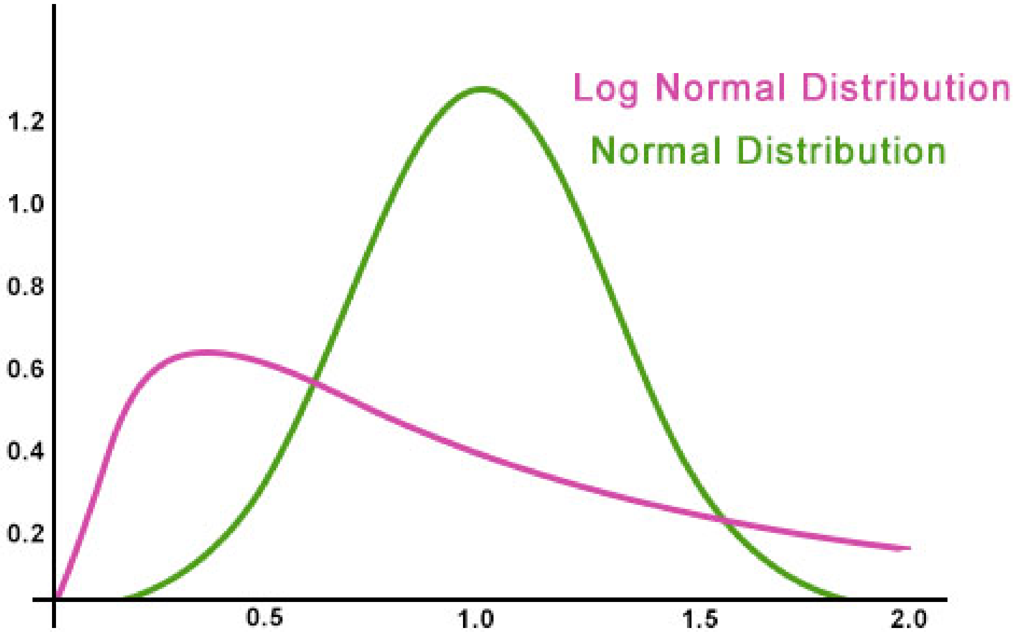
Estadística Computacional



Funciones de Variables Aleatorias y Generadora de Momentos 📈 🧐

Braulio Fuentes - Diego Quezada

Temario

- Funciones de Variables Aleatorias.
  - Transformaciones de Variables Aleatorias.
  - X no es uno a uno con Y.
  - Esperanza y Varianza.
- Función Generadora de Momentos.
  - Teoremas Importantes.

Funciones de Variables Aleatorias.

Por lo general podemos modelar un fenómeno en términos de una variable aleatoria X cuya función de distribución acumulada es $F(x)$. La pregunta es si estaremos también en condiciones de estudiar el comportamiento de aquellas variables aleatorias que son trasformaciones de X; una transformación uno a uno entre los valores de X y otra v.a. Y.

Transformaciones de Variables Aleatorias.

Cualquier función de X es también una variable aleatoria. Si se define $Y = h(X)$, es posible describir el comportamiento probabilístico de Y en términos de X.
La transformación *uno a uno* implica que cada valor x está relacionado con un único valor y, y que y está relacionado con un único valor x.

> En un proceso para refinar azúcar la cantidad real producida es una variable aleatoria debido a descomposturas de máquinas y otros problemas. Una transformación de V.A. serviría para calcular la utilidad diaria. 💰

- **Caso Discreto.**
  Suponga que X es una v.a. discreta con función masa de probabilidad f_x. Definimos una transformación uno a uno $Y = h(X)$, de manera que la ecuación $y = h(x)$ se resuelva exclusivamente para x en términos de y, digamos $x = h^{-1}(y)$. Entonces, función masa de probabilidad de Y es:

$$f_y = f_x \left(h^{-1}(y)\right)$$

- **Caso Continuo.**
  Suponga que X es una variable aleatoria continua con función densidad de probabilidad f_x. Definimos una transformación uno a uno $Y = h(X)$, de manera que la ecuación $y = h(x)$ se resuelva exclusivamente para x en términos de y, digamos $x = h^{-1}(y)$. Entonces, la función densidad de probabilidad de Y es:

$$f_y = f_x\left(h^{-1}(y)\right) \cdot \left| \frac{d\left(h^{-1}(y)\right)}{dy} \right|$$

X no es uno a uno con Y.

Vamos a suponer que la transformación entre los valores de X y Y no es uno a uno. Si el intervalo sobre el que se define X se puede dividir en k conjuntos mutuamente disjuntos, de manera que cada una de las funciones tenga inversas de $y = h(x)$:

$$x_1 = h_1^{-1}(y),\ x_2 = h_2^{-1}(y),\ \ldots\ , x_k = h_k^{-1}(y)$$

Entonces la distribución de probabilidad de Y es:

$$f_y = \sum_{i=1}^{k} f_x\left(h_i^{-1}(y)\right) \cdot \left| \frac{d\left(h_i^{-1}(y)\right)}{dy} \right|$$

Esperanza y Varianza.

- **Caso Discreto.**
  Si X es una variable discreta con una función masa de probabilidad f_x y $h(X)$ es cualquier función de X, entonces:

$$\begin{aligned} E[h(X)] &= \sum_i h(x_i) \cdot f_x(x_i) \\ &= \sum_i y_i \cdot f_y(y_i) \\ V[h(X)] &= E\left[(h(X))^2\right] - (E[h(X)])^2 \\ &= E[Y^2] - (E[Y])^2 \end{aligned}$$

- **Caso Continuo.**
  Si X es una variable aleatoria continua con función de densidad de probabilidad f_x y $h(X)$ es cualquier función de X, entonces:

$$
\begin{aligned}
E[h(X)] &= \int h(x) \cdot f_x(x) \cdot dx \\
&= \int y \cdot f_y(y) \cdot dy \\
V[h(X)] &= E\left[(h(X))^2\right] - (E[h(X)])^2 \\
&= E[Y^2] - (E[Y])^2
\end{aligned}
$$

Función Generadora de Momentos.

Para una distribución X en ocasiones tanto μ como σ no dan una única caracterización, existen distribuciones con los mismos valores. Los momentos son los valores esperados de ciertas funciones de X.

El $r-$ésimo momento alrededor del origen de la variable aleatoria X es dado por:

$$m_r = E(X^r) = \begin{cases} \sum x^r \cdot f(x) & \text{si } X \text{ es discreta} \\ \int x^r \cdot f(x) \cdot dx & \text{si } X \text{ es continua} \end{cases}$$

> Los momentos son un conjunto de medidas descriptivas que se usan para caracterizar una distribución.

Existe un procedimiento alternativo para determinar los momentos de una variable aleatoria, la ***función generadora de momentos***. Esta tiene la ventaja de permitir compactar todos los momentos para una variable aleatoria en una sola expresión, la cual para la variable aleatoria X es dada por:

$$\phi_X(t) = E\left[e^{tX}\right] = \begin{cases} \sum e^{tx} \cdot f(x) & \text{si } X \text{ es discreta} \\ \int e^{tx} \cdot f(x) \cdot dx & \text{si } X \text{ es continua} \end{cases}$$

> Las `fgm` existirán sólo si la sumatoria o integral converge.

Sea X una variable aleatoria con función generadora de momentos $\phi_X(t)$, el $r-$ésimo momento viene dado por:

$$m_r = \left.\frac{d^r\phi_X(t)}{dt^r}\right|_{t=0}$$

> Si las `fgm` de dos variables aleatorias X y Y son iguales para cualquier t, entonces X y Y tienen la misma distribución de probabilidad. 🤑

Teoremas importantes

1. $\phi_{aX+b}(t) = e^{b \cdot t} \cdot \phi_X(a \cdot t)$
2. Si $X_1, X_2, \ldots, X_n$ son v.a. independientes con funciones generadoras de momentos $\phi_{X_n}(t)$, y $Y = X_1 + X_2 + \cdots + X_n$, entonces:

$$\phi_Y(t) = \phi_{X_1}(t) \times \phi_{X_2}(t) \times \cdots \times \phi_{X_n}(t)$$