

Algoritmo de filtraje no lineal y suavizado basado en operador de Koopman aplicado a modelos en epidemiología

Diego Olguín^{1*}, Axel Osses^{1,2}, Héctor Ramírez^{1,2}
*Email: dolguin@dim.uchile.cl

¹Departamento de Ingeniería Matemática, Universidad de Chile.
²Centro de Modelamiento Matemático, Universidad de Chile.

MATEMÁTICAS APLICADAS Y MODELAMIENTO MATEMÁTICO

INTRODUCCIÓN

En un problema de filtraje se busca estimar la trayectoria de un sistema dinámico estocástico $\{x_k\}_k$ en el tiempo en base a observaciones ruidosas $\{y_k\}_k$.

$$(P) \begin{cases} x_{k+1} = f(t_k, x_k, u_k, w_k) \\ y_k = g(t_k, x_k, u_k, v_k) \end{cases}$$

En el caso lineal y gaussiano, el Filtro de Kalman entrega una solución óptima en el sentido de la mínima varianza y máximo a posteriori. En el caso no lineal general no se conocen soluciones óptimas [1].

En este contexto surge la pregunta, ¿es posible encontrar un sistema lineal que aproxime a (P) y aplicar Filtro de Kalman?

METODOLOGÍA

Se supone que el sistema es autónomo y sin *inputs*. Sea \mathcal{F} un espacio de funciones de \mathbb{R}^n en \mathbb{C}^m , se define el operador de Koopman [3] $\mathcal{K}: \mathcal{F} \rightarrow \mathcal{F}$ como

$$(\mathcal{K}\varphi)[x] = \mathbb{E}[\varphi(f(x, \cdot))], \quad \forall \varphi \in \mathcal{F}$$

Este operador genera una dinámica lineal, pero infinito dimensional, por lo que se utiliza *Extended Dynamic Mode Decomposition* con *kernels* [2]. Con esto se construye una generalización del algoritmo de filtraje presentado en [4].

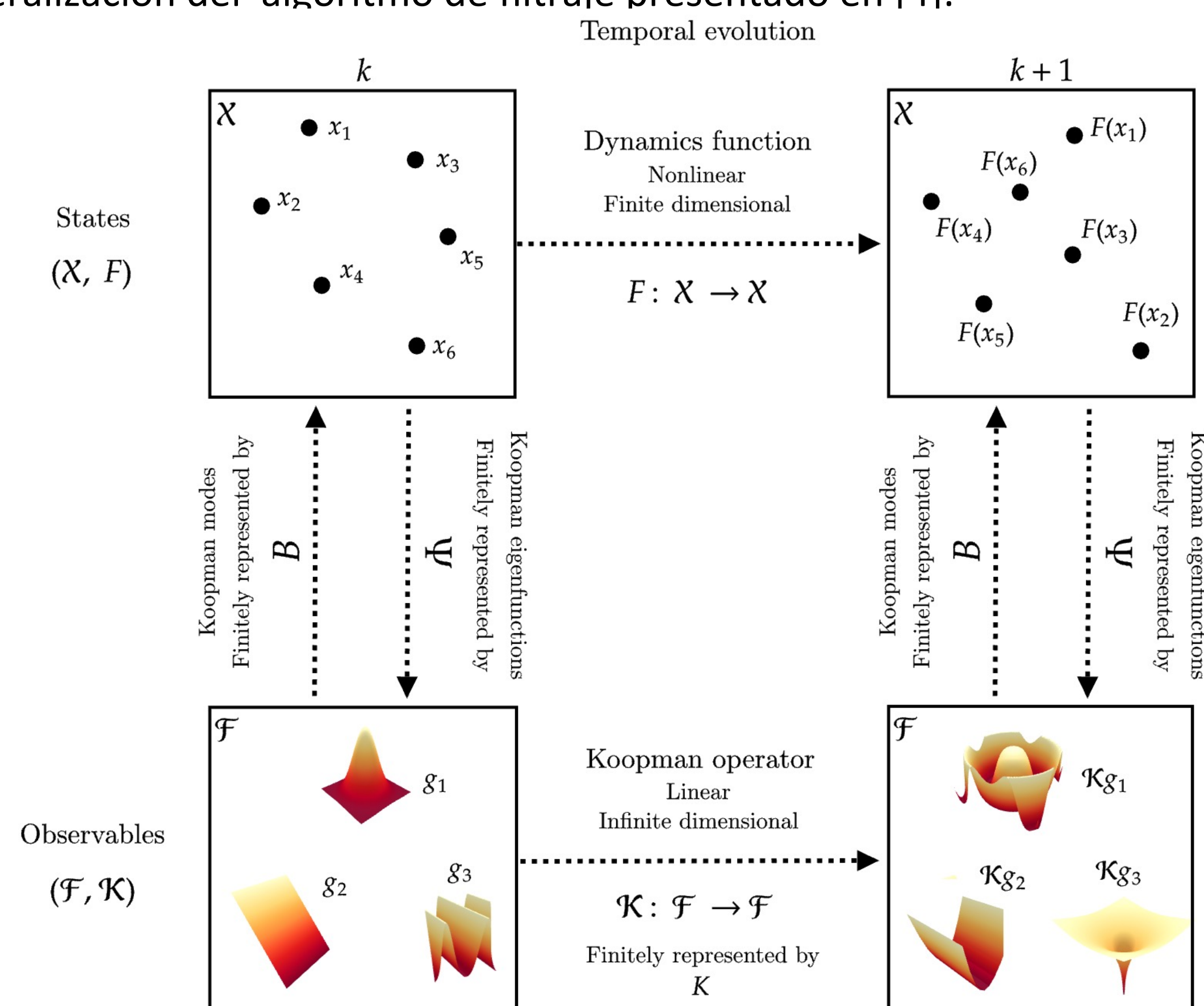


Figura 1: Diagrama de evolución temporal con operador de Koopman.

Se propone un algoritmo de suavizado de tipo Modified Bryson-Frazier, que junto al algoritmo de filtraje se utilizan para estimar estados y parámetros de un modelo SIR estocástico:

$$\begin{aligned} S_{k+1} &= S_k - \beta S_k I_k + w_k^1 \\ I_{k+1} &= I_k + \beta S_k I_k - \gamma I_k + w_k^2 \\ R_{k+1} &= R_k + \gamma I_k + w_k^3 \end{aligned}$$

Este trabajo es financiado por los proyectos Fondecyts 1201982 y 1240200, y Basal FB210005 (Centro de Modelamiento Matemático), de ANID.

RESULTADOS

El algoritmo creado, denominado Koopman-Kalman Filter (KKF) como en [4], resulta ser competitivo en términos de precisión con otros en la literatura, como Extended Kalman Filter (EKF) y Unscented Kalman Filter (UKF).

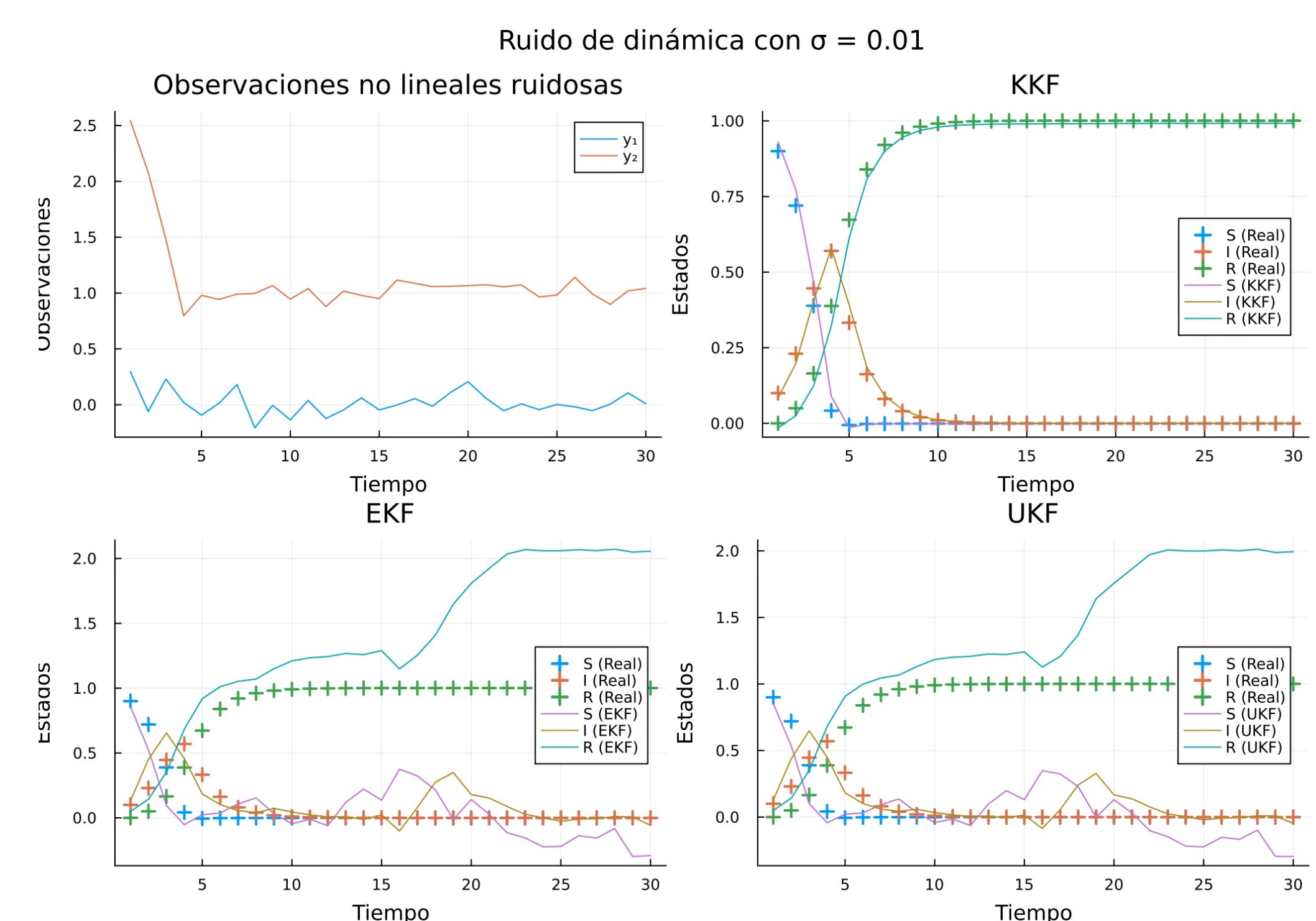


Figura 2: Resultado de KKF, EKF y UKF con observaciones parciales en un modelo SIR.

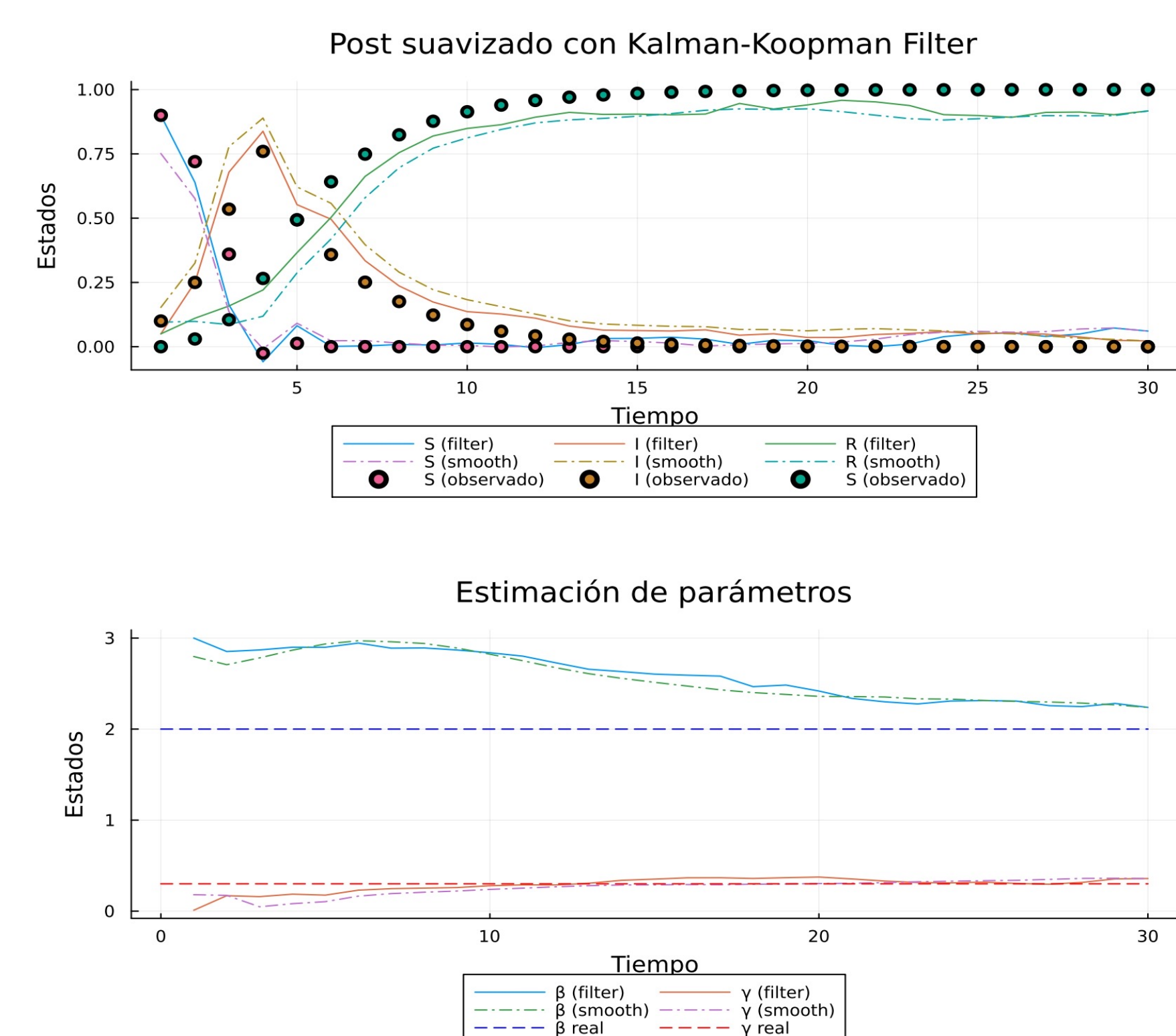


Figura 3: Filtraje y suavizado para estimación de parámetros de un modelo SIR.

CONCLUSIONES Y TRABAJO FUTURO

Conclusiones:

- El algoritmo de filtraje propuesto muestra ser competitivo con otros en la literatura.
- Junto con el algoritmo de suavizado se obtiene una técnica de estimación de parámetros que parece ser efectiva.

Trabajo futuro:

- Se espera justificar teóricamente algún tipo de convergencia para el algoritmo.
- Se buscará aplicar el algoritmo de filtraje y suavizado a modelos en epidemiología mucho más complejos.

REFERENCIAS

- [1] Setoodeh, P., Habibi, S., & Haykin, S. S. (2022). Nonlinear filters: Theory and applications. Hoboken, NJ: John Wiley & Sons, Inc.
- [2] Mauroy, A., Mezić, I., Suzuki, Y. (2020). Koopman operator in systems and control. Springer International Publishing.
- [3] Jiang, L., & Liu, N. (2022). Correcting noisy dynamic mode decomposition with Kalman Filters. Journal of Computational Physics, 461, 111175.
- [4] Netto, M., & Mili, L. (2018). A robust data-driven Koopman Kalman Filter for power systems dynamic state estimation. IEEE Transactions on Power Systems, 33(6), 7228-7237.