Lógica Computacional

Diego Silveira Costa Nascimento

Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia do Rio Grande do Norte
diego.nascimento@ifrn.edu.br

22 de abril de 2019

Ementa do Curso

1. Introdução
2. Lógica Proposicional
3. Construção de Tabelas-verdade
4. Implicação e Equivalência Lógica
5. Método Dedutivo
6. Inferência Lógica
7. Lógica de Predicados

Ementa do Curso

Lógica

Definição

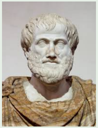
É a ciência das leis ideais do pensamento e a arte de aplicá-las à pesquisa e à demonstração da verdade.

- Deriva do Grego (logos); e
- Significa:
  - palavra;
  - pensamento;
  - ideia;
  - argumento;
  - relato;
  - razão
  - lógica; ou
  - princípio lógico.

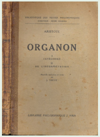
Origem

- A Lógica teve início na Grécia em 342 a.C.;
- Aristóteles sistematizou os conhecimentos existentes em Lógica, elevando-a à categoria de ciência;
- Obra chamada Organon (Ferramenta para o correto pensar);
- Aristóteles preocupava-se com as formas de raciocínio que, a partir de conhecimentos considerados verdadeiros, permitiam obter novos conhecimentos; e
- A partir dos conhecimentos tidos como verdadeiros, caberia à Lógica a formulação de leis gerais de encadeamentos lógicos que levariam à descoberta de novas verdades.

Aristóteles



Organon



Princípios Lógico

A Lógica Formal repousa sobre três princípios fundamentais que permitem todo seu desenvolvimento posterior, e que dão validade a todos os atos do pensamento e do raciocínio.

Princípio da Identidade

Afirma $A = A$ e não pode ser B, o que é, é.

Princípio da Não Contradição

$A = A$ e nunca pode ser não-A, o que é, é e não pode ser sua negação, ou seja, o ser é, o não ser não é.

Princípio do Terceiro Excluído

Afirma que Ou A é x ou A é y, não existe uma terceira possibilidade.

Ementa do Curso

1. Introdução
2. Lógica Proposicional
3. Construção de Tabelas-verdade
4. Implicação e Equivalência Lógica
5. Método Dedutivo
6. Inferência Lógica
7. Lógica de Predicados

Proposição

- Chama-se proposição todo o conjunto de palavras ou símbolos que exprimem um pensamento de sentido completo;
- As proposições transmitem pensamentos; e
- Afirmam fatos ou exprimem juízos que formamos a respeito de determinados entes.

Exemplos

A Lua é um satélite da terra
Sócrates é um homem
Eu estudo lógica
Não está chovendo

A Linguagem

Considere o conjunto de símbolos:

$A = \{(,), \neg, \wedge, \vee, \rightarrow, \leftrightarrow, p, q, r, ...\}$

- A esse conjunto é chamado de alfabeto da Lógica Proposicional;
- As letras são símbolos não lógico (letras sentenciais); e
- O restante são símbolos lógicos (parênteses e conectivos lógicos).

Letras Sentenciais

As letras sentenciais são usadas para representar proposições elementares ou atômicas, isto é, proposições que não possuem partes que sejam também proposições.

Exemplos

p = O céu é azul
Q = Eu estudo lógica
r = 2 + 2 = 4
s = Sócrates é um homem

Importante

As partes dessas proposições não são proposições mais simples, mas sim, componentes subsentenciais: expressões, palavras, sílabas ou letras.

Conectivos Lógicos

- As proposições compostas são obtidas combinando proposições simples através de certos termos chamados conectivos;
- A Lógica dispõe de cinco tipos de conectivos e seus operadores:
  - Não (Negação), $\neg$;
  - E (Conjunção), $\wedge$;
  - Ou (Disjunção), $\vee$;
  - Se – então (Condicional), $\rightarrow$;e
  - Se e somente se (Bicondicional), $\leftrightarrow$.

Operador de Negação

A característica peculiar da negação, tal como ela se apresenta na lógica proposicional clássica, é que toda proposição submetida à operação de negação resulta na sua contraditória.

Exemplos

$p =$ Está chovendo.
Ler-se $\neg p$, como: "Não está chovendo".

Tabela-verdade para Negação

- Se p é uma proposição, a expressão $\neg p$ é chamada negação de p; e
- Claramente, a negação inverte o valor verdade de uma expressão.

Exemplos

p	**¬p**
V	F
F	V

Operador de Conjunção

A característica peculiar da conjunção está no fato de fórmulas conjuntivas expressarem a concomitância de fatos. A fórmula $(p \wedge q)$ expressa que o fato expresso por p ocorre ao mesmo tempo que o fato expresso por q.

Exemplos

$p =$ Está chovendo.
$q =$ Está ventando.
Ler-se $p \wedge q$, como: "Está chovendo e está ventando."

Tabela-verdade para Conjunção

- Se p e q são proposições, a expressão $p \wedge q$ é chamada conjunção de p e q; e
- As proposições p e q são chamadas fatores da expressão.

Exemplos

p	**q**	**p ∧ q**
V	V	V
V	F	F
F	V	F
F	F	F

Operador de Disjunção

A característica peculiar da disjunção consiste no fato de proposições disjuntivas expressarem que pelo menos um de dois fatos ocorre. A fórmula $(p \vee q)$ expressa que, dentre os fatos expressos por p e q respectivamente, pelo menos um deles ocorre.

Exemplos

$p =$ Está nublado.
$q =$ Está chovendo.
Ler-se $p \vee q$, como: "Está nublado ou está chovendo."

Tabela-verdade para Disjunção

- Se p e q são proposições, a expressão $p \vee q$ é chamada disjunção inclusiva de p e q; e
- As proposições p e q são chamadas parcelas da expressão.

Exemplos

p	q	p $\vee$ q
V	V	V
V	F	V
F	V	V
F	F	F

Operador Condicional

A característica peculiar dessa operação consiste em que um condicional ($p \rightarrow q$) expressa que a ocorrência do fato expresso por p garante necessariamente a ocorrência do fato expresso por q.

Exemplos

$p =$ Choveu.
$q =$ Está molhado.
Ler-se $p \rightarrow q$, como: "Se choveu, então está molhado."

Tabela-verdade para Condicional

- Se p e q são proposições, a expressão $p \rightarrow q$ é chamada condicional de p e q;
- A proposição p é chamada antecedente, e a proposição q consequente da condicional; e
- A operação de condicionamento indica que o acontecimento de p é uma condição para que q aconteça.

Exemplos

p	**q**	**p → q**
V	V	V
V	F	F
F	V	V
F	F	V

Operador Bicondicional

A característica peculiar dessa operação consiste em que um bicondicional ($p \leftrightarrow q$) assevera que os fatos expressos por p e q são interdependentes, isto é, ou os dois ocorrem juntos ou nenhum dos dois ocorrem.

Exemplos

$p =$ Será aprovado.
$q =$ Estudar.
Ler-se $p \leftrightarrow q$, como: "Aprenderá, se e somente se estudar".

Tabela-verdade para Bicondicional

- Se p e q são proposições, a expressão $p \leftrightarrow q$ é chamada bicondicional de p e q; e
- A operação de bicondicionamento indica que p é uma condição para que q aconteça, e vice-versa.

Exemplos

p	**q**	**p $\leftrightarrow$ q**
V	V	V
V	F	F
F	V	F
F	F	V

Parênteses

A necessidade de usar parênteses na simbolização das proposições se deve ao fato de se evitar qualquer tipo de ambiguidade.

Exemplos

$p =$ Estudar.
$q =$ Fazer a prova.
$r =$ Fazer o trabalho.
$s =$ Serei aprovado.
Ler-se $((p \wedge q) \vee r) \rightarrow s$, como:
"Se ((estudar e fazer a prova) ou fazer o trabalho), então será aprovado."

Ementa do Curso

Proposição Composta

Dadas várias proposições simples $p, q, r, \ldots$, podemos combiná-las pelos operadores lógicos $\wedge, \vee, \rightarrow, \leftrightarrow$ e construir proposições compostas:

- Então, com o emprego das tabelas-verdade das operações lógicas fundamentais já estudadas: $\neg p$, $p \wedge q$, $p \vee q$, $p \rightarrow q$ e $p \leftrightarrow q$;
- É possível construir a tabela-verdade correspondente a qualquer proposição composta; e
- A tabela-verdade exibirá exatamente os casos em que a proposição composta será verdadeira (V) ou falsa (F), admitindo-se que o seu valor lógico só depende dos valores lógicos das proposições simples.

Ordem de Precedência dos Operadores

1. Percorra a expressão da esquerda para a direita, executando as operações de negação, na ordem em que aparecerem;
2. Percorra novamente a expressão, da esquerda para a direita, executando as operações de conjunção e disjunção, na ordem em que aparecerem;
3. Percorra outra vez a expressão, da esquerda para a direita, executando desta vez as operações de condicionamento, na ordem em que aparecerem; e
4. Percorra uma última vez a expressão, da esquerda para a direita, executando as operações de bicondicionamento, na ordem em que aparecerem.

Construindo a Tabela-verdade (Passo 1)

Proposição

$\neg(p \wedge \neg q)$

- Forma-se, em primeiro lugar, o par de colunas correspondentes às duas proposições simples p e q; e
- O total de linhas é igual a 2^n, onde n corresponde ao número de proposições simples.

Exemplo

p	q
V	V
V	F
F	V
F	F

Construindo a Tabela-verdade (Passo 2)

- Em seguida, forma-se a coluna para $\neg q$.

Exemplo

p	q	$\neg q$
V	V	F
V	F	V
F	V	F
F	F	V

Construindo a Tabela-verdade (Passo 3)

- Depois, forma-se a coluna para $p \wedge \neg q$.

Exemplo

p	q	$\neg q$	$p \wedge \neg q$
V	V	F	F
V	F	V	V
F	V	F	F
F	F	V	F

- Por fim, forma-se a coluna relativa aos valores lógicos da proposição composta $\neg(p \wedge \neg q)$.

Exemplo

p	q	$\neg q$	$p \wedge \neg q$	$\neg(p \wedge \neg q)$
V	V	F	F	V
V	F	V	V	F
F	V	F	F	V
F	F	V	F	V

Tautologia

Definição

Tautologia é toda proposição composta $P(p, q, r, ...)$ cujo valor lógico é sempre verdadeiro, quaisquer que sejam os valores lógicos das proposições simples $p, q, r, ...$

Exemplo: $\neg(p \wedge \neg p)$

p	$\neg p$	$p \wedge \neg p$	$\neg(p \wedge \neg p)$
V	F	F	V
F	V	F	V

Contradição

Definição

Contradição é toda proposição composta $P(p, q, r, ...)$ cujo valor lógico é sempre falso, quais quer que sejam os valores lógicos das proposições simples $p, q, r, ...$

Exemplo: $p \leftrightarrow \neg p$

p	$\neg p$	$p \leftrightarrow \neg p$
V	F	F
F	V	F

Contingência

Definição

Contingencia é toda a proposição composta que não é tautologia nem contradição.

Exemplo: $p \rightarrow \neg p$

p	$\neg p$	$p \rightarrow \neg p$
V	F	F
F	V	V

Ementa do Curso

Implicação Lógica

Definição

A proposição $P(p, q, r, ...)$ implica a proposição $Q(p, q, r, ...)$, isto é:
$P(p, q, r, ...) \Rightarrow Q(p, q, r, ...)$
se e somente se a condicional:
$P(p, q, r, ...) \rightarrow Q(p, q, r, ...)$ é tautológica.

Exemplo: $(p \rightarrow q) \wedge p, q$

p	q	$p \rightarrow q$	$(p \rightarrow q) \wedge p$	$((p \rightarrow q) \wedge p) \rightarrow q$
V	V	V	V	V
V	F	F	F	V
F	V	V	F	V
F	F	V	F	V

Portanto, simbolicamente: $(p \rightarrow q) \wedge p \Rightarrow q$

Equivalência Lógica

Definição

A proposição $P(p, q, r, ...)$ é equivalente à proposição $Q(p, q, r, ...)$, isto é:
$P(p, q, r, ...) \Leftrightarrow Q(p, q, r, ...)$
se e somente se a bicondicional:
$P(p, q, r, ...) \leftrightarrow Q(p, q, r, ...)$ é tautológica.

Exemplo: $\neg p \rightarrow p, p$

p	$\neg p$	$\neg p \rightarrow p$	$(\neg p \rightarrow p) \leftrightarrow p$
V	F	V	V
F	V	F	V

Portanto, simbolicamente: $\neg p \rightarrow p \Leftrightarrow p$

Ementa do Curso

Definição

Dado um argumento $P_1, P_2, P_3 \rightarrow Q$ chama-se demonstração ou dedução de Q a partir das premissas $P_1, P_2, ...P_n$, a sequência finita de proposições $X_1, X_2, ...X_m$, tal que cada X_i ou é uma premissa ou decorre logicamente de proposições anteriores da sequência, e de tal modo que a última proposição X_m seja a conclusão Q do argumento dado. Desta forma, se for possível obter a conclusão Q através do procedimento de dedução, o argumento é válido, caso contrário, não é válido.

Álgebra das Proposições

- Propriedades da Conjunção;
- Propriedades da Disjunção;
- Propriedades da Conjunção e Disjunção; e
- Negação da Condicional e Bicondicional.

Propriedades da Conjunção

Idempotente

$p \wedge p \Leftrightarrow p$

Comutativa

$p \wedge q \Leftrightarrow q \wedge p$

Associativa

$(p \wedge q) \wedge r \Leftrightarrow p \wedge (q \wedge r)$

Identidade

$p \wedge t \Leftrightarrow p$ e $p \wedge c \Leftrightarrow c$

Sejam t e c proposições também simples cujos valores lógicos respectivos são verdadeiro e falso.

Propriedades da Disjunção

Idempotente

$p \vee p \Leftrightarrow p$

Comutativa

$p \vee q \Leftrightarrow q \vee p$

Associativa

$(p \vee q) \vee r \Leftrightarrow p \vee (q \vee r)$

Identidade

$p \vee t \Leftrightarrow t$ e $p \vee c \Leftrightarrow p$

Sejam t e c proposições também simples cujos valores lógicos respectivos são verdadeiro e falso.

Propriedades da Conjunção e Disjunção

Distributiva

$p \wedge (q \vee r) \Leftrightarrow (p \wedge q) \vee (p \wedge r)$ ou $p \vee (q \wedge r) \Leftrightarrow (p \vee q) \wedge (p \vee r)$

Absorção

$p \wedge (p \vee q) \Leftrightarrow p$ ou $p \vee (p \wedge q) \Leftrightarrow p$

Regras De Morgan

$\neg(p \wedge q) \Leftrightarrow \neg p \vee \neg q$ ou $\neg(p \vee q) \Leftrightarrow \neg p \wedge \neg q$

Negação da Condicional e Bicondicional

Condicional

$\neg(p \wedge q) \Leftrightarrow p \wedge \neg q$

Bicondicional

$\neg(p \leftrightarrow q) \Leftrightarrow (p \wedge \neg q) \vee (\neg p \wedge q)$

Demonstração da Implicação

Exemplo: $p \wedge q \Rightarrow p$

$p \wedge q \rightarrow p$

$\neg(p \wedge q) \vee p$

$(\neg p \vee \neg q) \vee p$ – Comutativa

$(\neg q \vee \neg p) \vee p$ – Associativa

$\neg q \vee (\neg p \vee p)$

$\neg q \vee \mathit{Tautologia}$ – Identidade

$\mathit{Tautologia}$

Demonstração da Equivalência

Exemplo: $p \rightarrow q \Leftrightarrow p \vee q \rightarrow q$

$p \vee q \rightarrow q$

$\neg(p \vee q) \vee q$

$(\neg p \wedge \neg q) \vee q$ – Distributiva

$(\neg p \vee q) \wedge (\neg q \vee q)$

$(\neg p \vee q) \wedge \mathit{Tautologia}$ – Identidade

$(\neg p \vee q)$

$p \rightarrow q$

Ementa do Curso

Inferência

Definição

É o processo pelo qual se chega a uma proposição, firmada na base de uma ou outras mais proposições aceitas como ponto de partida do processo.

- Regra de Adição (AD);
- Regra de Simplificação (SIMP);
- Regra da Conjunção (CONJ);
- Regra de Absorção (ABS);
- Regra Modus ponens (MP);
- Regra Modus tollens (MT);
- Regra do Silogismo disjuntivo (SD);
- Regra do Silogismo hipotético (SH);
- Regra do Dilema construtivo (DC); e
- Regra do Dilema destrutivo (DD).

Regras de Inferência

Adição

$$\frac{p}{p \vee q}$$

Simplificação

$$\frac{p \wedge q}{p}$$

Conjunção

$$\frac{\begin{array}{c} p \\ q \end{array}}{p \wedge q}$$

Absorção

$$\frac{p \rightarrow q}{p \rightarrow (p \wedge q)}$$

Regras de Inferência

Modus Ponens

$$\begin{array}{l} p \to q \\ p \\ \hline q \end{array}$$

Modus Tollens

$$\begin{array}{l} p \to q \\ \neg q \\ \hline \neg p \end{array}$$

Silogismo Disjuntivo

$$\begin{array}{l} p \vee q \\ \neg q \\ \hline p \end{array}$$

Silogismo Hipotético

$$\begin{array}{l} p \to q \\ q \to r \\ \hline p \to r \end{array}$$

Regras de Inferência

Dilema Construtivo

$$\frac{\begin{array}{c} p \to q \\ r \to s \\ p \lor r \end{array}}{q \lor s}$$

Dilema Destrutivo

$$\frac{\begin{array}{c} p \to q \\ r \to s \\ \neg q \lor \neg s \end{array}}{\neg p \lor \neg r}$$

Demonstração

Exemplo: $p \rightarrow q, p \wedge r \vdash q$

$$\begin{array}{l} (1) p \rightarrow q \\ (2) p \wedge r \\ \hline (3) p \quad 2 - SP \\ (4) q \quad 1,3 - MP \end{array}$$

Ementa do Curso

Termo e Predicado

- Na Lógica Proposicional as interpretações não dependem da estrutura interna de suas proposições, mas unicamente no modo como se combinam;
- Já lógica de Predicados, dada uma proposição simples qualquer, pode destacar dela dois entes:
  - Termo; e
  - Predicado;
- O termo pode ser entendido como o sujeito da sentença declarativa; e
- O predicado é uma declaração a respeito do termo.

Exemplo:

Sócrates é mortal
Termo: Sócrates
Predicado: é mortal

Função Proposicional

- Seja T um conjunto de termos, uma função proposicional em T é um predicado p associado a um termo x, $p(x)$;
- A expressão $p(a)$ é verdadeira só e somente se $a \in T$; e
- Nas funções proposicionais, os termos são variáveis, enquanto que as proposições são constantes.

Exemplo:

Seja o conjunto $Z = \{1, 2, 3, 4, ...\}$, são funções proposicionais:
$par(x)$
$primo(x)$

Quantificadores

Definição

São operadores lógicos que restringem as funções proposicionais, de forma que elas se refiram a todo um conjunto de termos T, ou parte dele.

- Universal: $\forall$; e
- Existencial: $\exists$.

Exemplo:

$\forall x(homem(x) \rightarrow mortal(x))$, ler-se: Todos os homens são mortais.
$\exists x(homem(x) \wedge \neg atleta(x))$, ler-se: Existe homem que não é atleta.

Negação dos Quantificadores

Universal

$\neg\forall x(p(a)) \Leftrightarrow \exists x\neg(p(a))$

Existencial

$\neg\exists x(p(a)) \Leftrightarrow \forall x\neg(p(a))$

Exemplo:

Não existe baleia que seja réptil

$\neg\exists x(baleia(x) \wedge reptil(x))$
$\forall x\neg(baleia(x) \wedge reptil(x))$
$\forall x(\neg baleia(x) \vee \neg reptil(x))$
$\forall x(baleia(x) \rightarrow \neg reptil(x))$

Todas as baleias não são répteis.

Validade de Argumentos com Quantificadores

- É possível provar a validade de argumentos que envolva proposições quantificadas;
- Para isso, é necessário transformar os argumentos com quantificadores em argumentos não quantificados, por meio de exemplificações;
- Em seguida, aplicar as regras de inferências lógicas já estudadas; e
- Por fim, uma vez concluída a prova de validade do argumento, usa-se a generalização para obter a conclusão do argumento quantificado.

Exemplificação Existencial

Definição

Dado um conjunto de termos T e um predicado qualquer p. Se existe um termo associado ao predicado p, estipulamos que tal termo seja c.

Exemplo

$$\frac{\exists x(p(x))}{p(c)}$$

Exemplificação Universal

Definição

Dado um conjunto de termos T e um predicado qualquer p. Se todos os termos são associado ao predicado p, escolhemos um deles, c, um termo constante.

Exemplo

$$\frac{\forall x(p(x))}{p(c)}$$

Generalização Existencial

Definição

Dado um conjunto de termos T e um predicado qualquer p. Se concluímos que um termo c constante está associado ao predicado p, então existe um termo associado a p.

Exemplo

$$\frac{p(c)}{\exists x p(x)}$$

Generalização Universal

Definição

Dado um conjunto de termos T e um predicado qualquer p. Se o termo c tomado na exemplificação pode ser qualquer um, ou seja, pode ser tomado aleatoriamente, então qualquer termo está associado ao predicado p.

Exemplo

$$\frac{p(c)}{\forall x p(x)}$$

Exemplo

Todos os jogadores são atletas.
Todos os atletas sofrem contusões.
Logo, todos os jogadores sofrem contusões.

$$
\begin{array}{ll}
(1)\forall x(jogador(x) \rightarrow atleta(x)) & \\
(2)\forall x(atleta(x) \rightarrow contusao(x)) & \\
\hline
(3) jogador(Zico) \rightarrow atleta(Zico) & 1 - EU \\
(4) Atleta(Zico) \rightarrow contusao(Zico) & 2 - EU \\
(5) jogador(Zico) \rightarrow contusao(Zico) & 3, 4 - SH \\
(6)\forall x(jogador(x) \rightarrow contusao(x)) & 5 - GU
\end{array}
$$