Pauta ayudantía 3

Algoritmos y complejidad

Diego Quezada; diego.quezadac@sansano.usm.cl

Kevin Lagos; kevin.lagos@sansano.usm.cl

Ejercicio 1

Interpole el siguiente conjunto de puntos mediante el Lagrange: $X = \{(1,1),(2,5),(3,4)\}$

Solución

Primero definamos los polinomios L_k:

$$L_1 = \frac{(x-2)(x-3)}{(1-2)(1-3)} = \frac{1}{2}(x^2-5x+6)$$
$$L_2 = \frac{(x-1)(x-3)}{(2-1)(2-3)} = -(x^2-4x+3)$$
$$L_3 = \frac{(x-1)(x-2)}{(3-1)(3-2)} = \frac{1}{2}(x^2-3x+2)$$

Como sabemos que el polinomio interpolador es $P_{n-1} = \sum_{i=1}^{n} y_i L_i(x)$, solo nos falta sumar estas cositas:

$$P_{n-1} = 1 \cdot \frac{1}{2}(x^2-5x+6) - 5 \cdot (x^2-4x+3) + \frac{4}{2}(x^2-3x+2)$$

Si se juega un poco con la expresión, llegamos al siguiente polinomio:

$$P_{n-1} = \frac{-5}{2}x^2 + \frac{23}{2}x - 8$$

Ejercicio 2

Interpole el mismo conjunto de puntos mediante **diferencias divididas**.

Solución

Recordar que este semestre no se estudió este método, de todas formas adjunto la pauta.

Primero calculemos los coeficientes del término x^{n-1} de nuestro polinomio interpolador, estos vienen dado por $f[x_1 x_2 \dots x_n]$:

x	$f[x_k] = y$	$f[x_k x_{k+1}]$	$f[x_k x_{k+1} x_{k+2}]$
1	1		
		$\frac{5-1}{2-1} = 4$	
2	5		$\frac{-1-4}{3-1} = \frac{-5}{2}$
		$\frac{4-5}{3-2} = -1$	
3	4		

Nuestro polinomio interpolador de grado $3-1$ para las diferencias divididas viene dado por:

$$P_2(x) = f[x_1] + f[x_1 x_2](x - x_1) + f[x_1 x_2 x_3](x - x_1)(x - x_2)$$

Para este caso tenemos:

$$P(x) = 1 + 4(x-1) - \frac{5}{2}(x-1)(x-2)$$

Al jugar con la expresión final, obtenemos:

$$P(x) = \frac{-5}{2}x^2 + \frac{23}{2}x - 8$$

El mismo polinomio encontrado en 1. Recordar que por el **teorema principal de interpolación polinomial** para un conjunto de n puntos, el polinomio interpolador P_{n-1} de grado a lo más $n-1$ **es único**.

Ejercicio 3

Agregue los puntos $(4,6)$ y $(5,2)$ al conjunto X e interpole nuevamente.

Solución

Tenemos $X=\{(1,1),(2,5),(3,4),(4,6),(5,2)\}$

Primero definamos los polinomios L_k:

$$\begin{aligned}
L_1 &= \frac{(x-2)(x-3)(x-4)(x-5)}{(1-2)(1-3)(1-4)(1-5)} &=& \quad \frac{1}{24}(x-2)(x-3)(x-4)(x-5) \\
L_2 &= \frac{(x-1)(x-3)(x-4)(x-5)}{(2-1)(2-3)(2-4)(2-5)} &=& -\frac{1}{6}(x-1)(x-3)(x-4)(x-5) \\
L_3 &= \frac{(x-1)(x-2)(x-4)(x-5)}{(3-1)(3-2)(3-4)(3-5)} &=& \quad \frac{1}{4}(x-1)(x-2)(x-4)(x-5) \\
L_4 &= \frac{(x-1)(x-2)(x-3)(x-5)}{(4-1)(4-2)(4-3)(4-5)} &=& -\frac{1}{6}(x-1)(x-2)(x-3)(x-5) \\
L_5 &= \frac{(x-1)(x-2)(x-3)(x-4)}{(5-1)(5-2)(5-3)(5-4)} &=& \quad \frac{1}{24}(x-1)(x-2)(x-3)(x-4)
\end{aligned}$$

Nuestro polinomio viene dado por:

$$P_4 = \sum_{i=1}^{5} y_i L_i(x)$$

Podemos dividir esta sumatoria en dos, digamos $P=Q+R$:

$$\begin{aligned}
Q = \sum_{i=1}^{2} y_i L_i(x) &= (x-3)(x-4)(x-5)\cdot\left(\frac{1}{24}(x-2)-\frac{5}{6}(x-1)\right) \\
&= (x-3)(x-4)(x-5)\left(-\frac{19}{24}x+\frac{9}{12}\right)
\end{aligned}$$

Luego:

$$\begin{aligned}
R = \sum_{i=3}^{5} y_i L_i(x) &= (x-1)(x-2)\left(\frac{4}{4}(x-4)(x-5)-\frac{6}{6}(x-3)(x-5)+\frac{2}{24}(x-3)(x-4)\right) \\
&= (x-1)(x-2)\left(\frac{1}{12}x^2-\frac{19}{12}x+6\right)
\end{aligned}$$

Y ya podemos parar de sufrir. Para verificar su respuesta puede definir $P(x)=Q(x)+R(x)$ en su lenguaje de programación preferido y verificar que $P(x_i)=y_i$ para $i=1,2,\ldots,5$.

```
def P(x):
    return (x-3)*(x-4)*(x-5)*((-19/24) * x + (9/12) ) + (x-1)*(x-2)*( (1/12) *
x**2 - (19/12) * x + 6)

points = [(1,1), (2,5), (3,4), (4, 6), (5,2)]

for point in points:
    print(P(point[0]))
```

Ejercicio 4

Se quiere interpolar, utilizando puntos de Chebyshev la función $f(x) = e^{2x}$ en el intervalo $[0, r]$, encuentre una cota para el número mínimo de puntos necesarios para que el error sea menor que ε en dicho intervalo

Solución

Contamos con la siguiente cota para el error de nuestra interpolación:

$$f(x) - P(x) = \frac{(x - x_1)(x - x_2)\cdots(x - x_n)}{n!} f^{(n)}(c)$$

La estrategia será acotar el producto de diferencias, acotar la derivada n-ésima de f tomando un $c \in [0, r]$ adecuado para luego multiplicar estas dos cotas agregando el $n!$ para obtener la cota pedida.

Al utilizar los puntos de Chebyshev sabemos que tenemos acotado superiormente el producto de diferencias como:

$$|(x - x_1)\dots(x - x_n)| \leq \frac{(\frac{b-a}{2})^n}{2^{n-1}}$$

Para este caso la **cota superior del producto de diferencias** será:

$$\frac{(\frac{b-a}{2})^n}{2^{n-1}} = \frac{(\frac{(r-0)}{2})^n}{2^{n-1}} = \frac{r^n}{2^{2n-1}}$$

Luego, debemos acotar $(e^{2x})^{(n)}$. Sabemos que la derivada n-ésima de esta función viene dada por:

$$f^{(n)}(x) = (e^{2x})^{(n)} = 2^n e^{2x}$$

Como estamos interesados en una cota para el intervalo $[0, r]$ debemos notar que la expresión recién obtenida es creciente, por lo que obtendra su máximo valor al evaluarla en r. Así, la **cota superior para la derivada n-ésima** es $2^n e^{2r}$.

Finalmente, debemos multiplicar estas dos cotas y dividir por $n!$ para obtener la **cota superior del error** $f(x) - P(x)$:

$$\frac{r^n}{2^{2n-1}} \cdot 2^n e^{2r} \cdot \frac{1}{n!} = \frac{r^n e^{2r}}{n! \cdot 2^{n-1}}$$

Nos interesa que esto sea menor a un ε, por lo que basta tomar el primer n que cumpla la siguiente restricción para obtener la cota inferior pedida:

$$\frac{r^n e^{2r}}{n! \cdot 2^{n-1}} < \varepsilon$$

Notar que también podemos despejar n, pero queda una expresión más compleja.