+0,025)^4} + \frac{5.000}{(1+0,025)^5} + \frac{7.000}{(1+0,025)^6}$$

$$VPL = \text{- R\$}1.499,06$$

Sendo VPL<0, conclui-se que o valor do investimento é maior que o valor presente dos retornos futuros. Ou seja, a taxa de retorno obtida no investimento é menor que a taxa mínima aceita. Assim, o Sr. Calculista não deve realizar o investimento.

2) Uma empresa deseja realizar algumas reformas em seu prédio. Para tanto, quer saber quanto deve depositar em conta para fazer as retiradas apresentadas no quadro abaixo, sabendo que a remuneração dos depósitos é de 1,5% ao mês.

0	1	2	3	4	5
????	4.000	4.000	4.000	6.000	6.000

Solução: o problema consiste em determinar o valor presente líquido dos fluxos futuros, sendo a taxa de juro igual a 1,5%ao mês. Temos, portanto:

$$VPL = \frac{4.000}{(1+0,015)^1} + \frac{4.000}{(1+0,015)^2} + \frac{4.000}{(1+0,015)^3} + \frac{6.000}{(1+0,015)^4} + \frac{6.000}{(1+0,015)^5}$$

$$VPL = \text{R\$ } 22.871,47$$

3) O Sr. Investidor deseja saber o PU (preço unitário) de uma debênture, cujo valor nominal é de R$1.000,00, sendo que a taxa de juros compostos que remunera a aplicação é de 10% ao ano, o pagamento dos juros é semestral e o resgate ocorrerá em 10 semestres. Este agente considera uma taxa de juro mínima de 15% ao ano para o seu investimento.

Solução: o primeiro passo para calcular este exercício é saber o valor dos juros pagos semestralmente ao Sr. Investidor. Temos uma taxa de juro de 10% ao ano. Portanto, é preciso obter tal taxa ao semestre:

$$i_{eq.} = \left[(1+0{,}10)^{\frac{1}{2}} - 1\right] \times 100 = 4{,}8809\%\text{a.s.}$$

Assim, semestralmente, o investidor recebe uma remuneração de R$48,81.

Para obter o PU da debênture, ainda temos que calcular a taxa de juro ao semestre que o investidor considera mínima.

$$i_{eq.} = \left[(1+0{,}15)^{\frac{1}{2}} - 1\right] \times 100 = 7{,}2381\%\text{a.s.}$$

Feito isso, vamos calcular o PU com auxílio de uma calculadora financeira, tendo como resultado o valor de R$836,25.

Taxa interna de retorno – Fluxos de caixa heterogêneos

Exemplo de taxa interna de retorno (fluxos de caixa heterogêneos)

1) O Sr. “No Vermelho” solicitou um empréstimo de R$80.000,00 que será pago em três prestações mensais consecutivas de R$40.000,00, R$35.000,00 e R$15.000,00. Determine a taxa interna de retorno desta operação sob a ótica do banco.

Com auxílio de uma calculadora financeira, chega-se a 7,16% ao mês.

1.8 Comentários finais

Ao terminar este capítulo, espera-se que você tenha compreendido os conceitos de capitalização simples, composta discreta e composta contínua que são constantemente utilizadas no mercado financeiro seja para o apreçamento de ativos seja para o cálculo de rendimentos, prazos ou taxas de juro implícitas nas operações. O material apresentado aqui, reúne de maneira ordenada todos os assuntos que capacitam o leitor para atuar no mercado financeiro. Além da discussão e exemplificação dos cálculos nos diferentes regimes de capitalização, foi dada especial atenção à análise dos fluxos de caixa de séries de pagamento homogêneo e heterogêneo e das características das taxas de juro. No anexo, no final deste trabalho, você encontra uma revisão sobre logaritmos para fortalecer seus estudos.

Importante

- Revise os principais pontos e BOA PROVA!!!

BIBLIOGRAFIA

ASSAF NETO, Alexandre. **Matemática financeira e suas aplicações**. 11ª ed. São Paulo: Atlas. 2009.

VIEIRA SOBRINHO, José Dutra. **Matemática financeira**. 7ª ed. São Paulo: Atlas. 2009. 409 p.

INSTITUTO EDUCACIONAL BM&FBOVESPA. Material dos cursos on-line e presenciais.