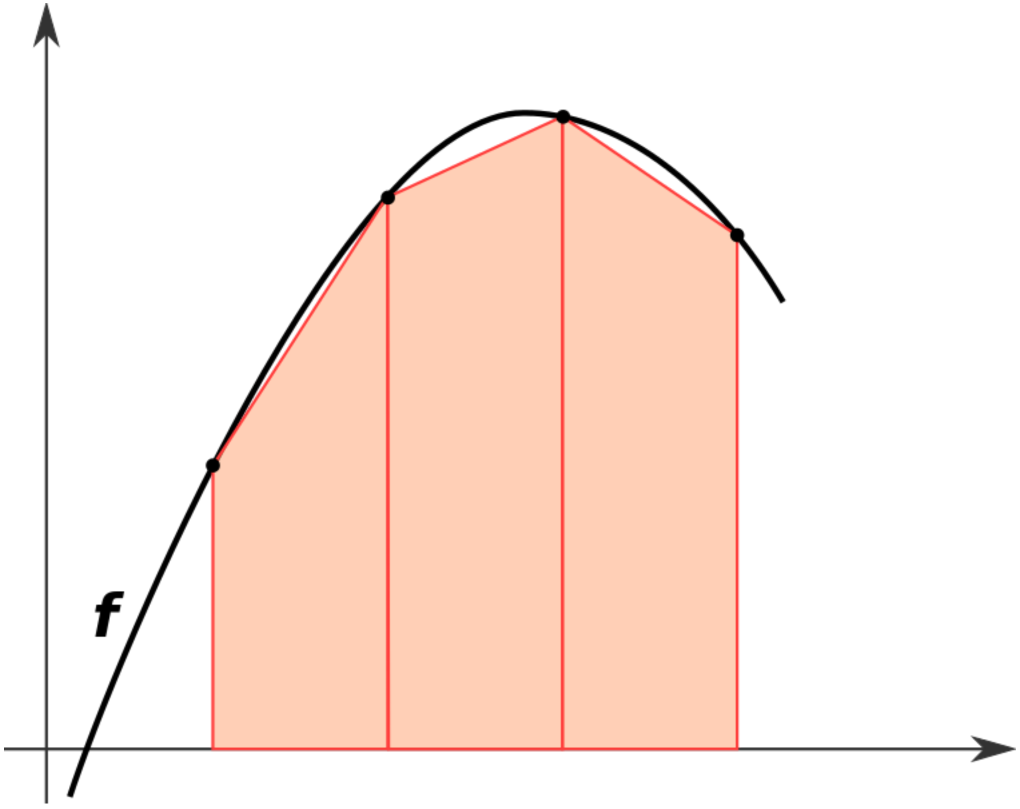
Algoritmos y complejidad



Ayudantía 4

Temario

Cuadratura

- Regla del rectángulo
- Regla del Trapecio (primer grado)
- Regla de Simpson (segundo grado)
- Cuadratura Gaussiana

Cuadratura

- Dada una función de interés $f(x)$ y un intervalo $[a, b]$, buscamos aproximar $\int_a^b f(x)dx$.

Regla del rectángulo

- Aproximaremos la integral mediante un **número finito de rectángulos**.
- Considere un intervalo $[x_0, x_1, x_2, \ldots, x_n]$ donde $x_0 = a$, $x_n = b$.
- Podemos aproximar la integral mediante:

$$\int_a^b f(x)dx \approx \sum_{i=0}^{n} f(x_i) \cdot (x_{i+1} - x_i)$$

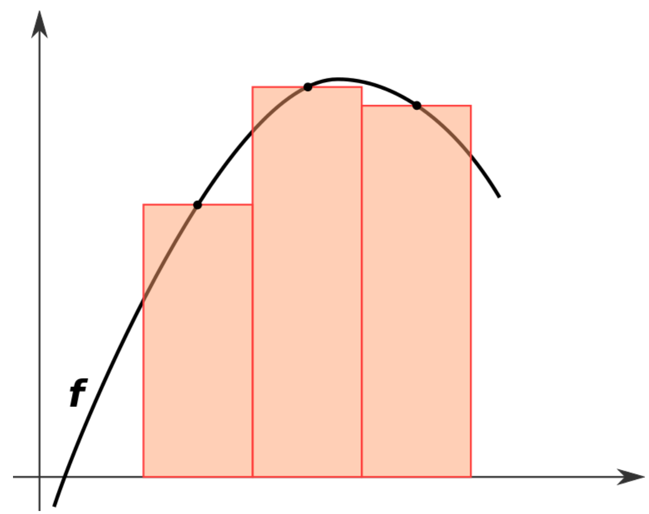
- Es claro que si $x_{i+1} - x_i = \frac{b-a}{n} = h$ tenemos:

$$\int_a^b f(x)dx \approx h \sum_{i=0}^{n} f(x_i)$$

- Notar lo simple que sería programar este método.

- Si evaluamos en el punto medio del intervalo $x_{i+1} - x_i$ obtendremos generalmente mejores aproximaciones.

$$\int_a^b f(x)dx \approx h \sum_{i=0}^{n-1} f(\frac{x_i + x_{i+1}}{2})$$



Análisis error

Caso general

- Al expandir $F(x) = \int_{x_i}^{x} f(t)dt$ mediante Taylor alrededor de x_i se obtiene:

$$\int_{x_i}^{x_{i+1}} f(x)dx = hf(x_i) + h^2 \frac{f'(c)}{2}$$

- donde $h = x_{i+1} - x_i$ y $c \in [x_i, x_{i+1}]$.
- El error es $h^2 \frac{f'(c)}{2}$, es decir $O(h^2)$ **para cada intervalo**.

- Considerando $h = \frac{b-a}{n}$, el error para n intervalos de largo h es $nO(h^2)$.
- Aplicando **poderosas matemáticas** obtenemos:

$$
\begin{aligned}
nO(h^2) = nO(\frac{(b-a)^2}{n^2}) = O(\frac{n(b-a)^2}{n^2}) \\
= O(\frac{(b-a)^2}{n}) = O((b-a)h) = O(h)
\end{aligned}
$$

Variación Punto medio

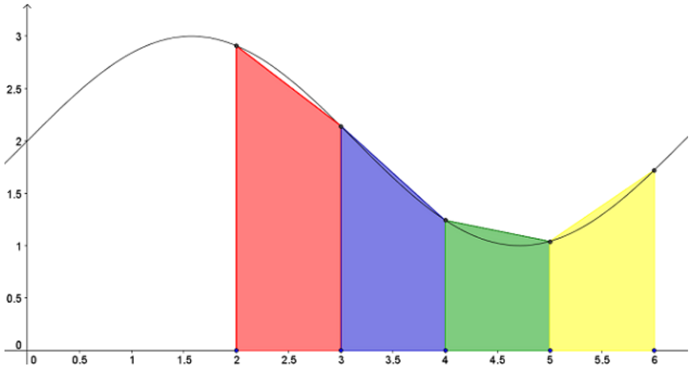
- Evaluando en el punto medio de cada intervalo tenemos:

$$\int_{x_i}^{x_{i+1}} f(x)dx = hf(\frac{x_i + x_{i+1}}{2}) + \frac{1}{24}f''(a)h^3 + O(h^4)$$

- El error es $O(h^3)$ **para cada intervalo**.
- Esto es mejor que el error $O(h^2)$ para el primer caso analizado.

Regla del Trapecio

- Aproximaremos la integral $\int_a^b f(x)dx$ mediante un número finito de trapecios.
- Recordar que el área de un trapecio es $\frac{b_1+b_2}{2} \cdot h$



> Podemos ver el trapecio como si estuviera acostado, de forma que b_1 y b_2 los obtendremos como imágenes de f y h como $x_{i+1} - x_i$.

Deducción

Sea $[x_0, x_1, x_2, \ldots, x_n]$, donde $x_{i+1} - x_i = \frac{b-a}{n} = h$, y $x_0 = a, x_n = b$.

➡️ Para $n = 2$ tenemos:

$$\int_a^b f(x)dx \approx \frac{h}{2}(f(a) + f(x_1)) + \frac{h}{2}(f(x_1) + f(b))$$

➡️ Para $n = 3$ tenemos:

$$\int_a^b f(x)dx \approx \frac{h}{2}(f(a) + f(x_1)) + \frac{h}{2}(f(x_1) + f(x_2)) + \frac{h}{2}(f(x_2) + f(b))$$

- De forma general:

$$\int_a^b f(x)dx \approx \frac{h}{2}(f(a) + 2f(x_1) + 2f(x_2) \cdots + 2f(x_{n-1}) + f(b))$$

- Esto se puede reescribir como:

$$\int_a^b f(x)dx \approx \frac{h}{2}(f(a) + f(b) + 2\sum_{i=1}^{n-1} f(x_i))$$

Deducción mediante interpolación

- Trabajaremos en un intervalo $[x_0, x_1]$.
- Para aproximar $\displaystyle\int_{x_0}^{x_1} f(x)dx$, primero interpolaremos $f(x)$ mediante un polinomio $P(x)$ de grado 1, y luego integraremos $P(x)$. 🤔
- ¿Cuál polinomio utilizamos?

$$P(x) = y_0 \frac{x - x_1}{x_0 - x_1} + y_1 \frac{x - x_0}{x_1 - x_0}$$

> Este es el **polinomio interpolador de Lagrange**.

- Integrando P(x) obtenemos:

$$\int_{x_0}^{x_1} P(x)dx = y_0 \int_{x_0}^{x_1} \frac{x - x_1}{x_0 - x_1} dx + y_1 \int_{x_0}^{x_1} \frac{x - x_0}{x_1 - x_0} dx$$

$$= y_0 \frac{x_1 - x_0}{2} + y_1 \frac{x_1 - x_0}{2} = \frac{h}{2} \cdot (y_0 + y_1)$$

- Notar que llegamos al área del trapecio presentada anteriormente.

Análisis error

- Al aproximar la integral $\int_a^b f(x)dx$ usando n trapecios tenemos que:

$$E = -\frac{f''(c) \cdot (b-a)}{12} h^2$$

- Donde c es un valor en $[a, b]$.
- Notar que es mejor que el método de los rectángulos pues el error es $O(h^2) = O((\frac{b-a}{n})^2) = O(\frac{1}{n^2})$.

> Nuevamente podemos tomar el valor c que maximiza $f''(c)$ y obtener una cota superior para el error.

Regla compuesta

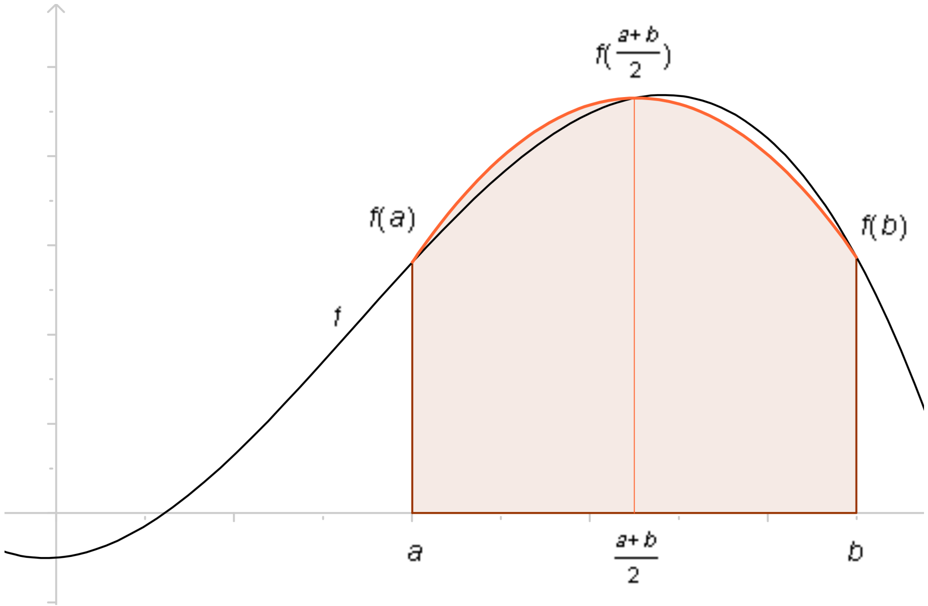
Para n subintervalos, y asumiendo $f \in C^2[a, b]$:

$$\int_a^b f(x)dx = \frac{h}{2}(f(a) + f(b) + 2\sum_{i=1}^{n-1} f(x_i)) - \frac{f''(c)(b-a)}{12}h^2$$

Donde $h = \frac{b-a}{n}$ y $c \in [a, b]$.

Regla de Simpson

- Similar a la regla del Trapecio, pero mejor aún.
- El polinomio a interpolar ahora será de **grado 2** (parábola).



Deducción mediante interpolación

- Trabajaremos en un intervalo $[x_0, x_1, x_2]$.
- Para aproximar $\int_{x_0}^{x_1} f(x)dx$, primero interpolaremos $f(x)$ mediante un polinomio, y luego integraremos el polinomio. 🤔
- ¿Cuál polinomio utilizamos?

$$P(x) = y_0 \frac{(x-x_1)(x-x_2)}{(x_0-x_1)(x_0-x_2)} + y_1 \frac{(x-x_0)(x-x_2)}{(x_1-x_0)(x_1-x_2)} + y_2 \frac{(x-x_0)(x-x_1)}{(x_2-x_0)(x_2-x_1)}$$

Integrando cada término por separado:

$$\int_{x_0}^{x_2} y_0 \frac{(x-x_1)(x-x_2)}{(x_0-x_1)(x_0-x_2)} dx = y_0 \frac{h}{\mathbf{3}}$$

$$\int_{x_0}^{x_2} y_1 \frac{(x-x_0)(x-x_2)}{(x_1-x_0)(x_1-x_2)} dx = y_1 \frac{4h}{\mathbf{3}}$$

$$\int_{x_0}^{x_2} y_2 \frac{(x-x_0)(x-x_1)}{(x_2-x_0)(x_2-x_1)} dx = y_2 \frac{h}{\mathbf{3}}$$

Así obtenemos:

$$\int_{x_0}^{x_2} P(x)dx = y_0 \frac{h}{3} + y_1 \frac{4h}{3} + y_2 \frac{h}{3}$$

> Notar que las integrales son simples. Los términos y_i y los denominadores son constantes.

Análisis error

- Al interpolar sabemos que $f(x) = P(x) + E(x)$.
- $\displaystyle\int_{x_0}^{x_2} E(x)dx = -\frac{h^5}{90} f^{(4)}(c)$.
- $\displaystyle\int_{x_0}^{x_2} f(x)dx = \frac{h}{3}(y_0 + 4y_1 + y_2) - \frac{h^5}{90} f^{(4)}(c)$.
- Donde $c \in [x_0, x_2]$

Regla compuesta

Para n subintervalos, con n par y asumiendo $f \in C^4[a,b]$:

$$\int_a^b f(x)dx = \frac{h}{3}\left(f(a) + f(b) + 2\sum_{i=1}^{(n/2)-1} f(x_{2i}) + 4\sum_{i=1}^{n/2} f(x_{2i-1})\right) - \frac{(b-a)h^4}{180} f^{(4)}(c)$$

Donde $h = \frac{b-a}{2}$ y $c \in [a,b]$.

Grado de precisión

- El grado de precisión de un método de integración numérica el grado k o menor del polinomio que se utiliza para integrar.
- Vimos que el error para la regla de trapecio es:

$$-\frac{f''(c)(b-a)}{12}h^2$$

¿Qué pasa cuando el polinomio es de grado 1 o menor?

- El término $f''(c)$ se hace cero y la aproximación es exacta.

Cuadratura Gaussiana

- Representa un enfoque distinto.
- La idea es evitar tener tener que tomar tantos puntos para disminuir el error.
- Tomaremos pocos puntos, pero la elección debe ser inteligente.

- El objetivo es buscar valores w_i, x_i tal que:

$$\int_{-1}^{1} f(x)dx \approx \sum_{i=1}^{n} w_i \cdot f(x_i)$$

- No tenemos restricciones sobre w_i, x_i, pero nos interesa que esta aproximación sea exacta para polinomios del mayor grado posible.

> No nos interesan las soluciones con $w_i = 0$ o $x_i = 0$.

- Motivación: Si es exacta para polinomio de grados alto, entonces **quizas** sea bastante precisa para funciones que son bien aproximadas por polinomios.

- Al aproximar con n puntos de cuadratura el grado de precisión será $2n-1$.
- Como aproximaremos con polinomios, usaremos $f(x)=x^k$.
- Al usar n puntos de cuadratura deberemos resolver un sistema con $2n$ ecuaciones para encontrar w_i, x_i.
- Para $i=0,\ldots,2n-1$ las ecuaciones serán:

$$w_1 x_1^i + \cdots + w_n x_n^i = \int_{-1}^{1} x^i dx$$

- Para cambiar el intervalo de integración usaremos:

$$\int_a^b F(x)dx = \frac{b-a}{2}\int_{-1}^{1} F(\frac{b+a+t(b-a)}{2})dt$$

- Los valores w_i cumplen $x_i > 0$.

Análisis error

- El error cometido por esta estrategia viene dado por:

$$E_n(f) = \int_{-1}^{1} f(x)dx - \sum_{i=1}^{n} w_i \cdot f(x_i) = e_n \frac{f^{(2n)}(c_n)}{2n!}$$

- Donde: $e_n = \frac{2^{2n+1}(n!)^4}{(2n+1)[(2n)!]^4} \approx \frac{\pi}{4^n}$ y $c_n \in [a, b]$.

Ejemplo 😃

- Queremos valores w_1, x_1 tal que:

$$\int_{-1}^{1} f(x)dx \approx w_1 f(x_1)$$

- Como debe ser exacto para polinomios de hasta grado $2n-1=1$ tenemos:

$$\begin{aligned} w_1 x_1^0 &= \int_{-1}^{1} x^0 dx \\ w_1 x_1 &= \int_{-1}^{1} x^1 dx \end{aligned}$$

- Esto se resume a:

$$
\begin{aligned}
w_1 &= 2 \\
w_1 x_1 &= 0
\end{aligned}
$$

- Por lo tanto $w_1 = 2$ y $x_1 = 0$.
- Así nuestra aproximación será:

$$\int_{-1}^{1} f(x)dx \approx 2f(0)$$

> Este resultado parece conocido...

Ejercicios

1. Obtenga la expresión para el error de la regla del trapecio en un intervalo $[x_0, x_1]$.
2. Obtenga la regla de cuadratura Gaussiana para el cálculo de $\int_{-1}^{1} f(x)dx$ con dos puntos de cuadratura.
3. Solucione con lo obtenido en 2: $\int_{-1}^{1} \frac{dx}{3+x}$.

   Hint: El valor real es $ln\ 2$.
4. Programe la Regla del Rectángulo, Trapecio y Simpson.

Recomendaciones

1. http://pages.cs.wisc.edu/~amos/412/lecture-notes/
2. https://personales.unican.es/segurajj/quad.pdf.