Lógica Computacional

Diego Silveira Costa Nascimento

Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia do Rio Grande do Norte
diego.nascimento@ifrn.edu.br

20 de abril de 2019

Ementa do Curso

1. Introdução
2. Lógica Proposicional
3. Construção de Tabelas-verdade
4. Implicação e Equivalência Lógica
5. Método Dedutivo

Ementa do Curso

1. Introdução
2. Lógica Proposicional
3. Construção de Tabelas-verdade
4. Implicação e Equivalência Lógica
5. Método Dedutivo

Lógica

Definição

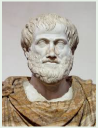
É a ciência das leis ideais do pensamento e a arte de aplicá-las à pesquisa e à demonstração da verdade.

- Deriva do Grego (logos); e
- Significa:
    - palavra;
    - pensamento;
    - ideia;
    - argumento;
    - relato;
    - razão
    - lógica; ou
    - princípio lógico.

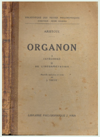
Origem

- A Lógica teve início na Grécia em 342 a.C.;
- Aristóteles sistematizou os conhecimentos existentes em Lógica, elevando-a à categoria de ciência;
- Obra chamada Organon (Ferramenta para o correto pensar);
- Aristóteles preocupava-se com as formas de raciocínio que, a partir de conhecimentos considerados verdadeiros, permitiam obter novos conhecimentos; e
- A partir dos conhecimentos tidos como verdadeiros, caberia à Lógica a formulação de leis gerais de encadeamentos lógicos que levariam à descoberta de novas verdades.

Aristóteles



Organon



Princípios Lógico

A Lógica Formal repousa sobre três princípios fundamentais que permitem todo seu desenvolvimento posterior, e que dão validade a todos os atos do pensamento e do raciocínio.

Princípio da Identidade

Afirma $A = A$ e não pode ser B, o que é, é.

Princípio da Não Contradição

$A = A$ e nunca pode ser não-A, o que é, é e não pode ser sua negação, ou seja, o ser é, o não ser não é.

Princípio do Terceiro Excluído

Afirma que Ou A é x ou A é y, não existe uma terceira possibilidade.

Ementa do Curso

1. Introdução
2. Lógica Proposicional
3. Construção de Tabelas-verdade
4. Implicação e Equivalência Lógica
5. Método Dedutivo

Proposição

- Chama-se proposição todo o conjunto de palavras ou símbolos que exprimem um pensamento de sentido completo;
- As proposições transmitem pensamentos; e
- Afirmam fatos ou exprimem juízos que formamos a respeito de determinados entes.

Exemplos

A Lua é um satélite da terra
Sócrates é um homem
Eu estudo lógica
Não está chovendo

A Linguagem

Considere o conjunto de símbolos:

$A = \{(,), \neg, \wedge, \vee, \rightarrow, \leftrightarrow, p, q, r, ...\}$

- A esse conjunto é chamado de alfabeto da Lógica Proposicional;
- As letras são símbolos não lógico (letras sentenciais); e
- O restante são símbolos lógicos (parênteses e conectivos lógicos).

Letras Sentenciais

As letras sentenciais são usadas para representar proposições elementares ou atômicas, isto é, proposições que não possuem partes que sejam também proposições.

Exemplos

p = O céu é azul
Q = Eu estudo lógica
r = $2 + 2 = 4$
s = Sócrates é um homem

Importante

As partes dessas proposições não são proposições mais simples, mas sim, componentes subsentenciais: expressões, palavras, sílabas ou letras.

Conectivos Lógicos

- As proposições compostas são obtidas combinando proposições simples através de certos termos chamados conectivos;
- A Lógica dispõe de cinco tipos de conectivos e seus operadores:
  - Não (Negação), $\neg$;
  - E (Conjunção), $\wedge$;
  - Ou (Disjunção), $\vee$;
  - Se – então (Condicional), $\rightarrow$;e
  - Se e somente se (Bicondicional), $\leftrightarrow$.

Operador de Negação

A característica peculiar da negação, tal como ela se apresenta na lógica proposicional clássica, é que toda proposição submetida à operação de negação resulta na sua contraditória.

Exemplos

$p =$ Está chovendo.
Ler-se $\neg p$, como: "Não está chovendo".

Tabela-verdade para Negação

- Se p é uma proposição, a expressão $\neg p$ é chamada negação de p; e
- Claramente, a negação inverte o valor verdade de uma expressão.

Exemplos

p	$\neg$**p**
V	F
F	V

Operador de Conjunção

A característica peculiar da conjunção está no fato de fórmulas conjuntivas expressarem a concomitância de fatos. A fórmula $(p \wedge q)$ expressa que o fato expresso por p ocorre ao mesmo tempo que o fato expresso por q.

Exemplos

$p =$ Está chovendo.
$q =$ Está ventando.
Ler-se $p \wedge q$, como: "Está chovendo e está ventando."

Tabela-verdade para Conjunção

- Se p e q são proposições, a expressão $p \wedge q$ é chamada conjunção de p e q; e
- As proposições p e q são chamadas fatores da expressão.

Exemplos

p	**q**	**p $\wedge$ q**
V	V	V
V	F	F
F	V	F
F	F	F

Operador de Disjunção

A característica peculiar da disjunção consiste no fato de proposições disjuntivas expressarem que pelo menos um de dois fatos ocorre. A fórmula $(p \vee q)$ expressa que, dentre os fatos expressos por p e q respectivamente, pelo menos um deles ocorre.

Exemplos

$p =$ Está nublado.
$q =$ Está chovendo.
Ler-se $p \vee q$, como: "Está nublado ou está chovendo."

Tabela-verdade para Disjunção

- Se p e q são proposições, a expressão $p \vee q$ é chamada disjunção inclusiva de p e q; e
- As proposições p e q são chamadas parcelas da expressão.

Exemplos

p	**q**	**p $\vee$ q**
V	V	V
V	F	V
F	V	V
F	F	F

Operador Condicional

A característica peculiar dessa operação consiste em que um condicional ($p \rightarrow q$) expressa que a ocorrência do fato expresso por p garante necessariamente a ocorrência do fato expresso por q.

Exemplos

$p =$ Choveu.
$q =$ Está molhado.
Ler-se $p \rightarrow q$, como: "Se choveu, então está molhado."

Tabela-verdade para Condicional

- Se p e q são proposições, a expressão $p \rightarrow q$ é chamada condicional de p e q;
- A proposição p é chamada antecedente, e a proposição q consequente da condicional; e
- A operação de condicionamento indica que o acontecimento de p é uma condição para que q aconteça.

Exemplos

p	**q**	$\mathbf{p \rightarrow q}$
V	V	V
V	F	F
F	V	V
F	F	V

Operador Bicondicional

A característica peculiar dessa operação consiste em que um bicondicional ($p \leftrightarrow q$) assevera que os fatos expressos por p e q são interdependentes, isto é, ou os dois ocorrem juntos ou nenhum dos dois ocorrem.

Exemplos

$p =$ Será aprovado.
$q =$ Estudar.
Ler-se $p \leftrightarrow q$, como: "Aprenderá, se e somente se estudar".

Tabela-verdade para Bicondicional

- Se p e q são proposições, a expressão $p \leftrightarrow q$ é chamada bicondicional de p e q; e
- A operação de bicondicionamento indica que p é uma condição para que q aconteça, e vice-versa.

Exemplos

p	**q**	**p $\leftrightarrow$ q**
V	V	V
V	F	F
F	V	F
F	F	V

A necessidade de usar parênteses na simbolização das proposições se deve ao fato de se evitar qualquer tipo de ambiguidade.

Exemplos

$p =$ Estudar.
$q =$ Fazer a prova.
$r =$ Fazer o trabalho.
$s =$ Serei aprovado.
Ler-se $((p \wedge q) \vee r) \rightarrow s$, como:
"Se ((estudar e fazer a prova) ou fazer o trabalho), então será aprovado."

Ementa do Curso

1. Introdução
2. Lógica Proposicional
3. Construção de Tabelas-verdade
4. Implicação e Equivalência Lógica
5. Método Dedutivo

Proposição Composta

Dadas várias proposições simples $p, q, r, \ldots$, podemos combiná-las pelos operadores lógicos $\wedge, \vee, \rightarrow, \leftrightarrow$ e construir proposições compostas:

- Então, com o emprego das tabelas-verdade das operações lógicas fundamentais já estudadas: $\neg p, p \wedge q, p \vee q, p \rightarrow q$ e $p \leftrightarrow q$;
- É possível construir a tabela-verdade correspondente a qualquer proposição composta; e
- A tabela-verdade exibirá exatamente os casos em que a proposição composta será verdadeira (V) ou falsa (F), admitindo-se que o seu valor lógico só depende dos valores lógicos das proposições simples.

Ordem de Precedência dos Operadores

1. Percorra a expressão da esquerda para a direita, executando as operações de negação, na ordem em que aparecerem;
2. Percorra novamente a expressão, da esquerda para a direita, executando as operações de conjunção e disjunção, na ordem em que aparecerem;
3. Percorra outra vez a expressão, da esquerda para a direita, executando desta vez as operações de condicionamento, na ordem em que aparecerem; e
4. Percorra uma última vez a expressão, da esquerda para a direita, executando as operações de bicondicionamento, na ordem em que aparecerem.

Construindo a Tabela-verdade (Passo 1)

Proposição

$\neg(p \wedge \neg q)$

- Forma-se, em primeiro lugar, o par de colunas correspondentes às duas proposições simples p e q; e
- O total de linhas é igual a 2^n, onde n corresponde ao número de proposições simples.

Exemplo

p	q
V	V
V	F
F	V
F	F

Construindo a Tabela-verdade (Passo 2)

- Em seguida, forma-se a coluna para $\neg q$.

Exemplo

p	q	$\neg q$
V	V	F
V	F	V
F	V	F
F	F	V

Construindo a Tabela-verdade (Passo 3)

- Depois, forma-se a coluna para $p \wedge \neg q$.

Exemplo

p	q	$\neg q$	$p \wedge \neg q$
V	V	F	F
V	F	V	V
F	V	F	F
F	F	V	F

Construindo a Tabela-verdade (Passo 4)

- Por fim, forma-se a coluna relativa aos valores lógicos da proposição composta $\neg(p \wedge \neg q)$.

Exemplo

p	q	$\neg q$	$p \wedge \neg q$	$\neg(p \wedge \neg q)$
V	V	F	F	V
V	F	V	V	F
F	V	F	F	V
F	F	V	F	V

Definição

Tautologia é toda proposição composta $P(p, q, r, ...)$ cujo valor lógico é sempre verdadeiro, quaisquer que sejam os valores lógicos das proposições simples $p, q, r, ...$.

Exemplo: $\neg(p \wedge \neg p)$

p	$\neg p$	$p \wedge \neg p$	$\neg(p \wedge \neg p)$
V	F	F	V
F	V	F	V

Contradição

Definição

Contradição é toda proposição composta $P(p, q, r, ...)$ cujo valor lógico é sempre falso, quais quer que sejam os valores lógicos das proposições simples $p, q, r, ...$

Exemplo: $p \leftrightarrow \neg p$

p	$\neg p$	$p \leftrightarrow \neg p$
V	F	F
F	V	F

Contingência

Definição

Contingencia é toda a proposição composta que não é tautologia nem contradição.

Exemplo: $p \rightarrow \neg p$

p	$\neg p$	$p \rightarrow \neg p$
V	F	F
F	V	V

Ementa do Curso

1 Introdução

2 Lógica Proposicional

3 Construção de Tabelas-verdade

4 Implicação e Equivalência Lógica

5 Método Dedutivo

Implicação Lógica

Definição

A proposição $P(p, q, r, ...)$ implica a proposição $Q(p, q, r, ...)$, isto é:
$P(p, q, r, ...) \Rightarrow Q(p, q, r, ...)$
se e somente se a condicional:
$P(p, q, r, ...) \rightarrow Q(p, q, r, ...)$ é tautológica.

Exemplo: $(p \rightarrow q) \wedge p, q$

p	q	$p \rightarrow q$	$(p \rightarrow q) \wedge p$	$((p \rightarrow q) \wedge p) \rightarrow q$
V	V	V	V	V
V	F	F	F	V
F	V	V	F	V
F	F	V	F	V

Portanto, simbolicamente: $(p \rightarrow q) \wedge p \Rightarrow q$

Equivalência Lógica

Definição

A proposição $P(p, q, r, ...)$ é equivalente à proposição $Q(p, q, r, ...)$, isto é:
$P(p, q, r, ...) \Leftrightarrow Q(p, q, r, ...)$
se e somente se a bicondicional:
$P(p, q, r, ...) \leftrightarrow Q(p, q, r, ...)$ é tautológica.

Exemplo: $\neg p \rightarrow p$, p

p	$\neg p$	$\neg p \rightarrow p$	$(\neg p \rightarrow p) \leftrightarrow p$
V	F	V	V
F	V	F	V

Portanto, simbolicamente: $\neg p \rightarrow p \Leftrightarrow p$

Ementa do Curso

1. Introdução
2. Lógica Proposicional
3. Construção de Tabelas-verdade
4. Implicação e Equivalência Lógica
5. Método Dedutivo

Equivalência Lógica

Definição

Dado um argumento $P_1, P_2, P_3 \rightarrow Q$ chama-se demonstração ou dedução de Q a partir das premissas $P_1, P_2, ...P_n$, a sequência finita de proposições $X_1, X_2, ...X_m$, tal que cada X_i ou é uma premissa ou decorre logicamente de proposições anteriores da sequência, e de tal modo que a última proposição X_m seja a conclusão Q do argumento dado. Desta forma, se for possível obter a conclusão Q através do procedimento de dedução, o argumento é válido, caso contrário, não é válido.

Álgebra das Proposições

- Propriedades da Conjunção;
- Propriedades da Disjunção;
- Propriedades da Conjunção e Disjunção; e
- Negação da Condicional e Bicondicional.

Propriedades da Conjunção

Idempotente

$p \wedge p \Leftrightarrow p$

Comutativa

$p \wedge q \Leftrightarrow q \wedge p$

Associativa

$(p \wedge q) \wedge r \Leftrightarrow p \wedge (q \wedge r)$

Identidade

$p \wedge t \Leftrightarrow p$ e $p \wedge c \Leftrightarrow c$

Sejam t e c proposições também simples cujos valores lógicos respectivos são verdadeiro e falso.

Propriedades da Disjunção

Idempotente

$p \vee p \Leftrightarrow p$

Comutativa

$p \vee q \Leftrightarrow q \vee p$

Associativa

$(p \vee q) \vee r \Leftrightarrow p \vee (q \vee r)$

Identidade

$p \vee t \Leftrightarrow t$ e $p \vee c \Leftrightarrow p$

Sejam t e c proposições também simples cujos valores lógicos respectivos são verdadeiro e falso.

Propriedades da Conjunção e Disjunção

Distributiva

$p \land (q \lor r) \Leftrightarrow (p \land q) \lor (p \land r)$ ou $p \lor (q \land r) \Leftrightarrow (p \lor q) \land (p \lor r)$

Absorção

$p \land (p \lor q) \Leftrightarrow p$ ou $p \lor (p \land q) \Leftrightarrow p$

Regras De Morgan

$\neg(p \land q) \Leftrightarrow \neg p \lor \neg q$ ou $\neg(p \lor q) \Leftrightarrow \neg p \land \neg q$

Negação da Condicional e Bicondicional

Condicional

$\neg(p \wedge q) \Leftrightarrow p \wedge \neg q$

Bicondicional

$\neg(p \leftrightarrow q) \Leftrightarrow (p \wedge \neg q) \vee (\neg p \wedge q)$

Demonstração da Implicação

Exemplo: $p \land q \Rightarrow p$

$p \land q \rightarrow p$
$\neg(p \land q) \lor p$
$(\neg p \lor \neg q) \lor p$ – Comutativa
$(\neg q \lor \neg p) \lor p$ – Associativa
$\neg q \lor (\neg p \lor p)$
$\neg q \lor Tautologia$ – Identidade
$Tautologia$

Demonstração da Equivalência

Exemplo: $p \rightarrow q \Leftrightarrow p \vee q \rightarrow q$

$p \vee q \rightarrow q$
$\neg(p \vee q) \vee q$
$(\neg p \wedge \neg q) \vee q$ – Distributiva
$(\neg p \vee q) \wedge (\neg q \vee q)$
$(\neg p \vee q) \wedge \mathit{Tautologia}$ – Identidade
$(\neg p \vee q)$
$p \rightarrow q$