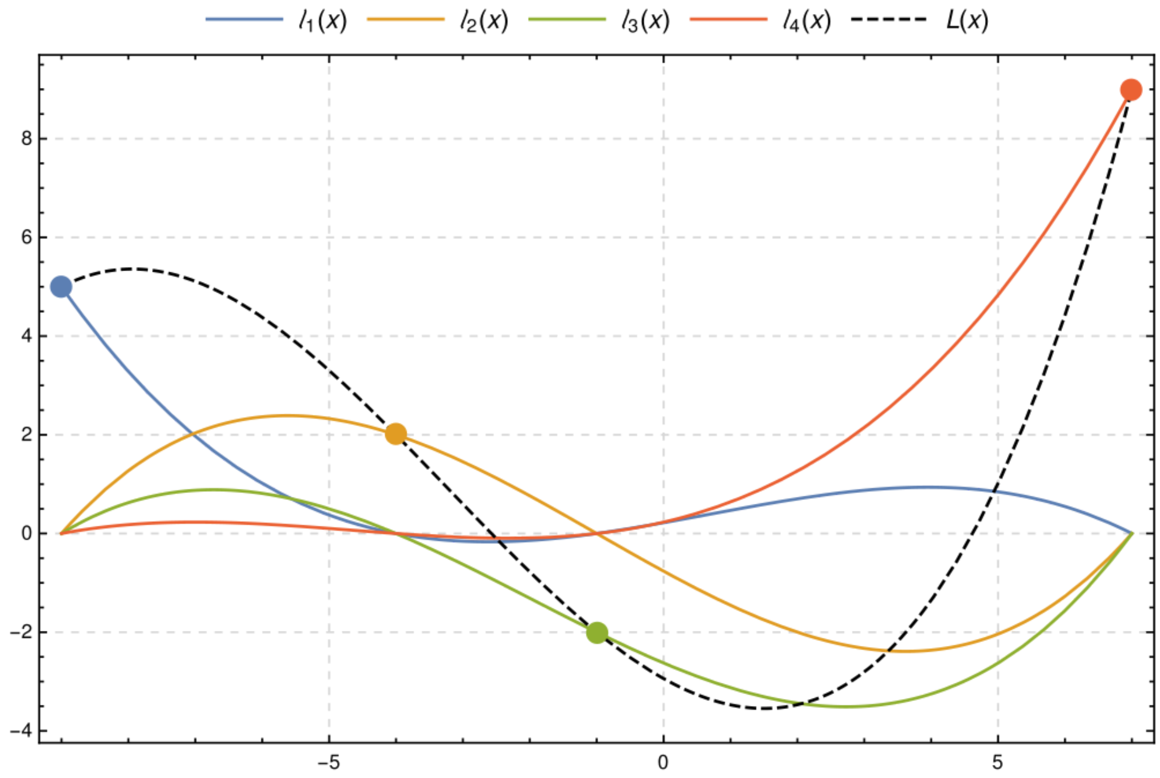
Algoritmos y complejidad



Ayudantía 3

Temario

Interpolación

- Matriz de Vandermonde.
- Método de Lagrange.
- Diferencias divididas de Newton. 👽
- Errores de interpolación.

Interpolación

- Sea $X = \{(x_1, y_1), (x_2, y_2), \ldots, (x_n, y_n)\}$ un conjunto de puntos.
- La **función** $y = P(x)$ interpola los puntos X si $P(x_i) = y_i$ para cada $i \in [1, n]$.

⚠️ Como $P(x)$ debe ser una función, los x_i deben ser distintos.

Teorema principal de interpolación polinomial

- Sea X un conjunto de puntos con distintas x. Entonces **existe uno y solo un polinomio** P_{n-1} de grado a lo más $n-1$ que satisface $P_{n-1}(x_i) = y_i$ para cada punto.
- Permite resolver un ejercicio con distintos métodos. Siempre encontraremos el mismo polinomio interpolador para un mismo conjunto de puntos. 💡

Matriz de Vandermonde

- La idea es plantear un **sistema de ecuaciones**, analizar si tiene sentido y resolverlo en caso de ser posible.
- Se busca el siguiente polinomio:

$$P_{n-1}(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots + c_{n-1} x^{n-1} = \sum_{i=0}^{n-1} a_i x^i$$

- Suponga tenemos el siguiente conjunto de puntos $\{(x_0, y_0), (x_1, y_1), (x_2, y_2)\}$.
- Podemos plantear lo siguiente:

$$a_0 + a_1 x_1 + a_2 x_1^2 = y_1$$

$$a_0 + a_1 x_2 + a_2 x_2^2 = y_2$$

$$a_0 + a_1 x_3 + a_2 x_3^2 = y_3$$

- Lo único que no conocemos de estas ecuaciones son los coeficientes a_0, a_1 y a_2.

- Esto lo podemos plantear matricialmente como:

$$\begin{pmatrix} 1 & x_1 & x_1^2 \\ 1 & x_2 & x_2^2 \\ 1 & x_3 & x_3^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix}$$

- Esto tendrá solución cuando el determinante de la matriz de los x_i sea distinto de 0. Por suerte este determinante es conocido y viene dado por:

$$\prod_{1 \leq i < j \leq n} (x_j - x_i)$$

- En este caso sería $(x_2 - x_1)(x_3 - x_1)(x_3 - x_2)$.

Interpolación de Lagrange

Notación

- Dado un conjunto de puntos X, definiremos el siguiente polinomio:

$$L_k(x) = \frac{(x - x_1) \cdots (x - x_{k-1}) \cdot (x - x_{k+1}) \cdots (x - x_n)}{(x_k - x_1) \cdots (x_k - x_{k-1}) \cdot (x_k - x_{k+1}) \cdots (x_k - x_n)}$$

💡 Notar que $L_k(x_k) = 1$, y $L_k(x_j) = 0$ para $k \neq j$.

Polinomio interpolador, pro y contras

- El **polinomio interpolador de Lagrange** viene dado por:

$$P_{n-1}(x) = \sum_{i=1}^{n} y_i \cdot L_i(x)$$

👍 Sencillo de calcular, intuitivo.

👎 Añadir un punto nuevo implica calcular todo desde cero.

👎 Calcular $P_{n-1}(x)$ tiene complejidad temporal $O(n^2)$

Diferencias divididas de Newton

Notación

- Sea $X = \{(x_1, f(x_1)), (x_2, f(x_2)), \ldots, (x_n, (f_n))\}$ un conjunto de puntos para una función f.
- Denotaremos por $f[x_1 x_2 \ldots x_n]$ al coeficiente del término x^{n-1} del único polinomio interpolador de los puntos en X.

Cómo calcular las diferencias divididas

- Es un proceso iterativo:

$$f[x_k] = f(x_k)$$

$$f[x_k \ x_{k+1}] = \frac{f[x_{k+1}] - f[x_k]}{x_{k+1} - x_k}$$

$$f[x_k \ x_{k+1} \ x_{k+2}] = \frac{f[x_{k+1} \ x_{k+2}] - f[x_k \ x_{k+1}]}{x_{k+2} - x_k}$$

$$f[x_k \ x_{k+1} \ x_{k+2} \ x_{k+3}] = \frac{f[x_{k+1} \ x_{k+2} \ x_{k+3}] - f[x_k \ x_{k+1} \ x_{k+2}]}{x_{k+3} - x_k}$$

Así sucesivamente.

Polinomio interpolador

- $$\begin{aligned} P_{n-1}(x) = {} & f[x_1] + \\ & f[x_1 x_2](x - x_1) + \\ & f[x_1 x_2 x_3](x - x_1)(x - x_2) + \\ & \vdots \\ & f[x_1 x_2 \ldots x_n](x - x_1) \ldots (x - x_{n-1}) \end{aligned}$$

👍 Permite agregar más puntos de interpolación aprovechando el trabajo previo.

Error de interpolación

- Sea $P_{n-1}(x)$ el polinomio que interpola los puntos

$$X = \{(x_1, f(x_1)), (x_2, f(x_2)), \ldots, (x_n, (f_n))\}$$

- El error de interpolación es:

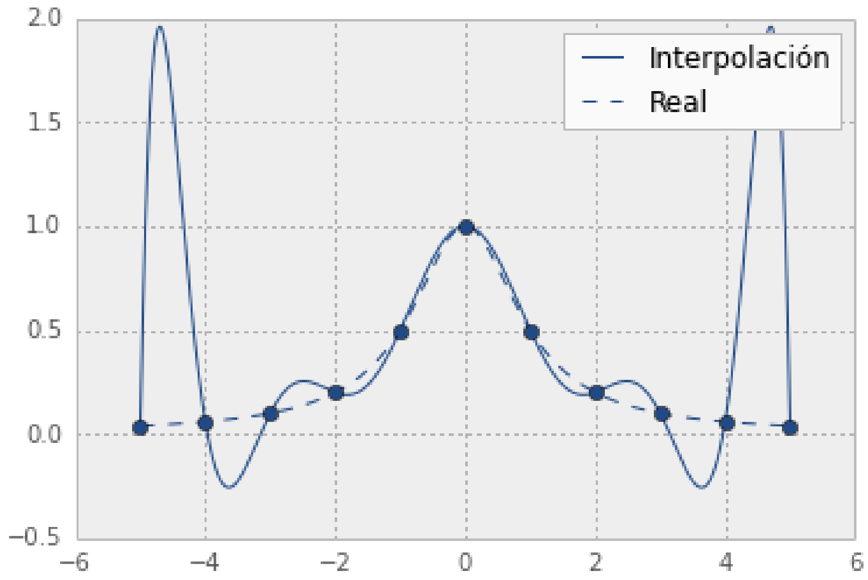
$$f(x) - P(x) = \frac{(x - x_1)(x - x_2)\cdots(x - x_n)}{n!} f^{(n)}(c)$$

⚠️ Esto es independiente del método de interpolación.

- c es un valor entre el mínimo y el máximo valor de x_i en X.
- La idea es tomar un c que maximice el error.
- Así obtendremos una cota superior para el error.

Fenomeno de Runge

- Al realizar una interpolación de grado alto sobre puntos equiespaciados se producen oscilaciones en los extremos del intervalo.



- Error de interpolación en los extremos es alto.

Interpolación de Chebyshev

- Suponga estamos interesados en interpolar una función en el intervalo $[-1, 1]$.
- La idea es elegir cuidadosamente n puntos de forma que estos **minimicen** el error de interpolación.
- Buscaremos **minimizar el valor máximo** de:

$$(x - x_1)(x - x_2) \cdots (x - x_n)$$

💡 Así, estamos minimizando el **peor caso** (min max) del error en la interpolación.

Teorema de Chebyshev

- La selección de valores $-1 \leq x_i, \ldots, x_n \leq 1$ que minimiza $max|(x - x_1) \cdots (x - x_n)|$ es:

$$x_i = cos\frac{(2i-1)\pi}{2n}, \text{para } i = 1, \ldots, n$$

- Este min-max está **acotado superiormente**:

$$|(x - x_1) \ldots (x - x_n)| \leq \frac{1}{2^{n-1}}$$

- Al interpolar estos puntos, el error se distribuirá uniformemente.

Cambio de intervalo

- Para un intervalo general $[a, b]$ los puntos de Chevyshev vienen dados por:

$$x_i = \frac{b+a}{2} + \frac{b-a}{2} \cdot cos \frac{(2i-1)\pi}{2n}, \text{para } i = 1, \ldots, n$$

- En este caso la cota superior será:

$$|(x-x_1)\ldots(x-x_n)| \leq \frac{\left(\frac{b-a}{2}\right)^n}{2^{n-1}}$$

Ejercicios

1. Interpole el siguiente conjunto de puntos mediante el Lagrange: $X = \{(1,1),(2,5),(3,4)\}$
2. Interpole el mismo conjunto de puntos mediante **diferencias divididas**.
3. Agregue los puntos $(4,6)$ y $(5,2)$ al conjunto X e interpole nuevamente.

Hint: La solución es:

```
def p(x):
    return (-5/2)* (x**2) + (23/2)*x - 8 + (4/3)*(x**3 - 6*(x**2) + 11*x - 6)
          - (17/24)*(x**4 - 10 * (x**3) + 35*(x**2) - 50*x + 24)
```

4. Se quiere interpolar, utilizando puntos de Chebyshev la función $f(x) = e^{2x}$ en el intervalo $[0, r]$, encuentre una cota para el número mínimo de puntos necesarios para que el error sea menor que ε en dicho intervalo