Simetrías y leyes de conservación en campos clásicos

Diego Padilla Casillas[1]   Asesor: Roberto Alejandro Santos Silva[2]
[1] Diego.padilla0382@alumnos.udg.mx   [2] roberto.santos@academicos.udg.mx   Modular I

Resumen

En este proyecto modular se revisan las simetrías en sistemas físicos clásicos y como estos se relacionan con las leyes de conservación a través del teorema de Nöether, y su papel en la formulación de teorías clásicas. Se estudian simetrías espaciales y temporales y su importacia en los campos clásicos, en particular el electromagnético. Tomando como punto de partida la formulación lagrangiana y las ecuaciones de movimiento (Euler-Lagrange) asociadas. Además las invariancias bajo transformaciones como las del grupo de Lorentz, son fundamentales fundamentales para el estudio de teorías la relatividad especial.

Introducción

Las simetrías son fundamentales para la formulación de las leyes físicas, en la actualidad es el paradigma fundamental con el que se trabaja en la física teórica. En particular, el teorema de Nöether (propuesto por Emmy Nöether en 1915), establece una conexión profunda entre las leyes de conservación y las simetrías continuas de una teoría. De acuerdo con este teorema, cada simetría de una acción física invariable está asociada con una cantidad conservada. Por ejemplo, la invariancia bajo traslaciones temporales está relacionada con la conservación de energía, mientras que la invariancia bajo traslaciones en el espacio está relacionada con la conservación del momento lineal.
En el contexto de los campos clásicos, las ecuaciones asociadas a la leyes de conservación nos dan otra manera de analizar y resolver los problemas, además de complementar las ecuaciones de movimiento. Por otra parte, el teorema de Nöether proporciona un marco matemático riguroso para derivar estas leyes de conservación a partir de las simetrías inherentes en las ecuaciones de movimiento y al lagrangiano. Esta relación entre simetría y leyes conservación es fundamental en la física moderna, proporcionando no sólo un medio para identificar cantidades conservadas, sino también una guía para formular nuevas teorías físicas

Metodología

.

Análisis de Simetrías

1. **Identificación de Simetrías**: Se examinan las lagrangianas de los sistemas considerados para identificar simetrías continuas y discretas, tales como traslaciones, rotaciones y transformaciones de gauge.
2. **Aplicación del Teorema de Noether**: Se utiliza el Teorema de Noether para asociar cada simetría identificada con una ley de conservación específica, estableciendo la correspondencia entre simetrías continuas y cantidades conservadas.

Carga de Noether $Q(t)$

¿Cómo se relaciona $Q(t)$ con Noether?
El teorema de Noether es un puente entre **simetrías** y **leyes de conservación**. Simplemente:

- Si un sistema físico no cambia su comportamiento bajo una transformación continua (como moverlo en el espacio o el tiempo), existe una cantidad conservada asociada a esa simetría.
- $Q(t)$ es precisamente esa **cantidad conservada**. Su valor constante en el tiempo refleja la invariancia del sistema.

¿Por qué $Q(t)$ es importante?

- Es una herramienta matemática que traduce simetrías abstractas en predicciones físicas concretas (e.g., conservación de energía, momento).
- En tu trabajo, $Q(t)$ surge de aplicar Noether a una simetría específica del sistema (como traslaciones o rotaciones).

Cálculo de Cantidades Conservadas

1. **Formulación de la Acción**: Se define la acción $\mathcal{S}[\phi]$ en términos de los campos ϕ relevantes para cada sistema, expresándola como la integral sobre el lagrangiano $\mathcal{L}$:

$$\mathcal{S}[\phi] = \int \mathcal{L}(\phi, \partial_\mu \phi)\, d^4x. \tag{1}$$

[1]

2. **Derivación de las Ecuaciones de Movimiento**: Se aplican las ecuaciones de Euler-Lagrange para obtener las ecuaciones de movimiento de los campos:

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi} - \partial_\mu \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \phi)} \right) = 0. \tag{2}$$

[2]

Resultados

Simetría temporal

Dado un lagrangiano que no depende del tiempo $L(q(t), \dot{q}(t))$. Al hacer una translación de tiempo, de t a un t':

$$t' = t - \epsilon, \tag{3}$$

la órbita clásica tendrá el mismo valor que la órbita transladada. Su carga de Noether será:

$$Q(t) = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} \dot{q}(t) - L(q, \dot{q}) \tag{4}$$

$$Q(t) = p\dot{q} - L = H = E \quad \Rightarrow \quad \text{se conserva la energía.} \tag{5}$$

Simetría translacional

Definimos un cambio pequeño en la translación con el parametro pequeño ϵ

$$x' = x + \epsilon, \tag{6}$$

Para la simetría traslacional en el espacio, el teorema de Noether nos da:

$$Q(t) = \frac{\partial L}{\partial \dot{x}} = p_x. \tag{7}$$

Esto confirma que el momento lineal se conserva debido a la invarianza del lagrangiano bajo traslaciones espaciales.

Centro de masa

Para esta cantidad será conveniente hacer uso de las transformaciones de Galileo, además del el lagrangiano de un sistema de partículas libres.

$$L(\dot{x}_n^i) = \sum_n \frac{m_n}{2} \dot{x}_n^i \dot{x}_n^i. \tag{8}$$

La carga de Noether será :

$$Q(t) = \sum_n m_n \left(-\dot{x}_n^i t + x_n^i \right) v^i \tag{9}$$

Implica:

- Movimiento uniforme del centro de masa:

$$x^i_{\text{CM}}(t) = x^i_{\text{CM},0} + v^i_{\text{CM}}\, t \tag{10}$$

- Conservación del momento total: $P^i = \sum_n m_n \dot{x}_n^i = \text{cte.}$

Este resultado clásico (válido en mecánica no relativista) es consistente con el teorema del centro de masa en formulaciones avanzadas como campos multivaluados [**?**].

Corriente Conservada en un Campo Escalar Complejo

El Lagrangiano del campo escalar complejo con masa es:

$$\mathcal{L} = \partial_\mu \phi^* \partial^\mu \phi - m^2 |\phi|^2, \tag{11}$$

por lo tanto, usando el teorema de Nöether, la corriente conservada es:

$$j^\mu = i(\phi^* \partial^\mu \phi - \phi \partial^\mu \phi^*). \tag{12}$$

Además, es conservada la corriente ya que cumple

$$\partial_\mu j^\mu = 0. \tag{13}$$

Conclusiones y discuciones

Como pudimos constatar en los lagrangianos de sistemas de mecánicos, pudimos corroborar las distintas cantidades conservadas dadas las simetrías clásicas como: temporal y espacial; dando como resultado la conservación de la energía y el momento.
En la teoría clásica de campos, podríamos considerar un campo escalar real con el lagrangiano de la forma

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}(\partial_\mu \phi)(\partial^\mu \phi) - \frac{1}{2} m^2 \phi^2. \tag{14}$$

Sin embargo, este lagrangiano no posee una simetría de fase interna $U(1)$ que permita la conservación de una carga asociada mediante el teorema de Nöether. Si deseamos introducir una cantidad conservada, necesitamos un campo escalar **complejo**, lo que nos lleva a la elección de la densidad Lagrangiana (i.e. el campo no se carga sino es complejo)

$$\mathcal{L} = \partial_\mu \phi^* \partial^\mu \phi - m^2 \phi^* \phi. \tag{15}$$

Tal como se menciona en [3], el uso de un campo escalar complejo permite la existencia de una simetría de fase global

$$\phi \to e^{i\alpha} \phi, \tag{16}$$

la cual genera una corriente conservada dada por:

$$j^\mu = i \left(\phi^* \partial^\mu \phi - \phi \partial^\mu \phi^* \right). \tag{17}$$

Esta corriente se obtiene aplicando el teorema de Nöether y satisface la ecuación de continuidad $\partial_\mu j^\mu = 0$. En contraste, el lagrangiano real no posee una cantidad conservada similar, lo que impide definir una carga bien definida asociada a la simetría interna de fase.
Además, al calcular las ecuaciones de movimiento del campo ϕ a partir del lagrangiano complejo, se recupera la ecuación de Klein-Gordon:

$$(\partial^\mu \partial_\mu - m^2)\phi = 0, \tag{18}$$

lo cual es consistente con la descripción de una partícula relativista sin espín en teoría de campos [3].

Referencias

[1] Hagen Kleinert. *Multivalued Fields in Condensed Matter, Electromagnetism, and Gravitation*. World Scientific, Singapore, 2008.

[2] Alexei A. Deriglazov. *Classical Mechanics: Hamiltonian and Lagrangian Formalism*. Springer, Berlin, Heidelberg, 1st edition edition, 2010.

[3] Michael E. Peskin and Daniel V. Schroeder. *An Introduction to Quantum Field Theory*. Perseus Books, 1995.