Formulario

Tema 1: Introducción

$I_{SP}(\mathrm{m/s}) = \frac{E}{\dot{m}}$

$\mathrm{I}_{SP}\ (\mathrm{m/s}) = \mathrm{I}_{SP}\ (s)$ x 9.81

$E = \dot{m} I_{SP} = \dot{m} v_s + A_s(P_s - P_{amb}) \cong \dot{m} v_s$ => $(I_{SP} \cong v_s)$

Fórmula del cohete o de Tsiolkovsky: $\Delta V = I_{SP} \cdot \ln\left(\frac{M_0}{M_F}\right)$

Distribución de masas en un sistema espacial:

Relación entre masa inicial, final y de propulsante: $M_0 = M_P + M_F$

Masa del sistema de propulsión: $M_{SP} = M_P + M_T + M_M + M_{PP}$

$M_P = M_0\left[1 - \exp\left(-\frac{\Delta V}{I_{SP}}\right)\right]$; $M_F = M_0 \exp\left(-\frac{\Delta V}{I_{SP}}\right)$

$M_M + M_{PP} = (\alpha_M + \alpha_{PP}) \cdot W_{Motor}$

$M_P = \dot{m} \cdot tb$

Potencia suministrada por el motor: $W_{motor} = \frac{1}{2\eta} \dot{m} {v_s}^2 \cong \frac{1}{2\eta} \dot{m}\, {I_{SP}}^2$

Tema 2: Ecuaciones del motor cohete ideal (motores químicos, termonucleares y termoeléctricos)

Variables termodinámicas en una sección genérica de la tobera:

$\frac{P_c}{P} = \left(1 + \frac{\gamma-1}{2} M^2\right)^{\frac{\gamma}{\gamma-1}}$

$\frac{T_c}{T} = 1 + \frac{\gamma-1}{2} M^2$

$\frac{\rho_c}{\rho} = \left(1 + \frac{\gamma-1}{2} M^2\right)^{\frac{1}{\gamma-1}}$

$C_p T + \frac{V^2}{2} = C_p T_c$

$\frac{P}{\rho^\gamma} = cte = \frac{P_c}{{\rho_c}^\gamma}$

Sección garganta (Mg = 1): $P_g = \frac{P_c}{\left(1+\frac{\gamma-1}{2}\right)^{\frac{\gamma}{\gamma-1}}}$; $T_g = \frac{T_c}{1+\frac{\gamma-1}{2}}$

Ecuaciones de la expansión en una tobera:

$\dot{m} = v\rho A = v_g \rho_g A_g = v_s \rho_s A_s = cte$

$\Gamma(\gamma) = \sqrt{\gamma}\left(\frac{2}{\gamma+1}\right)^{\frac{\gamma+1}{2(\gamma-1)}}$

$\varepsilon = \frac{A_s}{A_g} = \frac{\Gamma(\gamma)}{\left(\frac{P_s}{P_c}\right)^{1/\gamma}\sqrt{\frac{2\gamma}{\gamma-1}\left[1-\left(\frac{P_s}{P_c}\right)^{\frac{\gamma-1}{\gamma}}\right]}} = f\left(\frac{P_s}{P_c}, \gamma\right)$

$c^* = \frac{P_c A_g}{\dot{m}} = \frac{\sqrt{R T_c}}{\Gamma(\gamma)}$

$C_E = \frac{E}{P_c A_g} = \Gamma(\gamma)\sqrt{\frac{2\gamma}{\gamma-1}\left[1 - \left(\frac{P_s}{P_c}\right)^{\frac{\gamma-1}{\gamma}}\right]} + \varepsilon\left(\frac{P_s}{P_c} - \frac{P_{amb}}{P_c}\right) = f\left(\varepsilon, \gamma, \frac{P_{amb}}{P_c}\right)$

$C_{Eadap} = \Gamma(\gamma)\sqrt{\frac{2\gamma}{\gamma-1}\left[1-\left(\frac{P_s}{P_c}\right)^{\frac{\gamma-1}{\gamma}}\right]}$; $\quad C_{Evac} = \Gamma(\gamma)\sqrt{\frac{2\gamma}{\gamma-1}\left[1-\left(\frac{P_s}{P_c}\right)^{\frac{\gamma-1}{\gamma}}\right]} + \varepsilon\frac{P_s}{P_c}$

$I_{Sp} = c^* C_E$

$V_s = \sqrt{\frac{2\gamma}{\gamma-1}RT_c\left[1-\left(\frac{P_s}{P_c}\right)^{\frac{\gamma-1}{\gamma}}\right]}$

Régimen adaptado: Ps = Pamb

Operación en vacío: Pamb = 0

ISA:

h (0 – 11000): $\lambda = -6.5x10^{-3}K/m$; $\quad T_{amb} = T_0 + \lambda h$; $\quad P_{amb} = P_0\left(\frac{T_0+\lambda h}{T_0}\right)^{-g/R\lambda}$

h (11000 – 25000): $T_{amb} = T_{11}$; $\quad P_{amb} = P_{11}\exp\left(-\frac{g(h-11000)}{RT_{11}}\right)$

h > 25000: $\lambda = 3x10^{-3}K/m$; $T_{amb} = T_{25} + \lambda(h-25000)$;

$P_{amb} = P_{25}\left(\frac{T_{25}+\lambda(h-25000)}{T_{25}}\right)^{-g/R\lambda}$

Gases ideales:

$R = \frac{R_u}{\mathcal{M}} = \frac{8.314\left(J/_{mol\cdot K}\right)}{\mathcal{M}(g/_{mol})}\cdot 1000\left(g/_{kg}\right)$

$C_P = \frac{R\gamma}{\gamma-1}$; $\quad C_v = \frac{R}{\gamma-1}$

$\gamma = \frac{C_P}{C_v}$

$\rho RT = P$ (Garganta: $\rho_g RT_g = P_g$)(Salida de cámara: $\rho_c RT_c = P_c$)(Sección salida: $\rho_s RT_s = P_s$)

$a = \sqrt{\gamma RT}$ (Velocidad del sonido)

Sección garganta: $a_g = 1$; $v_g = \sqrt{\gamma R_g T_g}$

Tema 3: Motores químicos de propulsante sólido

Estacionario:

$\dot{m}_b = \dot{r}\rho_P A_b$

$\dot{m}_b = \dot{m}_g$ => $\dot{r}\rho_P A_b = \frac{P_c A_g}{c^*}$

$\dot{r} = aP_c{}^n$

$P_c = \left(\rho_P a c^* \frac{A_b}{A_g}\right)^{\frac{1}{1-n}}$

Estacionario y combustión frontal:

$\dot{m} = \frac{M_P}{t_b}$

$\dot{r} = \frac{L}{t_b}$

$M_P = \rho_P A_b L$

Cuasiestacionario (Ab varía con el tiempo)

$P_c(y) = \left(\rho_P a c^* \frac{A_b(y)}{A_g}\right)^{\frac{1}{1-n}}$

Estacionario y combustión lateral erosiva:

$\dot{r} = aP_c{}^n\{1 + K_m(M - M_u)^m\}$

Transitorio

$\dot{r} = \frac{dy}{dt}$

$\frac{dM_P}{dt} = \dot{m}_b - \dot{m}_g$ => $\frac{\vartheta_c}{RT_c}\frac{dP_c}{dt} = \dot{r}\rho_P A_b - \frac{A_g}{c^*}P_c$

Transitorio (fase de cola)

$\frac{dM_P}{dt} = -\dot{m}_g$ => $\frac{\vartheta_c}{RT_c}\frac{dP_c}{dt} = -\frac{A_g}{c^*}P_c$

Tema 4: Motores químicos de propulsante líquido

Turbobombas

Compresor:

$\dot{W}_c = \dot{m}_c\tau_c = \dot{m}_c C_p(T_{cs} - T_{ce}) = \dot{m}_c\frac{1}{\eta_c}C_p T_{ce}\left[\left({P_{ce}}/{P_{cs}}\right)^{(\gamma-1)/\gamma} - 1\right]$

$\eta_c = \frac{T_{cs'} - T_{ce}}{T_{cs} - T_{ce}} = \frac{\left({P_{cs}}/{P_{ce}}\right)^{(\gamma-1)/\gamma} - 1}{{T_{cs}}/{T_{ce}} - 1}$

Bomba:

$\dot{W}_b = \dot{m}_b\tau_b = \dot{m}_b\frac{\Delta P_b}{\eta_b\rho_l}$

$\eta_b = \frac{{\Delta P_b}/{\rho_l}}{\tau_b}$

Turbina:

$\dot{W}_t = \dot{m}_t\tau_t = \dot{m}_t C_p(T_{te} - T_{ts}) = \dot{m}_t\eta_t C_P T_{te}\left[1 - \left(\frac{P_{ts}}{P_{te}}\right)^{\frac{\gamma-1}{\gamma}}\right]$

$\eta_t = \frac{T_{ts} - T_{te}}{T_{ts'} - T_{te}} = \frac{1 - {T_{ts}}/{T_{te}}}{1 - \left({P_{ts}}/{P_{te}}\right)^{(\gamma-1)/\gamma}}$

Cámara de combustión:

$\eta_b Q_{comb} = \frac{1 + ({O}/{F})}{min\left\{({O}/{F}), ({O}/{F})_{ST}\right\}}C_{pP}(T_c - T_e)$

Acoplamiento mecánico (turbina + bombas):

$\eta_m\,\dot{W}_t = \sum_i \dot{W}_{bi} = \dot{W}_{b1} + \dot{W}_{b2} + \dot{W}_{b3} + \cdots$

Presurización

$\gamma P_T V_{gT} + (P_D - P_{D0})V_D = (\gamma - 1)q_{0t}$ => $P_D = P_{D0} + \frac{(\gamma-1)q_{0t} - \gamma P_T V_{gT}}{V_D}$

Isotermo: $P_D = P_{D0} - \frac{P_T V_{gT}}{V_D}$

Adiabático (sin calentamiento): $P_D = P_{D0} - \gamma\frac{P_T V_{gT}}{V_D}$ => $\frac{V_D}{V_T} = \frac{\gamma}{\frac{P_{D0}}{P_T} - (1+\alpha)}$

$P_{Df} = (1 + \alpha)P_T$

Estimación de pesos: $W_D = W_m + W_g = \frac{3}{2}P_{D0}V_D\,{\rho_m}/{\sigma_u} + \frac{P_{D0}V_D}{RT_{D0}} = P_{D0}V_D\left(\frac{3/2}{{\sigma_u}/{\rho_m}} + \frac{1}{RT_{D0}}\right)$

Sistema de inyección:

$\dot{m_{iny}} = \dot{m}_g = \dot{m}$

$\dot{m_{iny}} = C_D A_{iny}\rho_l v_{iny}$

$\Delta P_{iny} = \frac{1}{2}\rho_l {v_{iny}}^2 = P_{iny} - P_c$

Combustión:

Reacción química genérica: $A \cdot X_a + B \cdot X_b \longrightarrow C \cdot P_1 + D \cdot P_2 + E \cdot P_3 + \cdots$

Fracciones molares de los productos: $\upsilon_1 = \frac{C}{C+D+E+\cdots}$; $\upsilon_2 = \frac{D}{C+D+E+\cdots}$; $\upsilon_3 = \frac{E}{C+D+E+\cdots}$;

$\sum_{Reactantes} \upsilon'_i \left[\Delta \mathrm{H}_{fi} + C_{Pi}(T_0 - T_{ref})\right] = \sum_{Productos} \upsilon''_i \left[\Delta \mathrm{H}_{fi} + C_{Pi}(T_c - T_{ref})\right]$

$R = \frac{R_u}{\overline{\mathcal{M}}} = \frac{R_u}{\upsilon_1\mathcal{M}_1 + \upsilon_2\mathcal{M}_2 + \upsilon_3\mathcal{M}_3 + \cdots}$

$\overline{C_P} = \upsilon_1 C_{P_1} + \upsilon_2 C_{P_2} + \upsilon_3 C_{P_3} + \cdots$

Combustión hidracina (x = fracción de amoniaco):

$N_2H_4(l) \rightarrow 4/3(1-x)NH_3(g) + 1/3(1+2x)N_2(g) + 2xH_2(g)$

Dimensionado de la cámara:

$L^* = \frac{\vartheta_c}{A_g} = \frac{L_c A_c}{A_g}$

$t_r = \frac{L_c}{v_c} = \frac{L^*}{c^*\Gamma(\gamma)^2}$ (tiempo de residencia)

$t_c = t_{atom} \oplus t_{evapor} \oplus t_{mezcla} \oplus t_{combustion}$ (tiempo característico)

Diseño óptimo de la cámara => $t_r = t_c$

Refrigeración

$q_r = h_g\left(T_{ap} - T_{pg}\right) = k_m \frac{T_{pg} - T_{pr}}{e_p} = h_r\left(T_{pr} - T_r\right)$ => $\frac{1}{\breve{h}} = \frac{1}{h_g} + \frac{e_p}{k_m} + \frac{1}{h_r}$

Tema 5: Motores electrostáticos

Masa de ión: $m_i(kg) = \frac{\mathcal{M}_i(\frac{g}{mol})}{1000(\frac{g}{kg}) x N_A(\frac{iones}{mol})}$

Carga eléctrica de ión: $q_i = 1.6x10^{-19}C$

Rendimiento de potencia: $\eta = \frac{P_{ch,i}}{P} = \frac{{I_{SP}}^2}{{I_{SP}}^2 + \frac{2e_i}{m_i} + \frac{2e_l}{m_i}} \approx \frac{{I_{SP}}^2}{{I_{SP}}^2 + \frac{2e_l}{m_i}}$

Empuje/potencia: $\frac{E}{P} = \frac{2\eta}{I_{SP}} = \frac{2I_{SP}}{{I_{SP}}^2 + \frac{2e_l}{m_i}}$

Intensidad del haz: $I = \dot{m}\frac{q_i}{m_i}$

Intensidad del haz/empuje: $\frac{I}{E} = \frac{q_i}{m_i}\frac{1}{I_{SP}}$

Diferencia de potencial: $V_a = \frac{1}{2}\frac{m_i}{q_i}{I_{SP}}^2$

Densidad de corriente: $j = \frac{I}{A}$

Potencia del haz/Empuje: $\frac{P_{ch,i}}{E} = \frac{I_{SP}}{2}$

Diodo plano (dos electrodos):

Densidad de corriente/unidad de área: $j = \frac{4}{9}\varepsilon_0\sqrt{2\frac{q_i}{m_i}}\frac{{\mathrm{V}_a}^{3/2}}{L^2}$

Empuje/unidad de área: $\frac{E}{A} = \frac{8}{9}\varepsilon_0\left(\frac{V_a}{L}\right)^2 = \frac{2}{9}\varepsilon_0\frac{{I_{SP}}^4}{\left(L^{q_i}/_{m_i}\right)^2}$

Sistema aceleración-deceleración (tres electrodos):

Densidad de corriente/unidad de área: $j = \frac{4}{9}\varepsilon_0\sqrt{2\frac{q_i}{m_i}}\frac{(\Delta V)^{3/2}}{L^2}$

Empuje/unidad de área: $\frac{E}{A} = \frac{8}{9}\varepsilon_0\left(\frac{\Delta V}{L}\right)^2\sqrt{\frac{V_a}{\Delta V}} = \frac{8}{9}\varepsilon_0\left(\frac{\Delta V}{L}\right)^2\frac{I_{SP}}{\sqrt{2^{q_i}/_{m_i}\Delta V}}$

Tema 6: Motores de arco eléctrico

Conductividad eléctrica del gas: $\sigma = \begin{cases} 0 & (T < T_e) \\ a(T - T_e) & (T > T_e) \end{cases}$

Magnitudes adimensionales:

$x^* = \frac{x}{x_{ref}}; \quad x_{ref} = \frac{1}{2\pi}\frac{\dot{m}C_p}{K_c}\sqrt{\frac{T_w}{T_e}};$

$\dot{m}^* = \frac{\dot{m}}{\dot{m}_{ref}}; \quad \dot{m}_{ref} = \Gamma(\gamma)\frac{P_t\pi {R_c}^2}{\sqrt{RT_t}}$

$I^* = \frac{I}{I_{ref}}; \quad I_{ref} = \pi R_c\sqrt{2aK_c}(T_e - T_w)$

$x^* = \frac{1}{I^*}\left[ln\sqrt{\frac{1+r_a}{1-r_a}} - r_a\right]; \ (r_{a0} \approx 0)$

$\dot{m}^* = 1 - {r_{a,L}}^2$

$\dot{m} = \Gamma(\gamma)\frac{P_t\pi\left({R_c}^2 - {R_{a,L}}^2\right)}{\sqrt{RT_t}}$

$E^* = \frac{1}{r_a}; \quad E_{ref} = 2\sqrt{\frac{2K_c}{a}}\frac{1}{R_c}$

$E = 2\sqrt{\frac{2K_c}{a}}\frac{1}{R_a}$

${V_{rest}}^* = \frac{1}{2I^*}ln\left(\frac{1}{1-{r_{a,L}}^2}\right)$

Expansión en la tobera:

$\frac{A_e}{A_{ce}} = \frac{1}{M_e}\left(\frac{1+\frac{\gamma-1}{2}{M_e}^2}{\frac{\gamma+1}{2}}\right)^{\frac{\gamma+1}{2(\gamma-1)}}$

$\frac{P_e}{P_t} = \frac{1}{\left(1+\frac{\gamma-1}{2}{M_e}^2\right)^{\frac{\gamma}{(\gamma-1)}}}$

$E = P_e A_e\left(1 + \gamma {M_e}^2\right)$

Tema 7: Lanzadores

$\frac{dv}{dt} = \frac{T}{M} - g\sin\psi - \frac{D}{M}$

$\Delta V = I_{SP}ln\left(\frac{M_0}{M_f}\right) - \int_0^{t_b} g\sin\psi\,dt - \int_0^{t_b}\frac{D}{M}dt = I_{SP}ln\left(\frac{M_0}{M_f}\right) - \Delta V_g - \Delta V_D$

Inclinación de órbita: $\cos(i) = \cos(\lambda)\sin(\beta)$

Efecto de la rotación terrestre sobre Δv: $\Delta v_{rot} = \Omega R cos(\lambda)\cos(\beta)$

$v_{x,orb} = v_{orb}\sin(\beta) - v_{rot}\cos(\lambda)$; $v_{y,orb} = v_{orb}\cos(\beta)$

Maniobra de cambio de plano:

$\psi_{max} = \arcsin\left(\frac{\Delta V}{V_0}\right)$

$\Delta V = \sqrt{{V_G}^2 + {V_a}^2 - 2V_aV_G cosi}$

$\theta = \tan^{-1}\left(\frac{V_a sini}{V_G - V_a cosi}\right)$

Lanzador multi-etapa:

$\Delta V_{TOTAL} = \Delta V_{etapa1} + \Delta V_{etapa2} + \Delta V_{etapa3} + \cdots = I_{SP1}ln\frac{M_{01}}{M_{f1}} + I_{SP2}ln\frac{M_{02}}{M_{f2}} + I_{SP3}ln\frac{M_{03}}{M_{f3}} + \cdots$