

[p53.mw](#)

```
> restart: #"m11_p53"
```

Considérese una tarjeta electrónica de $100 \cdot 150 \cdot 1 \text{ mm}^3$, hecha de fibra de vidrio laminada con epoxy ($k = 0,25 \text{ W/(m}\cdot\text{K)}$), con unos componentes que disipan 5 W en total y que se supondrán uniformemente distribuidos. Sabiendo que la tarjeta se va a empotrar por los dos lados mayores en zócalos buenos conductores del calor, que se supone que van a estar a 30°C , se pide:

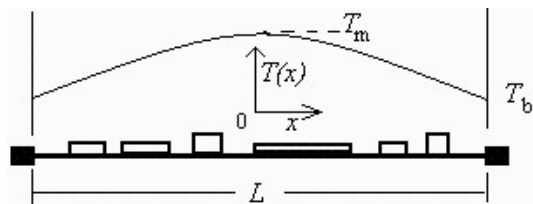
- Hacer un esquema del perfil de temperatura esperado.
- Determinar la temperatura máxima que se alcanzaría en la tarjeta despreciando las pérdidas al aire ambiente dentro de la caja electrónica donde va situada, y la radiación térmica (i.e. disipación sólo por conducción hacia los zócalos).
- Determinar el espesor que debería tener un recubrimiento de cobre por una cara de las de $10 \cdot 15 \text{ cm}^2$ para que la temperatura máxima no superase en más de 40°C la de los zócalos, en el caso anterior.

Datos:

```
> read("../therm_eq.m":read("../therm_proc.m":with(therm_proc):
```

```
> su:="Cobre":dat:=[Lw=0.1*m_,Lb=0.15*m_,Lt=1e-3*m_,ke=0.25*W_/(m_*K_),Q=5*W_,Tb=
(30+273.15)*K_,DTm=40*K_] ;
```

```
dat := [ Lw=0.10 m_, Lb=0.15 m_, Lt=0.00 m_, ke=0.25 W_ / (m_*K_), Q=5 W_, Tb=303.15 K_, DTm=40 K_ ]
```



```
> dat:=op(dat),Const,SI2,SI1:Cdat:=get_sol_data(su):eqC:=rho*c*diff(T(x,t),t)=k*diff(T(x,t),x,x)+phi ;
```

$$eqC := \rho c \left(\frac{\partial}{\partial t} T(x, t) \right) = k \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} T(x, t) \right) + \phi$$

- Hacer un esquema del perfil de temperatura esperado.

Estará más caliente lejos de los anclajes. (Ver arriba.)

- Determinar la temperatura máxima que se alcanzaría en la tarjeta despreciando las pérdidas al aire ambiente dentro de la caja electrónica donde va situada, y la radiación térmica (i.e. disipación sólo por conducción hacia los zócalos).

Se puede aproximar por un problema unidimensional (a lo largo de la longitud corta, $L_w=0,1 \text{ m}$) y en régimen estacionario, integrándose fácilmente la ecuación del calor:

```
> eqC:=0=k*diff(T(x),x,x)+phi;dsolve(eqC,T(x));eq11_8_1;eq11_8_2;eqA:=A=Lb*Lw;eqA_:=subs(dat,%);
eqL:=L=Lw;eqL_:=subs(dat,%);eqphi:=phi=Q/(Lw*Lb*Lt);eqphi_:=subs(dat,%);
eqT0:=T[0]=subs(x=0,T[1]=Tb,k=ke,rhs(eq11_8_1));eqT0_:=subs(eqL,eqphi,dat,%);#T[0]=TKC(rhs(%));
```

$$eqC := 0 = k \left(\frac{d^2}{dx^2} T(x) \right) + \phi$$

$$T(x) = -\frac{1}{2} \frac{\phi x^2}{k} + C_1 x + C_2$$

$$T(x) = T_1 + \frac{1}{8} \frac{\phi L^2 \left(1 - \frac{4x^2}{L^2} \right)}{k}$$

$$Q = A \phi L$$

$$eqA := A = L_b L_w$$

$$eqA_ := A = 0.02 \text{ m}^2$$

$$eqL := L = L_w$$

$$\begin{aligned}
 eqL_ &:= L = 0.10 \text{ m} \\
 eqphi &:= \phi = \frac{Q}{L_w L_b L_t} \\
 eqphi_ &:= \phi = \frac{3.33 \cdot 10^5 \text{ kg}}{\text{m s}^3} \\
 eqT0 &:= T_0 = T_b + \frac{1}{8} \frac{\phi L^2}{k_e} \\
 eqT0_ &:= T_0 = 1969.82 \text{ K}
 \end{aligned}$$

¡IMPOSIBLE!; sabemos que los equipos electrónicos no pueden funcionar a esas temperaturas tan altas, ni tampoco lo soportarían los materiales inertes poliméricos. Se concluye que, o bien los datos de partida, o las hipótesis de despreciar la convección y la radiación, no son adecuadas (la tarjeta empezaría a echar humo, ¡tóxico!, a unos 150 °C).

Los datos parecen razonables, aunque el valor de la conductividad térmica de la FR-4 en el plano (i.e. en la dirección de las fibras), puede ser casi el doble (lo que bajaría a la mitad el DT), pero lo que parece más errado es considerar que la conducción de calor por los estrechos bordes de la tarjeta va a ser más importante que la convección y la radiación por toda el área, como puede comprobarse con una sencilla estimación. Supongamos que el ambiente en el que está la tarjeta está a unos 50 °C (e.g. las paredes de la caja electrónica donde está metida, otras tarjetas adyacentes que no se calienten tanto, el aire circundante si lo hay...). Tomando valores representativos para la emisividad ($\epsilon=1$) y para la convección ($h=2 \text{ W}/(\text{m}^2 \cdot \text{K})$ para el aire encerrado), y despreciando ahora la conducción en los anclajes, se obtendría:

```

> eqBEconv:=Q=2*A*h*(T-Tinf);eqBERad:=Q=2*A*epsilon*sigma*(T^4-Tinf^4);
dat_:=h=2*W/(m^2*K),epsilon=1,Tinf=(50+273)*K;Tconv:=subs(eqA_,dat_,dat,Tinf+Q/(2*A*h));
'Tconv_:=TKC(%);Trad_:=subs(eqA_,dat_,dat,SI0,(Tinf^4+Q/(2*A*epsilon*sigma))^(1/4))*K_;
'Trad_:=TKC(%);

```

$$\begin{aligned}
 eqBEconv &:= Q = 2 A h (T - T_{inf}) \\
 eqBERad &:= Q = 2 A \epsilon \sigma (T^4 - T_{inf}^4) \\
 dat_ &:= h = \frac{2 \text{ W}}{\text{m}^2 \text{ K}}, \epsilon = 1, T_{inf} = 323 \text{ K} \\
 Tconv_ &:= 406.33 \text{ K} \\
 Tconv_ &= 133.18 \text{ °C} \\
 Trad_ &:= 342.89 \text{ K} \\
 Trad_ &= 69.74 \text{ °C}
 \end{aligned} \tag{1}$$

i.e. la conducción no sería el modo dominante; simplemente por radiación ya se ve que la temperatura máxima sería unos 20 °C superior a la del ambiente (o 37 °C si $\epsilon=0.5$). Y la suma de convección y radiación todavía la disminuiría un poco más. De todas formas, cuando la tarjeta está junto a otras tarjetas que también disipan, la conducción por los extremos cobra importancia, y por eso se añade (durante la fabricación) una película de cobre por el lado opuesto al de montaje de los componentes.

c) Determinar el espesor que debería tener un recubrimiento de cobre por una cara de las de $10 \cdot 15 \text{ cm}^2$ para que la temperatura máxima no superase en más de 40 °C la de los zócalos, en el caso anterior.

Volviendo al estudio de la conducción exclusiva, podemos ahora empezar despreciando la conducción longitudinal por la resina, frente a la del cobre.

```

> eqphi:=phi=Q/(Lw*Lb*Lc);eqphi_:=subs(dat, %);eqT0:=T[0]=subs(x=0,eqL,T[1]=Tb,k=kc,rhs(eq11_8_1));
eqT0:=DTm=subs(eqphi,rhs(%))-Tb;eqLc:=Lc=solve(% ,Lc);subs(kc=k,Cdat,dat, %)*1e6;

```

$$\begin{aligned}
 eqphi &:= \phi = \frac{Q}{L_w L_b L_c} \\
 eqphi_ &:= \phi = \frac{333.33 \text{ kg}}{\text{s}^3 \text{ Lc}} \\
 eqT0 &:= T_0 = T_b + \frac{1}{8} \frac{\phi L_w^2}{k_c} \\
 eqT0 &:= DTm = \frac{1}{8} \frac{Q L_w}{L_b L_c k_c} \\
 eqLc &:= L_c = \frac{1}{8} \frac{Q L_w}{DTm L_b k_c}
 \end{aligned}$$

$$1.00 \cdot 10^6 L_c = 26.51 m_$$

i.e. basta una capa de 27 micrómetros (<0,03 mm) de cobre para que la tarjeta disipe adecuadamente.

Si se considera la conducción combinada del cobre y la FR-4, vemos que el resultado apenas cambia.

```
> eqT0_combi:=subs(kc=keff,Lc=Lc+Lt,eqT0);keff:=(kc*Lc+ke*Lt)/(Lc+Lt);
eqLc_:=Lc=solve(eqT0_combi,Lc);eq_Lc__:=subs(dat,kc=k,Cdat,dat,%);%*1e6;
```

$$\begin{aligned} eqT0_combi &:= DTm = \frac{1}{8} \frac{QLw}{Lb(Lc+Lt)keff} \\ keff &:= \frac{Lc kc + Lt ke}{Lc + Lt} \\ eqLc_ &:= Lc = -\frac{1}{8} \frac{8 DTm Lb Lt ke - Lw Q}{DTm Lb kc} \\ eq_Lc_ &:= Lc = 0.00 m_ \\ 1.00 \cdot 10^6 Lc &= 25.87 m_ \end{aligned} \quad (2)$$

CONCLUSIÓN. La conducción térmica a través de la resina es siempre despreciable; la radiación y la convección asegurarán que no suba la temperatura muchísimo, pero en la mayoría de los casos es necesario usar PCB con un baño de cobre (o varias láminas de cobre intermedias, o disponer un disipador térmico especial sobre los chips más potentes, como se hace en la CPU de un PC) para que no sea tan grande la temperatura máxima.

Para una simulación numérica del proceso transitorio puede usarse un método de diferencias finitas como el que se muestra en ["HT_1D.m" para Matlab.](#)

>