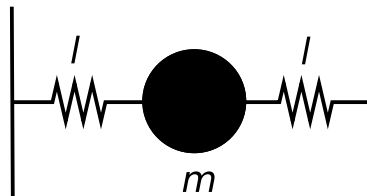


GUÍA 1: OSCILACIONES CON UN GRADO DE LIBERTAD

1. Escriba y resuelva las ecuaciones de movimiento asociadas con los siguientes sistemas:

- Péndulo de longitud  $l$  en presencia de un campo gravitatorio de constante  $g$ . Discuta todas las aproximaciones que realiza.
- Oscilaciones longitudinales de una masa  $m$  sujeta a dos paredes mediante dos resortes iguales de constante  $k$ ; para los dos casos:
  - longitud natural del resorte  $l_0$  ( $l_0 < l$ ), y
  - slinky ( $l_0 = 0$ ).
- Oscilaciones transversales del sistema del punto anterior, discutiendo las diferencias entre los casos i) y ii), y analizando cuidadosamente las aproximaciones que realiza. En el caso i) analice la diferencia entre considerar que los resortes están tensionados en la posición de equilibrio ( $l_0 < l$ ) o que están relajados en dicha posición ( $l_0 = l$ ).



- Verifique que si  $\Psi_1$  y  $\Psi_2$  son soluciones de la ecuación del oscilador armónico libre, cualquier combinación lineal  $\Psi = A_1\Psi_1 + A_2\Psi_2$  también es solución. Muestre que esto también vale si la fuerza disipativa es proporcional a la velocidad. ¿Vale si es un rozamiento constante?
- Considere el movimiento de una masa  $m$  sujeta a un resorte de constante elástica  $K = m\omega_0^2$  y constante de amortiguamiento por unidad de masa  $\Gamma$ . La solución general está dada por:

$$[x(0)\cosh(\omega t) - \frac{2\dot{x}(0)}{\omega\Gamma}\sinh(\omega t)]e^{-\frac{\Gamma}{2}t}$$

con  $\omega^2 = \frac{1}{4}\Gamma^2 - \omega_0^2$ . Discuta los casos en que  $\omega$  es real,  $\omega$  es imaginaria y  $\omega$  vale cero.

- [En clase con PC] Dadas las ecuaciones del oscilador armónico  $\ddot{x} = -\omega_0^2 x$  y el oscilador armónico con pérdidas  $\ddot{x} = -\omega_0^2 x - \Gamma\dot{x}$ , escribálas como sistemas de ecuaciones de dos variables llamando  $v$  a  $\dot{x}$ . Para ambos casos:
  - Dibuje en el plano  $(x, v)$  dos curvas  $v(x)$ : la primera donde  $\dot{x}$  vale cero y la segunda donde  $\dot{v}$  vale cero.
  - Dibuje los vectores  $(\dot{x}, \dot{v})$  en distintos puntos del plano  $(x, v)$
  - Dibuje una trayectoria para algún valor de condiciones iniciales

- Escriba la ecuación de movimiento para una masa  $m$  sujeta a un resorte de constante elástica  $k$  y constante de amortiguamiento por unidad de masa  $\Gamma$ , sobre la que se realiza una fuerza dependiente del tiempo  $F(t)$ .
  - Proponga la siguiente solución homogénea:  $x_h(t) = Ce^{-t/2\tau} \cos(\omega_1 t + \theta)$  y halle los valores de  $\tau$  y de  $\omega_1$ . ¿De qué depende el valor de  $C$  y de  $\theta$ ? ¿Es lícito plantear las condiciones iniciales sobre la solución homogénea?
  - Considere que  $F(t)$  tiene la forma  $F(t) = F_0 \cos(\omega t)$  (discuta si se pierde generalidad al suponer que la fuerza externa tiene esa forma) y proponga la siguiente solución particular:  $x_p(t) = A \sin(\omega t) + B \cos(\omega t)$ . Obtenga  $A$  y  $B$ . Grafique cualitativamente  $A$  y  $B$  en función de  $\omega$ .

- c) Grafique cualitativamente la posición de la masa en función del tiempo.
  - d) Calcule la potencia media que se consume en el estado estacionario y la potencia media de pérdida por fricción. Verifique la igualdad de ambas potencias.
  - e) Verifique que si  $x_1(t)$  es solución de la ecuación diferencial cuando la fuerza externa es  $F_1(t)$  y  $x_2(t)$  lo es cuando la fuerza externa es  $F_2(t)$ , entonces  $x(t) = x_1(t) + x_2(t)$  será solución de la ecuación diferencial cuando la fuerza externa sea  $F(t) = F_1(t) + F_2(t)$  si y sólo si las condiciones iniciales son la suma de las condiciones iniciales de los dos casos.
  - f) Proponga ahora como solución particular la solución compleja  $x_p(t) = Ae^{-i\omega t}$  y demuestre que  $\Re(A) = A_{elástico}$  y que  $\Im(A) = A_{absorbente}$ . ¿Por qué es así?
6. Sea un oscilador armónico con una frecuencia de oscilación  $\nu_0 = 10$  Hz y con un tiempo de decaimiento muy largo. Si este oscilador es alimentado con una fuerza armónicamente oscilante y con una frecuencia de 10 Hz, adquirirá una gran amplitud, es decir, “resonará” en la frecuencia de excitación. Ninguna otra fuerza motriz oscilante en forma armónica producirá una gran amplitud (una resonancia).
- a) Justifique el enunciado anterior.
  - b) Luego suponga que el oscilador está sujeto a una fuerza que es una pulsación cuadrada repetida periódicamente y cuya duración es 0,01 s repetida una vez por segundo. Describa cualitativamente el análisis de Fourier de la pulsación cuadrada repetitiva.
  - c) ¿“Resonará” el oscilador armónico (adquirirá una gran amplitud) bajo la influencia de esta fuerza motriz?
  - d) Suponga que la fuerza motriz es la misma pulsación cuadrada (de ancho 0,01 s) pero repetida dos veces por segundo. ¿Resonará el oscilador? Responder a la misma pregunta para velocidades de repetición de 3 a 9 segundos.
7. Se tiene un péndulo que oscila con una disipación tal que su amplitud se reduce un 10 % cada 10 oscilaciones. ¿Con que precisión deberíamos determinar su longitud para notar el corrimiento en su frecuencia debido al rozamiento?