



Perchero

www.wuolah.com/student/Perchero

15408

MICcompressed.pdf

Teoría 19-20



4º Motores Cohete



Grado en Ingeniería Aeroespacial



Escuela Técnica Superior de Ingeniería Aeronáutica y del Espacio
Universidad Politécnica de Madrid



Descarga la APP de Wuolah.
Ya disponible para el móvil y la tablet.





**KEEP
CALM
AND
ESTUDIA
UN POQUITO**

Parte I: Introducción a los motores cohete. Modelo ideal.

WUOLAH

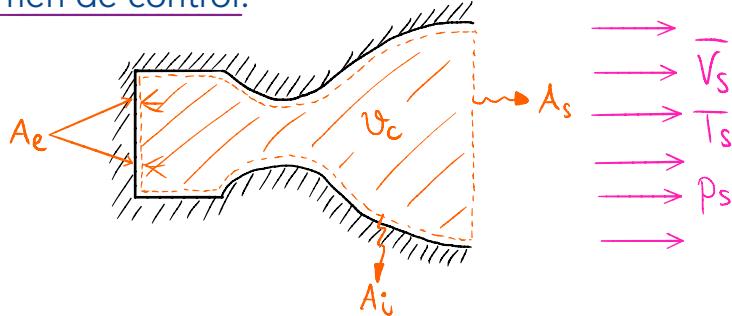
BURN Energy – Encender tu llama cuesta muy poco - #StudyOnFire

Capítulo 1. Empuje y estudio propulsivo.

1. Estudio propulsivo.

→ Se pretende analizar el comportamiento propulsivo de un motor a reacción, mediante la aplicación de las ecuaciones de conservación y obteniendo expresiones para el empuje en forma vectorial así como los rendimientos motor y propulsivo.

1.1. Volumen de control.



→ Sistema de referencia: Motor estacionario en un SR inercial (Banco, $v = (te)$)

→ Superficies de control:

- Superficies impermeables (A_i) = Paredes del motor
- Superficies permeables ($A_e + A_s$) = Atravesadas por el propelente.

↳ En principio, arbitrarias, pero deben cumplir:

A_s : Separa exterior ($\Sigma_{exterior}$) de A_i

A_e : Representativa pero mantiene estacionario.

1.2. Definición de empuje.

• Empuje (\bar{E}) = Resultado de las fuerzas de presión - referidas a la presión ambiente - y las fuerzas de fricción que el propelante ejerce sobre las caras internas del motor:

$$\bar{E} = - \int_{A_i + A_e} [-(p - p_a) \hat{I} + \vec{\tau}] \cdot \hat{n} dA$$

a. $p - p_a = 0$ Consistencia \leftrightarrow Empuje nulo si el motor está apagado.

• Comentarios:

- b. Requiere conocer $p, \vec{\tau}$ en el interior del motor \Rightarrow Complejo.

ENCENDER TU LLAMA CUESTA MUY POCO



1.3. Aplicación de la ecuaciones integrales.

(A) Ecuación de continuidad.

$$\frac{d}{dt} \int_{v_c} p d\Omega + \int_A p \bar{v}_r \cdot \hat{n} d\Omega = 0 \quad \text{donde } \begin{cases} A = A_i + A_e + A_s \\ \bar{v}_r = \bar{v} - \bar{v}_c \end{cases}$$

\Rightarrow Asumiendo $\begin{cases} \text{Movimiento estacionario} \\ \bar{v}_r \cdot \hat{n} = 0 \text{ en } A_i \end{cases} \Rightarrow \int_{A_e} p(\bar{v}_r \cdot \hat{n}) d\Omega + \int_{A_s} p(\bar{v}_r \cdot \hat{n}) d\Omega = 0$

\rightarrow Se calcula el gasto máscico (\dot{m}) que abandona el motor realizando cualquiera de las dos integraciones, definiéndose formalmente como:

$$\dot{m} = \int_{A_s} p (\bar{v}_s \cdot \hat{n}) d\Omega$$

\bar{v}_s = Velocidad del propulsante en la sección de salida, medida respecto al vehículo.

(B) Ecuación de cantidad de movimiento.

$$\frac{d}{dt} \int_{v_c} p \bar{v}_r d\Omega + \int_{\Sigma_c} p \bar{v}_r (\bar{v}_r \cdot \hat{n}) d\Omega = \int_{\Sigma_c} -(p-p_a) \hat{n} d\Omega + \int_{\Sigma_c} \bar{\tau}' \cdot \hat{n} d\Omega + \int_{v_c} p \bar{f}_m d\Omega$$

\Rightarrow Asumiendo $\begin{cases} \text{Movimiento estacionario} \\ \bar{F}_I \text{ y } \bar{g} \ll 1 \end{cases} + A = A_e + A_s + A_i$ SR ligado al motor

$$\int_{A_i + A_s + A_e} p \bar{v}_r (\bar{v}_r \cdot \hat{n}) d\Omega = \int_{A_i + A_s + A_e} [-(p-p_a) \bar{\tau} + \bar{\tau}'] \cdot \hat{n} d\Omega$$

Estimando O.M. $\begin{cases} \int_{A_e} p \bar{v}_r (\bar{v}_r \cdot \hat{n}) d\Omega \ll \int_{A_s} p \bar{v}_r (\bar{v}_r \cdot \hat{n}) d\Omega \\ \int_{A_s} \bar{\tau}' \cdot \hat{n} d\Omega \ll \int_{A_s} p \bar{v}_r (\bar{v}_r \cdot \hat{n}) d\Omega \end{cases} + \bar{v} \cdot \hat{n} = \bar{0} \text{ en } A_i$

$$\Rightarrow \int_{A_s} p_s \bar{v}_r (\bar{v}_r \cdot \hat{n}) d\Omega + \int_{A_s} (p-p_a) \hat{n} d\Omega = \int_{A_i + A_e} [-(p-p_a) \bar{\tau} + \bar{\tau}'] \cdot \hat{n} d\Omega$$

\Rightarrow Nueva definición equivalente de \bar{E} :

$$\bar{E} = - \left[\int_{A_s} p \bar{v}_r (\bar{v}_r \cdot \hat{n}) d\Omega + \int_{A_s} (p-p_a) \hat{n} d\Omega \right]$$

\Rightarrow Ecuación mucho más útil

{ a) "Sólo" hace falta considerar \bar{v} y p en A_s .

b) Válida para "cualquier" motor cohete

Geometría axisimétrica:

$$\rightarrow \text{Si: } p \text{ y } \bar{v} \text{ axisimétricas} \quad \Rightarrow \quad E = \dot{m} V_s + A_s (p_s - p_a)$$

+

p y \bar{v} uniformes

Empuje adaptado: $E_{adp} = \dot{m} V_s$

Empuje máximo: $E_{max} = \dot{m} V_s + p_s A_s$
(valo) (Mismo \dot{m}, V_s y p_s)

C Balance energético.

\rightarrow Para la ecuación de la energía \Rightarrow Ae que contenga los intercambios energéticos.

$$\int_{A_i+A_s+A_e} p \left(h + \frac{1}{2} v_r^2 \right) (\bar{q}_f \cdot \hat{n}) d\tau = \int_A \bar{q}_f \cdot \hat{n} d\tau$$

(I)

(II) $\Rightarrow \bar{q}_f = -K \nabla T \rightarrow$ En A_e y A_s es despreciable frente a (I)

$$\text{Se define: } \dot{Q}_{loss} = \int_{A_i} \bar{q}_f \cdot \hat{n} d\tau$$

$$(I) = \int_{A_e} p \left(h + \frac{1}{2} v_r^2 \right) (\bar{q}_f \cdot \hat{n}) d\tau + \int_{A_i} p \left(h + \frac{1}{2} v_r^2 \right) (\bar{q}_f \cdot \hat{n}) d\tau + \int_{A_s} p \left(h + \frac{1}{2} v_r^2 \right) (\bar{q}_f \cdot \hat{n}) d\tau$$

(a) (b)

$$(a) = - \sum_i \dot{m}_i h_i(T_{e,i}) = - \left[\dot{Q}_{fuente} + \dot{m} \bar{h}_e(\bar{T}_e) \right]$$

Entalpía de remanjo a la entrada.

$$\sum_i \dot{m}_i = \dot{m}$$

Calor liberado

(procedente de entalpía de formación)

Entalpía sensible

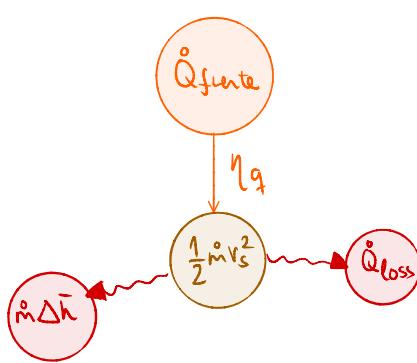
Promedio masivo a la entrada de la entalpía sensible:

$$\bar{h}_e = \bar{C}_{p,e} (\bar{T}_e - T_{ref})$$

$$(b) = \dot{m} \left(\bar{h}_s(T_s) + \frac{1}{2} V_s^2 \right)$$

$$\Rightarrow \text{Ecuación de la energía: } \eta_g \dot{Q}_{fuente} = \dot{m} \left[\bar{h}_s(T_s) - \bar{h}_e(\bar{T}_e) \right] + \frac{1}{2} \dot{m} V_s^2 + \dot{Q}_{loss}$$

- Comentarios:
 - η_g engloba imperfecciones termoquímicas en la reacción de combustión.
 - $\eta_g \dot{Q}_{fuente}$ $\xrightarrow{\text{"Calentar propulsante" } (\dot{m} \Delta \bar{h})}$
 - $\eta_g \dot{Q}_{fuente} \xrightarrow{\text{Potencia mecánica neta } (\frac{1}{2} \dot{m} V_s^2)}$
 - $\eta_g \dot{Q}_{fuente} \xrightarrow{\text{Calentar estructura soporte } (\dot{Q}_{loss})}$

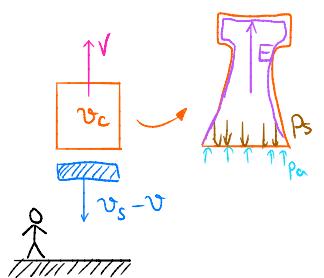


→ A la vista de la ecuación anterior, se define el **rendimiento motor** del sistema como el cociente entre la potencia mecánica neta producida y la potencia térmica liberada por la fuente:

$$\eta_M = \frac{\frac{1}{2} \dot{m} V_s^2}{\dot{Q}_{\text{fuente}}}$$

✳️ Rendimiento propulsivo.

→ Es necesario analizar previamente la potencia mecánica total empleada. Observando el v_c desde un sistema de referencia fijo en Tierra, el vehículo se desplaza a una velocidad v opuesta a la de salida del propelente (v_s), de modo que la velocidad del propelente al salir del vehículo es $v - v_s$. Por otra parte, sobre el v_c está actuando la fuerza de presión (referida a p_∞) sobre toda la superficie que lo define, siendo de valor $E - A_s (p_s - p_\infty)$, positiva en la dirección de v :



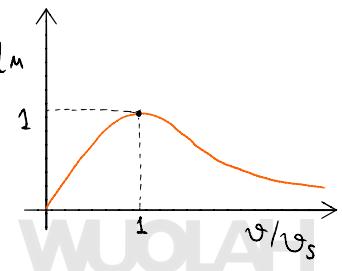
$$\begin{aligned} \dot{W}_{\text{Total}} &= \frac{1}{2} \dot{m} (v - v_s)^2 + [E - A_s (p_s - p_\infty)] v \\ &\quad \downarrow \text{Propelante} \quad \downarrow \text{Volumen de control} \\ &\quad (\text{energía cinética residual}) \quad ("útil") \\ \dot{W}_{\text{Total}} &= \frac{1}{2} \dot{m} (v - v_s)^2 + \dot{m} v_s v = \frac{1}{2} \dot{m} v^2 + \frac{1}{2} \dot{m} v_s^2 \end{aligned}$$

↓ ↓
Potencia cinética neta
del propelante (Producida por el av. propulsor)

→ Se define el **rendimiento propulsivo** como el cociente entre la potencia mecánica útil y la potencia total disponible:

$$\eta_p = \frac{E v}{\frac{1}{2} \dot{m} v_s^2 + \frac{1}{2} \dot{m} v^2}$$

→ Si la boquera está adaptada, $E = \dot{m} v_s \Rightarrow \eta_p = \frac{2 v/v_s}{1 + (v/v_s)^2}$



1.4. Expresión vectorial del empuje.

→ Para facilitar el manejo de expresiones como la del empuje, es habitual tomar valores medios para ciertas variables fluidas; en este caso, en la sección de salida:

- Gasto masico: $\dot{m} \equiv \int_A p (\vec{v} - \vec{v}_c) \cdot \vec{n} d\sigma$
- Velocidad media de salida: $\langle \vec{v}_s \rangle = \frac{1}{\dot{m}} \int_A p \vec{v} (\vec{v} - \vec{v}_c) \cdot \vec{n} d\sigma$

Flujo de cantidad de movimiento a la salida: $\dot{m} \langle \vec{v}_s \rangle$

- Área efectiva de salida: $\langle A_s \rangle \vec{n}_s = \int_A \vec{n} d\sigma$

\vec{n}_s = Vector // a la resultante de una presión uniforme a la salida.

- Presión media de salida: $\langle p_s \rangle \vec{n}'_s = \frac{1}{\langle A_s \rangle} \int_A p_s \vec{n} d\sigma$

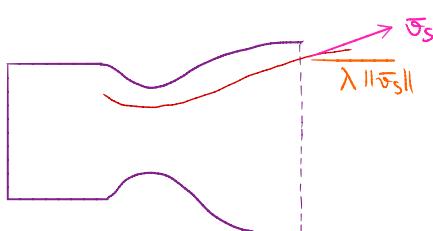
$$\Rightarrow \text{Empuje en variables promediadas} : E = -\dot{m} \langle \vec{v}_s \rangle - \langle A_s \rangle \left[\langle p_s \rangle \vec{n}'_s - p_a \vec{n}_s \right]$$

→ De forma general, la geometría del motor presenta simetría de revolución; y suele suceder que las variables fluidas en la salida presenten una distribución axisimétrica. Ello hace que el empuje tenga una componente única sobre el eje del motor, definido como:

$$\vec{n}_{eje} = -\vec{n}_s = -\vec{n}_s \rightarrow \text{Va en la dirección del empuje}$$

$$\Rightarrow \langle \vec{v}_s \rangle = -\langle v_s \rangle \vec{n}_{eje}$$

$$\Rightarrow E = \dot{m} \langle v_s \rangle + \langle A_s \rangle [\langle p_s \rangle - p_a]$$



Aproximación 1D: $E_{ideal-1D} = \dot{m} v_s + A_s (p_s - p_a)$

$\lambda = 1$

ENCENDER TU LLAMA CUESTA MUY POCO



2. Impulso específico.

→ Por definición, el **impulso específico** es el cociente entre el empuje del motor y el gasto masico del propulsante, es decir:

$$I_{sp} = \frac{E}{\dot{m}} ; [I_{sp}] = \frac{m}{s}$$

↳ Variable intensiva. No depende del tamaño del sistema.

↳ Se considera que un sistema es de alta calidad si I_{sp} es alto.

↳ Es el inverso del consumo específico y \approx a la velocidad de salida.

→ Existen variables de similar naturaleza pero distinta definición:

Impulso: Empuje dividido por el peso del propulsante por unidad de tiempo:

$$I = \frac{E}{\dot{m}g_0} ; [I] = s ; g_0 \approx 9,80665 \frac{m}{s^2}$$

Impulso volumétrico: Empuje dividido por el volumen de propulsante desalojado:

$$I^o = \frac{E}{\dot{V}/\rho_p} ; [I^o] = \frac{kg}{m^2 s} ; I^o = \rho_p I_{sp}$$

→ Desarrollando la expresión del impulso específico:

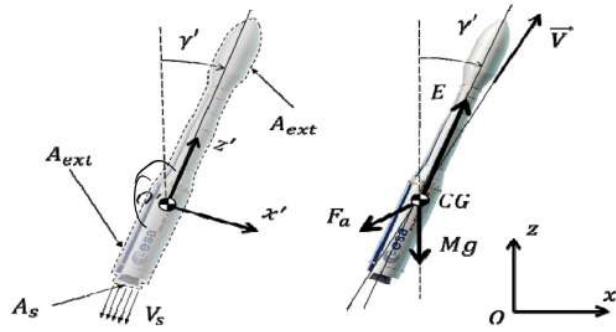
$$I_{sp} = v_s + (p_s - p_a) \frac{A_s}{\dot{m}} = v_s + \frac{p_s}{\rho_s v_s} \left(1 - \frac{p_a}{p_s} \right) = v_s \left[1 + \frac{R_g T_s}{v_s^2} \left(1 - \frac{p_a}{p_s} \right) \right]$$

$$\Rightarrow I_{sp} = v_s \left[1 + \left(1 - \frac{p_a}{p_s} \right) \frac{1}{\delta M_s^2} \right]$$

Capítulo 2. Misiones y análisis de utilización.

1. Movimiento del vehículo.

→ Se desea analizar el movimiento de un vehículo que se mueve con una velocidad $\bar{v}(t)$ arbitraria, con respecto a una referencia inercial Oxyz. Se consideran unos ejes fijados al vehículo O'x'y'z' alineados con el eje del vehículo



→ Se define un volumen de control mediante el área exterior del vehículo A_e y el área de salida del propulsor A_s . Si se aplican las ecuaciones de conservación de la masa y de cantidad de movimiento al volumen de control V_c :

$$\frac{d}{dt} \int_V \rho d\Omega + \int_A \rho (\bar{v} - \bar{v}_c) \cdot \hat{n} d\Gamma = 0 \Rightarrow \frac{dM}{dt} = -\dot{m} \quad \textcircled{1}$$

$\underbrace{\int_V \rho d\Omega}_{\text{Masa instantánea}} + \underbrace{\int_A \rho (\bar{v} - \bar{v}_c) \cdot \hat{n} d\Gamma}_{\text{Gasto masíco del sistema propulsor}}$

$$\frac{d}{dt} \int_V \rho \bar{v} d\Omega + \int_A \rho \bar{v} (\bar{v} - \bar{v}_c) \cdot \hat{n} d\Gamma = \int_A [-(p - p_a) \bar{I} + \bar{E}] \cdot \hat{n} d\Gamma + \int_V \rho \bar{f}_m d\Omega$$

$$\bar{f}_m = \bar{g} - \bar{F}_r = \bar{g} - \frac{d\bar{v}_o}{dt} - \frac{d\bar{I}}{dt} \wedge \bar{r}^r - \bar{I} \wedge \bar{I} \wedge \bar{r}^r - 2 \bar{I} \wedge \bar{v}_r$$

$\frac{1}{g_0}$ ~ 1 ~ 1 $\sim Fr^{-2}$ $\sim Fr^{-2}$ ~ 1
 Parc
 que suba

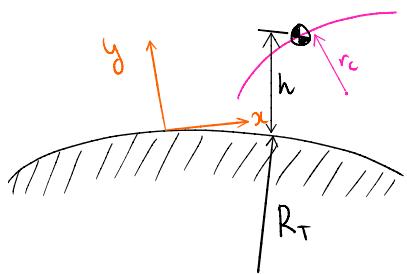
$$\Rightarrow \frac{d}{dt} \int_V \rho \bar{v} d\Omega + M \frac{d\bar{v}_o}{dt} + \int_{A_s} \rho \bar{v} (\bar{v} - \bar{v}_c) \cdot \hat{n} d\Gamma = \int_A [-(p - p_a) \bar{I} + \bar{E}] \cdot \hat{n} d\Gamma + M \bar{g}$$

$$\Rightarrow M \frac{d\bar{v}_{cg}}{dt} = - \int_{A_s} \rho \bar{v} (\bar{v} - \bar{v}_c) \cdot \hat{n} d\Gamma + \int_{A_s} [-(p - p_a) \bar{I} + \bar{E}] \cdot \hat{n} d\Gamma + \int_{A_e} [-(p - p_a) \bar{I} + \bar{E}] \cdot \hat{n} d\Gamma + M \bar{g}$$

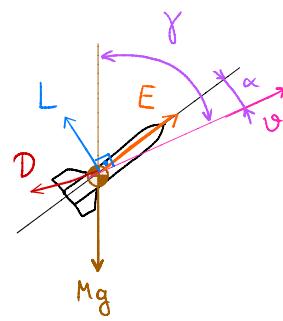
$$M \frac{d\bar{v}_{cg}}{dt} = \bar{E} + \bar{F}_{aero} + M \bar{g} \quad \textcircled{2}$$

→ La ecuación $\textcircled{2}$ se ha de integrar junto con $\textcircled{1}$, y para ello, es necesario conocer las expresiones adecuadas para evaluar las fuerzas que aparecen en la ecuación.

2. Ecuaciones de la trayectoria.



Relaciones geométricas: $\begin{cases} dx = (R_T + h)d\theta \\ h = y - R_T \end{cases}$



Ecuaciones de la dinámica: $\begin{cases} M \frac{d\alpha}{dt} = E \cos \alpha - D - Mg \cos \gamma \\ M v \frac{d\gamma}{dt} = Mg \sin \gamma - M \frac{v^2 \sin \gamma}{R_T + h} - L - E \sin \alpha \end{cases}$

Relación masiva: $\frac{dM}{dt} = -\dot{m}$

Ecuaciones de la trayectoria: $\begin{cases} \frac{dx}{dt} = v \sin \gamma \frac{R_T}{R_T + h} \\ \frac{dh}{dt} = v \cos \gamma \end{cases}$

2.1. Trayectoria en ausencia de sustentación.

→ La trayectoria llamada *gravity turn* consiste en un vuelo simétrico y con sustentación nula. Las ventajas de esta maniobra son:

- Esfuerzos normales al eje nulos. ($L = 0$) $\Rightarrow \downarrow$ peso de la estructura
- El giro del vehículo se produce de forma natural al ganar altura.
- El sistema de guiado no necesita de superficies de control

$$\Rightarrow \begin{cases} M \frac{d\alpha}{dt} = E - D - Mg \cos \gamma \\ M v \frac{d\gamma}{dt} = Mg \sin \gamma - M \frac{v^2 \sin \gamma}{R_T + h} \Rightarrow A \frac{d\gamma}{dt} = B \sin \gamma \Rightarrow \gamma \text{ aumenta monótonamente} \end{cases}$$

conseguir misma.

(*) Giro por gravedad con Tierra plana.

→ Hipótesis de Tierra plana $\Leftrightarrow \delta \theta \ll \delta \gamma \Rightarrow$ Alcance horizontal $\ll R_T (\rightarrow \infty)$

$$\Rightarrow \begin{cases} \frac{1}{g} \frac{dv}{dt} = \frac{E - D}{Mg} - \cos \gamma \\ v \frac{d\gamma}{dt} = g \sin \gamma \end{cases}$$

3. Ecuación del cohete.

→ La ecuación del movimiento, proyectada en la dirección de la velocidad, para un móvil que se desplaza en un medio resistente y en un campo gravitatorio, es la siguiente:

$$M \frac{dv}{dt} = E - F_a - Mg \cos \gamma = I_{sp} \dot{m} - D - Mg \cos \gamma = -I_{sp} \frac{dM}{dt} - D - Mg \cos \gamma.$$

$$\rightarrow dv + \frac{D}{M} dt + g \cos \gamma dt = -I_{sp} \frac{dM}{M}$$

→ Integrando esta ecuación entre 2 instantes de tiempo t_i y t_f :

$$(v_f - v_i) + \int_{t_i}^{t_f} \frac{D}{M} dt + \int_{t_i}^{t_f} g \cos \gamma dt = I_{sp} \ln \left(\frac{M_i}{M_f} \right)$$

$$\Delta v_v + \Delta v_d + \Delta v_g \equiv \Delta v = I_{sp} \ln \left(\frac{M_i}{M_f} \right)$$

Ecuación del cohete / de Tsiolkovsky

Lo que me pide la misión.

Lo que me proporciona el motor

→ Se define el incremento de velocidad de la misión, compuesto de forma variable por el cambio de velocidad requerido, las pérdidas por resistencia y por vencer el campo gravitatorio. Al lado derecho de la ecuación aparecen puramente características del motor (I_{sp}) y el propelente empleado.

3.1. Análisis del término gravitatorio.

→ Tomando valores medios para g y γ en la ecuación de Tsiolkovsky:

$$\Delta v = I_{sp} \ln \left(\frac{M_i}{M_i - M_p} \right) - \int_{t_b}^t g \cos \gamma dt = I_{sp} \left\{ \ln \left(\frac{1}{1 - M_p/M_i} \right) - \frac{M_i \cdot g}{E} \frac{M_p}{M_i} \cos \gamma \right\}$$

Si $\uparrow \frac{E}{M_i \cdot g}$ parece que disminuye la energía invertida en el campo gravitatorio

Pero ello implicaría $\uparrow n \Rightarrow \uparrow t_s$

TABLA: I_{sp} , E/W y Δv para distintos MCh:

Tipo	Impulso (s)	E/W	DV (km/s)
TERMOQUÍMICOS	100-500	10^2	5-10
TERMONUCLEARES	500-1000	10	10-20
TERMOELÉCTRICOS	150-1200	10^{-2}	3-30
ELECTROESTÁTICOS	1200-10000	$10^{-4}-10^{-6}$	30-300
ELECTROMAGNÉTICOS	700-5000	$10^{-4}-10^{-6}$	10-100

ENCENDER TU LLAMA CUESTA MUY POCO



4. Fórmula de Breguet.

→ Supóngase un cohete en vuelo estacionario, horizontal, rectilíneo y uniforme

$$E = D \quad L = Mg \quad \rightarrow \frac{1}{L/D} = \frac{E}{Mg} = \frac{\dot{m} I_{sp}}{Mg}$$

$$g \frac{dt}{(L/D)} = -I_{sp} \frac{dM}{M} \quad \text{Ecuación de Breguet.}$$

$\gamma = \pi/2$
 $h = h_i + \alpha \approx 0$
 $\frac{dv}{dt} = 0$

5. Impulso total.

→ El **impulso total** se define como la integral del empuje a lo largo del tiempo de funcionamiento del motor, es decir:



Comentarios:

→ Esta variable cobra sentido en motores de propelente sólido al existir una relación interesante entre la forma de la curva, su área encerrada y la arquitectura del motor.

→ En caso de que la masa de propelente empleada sea pequeña comparada con la masa inicial, el impulso total coincide con el incremento de velocidad del vehículo.

→ El impulso total define las capacidades impulsivas del sistema, con independencia de la estructura y la misión que se esté realizando.

→ Las misiones generalmente están caracterizadas por el incremento de velocidad asociado (Ecuación del cohete). No obstante, algunas misiones quedan caracterizadas por un nivel de empuje y un tiempo de funcionamiento (impulso total). La relación entre ambas magnitudes se deduce fácilmente:

$$M_p \frac{\Delta v}{I_T} = - \frac{\ln \left(1 - \frac{M_p}{M_i} \right)}{M_p / M_i}$$

→ En el caso $M_p \ll M_i$, las definiciones coinciden; sin embargo, cuando no es así (M_p significativa) la variación de cantidad de movimiento referida a la masa inicial es mayor, pues paulatinamente se va acelerando un móvil más ligero.

6. Catálogo de misiones.

6.1. Clasificación de las misiones.

- (a) Vehículos lanzadores: $\Delta v \in [5 - 10] \text{ km/s}$
E debe superar W (campo gravitatorio)
Potencia muy alta (~ 6GW)
⇒ Motores termoquímicos.
- (b) Misiles tácticos y misiones terrestres: Motores esbeltos y simples
JATO y RATO
⇒ Motores tq., propelente sólido.
- (c) Satélites y plataformas espaciales: Compensación de D
Correcciones de posición/actitud
⇒ Antes: Mono propulsante
Ahora: Eléctricos.
- (d) Transferencia orbital: A. De bajo empuje (E continuo)
B. Impulsiva (scesión crucero - impulsos)
⇒ Se requiere gran eficacia.
- (e) Naves y sondas interestelares: ~ Transferencia pro entre ≠ planetas.
⇒ Requerimientos muy variables.

2.1. Valores típicos de Δv para distintas misiones.

Misión	Δv	Comentarios.
Velocidades de escape → Tierra → Marte → Luna	11 km/s 5 Km/s 2,7 Km/s	$v_{esc} = \sqrt{\frac{2GM}{r}}$ ↳ Buen valor preliminar en misiones con campos gravitatorios a vencer.
Superficie → LEO	7,6 Km/s	Reabastecimiento ISS
LEO → GEO	4,2 Km/s	Satélite geoestacionario
LEO → Luna	4 Km/s	
Resistencia aerodinámica.		
LEO (400-500 km)	25 - 100 m/s	Atmosfera tóxica, pero muy altas v y tiempo de vuelo.
LEO (500 - 600 km)	5 - 25 m/s	
Station keeping		
Órbita GEO	50 m/s	Necesidades de exactitud + Fuerza de las perturbaciones.
L ₁ / L ₂	30 - 100 m/s	
Órbita lunar	40 - 400 m/s	

7. Análisis de utilización.

7.1. Inventario de masas.

→ Pese a que la repartición de masas en un cohete depende notablemente del tipo de motor empleado, existen un conjunto de definiciones y nomenclaturas básicas y comunes a todos ellos:

- $M_i \equiv$ Masa inicial = $M_{cp} + M_s + M_p$
- $M_f =$ Masa final = $M_{cp} + M_s$
- $M_{cp} \equiv$ Carga de pago
- $M_s \equiv$ Masa de la estructura = motores, planta de potencia, depósitos, interstages...
- $M_p \equiv$ Masa de propelente.

→ Asimismo, se definen otras magnitudes que relacionan las anteriores:

$$\lambda \equiv \frac{M_{cp}}{M_i - M_{cp}} \rightarrow \text{Reparto masa carga de pago.}$$

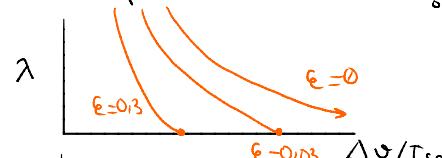
$$r \equiv \frac{M_{cp}}{M_i} \rightarrow \text{Fracción de carga de pago}$$

$$\epsilon \equiv \frac{M_s}{M_s + M_{cp}} \rightarrow \text{Relación estructural.}$$

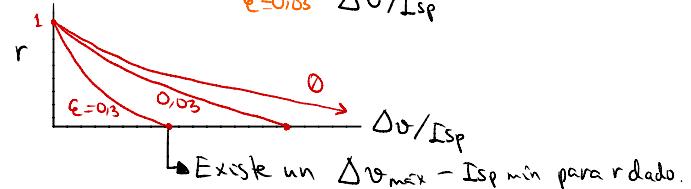
$$K \equiv \frac{M_d}{M_i}$$

→ ¿Cómo influyen estas variables en el comportamiento del cohete?

$$\frac{\Delta v}{I_{sp}} = \ln\left(\frac{1+\lambda}{\epsilon+\lambda}\right) \Rightarrow \lambda = \frac{e^{-\Delta v/I_{sp}} - \epsilon}{1 - e^{-\Delta v/I_{sp}}}$$



$$\frac{\Delta v}{I_{sp}} = \ln\left(\frac{1}{\epsilon + (1-\epsilon)r}\right) \Rightarrow r = \frac{e^{-\Delta v/I_{sp}} - \epsilon}{1 - \epsilon}$$



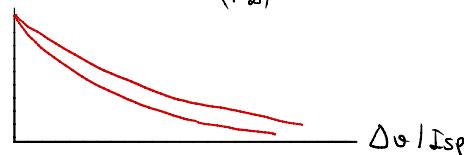
✳️ Razón para el uso de etapas auxiliares.

→ Supóngase un vehículo tal que a medida que se consume el propelente, la estructura soporte que lo contenía va siendo eliminada; manteniéndose sin embargo el factor estructural a lo largo del vuelo ($\delta M_s \sim \delta M_p \epsilon / (1-\epsilon)$):

$$\frac{dM}{dt} = -\dot{m} - \frac{dM_s}{dt} = -\frac{\dot{m}}{1-\epsilon} \rightarrow d\dot{v} = (1-\epsilon) I_{sp} \frac{dM}{M}$$

$$\rightarrow \Delta v = (1-\epsilon) I_{sp} \ln\left(\frac{M_i}{M_f}\right) \equiv (1-\epsilon) I_{sp} \ln\left(\frac{1}{r_\infty}\right)$$

$$\Rightarrow r_\infty = \frac{M_f}{M_i} \Big|_* = e^{-\Delta v/I_{sp}(1-\epsilon)}$$



→ A igual Δv y ϵ , aumenta notablemente la carga de pago que se puede llevar

↳ Aplicación: Vehículos multietapa.

7.2. Vehículos multietapa.

→ La utilización de vehículos multietapa presenta como gran ventaja que en cada escalón, se reduce la masa inerte del vehículo (depósitos y motores). Esto podría parecer invitar a una secuencia infinita de escalones; sin embargo, la complejidad de integración y los costes de fabricación sitúan entre 2 y 4 el número de escalones óptimos, en función de la misión.

→ Supóngase el uso de N escalones de propulsión, en los que cada uno incrementa Δv_i , de modo que:

$$\Delta v = \sum_j \Delta v_j = \sum_j I_{sp,j} \ln \frac{M_{i,j}}{M_{f,j}}$$

→ Utilizando motores de idéntico impulso específico, además de la misma relación estructural, los repartos de carga de pago λ_j que maximizan el Δv final deben ser iguales y de valor:

$$\begin{aligned} \bullet I_{sp,j} &= I_{sp} \\ \bullet \epsilon_j &\equiv \epsilon = \frac{m_{s,j}}{m_{p,j} + m_{s,j}} \end{aligned} \quad \left\{ \Delta v_{max} \Leftrightarrow \lambda_j = \lambda = \frac{\left(\frac{m_{cp}}{m_{i,1}}\right)^{1/N}}{1 - \left(\frac{m_{cp}}{m_{i,1}}\right)^{1/N}} \Rightarrow \frac{m_{cp}}{m_{i,1}} = \left[\frac{1 - \epsilon e^{\frac{\Delta v}{N I_{sp}}}}{(1 - \epsilon) e^{\frac{\Delta v}{N I_{sp}}}} \right]^N \right.$$

→ Por último: $\Delta v = N I_{sp} \ln \left(\frac{1+\lambda}{\epsilon+\lambda} \right)$

Nota: $m_{cp,j} = m_{i,j+1}$

7.3. Motores cohete termoquímicos.

A) Motores cohete de propelente sólido.

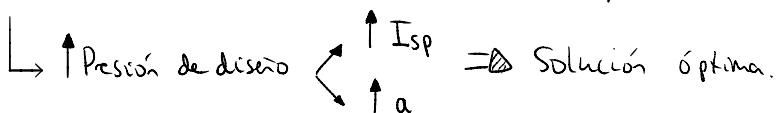
→ Particularidad: Motor y depósito de propelente indistinguibles, e incluso, el propelente proporciona integridad estructural a la cámara de combustión.

$$\begin{aligned} M_{pp} &= 0 \\ M_m + M_d &= M_c \quad [\text{Carcasa}] \\ M_c &= a \cdot M_p \quad [\text{Proporcional a ct propulsante}] \end{aligned} \quad \left\{ \Rightarrow M_i = M_{cp} + M_c + M_p = M_{cp} + M_p(1+a) \quad ; \quad a = \frac{\epsilon}{1-\epsilon} \right.$$

→ La masa de propelente referida a la inicial resulta: $\frac{M_p}{M_i} = \frac{1-r}{1+a}$; $r = \frac{M_{cp}}{M_i}$

$$\Rightarrow \Delta v = I_{sp} \ln \left(\frac{1+a}{r+a} \right)$$

- Optimización: a recoge la influencia del diseño (presión de diseño, SF, ...)



ENCENDER TU LLAMA CUESTA MUY POCO



(B) Motores cohete de propelente líquido.

→ Particularidad: La masa del motor es despreciable frente a la de propelante (y son elementos fácilmente separables).

$$\begin{aligned} M_{pp} &= 0 \\ M_m &<< M_p \\ M_d &= k M_p \end{aligned} \quad \left\{ \begin{aligned} M_i &= M_{cp} + M_s + M_{po} + M_{pf} + M_{do} + M_{df} = M_{cp} + M_s + M_p(1+k) \end{aligned} \right.$$

↳ La constante k relaciona la masa del depósito con la de propelante; y es función del tipo de propelante (densidad) y de la presurización de los depósitos. $k \approx 0,01$ para pesados, $k \approx 0,2$ para H_2 .

$$\Delta v = I_{sp} \ln \left(\frac{1+k}{r+k} \right) \quad ; \quad k = \frac{M_d}{M_p} \quad ; \quad r = \frac{M_{cp}}{M_i}$$

- Optimización: A priori, podría parecer que aumentar el impulso específico sea la mejor estrategia a la hora de aumentar Δv . Sin embargo, la elección de combustibles que proporcionen un alto valor (CH_2, LO_2) supondría unos depósitos voluminosos y pesados → Existirá un óptimo.

7.3. Motores cohete eléctricos.

→ Los cohetes con propulsión eléctrica presentan un inventario de masas radicalmente distinto a los termoquímicos. Elementos distintivos pueden ser las baterías, imanes, sistemas de ionización, cátodos, ánodos, solenoides... cuya masa es, en principio, proporcional a la potencia eléctrica y cónica del chorro:

$$\text{Energía específica: } Z = \frac{1}{M_m + M_{pp}} \int_{t_b}^{\infty} \frac{1}{2} \dot{m} v_s^2 dt$$

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} M_p I_{sp}^2 &= (M_{pp} + M_m) Z \\ M_d &= k M_p \end{aligned} \quad \left\{ \begin{aligned} M_i &= M_{cp} + \left(\frac{1}{2} I_{sp}^2 \frac{1}{Z} \right) M_p + (1+k) M_p \end{aligned} \right.$$

$$\Rightarrow \Delta v = I_{sp} \ln \left(\frac{1+k + \frac{1}{2} \frac{I_{sp}^2}{Z}}{r+k + \frac{1}{2} \frac{I_{sp}^2}{Z}} \right)$$

- Optimización: La ecuación del cohete permite, dado el factor estructural, obtener una M_{cp} máxima para Δv dada, y viceversa (Δv_{\max} para r y E dados).

NOTA: $I_{sp} \sim \sqrt{Z}$ en general: luego un esfuerzo por mejorar Z no trae una mejora proporcional.

Capítulo 3. Modelo ideal de motor cohete.

1. Introducción. Aproximaciones y modelos de problemas de ingeniería.

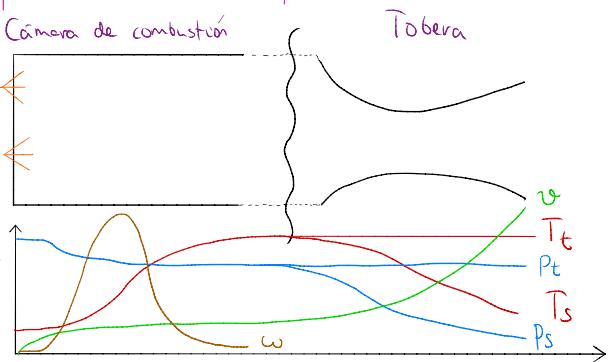
→ En general, a la hora de afrontar el análisis de un sistema de ingeniería, es necesario establecer un modelo físico y acometer la resolución matemática de las ecuaciones que terminan por definirlo. No siempre se tienen en mente los mismos objetivos, en cuanto a coste, esfuerzo, fidelidad y complejidad. Por ello, en general existen 3 tipos distintos de aproximación, o dicho de otra manera, de modelo.

Modelo	Simple	Ingeniería	Investigación.
Cantidad y complejidad de los datos utilizados	Pocos	Muchos	Muchos
Confianza en los datos empleados	Alta	Media	Media-baja
Formación necesaria	Normal	Experta	Muy alta
Ciclo de trabajo - tiempo de respuesta.	Corto	Medio-largo	Largo
Nivel de fiabilidad, precisión, predictibilidad.	Moderada	Buena	Alta
Coste	Bajo	Alto	Muy alto.

2. Modelo simple de motor.

→ Aplicación: Motores térmicos en los que el sistema de aceleración es fluidodinámico mediante una tobera convergente-divergente

- Identificar, describir y analizar los procesos que tienen lugar.
- Identificar las variables de diseño más relevantes.
- Calcular las actuaciones del motor (5-10%)
- Obtener diseños / dimensionados iniciales.



→ Objetivos:

→ Modelo más sencillo:

Reactor bien mezclado cero-dimensional en el que se suministran los reactantes de forma continua y se obtienen productos cuya composición, en el caso más complejo, es la de equilibrio.

(A) Cámara de combustión:

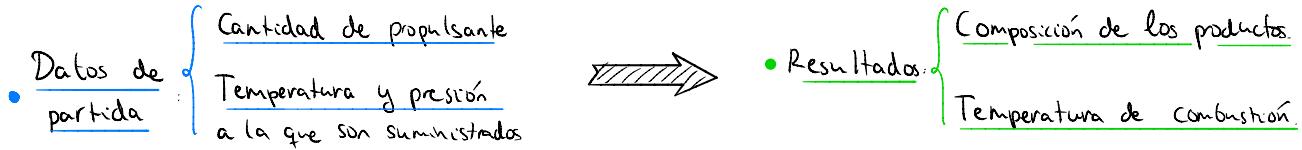
que se suministran los reactantes de forma continua y se obtienen productos cuya composición, en el caso más complejo, es la de equilibrio.

(B) Tubería:

Conducto unidimensional de sección variable por el que discurre en régimen estacionario un fluido homogéneo, congelado, sin pérdidas por fricción o flujo de calor.

3. Cámara de combustión.

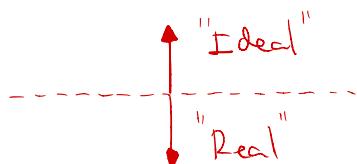
→ El modelo de cámara de combustión tiene que proporcionar la composición y temperatura de combustión, a partir de unas ciertas cantidades de sustancias reactantes para un valor dado de la presión a la que tiene lugar el proceso.



→ En un grado de complejidad creciente, se pueden enumerar los siguientes modelos:

- Modelo de combustión completa: Se impone que los gases de salida tienen por composición la correspondiente a la combustión completa.

- Modelo de composición de equilibrio:



Si se permite que las reacciones se completen y se alcance el equilibrio, la composición final obtenida no depende de la historia seguida por los reactantes. Se supone la velocidad de reacción muy superior a la del cambio de las condiciones en la cámara.

- Modelo de cinética química finita: Se admite que las velocidades de reacción son comparables a las convectivas. Análisis de inicio, desarrollo y final de las reacciones químicas.

- Modelos multidimensionales: Se analiza la fluidodinámica completa del proceso, teniendo en cuenta por ejemplo la coexistencia de varias fases y la turbulencia.

3.1. Modelo de combustión completa.

→ Ejemplo simple y muy representativo: $2 \text{ H}_2 + \text{O}_2 \rightarrow 2 \text{ H}_2\text{O}$

↳ O bien combustión completa o bien un reactante en exceso y nada más.

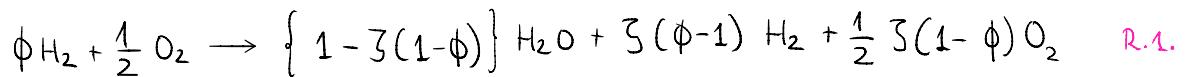
→ Se definen las magnitudes riqueza de la mezcla (f) y la relación de mezcla ($\frac{\text{O}}{F}$):

$$f = \frac{\dot{m}_F}{\dot{m}_O} \quad ; \quad \frac{\text{O}}{F} = \frac{\dot{m}_O}{\dot{m}_F} = \frac{1}{f}$$

→ En caso de producirse una reacción en proporciones estoquimétricas, se les coloca el subíndice st (f_{st} , $(\frac{\text{O}}{F})_{st}$). Asociado a esto, se define la relación de equivalencia:

$$\phi = \frac{f}{f_{st}} = \frac{(\text{O}/F)_{st}}{(\text{O}/F)}$$

→ En la mencionada reacción, para tener en cuenta el posible exceso de cualquier reactante, la reacción se puede ajustar como sigue:



↳ Siendo $\bar{s}(x) = \frac{1}{2} \{ x + |x| \}$, permitiendo anular ciertos coeficientes en función de las proporciones.

✳️ Cálculo de la temperatura de combustión.

→ Considerando una reacción genérica del tipo:

$$\sum v_i' A_i = \sum v_i'' A_i \quad \begin{cases} v_i \equiv \text{Coefs. estequiométricos} \\ A_i \equiv \text{Símbolos de las sustancias.} \end{cases}$$

→ Aplicando la ecuación de la energía a la reacción:

$$\sum_i \{ v_i' [\Delta_f h_i^\circ + (h_i^\circ(T_0) - h_i^\circ(T_{ref}))] \} = \sum_i \{ v_i'' [\Delta_f h_i^\circ + (h_i^\circ(T_c) - h_i^\circ(T_{ref}))] \}$$

$T_0 \equiv T^a$ de entrada de las sustancias a la CC.

$\Delta_f h_i^\circ \equiv$ Entalpas molares de formación a T_{ref}

Donde: $h_i^\circ \equiv$ Entalpas molares (senables)

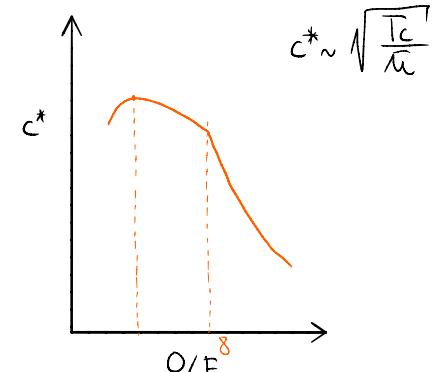
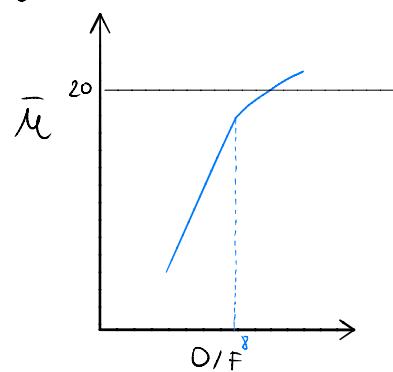
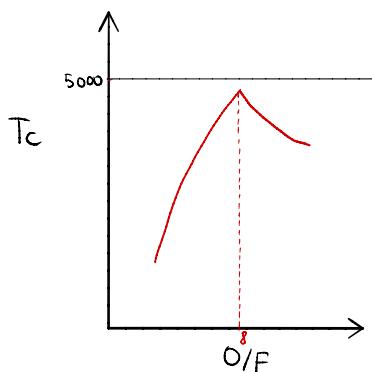
$T_c \equiv T^a$ adiabática de combustión

$T_{ref} = 298,15 \text{ K}$

→ En el caso de la reacción R.1., los coeficientes v_i son:

$$v_{\text{H}_2}' = \phi; v_{\text{O}_2}' = \frac{1}{2}; v_{\text{H}_2}'' = \bar{s}(\phi-1); v_{\text{O}_2}'' = \frac{1}{2} \bar{s}(1-\phi); v_{\text{H}_2\text{O}}'' = 1 - \bar{s}(1-\phi)$$

→ Suponiendo comportamiento de gas perfecto, con los parámetros de cada componente se pueden calcular las gráficas siguientes:



$$c^* \sim \sqrt{\frac{T_c}{\mu}}$$

- I La T^a de combustión es máxima con composición estequiométrica (pues no hay ninguna especie inerte).
- II El peso molecular medio crece al hacerlo la relación de mezcla ($\text{H}_2 \equiv F$, y es el más ligero).
- III El parámetro de velocidad c^* , que veremos que es del orden de I_{sp} , presenta un comportamiento más complejo, pues a priori crece con la T^a de combustión, y será máximo con ella; Sin embargo, el peso molecular también influye, luego el máximo se ve desplazado hacia composiciones más ricas en H_2 .

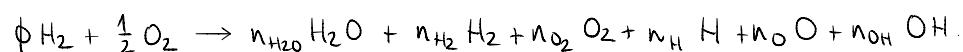
ENCENDER TU LLAMA CUESTA MUY POCO



3.2. Modelo de composición de equilibrio.

→ El modelo de combustión completa pone de manifiesto la importancia de la elección de los reactantes y la composición de la mezcla; y su impacto sobre las actuaciones del motor. Sin embargo, las altísimas T_c llevan a muchas especies químicas a la dissociación, de modo que la composición con el modelo de combustión completa es irreal.

→ Considerese la reacción de combustión entre el hidrógeno y el oxígeno, dando lugar a:



↳ Se trata de una mezcla de 6 especies y 8 incógnitas [6 concentraciones + T_c y p_c].

Dado que se dispone de la composición inicial y hay sólo 2 elementos presentes, se requieren 6-2 ecuaciones de equilibrio químico.

→ Dado que se busca conocer T_c , se necesita conocer p_c y la entalpía inicial de los reactantes.

$$n_H = n_{\text{total}} (2 \chi_{H_2O} + 2 \chi_{H_2} + \chi_H + \chi_{OH}) \quad (n_H=2\phi)$$

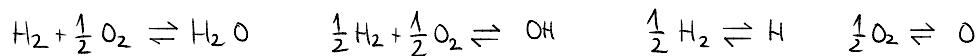
$$n_O = n_{\text{total}} (\chi_{H_2O} + 2 \chi_{O_2} + \chi_O + \chi_{OH}) \quad (n_O=1)$$

$$2\phi = \frac{2\chi_{H_2O} + 2\chi_{H_2} + \chi_H + \chi_{OH}}{\chi_{H_2O} + 2\chi_{O_2} + \chi_O + \chi_{OH}}$$

→ Además, por definición de fracción molar:

$$1 = \chi_{H_2O} + \chi_{H_2} + \chi_{O_2} + \chi_H + \chi_O + \chi_{OH} \quad \text{III}$$

→ Por último, se han de especificar las reacciones de equilibrio:



$$K_{p,H_2O} = p^{-1/2} \frac{\chi_{H_2O}}{\chi_{H_2} \chi_{O_2}^{1/2}}; \quad \text{IV}$$

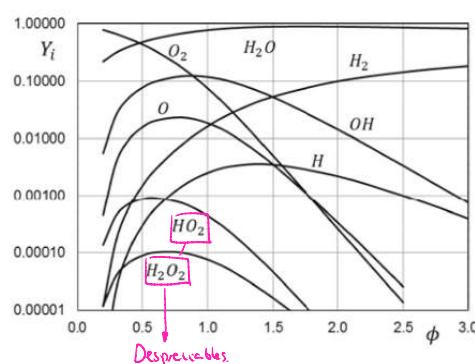
$$K_{p,OH} = \frac{\chi_{OH}}{\chi_O^{1/2} \chi_H^{1/2}}; \quad \text{V}$$

$$K_{p,H} = p^{1/2} \frac{\chi_H}{\chi_{H_2}^{1/2}}; \quad \text{VI}$$

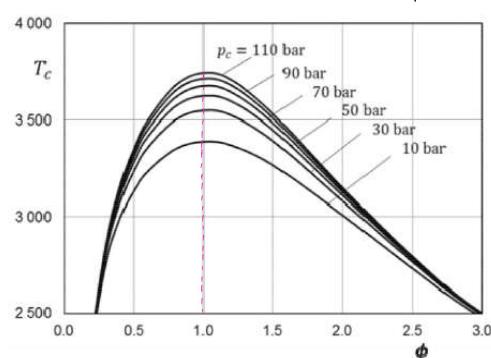
$$K_{p,O} = p^{1/2} \frac{\chi_O}{\chi_{O_2}^{1/2}}; \quad \text{VII}$$

→ Si se introducen las ecuaciones anteriores en un programa de cálculo adecuado, se obtienen los siguientes resultados (en cuanto a composición de equilibrio y T_c):

Composición de equilibrio = $f(\phi)$



Temperatura de combustión = $f(\phi)$



4. Tobera.

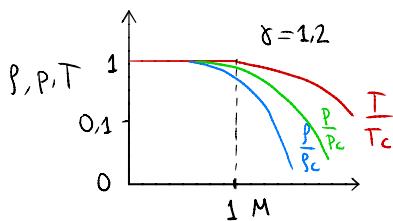
→ Con gran generalidad, las toberas de los motores cohete presentan simetría de revolución, lo que convierte el campo de velocidades en principio 3D en 2D (axial + radial). Sin embargo, en el común caso de que la relación entre la longitud y el diámetro es elevada, las velocidades radiales son despreciables frente a las axiales (Ecuación de continuidad).
Ello es equivalente a afirmar que el área de la sección es lentamente variable.

→ Por otra parte, existen una serie de hipótesis habituales:

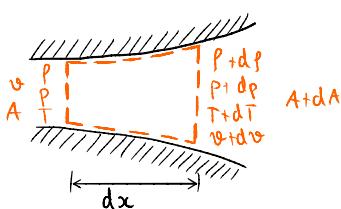
- Movimiento estacionario ($S_t \ll 1$)
- Ausencia de viscosidad ($\epsilon = 0$) ($Re \gg 1$)
- Movimiento adiabático ($\dot{Q} = 0$)
- Flujo congelado (Composición constante)
- Gas perfecto.

$$\left. \begin{array}{l} \text{Proceso} \\ \text{isentrópico} \end{array} \right\} \frac{T_c}{T} = \left(\frac{P_c}{P} \right)^{\frac{\gamma-1}{\gamma}} = \left(\frac{P_c}{P} \right)^{\frac{\gamma-1}{\gamma}} = 1 + \frac{\gamma-1}{2} M^2$$

→ A continuación, se observan los valores de ρ , p y T en función del n.º de Mach:



4.1. Ecuaciones generales.



→ Aplicando las ecuaciones generales al vc de la figura:

$$\underline{\text{ECA: }} p \nabla A = (p + dp)(\nabla + d\nabla)(A + dA) \Rightarrow d(p \nabla A) = 0 \quad 4.1.$$

$(dxdy) \ll dx, dy$

$$\underline{\text{ECCM: }} -p \nabla^2 A + (p \nabla A)(\nabla + d\nabla) = p A - (p + dp)(A + dA) + pdA$$

$$\rightarrow \nabla d\nabla + \frac{dp}{p} = 0 \quad 4.2.$$

$$\underline{\text{ECE: }} \text{Conservación de la entalpía de remanso: } d(c_p T + \frac{v^2}{2}) = 0 \rightarrow c_p dT + v dv = 0 \quad 4.3.$$

4.2. Magnitudes críticas.

→ En una tobera de configuración convergente - divergente (la más típica), se define la **sección crítica** como aquella en la que se alcanza $M=1$. En particular, coincide con la garganta de la tobera (sección de área mínima). Aplicando la conservación del gasto, se puede obtener A/A_g como:

$$\dot{m} = \rho \nabla A = \frac{P}{RT} M \sqrt{\gamma RT} A = \frac{P_c}{RT_c} \cdot A \sqrt{\gamma} \sqrt{\frac{P}{P_c}} = \frac{P_c}{RT_c} \sqrt{\gamma} \left(1 + \frac{\gamma-1}{2} M^2 \right)^{\frac{1}{2} - \frac{\gamma}{\gamma-1}}$$

$$\Rightarrow \dot{m} = \frac{P_c}{\gamma R T_c} A M \left(1 + \frac{\gamma-1}{2} M^2\right)^{-\frac{\gamma+1}{2(\gamma-1)}} \stackrel{D}{=} \dot{m}_g = \frac{P_c}{\gamma R T_c} A_g \left(\frac{\gamma+1}{2}\right)^{-\frac{\gamma+1}{2(\gamma-1)}} \Rightarrow \frac{A}{A_g} = \frac{1}{M} \cdot \left(\frac{2}{\gamma+1}\right)^{\frac{\gamma+1}{2(\gamma-1)}} \left(1 + \frac{\gamma-1}{2} M^2\right)^{\frac{\gamma+1}{2(\gamma-1)}}$$

→ Por último, destacar que la variable independiente más común en el estudio de motores cohete es la relación de presiones. A continuación se encuentran definidos el nº de Mach y la relación de áreas en función de P/P_c :

$$M = \sqrt{\frac{2}{\gamma-1} \left[1 - \left(\frac{P}{P_c}\right)^{\frac{\gamma-1}{\gamma}} \right] \cdot \left(\frac{P}{P_c}\right)^{-\frac{\gamma-1}{\gamma}}} \quad ; \quad \frac{A}{A_g} = \frac{\Gamma(\gamma)}{\left(P/P_c\right)^{1/\gamma} \sqrt{\frac{2\gamma}{\gamma-1} \left[1 - \left(\frac{P}{P_c}\right)^{\frac{\gamma-1}{\gamma}} \right]}} \quad ; \quad \Gamma(\gamma) = \sqrt{\gamma} \left(\frac{2}{\gamma+1}\right)^{\frac{\gamma+1}{2(\gamma-1)}}$$

4.3. Ecuaciones en flujo isentrópico.

→ En la ecuación 4.2. se ha supuesto $\bar{\epsilon} = 0$ (\neq disipación); y en la 4.3. se ha supuesto una aportación de calor nula ($dq = 0$); que son las condiciones necesarias equivalentes a un **flujo isentrópico**. Combinando ambas, resulta:

$$4.2. - 4.3 \rightarrow \frac{dp}{p} = C_p dT = \frac{dp}{p} R g T \Rightarrow \frac{dp}{p} = \frac{\gamma}{\gamma-1} \frac{dT}{T} \Rightarrow \frac{P_2}{P_1} = \left(\frac{T_2}{T_1}\right)^{\frac{\gamma}{\gamma-1}}$$

→ De todos modos, existe una forma alternativa y más genérica de alcanzar lo mismo:

$$\text{Ecuación de Gibbs} \Rightarrow T ds = dh - \frac{dp}{\rho}$$

4.4. Relación área-velocidad.

→ Desarrollando la expresión 4.1.:

$$d(PvA) = vA dp + pAdv + PvdA \Rightarrow \frac{dp}{p} + \frac{dv}{v} + \frac{dA}{A} = 0$$

→ Eliminando el término en dp :

$$\frac{dp}{p} = \frac{dp}{dp} \cdot \frac{dp}{p} = \frac{dp}{dp} (-v dv) \Rightarrow -v dv \frac{dp}{dp} + \frac{dv}{v} + \frac{dA}{A} = \left(1 - \frac{v^2}{dp/dp}\right) \frac{dv}{v} + \frac{dA}{A} = 0$$

$$\Rightarrow (1 - M^2) \frac{dv}{v} = - \frac{dA}{A} \quad 4.4.$$

Consideraciones previas: Las variables t.d. son monótonas respecto de la velocidad.

$\begin{cases} \delta v \sim -\delta P \text{ (ECM)} \\ \delta v \sim -\delta T \text{ (ECE)} \\ \delta v \sim -\delta P \text{ (ECM+EE)} \end{cases}$ Pero el área presenta otro carácter en función del M .

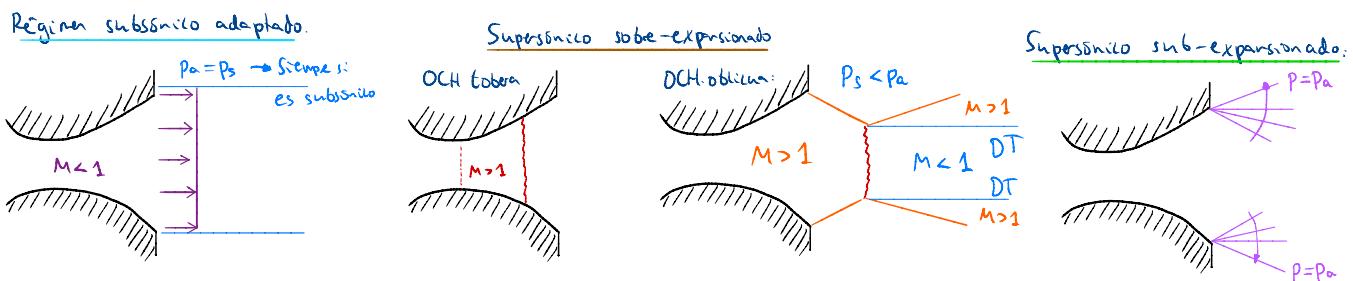
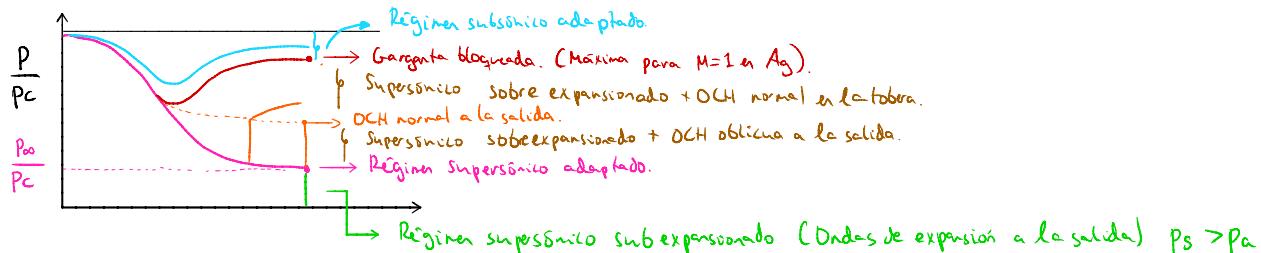
• Conducto convergente: $dA < 0$	$M < 1$	$dv > 0$ Aceleración
	$M > 1$	$dv < 0$ Desaceleración
• Conducto divergente $dA > 0$	$M < 1$	$dv > 0$ Expansión
	$M > 1$	$dv < 0$ Compresión

$(1 - M^2) \frac{dv}{v} = - \frac{dA}{A}$	$M < 1$	$dv < 0$
	$M > 1$	$dv > 0$

• Garganta $dA = 0$	$dv \neq 0 \rightarrow M = 1$	Sólo se puede pasar de subsonico a supersónico con una garganta.
	$dv = 0 \rightarrow M \neq 1$	

4.5. Regímenes de funcionamiento.

→ Se va a considerar el análisis de una tobera convergente - divergente, dada su aplicación universal en el ámbito de los motores cohete. En función de la relación de presiones entre la entrada (Cámara de combustión) y la salida, se pueden generar distintas configuraciones fluido-dinámicas en la tobera:



4.6. Relación de presiones como variable independiente.

→ Resulta muy útil expresar las variables fluidas de interés en la tobera en función de la presión referida a la presión de cámara (de remanso):

Número de Mach:

$$M = \sqrt{\frac{2}{\gamma-1} \frac{1 - (\frac{P}{P_c})^{\frac{\gamma-1}{\gamma}}}{(\frac{P}{P_c})^{\frac{\gamma-1}{\gamma}}}}$$

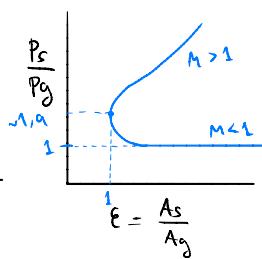
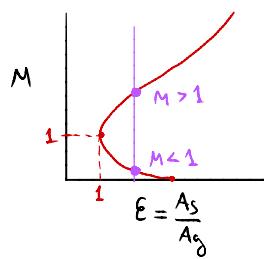
Velocidad del fluido:

$$v = \sqrt{2 c_p T_c \left(1 - \frac{T}{T_c}\right)} = \sqrt{\frac{2\gamma}{\gamma-1} R_g T_c \left(1 - \left(\frac{P}{P_c}\right)^{\frac{\gamma-1}{\gamma}}\right)} \rightarrow v = c * J^*(\gamma) \sqrt{\frac{2\gamma}{\gamma-1} \left[1 - \left(\frac{P}{P_c}\right)^{\frac{\gamma-1}{\gamma}}\right]}$$

Relación de áreas:

$$\epsilon = \frac{A}{A_g} = \frac{J^*(\gamma)}{\left(\frac{P}{P_c}\right)^{1/\gamma} \sqrt{\frac{2\gamma}{\gamma-1} \left[1 - \left(\frac{P}{P_c}\right)^{\frac{\gamma-1}{\gamma}}\right]}}$$

Para una relación de áreas dada, el modo de obtener la relación de presiones es iterativo. Es necesario destacar que la relación no es biyectiva, al existir siempre una solución subsonica y otra supersonica, sólo teniendo sentido para nosotros esta última.



Método iterativo:

$$\epsilon = \frac{J^*(\gamma)}{\left(\frac{P_s}{P_g}\right)^{1/\gamma} \sqrt{\frac{2\gamma}{\gamma-1} \left[1 - \left(\frac{P_s}{P_g}\right)^{\frac{\gamma-1}{\gamma}}\right]}} \rightarrow \left(\frac{P_s}{P_g}\right)_{i+1} = \left[\frac{J^*(\gamma)}{\epsilon \left[\frac{2\gamma}{\gamma-1} \left(1 - \left(\frac{P_s}{P_g}\right)_i^{\frac{\gamma-1}{\gamma}}\right) \right]^{1/2}} \right]^{1/\gamma}$$

ENCENDER TU LLAMA CUESTA MUY POCO



5. Parámetros globales.

→ Existe una serie de parámetros que enlazan el modelo ideal de tobera y de cámara de combustión, los cuales se presentan y analizan a continuación:

5.1. Parámetro velocidad característica.

→ Se define el parámetro de velocidad característica como:

$$C^* \stackrel{\text{def}}{=} \frac{P_c A_g}{\dot{m}}$$

→ Permite comparar de forma sencilla distintos motores cohete, al ser el parámetro que dimensiona la velocidad de salida y el impulso específico.

→ Asimismo, permite identificar si el proceso de combustión ha tenido lugar de manera eficiente o no, al estar relacionado con la temperatura de combustión.
Suponiendo una evolución isentrópica en la tobera:

$$C^* = \frac{P_c A_g}{P_g v g \gamma_f} = \frac{P_c}{P_g} \cdot R_g T_g \cdot \frac{1}{\gamma \delta R_g T_g} = \frac{P_c}{P_g} \sqrt{\frac{T_g}{T_c}} \sqrt{\frac{R_g T_c}{\gamma}}$$

→ Aplicando las relaciones entre las variables críticas (garganta) y las de remanso (cámara),

$$C^* = \frac{\sqrt{R_g T_c}}{\gamma c(\gamma)} \quad 4.5.$$

→ Ahora disponemos de un modo de evaluar la eficiencia de la combustión:

$$\left. \begin{array}{l} \bullet \text{Teóricamente (isentrópico): } C^*|_{\text{Teórico}} = \frac{\sqrt{R_g T_c}}{\gamma c(\gamma)} \\ \bullet \text{Experimentalmente: } C^*|_{\text{Exp.}} = \frac{P_c A_g}{\dot{m}} \end{array} \right\} \eta_{\text{combustión.}}$$

5.2. Coeficiente de empuje.

→ Se define el coeficiente de empuje C_E como el empuje proporcionado por un motor cohete dividido por la presión de cámara y el área de garganta:

$$C_E = \frac{E}{P_c A_g} \quad \text{mo "Empuje adimensional".}$$

→ Recordando la definición escalar del empuje y del parámetro velocidad característica,

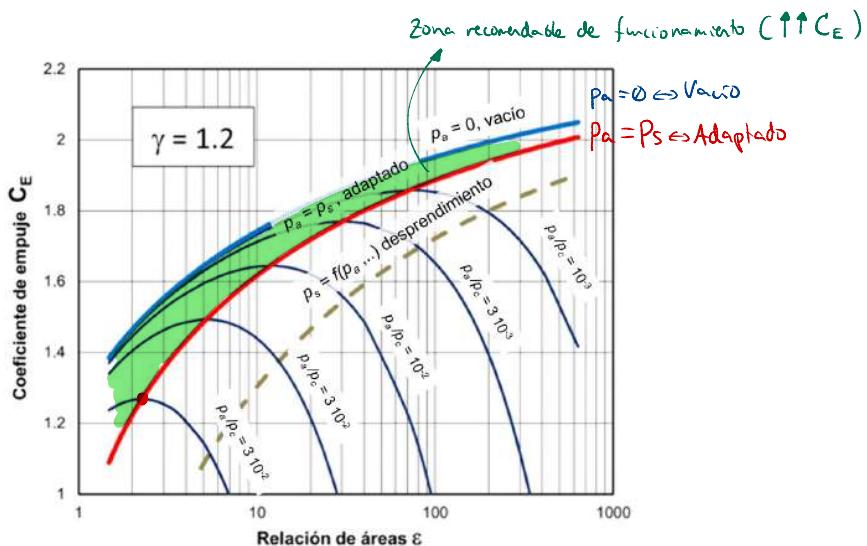
$$C_E = \gamma c(\gamma) \sqrt{\frac{2\gamma}{\gamma-1} \left[1 - \left(\frac{P_s}{P_c} \right)^{\frac{\gamma-1}{\gamma}} \right]} + E \left(\frac{P_s}{P_c} - \frac{P_a}{P_c} \right) \quad f \left\{ \begin{array}{l} \gamma = f(P_s/P_c) \\ P_a/P_c \end{array} \right\}$$

I) Casos de interés. Representación gráfica.

→ Se observa que C_E crece de forma monótona al disminuir $\frac{P_a}{P_c}$ (aumentar la altura de vuelo), siendo máxima para vuelo en vacío.

→ La relación funcional con $\frac{P_s}{P_c}$ se da a través de la relación de áreas, existiendo un valor que, dado P_a/P_c y γ , maximiza C_E . Se demuestra que dicho máximo se da con tobera adaptada.

$$\text{NOTA: } (C_{E,\text{vacuo}})_{\epsilon \rightarrow \infty} = \Gamma(\gamma) \sqrt{\frac{2\gamma}{\gamma-1}} ; \gamma=1,2 \rightarrow (C_{E,\text{vacuo}})_{\epsilon \rightarrow \infty} \approx 2,4$$



→ Por tanto, para cada cultura de vuelo cambia el valor de ϵ que maximiza el coeficiente de empuje; por lo que lo ideal sería una tobera de geometría variable.

II Impulso específico

→ El impulso específico, ya definido anteriormente, se puede relacionar con los parámetros nuevos C^* y C_E :

$$I_{sp} = C^* \cdot C_E$$

↓ ↓
 Cámara de Tubería
 combustión

$$\sim \sqrt{\frac{RT_c}{J(\gamma)}}$$

6. Efectos reales. Pérdidas.

→ La anterior expresión para el impulso específico (variable de mérito principal de un motor cohete) se ha obtenido con un gran conjunto de hipótesis simplificativas que, en un análisis ligeramente más exhaustivo, hay que reconsiderar y cuantificar, a través de rendimientos por ejemplo.

→ A continuación se enuncian y describen los efectos más relevantes a considerar:

I Efecto de la viscosidad y transmisión de calor.

→ Paredes:
 Capa límite \Rightarrow Pérdida de energía cinética \Rightarrow Pérdida de empuje. $\sim 1\%$
 Transmisión de calor

II Efectos de divergencia. (Bidimensionalidad)

→ Las toberas, en general, se diseñan con contornos aerodinámicos distintos al ideal. Es habitual construir toberas que, sacrificando parcialmente la aerodinámica, son más cortas (menor peso y volumen), lo que acaba por disminuir el empuje global.

- Motores de altas prestaciones: Pérdidas poco importantes.
 - Misiles Tácticos: 2-5%

III Presencia de ondas de choque en el interior de la tobera.

→ Debido al contorno aerodinámico no ideal, se producen pérdidas de presión a lo largo de la tobera, que eventualmente pueden coalescer y generar una onda de choque, con su consecuente pérdida de presión de remanso.

IV Flujo heterogéneo.

→ Es habitual en motores cohete la existencia ("voluntaria") de varias fases distintas, como pueden ser partículas sólidas de Al, generando una cierta ineficiencia en la combustión. (2-5%)

VI Combustión incompleta.

→ Son pérdidas en la liberación de energía química de los propulsantes, debido a imperfecciones en los procesos en la cámara de combustión: Falta de homogeneidad, atomización / evaporación defectuosas...

(VI) Flujos reactantes y cambio de composición.

→ El enfriamiento del fluido a lo largo de la tubería provoca un desplazamiento del equilibrio. En virtud del principio de Le Châtelier, el sistema evolucionará en contra de dicho desplazamiento, abocando a una pérdida de I_{sp} por el calor no liberado.

VII No adaptación o desprendimiento en tuberías sobre-expansionadas.

→ En el caso de que la tobera no esté adaptada, los efectos son más que apreciables. Además, es probable el desprendimiento de la corriente, causando perjuicios aún mayores.

Capítulo 4. Actuaciones y trazado de toberas.

1. Actuaciones de toberas.

1.1. Introducción.

→ La tobera de un motor cohete es un elemento geométricamente "simple" pero con la gran responsabilidad de acelerar el flujo de manera eficiente. El modelo 1D de tobera permite predecir adecuadamente el comportamiento del motor cohete al variar la altura de vuelo, tal y como se obtuvo en el tema anterior:

$$C_E = J^*(\gamma) \sqrt{\frac{2\gamma}{\gamma-1} \left[1 - \left(\frac{P_s}{P_c} \right)^{\frac{\gamma-1}{\gamma}} \right]} + E \left(\frac{P_s}{P_c} - \frac{P_a}{P_c} \right)$$

→ Expresión que proporciona $C_E = f(\frac{P_a}{P_c}, E)$ al ser $\frac{P_s}{P_c} = f(E, \gamma)$. Al trazar las curvas del coeficiente de empuje en función de E para alturas dadas, se observaba que el coeficiente era máximo para el caso de tobera adaptada ($P_s = P_a$), pero ello sucede para una determinada altura. Sin embargo, la altura es definitivamente variable en el funcionamiento del motor, luego la condición de tobera adaptada es puntual (salvo que la tobera sea de geometría variable).

→ Así, surge el problema de optimizar el valor de E para que el vuelo entre dos alturas distintas sea lo más eficiente posible.

1.2. Relación de áreas óptima.

→ Imponiendo la condición mencionada $\frac{P_s}{P_a} (E_{opt}) = 1$:

$$E_{opt}(h) = \frac{J^*(\gamma)}{\left(\frac{P_a}{P_c} \right)^{1/\gamma} \sqrt{\frac{2\gamma}{\gamma-1} \left[1 - \left(\frac{P_a}{P_c} \right)^{\frac{\gamma-1}{\gamma}} \right]}} ; \quad P_a = P_0 \pi(h)$$

1.3. Impulso total máximo.

→ El impulso total entre dos instantes de tiempo, se puede escribir como:

$$I_T = \int_{t_b}^{t_f} E dt = P_c A_g \int_{t_b}^{t_f} \left[C_{E,adp} + E \left(\frac{P_s}{P_c} - \frac{P_a}{P_c} \right) \right] dt$$

→ El problema a resolver es el cálculo de la relación de áreas que maximice el impulso total del motor a lo largo del vuelo. Integrando la expresión anterior, se obtiene:

$$I_T = P_c A_g t_b \left[C_{E,adp} + E \left(\frac{P_s}{P_c} - \frac{P_a}{P_c} \right) \right]$$

ENCENDER TU LLAMA CUESTA MUY POCO



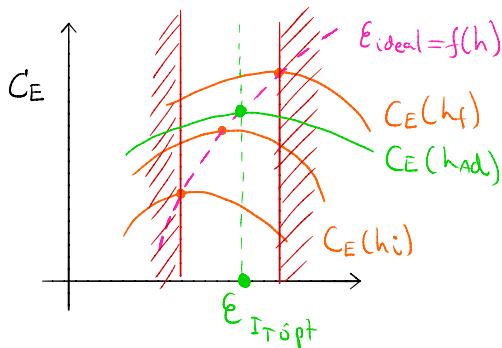
→ Donde la única integral simplificada con el valor medio es:

$$\bar{P}_a = \frac{1}{t_B} \int_{t_B}^{t_f} p_a(h) dt = \frac{1}{t_B} \int_{t_B}^{t_f} \frac{p_a(h)}{\bar{v}_a} dh$$

→ La expresión del impulso total anterior resulta similar a la que se obtendría si el motor funcionara un tiempo t_B en $h=h_{ad}$ [$p_a(h_{ad}) = \bar{p}_a$] ; de modo que, con un razonamiento análogo :

$$(P_s)_{opt} = \bar{p}_a \rightarrow \epsilon_{I_{T, opt}} = \frac{J^*(\gamma)}{\left(\frac{\bar{p}_a}{P_c}\right)^{1/\gamma} \sqrt{\frac{2\gamma}{\gamma-1} \left[1 - \left(\frac{\bar{p}_a}{P_c}\right)^{\frac{\gamma-1}{\gamma}}\right]}}$$

$$\Rightarrow I_T|_{opt} = P_c A g t_B C_E|_{Adp, P_s=\bar{p}_a} = c^* M_p J^*(\gamma) \sqrt{\frac{2\gamma}{\gamma-1} \left[1 - \left(\frac{\bar{p}_a}{P_c}\right)^{\frac{\gamma-1}{\gamma}}\right]}$$



Comentarios:

- Rápidamente se observa que interesa aumentar P_c
↳ $\uparrow \sqrt{\bullet}$
- Además, $\uparrow P_c \Rightarrow \downarrow t_B$.

1.4. Δv máximo.

→ Si se desea maximizar el incremento de velocidad, se procede de manera análoga:

$$\Delta v = \int_{t_B}^{t_f} \frac{E}{M} dt = - \int_{m_i}^{m_f} I_{sp} \frac{dm}{m} = - \int_{m_i}^{m_f} c^* C_E \frac{dm}{m}$$

→ Integrandos:

$$\Delta v = c^* \ln\left(\frac{m_i}{m_f}\right) \left[C_E|_{Adp} + \epsilon \left(\frac{P_s}{P_c} - \frac{\tilde{p}_a}{P_c} \right) \right] ; \tilde{p}_a = \frac{1}{\ln \frac{m_i}{m_f}} \int_{m_i}^{m_f} p_a(h) \frac{dm}{m}$$

$$\Rightarrow (P_s)_{\Delta v, opt} = \tilde{p}_a \Rightarrow \epsilon_{\Delta v, opt} = \frac{J^*(\gamma)}{\left(\frac{\tilde{p}_a}{P_c}\right)^{1/\gamma} \sqrt{\frac{2\gamma}{\gamma-1} \left[1 - \left(\frac{\tilde{p}_a}{P_c}\right)^{\frac{\gamma-1}{\gamma}}\right]}}$$

$$\Rightarrow \Delta v_{opt} = c^* \ln\left(\frac{m_i}{m_f}\right) J^*(\gamma) \sqrt{\frac{2\gamma}{\gamma-1} \left[1 - \left(\frac{\tilde{p}_a}{P_c}\right)^{\frac{\gamma-1}{\gamma}}\right]}$$

2. Geometría de toberas para motores cohete.

2.1. Introducción.

→ Sobre la tobera recae una parte vital de la eficiencia de un motor cohete. A nivel disciplinar, la aerodinámica, estructura y control térmico son los aspectos cruciales de su funcionamiento, centrándonos en el primero.

→ En general, las toberas se dividen en convencionales (geometría fija) y autoadaptables (geometría móvil). Nos centraremos en el 1^{er} tipo, las cuales quedan definidas por:

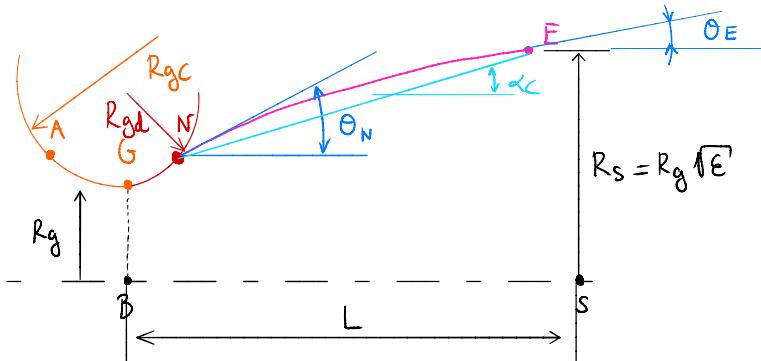
- { Garganta: Determina el gasto másculo de la tobera (CBS)
- Sección divergente: Determina el campo fluido a la salida → Lo que vamos a estudiar.

→ Comúnmente, las toberas son de uno de los siguientes tipos:

- a) Tobera cónica:
 - IC: Ideal Contour.
 - TIC: Truncated IC
 - CTIC: Compressed TIC
- b) Tobera contorneada ⇒
 - TOC: Thrust Optimised Contour
 - TDP: Thrust Optimised Parabola.

2.2. Definición geométrica de toberas.

→ Los contornos aerodinámicos de las toberas convencionales consisten en conductos convergentes - divergentes, descriptos por curvas discretizadas por puntos. Sin embargo, con un pequeño nº de parámetros, es posible definir sus características esenciales.



Sección mínima ⇒ BG → Rg

Sección de salida ⇒ SE → $R_s = R_g \sqrt{e}$

Radios de acuerdo según mínima

Lado convergente → Rgc
Lado divergente → Rgd

Ángulos de tangencia:
(segmento NE)

Círculo total de la corriente en el radio de acuerdo de la garganta. → θ_N
Ángulo de salida de la corriente en el borde de salida: → θ_E

Ángulo del cono inscrito: $\alpha_C \sim (\theta_N + \theta_E) \cdot \frac{1}{2}$

→ La longitud de la tobera se suele referir a una medida auxiliar:

↳ Se define la **longitud relativa** de la tobera como la longitud real de la tobera dividida por el radio en la sección de garganta:

$$\frac{L}{R_g} = \frac{\sqrt{E} - 1}{\tan \alpha_c} + \frac{R_g}{R_g} \frac{\cos(\theta_N - \alpha_c) - \cos \alpha_c}{\sin \alpha_c}$$

↳ Se define la **longitud fraccional** de la tobera como el cociente entre la longitud real de la tobera y la longitud de la tobera cónica de $\alpha_c = 15^\circ$ de igual E.

→ La longitud de la tobera representa de forma vital en el tamaño de la tobera, y por tanto, en su peso. Se demuestra que el peso resulta proporcional al área lateral que, adimensionalizada con el área a la garganta, responde a la siguiente expresión:

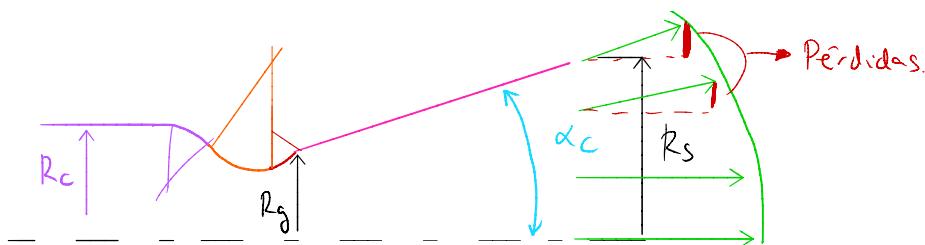
$$\frac{A_L}{A_g} = \frac{L}{R_g} \frac{\sqrt{E} + 1}{\cos \alpha_c} = \frac{E + 1}{\sin \alpha_c} \Rightarrow W = f(E, \alpha_c)$$

3. Trazado del contorno aerodinámico.

3.1. Toberas cónicas.

→ Se trata de las toberas de geometría más sencilla, determinadas por únicamente dos parámetros: El radio de acuerdo en la garganta y el **ángulo del cono**.

- ↳ **Ventajas:** Simplicidad y costes.
- ↳ **Desventajas:** Efectos de divergencia y longitud excesiva.



(*) Parámetros de toberas cónicas:

• **Gasto:** $\dot{m} = \int_{\Sigma_s} \rho v_{s1D} d\tau = \int_0^{\alpha_c} \rho v_{s1D} (2\pi r \sin \alpha_c dr) = \rho_s v_{s1D} 2\pi r^2 (1 - \cos \alpha_c)$

\sum_s Conociendo flujo 1D en cada linea.

• **Velocidad de salida efectiva:** $\langle v_s \rangle = \frac{1}{\dot{m}} \int_{A_s} \rho v_{s1D} (v_{s1D} \cos \alpha) d\tau = \frac{1}{\dot{m}} \rho_s v_{s1D}^2 \int_0^{\alpha_c} \cos \alpha (2\pi r \sin \alpha dr)$

↳ $\langle v_s \rangle = v_{s1D} \frac{1 + \cos \alpha_c}{2} \Rightarrow \lambda_{conica} = \frac{\langle v_s \rangle}{v_{s1D}} = \frac{1 + \cos \alpha_c}{2}$

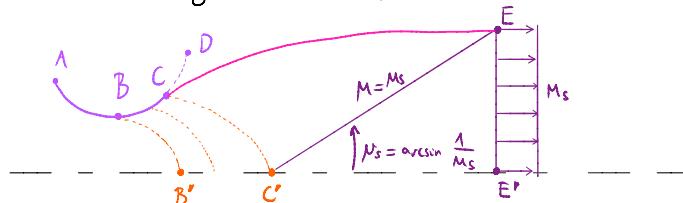
• **Empuje:** $E_{conica} = \dot{m} \lambda v_{s1D} + A_s (p_{s1D} - p_a)$

Nota: Coeficiente de divergencia en toberas contorneadas: $\lambda_{contorneada} \approx \frac{1 + \cos \left(\frac{\alpha_c + \theta_E}{2} \right)}{2}$

3.2. Toberas de contorno ideal.

→ Las toberas de contorno ideal son aquellas cuyo contorno aerodinámico es tal que produce una distribución uniforme de velocidades de salida alineadas con el eje. Al problema se le añade una restricción, y es obtener la mínima longitud posible ($\downarrow A_L, \downarrow W, \downarrow$ Refrigeración).

└ Enunciado del problema: Obtención del contorno aerodinámico de una tobera lo más corta posible, con E y garganta fijadas, que presente en la sección de salida un perfil de velocidades uniforme y paralelo al eje



- Forma de la garganta: ABCD \Rightarrow Cálculo del campo fluido en $BCC'B'$

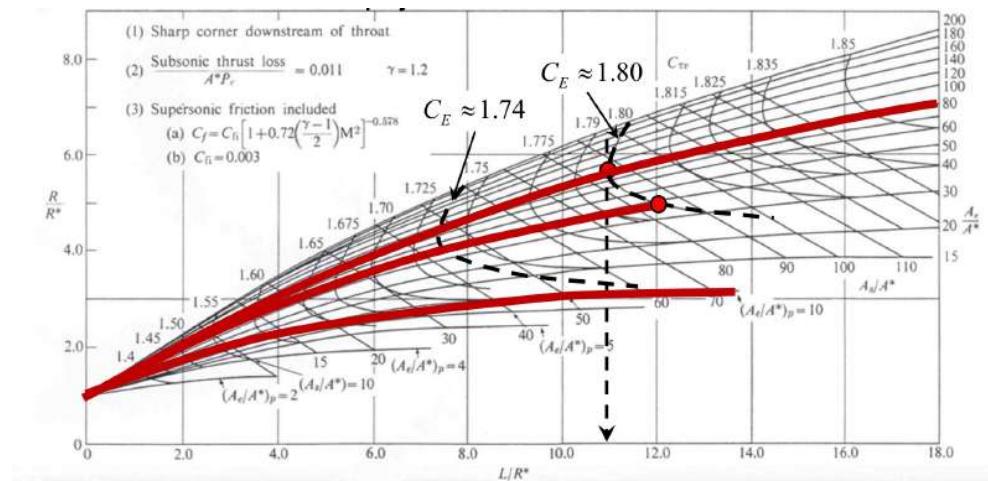
- Sección de salida (EE'): Flujo uniforme a M_s \Rightarrow En el cono de Mach $C'EE'$ no puede haber ninguna perturbación.

└ Punto C → Tal que el Mach en C' sea $M=M_s$ \Rightarrow Longitud mínima.

$$L \geq R_g \sqrt{E(M_s^2 - 1)}$$

- Contorno CE \Rightarrow $\begin{cases} \text{Punto E} \Rightarrow \text{Fijado por } C-E \\ \text{Contorno} \Rightarrow \text{Línea de corriente límite de la solución del campo fluido en } CC'E, \\ \text{que secundan las variables fluidas en } C'E \text{ y } CC' \end{cases}$

✳ Gráfica del trazado geométrico de contornos ideales.



Comentarios:

- Permite obtener, entrando con E , la forma del contorno CE'
- Entrando con un C_E fijo, se puede obtener la tobera con la relación de áreas mínima que lo consigue.
- Entrando con C_E fijo, y buscando el punto de tangencia con curvas A_L/A_g , se obtiene la tobera de menor área lateral (peso) que proporciona un coeficiente de empuje.
- Entrando con la longitud relativa, se prevee encontrar $E/C_{E,r} = \text{máx.}$

ENCENDER TU LLAMA CUESTA MUY POCO

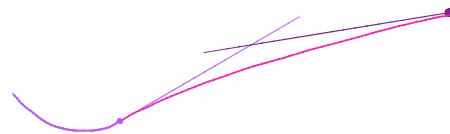


3.3. Toberas de contorno optimizado.

→ Las toberas de contorno optimizado surgen ante la complejidad y la gran longitud de las toberas de contorno ideal. A grandes rasgos, se trata de toberas contorneadas que, dada una longitud y una relación de áreas, proporcionan un coeficiente de empuje máximo.

✳ Thrust Optimised Parabolic.

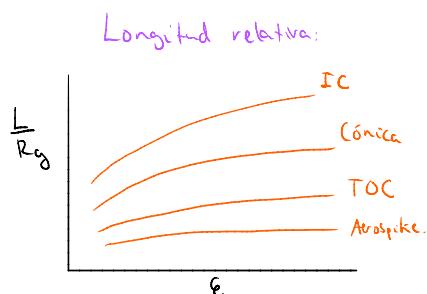
→ Se basa en una parábola que enlace tangencialmente la garganta con la salida.



✳ Thrust Optimized Contour. (Tobera de Rao)

→ Engloba distintos enfoques para enlazar garganta y salida. En particular, la solución de Rao se basa en 2 arcos de circunferencia (uno en el convergente y otro en el divergente), acompañados de una parábola posterior:

3.4. Análisis comparativo.



4. Toberas sobre-expansionadas.

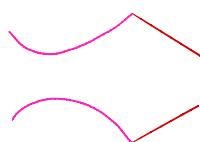
4.1. Funcionamiento.

→ Una tobera que funciona en régimen sobre-expandido es aquella que reduce de forma excesiva la presión del fluido, dejándola por debajo de la ambiental, de modo que se forman a priori ondas de choque oblicuas que acoplan el flujo:

→ La fenomenología es altamente compleja, y depende de la relación de presiones de la tobera - $NPR = \frac{P_c}{P_a}$.

Situación A:

NPR alto

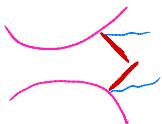


→ Comportamiento predicho por la teoría
unidimensional



Un descenso en N.P.R. inestabiliza la onda de choque oblicua a la salida. La teoría 1D indica que progresivamente se cerraría, convirtiéndose en normal, y entraría en la tobera hacia la garganta. Sin embargo, lo que realmente ocurre es un asuero por el conducto de la onda de choque, tras la cual se produce un desprendimiento de la corriente, de modo que a partir de dicho punto la tobera es inoperativa.

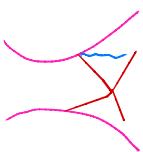
Situación B:



→ Si continúa descendiendo el valor de N.P.R., la morfología deja de ser axilíntica, y termina por colapsar en la solución de la teoría 1D (onda decho que normal) (Estable)

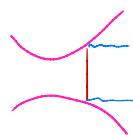
Situación C:

Pérdida de simetría.



Situación D:

Solución 1D



4.2. Determinación del punto de desprendimiento

→ Visto el funcionamiento y la fenomenología, parece razonable analizar el punto en el que la estructura del flujo se inestabiliza al desprendere la corriente. Es sabido que, en la zona de recirculación, la velocidad del fluido es baja y la presión es alta. El punto de desprendimiento queda fijado por la resistencia de la capa límite al salto de presiones impuesto por la onda de choque oblicua.

→ Si la onda de choque es "muy interior", el n.º de Mach incidente es pequeño, y el salto de presiones también lo es, al ser la presión aguas arriba mayor. Si, sin embargo, la presión de salida coincide con la ambiente ($p_s = p_a$) el Mach incidente es el mayor posible (al haber sido más expandido el fluido); y el salto de presiones será también grande.

→ Situación real: Entre medias

→ ¿De qué depende el corriente de presiones? $\Rightarrow \frac{p_d}{p_a} = f(M_d, Re, \gamma, \dots)$

→ En la práctica: $\frac{p_d}{p_a} = f(M_d, \gamma)$

Contorno

A) Modelo de Arens y Spilger:

$$\left(\frac{p_d}{p_a} \right)_{AS} = \left\{ \frac{1 + \frac{\gamma-1}{2} M_d^2 (1 - 0,56^2)}{1 + \frac{\gamma-1}{2} M_d^2} \right\}^{\frac{\gamma}{\gamma-1}}$$

B) Modelo de Summerfield:

$$p_a = 3,5 p_d \rightarrow \left(\frac{p_d}{p_a} \right)_{SU} = 0,286$$

(C) Modelo de Schmucker

$$\left(\frac{P_d}{P_a}\right)_{Sch} = \left(1,88 M_d - 1\right)^{-0,64} \Rightarrow \text{Uso extendido.}$$

(D) Modelo de Stark

$$\left(\frac{P_d}{P_a}\right)_{SRK} = \frac{\pi}{3 M_d} \Rightarrow \text{Durante empírico.}$$

4.3. Selección de la relación de áreas.

→ A la vista de los fenómenos mencionados y "cuantificados", es necesario reconsiderar la elección de la relación de áreas de la tobera. Pineramente se había concluido que se debe adaptar la tobera para una altura intermedia entre la inicial y la final.

Ello implica dicirarante que, desde h_0 hasta h_{ADP} la tobera se encuentra en un régimen sobre-expansionado siendo más marcado en la altura h_0 .

→ Se buscará, por tanto que la arquitectura de la tobera sea tal que en la altura más baja, en el peor de los casos, se produzca desprendimiento de corriente en la sección de salida.

→ Siguiendo el criterio de Summerfield:

$$P_a \Big|_{h_0} \leq 3,5 \tilde{P}_a \quad \begin{matrix} \text{Presión ambiente} \\ \text{máx} \end{matrix} \quad \begin{matrix} \text{Presión de salida (OCH salida)} \\ \text{máx} \end{matrix}$$

$$\hookrightarrow \text{Si sale de } h_0=0 \rightarrow P_a \Big|_{h_0} = 101325 \text{ Pa} \leq 3,5 \tilde{P}_a \Rightarrow \tilde{P}_a \Big|_{\min} = 29950 \text{ Pa} \Rightarrow h_{ADP} \Big|_{\max} \approx 9500 \text{ m.}$$

→ En criterios donde aparece el M_d se recoge la influencia de la presión de cámara.

La tendencia clara es que, a mayor P_c , mayor estabilidad (Máior P_d/P_a)

↪ Importante en arranques y paradas.

Anexo: Efectos bidimensionales. Tubería ideal.

→ Considerese la evolución adiabática de un fluido de composición constante y sin pérdidas; contando con dos restricciones:

Energía suministrada en la cámara constante: $\int_{A_s} h_t dm = \dot{m} c_p T_c = \text{cte.}$

Relación de áreas fija → de salida: Adaptada a P_a : $P_a = \frac{1}{\dot{m}} \int_{A_s} p dm$

→ Se busca obtener la distribución espacial de las variables fluidas que maximice el empuje:

$$\text{Empuje: } E = \int_{A_s} v \cos \theta dm$$

$$\hookrightarrow \text{Función a optimizar: } H = \int (v \cos \theta + \lambda_1 h_t + \lambda_2 p) dm + \text{cte.}$$

Condición de máximo:

$$\delta H = \int_{As} \left[(\cos\theta + \lambda_1 v) \delta v - v \sin\theta \delta \theta + (\lambda_1 c_p + \lambda_2 \frac{\gamma}{\gamma-1} T^{\frac{1}{\gamma-1}}) \delta T \right] dm = 0$$

→ $\begin{cases} \sin\theta = 0 \Rightarrow \theta = 0 \text{ Velocidad alineada con el eje.} \\ \lambda_1 v + 1 = 0 \Rightarrow v = \text{cte} \text{ Velocidad uniforme.} \\ \lambda_1 c_p + \lambda_2 T^{\frac{1}{\gamma-1}} \frac{\gamma}{\gamma-1} = 0 \Rightarrow T = \text{cte} \text{ Temperatura uniforme.} \end{cases}$