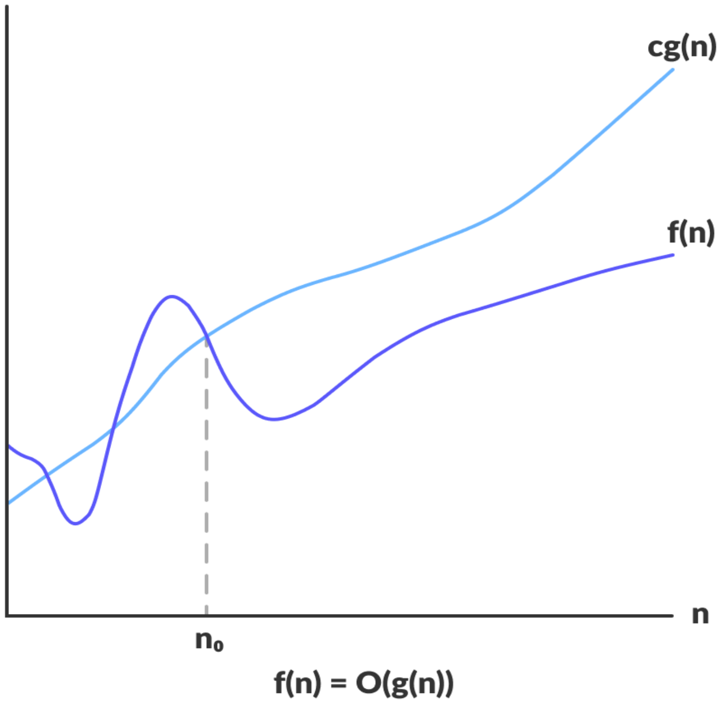
Algoritmos y complejidad



Ayudantía 1

Temario

- Asintóticas (más que todo Big O).
- Pérdida de significancia y errores.
- Ejercicios.

Asintóticas

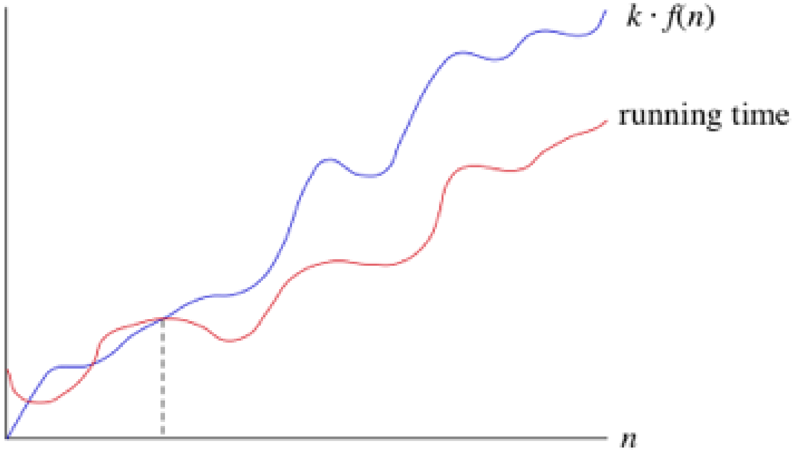
- Nos permiten conocer el comportamiento de una función $f(x)$ a medida que $x \to \infty$.
- Usada para clasificar algoritmos en función del **tiempo de ejecución** estimado mediante una función $f(n)$ que indica la cantidad de **operaciones clave** a realizarse.

Big O

- $f(x) = O(g(x))$.
- Existen x_0 y c tal que $\in \mathbb{R}$. $|f(x)| \leq c|g(x)|, x \geq x_0$.
- Permite expresar una **cota superior** a partir de un x_0.
- Se dice que f es **a lo más** de orden $O(g(x))$.
- Se puede leer como "f no crece más rápido que g".

> $O(f(x))$ hace referencia al **orden** de f, entendido como la **taza de crecimiento**.

- En la practica el valor de c no será de gran interés.
- Estrictamente deberíamos decir $f(x) \in O(g(x))$.
- En particular, la usaremos mucho para **acotar el error** e_n. A medida que $n \to \infty$, $O(e_n)$ (con un poco de suerte) se hará cero.



> The beauty of the O-notation is that it allows us to express, in a succinct and suggestive manner, the existence of such a constant without having to write down the constant. ❤️

Criterio límite

Si se cumple:

$$\lim_{x \to \infty} \frac{f(x)}{g(x)} = k$$

con $k \in \mathbb{R}$ podemos decir $f = O(g(x))$, aunque esta notación no siempre sea del todo ajustada.

➡️ En particular si el limite es 0, diremos que f es de **menor orden** que g, esto se expresa mediante *Little Oh*: $f(x) = o(g(x))$.

> En el área de la informática se suelen trabajar con funciones $f : \mathbb{N} \to \mathbb{R}^+$. Se busca describir el comportamiento de un algoritmo en función de la cantidad de datos n.

> Esto permite "olvidarse" de los valores absolutos en las definiciones. 🤔

Ejemplos 🙏

Acote superiormente las siguientes funciones definidas con dominio $\mathbb{N}$ utilizando la notación $O(g(n))$:

1. $f(n) = 10^{80}$
2. $f(n) = (20 \cdot n)^7$
3. $f(n) = log(n^{100})$
4. $f(n) = n^2 + 2n$
5. $f(n) = \sqrt{n+1}$
6. $f(n) = log(n)$
7. $f(n) = sin(n)$

Algunas propiedades 💡

1. $f(x) = O(f(x))$.
2. $O(O(f(x))) = O(f(x))$.
3. Si $f(x) = O(g(x))$ y $g(x) = O(h(x))$ entonces por transitividad $f(x) = O(h(x))$.
4. Si $g(x) = O(h(x))$, entonces $f(x) = cg(x) + O(h(x))$ es equivalente a $f(x) = O(h(x))$.
5. Si $f(x) = O(kg(x))$, entonces $f(x) = O(g(x))$ para $k > 0$.

Si $f_1(x) = O(g_1(x))$ y $f_2 = O(g_2(x))$, tenemos:

6. $f_1(x) + f_2(x) = O(|g_1(x)| + |g_2(x)|)$
7. $f_1(x) \cdot f_2(x) = O(|g_1(x)| \cdot |g_2(x)|)$
8. $f_1(x) - f_2(x) = O(|g_1(x)| + |g_2(x)|)$

⚠️ 💀 Especial cuidado con $O(g(x)) - O(g(x))$.

Para cualquier función $h(x)$:

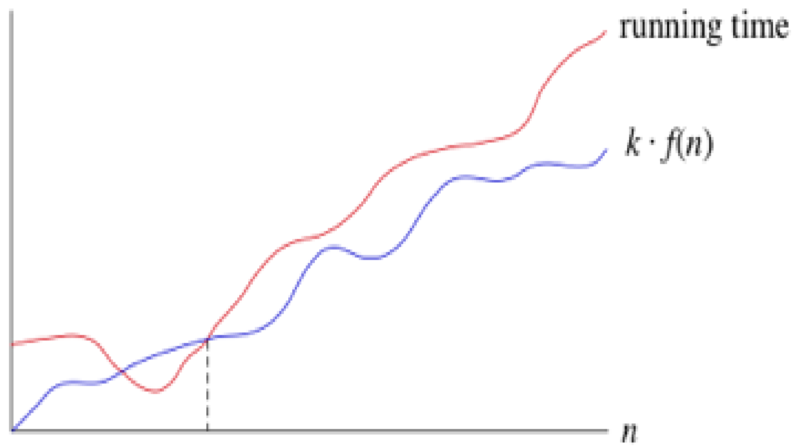
9. $h(x)(f_1(x) + f_2(x)) = O(|h(x)|(g_1(x) + |g_2(x)|)$.
10. Si $f(x) = O(g(x)h(x))$, entonces $f(x) = g(x)O(h(x))$

El orden de una suma de funciones viene dado por la función de **más rápido crecimiento** : 💡

11. $O(f + g + h + ...) = O(max(f, g, h, ...))$

Big Omega

- $f(x) = \Omega(g(x))$.
- Existen x_0 y c tal que $\in \mathbb{R}$. $|f(x)| \geq c|g(x)|, x \geq x_0$.
- Permite expresar una **cota inferior** a partir de un x_0.
- Se dice que f es **al menos** de orden $O(g(x))$.



Criterio límite

Si se cumple:

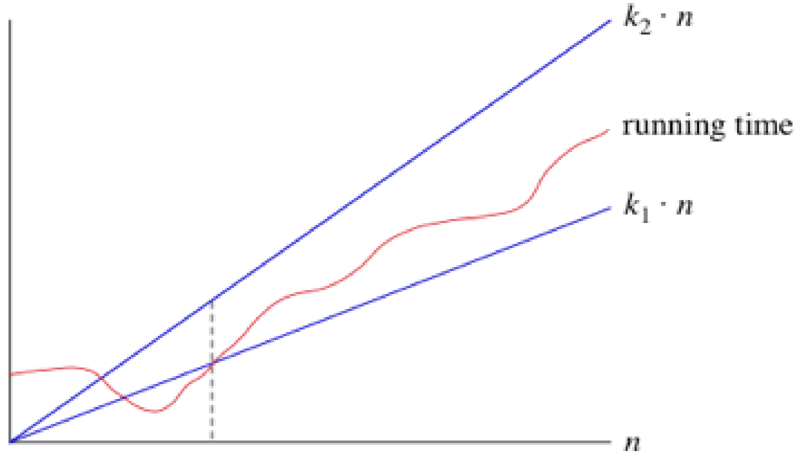
$$\lim_{x \to \infty} \frac{f(x)}{g(x)} = \infty$$

diremos $f(x) = \Omega(g(x))$.

➡️ Verifique $x = \Omega(log(x))$.

Big Theta

- $f(x) = \Theta(g(x))$.
- $f(x) = O(g(x))$ y $f(x) = \Omega(g(x))$.
- $f(x)$ a partir de x_0 se comporta igual que $g(x)$.
- Se dice que f y g son del **mismo orden**.



Criterio límite

Si se cumple:

$$\lim_{x \to \infty} \frac{f(x)}{g(x)} = k$$

con $k \in \mathbb{R} - \{0\}$, diremos $f(x) = \Theta(g(x))$.

➡️ En particular si $k = 1$, diremos $f \sim g$: esto significa que f **es igual** a g asintoticamente.

Errores y Pérdida de significancia

- A lo largo del curso, el manejo de errores es crucial.
- La pérdida de significancia amenaza nuestro objetivo: encontrar numéricamente buenas aproximaciones a diversos problemas.
- Esta pérdida de significancia se genera cuando restamos números que para nosotros son muy cercanos, pero **iguales para la máquina**. 🤖
- Generalmente la solución a estos problemas es simple, sin embargo notar su presencia no.

Ejemplo 🤖

Sea $f(x) = \frac{1-cos(x)}{sin^2(x)}$ y $g(x) = \frac{1}{1+cos(x)}$.

Es fácil notar que:

$$f(x) = \frac{1 - cos(x)}{sin^2(x)} \cdot \frac{1 + cos(x)}{1 + cos(x)} = \frac{1 - cos^2(x)}{(1 - cos^2(x))(1 + cos(x))} = g(x)$$

¿Qué pasa cuando $x \to 0$?

```python
import numpy as np
import pandas as pd

def f(x):
    return (1 - np.cos(x))/(np.sin(x))**2

def g(x):
    return 1/(1 + np.cos(x))

# Puntos a evaluar
points = [0.1, 0.01, 0.001, 0.0001, 1e-05, 1e-06, 1e-07, 1e-08, 1e-09, 1e-10]

# Generar imágenes para f y g
d = dict()
for x in points:
    #print("x = " + str(x) + " f(x) = " + str(f(x)) + " g(x) = " + str(g(x)))
    d[x] = [f(x), g(x)]

data = pd.DataFrame(d, index = ["f(x)", "g(x)"])
print(data.T)
```

Al ejecutar el código anterior, se obtiene la siguiente tabla: 🤔

x	f(x)	g(x)
1e-01	0.501252	0.501252
1e-02	0.500013	0.500013
1e-03	0.500000	0.500000
1e-04	0.500000	0.500000
1e-05	0.500000	0.500000
1e-06	0.500044	0.500000
1e-07	0.499600	0.500000
1e-08	0.000000	0.500000

- Esto ocurre porque la precisión requerida para los cálculos $f(x)$ excede la que nos otorga Python (doble precisión).
- La mantisa no da abasto, se debe hacer un redondeo o un recorte. Ambas alternativas provocan el mismo (triste) desenlace.

> Python sigue el estandar IEEE 754.

Errores

Sea x_c la aproximación de un número real x. Tenemos las clásicas formas de cuantificar el errror:

- Error absoluto: $\left|x_c - x\right|$
- Error relativo: $\frac{|x_c - x|}{|x|}$

> En problemas de mayor interés, no conoceremos el valor real x. ¿Cómo podríamos cuantificar el error? 🤔

Ejercicios

Encuentre cotas superiores ajustadas para:

1. $f(n) = log(log(n^n))$
2. $f(n) = \sum_{k=1}^{n} k^2$
3. $f(n) = \sum_{k=1}^{n} \sqrt{log\ k}$

4. Encuentre cotas ajustadas para $f(x) = x + xsin(x)^2$.

> Puede encontrar las constantes y luego graficar $f(x)$ y sus cotas para verificar su trabajo.

5. Demuestre $log(n^2 + 1) = O(log(n))$.
6. Simplifique $(1 + \frac{1}{x} + O(\frac{1}{x^2}))^2$.
7. Determine en qué parte de la fórmula para resolver ecuaciones de segundo grado podrían generarse problemas. Reestructure la ecuación para evitar la pérdida de significancia.