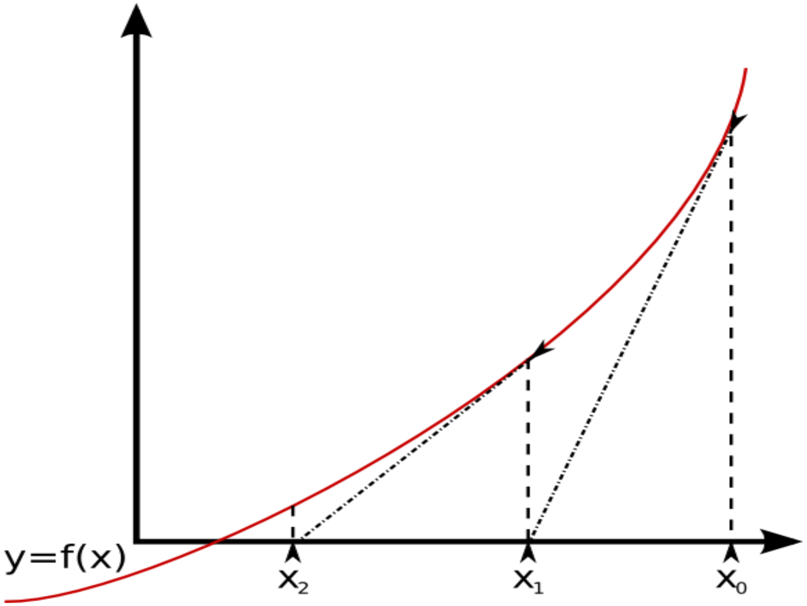
Algoritmos y complejidad



Ayudantía 2

Temario

Métodos de búsqueda de raíces

- Método de la bisección.
- Iteraciones de punto fijo.
- Método de Newton. 👽
- Método de la Secante y Regula Falsi.
- Backward y Forward error.
- Ejercicios.

Método de la bisección

- Trabaja con una función continua f y un intervalo $[a, b]$ en el cual f tiene un cero (se cumple teorema del Bolzano).
- La idea es tomar el punto medio c de $[a, b]$ y **seguir buscando en la mitad donde se encuentra el cero**.

> ¿Qué pasa si existen dos o más ceros en $[a, b]$? 🤔

Implementación en Python

```
def biseccion(f,a,b,epsilon):
    while( (b-a)/2 > epsilon):
        c = (a + b)/2
        if f(c) == 0: break
        if f(a)*f(c) < 0:
            b = c
        else:
                a = c
    return (a+b)/2
```

Análisis

- Luego de n iteraciones, tenemos un intervalo $[a_n, b_n]$ de longitud $\frac{b-a}{2^n}$.
- El error absoluto está **acotado superiormente**:

$$|x_i - r| < \frac{b-a}{2^{n+1}}$$

- **Garantiza convergencia lineal** con razón 1/2. 💡

Importantes y útiles definiciones

- Una solución **es correcta en p posiciones decimales** si el error relativo es menor que $0.5 \cdot 10^{-p}$.
- El error absoluto en la iteración n-ésima viene dado por: $e_n = |x - x_n|$ donde x_n es nuestra aproximación de x en la iteración n.
- Un método es de orden p si:

$$\lim_{n \to \infty} \frac{e_{n+1}}{(e_n)^p} \leq C$$

Pregunta salvaje 😄

¿Cuántas iteraciones se necesitan para obtener una raiz de $f(x) = e^x - x^2$ en [-1,0] con 6 posiciones correctas?

Respuesta

- Acotar error: $\epsilon < \frac{b-a}{2^{n+1}} = \frac{1}{2^{n+1}}$
- Aplicar definición slide anterior: $\frac{1}{2^{n+1}} < \frac{1}{2} \cdot 10^{-6}$
- Despejar n: $n > \frac{\ln 10^6}{\ln 2} \approx 19.9$

> ¿Depende esto de la función?

Convergencia lineal

- Supongamos un método iterativo que cumple:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{e_{n+1}}{e_n} = S$$

- Si $S < 1$, entonces el **método converge linealmente** con razón S.
- Si $S = 0$ existe una convergencia de órden superior.

Razón de convergencia para bisección

1. $e_n = \dfrac{b-a}{2^n}$.
2. $e_{n+1} = \dfrac{b-a}{2^{n+1}}$.
3. $\dfrac{e_{n+1}}{e_n} = \dfrac{b-a}{2^{n+1}} \cdot \dfrac{2^n}{b-a} = \dfrac{1}{2}$.

No es necesario analizar el límite cuando $i \to \infty$ pues la fracción es constante.

> Entonces... ¿ qué nos indica el $\frac{1}{2}$?

Iteración punto fijo (IPF)

Dada una función $f(x)$:

- x^* es un **punto fijo** de $f(x)$ ssi $f(x^*) = x^*$.
- Construiremos $g(x) = x$ a partir de $f(x) = 0$.
- Al encontrar un punto fijo para $g(x)$ se encontrará un cero para $f(x)$.

- Una inocente iteración de punto fijo luce así:

```
def fixed_point_iteration(g, x, n):
    # Asumiendo que converge en n iteraciones
    for i in range(n):
        x = g(x)
    return x
```

- La iteración **puede o no converger** (😢), pero si la función es continua y converge a x^*, x^* es un punto fijo.

Ejemplo 🙏

- Sea $g(x) = \frac{1}{3}x + 1$ con punto fijo $\frac{3}{2}$.
- Al iterar con un **initial guess** de 0.1 tenemos:.

$$g(0.1) \approx 1.033$$

$$g(1.033) \approx 1.344$$

$$g(1.344) \approx 1.448$$

$$g(1.448) \approx 1.482$$

$$g(1.482) \approx 1.494$$

Desafío 💡

Sabemos que si la iteración de punto fijo converge a un valor, **este valor será un punto fijo**.

Codifique una función más inteligente que `fixed_point_iteration(g, x, n)`, que sea capaz de **intuir** si la iteración convergió. En tal caso debe indicar el valor aproximado de x^*. De lo contrario debe indicar que no se ha podido converger 😢.

Análisis convergencia IPF

Si tenemos:

- g diferenciable continuamente.
- $g(x^*) = x^*$.
- $\lim_{n \to \infty} \frac{e_{n+1}}{e_n} = S = |g'(x^*)| < 1$.

Entonces la IPF **converge linealmente** con razón S hacia r para estimaciones iniciales **lo suficientemente cerca** de r.

- Notar que la convergencia se asegura solo para una **vecindad** de puntos. En la práctica no la conoceremos.
- Una IPF puede ser **más lenta o más rápida que el método de la bisección** dependiendo de si S es mayor a $\frac{1}{2}$ o no.

Convergencia cuadrática

- Sea e_n el error después del paso n de un método iterativo. La iteración es **cuadráticamente convergente** si:

$$M = \lim_{n\to\infty} \frac{e_{n+1}}{e_n^2} < \infty$$

- Notar que no interesa el valor numeŕico de M, esto porque en el límite tenemos $e_{n+1} = Me_n^2$ y cuando $e_n < 1$, el error irá disminuyendo cuadraticamente sin importar el valor de M.

Método de Newton

- Es un método basado en la IPF $g(x) = x - \frac{f(x)}{f'(x)}$.
- $g(x)$ "asegura" $g'(x^*) = 0$, esto implica un orden de convergencia mejor que lineal.

> Esto se evidencia al aplicar Taylor sobre $g(x)$ alrededor de x^*.

Convergencia cuadrática Newton

- $M = \dfrac{1}{2} g''(x^*) = \dfrac{f''(r)}{2f'(r)}$.
- Sea f dos veces continuamente diferenciable y con $f(r) = 0$. Si $f'(r) \neq 0$ ($M < \infty$), Newton es **local y cuadraticamente convergente** a r.
- La convergencia de Newton, al igual que la de IPF, **depende de la función y el initial guess**. Esto no ocurre para la bisección ⚠️.

> Notar que $x^* = r$. Usaremos x^* para referirnos al punto fijo de g y r para el cero de f.

Convergencia lineal Newton

- Si $f'(r) = 0$, Newton converge **linealmente**.
- Dada una función f continuamente diferenciable $m+1$ veces con una raiz r de multiplicidad $m > 1$. Entonces Newton converge lineal y localmente a r y se cumple:

$$\lim_{n \to \infty} \frac{e_{n+1}}{e_n} = S = \frac{m-1}{m}$$

> Notar que en el peor de los casos Newton converge linealmente con razón $\frac{1}{2}$.

Otros métodos

Método de la secante

- Similar a Newton, pero no necesita cálculo de derivadas.
- Necesita dos estimaciones iniciales x_0, x_1.
- **Aproxima** la derivada (tangente) mediante una secante:

$$f'(x_i) \approx \frac{f(x_i) - f(x_{i-1})}{x_i - x_{i-1}}$$

- Se calcula mediante la siguiente iteración:

$$x_{i+1} = x_i - f(x_i) \cdot \frac{x_i - x_{i-1}}{f(x_i) - f(x_{i-1})}$$

- Su convergencia es **superlineal** con orden $p \approx 1.618$ y razón de convergencia $|\frac{f''(r)}{2f'(r)}|^{p-1}$.
- Simple y rápido.
- Al tomar puntos x_1, x_2 tal que $f(x_1) = f(x_2)$ la secante no intersectará el eje x. 😭

Regula falsi

- Regula falsi = Bisección + Secante.
- Trabaja con una función continua f y un intervalo $[a, b]$ en el cual f tiene un cero (teorema del Bolzano).
- En vez de calcular c como el punto medio de $[a, b]$, lo calcula como el punto donde la secante corta el eje x.

- La actualización de c es:

$$c = a - f(a) \cdot \frac{a-b}{f(a)-f(b)}$$

- Está garantizado que c se encuentra en [a,b].
- El nuevo intervalo será el que siga cumpliendo el Teorema del Bolzano.
- Convergencia lineal con razón $S = |1 - \frac{e_0 f'(x^*)}{f(x_0)}|$

⚠️ Puede ser mejor o peor que bisección.

Error

Backward error en Búsqueda de raíces

Suponga una aproximación x_a para el cero c de una función $f(x)$. Tenemos que:

- El backward error es la cantidad que debería cambiar la función para que se cumpla $f(x_a) = 0$.
- Viene dado por: $\epsilon_b = |f(x_a) - 0| = |f(x_a)|$.

- Graficamente **se mide de forma vertical**.
- Se llama backward pues tenemos una solución x_a y "miraremos hacia atrás" para ver cuánto debe cambiar f para que x_a sea correcta.
- Responde la pregunta ¿para cuál función x_a es un cero?.

Forward error en Búsqueda de raíces

Suponga una aproximación x_a para el cero c de una función $f(x)$. Tenemos que:

- El forward error es la cantidad que debería cambiar x_a para que sea correcta.
- Viene dado por $\epsilon_f = |c - x_a|$.

- Graficamente **se mide de forma horizontal**.
- Se llama forward pues tenemos una solución x_a y "miraremos hacia adelante" para ver cuán distinta es x_a de c.
- Responde la pregunta ¿qué tan lejos de c está x_a?

Ejercicios

1. Programe las siguientes funciones:

- `newton_backward(f, f_prime, initial_guess, epsilon)`.
- `newton_forward(f, f_prime, initial_guess, epsilon, root)`.

Donde `newton_backward` usa como criterio de detención el **backward error** y `newton_forward` el **forward error**.

2. Encuentre una aproximación **correcta en 5 posiciones decimales** del cero de $f(x) = \ln(x + 1) + x^2 - 3$ mediante su función `newton_forward`.

Hint:

- La raíz se encuentra en $[0, 5]$. 🙏
- Notar que `newton_forward` necesita al menos una buena aproximación del cero para calcular el **forward error**, obtenga esta aproximación mediante `newton_backward`.

3. Desarrolle la fórmula para aplicar Newton al problema de aproximar $y = y(x)$ si $G(x, y) = 0$. Es decir, nos definen $y = y(x)$ implicitamente y buscamos aproximar una imagen y para un x dado. 👽

4. Aplique la estrategia desarrollada en $3.$ para calcular valores de y para x de 1 a 5 en pasos de 0.1 si se define:

$$G(x,y) = 21x^6 - 21x^4 + 21x^2 + y^3 + 21$$

Hint:

- Defina una función similar a: `newton_y(g, g_prime_y, y, x, initial_guess, epsilon)`
- Luego de la primera aproximación, puede ir tomando el último valor calculado de y como *initial guess*.

5. Programe la función `secant backward(f, x1, x2, epsilon)`. Compare el desempeño de esta función con `newton_forward(f, f_prime, initial_guess, epsilon, root)` para encontrar el cero de la función presentada en 2.

Hint:

- Para que la comparación tenga sentido, x_1 puede ser igual a *initial_guess* y $x_2 = g(x_1)$ para la IPF $g(x)$ de Newton.

Interesting things

- Método de Steffensen, Muller, ICI, Brent y Newton modificado para raíces múltiples.
- Demostraciones de S y M para la convergencia lineal y cuadrática respectivamente.
- Cuencas de atracción.