

# Práctica 1: Validación de análisis estructurales de modelos de elementos finitos

Mataix Caballero, Diego

---

## Abstract

Este estudio consiste en la resolución de problemas estructurales sencillos de forma analítica, así como estudiando los casos a través de la creación de modelos FEM mediante el programa MSC Patran y analizándolos mediante el programa MSC Nastran. El objetivo consiste en comparar los resultados teóricos con los obtenidos por los programas de elementos finitos.

**Palabras clave:** FEM; Estructuras; Validación de análisis; MSC Nastran; MSC Patran

---

# Índice

<b>1. Introducción</b>	<b>4</b>
<b>2. Metodología</b>	<b>5</b>
2.1. Modos propios . . . . .	5
2.1.1. Solución analítica . . . . .	5
2.1.2. Solución del modelo FEM . . . . .	7
2.2. Pandeo . . . . .	7
2.2.1. Solución analítica . . . . .	7
2.2.2. Solución del modelo FEM . . . . .	8
<b>3. Resultados</b>	<b>9</b>
3.1. Modos propios . . . . .	9
3.1.1. Solución analítica . . . . .	9
3.1.2. Solución del modelo FEM . . . . .	9
3.1.3. Comparativa entre resultados . . . . .	10
3.2. Pandeo . . . . .	11
3.2.1. Solución analítica . . . . .	11
3.2.2. Solución del modelo FEM . . . . .	11
3.2.3. Comparativa entre resultados . . . . .	12
<b>4. Conclusiones</b>	<b>13</b>

# Índice de Figuras

1. Representación esquemática de la sección en L de la viga estudiada en el primer caso. Se indican también las propiedades del material. . . . .	4
2. Representación esquemática del tronco de cono vertical de pared delgada estudiada en el segundo caso. Se indican también las propiedades del material, así como el eje en el que se aplica la carga de compresión. . . . .	5
3. Representación esquemática de la viga estudiada en el primer caso y su equivalencia con un sistema de un grado de libertad (SDOF). . . . .	6
4. Modelo de elementos finitos creado con MSC Patran para una viga empotrada de sección en L, con una masa puntual en el otro extremo. . . . .	7
5. Modelo de elementos finitos creado con MSC Patran de un tronco de cono vertical de pared delgada, al que se le aplica una carga de compresión. En morado se muestran los elementos RBE2. . . . .	8
6. Gráfica producida con MSC Patran que muestra en valor de la magnitud de los autovectores traslacionales contra las coordenadas a lo largo de la longitud de la viga. Primer modo. . . . .	10
7. Gráfica producida con MSC Patran que muestra en valor de la magnitud de los autovectores traslacionales contra las coordenadas a lo largo de la longitud de la viga. Segundo modo. . . . .	10
8. Representación producida con MSC Patran de la deformación del cono truncado de pared delgada. Para el caso de los elementos RBE2 con 6 gdl dependientes. . . . .	12

9. Representación producida con MSC Patran de la deformación del cono truncado de pared delgada.  
Para el caso de los elementos RBE2 con 3 gdl dependientes. . . . . 12

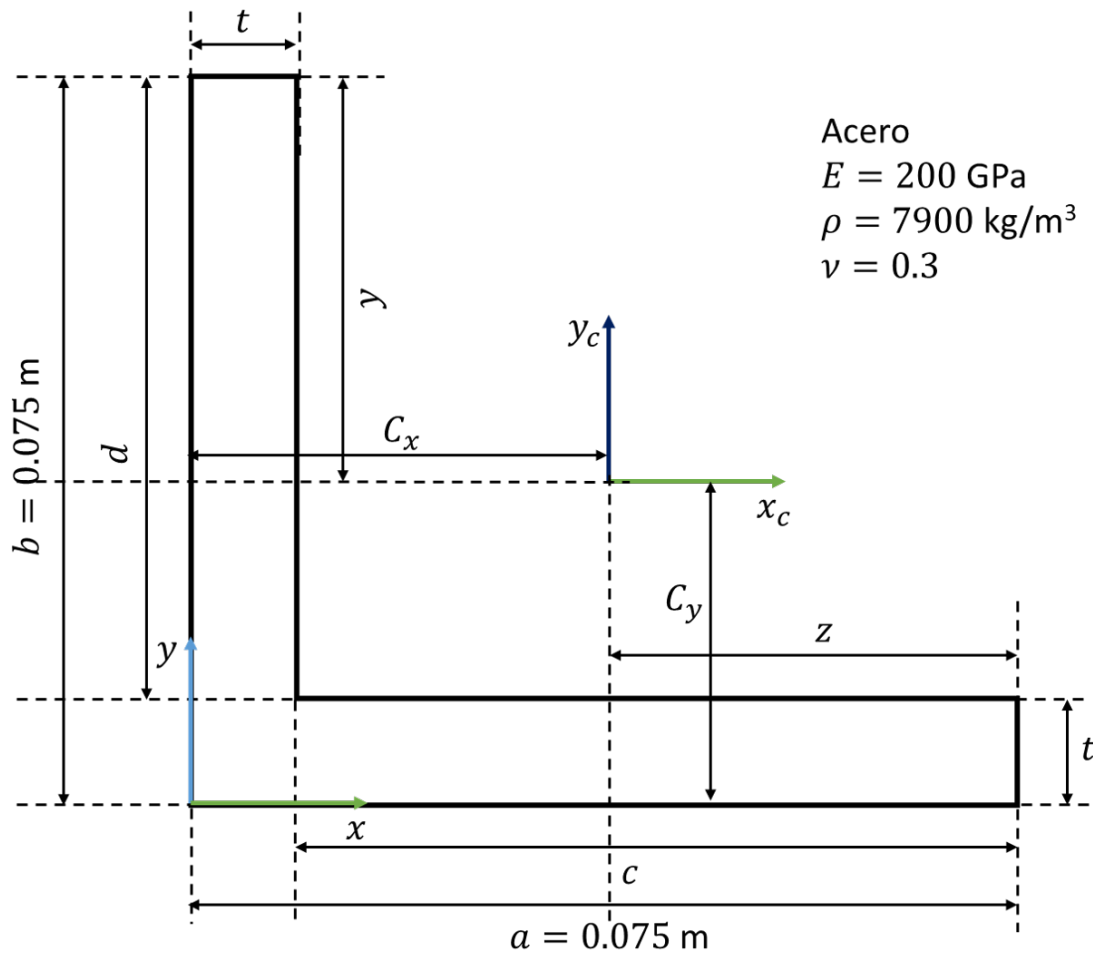
## Índice de Tablas

1. Tabla que recoge los resultados obtenidos para el cálculo de las dos primeras frecuencias laterales de una viga empotrada de sección en L. . . . . 9
2. Tabla de resultados para el caso de análisis de modos propios. Se comparan los resultados obtenidos a través de la resolución analítica y el modelo FEM. . . . . 11
3. Tabla comparativa de resultados para el caso de análisis de pandeo obtenidos de manera analítica los casos de la  $\gamma$  calculada y valor unidad. . . . . 11
4. Tabla de resultados para el caso de análisis de pandeo. Se comparan los resultados obtenidos para los casos en los que se permiten 3 o 6 grados de libertad para los elementos RBE2. . . . . 11
5. Tabla de resultados para el caso de análisis de pandeo. Se comparan los resultados obtenidos a través de la resolución analítica y el modelo FEM. . . . . 13

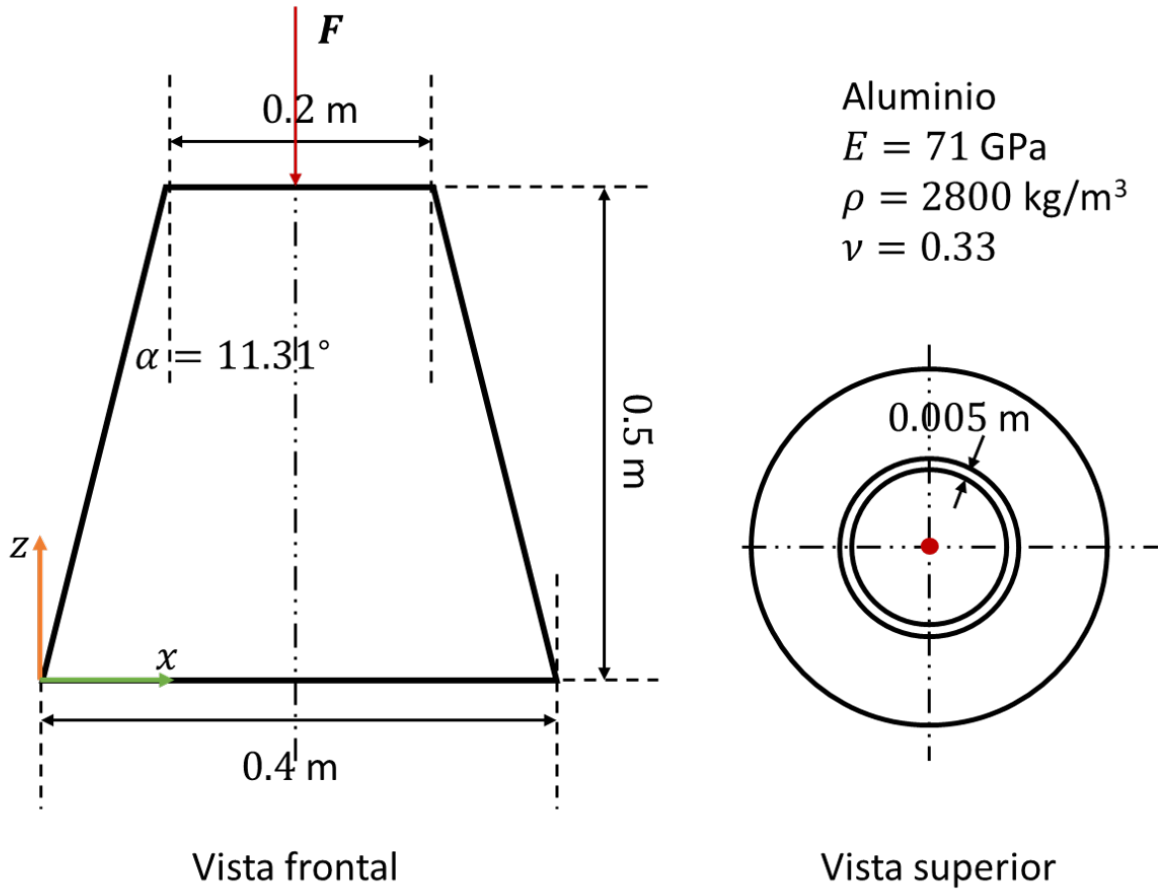
# 1. Introducción

Este estudio consiste en la resolución de problemas estructurales sencillos de forma analítica, así como estudiando los casos a través de la creación de modelos FEM mediante el programa MSC Patran y analizándolos mediante el programa MSC Nastran. El objetivo consiste en comparar los resultados teóricos con los obtenidos por los programas de elementos finitos.

Se estudian dos casos concretos. En el primero se considera una viga de acero de sección en L, empotrada en un extremo mientras que en el otro extremo está unida una masa puntual de 50 kg (Figura 1). En este caso se pide determinar las 2 primeras **frecuencias laterales** del sistema. En el segundo caso se estudia la **carga crítica de pandeo** a compresión axial de un tronco de cono vertical de pared delgada hecho de aluminio (Figura 2). La carga de compresión se aplica en dirección vertical y se considera que el desplazamiento lateral de la base y la sección superior está impedido.



**Figura 1:** Representación esquemática de la sección en L de la viga estudiada en el primer caso. Se indican también las propiedades del material.



**Figura 2:** Representación esquemática del tronco de cono vertical de pared delgada estudiada en el segundo caso. Se indican también las propiedades del material, así como el eje en el que se aplica la carga de compresión.

Para ambos casos se obtienen en primer lugar los resultados analíticos, empleando las teorías que se proporcionan en [1]. Posteriormente, se crea el modelo FEM y se realizan los análisis correspondientes. Finalmente se plantea una comparativa entre los resultados obtenidos con ambos métodos.

## 2. Metodología

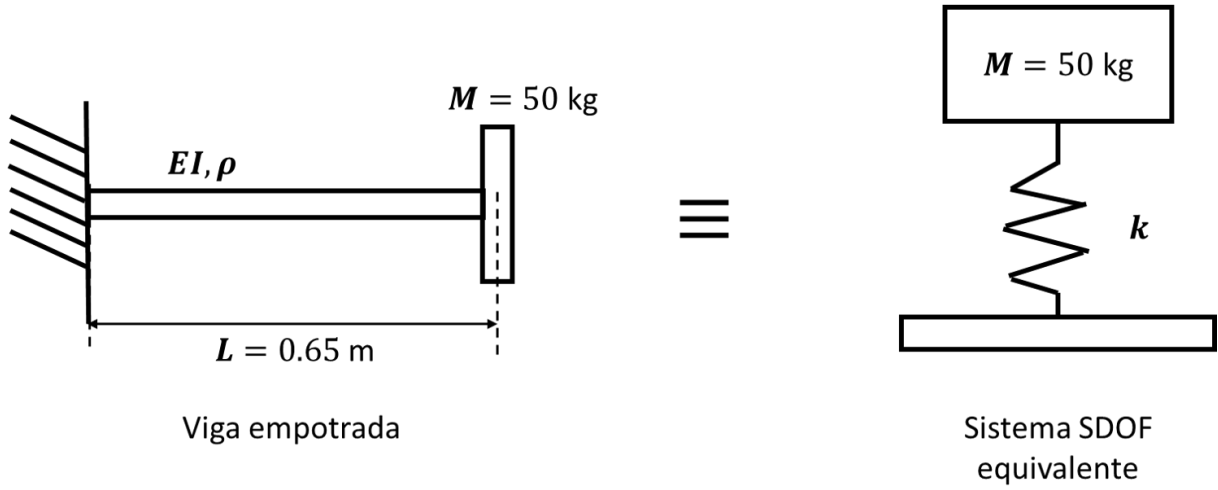
En esta sección se pretende dar a conocer la metodología implementada para los dos casos estudiados, tanto para la obtención de resolución analítica como haciendo uso de los programas de elementos finitos.

### 2.1. Modos propios

Se estudia el primer caso indicado en la Sección 1 y representado en la Figura 1 para el análisis de modos propios.

#### 2.1.1. Solución analítica

Para determinar de manera analítica las dos primeras frecuencias laterales del sistema, se considera que la viga empotrada es equivalente a un sistema de un grado libertad, donde la viga está representada por la rigidez del muelle, y la masa puntual en el extremo opuesto por la masa unida a ese muelle (Figura 3).



**Figura 3:** Representación esquemática de la viga estudiada en el primer caso y su equivalencia con un sistema de un grado de libertad (SDOF).

De este modo es posible determinar las frecuencias naturales teniendo en cuenta el sistema que se muestra en la Figura 3. Por lo tanto, es necesario calcular el momento de inercia de la sección de la viga que se muestra en la Figura 1. Para ello se obtienen primeramente las posiciones de los centroides  $C_x$  y  $C_y$  de la sección. Para ello se utilizan las expresiones:

$$C_x = \frac{t(2c + b) + c^2}{2(c + b)}, \quad (1)$$

$$C_y = \frac{t(2d + a) + d^2}{2(d + a)}, \quad (2)$$

donde  $a, b, c, d$  y  $t$  son las dimensiones de la sección en L que se muestran en la Figura 1. Para una sección de este tipo se calcula el momento de inercia alrededor de los ejes  $x$  e  $y$  con:

$$I_x = \frac{1}{3} [ty^3 + a(b - y)^3 - (a - t)(b - y - t)^3], \quad (3)$$

$$I_y = \frac{1}{3} [tz^3 + b(a - z)^3 - (b - t)(a - z - t)^3], \quad (4)$$

donde  $I_x$  es el momento de inercia alrededor del eje  $x$  e  $I_y$  es el momento de inercia alrededor del eje  $y$ .

Al tratarse de una sección en L los modos no se encuentran en el eje  $x$  ni  $y$  sino que aparecen en diagonal, por lo que es necesario determinar cuál sería su valor si se rotase la sección 45 grados de los ejes ortogonales. Esto permite conocer el valor de las dos primeras frecuencias laterales, siendo la primera la que se da al emplear en momento de área y mínimo y la segunda al emplear el máximo. Por lo tanto, para conocer el valor del momento de área en estas condiciones se procede a hacer un cambio de ejes:

$$I_u = \frac{I_x + I_y}{2} + \frac{I_x - I_y}{2} \cos 2\varphi - I_{xy} \sin 2\varphi, \quad (5)$$

$$I_v = \frac{I_x + I_y}{2} - \frac{I_x - I_y}{2} \cos 2\varphi + I_{xy} \sin 2\varphi, \quad (6)$$

donde  $I_u$  e  $I_v$  son los momentos de inercia en los nuevos ejes.

Al tratarse de una viga empotrada en un extremo, estas condiciones de contorno resultan en que la rigidez de la viga [1] venga dada por:

$$k = \frac{3EI}{L^3}, \quad (7)$$

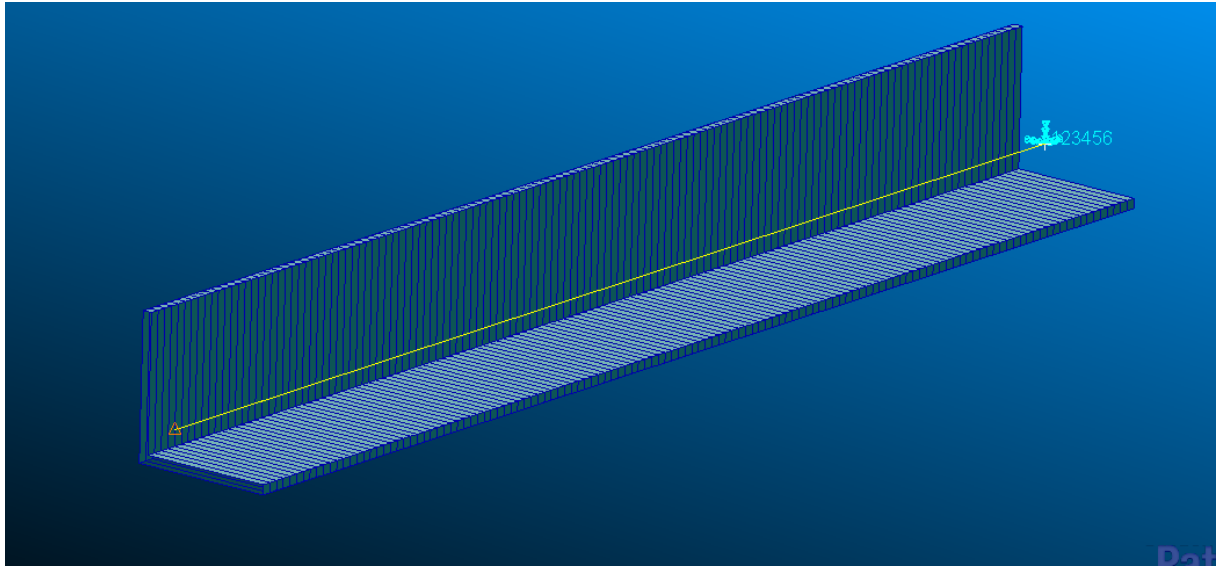
donde  $E$  es el módulo de Young del material,  $I$  es el momento de inercia,  $m$  es la masa puntual y  $L$  es la longitud de la viga. Esta expresión es válida solo para los modos laterales, y se trata de una aproximación, ya que se está ignorando el factor debido a la cortadura que si que se tiene en cuenta en programas como MSC Nastran. Una vez conocida la rigidez es posible determinar las frecuencias laterales a través de la expresión:

$$f_n = \frac{1}{2\pi} \left( \frac{3EI}{mL^3} \right)^{0.5}. \quad (8)$$

En la Ecuación 8 se empleará el valor del momento de inercia mínimo para calcular la primera frecuencia lateral, y el máximo para determinar la segunda frecuencia lateral del sistema.

### 2.1.2. Solución del modelo FEM

Para la implementación del modelo en el programa MSC Patran se comienza con la creación de la geometría. En este caso se crean únicamente dos puntos, que representan el comienzo y el final de la viga. Posteriormente, se crean las propiedades del material y del elemento viga unidimensional, al que se le especifica la sección en L que se requiere para este problema. Para el mallado se crean elementos unidimensionales tipo *Bar2*. Una vez pasados el proceso de verificación de la geometría y del mallado, se implementan las restricciones correspondientes a las condiciones de contorno existentes. Se limitan los 6 grados de libertad en un extremo, y en el opuesto a este se aplica una masa puntual de 50 kg. El resultado final del modelo en MSC Patran puede verse en la Figura 4.



**Figura 4:** Modelo de elementos finitos creado con MSC Patran para una viga empotrada de sección en L, con una masa puntual en el otro extremo.

## 2.2. Pandeo

Se estudia el segundo caso indicado en la Sección 1 y representado en la Figura 2 para el análisis de pandeo.

### 2.2.1. Solución analítica

Para la resolución analítica de este problema, basta con aplicar las ecuaciones de carga crítica de pandeo que se indican en [2]. Para el caso de un cono isotrópico de pared delgada, la carga crítica de pandeo,  $P_{cr}$  viene dada por:

$$P_{cr} = \gamma \frac{2\pi Et^2 (\cos \alpha)^2}{\sqrt{3(1 - \nu^2)}}, \quad (9)$$

donde  $\gamma$  es el *knock down factor*,  $t$  es el espesor de la pared,  $\alpha$  es el ángulo del cono y  $v$  es el ratio de Poisson del material. Para determinar el *knock down factor* se pueden usar las siguientes expresiones:

$$\gamma = \frac{0.83}{\sqrt{1 + 0.01 \frac{\rho_1}{t}}} \quad \text{para } \frac{\rho_1}{t} \leq 212, \quad \gamma = \frac{0.70}{\sqrt{0.1 + 0.01 \frac{\rho_1}{t}}} \quad \text{para } \frac{\rho_1}{t} > 212, \quad (10)$$

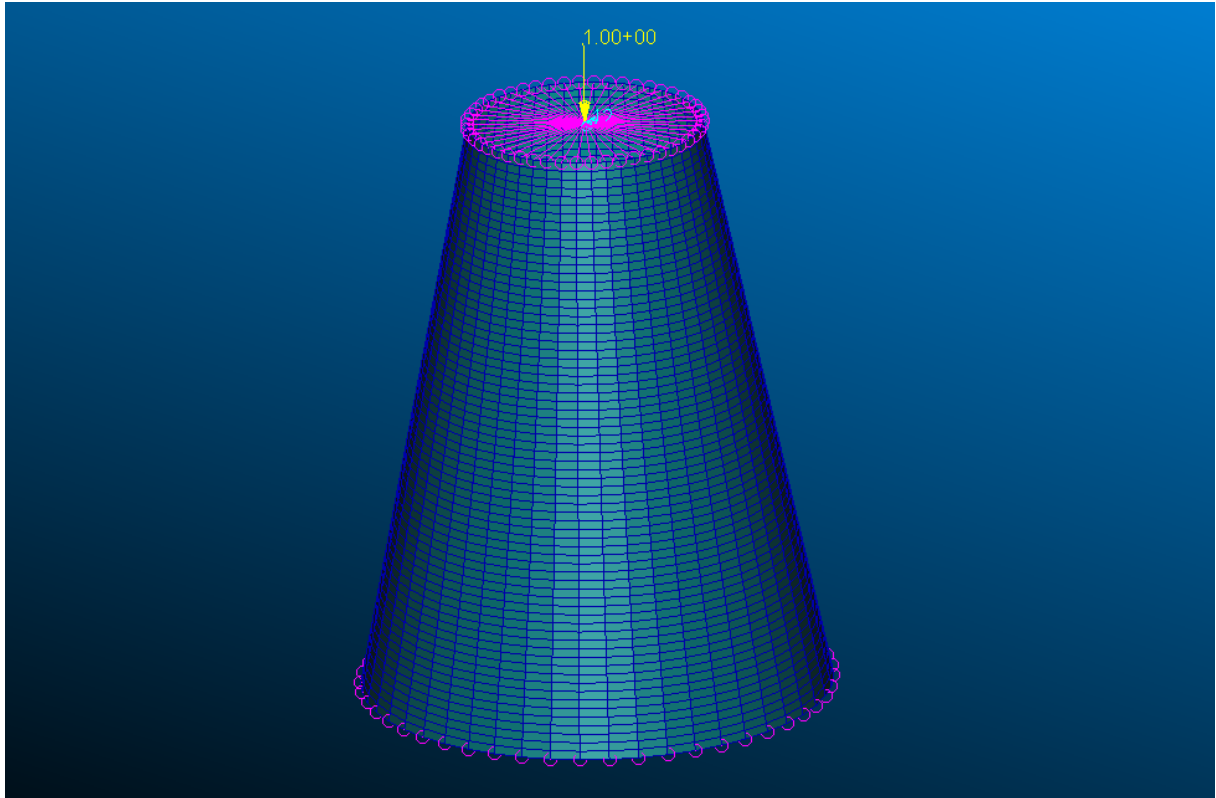
donde  $\rho_1$  viene dado por:

$$\rho_1 = \frac{R_1}{\cos \alpha}, \quad (11)$$

donde  $R_1$  es el radio menor del cono truncado. Cabe destacar, que para comparar los resultados con los obtenidos con el modelo FEM, es necesario considerar una  $\gamma$  de valor unidad.

### 2.2.2. Solución del modelo FEM

Para la implementación del modelo FEM, se comienza de nuevo definiendo la geometría. En este caso está formada por dos puntos que designan los dos extremos del cono, y se crean dos círculos con esos puntos como centro que forman los radios de la base y la parte superior del cono truncado. Posteriormente se crean las propiedades del material y de los elementos bidimensionales tipo *shell*. Para el mallado se crean primero las semillas de malla, que se crean de manera que haya el mismo número de nodos en la parte superior e inferior del cono, para evitar discontinuidades. Se realizan las verificaciones oportunas y se eliminan los nodos duplicados y se crea la malla con los elementos bidimensionales. Una vez realizado el mallado, se crean los elementos RBE2 donde se aplicará la fuerza axial y las condiciones de contorno en las bases inferior y superior. Para ellos se utiliza la herramienta *RBE2/RBE3 Spyder* y se consideran dos casos: uno en el que los elementos RBE2 tienen 6 gdl (todos) y otro en el que solo tienen los 3gdl de desplazamiento. Finalmente, se aplica la fuerza axial de orden unidad en la dirección  $\langle 0 \ 0 \ -1 \rangle$ . En la Figura 5 se puede ver el modelo implementado en MSC Patran.



**Figura 5:** Modelo de elementos finitos creado con MSC Patran de un tronco de cono vertical de pared delgada, al que se le aplica una carga de compresión. En morado se muestran los elementos RBE2.



### 3. Resultados

En esta sección se presentan los resultados obtenidos para los casos de análisis de modos propios y análisis de pandeo. Además, se compara la resolución analítica del problema con los resultados ofrecidos por el modelo FEM.

#### 3.1. Modos propios

Para el análisis de modos propios se desea determinar las primeras dos frecuencias naturales de una viga empotrada, siguiendo la metodología descrita en la Sección 2.1.

##### 3.1.1. Solución analítica

Siguiendo la metodología descrita en la Sección 2.1.1, se obtiene que las dos primeras frecuencias laterales valen 13.35 Hz y 26.53 Hz respectivamente.

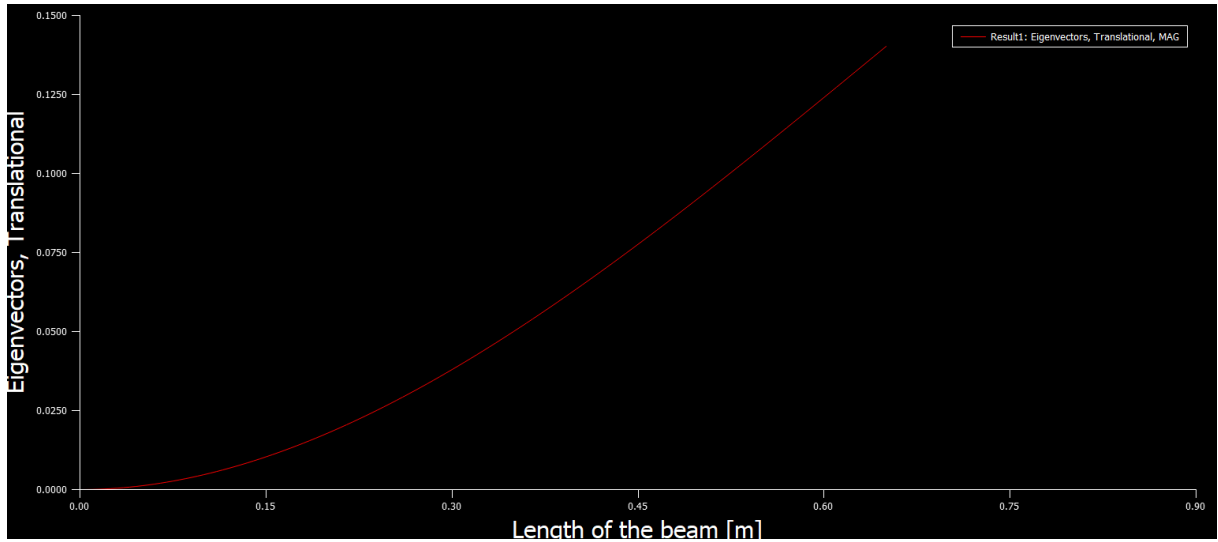
En la Tabla 1 se recogen los resultados obtenidos para este caso.

**Tabla 1:** Tabla que recoge los resultados obtenidos para el cálculo de las dos primeras frecuencias laterales de una viga empotrada de sección en L.

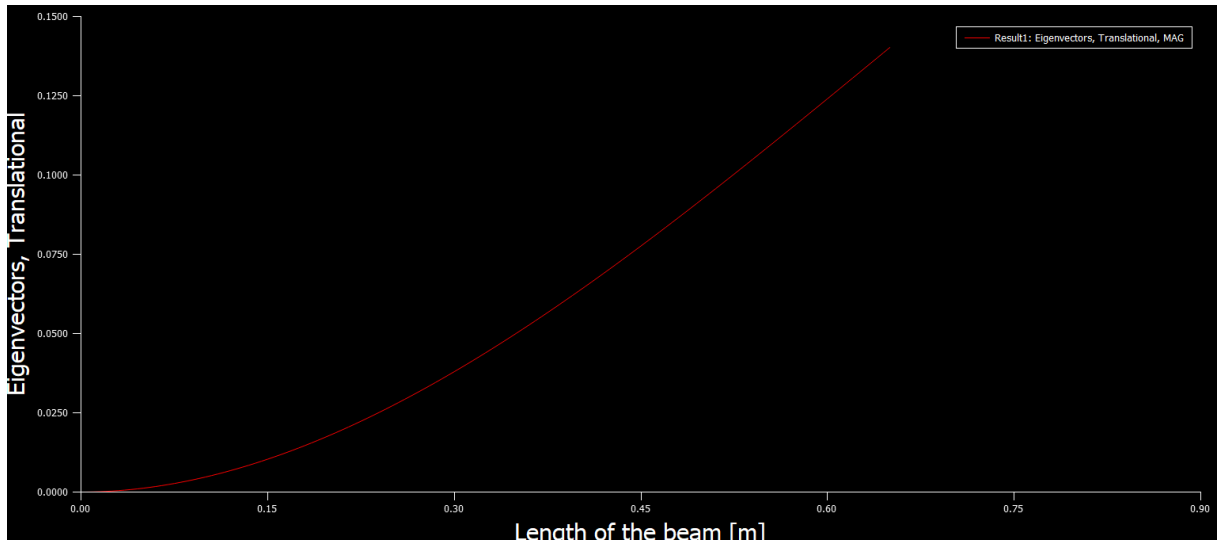
	Centroides	Unidades
$C_x$	0.02060	[m]
$C_y$	0.02060	[m]
Momentos de Inercia		
$I_x$	$3.983 \cdot 10^{-7}$	[m <sup>4</sup> ]
$I_y$	$3.983 \cdot 10^{-7}$	[m <sup>4</sup> ]
$I_u$	$1.610 \cdot 10^{-7}$	[m <sup>4</sup> ]
$I_v$	$6.360 \cdot 10^{-7}$	[m <sup>4</sup> ]
Frecuencias Laterales		
$f_1$	13.35	[Hz]
$f_2$	26.53	[Hz]

##### 3.1.2. Solución del modelo FEM

A través del modelo FEM se llega a una solución similar a la analítica, siendo las dos primeras frecuencias laterales calculadas 13.22 Hz y 26.30 Hz respectivamente. Gracias al uso del programa MSC Nastran para analizar y el programa MSC Patran para visualizar los resultados, es posible visualizarlos como en la Figura 6 y 7, donde se muestran los primeros 2 modos laterales de la viga.



**Figura 6:** Gráfica producida con MSC Patran que muestra en valor de la magnitud de los autovectores traslacionales contra las coordenadas a lo largo de la longitud de la viga. Primer modo.



**Figura 7:** Gráfica producida con MSC Patran que muestra en valor de la magnitud de los autovectores traslacionales contra las coordenadas a lo largo de la longitud de la viga. Segundo modo.

### 3.1.3. Comparativa entre resultados

En la Tabla 2 se muestran las diferencias entre la resolución analítica y el modelo de elementos finitos. Se puede observar como el error, la diferencia entre los resultados obtenidos con el modelo de elementos finitos y la solución analítica, es inferior al 1 %. Aunque se trate de un modelo de un grado de libertad, por lo que se esperaba que el resultado fuese aún más similar, cabe destacar que el método analítico empleado ignora el factor de la cortadura en el cálculo de la rigidez, así como la masa de la viga en sí, que se considera despreciable. Por lo tanto, la diferencia entre los datos obtenidos con los dos métodos se debe a estos factores.

**Tabla 2:** Tabla de resultados para el caso de análisis de modos propios. Se comparan los resultados obtenidos a través de la resolución analítica y el modelo FEM.

Modo	Frecuencia lateral [Hz]		Error absoluto [%]
	Resolución Analítica	FEM	
Primero	13.35	13.22	0.9738
Segundo	26.53	26.30	0.8669

## 3.2. Pandeo

Para el análisis de pandeo se desea determinar la carga crítica de pandeo de un cono truncado de pared delgada sometido a una carga axial, siguiendo la metodología descrita en la Sección 2.2.

### 3.2.1. Solución analítica

La solución analítica del sistema proporciona los resultados para la carga crítica de pandeo que se puede ver en la Tabla 3, donde se muestra el resultado obtenido para los valores de la  $\gamma$  calculada y de valor unidad, siendo este último el valor que emplea el *software* de elementos finitos. Como se puede observar, el efecto de este factor es considerable.

**Tabla 3:** Tabla comparativa de resultados para el caso de análisis de pandeo obtenidos de manera analítica los casos de la  $\gamma$  calculada y valor unidad.

$\gamma$	Carga crítica de pandeo (resolución analítica) [kN]
0.4760	31.22
1	59.29

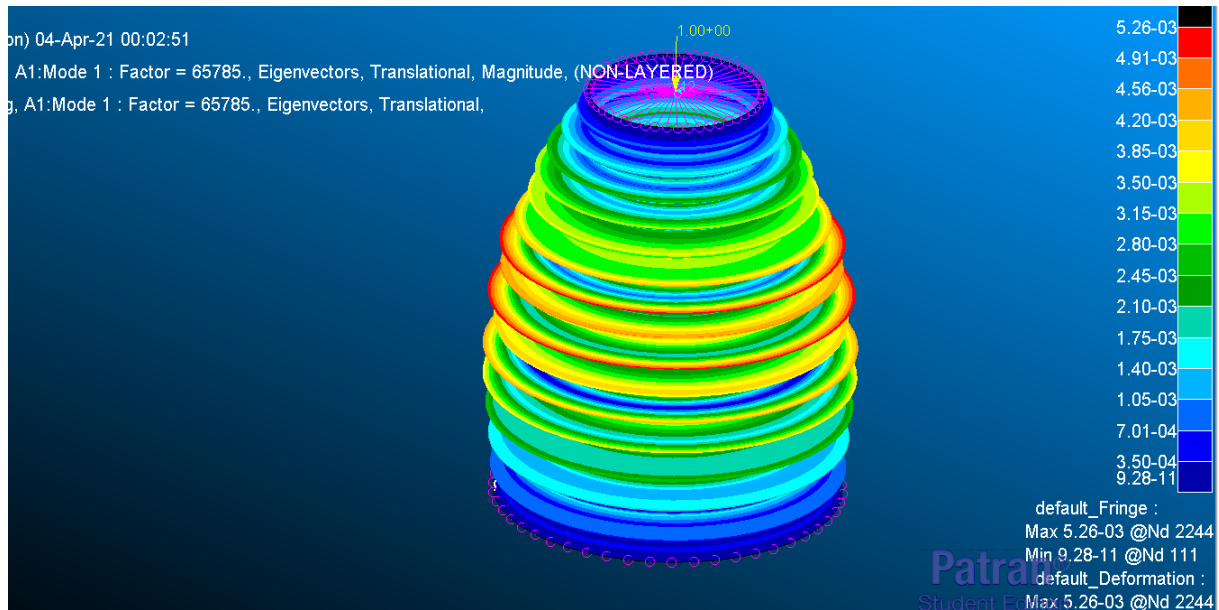
### 3.2.2. Solución del modelo FEM

El modelo de elementos finitos se ha implementado para los casos en los que los elementos RBE2 tienen 6 gdl o 3 gdl, como se comenta en la Sección 2.2.2. En la Tabla 4 se muestra la carga crítica de pandeo obtenida para ambos casos. Cabe destacar que el fenómeno de pandeo que se presenta en este sistema corresponde al caso de pandeo local.

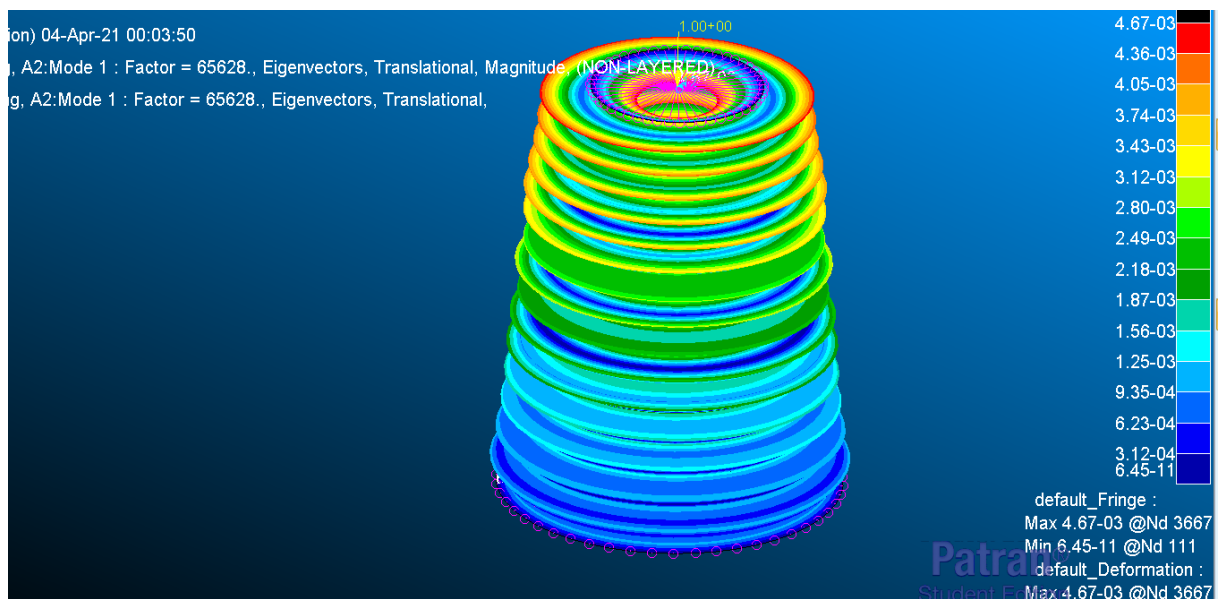
**Tabla 4:** Tabla de resultados para el caso de análisis de pandeo. Se comparan los resultados obtenidos para los casos en los que se permiten 3 o 6 grados de libertad para los elementos RBE2.

Grados de libertad de los elementos RBE2	Carga crítica de pandeo (modelo FEM) [kN]
1,2,3	65.63
1,2,3,4,5,6	65.79

Las soluciones para ambos casos, aunque similares, proporcionan resultados distintos en la distribución de la carga de pandeo en la estructura. Esto se puede ver fácilmente al visualizar los resultados con MSC Patran, como se muestra en las Figuras 8 y 9, donde se aprecia claramente la deformación característica del pandeo local.



**Figura 8:** Representación producida con MSC Patran de la deformación del cono truncado de pared delgada. Para el caso de los elementos RBE2 con 6 gdl dependientes.



**Figura 9:** Representación producida con MSC Patran de la deformación del cono truncado de pared delgada. Para el caso de los elementos RBE2 con 3 gdl dependientes.

Para el caso de 3 gdl dependientes para los elementos RBE2 se observa como la máxima deformación ocurre en la parte superior del cono, cerca de donde aplica la carga axial. En cambio en el caso de 6 gdl para estos mismos elementos, se observa como la deformación máxima ocurre hacia el centro de la estructura, presentando un mínimo en los extremos. Esto se debe a que al permitir los tres gdl de rotación en el extremo superior del cono, se presenta ahí una mayor concentración de carga.

### 3.2.3. Comparativa entre resultados

Finalmente, se comparan los resultados obtenidos con el método analítico y con el *software* de elementos finitos (Tabla 5). Se observa que para el caso de 3 gdl dependientes (los desplazamientos), el error entre las soluciones

es inferior al 0.1 %. Por lo tanto, se puede considerar que el modelo de elementos finitos ha sido validado.

**Tabla 5:** Tabla de resultados para el caso de análisis de pandeo. Se comparan los resultados obtenidos a través de la resolución analítica y el modelo FEM.

Carga crítica de pandeo [kN]		Error
Resolución	FEM	absoluto
Analítica		[ %]
65.59	65.63	0.06094

## 4. Conclusiones

Se ha cumplido el objetivo de validar los modelos de elementos finitos con las soluciones analíticas, tanto para el caso del análisis de modos propios como el de pandeo. El análisis de modos propios de la viga presenta una mayor diferencia con el resultado analítico, pero esta se debe a que en este no se considera la cortadura en la estimación de la rigidez de la viga y se ignora la masa de la viga en sí. En cambio, en el caso del análisis de pandeo los resultados son muy similares entre sí.

Aunque la solución analítica para problemas de este nivel de complejidad son más rápidas de obtener que creando un modelo de elementos finitos del problema, el modelo FEM nos proporciona una gran información adicional, así como la posibilidad de visualizar los resultados de varias formas, lo que es de gran ayuda.

En conclusión, el análisis estructural analítico de estos sistemas ha servido para validar el modelo de elementos finitos, que ha demostrado su utilidad y su validez a la hora de resolver los problemas.

## Referencias

- [1] J. J. Wijker, Spacecraft Structures, Springer Berlin Heidelberg, Berlin, Heidelberg, 2008. doi:10.1007/978-3-540-75553-1.  
URL <http://link.springer.com/10.1007/978-3-540-75553-1>
- [2] A. García Pérez, J. J. Fernández de Toro Espejel, MANUAL DE CÁLCULO ESTRUCTURAL, Tech. rep., Instituto Universitario de Microgravedad Ignacio da Riva, Madrid.