



Perchero

www.wuolah.com/student/Perchero

15405

MCPS-1.pdf

Teoría 19-20



4º Motores Cohete



Grado en Ingeniería Aeroespacial



Escuela Técnica Superior de Ingeniería Aeronáutica y del Espacio
Universidad Politécnica de Madrid



Descarga la APP de Wuolah.
Ya disponible para el móvil y la tablet.





**KEEP
CALM
AND
ESTUDIA
UN POQUITO**

Parte II. Motores cohete de propulsante sólido.

WUOLAH

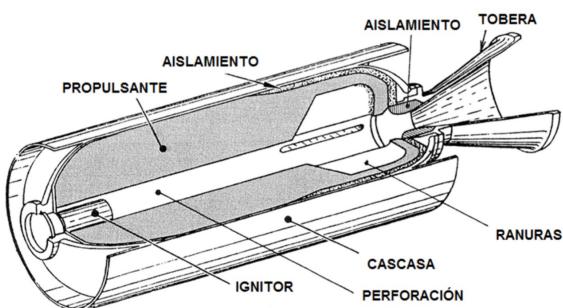
BURN Energy – Encender tu llama cuesta muy poco - #StudyOnFire

Capítulo 5. Motores cohete de propelente sólido.

1. Introducción.

→ El motor cohete de propelente sólido (MPS) es el sistema de propulsión más sencillo que se ha ideado. Consiste en una vasija rellena de una mezcla de componentes sólidos energéticos que reaccionan químicamente, produciendo gases a alta T_g y p que al acelerarse en la tobera producen una fuerza de empuje.

Ventajas:	Simplicidad.	Inconvenientes:	Imposibilidad de variar empuje.
	Throttling by design		Bajos valores de impulso específico
	Fácilidad de almacenamiento.		Dificultad de arranque y parada.
	Alta densidad de propulentes.		



2. Actuaciones.

2.1. Propulsores.

→ Hay 2 tipos principales de propulsores sólidos:

(A) Propulsores homogéneos.

→ También denominados **doble base**, son mezclas a nivel coloidal de sustancias cuya formulación molecular contiene, simultáneamente, elementos de carácter oxidante y reductor. En general, son una mezcla de nitroglicerina y nitrocelulosa (con aditivos)

↳ Difícil manejo y pocas prestaciones pero baja fijación.

(B) Propulsores heterogéneos o compuestos.

→ Formados por una mezcla física de una sustancia oxidante y otra reductora.

↳ Oxidantes habituales: Nitrito amónico (AN) y perchlorato amónico (AP)

↳ Reductores habituales: Polímeros, gomas, caucho...

↳ Más fáciles de almacenar y mejores características propulsivas.

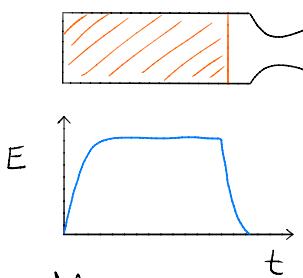
ENCENDER TU LLAMA CUESTA MUY POCO



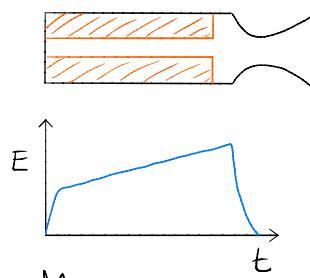
2.2. Área de combustión.

→ El área de combustión tiene una gran importancia en el funcionamiento del motor, al definir el empuje a lo largo de su funcionamiento. Esto se debe a que el área de combustión define la presión en la cámara y con ello, el empuje.

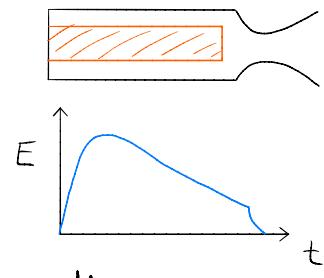
(A) Combustión neutra.



(B) Combustión progresiva.



(C) Combustión regresiva.



$$\frac{dA_b}{dt} \approx 0$$

↳ Si $t = t_e \Rightarrow E = \text{cte.}$

→ Situación más equilibrada:
Los elementos estructurales trabajan
a plástico en todo momento.

$$\frac{dA_b}{dt} > 0$$

↳ $\frac{dE}{dt} > 0$

$$\frac{dA_b}{dt} < 0$$

↳ $\frac{dE}{dt} < 0$

→ En general, una misión requerirá de niveles de empuje variables, lo cual únicamente se puede conseguir modificando la evolución del área de combustión. Habitualmente, se requiere una fase de aceleración intensa y una posterior de vuelo de crucero ($v \approx v(t_e)$).

2.3. Velocidad de recesión.

→ Como es lógico, el propelente sufre un proceso de combustión por capas, de modo que si el consumo de propelente es uniforme, el espesor de las capas consumidas lo es también, y la descripción de la evolución de la superficie se reduce a un cálculo geométrico.

→ La **velocidad de recesión** de la superficie es la velocidad con que avanza el frente de combustión hacia el propelente, que aumenta progresivamente al hacerlo la presión de cámara:

↳ Ley de Vieille : $r_p^n = a p_c^n$

→ n difícil de cuantificar :

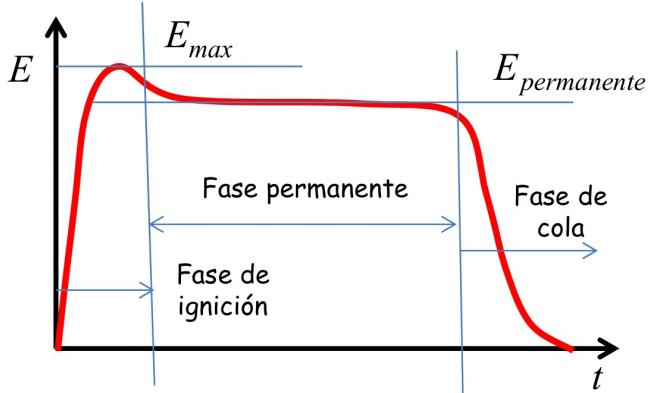
$n \rightarrow 1 \Rightarrow$ Irrestable
 $n \rightarrow 0 \Rightarrow$ No influye

2.4. Presión de cámara.

→ La presión de cámara es la variable operacional más importante de los M(CPS), al establecer casi únicamente el nivel de empuje. Su valor en función de otros parámetros se deduce como sigue:

$$\begin{aligned} \dot{m} &= \frac{P_c A_g}{C^*} \\ \dot{m} &= f_p r A_b \end{aligned} \quad \left\{ \begin{array}{l} P_c = \left\{ f_p a C^* \frac{A_b}{A_g} \right\}^{\frac{1}{1-n}} \\ \text{Depende fundamentalmente de } \frac{A_b}{A_g}. \end{array} \right.$$

2.5. Curva de empuje.



(A) Fase de arranque / ignición: Fenómenos químicos y fluidodinámicos complejos (no est.).

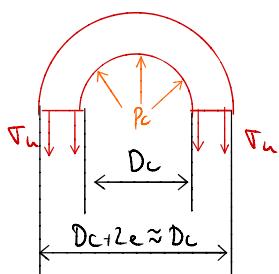
↳ Ignición: Inyección de gas $\Rightarrow \uparrow \uparrow p$. a alta T_a

(B) Fase permanente: Fase principal del funcionamiento del motor (para la que se ha diseñado el Ab). \Rightarrow Neutral, progresiva o regresiva + más complejas.

(C) Fase de empuje de cola: El propelente se ha consumido de forma total o parcial, y la combustión ha cesado. El empuje restante se debe a la descarga del "depósito" a p_c .

3. Diseño de la carcasa.

→ Considerese un recipiente esférico/cilíndrico de pared delgada, sometido a una presión interna. El equilibrio de fuerzas que se establece en él determina el espesor necesario para asegurar el valor máximo de la presión interna, suponiendo que el material está trabajando en el límite estructural:



$$2 \cdot \tau_u e_c = k p_{c, \text{MEOP}} D_c$$

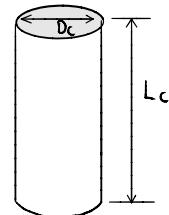
Factor de seguridad
(1/2 - 1/8)

↳ Presión de operación máxima esperada

→ Por otra parte, la masa de una carcasa cilíndrica de longitud L_c es:

$$M_c = \rho_m \pi D_c L_c e_c = \pi \rho_m D_c L_c \frac{k p_{MEOP} D_c}{2 \tau_u}$$

$$M_c = 2k \pi \frac{D_c^2}{4} L_c \frac{p_{MEOP}}{\tau_u / \rho_m}$$



→ Siendo proporcional al volumen contenido y a la presión máxima de operación. El volumen encerrado está, inicialmente, lleno parcialmente por una masa de propelente M_p de densidad ρ_p y que ocupa una fracción volumétrica χ . De este modo, el volumen de la cámara vale:

$$V_{cámara} = \frac{M_p}{\rho_p \chi} = \frac{\pi}{4} D_c^2 L_c \Rightarrow M_c = \frac{2 M_p k p_{MEOP}}{\rho_p \chi \frac{\tau_u}{\rho_m}}$$

→ Suponiendo que el motor trabaja a una presión media \bar{p}_c , desfavorable en 1^a aproximación, surge otro factor de seguridad: p_{MEOP}/\bar{p}_c y además, se introduce el factor \bar{p}_a/\bar{p}_c a fin de explicar la influencia del diseño del motor.

$$\frac{M_c}{M_p} = \frac{2 k \frac{p_{MEOP}}{\bar{p}_c}}{\rho_p \chi \left(\frac{\tau_u / \rho_m}{\bar{p}_a / \bar{p}_c} \right)}$$

Coeffs de seguridad: k , $\frac{p_{MEOP}}{\bar{p}_c}$

Depende de: Densidad y frac.vol. de propelente: ρ_p, χ

Esfuerzo específico del material de la carcasa: $\frac{\tau_u}{\rho_m}$

4. Consideraciones de diseño.

4.1. Impulso total con presión de cámara variable

→ En general, en un MCPS, la presión de cámara es variable en el tiempo, teniendo perfiles no completamente constantes, de modo que es necesario definir valores medios en ciertas variables. El impulso total proporcionado vale:

$$I_T = \int E dt = \int_{t_B} p_c A_g C_E dt = \int_{t_B} p_c A_g C_E|_{ADP} dt + \int_{t_B} p_c A_g \bar{E} (p_s - p_a) dt$$

→ La 1^a integral se resuelve haciendo $p_c A_g = C^* \dot{m}$ en cada instante, y la segunda a través de valores medios:

$$I_T = \int_{t_B} C^* C_E|_{ADP} \dot{m} dt + \int_{t_B} p_c A_g \bar{E} (p_s - p_a) dt = C^* M_p C_{E,ADP} + t_B A_g \bar{E} (\bar{p}_s - \bar{p}_a)$$

→ Se define la presión de cámara media y la presión de salida media:

$$\bar{p}_c = \frac{1}{t_B} \int_{t_B} p_c dt = \frac{1}{t_B} \int_{t_B} \frac{C^*}{A_g} \dot{m} dt = \frac{1}{t_B} \frac{C^*}{A_g} M_p \Rightarrow \bar{p}_c A_g t_B = C^* M_p$$

$$\bar{p}_s = \frac{1}{t_B} \int_{t_B} p_c \left(\frac{p_s}{p_c} \right) dt = \frac{p_s}{p_c} \bar{p}_c$$

→ Como fue mostrado en el capítulo anterior, la presión de salida que optimiza el impulso específico vale:

$$\bar{p}_s = \bar{p}_a = \frac{\langle v \rangle}{\Delta h} \int_{\Delta h} p_a(h) \frac{dh}{v}$$

→ Por último, el impulso específico máximo resulta:

$$I_{T,\max} = C^* M_p \bar{\mu}(\gamma) \sqrt{\frac{2\gamma}{\gamma-1} \left[1 - \left(\frac{\bar{P}_a}{\bar{P}_c} \right)^{\frac{\gamma-1}{\gamma}} \right]}$$

4.2. Inventario de masas.

→ La masa del vehículo será, de un modo general: $M_i = M_{cp} + M_s + M_{sp}$

└ El motor (SP) suele descomponerse en los siguientes componentes:

$$M_{sp} = M_c + M_{air} + M_{tob} + M_{aux} + M_p \approx M_c + M_{tob} + M_p$$

↓
Ignición,
control de
empuje

→ Como ya se ha visto anteriormente, la masa de la carcasa crece con \bar{P}_c , lo cual establece la existencia de un óptimo en \bar{P}_c que maximice las capacidades del vehículo.

4.3. Optimización de la presión de cámara.

→ El impulso total máximo entre dos alturas de vuelo dadas responde a la siguiente expresión:

$$I_{T|_{\max}} = C^* M_p \bar{\mu}(\gamma) \sqrt{\frac{2\gamma}{\gamma-1} \left[1 - \left(\frac{\bar{P}_a}{\bar{P}_c} \right)^{\frac{\gamma-1}{\gamma}} \right]}$$

→ El peso del sistema propulsor, conjuntando los resultados de [B.3](#) y [4.2](#), vale:

$$M_{sp} \approx M_c + M_p = M_p \left[1 + \frac{\zeta'}{\bar{P}_a/\bar{P}_c} \right] \quad \text{siendo } \zeta' = 2 \frac{k \bar{P}_a (P_{c,max}/\bar{P}_c)}{P_p \chi (\bar{T}_u / P_u)}$$

↑
Tubería & carcasa

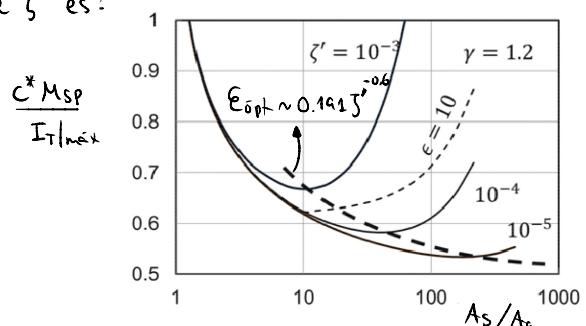
→ Despejando M_p e introduciéndolo en la expresión del impulso total máximo:

$$\frac{C^* M_{sp}}{I_{T|_{\max}}} = \frac{1 + \zeta'/(\bar{P}_a/\bar{P}_c)}{\bar{\mu}(\gamma) \sqrt{\frac{2\gamma}{\gamma-1} \left[1 - \left(\frac{\bar{P}_a}{\bar{P}_c} \right)^{\frac{\gamma-1}{\gamma}} \right]}}$$

⇒ F.O.M. = $f(\varepsilon; \zeta')$

└ Tenemos la figura de mérito $\frac{C^* M_{sp}}{I_{T|_{\max}}}$ en función de la relación de áreas de salida (a través de \bar{P}_a/\bar{P}_c) y de ζ' . Un valor típico de ζ' es:

$$\left. \begin{array}{l} P_a = 2 \cdot 10^4 \text{ Pa} \\ k = 1,5 \\ \chi = 0,85 \\ P_p = 1800 \frac{\text{Kg}}{\text{m}^3} \\ \bar{T}_u / P_u = 10^6 \frac{\text{Nm}}{\text{Kg}} \end{array} \right\} \zeta' \sim 2 \cdot 10^{-4}$$



→ Existe un mínimo en ε para cada ζ' ; optimizando $I_{T|_{\max}}$ o minimizando M_p .

Si ε supera ε_{opt} , se sobredimensionará el SP (más peso) y si se toma $\varepsilon < \varepsilon_{opt}$, se habrá elegido un C_e inferior al posible.

└ En cada curva, el mínimo se puede ver como el máximo I_T para un peso dado o como el mínimo peso para un I_T dado.

ENCENDER TU LLAMA CUESTA MUY POCO



BURN.COM

#StudyOnFire

BURN
ENERGY DRINK

WUOLAH

Capítulo 6. Propulsantes sólidos.

1. Sustancias y funciones.

→ Las sustancias habitualmente utilizadas como propulsantes en MCPS se clasifican mediante su función:

(A) Oxidantes y combustibles (Oxidizers & fuels)

→ Ingredientes principales de un propelente sólido (PS), cuya función es **reaccionar entre sí liberando energía**.

→ Características deseables:

- Compatibilidad con otras sustancias.
- Buenos parámetros propulsivos: M y $\uparrow T_c \leftrightarrow \uparrow c^*$
- No hidroscópico.
- Detonabilidad baja.
- Precio razonable.
- Baja toxicidad y firme (crasto; ASM).

→ Oxidantes típicos: AP (Ammonium Perchlorate), AN (Ammonium nitrate), KN (Potassium nitrate).

→ Combustibles típicos: Al (Principal), Bo

→ El proceso de combustión depende de

- Características físicas y químicas de los componentes.
- Proporción en la formulación y mezclado.
- Aditivos y catalizadores.
- Presión del proceso y T_a inicial.

(B) Ligantes (binders)

→ Los ligantes proporcionan una base estructural y además actúan como combustibles.

└ Influyen en:

- Respuesta mecánica.
- Proceso de fabricación y envejecimiento.
- Combustible.

→ Ligantes típicos: HTPB, CTPB, NG.

(C) Catalizadores (Burning-rate catalyst).

→ Su función es modificar el ritmo de reacción adaptándolo a las necesidades de diseño.

→ Catalizadores típicos: $Fe_2O_3 \rightarrow$ Acelera; LiF \rightarrow Frena.

(D) Plastificantes (Plastidizers)

→ Contribuyen a mejorar propiedades mecánicas y de fabricación.

→ Ejemplos: NG, GAP, DEP.

(E) Agentes de curado (Curing agents / cross linkers)

→ Su función es inducir la formación de grandes cadenas y uniones entre ellas. Esto aboca a una mejora en las propiedades mecánicas, conformado y envejecimiento.

2. Clasificación.

2.1. Propulsantes homogéneos.

→ Oxidante y reductor combinados a nivel molecular.

→ Se clasifican en:

I Single-base propellant: Ingrediente ppal: Nitrocelulosa (NC) disuelta en alcohol.

Se crea combinando NC y NG (a veces NG → TMETN, DEGDN.)

II Double-base propellant: Es el más utilizado.

Moderadas características propulsivas y baja emisión de humos.

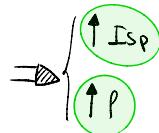
III Triple-base propellant: Resulta de añadir NQ (Nitroguanidina) a un double-base.

$$\hookrightarrow \uparrow \% \text{ H} \Rightarrow \downarrow I_{sp} \Rightarrow \uparrow I_{sp}$$

2.2. Propulsantes mixtos.

→ Se obtienen añadiendo:
(a homogéneos)

- Partículas de AP, HMX, RDX
- Ligantes elastoméricos (EMCDB)
- Partículas de sólidos cristalinos (Al / AP)



2.3. Propulsantes heterogéneos.

→ Oxidante y reductor mezclados a nivel macroscópico (partículas)

→ Se consiguen mediante la mezcla de partículas de oxidantes cristalinos y un ligante de matriz polimérica.

→ $\left\{ \begin{array}{l} \text{Oxidantes habituales: AP, AN} \\ \text{Reductores habituales: HTPB, CTPB, PBAN.} \end{array} \right. + \text{Partículas de Al y B}$

→ Más utilizado: AP - HTPB (-Al) \rightsquigarrow firma \leftrightarrow AN.

3. Selección y formulación de propulsantes.

→ Propulsantes \Rightarrow Papel primordial:

- Establecen T_c
- Participan de la integridad estructural y de la dinámica.
- Aislante térmico.
- Establecen la vida operativa del motor.
- Limitan las condiciones de almacenamiento.

- ↓
- Requisitos:
 - Alta T_c $\Rightarrow \uparrow c^*$
 - Bajo I_{sp}
 - Alta densidad.
 - m pequeño (exp de presión).
 - Buenas propiedades.
 - Respuesta adecuada en ignición.
 - α bajo + baja sensibilidad a T;
 - Firma pequeña.

- Almacenamiento: Resistencia al envejecimiento y estabilidad química.

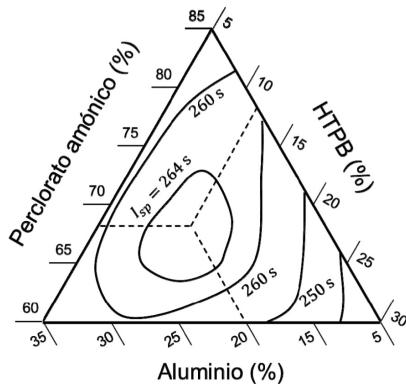
3.1. Formulación.

1^a etapa: Selección de ingredientes en función de los requisitos de la misión.

↳ Aspectos fundamentales: Isp, firma \Rightarrow una familia u otra.

2^a etapa: Elección de aditivos en función de las características balísticas: $\begin{cases} n \\ \text{Sensibilidad a Ti} \end{cases}$

3^a etapa: Análisis teórico y experimental de la composición final y sus propiedades.



3.2. Balance de oxígeno.

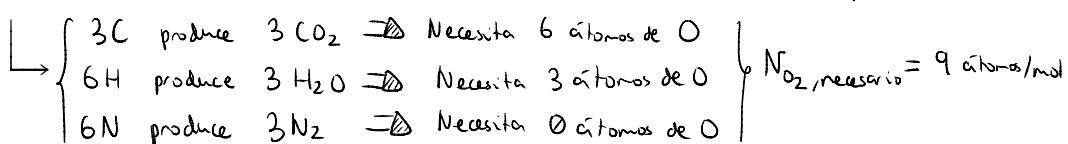
→ Se define el índice de oxígeno I_{Ox} como la cantidad de oxígeno (% en peso) que resulta liberado cuando se produce la conversión completa de C, H, S, Al... en productos como CO₂, H₂O, SO₂ o Al₂O₃. Si se produce un exceso de O el balance es positivo; mientras que si para formar los productos se consume oxígeno adicional, el balance es negativo:

$$I_{Ox} \stackrel{\text{def}}{=} 100 \frac{m_{ex,O_2}}{m_{sustancia}}$$

→ Exceso de masa de O₂ por mol.

→ Masa molar de la sustancia.

→ Ejemplo de cálculo de I_{Ox} : RDX (C₃H₆O₆N₆) \Rightarrow N_{O₂}, disponible = 6 átomos/mol



$$\cdot m_{ex,O_2} = n_{excess} \cdot M_O = (-3) \cdot 16 = -48 \text{ g/mol de O:} \quad \left| \begin{array}{l} I_{Ox} = -21,6\% \end{array} \right.$$

$$\cdot m_{sustancia} = 221,12 \text{ g/mol}$$

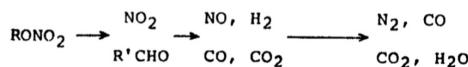
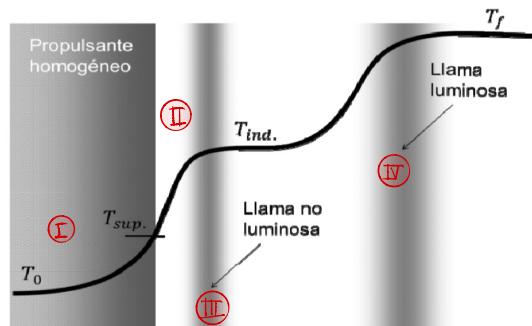
↳ Necesito un componente que tenga un I_{Ox} positivo.

4. Combustión.

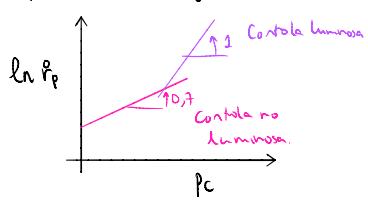
4.1. Propulsantes de doble base.

→ Debido a la homogeneidad del propulsante, es posible realizar un análisis unidimensional del proceso de combustión, algo imposible en propulsantes compuestos.

ENCENDER TU LLAMA CUESTA MUY POCO



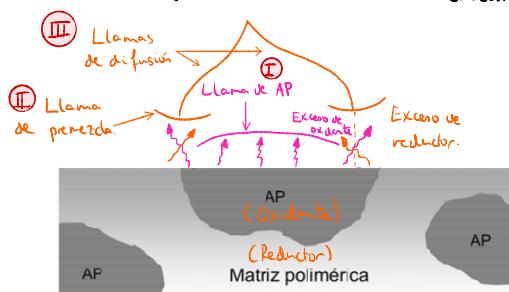
→ En función de la presión de cámara, la velocidad de reacción tendrá uno u otro exponente, al dominar la llama no luminosa para presiones inferiores y la luminosa para las mayores.



	$p = 10 \text{ bar}$	$p = 50 \text{ bar}$
r_p^* (mm/s)	2	7
$T_{sup.}$ (K)	610	660
Espesor térmico (μm)	160	50
Espesor capa de prolsis (μm)	11	3
Distancia llama-superficie (μm)	200	75

4.2. Propulsantes compuestos.

→ La combustión de propulsantes compuestos resulta mucho más compleja e intrincada, debido fundamentalmente a la tridimensionalidad de la región de combustión:



NOTA: Si $d_{AP} \ll d_{llama} \Rightarrow$ Mucho más simple.

I Llama de AP: El AP actúa como mono-propulsante generando una llama unidimensional.

II Llamas de premezcla: En el límite AP-ligante, los vapores de combustión se mezclan, y a una distancia de la superficie reaccionan.

III Llamas de difusión: Las llamas premezcladas tienen dos zonas: Una rica en reductor y la otra rica en oxidante. Agresos abajo (\uparrow) es posible la reacción accediendo los reactivos desde lados opuestos.

Influencia de la presión de cámara:

- Presiones bajas $\Rightarrow r_p$ bajo y ϵ_T alto \Rightarrow Combustión controlada por la química química $\Rightarrow d_{AP} \ll d_{llama} \Rightarrow$ Mas simple
- Presiones medias \Rightarrow Difusión importante $\Rightarrow d_{AP} \sim d_{llama} \Rightarrow$ Es importante: $\uparrow d_{AP} \Rightarrow \uparrow r_p \Rightarrow$ Mas complejo.
 $(1-5 \text{ MPa}) \quad n \sim 0,3 - 0,6$
- Presiones altas \Rightarrow Crea la velocidad de reacción, pero no cambia mucho la física.
 $(> 15 \text{ MPa}) \quad n \sim 0,6 - 0,7$

5. Velocidad de recesión: Ley de Vieille.

→ La velocidad de recesión determina de forma radical el proceso de combustión de un motor cohete sólido: desde imponer el gasto a la salida de la tobera, hasta definir la morfología de la superficie de combustión y el tiempo de combustión.

→ Esta magnitud depende de una larga lista de parámetros: p_c , propiedades físicas de propelante y productos de combustión, T^a inicial... El modelo más ajustado y utilizado es la denominada Ley de Vieille:

$$r_p^o = a p_c^n$$

donde $\begin{cases} a = a(T_{p0}) \rightarrow \text{Depende de la } T^a \text{ inicial del propelante.} \\ p_c \equiv \text{presión de cámara.} \\ n \equiv \text{Valor empírico } \approx 1 \text{ en un rango de } p_c. \end{cases}$

└ Segundo. físico: Al aumentar la presión, los espesores de las capas térmicas disminuyen y, al no modificarse la T^a de combustión, la transferencia de calor crece y con ella la velocidad de combustión.

5.1. Sensibilidad a la temperatura inicial.

→ La T^a de almacenamiento del propelante influye en la velocidad de recesión, siendo la última monótonamente creciente con la primera. Esta influencia se incorpora a la Ley de Vieille mediante el uso de un coeficiente de sensibilidad, definido como:

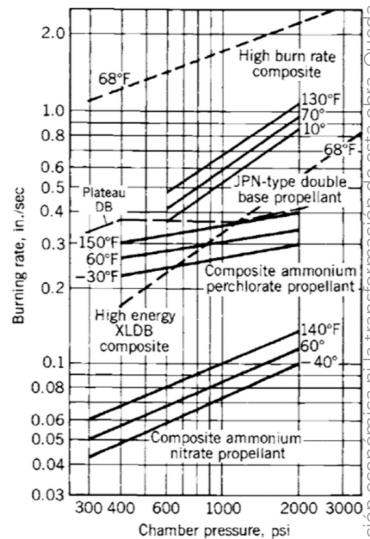
$$\tau_p = \frac{\partial}{\partial T_{p0}} \left(\frac{\partial r_p^o}{\partial T_{p0}} \right)_p$$

mo Cuánto cambia r_p^o porcentualmente a sí misma al cambiar T_{p0} .

$$\tau_p = \left(\frac{\partial (\ln r_p^o)}{\partial T_{p0}} \right)_p = \left(\frac{\partial (\ln (a p_c^n))}{\partial T_{p0}} \right)_p = \frac{\partial}{\partial T_{p0}} \left(\ln a + n \ln p_c \right)_p = \left(\frac{\partial \ln a}{\partial T_{p0}} \right)_p$$

→ Integrando la expresión anterior e introduciendo en la Ley de Vieille:

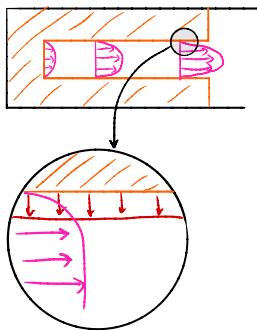
$$\begin{cases} r_p^o = a p_c^n \\ a = a_{ref} e^{\tau_p (T_{p0} - T_{ref})} \end{cases}$$



6. Combustión erosiva.

→ Experimentalmente, se ha observado que el ritmo de combustión de MOPS presenta valores altos al inicio del proceso, debido al flujo cruzado que tiene lugar en el canal de la CC.

→ Puesto que, inicialmente, las áreas de paso son pequeñas, las velocidades de paso han de ser grandes, luego la estructura de la región de combustión se ve afectada:



→ Existe multitud de teorías al respecto: Transferencia de calor desde el núcleo que calienta adicionalmente el propelante; deflexión de la llama que acerca la zona de alta T^a a la superficie; y un aumento de turbulencia, que incrementa el flujo de calor. Las tres son altamente complejas y carecen de evidencia, y la modelización resulta compleja. Todas se plasman con correlaciones aplicadas a la Ley de Vieille, con expresiones del tipo:

$$r_p^o = a p_c^n [1 + K_m (M - M_u)^m]$$

→ Se trata de expresiones bastante ajustadas a la realidad, pero que carecen de generalidad.

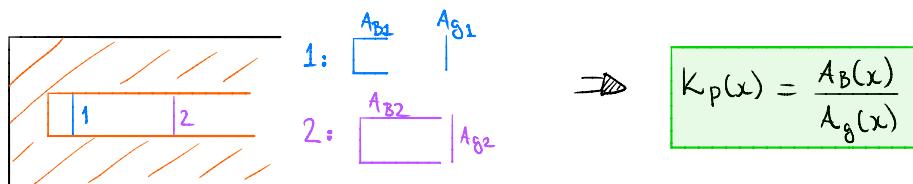
6.1. Revisión de correlaciones experimentales.

→ El trabajo de Mukunda y Paul resulta de gran interés, al tener un carácter bidimensional:

$$\left\{ \begin{array}{l} \eta = \frac{r_p^o}{r_p^o} = 1 + 0,023 (g^{0,8} - g_{th}^{0,8}) H(g-g_{th}) \\ g = g_0 (Re_0/10^3)^{-1/8} \end{array} \right. \quad \left\{ \begin{array}{l} r_p^o = a P_c^n \\ g_0 = P_c v_c / P_p r_p^o \\ Re_0 = P_p r_p^o d_0 / \mu_0 \\ g_{th} = 35 \end{array} \right.$$

6.2. Fenómenos en flujo interno.

→ Supóngase una geometría cilíndrica de la superficie de combustión, caracterizándose por una coordenada x a lo largo de la cámara. El parámetro geométrico que establece la presión de cámara es $K \equiv A_B/A_g$; sin embargo, el parámetro geométrico de interés es el cociente entre el área de paso local $A_B(x)$ y el área de combustión que produce el gasto que pasa por ella, $A_g(x)$:



→ Aplicando continuidad: $P_p r_p^o A_B(x) = P_c v_c A_g(x) \Rightarrow K_p(x) = \frac{P_c v_c}{P_p r_p^o}$ → Modo la relación flujo cruzado - flujo soplado.

→ Por otra parte, se sabe que el área que regula el gasto es el área de garganta. La relación entre esta y el área de paso en cualquier sección del motor se cuantifica a través de J , definida como:

$$J = \frac{A_B(x)/A_p(x)}{A_B/A_g} = \frac{K_p(x)}{K} \quad [J(L) = A_g/A_p]$$

→ $J \ll 1 \Rightarrow A_p \gg A_g \Rightarrow$ Velocidad canal << acanal $\Rightarrow \frac{\delta P}{P} \sim \delta M^2 \ll 1 \Rightarrow$ pc uniforme.
 $J \sim 1 \Rightarrow A_p \sim A_g \Rightarrow$ Velocidad canal ~ acanal \Rightarrow Combustión erosiva.

✳️ Influencia de los parámetros J y K en la combustión erosiva.

→ Hemos visto hasta ahora los parámetros $K_p(x)$ y $J(x)$, relacionados a través de la siguiente expresión:

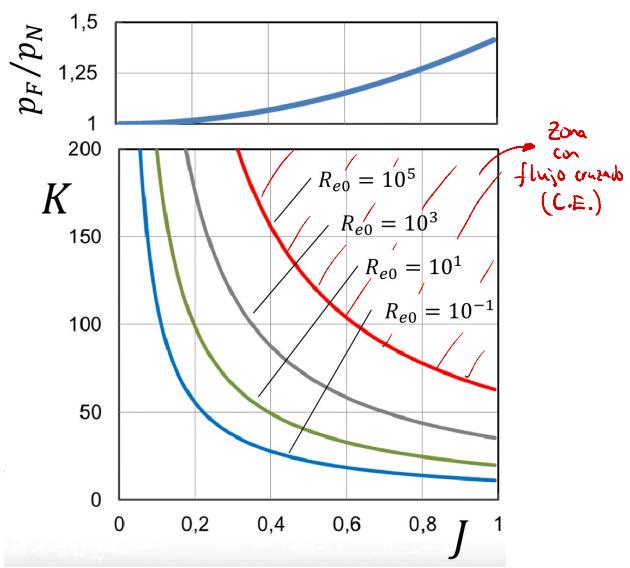
$$J(x) \cdot K = K_p(x)$$

→ Sin embargo, para cada pareja $J - K$, los efectos de la combustión erosiva sólo aparecen para r_p^o suficientemente pequeños; de modo que además de estos parámetros, es necesario considerar la influencia del nº de Reynolds. Tomando $\eta=1$, es decir, el punto a partir del cual existe combustión erosiva:

$$\eta = 1 \rightarrow g = g_{th} = g_0 (Re/1000)^{-1/8} \Rightarrow JK = 35 \sqrt[8]{Re_0/1000} = f(Re_0)$$

→ Familia de hipérbolas

J	K	COMBUSTIÓN EROSIVA	CAIDA DE PRESIÓN
<0.2	<50 50-100 100-150 >150	No Si cuando $r_b < 10 \text{ mm/s}$ Si cuando $r_b < 20 \text{ mm/s}$ Si muy importante cuando $r_b < 10 \text{ mm/s}$	Baja inferior al 5%
0.2-0.35	<50 50-100 100-150 >150	No Si cuando $r_b < 10 \text{ mm/s}$ Si cuando $r_b < 20 \text{ mm/s}$ Si muy importante cuando $r_b < 10 \text{ mm/s}$	Aproximadamente del 10%
0.35-0.5	<50 50-150 >150	Si cuando $r_b < 10 \text{ mm/s}$ Si cuando $r_b < 20 \text{ mm/s}$ Si muy importante cuando $r_b < 10 \text{ mm/s}$	Aproximadamente del 10%
0.5-0.8	<150 >150	Si muy importante cuando $r_b < 20 \text{ mm/s}$ Si muy importante cuando $r_b < 10 \text{ mm/s}$	Hasta un 40%
0.8-1	todos	Si muy importante cuando $r_b < 20 \text{ mm/s}$ Si poco importante cuando $r_b < 30 \text{ mm/s}$	La presión en la sección sónica cae el 50%



ENCENDER TU LLAMA CUESTA MUY POCO



BURN.COM

#StudyOnFire

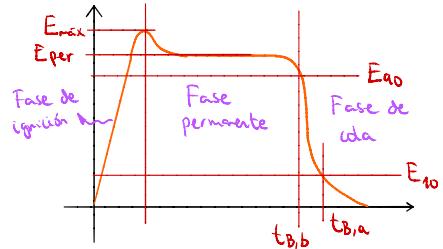
BURN
ENERGY DRINK

WUOLAH

Capítulo 7. Actuaciones de MCPS.

1. Introducción. Curva de empuje.

→ La curva empuje - tiempo de un MCPS constituye una característica intrínseca del motor, al carecer este de algún tipo de sistema de control activo. En un diseño de combustión neutra ($A_B = \text{cte}$):



- ① Fase de ignición: p_c y T_c crecen acusadamente, y el frente de combustión NO estacionaria se extiende desde Σ ignición hasta Σ expuesta.
- ② Fase permanente: Tiempo de respuesta del sistema \ll Tiempo de Δ de condiciones exteriores ($t \equiv$ Parámetro). Cerosión, dilatación...)
- ③ Fase de cola: Combustión de residuos + descarga de la cámara. NO estacionario.

Términos usuales:

- Tiempo de combustión: Tiempo en el que el propelente sufre un proceso de combustión interno (Burning time)
↳ Desde $E \approx 10\%$ hasta que cae a $E \approx 90\% \Rightarrow$ El que hay que usar para calcular $M_{\text{propulsante}}$.
- Tiempo de funcionamiento: Tiempo en el que el motor da un empuje significativo (Action time)
↳ Desde $E \approx 10\%$ hasta $E \approx 10\% \Rightarrow$ El que hay que usar para calcular I_{Total} .

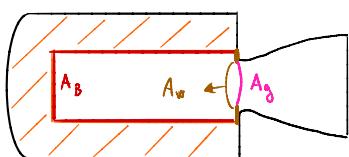
2. Determinación de la presión de cámara.

→ Como en cualquier motor: Sistema de alimentación + Tobera \Rightarrow Presión de cámara.

2.1. Ecuación de conservación de la masa

(A) Volumen de control.

→ El volumen de control utilizado $V_C(t)$ se compone de:



- Superficie de la garganta (A_g): Superficie fija y permeable por la que fluye el gasto que atraviesa la garganta.
- Paredes inertes (A_w): Superficies impermeables sobre las paredes del interior de la cámara, que pueden crecer a medida que avanza el proceso.
- Superficie de combustión (A_B): Superficie deformable y permeable que se establece sobre el área de combustión y que avanza con ella a la velocidad de reacción.

(B) Hipótesis.

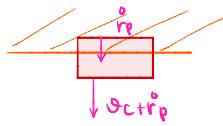
→ Para plantear la ECM en forma integral es necesario tener en cuenta las siguientes hipótesis:

- ① T° de reacción uniforme en el volumen de control
 - ② Velocidades (M) pequeñas en la cámara $\Rightarrow p_c$ uniforme.
 - ③ Proceso quasiestacionario ($t_R \ll t_c$)
 - ④ Densidad del fluido pequeña frente a la del propelente.
- +
- Espesor de la zona de reacción (sólido y gas) e inducción despreciables frente a las dimensiones de la CC.

③ Desarrollo de la ecuación en su forma general.

$$\text{Ecuación: } \frac{d}{dt} \iiint_{V_C(t)} p_C dV_C - \iint_{A_B(t)} p_C (v_C + \dot{r}_P) dA_B + \iint_{A_g(t)} p_g v_g dA_B$$

→ Aplicando la ECM a un v_C píldora en la superficie de combustión:



$$\delta A_B \rho_p \dot{r}_P - \delta A_B \rho_C (v_C + \dot{r}_P) = 0 \Rightarrow \rho_C v_C = \rho_p \dot{r}_P \left(1 - \frac{\rho_C}{\rho_p}\right)$$

$$\stackrel{?}{\text{¿Qué significado tiene?}} \Rightarrow \frac{\rho_C}{\rho_p} \ll 1 (\sim 10^{-3}) \Rightarrow v_C \sim \dot{r}_P \frac{\rho_p}{\rho_C} \sim 100 \dot{r}_P \quad \begin{bmatrix} \rho_p \sim 10^3 \text{ kg/m}^3 \\ \rho_C \sim \frac{\rho_p}{T_C} \sim \frac{100 \rho_p}{10 T_a} \sim 10 \text{ kg/m}^3 \end{bmatrix}$$

→ Aplicando la expresión en δA_B a la ECM original:

$$\iint_{A_B} p_C (v_C + \dot{r}_P) dA_B = \iint_{A_B} \rho_p \dot{r}_P dA_B \Rightarrow \frac{d}{dt} (\bar{p}_C v_C) = \iint_{A_B(t)} \rho_p \dot{r}_P (\bar{x}_B, t) dA_B - \dot{m} \quad \text{donde} \quad \begin{cases} \bar{p}_C = \frac{1}{v_C} \iiint_{V_C} p_C dV_C \\ \dot{m} = \iint_{A_g(t)} p_g v_g dA_g = \frac{\rho_C A_g}{c^*} \end{cases}$$

↳ Desarrollando el término no estacionario:

$$v_C \frac{d\bar{p}_C}{dt} + \bar{p}_C \frac{dv_C}{dt} = \iint_{A_B(t)} \rho_p \dot{r}_P (\bar{x}_B, t) dA_B - \dot{m}$$

→ Aplicando la siguiente relación para dv_C/dt :

$$\bar{p}_C \frac{dv_C}{dt} = \iint_{A_B(t)} \bar{p}_C \dot{r}_P (\bar{x}_B, t) dA_B \Rightarrow v_C \frac{d\bar{p}_C}{dt} = \iint_{A_B(t)} (\rho_p - \bar{p}_C) \dot{r}_P (\bar{x}_B, t) dA_B - \dot{m}$$

→ Se observa que el gasto masivo del motor difiere del de propelente, siendo éste mayor, ya que parte de él se queda ocupando el volumen liberado.

④ Forma final de la ECM.

→ Suponiendo que el fluido de la cámara es un gas ideal cuya T^a de reposo es constante:

$$\frac{v_C}{RT_C} \frac{dp_C}{dt} = (\rho_p - \bar{p}_C) \dot{r}_P A_B - \frac{\rho_C A_g}{c^*}$$

→ Aplicando la Ley de Vieille y armando la ecuación diferencial de $v_C(t)$:

$$\begin{cases} \frac{v_C}{RT_C} \frac{dp_C}{dt} = (\rho_p - \bar{p}_C) a_p \rho_C^n A_B - \frac{\rho_C A_g}{c^*} \\ \frac{dv_C}{dt} = a_p \rho_C^n A_B \end{cases} \Rightarrow 2 \text{ EDOs para obtener } v_C(t) \text{ y } p_C(t).$$

2.2. Solución cuasiestacionaria.

Ⓐ Tiempo característico: Hipótesis de movimiento cuasiestacionario.

→ Suponiendo que los 3 términos de la ecuación anterior son del mismo orden; despreciando $p_C \ll \rho_p$ y asumiendo $v_C \sim \dot{r}_P t_B A_B$:

$$\dot{r}_P t_B A_B \frac{p_C}{T_C} \sim \rho_p \dot{r}_P A_B \sim \frac{\rho_C A_g}{c^*} \Rightarrow \frac{t_C}{t_B} \sim \frac{p_C}{\rho_p} \ll 1 \Rightarrow t_C \ll t_B \Rightarrow \begin{array}{l} \text{La superficie} \\ \text{de combustión} \\ \text{no varía bruscamente} \end{array}$$

⇒ La hipótesis de flujo cuasiestacionario es razonable.

B) Simplificación y solución final.

→ Bajo la hipótesis de flujo quasistacionario, se llega a la siguiente ecuación:

$$P_p \alpha p_c^n A_B - \frac{P_c A_g}{C^*} = 0 \Rightarrow P_c = \left\{ P_p \alpha C^* \frac{A_B}{A_g} \right\}^{\frac{1}{1-n}}$$

- La P_c de equilibrio depende de:
- Densidad
 - Propulsante: Factor de velocidad de combustión (α)
 - T^* de combustión y composición (C^*)
 - Exponente de p en la Ley de Vieille. (n)
 - Área de combustión (Importancia de si es cte, progresiva o regresiva.)
 - Área de garganta: Erosión $\rightarrow A_g \rightarrow P_c$

NOTA: Klemmung: $K = \frac{A_B}{A_g}$ ($\sim 10^2 - 10^3$)

→ La presión de cámara puede refirse a la presión inicial, de modo que se descartan las influencias de parámetros constantes:

$$P_c = P_{c0} \left(\frac{A_B}{A_{B0}} \right)^{\frac{1}{1-n}}$$

2.3. Variación de la magnitud del empuje. Erosión de la garganta.

→ El empuje de un motor cohete responde a la siguiente expresión:

$$E = P_c A_g C_E$$

→ Aplicando la relación anterior para la variación de P_c :

$$P_c \sim \left(\frac{A_B}{A_g} \right)^{\frac{1}{1-n}} \Rightarrow E \sim \left(\frac{A_B}{A_g} \right)^{\frac{1}{1-n}} \Rightarrow \text{Para mantener } E = \text{cte}, \frac{A_B}{A_g} = \text{cte.}$$

La erosión en la tobera causa un aumento del área del 20%, que con $n=0,5$, hace que el empuje baje un 20% \Rightarrow La erosión en la garganta es algo a cuantificar.

2.4. Curva de empuje.

→ En la solución quasistacionaria, el tiempo va jugando el papel de un parámetro que determina el área de combustión, y con ello, la P_c , r_p y el gasto en la cámara.

→ Si mapeamos $y=f(t)$ (Coordenada normal de avance) podemos plantear el problema en términos geométricos:

$$P_c(y) = \left\{ P_p \alpha C^* \frac{A_B(y)}{A_g} \right\}^{\frac{1}{1-n}}$$

→ Por definición de r_p y aplicando la Ley de Vieille:

$$\int_0^t dt = \int_0^y \frac{dy}{r_p} = \int_0^y \frac{dy}{a P_c^n(y)}$$

→ Adimensionalizando la ecuación, con w siendo el espesor del propulsante:

$$\eta = \frac{y}{w} \quad \tau = \frac{t}{r_p w} \quad \Rightarrow \quad \int_0^1 \left(\frac{A_B}{A_{B0}} \right)^{\frac{1}{1-n}} d\eta = \int_0^2 d\tau$$

ENCENDER TU LLAMA CUESTA MUY POCO



→ De este modo, se observa que las actuaciones del motor están determinadas por la geometría del área de combustión; por ejemplo, el impulso total.

$$I_T = \int_0^{t_B} E dt \rightarrow \frac{I_T}{E_{0,t_B}} = \int_0^1 \left(\frac{A_B}{A_{B0}} \right)^{\frac{1}{1-n}} dy$$

3. Evolución temporal de la presión de cámara.

→ La ecuación de la evolución temporal de la presión de cámara es, en un caso general:

$$\frac{v_c}{R T_c} \frac{1}{K} \frac{dp_c}{dt} = p_p \alpha p_c^n A_B - \frac{p_c A_g}{c_*} + \dot{m}_{ext}$$

Donde $\begin{cases} k \equiv \text{Evolución poliédrica} & \leftarrow k = \gamma \leftrightarrow \text{Isentrópico} \rightarrow t_c \ll t_{\text{thermal}} \\ T_c \sim p_c^{\frac{k-1}{k}} & \leftarrow k=1 \leftrightarrow \text{Isotermo} \rightarrow t_c \gg t_{\text{thermal}} \\ \dot{m}_{ext} \equiv \text{Aporte masico exterior.} \end{cases}$

3.1. Ecuación generalizada. Términos.

→ Se tomarán como valores de referencia los del proceso estacionario, asumiéndolos como los iniciales:

$$p_p \alpha p_{c0}^n A_{B0} = \frac{p_{c0} A_{B0}}{c_*} = \dot{m}_0$$

→ Recordando la definición de la fracción volumétrica de propelente, así como el propulsante desalojado.

$$\chi \stackrel{\text{def}}{=} \frac{v_p}{v_c} ; v_p = \alpha p_c^n A_{B0} t_{B0} \longrightarrow v_c = \frac{v_p}{\chi} = \frac{\alpha p_c^n A_{B0} t_{B0}}{\chi}$$

→ Se procede a la adimensionalización de la ecuación con las variables de referencia y el tiempo característico, definido a continuación:

$$\frac{T_{c0}}{T_{c0}} \frac{1}{p_p \alpha p_{c0}^n A_{B0}} \frac{\alpha p_{c0}^n A_{B0} t_{B0}}{R T_c K \chi} \frac{dp_c}{dt} = \frac{1}{p_p \alpha p_{c0}^n A_{B0}} \cdot p_p \alpha p_c^n A_B - \frac{c_0}{p_{c0} A_{B0}} \cdot \frac{p_c A_g}{c_*} + \frac{\dot{m}_{ext}}{\dot{m}_0}$$

→ Se definen: $\begin{cases} a = \frac{A_g}{A_{B0}} \\ b = \frac{A_B}{A_{B0}} \\ c = \frac{c_*}{c_{*0}} = \sqrt{\frac{T_c}{T_{c0}}} \end{cases}$ $m = \frac{\dot{m}_{ext}}{\dot{m}_0}$ $\zeta = \frac{t}{T_c} = \frac{t}{t_{B0} \frac{p_{c0}}{p_p \chi}}$ $[p_{c0} = \frac{p_{c0}}{R T_{c0}}]$

$$\Rightarrow \frac{1}{K c_*^2} \frac{dp}{d\zeta} = b p^n - \frac{a}{c} p + m$$

Ecuación para obtener la presión de cámara adimensional en un caso general

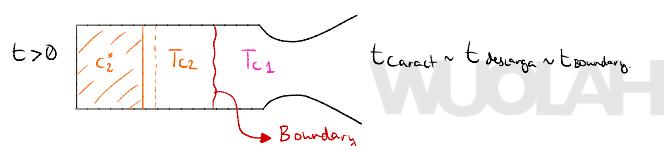
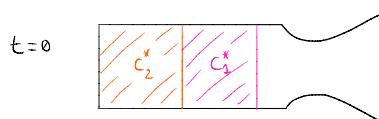
→ La solución general en el habitual caso $m=0$ es:

$$\frac{p^{1-n} - p_{c0}^{1-n}}{1 - p_{c0}^{1-n}} = e^{-\frac{a}{c} K(1-n) \zeta}$$

→ A continuación se muestra un conjunto de soluciones particulares de gran importancia.

Nota: Motores de doble empuje.

→ En el caso de tener 2 propelentes de distinta composición, es necesario modelizar el proceso en la cámara al estar quemándose un propelente y expulsándose otro distinto por la garganta.



3.2. Soluciones particulares.

(A) Régimen quasistacionario:

→ Todas las variables son constantes: $\frac{A_B}{A_{B0}} = \frac{A_g}{A_{g0}} = \frac{C^*}{C_0^*} = 1$; $\frac{\dot{m}_{ext}}{\dot{m}_0} = 0$; $k=1 \Rightarrow p=1$

(B) Régimen de arranque:

→ Caso muy particular: $\frac{A_B}{A_{B0}} = 0$; $\frac{A_g}{A_{g0}} = 0$; $\frac{\dot{m}_{ext}}{\dot{m}_0} = m \Rightarrow p = m \bar{c} + 1$

↳ Gasto por la garganta despreciable:

(C) Régimen de descarga (empuje de cola)

→ Propulsante consumido $\Rightarrow \frac{A_B}{A_{B0}} = 0$

→ Área de garganta cte. $\Rightarrow \frac{A_g}{A_{g0}} = 1$

I (Caso adiabático): $k=\gamma$; $\frac{C^*}{C_0^*} = \left(\frac{T_c}{T_{c0}}\right)^{1/2} = p^{-\frac{\gamma-1}{2\gamma}}$ $\Rightarrow p = \left(1 + \frac{\gamma-1}{2} \bar{c}\right)^{-\frac{2\gamma}{\gamma-1}}$

II (Caso isotermo): $k=1$; $\frac{C^*}{C_0^*} = 1 \Rightarrow p = e^{-\bar{c}}$

3.3. Análisis de estabilidad.

→ Resulta fundamental realizar un análisis del funcionamiento de la cámara ante perturbaciones en la presión de cámara, respecto a su valor de equilibrio.

→ El comportamiento vendrá determinado por el exponente n de la Ley de Vieille, y su valor respecto a 1.

↳ Caso $n > 1$: Si $\uparrow p_c (\delta p_c > 0) \Rightarrow$ Se produce más masa que la que se expulsa $\Rightarrow \uparrow p_c \Rightarrow$ Inestable.

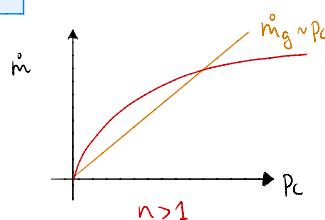
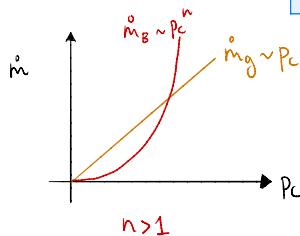
↳ Caso $n < 1$: Si $\uparrow p_c (\delta p_c > 0) \Rightarrow$ Se expulsa más masa que la que se produce $\Rightarrow \downarrow p_c \Rightarrow$ Estable.

✳️ Análisis gráfico y matemático

Perturbación: $p_c = p_{c0} + \delta p_c$, $\delta p_c \ll p_{c0}$ $\Rightarrow p^n = \frac{p_c^n}{p_{c0}^n} = \left(1 + \frac{\delta p_c}{p_{c0}}\right)^n \approx 1 + n \frac{\delta p_c}{p_{c0}}$

Ecuación: $\frac{dp}{dz} = \frac{1}{p_{c0}} \frac{d\delta p_c}{dz} = p^n - p = 1 + n \frac{\delta p_c}{p_{c0}} - \left(1 + \frac{\delta p_c}{p_{c0}}\right)$

$$\Rightarrow \frac{d\delta p_c}{\delta p_c} = (n-1) dz$$



4. Superficies de combustión.

4.1. Introducción.

→ La curva de empuje de un MCPS depende fundamentalmente del área de combustión en cada instante de tiempo, por lo que el diseño de la superficie de combustión determina univocamente dicha curva (throttling on design). En general, se buscará una curva de empuje aprox. constante, a fin de minimizar el peso del motor para una pc dada.

→ Independientemente del perfil de empuje deseado, cada tipo de geometría de propelente presenta una serie de parámetros relacionados con la eficiencia del diseño:

1. Coefficiente volumétrico: Mide la ocupación de la cámara, y está relacionado con el espesor adimensional de propelente (web fraction, $\frac{w}{R_c}$)

$$\chi \stackrel{\text{def}}{=} \frac{V_p}{V_c}$$

Está relacionado con la masa del motor ($M_{sp} \sim \chi V_c$)

2. Fracción de propelente residual: Mide si todo el propelente es utilizado eficientemente.

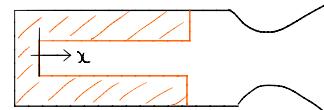
(sliver fraction)

→ Porcentaje de propelente por quemar una vez que las geometrías principales han sido quemadas; poniendo de manifiesto que la superficie de combustión no alcanza los límites del volumen (Carcasa) de forma simultánea.

3. Relación área de combustión - área de paso: Influye radicalmente en el campo fluido de la (burning area to port area ratio) cámara de combustión (velocidad, D_p , combustión erosiva...)

$$K_p = \frac{A_B(x)}{A_p(x)}$$

Vital en motores con combustión lateral.



✳️ Tipos de superficies iniciales:

→ En los MCPS, existe una cierta variedad de geometrías posibles, agrupadas en:

(A) Combustión frontal: Son las más sencillas, con las ventajas que esto conlleva pero también siendo modestas para ciertas aplicaciones exigentes.

(B) Combustión lateral: Más complejas pero con mayor rango de aplicación.

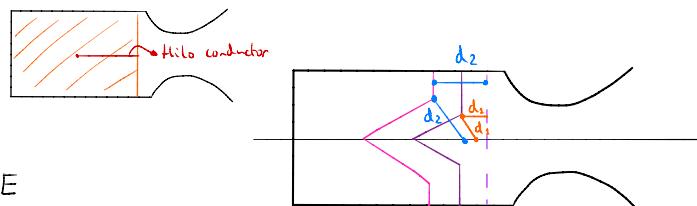
└─ Axialsimétricas └─ Eje del motor.
└─ Periodicidad azimutal.

→ En los lanzadores (boosters), es común encontrarse con módulos independientes cilíndricos, denominados "segmented solid rocket motors".

NOTA: Durante la combustión, el centro de masas del motor se ve lógicamente desplazado lo cual se produce a lo largo del eje del motor en los dos casos mencionados. "Cualquier" otra geometría en la cual se desplace dicho punto del eje comprometería seriamente la estabilidad del motor.

4.2. Combustión frontal.

- Ventajas:**
 - Simplicidad.
 - Coeficiente volumétrico alto.
 - Desperdicios casi inexistentes.
- Desventajas:** Klemmung muy bajos $\Rightarrow \downarrow p_c \Rightarrow \downarrow E$



- NOTAS:**
 - Carcasa \Rightarrow Discontinuidad \Rightarrow Asimetría en la combustión.
 - "Wired propellant": Inserción de un cable conductor en el propelente $\Rightarrow \uparrow A_B$

4.3. Combustión lateral.

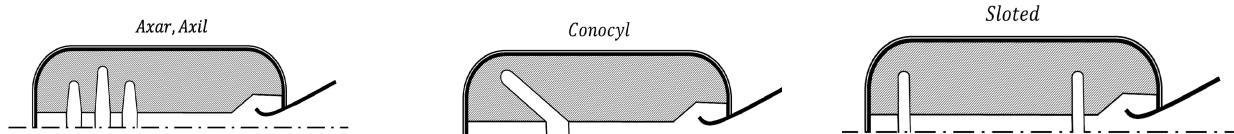
- Ventajas:**
 - Coeficiente volumétrico bueno
 - Nivel de empuje alto.
- Desventajas:** Esbeltez \Rightarrow
 - A_B limitada \Rightarrow Perforaciones.
 - Combustión erosiva (y no uniforme $\Rightarrow r_p$ no uniforme)

{ Soluciones } Axilsimétricas
Periodicas

(A) Geometrias axilsimétricas.

→ La geometría axilsimétrica más simple consiste en un hueco cilíndrico centrado que, a medida que avanza el proceso de combustión, crece de forma monótona. Esto implicaría un incremento proporcional de p_c , lo cual puede no ser deseable.

- ↳ Soluciones:
- Corona cilíndrica: $\Delta A_B = 0$
 - Ranuras radiales o inclinadas. \Rightarrow Hay zonas que alcanzan antes la carcasa.



(B) Geometrias con periodicidad circumferencial.

→ Se trata de otra aproximación ante el problema de la superficie cilíndrica.

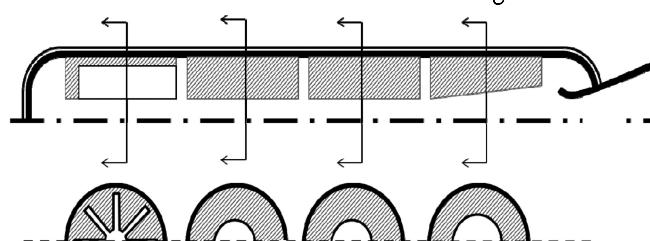
- ↳ Problema: Hay zonas que alcanzan antes la carcasa \Rightarrow Queda expuesta



(*) Motor segmentado.

→ Se trata de una arquitectura empleada para los grandes motores de los lanzadores espaciales.

- Motivos:
 - Fabricación: Difícil fabricar volúmenes grandes de propelente.
 - Transporte.
 - Diseño: Permite conformar el perfil de empuje a las necesidades de la misión.
- ↳ Muy importante en lanzadores (t_B grandes).



ENCENDER TU LLAMA CUESTA MUY POCO



5. Evolución temporal de la superficie de combustión.

5.1. Ideas generales.

- La cinemática de la superficie determina la curva de empuje y un conocimiento adecuado de la misma permite diseñar además de analizar, pudiéndose aumentar la eficiencia del sistema.
- Ley de Piobert: La superficie de combustión de un propelente retrocede capa a capa en la dirección normal a la propia superficie.
- └ Si la velocidad de recession es uniforme en $A_B \Rightarrow A_B$ se desplaza perpendicularmente a sí misma.
- La distancia recorrida se conoce como coordenada normal de avance, y su relación con la velocidad de recession se expresa con una sencilla ecuación diferencial. Sin embargo, conviene plantear el problema de la forma más general posible.

5.2. Determinación de la superficie de combustión.

- Sea la función vectorial $\vec{r}_s(u, v, t)$ que determina la posición de la superficie de combustión a lo largo del tiempo, con u y v siendo 2 parámetros cuya variación define la superficie (r, θ p.ej.).

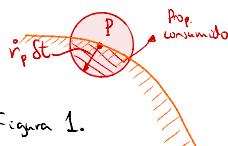


Figura 1.

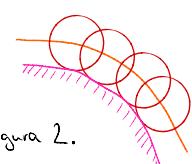


Figura 2.

→ Supóngase que el proceso de combustión sólo afecta al punto P (figura 1). En un tiempo Δt , el material consumido sería la intersección entre la esfera de centro P y radio $r_p \Delta t$ con el propelente sin consumir (zona rayada).

└ Si consideramos que todos los puntos de la superficie de propelente participan en el proceso de combustión, se generan infinitas esferas de radio $r_p \Delta t$, que no tiene por qué ser cte. La nueva superficie de combustión será la envoltura de la familia de esferas (centro del propelente).

$$\text{Familia de esferas. } (\vec{r} - \vec{r}_s) \cdot (\vec{r} - \vec{r}_s) = (r_p \Delta t)^2 \Rightarrow \text{Envoltura: } \left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial \vec{r}_s}{\partial u} \cdot (\vec{r} - \vec{r}_s) = -(r_p \Delta t)^2 \frac{1}{r_p} \frac{\partial r_p}{\partial u} \\ \frac{\partial \vec{r}_s}{\partial v} \cdot (\vec{r} - \vec{r}_s) = -(r_p \Delta t)^2 \frac{1}{r_p} \frac{\partial r_p}{\partial v} \end{array} \right.$$

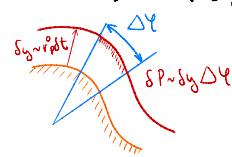
5.3. Geometrías regulares.

→ Decir que se trata con geometrías regulares quiere decir que cada punto de A_B tiene un (y solo uno) punto imagen, o lo que es lo mismo: es un proceso reversible, es decir, la geometría inicial puede ser obtenida conociendo la final.

→ El área de combustión se obtiene de forma sencilla, integrando el perímetro de combustión de cada sección a lo largo del eje del motor, es decir:

$$A_B = \int_0^Z P_B dz$$

→ Ahora el problema es 1D: Se requiere conocer la evolución del perímetro en cada sección. Considerese una sección cualquiera; en un sector angular de tamaño $\Delta\gamma$, el aumento de perímetro debido a la combustión será $\delta P_B \sim \Delta\gamma \delta y$, siendo $\delta y \sim r_p \Delta t$. Integrando en γ :



$$\frac{dP_B}{dy} = \int_{\text{Perímetro}} d\gamma = 2\pi$$

→ Además, en el caso de un cilindro recto de longitud L, se obtiene:

$$\frac{dA_B}{dy} = 2\pi L$$

→ Considerando una velocidad de recesión uniforme, con la expresión anterior muestra que la variación del área de combustión es **independiente de la forma de la sección transversal**:

$$A_B(y) = A_{B0} + 2\pi L \cdot y \quad \rightarrow \text{La influencia de la forma se da a través de } A_{B0}.$$

└ Conclusiones: La variación del área de combustión en geometrías regulares cumple:

Es independiente de la forma del perímetro.

Tiene valor constante e igual al círculo girado por la tg. a la curva. Signo contrario al de la curvatura (Si $\vec{n} \parallel$ dirección de propagación).

NOTA: Área de paso.

→ Si la velocidad de recesión es uniforme: $\frac{dA_p}{dy} = P_B$

$$\left\{ \begin{array}{l} P_B(z, y) = P_B^0(z) + 2\pi y \\ A_p(z, y) = A_p^0(z) + P_B^0(z) \cdot y + \pi y^2 \\ A_B(z, y) = A_B^0(z) + 2\pi y z \end{array} \right.$$

[Se ha asumido $z(t)$]

5.4. Geometrías singulares.

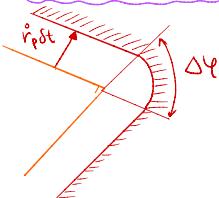
→ La formulación anterior aplica si y sólo si la geometría del perímetro de combustión es regular. Sin embargo, es común encontrarse con algún tipo de singularidad en el perímetro en algún punto del proceso de combustión, destacando:

(A) Cúspides.

→ El perímetro de la sección presenta un ángulo \Rightarrow Vértice (cúspide)

→ Existen dos situaciones posibles, en función del avance de la superficie de combustión:

I) Cúspide hacia el propulsante.

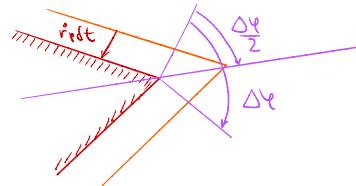


└ La combustión regulariza la geometría:

Cúspide \rightarrow Sector angular.

└ Tangente al perímetro continua $\Rightarrow \delta P_B \sim y \Delta \varphi$

II) Cúspide hacia el eje del motor.



└ La combustión destruye geometría al avanzar.

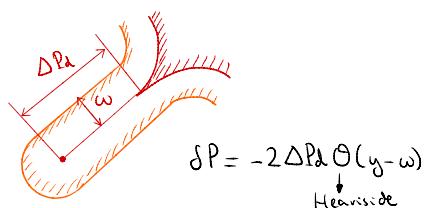
└ El proceso continúa siendo irreversible.

$$\frac{dP_B}{dy} = -2 \tan\left(\frac{\Delta\varphi}{2}\right)$$

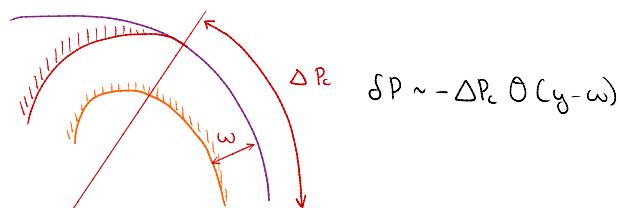
(B) Colisiones.

→ Generalmente hay 2 casos:

A) Colisión de frentes de combustión.



B) Colisión con la carcasa.

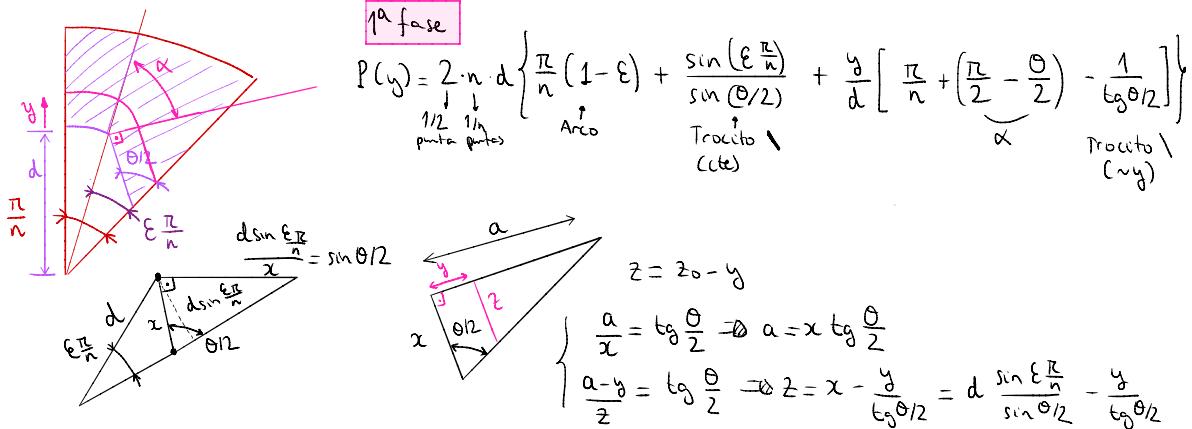


5.5. Análisis de una estrella clásica.

→ Una de las geometrías más recurrentes en MCPS es la estrella de n puntas. Su principal característica es el hecho de que, por construcción, define 2 fases de empuje diferenciadas:

Una 1^a etapa definida por la dimensión d y el ángulo ε, de modo que sea o no constante.

Una 2^a etapa de carácter progresivo, cuyo incremento en pc ha de ser controlado.



↳ Si queremos que la 1^a fase de combustión sea constante, el perímetro de combustión ha de ser independiente de y, luego:

$$\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{n} = \frac{\bar{\theta}}{2} + \frac{1}{\tan(\bar{\theta}/2)} \Rightarrow \text{Se resuelve: está tabulado en función del nº de puntas de la estrella.}$$

$$\bar{\theta} = \frac{\pi}{d} = 2n \left\{ \frac{\sin(\epsilon \pi/n)}{\sin(\bar{\theta}/2)} + (1-\epsilon) \frac{\pi/n}{\sin(\bar{\theta}/2)} \right\} \Rightarrow \text{Perímetro de combustión en la 1^a fase con } \theta = \bar{\theta}(n)$$

→ En este caso particular, el espesor de propelente en el que se mantiene esta situación es:

$$\frac{\bar{\omega}}{d} = \frac{\sin(\epsilon \pi/n)}{\cos(\bar{\theta}/2)} \Rightarrow \text{Radio de cámara: } \frac{r_c}{d} = 1 + \frac{\bar{\omega}}{d} \Rightarrow \text{Será la longitud de referencia.}$$

$$\bar{\theta} = 2n \frac{\frac{\sin(\epsilon \pi/n)}{\sin(\bar{\theta}/2)} + (1-\epsilon) \frac{\pi/n}{\sin(\bar{\theta}/2)}}{1 + \frac{\sin(\epsilon \pi/n)}{\cos(\bar{\theta}/2)}}$$

✳ Área de paso y fracción de propelente no utilizado.

• Área de paso: $\bar{A}_p = \bar{A}_{p0} + \bar{P} \cdot y = d^2 \left[n \sin(\epsilon \pi/n) \cos(\epsilon \pi/n) \left(1 - \frac{\tan(\epsilon \pi/n)}{\tan(\bar{\theta}/2)} \right) + (1-\epsilon) \pi \right] + \bar{P} \cdot y$

• Área de propelente no utilizado: $\bar{A}_f = A_c - \bar{A}_p \quad j \quad \frac{A_c}{d^2} = r_c^2 \pi \left(1 + \frac{y}{d} \right)^2$

↳ Fracción de propelente infravalorizado: $\bar{f}_f = \frac{\bar{A}_f}{A_{prop}} = \frac{A_c - \bar{A}_p}{A_c - \bar{A}_{p0}}$

