Algoritmos y complejidad

Ayudantía 9

Temario

- ¿Por qué algoritmos aleatorizados?.
- Clasificaciones
- Ejemplos de interés:
  - Muestreo de Monte Carlo.
  - Estimación de π por Monte Carlo.
- Ejercicios
  - Guess_pass.
  - Shuffle.

¿Por qué algoritmos aleatorizados?

- Existen situaciones en que los algoritmos convencionales presentan problemas; alta complejidad temporal o worst cases de desempeño muy malos.
- Algoritmos deterministas no siempre son buenos aliados.
- Algoritmos aleatorizados son simples y rápidos, pero aparecen **variables aleatorias** en el tiempo de ejecución y/o en el output.

Clasificaciones

A las vegas Algorithm

- Probablemente rápidos.
- Siempre encuentra la respuesta correcta, pero puede demorar una cantidad de tiempo excesiva.
- Sea $RT(u)$ el tiempo de ejecución del algoritmo cuando el input es u. El **tiempo de ejecución esperado del algoritmo** para entradas de tamaño n viene dado por:

$$T(n) = max_{|u|=n} \ E[RT(u)]$$

> El máximo valor esperado del tiempo de ejecución del algoritmo para inputs de tamano n. 👽

Montecarlo Algorithm

- Probablemente correctos.
- Entrega una respuesta aproximada en una cantidad de tiempo fijo determinada a través de un parametro.

Patrón por defecto:

1. Define a domain of possible inputs.
2. Generate inputs randomly from a probability distribution over the domain.
3. Perform a deterministic computation on the inputs.
4. Aggregate the results.

> https://en.wikipedia.org/wiki/Monte_Carlo_method

Errores

- Error unilateral: Siempre se equivocan en el mismo sentido, pueden ser con preferencia falso o preferencia verdadero. Nunca se equivocan en su preferencia, por lo que la repetición del algoritmo reduce la probabilidad de error.
- Error bilateral: Se pueden equivocar en ambos sentidos.

Muestreo de Monte Carlo

Como aproximaría la siguiente sumatoria?:

$$\sum_{n=1}^{N} f(n)$$

- La idea es ver la sumatoria como si fuera una esperanza:

$$\sum_{n=1}^{N} f(n) = \sum_{n=1}^{N} f(n) \cdot p(n) = E_p[f(n)]$$

- Ahora la podemos aproximar **tomando una muestra** $x_1, x_2, \ldots, x_n$ desde p y luego calcular el promedio empírico:

$$\hat{s} = \frac{1}{n} \sum_{i=0}^{n} f(x_i)$$

> https://www.deeplearningbook.org/contents/monte_carlo.html ❤️

Recordar que la ley de los grandes números respalda esta aproximación bajo los supuestos de una muestra $x^{(i)}$ independiente e identicamente distribuida y un tamaño de muestra n muy grande.

Cómo usaria el muestreo de Montecarlo para estimar una integral?, cuál funcion de probabilidad $p(x)$ utilizaría para estimar integrales como la siguiente ❓

$$\int_{-a}^{a} \frac{1}{x^2 + 1}$$

Estimación de π

- La idea es generar n puntos aleatorios en el primer cuadrante, es decir $x, y \in [0, 1]$.
- Contar aquellos que están dentro (inside) de la circunferencia de radio 1 y la cantidad total de puntos.
- Estimar π asumiendo que:

$$\frac{\pi r^2}{4r^2} \approx \frac{I}{T}$$

> https://brilliant.org/wiki/randomized-algorithms-overview/

Ejercicios

Ejercicio 1

Suponga una versión del Aula donde las contraseñas están solo formadas por dígitos, con un mínimo de 5 y máximo de 10.

- Diseñe un algoritmo aleatorio **que encuentre la contraseña** para un usuario dado.
- Analice brevemente el algoritmo, indique el promedio de comparaciones a realizar para encontrar una contraseña de n digitos.
- Indique el tiempo de ejecución esperado para el algoritmo diseñado.

Diseño

```python
def guess_pass(n, password):
    guess = generate_guess(n)
    while(check_pass(guess, password) == False):
        guess = generate_guess(n)
    return guess
```

> Monte carlo o Las vegas?

Análisis

1. El tiempo de ejecución para una entrada u es $RT(u)$.
2. $RT(u)$ es una variable aleatoria. Sea I el conjunto de posibles valores para u:

$$RT(u) : I \to \mathbb{R}^+$$

3. La distribución asociada a $RT(u)$ es la geométrica.

4. La probabilidad de éxito en función del tamaño del input viene dada por:

$$p(n) = \frac{1}{10^n}$$

5. Sabemos que $E[RT(u_n)] = \frac{1}{p(n)}$. En promedio, encontrar la contraseña tomará 10^n comparaciones (intentos).
6. El tiempo de ejecución esperado es $T(n) = 10^n$.

Ejercicio 2

Dado un arreglo A de tamaño n, diseñe un algoritmo para "barajar" (shuffle) A de forma que el output sea una variable aleatoria que siga una distribución uniforme.

Diseño Naive

```python
def naive_shuffle(A):

    # for each element of A
    for i in range(len(A)):

        # select a random index of A
        rand_index = random.randint(0, len(A) - 1)

        # swap element number i with element number random_index
        temp = A[i]
        A[i] = A[rand_index]
        A[rand_index] = temp
```

Diseño Fisher

```
def fisher_shuffle(A):

    # for each element of A
    for i in range(len(A)):

        # select a random index of A[:i + 1]
        j = random.randint(0, i)

        # swap element number i with element number j
        temp = A[i]
        A[i] = A[j]
        A[j] = temp
```

Cuántas permutaciones (swaps) puede realizar cada algoritmo? 🤔

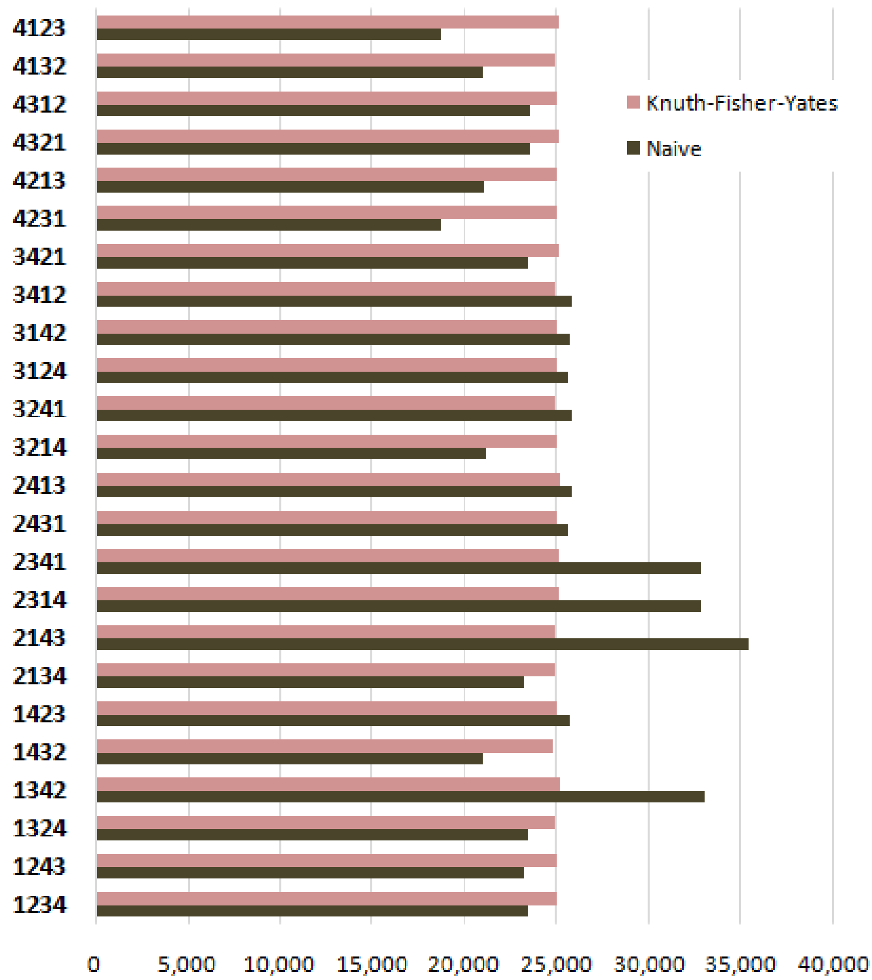
Naive shuffle

En cada iteracion $i = 1 \ldots n$ tenemos n alternativas para hacer un swap entre el elemento i y otro aleatorio. En total tenemos n^n posibles permutaciones (swaps).

Fisher shuffle

En cada iteracion $i = 1 \ldots n$ tenemos i alternativas para hacer un swap entre el elemento i y otro en la posicion $j \leq i$. En total tenemos $n!$ posibles permutaciones (swaps).

- Cada permutación (swap) me lleva de una configuración a otra.
- Para un arreglo A de tamaño n existen $n!$ posibles configuraciones.
- Naive elige entre n^n configuraciones (pues cada swap me lleva a una configuración), esto es problemático pues solo existen $n!$. Hay algunas que se repiten.



> Array de tamaño 4 barajado 600.000 veces con ambos algoritmos.
> https://blog.codinghorror.com/the-danger-of-naivete/

Conclusiones

- Naive shuffle baraja de más (overshuffle). Esto implica permutaciones sobre representadas; son más probables que otra.
- En cada iteración puede estar haciendo un swap con un mismo elemento a. Peor aún, puede hacer un shuffle más de una vez con dos elementos a y b.

- Hay que tener cuidado a la hora de diseñar algoritmos aleatorizados, la idea es obtener algoritmos **no sesgados**.
- Recordar que el output será una variable aleatoria $OP(n)$. Conocer como se distribuye OP es de vital importancia para entender el comportamiento del algoritmo.