



Lógica Computacional

Diego Silveira Costa Nascimento

Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia do Rio Grande do Norte
diego.nascimento@ifrn.edu.br

22 de abril de 2019

Ementa do Curso

- 1 Introdução
- 2 Lógica Proposicional
- 3 Construção de Tabelas-verdade
- 4 Implicação e Equivalência Lógica
- 5 Método Dedutivo
- 6 Inferência Lógica



Ementa do Curso

- 1 Introdução
- 2 Lógica Proposicional
- 3 Construção de Tabelas-verdade
- 4 Implicação e Equivalência Lógica
- 5 Método Dedutivo
- 6 Inferência Lógica



Definição

É a ciência das leis ideais do pensamento e a arte de aplicá-las à pesquisa e à demonstração da verdade.

- Deriva do Grego (logos); e
- Significa:
 - palavra;
 - pensamento;
 - ideia;
 - argumento;
 - relato;
 - razão
 - lógica; ou
 - princípio lógico.



Origem

- A Lógica teve início na Grécia em 342 a.C.;
- Aristóteles sistematizou os conhecimentos existentes em Lógica, elevando-a à categoria de ciência;
- Obra chamada Organon (Ferramenta para o correto pensar);
- Aristóteles preocupava-se com as formas de raciocínio que, a partir de conhecimentos considerados verdadeiros, permitiam obter novos conhecimentos; e
- A partir dos conhecimentos tidos como verdadeiros, caberia à Lógica a formulação de leis gerais de encadeamentos lógicos que levariam à descoberta de novas verdades.

Aristóteles



Organon



Princípios Lógico

A Lógica Formal repousa sobre três princípios fundamentais que permitem todo seu desenvolvimento posterior, e que dão validade a todos os atos do pensamento e do raciocínio.

Princípio da Identidade

Afirma $A = A$ e não pode ser B , o que é, é.

Princípio da Não Contradição

$A = A$ e nunca pode ser não- A , o que é, é e não pode ser sua negação, ou seja, o ser é, o não ser não é.

Princípio do Terceiro Excluído

Afirma que Ou A é x ou A é y , não existe uma terceira possibilidade.



Ementa do Curso

- 1 Introdução
- 2 **Lógica Proposicional**
- 3 Construção de Tabelas-verdade
- 4 Implicação e Equivalência Lógica
- 5 Método Dedutivo
- 6 Inferência Lógica



Proposição

- Chama-se proposição todo o conjunto de palavras ou símbolos que exprimem um pensamento de sentido completo;
- As proposições transmitem pensamentos; e
- Afirmam fatos ou exprimem juízos que formamos a respeito de determinados entes.

Exemplos

A Lua é um satélite da terra

Sócrates é um homem

Eu estudo lógica

Não está chovendo



Considere o conjunto de símbolos:

$$A = \{ (,), \neg, \wedge, \vee, \rightarrow, \leftrightarrow, p, q, r, \dots \}$$

- A esse conjunto é chamado de alfabeto da Lógica Proposicional;
- As letras são símbolos não lógico (letras sentenciais); e
- O restante são símbolos lógicos (parênteses e conectivos lógicos).



Letras Sentenciais

As letras sentenciais são usadas para representar proposições elementares ou atômicas, isto é, proposições que não possuem partes que sejam também proposições.

Exemplos

p = O céu é azul

Q = Eu estudo lógica

r = $2 + 2 = 4$

s = Sócrates é um homem

Importante

As partes dessas proposições não são proposições mais simples, mas sim, componentes subsentenciais: expressões, palavras, sílabas ou letras.



- As proposições compostas são obtidas combinando proposições simples através de certos termos chamados conectivos;
- A Lógica dispõe de cinco tipos de conectivos e seus operadores:
 - Não (Negação), \neg ;
 - E (Conjunção), \wedge ;
 - Ou (Disjunção), \vee ;
 - Se – então (Condicional), \rightarrow ; e
 - Se e somente se (Bicondicional), \leftrightarrow .



Operador de Negação

A característica peculiar da negação, tal como ela se apresenta na lógica proposicional clássica, é que toda proposição submetida à operação de negação resulta na sua contraditória.

Exemplos

p = Está chovendo.

Ler-se $\neg p$, como: “**Não** está chovendo”.



Tabela-verdade para Negação

- Se p é uma proposição, a expressão $\neg p$ é chamada negação de p ; e
- Claramente, a negação inverte o valor verdade de uma expressão.

Exemplos

p	$\neg p$
V	F
F	V



Operador de Conjunção

A característica peculiar da conjunção está no fato de fórmulas conjuntivas expressarem a concomitância de fatos. A fórmula $(p \wedge q)$ expressa que o fato expresso por p ocorre ao mesmo tempo que o fato expresso por q .

Exemplos

p = Está chovendo.

q = Está ventando.

Ler-se $p \wedge q$, como: “Está chovendo e está ventando.”



Tabela-verdade para Conjunção

- Se p e q são proposições, a expressão $p \wedge q$ é chamada conjunção de p e q ; e
- As proposições p e q são chamadas fatores da expressão.

Exemplos

p	q	$p \wedge q$
V	V	V
V	F	F
F	V	F
F	F	F



Operador de Disjunção

A característica peculiar da disjunção consiste no fato de proposições disjuntivas expressarem que pelo menos um de dois fatos ocorre. A fórmula $(p \vee q)$ expressa que, dentre os fatos expressos por p e q respectivamente, pelo menos um deles ocorre.

Exemplos

p = Está nublado.

q = Está chovendo.

Ler-se $p \vee q$, como: “Está nublado ou está chovendo.”



Tabela-verdade para Disjunção

- Se p e q são proposições, a expressão $p \vee q$ é chamada disjunção inclusiva de p e q ; e
- As proposições p e q são chamadas parcelas da expressão.

Exemplos

p	q	$p \vee q$
V	V	V
V	F	V
F	V	V
F	F	F



A característica peculiar dessa operação consiste em que um condicional ($p \rightarrow q$) expressa que a ocorrência do fato expresso por p garante necessariamente a ocorrência do fato expresso por q .

Exemplos

p = Choveu.

q = Está molhado.

Ler-se $p \rightarrow q$, como: “Se choveu, então está molhado.”



Tabela-verdade para Condicional

- Se p e q são proposições, a expressão $p \rightarrow q$ é chamada condicional de p e q ;
- A proposição p é chamada antecedente, e a proposição q consequente da condicional; e
- A operação de condicionamento indica que o acontecimento de p é uma condição para que q aconteça.

Exemplos

p	q	$p \rightarrow q$
V	V	V
V	F	F
F	V	V
F	F	V



Operador Bicondicional

A característica peculiar dessa operação consiste em que um bicondicional ($p \leftrightarrow q$) assevera que os fatos expressos por p e q são interdependentes, isto é, ou os dois ocorrem juntos ou nenhum dos dois ocorrem.

Exemplos

p = Será aprovado.

q = Estudar.

Ler-se $p \leftrightarrow q$, como: “Aprenderá, **se e somente se** estudar”.



Tabela-verdade para Bicondicional

- Se p e q são proposições, a expressão $p \leftrightarrow q$ é chamada bicondicional de p e q ; e
- A operação de bicondicionamento indica que p é uma condição para que q aconteça, e vice-versa.

Exemplos

p	q	$p \leftrightarrow q$
V	V	V
V	F	F
F	V	F
F	F	V



A necessidade de usar parênteses na simbolização das proposições se deve ao fato de se evitar qualquer tipo de ambiguidade.

Exemplos

p = Estudar.

q = Fazer a prova.

r = Fazer o trabalho.

s = Serei aprovado.

Ler-se $((p \wedge q) \vee r) \rightarrow s$, como:

“Se ((estudar e fazer a prova) ou fazer o trabalho), então será aprovado.”



Ementa do Curso

- 1 Introdução
- 2 Lógica Proposicional
- 3 Construção de Tabelas-verdade**
- 4 Implicação e Equivalência Lógica
- 5 Método Dedutivo
- 6 Inferência Lógica



Proposição Composta

Dadas várias proposições simples p, q, r, \dots , podemos combiná-las pelos operadores lógicos $\wedge, \vee, \rightarrow, \leftrightarrow$ e construir proposições compostas:

- Então, com o emprego das tabelas-verdade das operações lógicas fundamentais já estudadas: $\neg p, p \wedge q, p \vee q, p \rightarrow q$ e $p \leftrightarrow q$;
- É possível construir a tabela-verdade correspondente a qualquer proposição composta; e
- A tabela-verdade exibirá exatamente os casos em que a proposição composta será verdadeira (V) ou falsa (F), admitindo-se que o seu valor lógico só depende dos valores lógicos das proposições simples.



Ordem de Precedência dos Operadores

- 1 Percorra a expressão da esquerda para a direita, executando as operações de **negação**, na ordem em que aparecerem;
- 2 Percorra novamente a expressão, da esquerda para a direita, executando as operações de **conjunção** e **disjunção**, na ordem em que aparecerem;
- 3 Percorra outra vez a expressão, da esquerda para a direita, executando desta vez as operações de **condicionamento**, na ordem em que aparecerem; e
- 4 Percorra uma última vez a expressão, da esquerda para a direita, executando as operações de **bicondicionamento**, na ordem em que aparecerem.



Construindo a Tabela-verdade (Passo 1)

Proposição

$$\neg(p \wedge \neg q)$$

- Forma-se, em primeiro lugar, o par de colunas correspondentes às duas proposições simples p e q ; e
- O total de linhas é igual a 2^n , onde n corresponde ao número de proposições simples.

Exemplo

p	q
V	V
V	F
F	V
F	F

Construindo a Tabela-verdade (Passo 2)

- Em seguida, forma-se a coluna para $\neg q$.

Exemplo

p	q	$\neg q$
V	V	F
V	F	V
F	V	F
F	F	V



Construindo a Tabela-verdade (Passo 3)

- Depois, forma-se a coluna para $p \wedge \neg q$.

Exemplo

p	q	$\neg q$	$p \wedge \neg q$
V	V	F	F
V	F	V	V
F	V	F	F
F	F	V	F



Construindo a Tabela-verdade (Passo 4)

- Por fim, forma-se a coluna relativa aos valores lógicos da proposição composta $\neg(p \wedge \neg q)$.

Exemplo

p	q	$\neg q$	$p \wedge \neg q$	$\neg(p \wedge \neg q)$
V	V	F	F	V
V	F	V	V	F
F	V	F	F	V
F	F	V	F	V



Definição

Tautologia é toda proposição composta $P(p, q, r, \dots)$ cujo valor lógico é sempre verdadeiro, quaisquer que sejam os valores lógicos das proposições simples p, q, r, \dots

Exemplo: $\neg(p \wedge \neg p)$

p	$\neg p$	$p \wedge \neg p$	$\neg(p \wedge \neg p)$
V	F	F	V
F	V	F	V



Definição

Contradição é toda proposição composta $P(p, q, r, \dots)$ cujo valor lógico é sempre falso, quais quer que sejam os valores lógicos das proposições simples p, q, r, \dots

Exemplo: $p \leftrightarrow \neg p$

p	$\neg p$	$p \leftrightarrow \neg p$
V	F	F
F	V	F



Definição

Contingência é toda a proposição composta que não é tautologia nem contradição.

Exemplo: $p \rightarrow \neg p$

p	$\neg p$	$p \rightarrow \neg p$
V	F	F
F	V	V



Ementa do Curso

- 1 Introdução
- 2 Lógica Proposicional
- 3 Construção de Tabelas-verdade
- 4 Implicação e Equivalência Lógica**
- 5 Método Dedutivo
- 6 Inferência Lógica



Definição

A proposição $P(p, q, r, \dots)$ implica a proposição $Q(p, q, r, \dots)$, isto é:

$$P(p, q, r, \dots) \Rightarrow Q(p, q, r, \dots)$$

se e somente se a condicional:

$P(p, q, r, \dots) \rightarrow Q(p, q, r, \dots)$ é tautológica.

Exemplo: $(p \rightarrow q) \wedge p, q$

p	q	$p \rightarrow q$	$(p \rightarrow q) \wedge p$	$((p \rightarrow q) \wedge p) \rightarrow q$
V	V	V	V	V
V	F	F	F	V
F	V	V	F	V
F	F	V	F	V

Portanto, simbolicamente: $(p \rightarrow q) \wedge p \Rightarrow q$



Definição

A proposição $P(p, q, r, \dots)$ é equivalente à proposição $Q(p, q, r, \dots)$, isto é:

$$P(p, q, r, \dots) \Leftrightarrow Q(p, q, r, \dots)$$

se e somente se a bicondicional:

$P(p, q, r, \dots) \leftrightarrow Q(p, q, r, \dots)$ é tautológica.

Exemplo: $\neg p \rightarrow p, p$

p	$\neg p$	$\neg p \rightarrow p$	$(\neg p \rightarrow p) \leftrightarrow p$
V	F	V	V
F	V	F	V

Portanto, simbolicamente: $\neg p \rightarrow p \Leftrightarrow p$



Ementa do Curso

- 1 Introdução
- 2 Lógica Proposicional
- 3 Construção de Tabelas-verdade
- 4 Implicação e Equivalência Lógica
- 5 Método Dedutivo**
- 6 Inferência Lógica



Definição

Dado um argumento $P_1, P_2, P_3 \rightarrow Q$ chama-se demonstração ou dedução de Q a partir das premissas P_1, P_2, \dots, P_n , a sequência finita de proposições X_1, X_2, \dots, X_m , tal que cada X_i ou é uma premissa ou decorre logicamente de proposições anteriores da sequência, e de tal modo que a última proposição X_m seja a conclusão Q do argumento dado. Desta forma, se for possível obter a conclusão Q através do procedimento de dedução, o argumento é válido, caso contrário, não é válido.



- Propriedades da Conjunção;
- Propriedades da Disjunção;
- Propriedades da Conjunção e Disjunção; e
- Negação da Condicional e Bicondicional.



Propriedades da Conjunção

Idempotente

$$p \wedge p \Leftrightarrow p$$

Comutativa

$$p \wedge q \Leftrightarrow q \wedge p$$

Associativa

$$(p \wedge q) \wedge r \Leftrightarrow p \wedge (q \wedge r)$$

Identidade

$$p \wedge t \Leftrightarrow p \text{ e } p \wedge c \Leftrightarrow c$$

Sejam t e c proposições também simples cujos valores lógicos respectivos são verdadeiro e falso.



Propriedades da Disjunção

Idempotente

$$p \vee p \Leftrightarrow p$$

Comutativa

$$p \vee q \Leftrightarrow q \vee p$$

Associativa

$$(p \vee q) \vee r \Leftrightarrow p \vee (q \vee r)$$

Identidade

$$p \vee t \Leftrightarrow t \text{ e } p \vee c \Leftrightarrow p$$

Sejam t e c proposições também simples cujos valores lógicos respectivos são verdadeiro e falso.



Propriedades da Conjunção e Disjunção

Distributiva

$$p \wedge (q \vee r) \Leftrightarrow (p \wedge q) \vee (p \wedge r) \text{ ou } p \vee (q \wedge r) \Leftrightarrow (p \vee q) \wedge (p \vee r)$$

Absorção

$$p \wedge (p \vee q) \Leftrightarrow p \text{ ou } p \vee (p \wedge q) \Leftrightarrow p$$

Regras De Morgan

$$\neg(p \wedge q) \Leftrightarrow \neg p \vee \neg q \text{ ou } \neg(p \vee q) \Leftrightarrow \neg p \wedge \neg q$$



Negação da Condicional e Bicondicional

Condicional

$$\neg(p \wedge q) \Leftrightarrow p \wedge \neg q$$

Bicondicional

$$\neg(p \leftrightarrow q) \Leftrightarrow (p \wedge \neg q) \vee (\neg p \wedge q)$$



Demonstração da Implicação

Exemplo: $p \wedge q \Rightarrow p$

$p \wedge q \rightarrow p$

$\neg(p \wedge q) \vee p$

$(\neg p \vee \neg q) \vee p$ – Comutativa

$(\neg q \vee \neg p) \vee p$ – Associativa

$\neg q \vee (\neg p \vee p)$

$\neg q \vee \text{Tautologia}$ – Identidade

Tautologia



Demonstração da Equivalência

Exemplo: $p \rightarrow q \Leftrightarrow p \vee q \rightarrow q$

$$p \vee q \rightarrow q$$

$$\neg(p \vee q) \vee q$$

$$(\neg p \wedge \neg q) \vee q - \text{Distributiva}$$

$$(\neg p \vee q) \wedge (\neg q \vee q)$$

$$(\neg p \vee q) \wedge \text{Tautologia} - \text{Identidade}$$

$$(\neg p \vee q)$$

$$p \rightarrow q$$



Ementa do Curso

- 1 Introdução
- 2 Lógica Proposicional
- 3 Construção de Tabelas-verdade
- 4 Implicação e Equivalência Lógica
- 5 Método Dedutivo
- 6 Inferência Lógica**



Definição

É o processo pelo qual se chega a uma proposição, firmada na base de uma ou outras mais proposições aceitas como ponto de partida do processo.

- Regra de Adição (AD);
- Regra de Simplificação (SIMP);
- Regra da Conjunção (CONJ);
- Regra de Absorção (ABS);
- Regra Modus ponens (MP);
- Regra Modus tollens (MT);
- Regra do Silogismo disjuntivo (SD);
- Regra do Silogismo hipotético (SH);
- Regra do Dilema construtivo (DC); e
- Regra do Dilema destrutivo (DD).



Adição

$$\frac{p}{p \vee q}$$

Simplificação

$$\frac{p \wedge q}{p}$$

Conjunção

$$\frac{\begin{array}{c} p \\ q \end{array}}{p \wedge q}$$

Absorção

$$\frac{p \rightarrow q}{p \rightarrow (p \wedge q)}$$



Modus Ponens

$$\frac{p \rightarrow q \quad p}{q}$$

Modus Tollens

$$\frac{p \rightarrow q \quad \neg q}{\neg p}$$

Silogismo Disjuntivo

$$\frac{p \vee q \quad \neg q}{p}$$

Silogismo Hipotético

$$\frac{p \rightarrow q \quad q \rightarrow r}{p \rightarrow r}$$



Dilema Construtivo

$$\begin{array}{l} p \rightarrow q \\ r \rightarrow s \\ p \vee r \\ \hline q \vee s \end{array}$$

Dilema Destrutivo

$$\begin{array}{l} p \rightarrow q \\ r \rightarrow s \\ \neg q \vee \neg s \\ \hline \neg p \vee \neg r \end{array}$$



Demonstração de Regras de Inferência

Exemplo: $p \rightarrow q, p \wedge r \vdash q$

(1) $p \rightarrow q$

(2) $p \wedge r$

(3) p 2 – *SP*

(4) q 1, 3 – *MP*

