MChtema3.pdf

Teoría MCh 1º Parcial

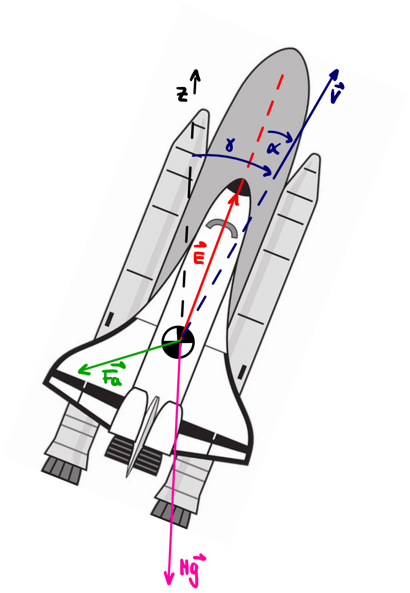
4º Motores Cohete

Grado en Ingeniería Aeroespacial

Escuela Técnica Superior de Ingeniería Aeronáutica y del Espacio
Universidad Politécnica de Madrid

TEMA 3: MISIONES

1. MOVIMIENTO DEL VEHÍCULO



→ Ecuación de movimiento del vehículo:

(1) $$M \cdot \frac{d\vec{V}_{CG}}{dt} = \vec{E} + \vec{F_a} + M\vec{g}$$

(2) $$\frac{dM}{dt} = -\dot{m}$$

Expresando la ec. (1) en coordenadas intrínsecas y desdoblándola:

→ Ecuaciones de la Trayectoria:

CINEMÁTICAS
$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = V \cdot \sin\gamma \cdot \dfrac{R_T}{R_T + h} \\ \dfrac{dz}{dt} = V \cdot \cos\gamma \end{cases}$$

MÁSICAS
$$\left\{ \frac{dM}{dt} = -\dot{m} \right.$$

DINÁMICAS →
$$\begin{cases} M \dfrac{dV}{dt} = E \cdot \cos\alpha - D - Mg \cdot \cos\gamma \\ M \cdot V \cdot \dfrac{d\gamma}{dt} = Mg \sin\gamma - M \cdot \dfrac{V^2 \sin\gamma}{R_T + h} - L \cdot E \cdot \sin\alpha \end{cases}$$

→ Ecuaciones de la Trayectoria en ausencia de sustentación: (GRAVITY TURN)

DINÁMICAS
$$\begin{cases} M \dfrac{dV}{dt} = E - D - Mg\cos\gamma \\ MV \dfrac{d\gamma}{dt} = Mg \sin\gamma - M \cdot \dfrac{V^2 \sin\gamma}{R_T + h} \end{cases}$$

2. ECUACIONES DEL COHETE

$$M \frac{dV}{dt} = E - F_a - Mg\cos\gamma = I_{sp} \cdot \dot{m} - D - Mg\cos\gamma = -I_{sp} \frac{dM}{dt} - D - Mg\cos\gamma$$

$$dV = -I_{sp} \cdot \frac{dM}{M} - \frac{D}{M} dt - g\cos\gamma\, dt \longrightarrow \underbrace{V_f - V_i}_{\Delta V_v} = -\int_{t_b} I_{sp} \frac{dM}{M} \underbrace{- \int_{t_b} \frac{D}{M} dt}_{\substack{\Delta V_a \\ \text{aerodinámico}}} \underbrace{- \int_{t_b} g\cos\gamma\, dt}_{\substack{\Delta V_g \\ \text{gravitatorio}}}$$

$$\Delta V_v + \Delta V_g + \Delta V_a = \langle I_{sp} \rangle \cdot \ln\left(\frac{M_i}{M_f}\right) = \langle I_{sp} \rangle \cdot \ln\left(\frac{M_i}{M_i - M_p}\right)$$

Ecuación del cohete: $\boxed{\Delta V = I_{sp} \cdot \ln\left(\frac{M_i}{M_f}\right)}$

- El sistema de propulsión compensa las pérdidas de dentro del incremento de velocidad.
- El impulso debe ser lo más grande posible salvo que esto conlleve un aumento de M, en cuyo caso se debería estudiar con más detalle.

→ Fórmula de Breguet: HIPÓTESIS: Vuelo estacionario, horizontal, rectilíneo y uniforme

$$\left.\begin{matrix} D = E \\ L = Mg \end{matrix}\right\} \rightarrow \frac{1}{L/D} = \frac{E}{Mg} = \frac{\dot{m} \cdot I_{sp}}{Mg} = -I_{sp} \cdot \frac{1}{gM} \cdot \frac{dM}{dt} \rightarrow \boxed{g \cdot \frac{dt}{L/D} = -I_{sp} \cdot \frac{dM}{M}}$$

→ Impulso Total:

Se define como la integral del empuje a lo largo del tiempo de funcionamiento de la misión. Alcanza sentido para cohetes de propulsante sólido como el área representada debajo de la curva de empuje. Este define las capacidades propulsivas del sistema.

$$I_T = \int_{t_b} E\,dt \longrightarrow I_T = I_{sp} \cdot M_p \longrightarrow \frac{M_i \cdot \Delta V}{I_T} = -\frac{\ln\left(1 - \frac{M_p}{M_i}\right)}{\frac{M_p}{M_i}}$$

3. CÁTALOGO DE MISIONES

MISIÓN	$\Delta V \left(\frac{Km}{s}\right)$	COMENTARIOS
Vel. de escape: ∘ desde la tierra: ∘ desde Marte: ∘ desde la luna:	 11 5 2'7	Esta medida es representativa del aumento de velocidad necesario para escapar de un campo gravitatorio. $v_{esc} = \sqrt{\frac{2GM}{r}}$
Superficie a LEO	7'6	Misión de lanzamiento típica, por ejemplo llegar a la ISS.
LEO a GEO	4'2	Misión típica para insertar un satélite geoestacionario. (GEO)
GTO a GEO	1'5	A menudo los lanzadores insertan satélites en GTO.
Interplanetaria desde LEO ∘ a la luna: ∘ a Venus: ∘ a Jupiter: ∘ a Saturno:	 4 16 64 110	Se trata de viajes de ida y vuelta con órbitas de transferencia elíptica de baja energía.
Interestelar (α-Centauro)	$3 \cdot 10^4$	Viaje de 50 años de duración.

4. ANÁLISIS DE UTILIZACIÓN

4.1 INVENTARIO DE MASAS

La masa de un vehículo es un factor muy importante. Este se compone:

$\underbrace{M_i}_{\text{inicial}} = \underbrace{M_{cp}}_{\text{carga de pago}} + \underbrace{M_s}_{\text{estructura}} + \underbrace{M_p}_{\text{propulsante}}$ dónde $M_s = \underbrace{M_m}_{\text{motores}} + \underbrace{M_{pp}}_{\text{planta de potencia}} + \underbrace{M_d}_{\text{depósitos}} + \dots$

→ Parámetros adimensionales:

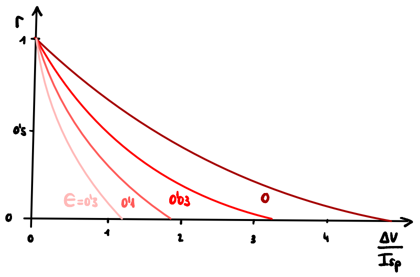
- Reparto de masa de carga de pago: $\lambda = \dfrac{M_{cp}}{M_i - M_{cp}}$

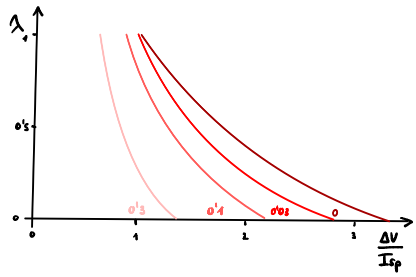
- Relación estructural: $\epsilon = \dfrac{M_s}{M_s + M_p}$

- Fracción de masa de carga de pago: $r = \dfrac{M_{cp}}{M_i} = \dfrac{\lambda}{1+\lambda}$ → Ec. del cohete: $\dfrac{\Delta V}{I_{sp}} = \ln\left(\dfrac{1}{\epsilon + (1-\epsilon)\cdot r}\right)$

  → $r = \dfrac{e^{-\frac{\Delta V}{I_{sp}}} - \epsilon}{1-\epsilon}$

→ Representación gráfica:





4.2 ANÁLISIS DE UTILIZACIÓN

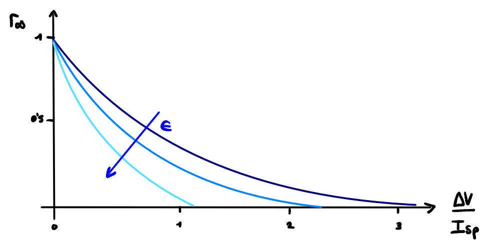
Si suponemos que la masa inerte utilizada para guardar el combustible va desapareciendo con el tiempo las ecuaciones quedan:

$\dfrac{dM}{dt} = -\dot{m} - \dfrac{dM_s}{dt} = \dfrac{-\dot{m}}{1-\epsilon}$ dónde la masa final: $M_f = M_{cp}$

$dV = (1-\epsilon)\cdot I_{sp}\cdot \dfrac{dM}{M} \xrightarrow{\text{integrando}} \Delta V = (1-\epsilon)\cdot I_{sp}\cdot \ln\left(\dfrac{M_i}{M_f}\right) = (1-\epsilon)\cdot I_{sp}\cdot \ln\left(\dfrac{1}{r_\infty}\right)$

dónde r_∞ es la fracción de carga de pago de este vehículo.

$$\boxed{r_\infty = e^{-\frac{\Delta V}{I_{sp}(1-\epsilon)}}}$$



4.3 VEHÍCULOS MULTIETAPA

El planteamiento es el uso de varios escalones de propulsión. Los incrementos de velocidad son aditivos.

$$\Delta V = \sum_{j=1}^{N} I_{sp,j} \cdot \ln\left(\frac{M_{i,j}}{M_{F,j}}\right) \longrightarrow \frac{M_{i,j}}{M_{F,j}} = R \xrightarrow{\text{si } R = cte} \boxed{\Delta V = N \cdot I_{sp} \cdot \ln R}$$

Empleando motores con el mismo impulso específico, con el mismo ϵ :

$$\lambda = \frac{\left(\frac{M_{cp}}{M_{i,1}}\right)^{\frac{1}{N}}}{1 - \left(\frac{M_{cp}}{M_{i,1}}\right)^{\frac{1}{N}}} \longrightarrow \frac{M_{cp}}{M_{i,1}} = \left[\frac{1}{1-\epsilon}\left(1 - \epsilon \cdot e^{\frac{1}{N}\frac{\Delta V}{I_{sp}}}\right) e^{-\frac{1}{N}\frac{\Delta V}{I_{sp}}}\right] \longrightarrow \Delta V = N \cdot I_{sp} \cdot \ln\left(\frac{1+\lambda}{\epsilon + \lambda}\right)$$

4.4 MOTORES TERMOQUÍMICOS

→ **Motor Cohete de Propulsante Sólido:**

$$\left.\begin{aligned} M_{pp} &= 0 \\ M_m + M_d &= M_c \\ M_c &= a \cdot M_p \end{aligned}\right\} M_i = M_{cp} + (1+a) \cdot M_p \qquad \frac{M_p}{M_i} = \frac{1-r}{1+a}, \quad r = \frac{M_{cp}}{M_i}$$

$$\Delta V = I_{sp} \cdot \ln\left(\frac{M_i}{M_i - M_p}\right) \longrightarrow \Delta V = I_{sp} \cdot \ln\left(\frac{1+a}{r+a}\right)$$

→ **Motores Cohete de Propulsante Líquido:**

$$\left.\begin{aligned} M_{pp} &= 0 \\ M_m &<< M_p \\ M_d &= k \cdot M_p \end{aligned}\right\} M_i = M_{cp} + (1+k) \cdot M_p \qquad \frac{M_p}{M_i} = \frac{1-r}{1+k}, \quad r = \frac{M_{cp}}{M_i}$$

$$\Delta V = I_{sp} \cdot \ln\left(\frac{M_i}{M_i - M_p}\right) \longrightarrow \Delta V = I_{sp} \cdot \ln\left(\frac{1+k}{r+k}\right)$$