

# Master Universitario en Sistemas Espaciales

## PROPULSIÓN ESPACIAL Y LANZADORES

### EXAMEN FINAL – PROBLEMA 1

13 enero 2020

NOMBRE Y APELLIDOS:

(Tiempo 1 hora)

Se necesita calcular las propiedades de un propulsante sólido para motores cohete. Para ello, se dispone de este propulsante dentro de una cámara cilíndrica de **15 cm de radio** y de **1.15 m de longitud** para que funcione con combustión frontal, ocupando inicialmente todo el volumen interior de la cámara. La **masa total de propulsante es de 95 kg** y se sabe que  $\gamma = 1.22$ . Los experimentos se realizan a una presión ambiente  **$P_{amb} = 101325 \text{ Pa}$**  y usando la geometría de la cámara anteriormente descrita con dos toberas distintas, cuyos parámetros y resultados experimentales proporcionados están en la siguiente tabla.

Tobera 1	Tobera 2
$A_{g1} = 50 \text{ cm}^2$	$A_{g2} = 45 \text{ cm}^2$
$A_{s1} = 600 \text{ cm}^2$	$A_{s2} = 600 \text{ cm}^2$
$t_{b1} = 15 \text{ s}$	$t_{b2} = 10 \text{ s}$
$E_1 = 7000 \text{ N}$	

Se pide calcular:

- La densidad del propulsante ( $\rho_P$ ) y el parámetro de velocidad característica ( $c^*$ ). (3 puntos)
- Los parámetros del propulsante de la ley de Vieille “ $a$ ” y el exponente “ $n$ ”. (2 puntos)

Se pretende usar el **mismo propulsante** y en la **misma cámara de combustión** para un motor que debe operar en atmósfera a una altitud de referencia alrededor de 14 km ( $P_{amb} = 14101.8 \text{ Pa}$ ). En este caso, se debe diseñar la tobera para que proporcione el máximo empuje a la altitud de referencia teniendo en cuenta que la presión de cámara nominal sea de **5 MPa**. Se pide calcular para este motor:

- Relación de áreas ( $\epsilon$ ) y coeficiente de empuje ( $C_E$ ). (1 punto)
- Área de garganta ( $A_g$ ) (0.5 puntos)
- Impulso específico ( $I_{sp}$ ), empuje ( $E$ ) y gasto másico ( $\dot{m}$ ). (1.5 puntos)
- Tiempo** desde el inicio de la **fase de cola** hasta que el empuje haya descendido hasta el 10% del empuje nominal suponiendo que la fase de cola es isoterma. (2 puntos)

## SOLUCION

- a) La densidad del propulsante ( $\rho_P$ ) y el parámetro de velocidad característica ( $c^*$ ). (3 puntos)

$$A_b = \pi R_c^2 = 0.0707 \text{ m}^2$$

$$V_P = A_b L = 0.0813 \text{ m}^3 \Rightarrow \rho_P = \frac{M_P}{V_P} = 1168.7 \text{ kg/m}^3$$

$$\dot{m}_1 = \frac{M_P}{t_{b1}} = 6.33 \text{ kg/s}$$

$$\Gamma(\gamma) = \sqrt{\gamma} \left( \frac{2}{\gamma+1} \right)^{\frac{\gamma+1}{2(\gamma-1)}} = 0.6524$$

$$\varepsilon_1 = \frac{A_{S1}}{A_{g1}} = 12 \Rightarrow \varepsilon_1 = \frac{\Gamma(\gamma)}{\left( \frac{P_{S1}}{P_{c1}} \right)^{1/\gamma} \sqrt{\frac{2\gamma}{\gamma-1} \left[ 1 - \left( \frac{P_{S1}}{P_{c1}} \right)^{\frac{\gamma-1}{\gamma}} \right]}} \Rightarrow \text{Iterar} \Rightarrow \frac{P_{S1}}{P_{c1}} = 0.0093$$

$$C_{Evac1} = \Gamma(\gamma) \sqrt{\frac{2\gamma}{\gamma-1} \left[ 1 - \left( \frac{P_{S1}}{P_{c1}} \right)^{\frac{\gamma-1}{\gamma}} \right]} + \varepsilon_1 \frac{P_{S1}}{P_{c1}} = 1.75 \Rightarrow$$

$$C_{ESL1} = C_{Evac1} - \varepsilon_1 \frac{P_{amb}}{P_{c1}} = \frac{E_1}{A_{g1} P_{c1}} \Rightarrow P_{c1} = \frac{\frac{E_1}{A_{g1}} + \varepsilon_1 P_{amb}}{C_{Evac1}} = 1.4934 \text{ MPa}$$

$$c^* = \frac{P_{c1} A_{g1}}{\dot{m}_1} = 1179 \text{ m/s}$$

- b) Los parámetros del propulsante de la ley de Vieille “ $a$ ” y el exponente “ $n$ ”. (2 puntos)

$$\dot{m}_2 = \frac{M_P}{t_{b2}} = 9.5 \text{ kg/s}$$

$$c^* = \frac{P_{c1} A_{g1}}{\dot{m}_1} = \frac{P_{c2} A_{g2}}{\dot{m}_2} \Rightarrow P_{c2} = P_{c1} \frac{A_{g1} \dot{m}_2}{A_{g2} \dot{m}_1} = 2.489 \text{ MPa}$$

$$P_c = \left( a \rho_P c^* \frac{A_b}{A_g} \right)^{\frac{1}{1-n}} \Rightarrow \left( \frac{P_{c2}}{P_{c1}} \right)^{1-n} = \frac{A_{g1}}{A_{g2}} \Rightarrow n = 1 - \frac{\ln \left( \frac{A_{g1}}{A_{g2}} \right)}{\ln \left( \frac{P_{c2}}{P_{c1}} \right)} = 0.794$$

$$\dot{r}_1 = \frac{L}{t_{b1}} = 0.077 \text{ m/s} \Rightarrow \dot{r}_1 = a P_{c1}^n \Rightarrow a = \frac{\dot{r}_1}{P_{c1}^n} = 9.636 \times 10^{-7}$$

- c) Relación de áreas ( $\varepsilon$ ) y coeficiente de empuje ( $C_E$ ). (1 punto)

$$\text{Máximo empuje} \Rightarrow \text{Tobera adaptada} \Rightarrow P_S = P_{amb} = 14101.8 \text{ Pa}$$

$$\frac{P_S}{P_c} = 0.00282 \Rightarrow \varepsilon = \frac{\Gamma(\gamma)}{\left( \frac{P_S}{P_c} \right)^{1/\gamma} \sqrt{\frac{2\gamma}{\gamma-1} \left[ 1 - \left( \frac{P_S}{P_c} \right)^{\frac{\gamma-1}{\gamma}} \right]}} = 29.816$$

$$C_{E,adapt} = \Gamma(\gamma) \sqrt{\frac{2\gamma}{\gamma-1} \left[ 1 - \left( \frac{P_S}{P_c} \right)^{\frac{\gamma-1}{\gamma}} \right]} = 1.76$$

- d) Área de garganta ( $A_g$ ) (0.5 puntos)

$$P_c = \left( a \rho_P c^* \frac{A_b}{A_g} \right)^{\frac{1}{1-n}} \Rightarrow A_g = \frac{a \rho_P c^* A_b}{P_c^{1-n}} = 0.0039 \text{ m}^2$$

- e) Impulso específico ( $I_{SP}$ ), empuje ( $E$ ) y gasto másico ( $\dot{m}$ ). (1.5 puntos)

$$I_{SP} = C_{E,adapt} c^* = 2070.1 \frac{\text{m}}{\text{s}} = 211.02 \text{ s}$$

$$E = C_{E,adapt} A_g P_c = 34211.6 \text{ N}$$

$$\dot{m} = \frac{E}{I_{SP}} = 16.53 \text{ kg/s}$$

- f) Tiempo desde el inicio de la fase de cola hasta que el empuje haya descendido hasta el 10% del empuje nominal suponiendo que la fase de cola es isoterma. (2 puntos)

$$E_f = 0.1E_0 = 3421.16 \text{ N}$$

$$E_f = P_c A_g \left( C_{E,adap} + \varepsilon \frac{P_s}{P_c} - \varepsilon \frac{P_{amb}}{P_c} \right) = P_c A_g \left( C_{E,adap} + \varepsilon \frac{P_s}{P_c} \right) - A_s P_{amb} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow P_{cf} = \frac{E_f + A_s P_{amb}}{A_g \left( C_{E,adap} + \varepsilon \frac{P_s}{P_c} \right)} = 705671.9 \text{ Pa} \Rightarrow \frac{P_{cf}}{P_{c0}} = 0.1411$$

$$P_{cf} = P_{c0} e^{-\frac{A_g c^* (\Gamma(\gamma))^2}{V_P} t} \Rightarrow t = \frac{V_P}{A_g c^* (\Gamma(\gamma))^2} \ln \frac{P_{c0}}{P_{cf}} = 0.081 \text{ s}$$