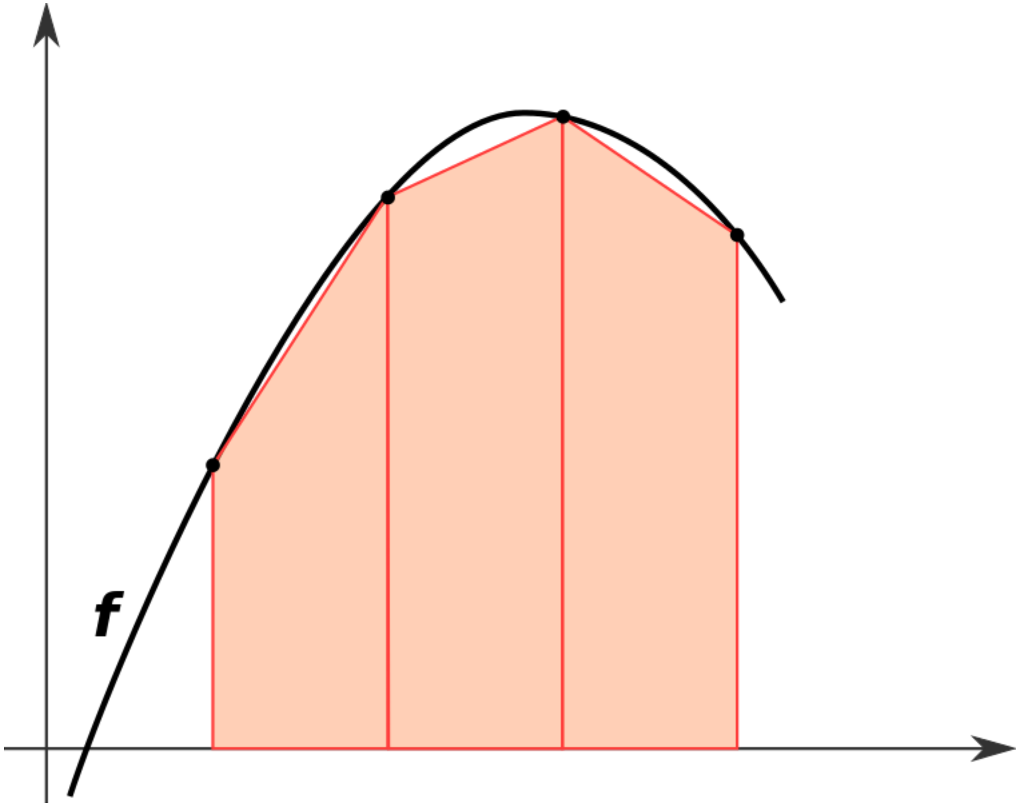
Algoritmos y complejidad



Ayudantía 4

Temario

Cuadratura

- Aproximación con rectángulos
- Regla del Trapecio (primer grado)
- Regla de Simpson (segundo grado)

Cuadratura

- Dada una función de interés $f(x)$ y un intervalo $[a, b]$, buscamos aproximar $\int_a^b f(x)dx$.

Aproximación con rectángulos

- Aproximaremos la integral mediante un **número finito de rectángulos**.
- Considere un intervalo $[x_0, x_1, x_2, \ldots, x_n]$ donde $x_0 = a$, $x_n = b$.
- Podemos aproximar la integral mediante:

$$\int_a^b f(x)dx \approx \sum_{i=0}^{n} f(x_i) \cdot (x_{i+1} - x_i)$$

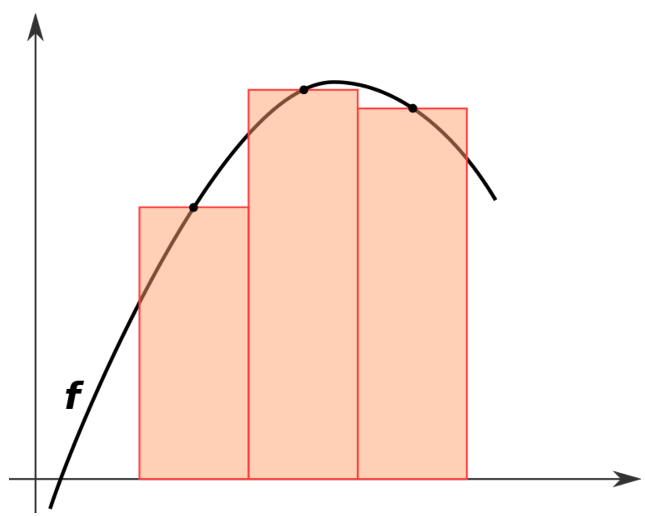
- Es claro que si $x_{i+1} - x_i = \frac{b-a}{n} = h$ tenemos:

$$\int_a^b f(x)dx \approx h \sum_{i=0}^{n} f(x_i)$$

- Notar lo simple que sería programar este método.

- Si evaluamos en el punto medio del intervalo $x_{i+1} - x_i$ obtendremos generalmente mejores aproximaciones.

$$\int_a^b f(x)dx \approx h\sum_{i=0}^{n} f(\frac{x_i + x_{i+1}}{2})$$



Análisis error

Caso general

- Al expandir $F(x) = \int_{x_i}^{x} f(t)dt$ mediante Taylor alrededor de x_i se obtiene:

$$\int_{x_i}^{x_{i+1}} f(x)dx = hf(x_i) + h^2 \frac{f'(c)}{2}$$

- donde $h = x_{i+1} - x_i$ y $c \in [x_i, x_{i+1}]$.
- El error es $h^2 \frac{f'(c)}{2}$, es decir $O(h^2)$ **para cada intervalo**.

- Considerando $h = \frac{b-a}{n}$, el error para n intervalos de largo h es $nO(h^2)$.
- Aplicando **poderosas matemáticas** obtenemos:

$$
\begin{aligned}
nO(h^2) = nO(\frac{(b-a)^2}{n^2}) = O(\frac{n(b-a)^2}{n^2}) \\
= O(\frac{(b-a)^2}{n}) = O((b-a)h) = O(h)
\end{aligned}
$$

> A medida que $n \to \infty$ disminuiremos el error pues h se hace más pequeño.

Variación Punto medio

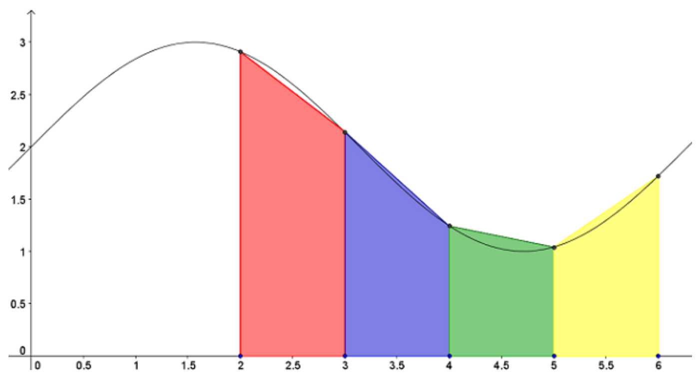
- Evaluando en el punto medio de cada intervalo tenemos:

$$\int_{x_i}^{x_{i+1}} f(x)dx = hf(x_i) + \frac{1}{24}f''(a)h^3 + O(h^4)$$

- El error es $O(h^3)$ **para cada intervalo**.
- Esto es mejor que el error $O(h^2)$ para el primer caso analizado.

Regla del Trapecio

- Aproximaremos la integral $\displaystyle\int_a^b f(x)dx$ mediante un número finito de trapecios.
- Recordar que el área de un trapecio es $\frac{b_1+b_2}{2} \cdot h$



> Podemos ver el trapecio como si estuviera acostado, de forma que b_1 y b_2 los obtendremos como imágenes de f y h como $x_{i+1} - x_i$.

Deducción

Considere un intervalo $[x_0, x_1, x_2, \ldots, x_n]$, $x_0 = a$, $x_n = b$ y $x_{i+1} - x_i = \frac{b-a}{n} = h$, donde n es el número de trapecios.

➡️ Para $n = 2$ tenemos:

$$\int_a^b f(x)dx \approx \frac{h}{2}(f(a) + f(x_1)) + \frac{h}{2}(f(x_1) + f(b))$$

➡️ Para $n = 3$ tenemos:

$$\int_a^b f(x)dx \approx \frac{h}{2}(f(a) + f(x_1)) + \frac{h}{2}(f(x_1) + f(x_2)) + \frac{h}{2}(f(x_2) + f(b))$$

- De forma general:

$$\int_a^b f(x)dx \approx \frac{h}{2}(f(a) + 2f(x_1) + 2f(x_2) \cdots + 2f(x_{n-1}) + f(b))$$

- Esto se puede reescribir como:

$$\int_a^b f(x)dx \approx h(\frac{f(a) + f(b)}{2} + \sum_{i=1}^{n-1} f(x_i))$$

Deducción mediante interpolación

- Trabajaremos en un intervalo $[x_0, x_1]$.
- Para aproximar $\displaystyle\int_{x_0}^{x_1} f(x)dx$, primero interpolaremos $f(x)$ mediante un polinomio $P(x)$ de grado 1, y luego integraremos $P(x)$. 🤔
- ¿Cuál polinomio utilizamos?

$$P(x) = y_0 \frac{x - x_1}{x_0 - x_1} + y_1 \frac{x - x_0}{x_1 - x_0}$$

> Este es el **polinomio interpolador de Lagrange**.

- Integrando P(x) obtenemos:

$$\int_{x_0}^{x_1} P(x)dx = y_0 \int_{x_0}^{x_1} \frac{x - x_1}{x_0 - x_1} dx + y_1 \int_{x_0}^{x_1} \frac{x - x_0}{x_1 - x_0} dx$$

$$= y_0 \frac{x_1 - x_0}{2} + y_1 \frac{x_1 - x_0}{2} = \frac{h}{2} \cdot (y_0 + y_1)$$

- Notar que llegamos al área del trapecio presentada anteriormete.

Análisis error

- Al aproximar la integral $\int_a^b f(x)dx$ usando n trapecios tenemos que:

$$E = -\frac{f''(c) \cdot (b-a)}{12} h^2$$

- Donde c es un valor en $[a, b]$.
- Notar que es mejor que el método de los rectángulos pues el error es $O(h^2) = O((\frac{b-a}{n})^2) = O(\frac{1}{n^2})$.

> Nuevamente podemos tomar el valor c que maximiza $f''(c)$ y obtener una cota superior para el error.

Regla compuesta

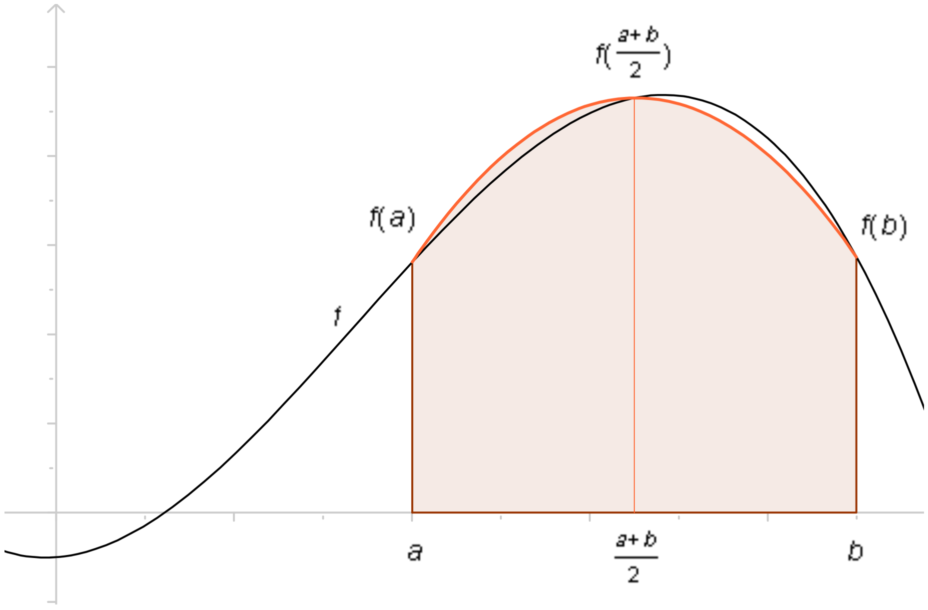
Para n trapeceios tenemos:

$$\int_a^b f(x)dx = \frac{h}{2}(y_0 + y_n + 2\sum_{i=1}^{n-1} y_i) - \frac{(b-a)h^2}{12}f''(c)$$

Donde $h = \frac{b-a}{n}$ y $c \in [a, b]$.

Regla de Simpson

- Similar a la regla del Trapecio, pero mejor aún.
- El polinomio a interpolar ahora será de **grado 2** (parábola).



Deducción mediante interpolación

- Trabajaremos en un intervalo $[x_0, x_1, x_2]$.
- Para aproximar $\displaystyle\int_{x_0}^{x_1} f(x)dx$, primero interpolaremos $f(x)$ mediante un polinomio, y luego integraremos el polinomio. 🤔
- ¿Cuál polinomio utilizamos?

$$P(x) = y_0 \frac{(x-x_1)(x-x_2)}{(x_0-x_1)(x_0-x_2)} + y_1 \frac{(x-x_0)(x-x_2)}{(x_1-x_0)(x_1-x_2)} + y_2 \frac{(x-x_0)(x-x_1)}{(x_2-x_0)(x_2-x_1)}$$

Integrando cada término por separado:

$$\int_{x_0}^{x_2} y_0 \frac{(x - x_1)(x - x_2)}{(x_0 - x_1)(x_0 - x_2)} dx = y_0 \frac{h}{\mathbf{3}}$$

$$\int_{x_0}^{x_2} y_1 \frac{(x - x_0)(x - x_2)}{(x_1 - x_0)(x_1 - x_2)} dx = y_1 \frac{4h}{\mathbf{3}}$$

$$\int_{x_0}^{x_2} y_2 \frac{(x - x_0)(x - x_1)}{(x_2 - x_0)(x_2 - x_1)} dx = y_2 \frac{h}{\mathbf{3}}$$

Así obtenemos:

$$\int_{x_0}^{x_2} P(x)dx = y_0\frac{h}{3} + y_1\frac{4h}{3} + y_2\frac{h}{3}$$

> Notar que las integrales son simples. Los términos y_i y los denominadores son constantes.

Análisis error

- Al interpolar sabemos que $f(x) = P(x) + E(x)$.
- $\displaystyle\int_{x_0}^{x_2} E(x)dx = -\frac{h^5}{90} f^{(4)}(c)$.
- $\displaystyle\int_{x_0}^{x_2} f(x)dx = \frac{h}{3}(y_0 + 4y_1 + y_2) - \frac{h^5}{90} f^{(4)}(c)$.
- Donde $c \in [x_0, x_2]$

Regla compuesta

$$\int_a^b f(x)dx = \frac{h}{3}(y_0 + y_{2m} + 4\sum_{i=1}^{m} y_{2i-1} + 2\sum_{i=1}^{m-1} y_{2i}) - \frac{(b-a)h^4}{180} f^{(4)}(c)$$

Donde $m = \frac{n}{2} = \frac{b-a}{2h}$ y $c \in [a, b]$.

Recomendaciones

1. https://es.khanacademy.org/math/ap-calculus-ab/ab-integration-new/ab-6-2/a/understanding-the-trapezoid-rule