Estadística Computacional

Introducción a Teoría de Probabilidades 🎲 🃏

Braulio Fuentes - Diego Quezada

Temario

- ¿Qué es la Teoría de la Probabilidad?
- Conceptos Básicos.
- Axiomas y Propiedades.
- Probabilidad de un Evento
- Probabilidad Condicional
- Teorema de Bayes.
- Independencia Probabilística

¿Qué es la Teoría de la Probabilidad?.

La teoría de la probabilidad estudia fenómenos aleatorios y estocásticos.

Los fenómenos aleatorios se contraponen a los fenómenos deterministas, en los que conocer todos los factores de un experimento permite predecir exactamente el resultado del mismo.

> Si se calienta agua a 100 ºC a nivel del mar se obtendrá vapor. 🫖

En cambio, los fenómenos aleatorios son aquellos en que no se puede predecir o reproducir el resultado exacto de cada experiencia particular.

> El lanzamiento de un dado o de una moneda. 🪙

Conceptos Básicos.

- Un **experimento** es cualquier acción o proceso cuyo resultado está sujeto a la incertidumbre, no se puede predecir el resultado exacto de cada experiencia particular.

> Sacar dos cartas de un mazo de naipe ingles ♠♣♥♦

- El **espacio muestral**, Ω, de un experimento es el conjunto de todos los posibles resultados de dicho experimento.

> Todas las combinaciones posibles al sacar dos cartas de un mazo de naipe ingles (♠♥,♣♦, etc)

- Un **evento** es cualquier subconjunto de resultados contenidos en el espacio muestral.

> Sacar dos cartas de pinta color rojo ♥ ♦

- Se dice que dos eventos son **mutuamente excluyentes** (disjuntos) si ninguno de los dos eventos pueden suceder simultáneamente.

- Se dice que dos eventos son **equiprobables** cuando ambos tienen las mismas oportunidades de ocurrir.
- Se dice que un grupo de eventos es **exhaustivos** si la union de todos estos es igual al espacio muestral.

Axiomas y Propiedades

Diremos que la probabilidad de un evento A, $P(A)$, perteneciente al espacio muestral Ω, es una medida precisa de la oportunidad de que A ocurra. Esta debe satisfacer los siguientes axiomas:

- **Axioma 1.** Para cualquier evento A, $P(A) \geq 0$.
- **Axioma 2.** $P(\Omega) = 1$
- **Axioma 3.** Si $A_1, A_2, A_3, \ldots$ es un conjunto de eventos mutuamente excluyentes, entonces:

$$P(A_1 \cup A_2 \cup A_3 \cup \ldots) = \sum_i P(A_i)$$

Sean dos eventos A y B, pertenecientes al espacio muestral Ω. Podemos enumerar las siguientes propiedades:

1. $P(A) \leq 1$
2. $P(\Omega \setminus A) = P(A^c) = 1 - P(A)$
3. $A \subseteq B \to P(A) \leq P(B)$
4. $P(\Omega^c) = P(\varnothing) = 0$
5. $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$

Probabilidad de un Evento

Sea $|\Omega|$ el tamaño del espacio muestral, *resultados posibles*, y $|A|$ el número de elementos pertenecientes al evento A, *resultados favorables*. La probabilidad de ocurrencia del evento A viene dada por:

$$P(A) = \frac{|A|}{|\Omega|}$$

> En un mazo de 52 cartas de naipe ingles la cantidad de cartas de pinta roja, ♥ ♦, es 26.
> Con lo que la probabilidad de escoger una carta de pinta roja es igual $\frac{26}{52} = 0.5$

Probabilidad Condicional

Sean dos eventos A y B, la probabilidad de que ocurra el evento A dado que ya ha ocurrido el evento B se define como:

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$$

> Si sabemos que hemos escogido una carta de corazón de un naipe ingles (evento B). ¿Cual es la probabilidad de que esa carta sea un número par? (evento A) ♥️
> Entonces $P(A|B) = \frac{\frac{5}{52}}{\frac{13}{52}} = \frac{5}{13} \approx 0.38$

Teorema de Bayes

Sean $A_1, \ldots, A_k$ eventos mutuamente excluyentes y exhaustivos y otro evento B.

- **Ley de probabilidad total**

$$P(B) = \sum_{i=1}^{k} P(A_i \cap B) = \sum_{i=1}^{k} P(A_i|B) \cdot P(A_i)$$

- **Regla de Bayes**

$$P(A_i|B) = \frac{P(A_i \cap B)}{P(B)} = \frac{P(B|A_i) \cdot P(A_i)}{P(B)}$$

> Si existen pocos eventos en la partición se puede realizar un diagrama de árbol para calcular las probabilidades 😄.

Independencia Probabilística

Sean dos eventos A y B, se dice que ambos son independientes cuando la probabilidad de ocurrencia de A no se ve afecta por la ocurrencia de B.

Cuando ambos eventos son independientes tenemos que:

- $P(A|B) = P(A)$
- $P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$

En caso contrario, ambos eventos son dependientes.