Notas:

- **Todos los desarrollos deben estar debidamente justificados.**
- **El ejercicio para libres NO suma puntaje para los regulares.**

Parte Práctica

1. (20 puntos) La función $f(x) = x^5 - x - 1$ tiene una única raíz. Se quiere hallar dicha raíz mediante el método de punto fijo.

   10 (a) Proponer una función de iteración g y un intervalo que asegure la convergencia de la sucesión $x_{n+1} = g(x_n)$ a la raíz de $f(x)$.

   10 (b) Elegir un punto x_0 en el intervalo obtenido en el inciso anterior y dar una cantidad suficiente de iteraciones para que el error sea menor a 10^{-2}.

2. (25 puntos) Se desea aproximar una función con interpolación polinómica y se tienen los siguientes datos:

x	$f(x)$	$f'(x)$
-1	4	6
0	6	
1	8	6

   10 (a) Obtener el polinomio interpolante $p(x)$ utilizando el método de Newton para los valores $x = -1, 0, 1$ y sus valores funcionales.

   10 (b) Obtener el polinomio interpolante $q(x)$ utilizando el método de Hermite para los valores $x = -1, 1$, los valores funcionales y los valores funcionales de la derivada.

   5 (c) Corrobore que $q(0) = 6$. ¿Podría ser $q(x)$ el polinomio interpolante del inciso (a)? Argumente su elección.

3. (25 puntos) Considerar la matriz:

$$A = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 1 & 6 & -2 \\ 4 & -3 & 8 \end{bmatrix}$$

   (a) Deducir la iteración de Gauss-Seidel para resolver el sistema lineal $Ax = b$ para algún vector $b \in \mathbb{R}^3$.

(b) ¿Es esta iteración convergente? Justificar la respuesta.

4. (30 puntos) Considerar las siguientes restricciones:

$$\begin{cases} x - y \leq 2, \\ x + y \leq 3, \\ 3x + y \geq 3, \\ x \geq 0, y \geq 0. \end{cases}$$

(a) Graficar la región factible determinada por este sistema de restricciones.

(b) Minimizar la función $z(x, y) = x + 2y$ sobre la región factible. Justificar la respuesta indicando en qué punto se alcanza el mínimo.

(c) Supongamos ahora que la función objetivo es el cuadrado de la distancia euclidiana al punto $\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$, dada por

$$z(x, y) = \left(x - \tfrac{1}{2}\right)^2 + \left(y - \tfrac{1}{2}\right)^2.$$

Determinar gráficamente el punto de la región factible que minimiza esta función. Comparar con el resultado del ítem anterior: ¿el mínimo se alcanza en alguno de los vértices? Justificar brevemente la respuesta en función de la forma de la función objetivo.

5. **(Sólo alumnos libres)** (10 puntos)

(a) Mostrar que $\sqrt{x^4 - 9} = \mathcal{O}(x^2 + 3)$

(b) Dados $x_n = \frac{n^3 - n^2}{4(n^4 - n^3)}$ y $\alpha_n = \frac{n}{n+1}$. Mostrar que $x_n = o(\alpha_n)$.

Parte Teórica

1. (60 puntos) Completar el enunciado del siguiente teorema y demostrarlo.

Teorema 1. Sea $f : [a_0, b_0] \to \mathbb{R}$ una función continua tal que $f(a_0)f(b_0) < 0$. Si $[a_0, b_0], [a_1, b_1], \ldots, [a_n, b_n], \ldots$ denotan los sucesivos intervalos en el método de bisección, entonces las sucesiones $\{a_n\}$ y $\{b_n\}$ son convergentes y, a su vez, $\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} b_n = r$ donde r es una raíz de f, es decir, $f(r) = 0$.

Además, si $c_n = \frac{1}{2}(a_n + b_n)$ y $r = \lim_{n\to\infty} c_n$, entonces $|r - c_n| \leq \frac{b_0 - a_0}{2^{n+1}}$.

2. (40 puntos) ¿Qué es una fórmula de cuadratura para integración numérica? Desarrolle el concepto. ¿Qué particularidades poseen las fórmulas de cuadratura gaussiana? ¿Qué ventajas presentan a diferencia de las demás fórmulas de cuadraturas?