EXAMEN FINAL

ANÁLISIS NUMÉRICO I / ANÁLISIS NUMÉRICO

22/07/2025

Apellido y Nombre:

Carrera:

Condición:

Cantidad de hojas (sin contar hoja de enunciados):

Nota: Todos los desarrollos deben estar debidamente justificados.

Práctico						Teórico			Lab.		
1	2	3	4	Libre	Total	1	2	Total	Total	Total	NOTA

Parte Práctica

1. Sean $f(x) = \log(x+1)$ y $g(x) = \tan(2x)$.
   (a) Probar que las funciones f y g se intersecan en más de un punto.
   (b) Justificar cómo usar el método de bisección para hallar el primer $x_0 > 0$ tal que $f(x_0) = g(x_0)$.
   (c) Estimar cuántas iteraciones se requieren para hallar la aproximación con un error absoluto menor que una tolerancia ϵ.
   (d) Aproximar el punto de intersección positivo con un error absoluto menor que 5×10^{-2}.

2. Mostrar que la mejor parábola que aproxima en el sentido de cuadrados mínimos a los puntos $(-2,0)$, $(0,-2)$, $(2,1)$ y $(4,2)$ es
$$y = \frac{3}{16}x^2 + \frac{3}{40}x - \frac{19}{20}.$$

3. Considerar la siguiente integral
$$\int_1^2 x^{-1}\,dx.$$
   (a) Encontrar un valor aproximado de la integral aplicando la regla compuesta de Simpson con $h = 0.25$.
   (b) Dar una cota para el error.

4. Considerar el siguiente problema de programación lineal:
$$\begin{array}{rl} \text{Maximizar} & z = 3x_1 + 2x_2 + x_3 \\ \text{sujeto a} & x_1 + 2x_2 + x_3 \leq 10 \\ & 2x_1 + x_2 + 3x_3 \leq 15 \\ & x_1, x_2, x_3 \geq 0 \end{array}$$
   (a) Escribir el problema anterior en su forma estándar.

(b) Resolver el problema utilizando el método simplex. Justificar cada paso del procedimiento e identificar la solución óptima.

5. **(Sólo alumnos libres)** Si $x, y \geq 0$, demostrar que:

$$\left| \frac{x + y - fl(fl(x) + fl(y))}{x + y} \right| \leq 2\epsilon + \epsilon^2,$$

donde, para cualquier x, $fl(x) = x(1 + \delta_x)$ y $|\delta_x| \leq \epsilon$.

Parte Teórica

1. (50 puntos) Completar el enunciado del teorema de iteración de punto fijo y **demostrarlo**.

   Teorema. Sea $g \in C[a, b]$ tal que $g(x) \in [a, b]$ para todo $x \in [a, b]$. Supongamos que existe $g'(x)$ para todo $x \in (a, b)$ y que ....

   ....

   Entonces ....

   ....

2. (50 puntos) Explicar en qué consiste el método de iteración de Jacobi para sistemas lineales. Enunciar y demostrar el teorema de convergencia del método de Jacobi para matrices diagonalmente dominantes.