



# Lógica Computacional

Diego Silveira Costa Nascimento

Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia do Rio Grande do Norte  
diego.nascimento@ifrn.edu.br

22 de abril de 2019

# Ementa do Curso

- 1 Introdução
- 2 Lógica Proposicional
- 3 Construção de Tabelas-verdade
- 4 Implicação e Equivalência Lógica
- 5 Método Dedutivo
- 6 Inferência Lógica



# Ementa do Curso

- 1 Introdução
- 2 Lógica Proposicional
- 3 Construção de Tabelas-verdade
- 4 Implicação e Equivalência Lógica
- 5 Método Dedutivo
- 6 Inferência Lógica



## Definição

É a ciência das leis ideais do pensamento e a arte de aplicá-las à pesquisa e à demonstração da verdade.

- Deriva do Grego (logos); e
- Significa:
  - palavra;
  - pensamento;
  - ideia;
  - argumento;
  - relato;
  - razão
  - lógica; ou
  - princípio lógico.



# Origem

- A Lógica teve início na Grécia em 342 a.C.;
- Aristóteles sistematizou os conhecimentos existentes em Lógica, elevando-a à categoria de ciência;
- Obra chamada Organon (Ferramenta para o correto pensar);
- Aristóteles preocupava-se com as formas de raciocínio que, a partir de conhecimentos considerados verdadeiros, permitiam obter novos conhecimentos; e
- A partir dos conhecimentos tidos como verdadeiros, caberia à Lógica a formulação de leis gerais de encadeamentos lógicos que levariam à descoberta de novas verdades.

## Aristóteles



## Organon



# Princípios Lógico

A Lógica Formal repousa sobre três princípios fundamentais que permitem todo seu desenvolvimento posterior, e que dão validade a todos os atos do pensamento e do raciocínio.

## Princípio da Identidade

Afirma  $A = A$  e não pode ser  $B$ , o que é, é.

## Princípio da Não Contradição

$A = A$  e nunca pode ser não- $A$ , o que é, é e não pode ser sua negação, ou seja, o ser é, o não ser não é.

## Princípio do Terceiro Excluído

Afirma que Ou  $A$  é  $x$  ou  $A$  é  $y$ , não existe uma terceira possibilidade.



# Ementa do Curso

- 1 Introdução
- 2 Lógica Proposicional**
- 3 Construção de Tabelas-verdade
- 4 Implicação e Equivalência Lógica
- 5 Método Dedutivo
- 6 Inferência Lógica



# Proposição

- Chama-se proposição todo o conjunto de palavras ou símbolos que exprimem um pensamento de sentido completo;
- As proposições transmitem pensamentos; e
- Afirmam fatos ou exprimem juízos que formamos a respeito de determinados entes.

## Exemplos

A Lua é um satélite da terra

Sócrates é um homem

Eu estudo lógica

Não está chovendo





Considere o conjunto de símbolos:

$$A = \{ (, ), \neg, \wedge, \vee, \rightarrow, \leftrightarrow, p, q, r, \dots \}$$

- A esse conjunto é chamado de alfabeto da Lógica Proposicional;
- As letras são símbolos não lógico (letras sentenciais); e
- O restante são símbolos lógicos (parênteses e conectivos lógicos).



# Letras Sentenciais

As letras sentenciais são usadas para representar proposições elementares ou atômicas, isto é, proposições que não possuem partes que sejam também proposições.

## Exemplos

$p$  = O céu é azul

$Q$  = Eu estudo lógica

$r$  =  $2 + 2 = 4$

$s$  = Sócrates é um homem

## Importante

As partes dessas proposições não são proposições mais simples, mas sim, componentes subsentenciais: expressões, palavras, sílabas ou letras.



- As proposições compostas são obtidas combinando proposições simples através de certos termos chamados conectivos;
- A Lógica dispõe de cinco tipos de conectivos e seus operadores:
  - Não (Negação),  $\neg$ ;
  - E (Conjunção),  $\wedge$ ;
  - Ou (Disjunção),  $\vee$ ;
  - Se – então (Condicional),  $\rightarrow$ ; e
  - Se e somente se (Bicondicional),  $\leftrightarrow$ .



A característica peculiar da negação, tal como ela se apresenta na lógica proposicional clássica, é que toda proposição submetida à operação de negação resulta na sua contraditória.

## Exemplos

$p$  = Está chovendo.

Ler-se  $\neg p$ , como: “Não está chovendo”.



# Tabela-verdade para Negação

- Se  $p$  é uma proposição, a expressão  $\neg p$  é chamada negação de  $p$ ; e
- Claramente, a negação inverte o valor verdade de uma expressão.

## Exemplos

$p$	$\neg p$
V	F
F	V



# Operador de Conjunção

A característica peculiar da conjunção está no fato de fórmulas conjuntivas expressarem a concomitância de fatos. A fórmula  $(p \wedge q)$  expressa que o fato expresso por  $p$  ocorre ao mesmo tempo que o fato expresso por  $q$ .

## Exemplos

$p$  = Está chovendo.

$q$  = Está ventando.

Ler-se  $p \wedge q$ , como: “Está chovendo e está ventando.”



# Tabela-verdade para Conjunção

- Se  $p$  e  $q$  são proposições, a expressão  $p \wedge q$  é chamada conjunção de  $p$  e  $q$ ; e
- As proposições  $p$  e  $q$  são chamadas fatores da expressão.

## Exemplos

$p$	$q$	$p \wedge q$
V	V	V
V	F	F
F	V	F
F	F	F



# Operador de Disjunção

A característica peculiar da disjunção consiste no fato de proposições disjuntivas expressarem que pelo menos um de dois fatos ocorre. A fórmula  $(p \vee q)$  expressa que, dentre os fatos expressos por  $p$  e  $q$  respectivamente, pelo menos um deles ocorre.

## Exemplos

$p$  = Está nublado.

$q$  = Está chovendo.

Ler-se  $p \vee q$ , como: “Está nublado ou está chovendo.”





# Tabela-verdade para Disjunção

- Se  $p$  e  $q$  são proposições, a expressão  $p \vee q$  é chamada disjunção inclusiva de  $p$  e  $q$ ; e
- As proposições  $p$  e  $q$  são chamadas parcelas da expressão.

## Exemplos

$p$	$q$	$p \vee q$
V	V	V
V	F	V
F	V	V
F	F	F



A característica peculiar dessa operação consiste em que um condicional ( $p \rightarrow q$ ) expressa que a ocorrência do fato expresso por  $p$  garante necessariamente a ocorrência do fato expresso por  $q$ .

## Exemplos

$p$  = Choveu.

$q$  = Está molhado.

Ler-se  $p \rightarrow q$ , como: “Se choveu, então está molhado.”



# Tabela-verdade para Condicional

- Se  $p$  e  $q$  são proposições, a expressão  $p \rightarrow q$  é chamada condicional de  $p$  e  $q$ ;
- A proposição  $p$  é chamada antecedente, e a proposição  $q$  consequente da condicional; e
- A operação de condicionamento indica que o acontecimento de  $p$  é uma condição para que  $q$  aconteça.

## Exemplos

$p$	$q$	$p \rightarrow q$
V	V	V
V	F	F
F	V	V
F	F	V



# Operador Bicondicional

A característica peculiar dessa operação consiste em que um bicondicional ( $p \leftrightarrow q$ ) assevera que os fatos expressos por  $p$  e  $q$  são interdependentes, isto é, ou os dois ocorrem juntos ou nenhum dos dois ocorrem.

## Exemplos

$p$  = Será aprovado.

$q$  = Estudar.

Ler-se  $p \leftrightarrow q$ , como: “Aprenderá, **se e somente se** estudar”.



# Tabela-verdade para Bicondicional

- Se  $p$  e  $q$  são proposições, a expressão  $p \leftrightarrow q$  é chamada bicondicional de  $p$  e  $q$ ; e
- A operação de bicondicionamento indica que  $p$  é uma condição para que  $q$  aconteça, e vice-versa.

## Exemplos

$p$	$q$	$p \leftrightarrow q$
V	V	V
V	F	F
F	V	F
F	F	V



A necessidade de usar parênteses na simbolização das proposições se deve ao fato de se evitar qualquer tipo de ambiguidade.

## Exemplos

$p$  = Estudar.

$q$  = Fazer a prova.

$r$  = Fazer o trabalho.

$s$  = Serei aprovado.

Ler-se  $((p \wedge q) \vee r) \rightarrow s$ , como:

“Se ((estudar e fazer a prova) ou fazer o trabalho), então será aprovado.”



# Ementa do Curso

- 1 Introdução
- 2 Lógica Proposicional
- 3 Construção de Tabelas-verdade**
- 4 Implicação e Equivalência Lógica
- 5 Método Dedutivo
- 6 Inferência Lógica



# Proposição Composta

Dadas várias proposições simples  $p, q, r, \dots$ , podemos combiná-las pelos operadores lógicos  $\wedge, \vee, \rightarrow, \leftrightarrow$  e construir proposições compostas:

- Então, com o emprego das tabelas-verdade das operações lógicas fundamentais já estudadas:  $\neg p, p \wedge q, p \vee q, p \rightarrow q$  e  $p \leftrightarrow q$ ;
- É possível construir a tabela-verdade correspondente a qualquer proposição composta; e
- A tabela-verdade exibirá exatamente os casos em que a proposição composta será verdadeira ( $V$ ) ou falsa ( $F$ ), admitindo-se que o seu valor lógico só depende dos valores lógicos das proposições simples.





# Ordem de Precedência dos Operadores

- 1 Percorra a expressão da esquerda para a direita, executando as operações de **negação**, na ordem em que aparecerem;
- 2 Percorra novamente a expressão, da esquerda para a direita, executando as operações de **conjunção** e **disjunção**, na ordem em que aparecerem;
- 3 Percorra outra vez a expressão, da esquerda para a direita, executando desta vez as operações de **condicionamento**, na ordem em que aparecerem; e
- 4 Percorra uma última vez a expressão, da esquerda para a direita, executando as operações de **bicondicionamento**, na ordem em que aparecerem.



# Construindo a Tabela-verdade (Passo 1)

## Proposição

$$\neg(p \wedge \neg q)$$

- Forma-se, em primeiro lugar, o par de colunas correspondentes às duas proposições simples  $p$  e  $q$ ; e
- O total de linhas é igual a  $2^n$ , onde  $n$  corresponde ao número de proposições simples.

## Exemplo

$p$	$q$
V	V
V	F
F	V
F	F

## Construindo a Tabela-verdade (Passo 2)

- Em seguida, forma-se a coluna para  $\neg q$ .

### Exemplo

$p$	$q$	$\neg q$
V	V	F
V	F	V
F	V	F
F	F	V



## Construindo a Tabela-verdade (Passo 3)

- Depois, forma-se a coluna para  $p \wedge \neg q$ .

### Exemplo

$p$	$q$	$\neg q$	$p \wedge \neg q$
V	V	F	F
V	F	V	V
F	V	F	F
F	F	V	F



## Construindo a Tabela-verdade (Passo 4)

- Por fim, forma-se a coluna relativa aos valores lógicos da proposição composta  $\neg(p \wedge \neg q)$ .

### Exemplo

$p$	$q$	$\neg q$	$p \wedge \neg q$	$\neg(p \wedge \neg q)$
V	V	F	F	V
V	F	V	V	F
F	V	F	F	V
F	F	V	F	V



# Tautologia

## Definição

Tautologia é toda proposição composta  $P(p, q, r, \dots)$  cujo valor lógico é sempre verdadeiro, quaisquer que sejam os valores lógicos das proposições simples  $p, q, r, \dots$

Exemplo:  $\neg(p \wedge \neg p)$

$p$	$\neg p$	$p \wedge \neg p$	$\neg(p \wedge \neg p)$
V	F	F	V
F	V	F	V



# Contradição

## Definição

Contradição é toda proposição composta  $P(p, q, r, \dots)$  cujo valor lógico é sempre falso, quais quer que sejam os valores lógicos das proposições simples  $p, q, r, \dots$

Exemplo:  $p \leftrightarrow \neg p$

$p$	$\neg p$	$p \leftrightarrow \neg p$
V	F	F
F	V	F



## Definição

Contingência é toda a proposição composta que não é tautologia nem contradição.

Exemplo:  $p \rightarrow \neg p$

$p$	$\neg p$	$p \rightarrow \neg p$
V	F	F
F	V	V





# Ementa do Curso

- 1 Introdução
- 2 Lógica Proposicional
- 3 Construção de Tabelas-verdade
- 4 Implicação e Equivalência Lógica**
- 5 Método Dedutivo
- 6 Inferência Lógica



## Definição

A proposição  $P(p, q, r, \dots)$  implica a proposição  $Q(p, q, r, \dots)$ , isto é:

$$P(p, q, r, \dots) \Rightarrow Q(p, q, r, \dots)$$

se e somente se a condicional:

$P(p, q, r, \dots) \rightarrow Q(p, q, r, \dots)$  é tautológica.

Exemplo:  $(p \rightarrow q) \wedge p, q$

$p$	$q$	$p \rightarrow q$	$(p \rightarrow q) \wedge p$	$((p \rightarrow q) \wedge p) \rightarrow q$
V	V	V	V	V
V	F	F	F	V
F	V	V	F	V
F	F	V	F	V

Portanto, simbolicamente:  $(p \rightarrow q) \wedge p \Rightarrow q$



## Definição

A proposição  $P(p, q, r, \dots)$  é equivalente à proposição  $Q(p, q, r, \dots)$ , isto é:

$$P(p, q, r, \dots) \Leftrightarrow Q(p, q, r, \dots)$$

se e somente se a bicondicional:

$P(p, q, r, \dots) \leftrightarrow Q(p, q, r, \dots)$  é tautológica.

Exemplo:  $\neg p \rightarrow p, p$

$p$	$\neg p$	$\neg p \rightarrow p$	$(\neg p \rightarrow p) \leftrightarrow p$
V	F	V	V
F	V	F	V

Portanto, simbolicamente:  $\neg p \rightarrow p \Leftrightarrow p$



# Ementa do Curso

- 1 Introdução
- 2 Lógica Proposicional
- 3 Construção de Tabelas-verdade
- 4 Implicação e Equivalência Lógica
- 5 Método Dedutivo**
- 6 Inferência Lógica



## Definição

Dado um argumento  $P_1, P_2, P_3 \rightarrow Q$  chama-se demonstração ou dedução de  $Q$  a partir das premissas  $P_1, P_2, \dots, P_n$ , a sequência finita de proposições  $X_1, X_2, \dots, X_m$ , tal que cada  $X_i$  ou é uma premissa ou decorre logicamente de proposições anteriores da sequência, e de tal modo que a última proposição  $X_m$  seja a conclusão  $Q$  do argumento dado. Desta forma, se for possível obter a conclusão  $Q$  através do procedimento de dedução, o argumento é válido, caso contrário, não é válido.



- Propriedades da Conjunção;
- Propriedades da Disjunção;
- Propriedades da Conjunção e Disjunção; e
- Negação da Condicional e Bicondicional.



# Propriedades da Conjunção

## Idempotente

$$p \wedge p \Leftrightarrow p$$

## Comutativa

$$p \wedge q \Leftrightarrow q \wedge p$$

## Associativa

$$(p \wedge q) \wedge r \Leftrightarrow p \wedge (q \wedge r)$$

## Identidade

$$p \wedge t \Leftrightarrow p \text{ e } p \wedge c \Leftrightarrow c$$

Sejam  $t$  e  $c$  proposições também simples cujos valores lógicos respectivos são verdadeiro e falso.



# Propriedades da Disjunção

## Idempotente

$$p \vee p \Leftrightarrow p$$

## Comutativa

$$p \vee q \Leftrightarrow q \vee p$$

## Associativa

$$(p \vee q) \vee r \Leftrightarrow p \vee (q \vee r)$$

## Identidade

$$p \vee t \Leftrightarrow t \text{ e } p \vee c \Leftrightarrow p$$

Sejam  $t$  e  $c$  proposições também simples cujos valores lógicos respectivos são verdadeiro e falso.





# Propriedades da Conjunção e Disjunção

## Distributiva

$$p \wedge (q \vee r) \Leftrightarrow (p \wedge q) \vee (p \wedge r) \text{ ou } p \vee (q \wedge r) \Leftrightarrow (p \vee q) \wedge (p \vee r)$$

## Absorção

$$p \wedge (p \vee q) \Leftrightarrow p \text{ ou } p \vee (p \wedge q) \Leftrightarrow p$$

## Regras De Morgan

$$\neg(p \wedge q) \Leftrightarrow \neg p \vee \neg q \text{ ou } \neg(p \vee q) \Leftrightarrow \neg p \wedge \neg q$$



## Condicional

$$\neg(p \wedge q) \Leftrightarrow p \wedge \neg q$$

## Bicondicional

$$\neg(p \leftrightarrow q) \Leftrightarrow (p \wedge \neg q) \vee (\neg p \wedge q)$$



# Demonstração da Implicação

Exemplo:  $p \wedge q \Rightarrow p$

$p \wedge q \rightarrow p$

$\neg(p \wedge q) \vee p$

$(\neg p \vee \neg q) \vee p$  – Comutativa

$(\neg q \vee \neg p) \vee p$  – Associativa

$\neg q \vee (\neg p \vee p)$

$\neg q \vee \text{Tautologia}$  – Identidade

*Tautologia*



# Demonstração da Equivalência

Exemplo:  $p \rightarrow q \Leftrightarrow p \vee q \rightarrow q$

$$p \vee q \rightarrow q$$

$$\neg(p \vee q) \vee q$$

$$(\neg p \wedge \neg q) \vee q - \text{Distributiva}$$

$$(\neg p \vee q) \wedge (\neg q \vee q)$$

$$(\neg p \vee q) \wedge \text{Tautologia} - \text{Identidade}$$

$$(\neg p \vee q)$$

$$p \rightarrow q$$



# Ementa do Curso

- 1 Introdução
- 2 Lógica Proposicional
- 3 Construção de Tabelas-verdade
- 4 Implicação e Equivalência Lógica
- 5 Método Dedutivo
- 6 Inferência Lógica**



## Definição

É o processo pelo qual se chega a uma proposição, firmada na base de uma ou outras mais proposições aceitas como ponto de partida do processo.

- Regra de Adição (AD);
- Regra de Simplificação (SIMP);
- Regra da Conjunção (CONJ);
- Regra de Absorção (ABS);
- Regra Modus ponens (MP);
- Regra Modus tollens (MT);
- Regra do Silogismo disjuntivo (SD);
- Regra do Silogismo hipotético (SH);
- Regra do Dilema construtivo (DC); e
- Regra do Dilema destrutivo (DD).



## Adição

$$\frac{p}{p \vee q}$$

## Simplificação

$$\frac{p \wedge q}{p}$$

## Conjunção

$$\frac{\begin{array}{c} p \\ q \end{array}}{p \wedge q}$$

## Absorção

$$\frac{p \rightarrow q}{p \rightarrow (p \wedge q)}$$



## Modus Ponens

$$\frac{p \rightarrow q \quad p}{q}$$

## Modus Tollens

$$\frac{p \rightarrow q \quad \neg q}{\neg p}$$

## Silogismo Disjuntivo

$$\frac{p \vee q \quad \neg q}{p}$$

## Silogismo Hipotético

$$\frac{p \rightarrow q \quad q \rightarrow r}{p \rightarrow r}$$





## Dilema Construtivo

$$\begin{array}{l} p \rightarrow q \\ r \rightarrow s \\ p \vee r \\ \hline q \vee s \end{array}$$

## Dilema Destrutivo

$$\begin{array}{l} p \rightarrow q \\ r \rightarrow s \\ \neg q \vee \neg s \\ \hline \neg p \vee \neg r \end{array}$$



# Demonstração de Regras de Inferência

Exemplo:  $p \rightarrow q, p \wedge r \vdash q$

(1)  $p \rightarrow q$

(2)  $p \wedge r$

---

(3)  $p$     2 – *SP*

(4)  $q$     1, 3 – *MP*

