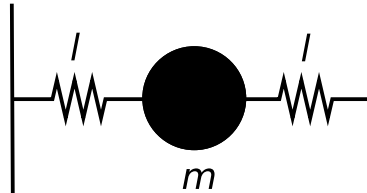


GUÍA 1: OSCILACIONES CON UN GRADO DE LIBERTAD

1. Escriba y resuelva las ecuaciones de movimiento asociadas con los siguientes sistemas:

- Péndulo de longitud  $l$  en presencia de un campo gravitatorio de constante  $g$ . Discuta todas las aproximaciones que realiza.
- Oscilaciones longitudinales de una masa  $m$  sujeta a dos paredes mediante dos resortes iguales de constante  $k$ ; para los dos casos:
  - longitud natural del resorte  $l_0$  ( $l_0 < l$ ), y
  - slinky ( $l_0 = 0$ ).
- Oscilaciones transversales del sistema del punto anterior, discutiendo las diferencias entre los casos 1) y 2), y analizando cuidadosamente las aproximaciones que realiza. En el caso 1) analice la diferencia entre considerar que los resortes están tensionados en la posición de equilibrio ( $l_0 < l$ ) o que están relajados en dicha posición ( $l_0 = l$ ).



- Verifique que si  $\Psi_1$  y  $\Psi_2$  son soluciones de la ecuación del oscilador armónico libre, cualquier combinación lineal  $\Psi = A_1\Psi_1 + A_2\Psi_2$  también es solución. Muestre que esto también vale si la fuerza disipativa es proporcional a la velocidad. ¿Vale si es un rozamiento constante?
- Considere el movimiento de una masa  $m$  sujeta a un resorte de constante elástica  $K = m\omega_0^2$  y constante de amortiguamiento por unidad de masa  $\Gamma$ . La solución general está dada por:

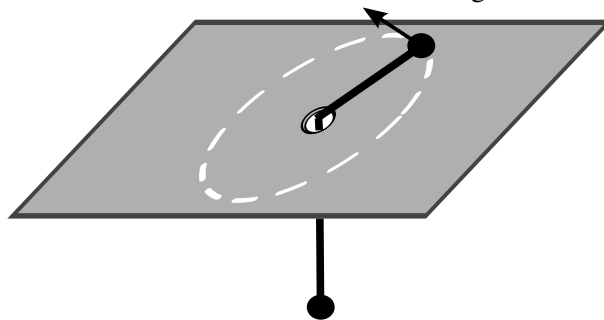
$$\psi(t) = [x(0)\cosh(\omega t) - \frac{2\dot{x}(0)}{\omega\Gamma}\sinh(\omega t)]e^{-\frac{\Gamma}{2}t}$$

con  $\omega^2 = \frac{1}{4}\Gamma^2 - \omega_0^2$ . Discuta los casos en que  $\omega$  es real,  $\omega$  es imaginaria y  $\omega$  vale cero.

- [En clase con PC] Dadas las ecuaciones del oscilador armónico  $\ddot{x} = -\omega_0^2 x$  y el oscilador armónico con pérdidas  $\ddot{x} = -\omega_0^2 x - \Gamma\dot{x}$ , escribalas como sistemas de ecuaciones de dos variables llamando  $v$  a  $\dot{x}$ . Para ambos casos:
  - Dibuje en el plano  $(x, v)$  dos curvas  $v(x)$ : la primera donde  $\dot{x}$  vale cero y la segunda donde  $\dot{v}$  vale cero.
  - Dibuje los vectores  $(\dot{x}, \dot{v})$  en distintos puntos del plano  $(x, v)$
  - Dibuje una trayectoria para algún valor de condiciones iniciales

- Escriba la ecuación de movimiento para una masa  $m$  sujeta a un resorte de constante elástica  $k$  y constante de amortiguamiento por unidad de masa  $\Gamma$ , sobre la que se realiza una fuerza dependiente del tiempo  $F(t)$ .
  - Proponga la siguiente solución homogénea:  $x_h(t) = Ce^{-t/2\tau} \cos(\omega_1 t + \theta)$  y halle los valores de  $\tau$  y de  $\omega_1$ . ¿De qué depende el valor de  $C$  y de  $\theta$ ? ¿Es lícito plantear las condiciones iniciales sobre la solución homogénea?
  - Considere que  $F(t)$  tiene la forma  $F(t) = F_0 \cos(\omega t)$  (discuta si se pierde generalidad al suponer que la fuerza externa tiene esa forma) y proponga la siguiente solución particular:  $x_p(t) = A \sin(\omega t) + B \cos(\omega t)$ . Obtenga  $A$  y  $B$ . Grafique cualitativamente  $A$  y  $B$  en función de  $\omega$ .

- c) Grafique cualitativamente la posición de la masa en función del tiempo.
- d) Calcule la potencia media que se consume en el estado estacionario y la potencia media de pérdida por fricción. Verifique la igualdad de ambas potencias.
- e) Verifique que si  $x_1(t)$  es solución de la ecuación diferencial cuando la fuerza externa es  $F_1(t)$  y  $x_2(t)$  lo es cuando la fuerza externa es  $F_2(t)$ , entonces  $x(t) = x_1(t) + x_2(t)$  será solución de la ecuación diferencial cuando la fuerza externa sea  $F(t) = F_1(t) + F_2(t)$  si y sólo si las condiciones iniciales son la suma de las condiciones iniciales de los dos casos.
- f) Proponga ahora como solución particular la solución compleja  $x_p(t) = Ae^{-i\omega t}$  y demuestre que  $\Re(A) = A_{elástico}$  y que  $\Im(A) = A_{absorbente}$ . ¿Por qué es así?
6. Se tiene un péndulo que oscila con una disipación tal que su amplitud se reduce un 10% cada 10 oscilaciones. ¿Con que precisión deberíamos determinar su longitud para notar el corrimiento en su frecuencia debido al rozamiento?
7. Dos cuerpos de igual masa  $m$  están atadas como se ve en la figura. La masa de arriba gira describiendo



un círculo de radio  $R$ .

- a) Escribir las ecuaciones de movimiento para ambas masas y la ecuación de vínculo. Mostrar que todo el sistema se puede reducir a una única ecuación diferencial de orden 2.
- b) Si ahora se tira levemente de la masa de abajo el sistema comienza a oscilar. Calcular la frecuencia de esa oscilación.