Máster Universitario en Sistemas Espaciales

PROPULSIÓN ESPACIAL Y LANZADORES

Examen final – Problema 2 **13 enero 2020**

NOMBRE Y APELLIDOS:
(Tiempo 1 hora)

En la Figura 1 se representa el diagrama simplificado de un motor cohete de propulsante líquido, con ciclo presurizado y monopropulsante, cuyas actuaciones y diseño se pretende abordar. Dicho motor va instalado en una sonda interplanetaria, de masa inicial (incluyendo la planta de potencia, los propulsantes, los depósitos y tanques, etc.) $M_{\text{tot},0}$ = 180 kg.

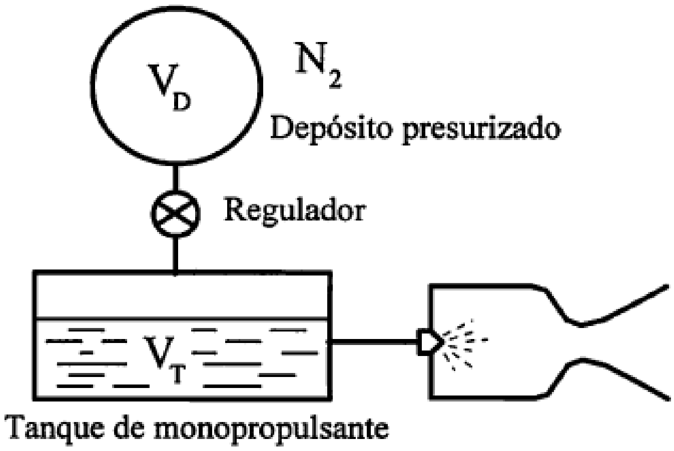

Figura 1 – diagrama del ciclo presurizado monopropulsante

El tanque, con un volumen V_T = 12 l, contiene inicialmente 10,2 kg del propulsante, de densidad ρ_l = 1020 kg/m^3, estando ocupado el resto del volumen por el gas de presurización (N_2, cuyo coeficiente adiabático es γ = 1,4) a una presión inicial $P_{gT,0}$ = 30 bar.

Durante la primera fase de la misión, menos demandante, el regulador de presión se encuentra cerrado, por lo que el tanque de monopropulsante, aislado del depósito de N_2, descarga en modo *blow-down*. El proceso es lo suficientemente lento como para que los efectos de transferencia de calor sean relevantes, por lo que se caracterizará dicha descarga mediante un coeficiente politrópico k_p = 1,2 para el N_2 contenido dentro del tanque.

El sistema de inyección de la cámara de combustión tiene un área efectiva de paso $C_D \cdot A_{\text{iny}}$ = 5,5 mm^2, y se considerará por simplicidad que los productos de la combustión se comportan como un gas ideal de γ = 1,27 y que la cámara de combustión tiene una longitud característica suficiente como para que se alcancen siempre condiciones de equilibrio químico a su salida, por lo que c^* = 1300 m/s se puede considerar constante en todo momento. El motor, que opera siempre en vacío, expande los gases de salida en una tobera con una relación de áreas ε = 60:1 y con un área de garganta A_g = 1,15 cm^2.

Sabiendo que esta primera fase de la misión termina en el instante t' en que se han consumido 1,7 kg de propulsante, se pide calcular:

1. La presión del gas dentro del tanque $P_{gT,t'}$ en dicho instante t'. ***(1 punto)***
2. El calor $q_{0t'}$ intercambiado por el gas de presurización en el proceso de descarga entre los instantes inicial y t', indicando claramente si se trata de calor absorbido por el gas o cedido al exterior. ***(1 punto)***
3. La presión de cámara $P_{c,t'}$ en el instante t'. ***(1 punto)***
4. El empuje $E_{t'}$ proporcionado por el motor en dicho instante t'. ***(1 punto)***
5. El incremento de velocidad $\Delta V_{0t'}$ que el sistema de propulsión comunica a la sonda interplanetaria a lo largo de esta primera fase de la misión. ***(1 punto)***

En la segunda fase de la misión, que requiere de un control más fino del empuje proporcionado por el motor, se abre el regulador, re-presurizando el tanque de propulsante, que pasará a descargar en modo *pressure-fed* durante el resto del tiempo de operación. La presión nominal del regulador es $P_{\text{reg}} = 20$ bar, y su caída de presión mínima puede despreciarse frente a la presión de salida del regulador ($\Delta P_{\text{mín}} << P_{\text{reg}}$), por lo que se supondrá que el regulador es capaz de funcionar en sus condiciones nominales hasta el mismo instante en que $P_D = P_{\text{reg}}$. Precisamente, se pretende, para conseguir un sistema lo más compacto posible que asegure las prestaciones durante la totalidad del tiempo de operación del motor, hacer coincidir dicho instante $P_D = P_{\text{reg}}$ con el instante en que se consume todo el propulsante almacenado, t_b.

Sabiendo que la presión inicial del gas de presurización (también N_2) dentro del depósito es $P_{D,0} = P_{D,t'} = 225$ bar, que el proceso de re-presurización $t' \rightarrow t''$ es casi instantáneo, por lo que se puede tratar como adiabático y se puede considerar que la interfase entre el gas de presurización y el propulsante no se desplaza entre t' y t'', y que a lo largo del proceso de descarga $t'' \rightarrow t_b$ del tanque en modo *pressure-fed* el gas de presurización recibe de las paredes de depósito + tanque un aporte de calor $q_{t''tb} = 6$ kJ, se pide calcular:

6. La presión de cámara $P_{c,tb}$ en el instante t_b. ***(1 punto)***
7. El empuje E_{tb} proporcionado por el motor en dicho instante t_b. ***(1 punto)***
8. El incremento de velocidad $\Delta V_{t''tb}$ que el sistema de propulsión comunica a la sonda interplanetaria a lo largo de esta segunda fase de la misión. ***(1 punto)***
9. El intervalo de tiempo $(t_b - t'')$ que dura esta segunda fase de la misión. ***(1 punto)***
10. El volumen V_D que debe tener el depósito de N_2 para conseguir que en el instante t_b se cumpla la condición de que $P_{D,tb} = P_{\text{reg}}$. ***(1 punto)***

(1.) proceso politrópico exp. "k_p":

$\frac{p}{\rho^{k_p}} \equiv cte.$; al estar el regulador cerrado: $m_{gT} \equiv cte.$

$$\Rightarrow p_{gT} V_{gT}^{k_p} \equiv cte.$$

$$p_{gT,t'} V_{gT,t'}^{k_p} = p_{gT,0} V_{gT,0}^{k_p} \Rightarrow p_{gT,t'} = p_{gT,0} \left(\frac{V_{gT,0}}{V_{gT,t'}} \right)^{k_p}$$

en $t=0$: $\begin{cases} V_{gT,0} = V_T - V_{p,0} = V_T - \dfrac{\overset{10,2\,kg}{m_{p,0}}}{\rho_l} = 2\ l. \\ p_{gT,0} = 30\ bar \end{cases}$

en t': $V_{gT,t'} = \ldots = V_T - \dfrac{\overset{8,5\,kg}{m_{p,t'}}}{\rho_l} = 3,67\ l. \Rightarrow$

$$\Rightarrow p_{gT,t'} = \ldots = 14,5\ bar$$

(2.) $u(t') - u(t=0) = q_{ot} + w_{ot} = q_{ot} + \int_{V_{gT,0}}^{V_{gT,t'}} - \underbrace{p_{gT}}_{= f(V_{gT})} dV_{gT} = \ldots =$

$$= q_{ot} - p_{gT,0} V_{gT,0}^{k_p} \int_{V_{gT,0}}^{V_{gT,t'}} \frac{dV_{gT}}{V_{gT}^{k_p}} ;;$$

$$q_{ot} = \ldots = \frac{p_{gT,t'} V_{gT,t'}}{\gamma - 1} - \frac{p_{gT,0} V_{gT,0}}{\gamma - 1} + p_{gT,0} V_{gT,0}^{k_p} \int_{V_{gT,0}}^{V_{gT,t'}} \frac{dV_{gT}}{V_{gT}^{k_p}} ;;$$

$$q_{ot} = \frac{p_{gT,t'} V_{gT,t'}}{\gamma - 1} - \frac{p_{gT,0} V_{gT,0}}{\gamma - 1} + \frac{p_{gT,0} V_{gT,0}^{k_p}}{1-k_p}\left(V_{gT,t'}^{(1-k_p)} - V_{gT,0}^{(1-k_p)}\right) =$$

$$= \frac{p_{gT,t'} V_{gT,t'}}{\gamma - 1} - \frac{p_{gT,0} V_{gT,0}}{\gamma - 1} + \frac{p_{gT,0} V_{gT,0}}{\underbrace{1-k_p}_{?\ldots<0;\ k_p>1}}\left(\left(\frac{V_{gT,t'}}{V_{gT,0}}\right)^{1-k_p} - 1\right) =$$

$$= \frac{p_{gT,t'} V_{gT,t'}}{\gamma - 1} - p_{gT,0} V_{gT,0}\left(\frac{1}{\gamma - 1} + \frac{1}{k_p - 1}\left(\left(\frac{V_{gT,t'}}{V_{gT,0}}\right)^{1-k_p} - 1\right)\right) =$$

$$= \frac{p_{gT,t'} V_{gT,t'}}{\gamma - 1} - p_{gT,0} V_{gT,0}\left(\frac{1}{\gamma - 1} + \frac{1}{k_p - 1}\left(\left(\frac{V_{gT,0}}{V_{gT,t'}}\right)^{k_p-1} - 1\right)\right) =$$

$$= \ldots = 1{,}71 \text{ kJ} \Longleftarrow$$ Calor <u>ADSORBIDO</u> por el N_2.

(3.)
$$\begin{cases} \dot{m} = \dfrac{p_c A_g}{c^*} \;;\; (a) \\[2ex] \dot{m} = \rho_l \, v_{iny} \, C_D A_{iny} \;;\; v_{iny}^2 = \dfrac{2(p_T - p_c)}{\rho_l} \;; \end{cases}$$

$$\dot{m} = C_D A_{iny} \sqrt{2\rho_l (p_T - p_c)} \;;\; (b) \Longrightarrow \underline{2 \text{ ecs}, \; 2 \text{ incógn.}}$$

$$\frac{p_c A_g}{c^*} = C_D A_{iny} \sqrt{2\rho_l (p_T - p_c)} \;;$$

$\rightarrow$ = T_c = cte. en todo instante...

$$\boxed{\frac{A_g^2}{2\rho_l (c^* C_D A_{iny})^2}} \, p_c^2 + p_c - p_T = 0 \;; \quad \underline{\text{Ec. } 2^{\circ} \text{ grado}}$$

$$k = \ldots = 1{,}2681 \cdot 10^{-7}\ [S.I.] = \ldots = 0{,}012681\ [bar^{-1}]$$

unidades para evitar tener órdenes de magnitud muy diferentes...

$[bar^{-1}][bar^{2}]$ $[bar]$ $[bar]$ ✓

$$k\, p_c^2 + p_c - p_T = 0\ [bar] \Rightarrow$$

única soluc. posible (>0)

$$\Rightarrow p_c = \frac{-1 + \sqrt{1 + 4k\, p_T}}{2k} \;;$$

→ "p_c" sólo depende de cte. ("k") que no cambian con el tiempo y de la "p_T"...

$$p_{gT,t'} = 14{,}5\ bar \Rightarrow p_{c,t'} = 12{,}5\ bar$$

4. $E = C_E\, p_c\, A_g$;;

$$\begin{cases} C_E = \Gamma(\gamma)\sqrt{\dfrac{2\gamma}{\gamma-1}\left(1-\left(\dfrac{p_s}{p_c}\right)^{\frac{\gamma-1}{\gamma}}\right)} + \varepsilon\,\dfrac{p_s}{p_c} \;; \\[2ex] \varepsilon = \dfrac{\Gamma(\gamma)}{\left(\dfrac{p_s}{p_c}\right)^{1/\gamma}\sqrt{\dfrac{2\gamma}{\gamma-1}\left(1-\left(\dfrac{p_s}{p_c}\right)^{\frac{\gamma-1}{\gamma}}\right)}} \end{cases} \;; \Rightarrow$$

iterando para resolver numéricam.:

$$\begin{cases} \gamma = 1{,}27 \Rightarrow \Gamma(\gamma) = 0{,}66178 \\ \varepsilon = 60 \Rightarrow \dfrac{p_s}{p_c} = 9{,}2678 \cdot 10^{-4} \end{cases}$$

$C_E = 1{,}84 \equiv$ cte. $\forall t$

$$E_{,t'} = C_E\, p_{c,t'}\, A_g = \ldots = 265\ N$$

5. $I_{sp} = \mathcal{E} \cdot c^* = 2392{,}9\ \text{m/s} \equiv \text{cte.}\ \forall t$

Tsiolkovsky:

$$\Delta v_{0t'} = I_{sp}\ \ln \frac{M_{tot,0}}{(M_{tot,0} - M_{p,cons,t'})} = \ldots = 227\ \text{m/s}$$

180 kg

1,7 kg

6. a partir del desarrollo del aptdo. 3., se llega a la conclusión de que "p_c" depende sólo de constantes ("T_i") que no varían con el tiempo y de "p_T". el desarrollo es idéntico, la ec. es la misma, y solamente ha cambiado:

$$p_{gT,t_3} = p_{reg} = 20\ \text{bar} \Longrightarrow p_{c,t_3} = \ldots = \frac{-1 + \sqrt{1 + 4 T_c p_T}}{2 T_c} = 16{,}5\ \text{bar}$$

"p_{reg}"

7. del mismo modo, "$\mathcal{E}$" no cambia:

$$E_{,t_3} = \mathcal{E}\ p_{c,t_3}\ A_g = \ldots = 350\ \text{N}$$

8. y el "I_{sp}" tampoco:

$$\Delta v_{t''t_3} = I_{sp}\ \ln \frac{M_{tot,0} - M_{p,cons,t'}}{M_{tot,0} - M_p} = \ldots = 117\ \text{m/s}$$

1,7 kg

10,2 kg

9. en la fase de presión regulada, el "$\dot{m}$" es cte. $\forall t$ (como lo es también la "p_{gT}", la "p_c", etc.)

$$\dot{m} = \frac{p_c\ A_g}{c^*} = 0{,}14625\ \text{kg/s} \Longrightarrow t_3 - t'' = \frac{M_{p,t'} - \overset{=0}{M_{p,t_3}}}{\dot{m}} = 58{,}1\ \text{s.}$$

8,5 kg

(10.) • proceso $(t' \to t'')$: $\begin{cases} q_{ot} = 0 \text{ ; ADIABÁTICO.} \\ w_{ot} = 0 \text{ ; la interfase NO se desplaza.} \end{cases}$

$$\Rightarrow u(t'') - u(t') = 0 = \frac{P_{gT,t''} V_{gT,t''}}{\gamma-1} + \frac{P_{D,t''}^{\;?} V_D^{\;?}}{\gamma-1} - \frac{P_{gT,t'} V_{gT,t'}}{\gamma-1} - \frac{P_{D,t'} V_D^{\;?}}{\gamma-1} \;;; \boxed{\text{I}}$$

en (t'): $\begin{cases} P_{gT,t'} \text{ es conocida (aptdo. 1.)} \\ V_{gT,t'} \text{ es conocido (aptdo. 1.)} \end{cases}$

$\begin{cases} P_{D,t'} = P_{D,0} = 225\,\text{bar} \text{ (enunciado)} \\ V_D \;? \end{cases}$

en (t''): $\begin{cases} P_{gT,t''} = P_{reg} = 20\,\text{bar} \text{ (enunciado)} \\ V_{gT,t''} = V_{gT,t'} \text{ es conocida (aptdo. 1.)} \end{cases}$

$\begin{cases} P_{D,t''} \;? \\ V_D \;? \end{cases}$

crit. de signos!

• proceso $(t'' \to t_f)$: $\begin{cases} q_{ot} = 6\,kJ \\ w_{ot} = \dots = \displaystyle\int_{V_{gT,t''}}^{V_{gT,t_f} = V_T} -P_T \, dV_{gT} = -P_{reg}\left(V_T - V_{gT,t'}\right) = \end{cases}$

$= P_{reg} = \text{cte. } \forall t$

$= -16{,}67\,kJ$

$$\Rightarrow u(t_f) - u(t'') = q_{ot} + w_{ot} \;;; \Rightarrow$$

ambos son conocidos...

$$\Rightarrow \frac{\overset{\text{"}P_{reg}}{P_{gT,t_f}} \overset{\text{"}V_T}{V_{gT,t_f}}}{\gamma-1} + \frac{\overset{\text{"}P_{reg}}{P_{D,t_f}} V_D^{\;?}}{\gamma-1} - \frac{\overset{\text{"}P_{reg}}{P_{gT,t''}} \overset{\text{"}V_{gT,t'}}{V_{gT,t''}}}{\gamma-1} - \frac{P_{D,t''}^{\;?} V_D^{\;?}}{\gamma-1} = \dots = -10{,}67\,kJ \;;; \boxed{\text{II}}$$

el sistema $\boxed{\text{I}} \oplus \boxed{\text{II}}$ permite resolver las dos incógnitas del problema en cuestión: $\left\{ \begin{array}{l} V_D \\ P_{D,t''} \end{array} \right.$

puesto que, en principio, sólo nos interesa "V_D", también podemos plantear el proceso $t' \rightarrow t_f$ de forma global (sumar las dos ecuaciones anteriores) y hacer que desaparezca la otra incógnita:

$$\Longrightarrow u(t_f) - u(t') = q_{t't_f} + w_{t't_f} \;;;$$

$$\left\{ \begin{array}{l} q_{t't_f} = \overset{=0}{\cancel{q_{t't''}}} + q_{t''t_f} = (0 + 6)\ kJ \\ w_{t't_f} = \overset{=0}{\cancel{w_{t't''}}} + w_{t''t_f} = (0 - 16{,}67)\ kJ \end{array} \right\} \Longrightarrow$$

(...)

aptdo. 1.

$$\Longrightarrow \frac{P_{reg} V_T}{\gamma - 1} + \frac{P_{reg} V_D}{\gamma - 1} ? - \frac{P_{gT,t'} V_{gT,t'}}{\gamma - 1} - \frac{P_{D,0} V_D}{\gamma - 1} ? = -10{,}67\ kJ \;;;$$

$$P_{reg}(V_T + V_D) - P_{D,0} V_D - P_{gT,t'} V_{gT,t'} = (\gamma - 1)(q_{t't_f} + w_{t't_f}) \;;;$$

$$P_{reg} V_T - P_{gT,t'} V_{gT,t'} - (\gamma - 1)(q_{t't_f} + w_{t't_f}) = V_D (P_{D,0} - P_{reg}) \;;;$$

$$V_D = \frac{P_{reg} V_T - P_{gT,t'} V_{gT,t'} - (\gamma - 1)(q_{t't_f} + w_{t't_f})}{P_{D,0} - P_{reg}} = \dots = 1{,}12\ \ell.$$