

Sumário

1	Alguns Fundamentos da Teoria dos Grafos	5
1.1	Notação, definição e noções fundamentais	5
1.2	Circuito e Grafo de Euler	8
1.3	Representação matricial de grafos	10
1.4	Dígrafos e Redes	11
1.5	Problema de caminho mais curto	12
1.5.1	Algoritmo de Dijkstra	12
2	Problema Chinês do Carteiro - PCC	14
2.1	PCC não Orientado - PCCS	15
2.2	PCC Orientado - PCCD	17
2.3	PCC Misto - PCCM	18
	Referências	21

Lista de Figuras

Figura 1 – Representação Pictórica das 7 Pontes de Königsberg.	6
Figura 2 – Representação Pictórica do grafo do Problema.	16
Figura 3 – Representação Pictórica do grafo auxiliar do Problema.	16
Figura 4 – Representação Pictórica do grafo misto do Problema.	19
Figura 5 – Representação Pictórica do grafo misto auxiliar do Problema. . .	19
Figura 6 – Representação Pictórica do grafo H	20

Lista de Quadros

Lista de Tabelas

Capítulo 1

Alguns Fundamentos da Teoria dos Grafos

A teoria dos grafos é um ramo ativo da matemática. Sua origem baseia-se no trabalho do matemático suíço Leonhard Euler sobre o problema das sete pontes de Königsberg em 1766. Esse trata de um problema de percurso. Euler tinha como objetivo respostas sobre se era possível caminhar de forma contínua sobre as sete pontes de modo que atravessasse exatamente uma vez cada uma delas. De acordo com Gomes et al. (2009), Euler solucionou o problema, em que encontrou as condições para a existência de um percurso fechado e mostrou que não havia solução para o problemas das sete pontes de Königsberg. Assim, segundo Gomes et al. (2009) nasce então a Teoria dos Grafos.

Neste capítulo será destinado à introdução à teoria dos grafos, destacando as definições e conceitos.

1.1 Notação, definição e noções fundamentais

Definição 1.1.1 *Um grafo G é um par ordenado $(V(G), A(G))$ onde $V(G) = \{v_1, \dots, v_n\}$ e $A(G) = \{\alpha_1, \dots, \alpha_m\}$ são conjuntos distintos por natureza, chamados vértices e arestas de G , respectivamente, juntamente com uma função de incidência f que associa um par não ordenado de vértices (não necessariamente distintos) (u, v) a uma aresta do conjunto $A(G)$. Quando $f(u, v) = \alpha$, onde $\alpha \in A(G)$ tem-se que:*

- i. α é incidente com u e v ,*

- ii. u e v são os vértices finais de α , e
- iii. u e v são adjacentes.

De agora em diante, será usada as três informações acima em vez de referenciar explicitamente a função de incidência.

Um grafo é geralmente representado por figuras planas consistinda de linhas e pontos, as linhas representando arestas e os pontos representando vértices. Essa representação chama-se *Representação Pictórica de um Grafo*.

A Figura 1, ilustra de forma pictórica um grafo das setes pontes de Königsberg.

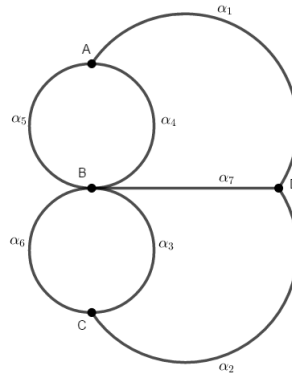


Figura 1: Representação Pictórica das 7 Pontes de Königsberg.

Aos termos número de vértices e arestas de um grafo usa-se a denominação de ordem e dimensão do grafo, respectivamente.

Denota-se por $|V(G)|$ e $|A(G)|$ o número de vértices e o número de arestas do grafo G , respectivamente. O número de vezes que as arestas incidem sobre o vértice v é chamado grau do vértice v , denotado por $d_G(v)$. Segundo Cardoso (2011), o máximo grau dos vértices de G denota-se por $\Delta(G)$ e o mínimo grau por $\delta(G)$.

Em um grafo arbitrário G , quando adicionado os graus de todos vértices de G cada aresta é contada duas vezes, podendo então concluir-se que

$$\sum_{v \in V(G)} d_G(v) = 2|A(G)| \quad (1.1)$$

No problema das setes pontes, tem-se que $|V(G)| = 4$ e $|A(G)| = 7$, com $d_G(A) = d_G(C) = d_G(D) = \delta(G) = 3$ e $d_G(B) = \Delta(G) = 5$.

Em um grafo G , um *laço* é uma aresta com ambos os seus vértices finais iguais; *arestas múltiplas* é um conjunto de duas ou mais arestas com os mesmos vértices finais.

Um grafo G é dito *simples* se não existe em G arestas múltiplas e laços. Caso contrário, G é dito *multigrafo*.

Para uma melhor compreensão da teoria dos grafos, é preciso definir alguns conceitos.

- **Passeio:** Um passeio em um grafo é uma sequência alternada de vértices e arestas, de modo que cada aresta é precedida por um de seus vértices finais e seguida por seu outro vértice final.
- **Trilha:** Uma trilha em um grafo é um passeio que não repete arestas. Ou seja, as arestas são distintas.
- **Caminho:** Um caminho em um grafo é um passeio que não repete vértices e arestas.
- **Passeio Fechado:** Um passeio em um grafo é fechado se começa e termina no mesmo vértice.
- **Circuitos:** Os circuitos são trilhas onde o vértice final coincide com o inicial, ou seja, circuito são trilhas fechadas.
- **Ciclo:** Os ciclos são trilhas fechadas em que o vértice inicial e vértice final são os únicos vértices coincidentes nesta trilha.

Segundo Cardoso (2011), dado um caminho P (ciclo C) de um grafo G designa-se por comprimento de $P(C)$ e denota-se por $comp(P)$ ($comp(C)$) o número de arestas que o constitui.

Na teoria dos grafos, um vértice adjacente de um vértice v em um Grafo é um vértice que está ligado a v por uma aresta. O conjunto de vértices adjacentes a um vértice v é denotado por *vizinhança de aberta* de v e denota-se por $N_G(v)$. Quando incluído o vértice v a sua vizinhança tem-se uma *vizinhança fechada* de v denotada por $N_G[v]$. Como consequência, tem-se que $d_G(v) = |N_G(v)|$.

De acordo com Cardoso (2011), dados dois grafos G_1 e G_2 , a *união* de G_1 com G_2 denota-se por $G_1 \cup G_2$ e corresponde ao grafo $G_1 \cup G_2 = (V(G_1) \cup V(G_2), A(G_1) \cup A(G_2))$ e a *intersecção* de G_1 com G_2 denota-se por $G_1 \cap G_2$ e corresponde ao grafo $G_1 \cap G_2 = (V(G_1) \cap V(G_2), A(G_1) \cap A(G_2))$.

Um grafo G é conexo se todos os pares de vértices de G são unidos por um passeio. Segundo Cardoso (2011), G diz-se conexo se não admite qualquer partição para além da trivial (i.e, $G = G \cup \emptyset$), pois, baseando-se nas definições de união e intersecção, pode-se afirmar que um grafo G se particiona “[...] nos grafos $G_1 = (V_1, A_1), \dots, G_k = (V_k, A_k)$ se $G = \cup_{1 \leq j \leq k} G_j$ e $G_p \cap G_q = \emptyset \ \forall p \neq q$, onde \emptyset denota o grafo definido pelo par (\emptyset, \emptyset) .” (CARDOSO, 2011).

Um grafo H é um subgrafo de um grafo G se $V(H) \subseteq V(G)$, $A(H) \subseteq A(G)$. Se H é um subgrafo de G então diz-se que H é um subgrafo próprio de G se $H \neq G$, H é um subgrafo abrangente de G se $V(H) = V(G)$.

De acordo com Mary (2007), cada parte conexa do grafo é chamada de *componente conexa* do grafo. Diz-se que um grafo é conexo se qualquer par de vértices é ligado por ao menos uma aresta.

Lema 1.1.2 *Sejam G_1, G_2 subgrafos conexos de um grafo G tal que $V(G_1) \cap V(G_2) \neq \emptyset$. Então $G_1 \cup G_2$ é conexo.*

Demonstração. Suponha que $x \in V(G_1) \cap V(G_2)$. Sejam u e v vértices de $G_1 \cup G_2$. Se $u, v \in G_1$, então, pode-se achar um passeio de u a v em G_1 pois, por hipótese, G_1 é conexo. O mesmo ocorre se $u, v \in G_2$. Por outro lado, se $u \in V(G_1)$ e $v \in V(G_2)$, então, é possível encontrar um passeio $W_1 \in G_1$ em que W_1 é um passeio de u até x e um passeio $W_2 \in G_2$ em que W_2 é um passeio de v até x . Então, $W_1 W_2$ é um passeio de $G_1 \cup G_2$ unindo u e v . Em todos os casos, $G_1 \cup G_2$ contém um passeio de u até v . Como u e v são vértices arbitrários de $G_1 \cup G_2$, segue que $G_1 \cup G_2$ é conexo. \square

1.2 Circuito e Grafo de Euler

Segundo Cardoso (2011), uma trilha é dita trilha de Euler se contém todas as arestas (logo também todos os vértices) do grafo ou multigrafo a que se refere. Por sua vez, denomina-se por circuito de Euler, todo o circuito que contenha todas as arestas do grafo.

A condição necessária e suficiente para a existência de um circuito de Euler é dada pelo teorema a seguir.

Teorema 1.2.1 *Um grafo (ou multigrafo) conexo G admite um circuito de Euler se e somente se todos os seus vértices têm grau par.*

Demonstração. Para provar a necessidade, suponha um passeio de Euler R em um grafo (ou multigrafo) G . Como todos os vértice de G pertencem a R , pode-se percorrer de um vértice qualquer x para qualquer outro vértice y ao longo de R e, portanto, G é conexo.

A suficiência será provada utilizando indução sobre o número de arestas do grafo (ou multigrafo) G , suponha que G é um grafo (ou multigrafo) conexo e $d_G(v)$ é par $\forall v \in V(G)$. Para um grafo (ou multigrafo) com uma única aresta o resultado é trivial. Assumindo que todos os vértices de G têm grau par e assumindo também que todos os grafos (ou multigrafos) conexos de grau par com menos arestas do que as de G admitem circuitos de Euler. Escolhendo $v \in V(G)$ e iniciando um passeio sobre as arestas de G , sem que se passe pela mesma aresta duas vezes, até se encontrar v novamente. Note que esse passeio é uma trilha fechada e devido os graus de cada vértice ser par, essa trilha fechada é possível. Em seguida, retirando as arestas relativas a trilha percorrida, uma certa quantidade de subgrafos (ou submultigrafos) conexos é obtido em que os vértices continuam ter grau par. Por hipótese de indução, esses subgrafos (ou submultigrafos) obtidos admitem circuitos de Euler. Assim, é possível criar um circuito de Euler para G acrescentando ao circuito inicial os circuitos de Euler de cada um dos subgrafos (ou submultigrafos) obtidos. \square

De acordo com Cardoso (2011), os únicos grafos não conexos, cujos vértices têm grau par, que admitem circuitos de Euler são os que têm uma única componente com um número de arestas superior a zero (isto é, as demais componentes são constituídas por vértices isolados).

O grafo G é dito de Euler ou Euleriano se tem um circuito de Euler. Ou seja, o grafo G tem m arestas e existe uma trilha fechada em G de comprimento m .

A prova do Teorema 1.2.1 sugere os passos de um algoritmo recursivo para a determinação de circuitos de Euler em grafos ou multigrafos conexos, em que todos os vértices tem grau par. O algoritmo determina o circuito de Euler a partir de $v_1 \in V(G)$, denotado por $Euler(G, v_1)$ e segue a formulação.

- **Algoritmo** $Euler(G, v_1)$

Se $d_G(v_1) = 0$

então $Euler(G, v_1) = v_1$

Senão faça

1. construir um circuito, $C = (v_1, v_2, \dots, v_k, v_1)$ em G ;
2. fazer $G = (V(G), A(G) \setminus A(C))$;
3. devolver $(Euler(G, v_1), Euler(G, v_2), \dots, Euler(G, v_k))$

fim faça

Fim do Algoritmo.

Corolário 1.2.2 *Um grafo (ou multigrafo) conexo G admite uma trilha de Euler, mas não um circuito de Euler, se e somente se tem exatamente dois vértices de grau ímpar.*

Demonstração. Se G admite uma trilha de Euler que não seja um circuito de Euler, ou seja, o vértice de inicial e o vértice final são distintos, apenas estes tem grau ímpar. Aos demais vértices em cada visita, foi utilizado apenas uma aresta na chegada ao vértice e outra aresta ao abandonar o vértice, sendo assim, cada um destes tem grau par. Suponha que todos os vértices de G tem grau par, exceto dois. Pelo Teorema 1.2.1, não existe um circuito de Euler. Para provar a existência dessa trilha, suponha que $d_G(u)$ e $d_G(v)$ seja ímpar e considere que o grafo G' , $A(G') = A(G) \cup \{uv\}$. Note que se no da aresta uv já existir em $A(G)$, G seria um multigrafo e G' seria um multiconjunto com arestas repetidas. G' satisfaz as hipóteses do Teorema 1.2.1, então, G' admite um circuito de Euler. Se for redirado do circuito a aresta uv obtém-se um trajecto de Euler em G . \square

Os grafos que atedem as condições do Corolário 1.2.2 é conhecido como *Semieuleriano*. Se o grafo for semieuleriano, é possível torná-lo euleriano.

1.3 Representação matricial de grafos

De acordo com Cardoso (2008), dado um grafo G , tal que $V(G) = \{v_1, \dots, v_n\}$, denota-se por *matriz de adjacência* de G e denota-se por M_G , a matrix quadrada $n \times n$, tal que

$$(M_G)_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{se } v_i v_j \in A(G), \\ 0, & \text{caso contrário.} \end{cases}$$

A seguir é ilustrado a matriz de adjacência do grafo das setes pontes ilustrado pela Figura 1 na Seção 1.1 em que cada linha e cada coluna representa um vértice.

$$M_G = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{vmatrix}$$

A *matriz de incidência* aresta vértice de um grafo de ordem n e dimensão m é uma matriz $n \times m$, T_G , tal que

$$(T_G)_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{se } \alpha_j = v_i v_k \text{ para algum } v_k \in V(G), \\ & \text{onde } \alpha_j \text{ refere-se à } j\text{-ésima aresta posicionada como coluna.} \\ 0, & \text{caso contrário.} \end{cases}$$

A seguir é ilustrado a matriz de incidência do grafo das setes pontes ilustrado na Figura 1, Seção 1.1 em que cada linha representa um vértice e cada coluna uma aresta.

$$T_G = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}$$

1.4 Dígrafos e Redes

Definição 1.4.1 (Grafo direcionado) De acordo com Mary (2007), um grafo direcionado ou dígrafo D é um grafo no qual cada aresta α recebeu uma direção fixa de um vértice final u até seu outro vértice final v . Chama-se arcos de arestas direcionadas e usa-se $A'(D)$ para denotar o conjunto de arcos de D . Diz que:

- i. α é um arco de u a v , e
- ii. u é a cauda de α e v é a cabeça de α .

Um **passeio direcionado** em um dígrafo D é um passeio em que cada arco é precedido por sua cauda e seguido por sua cabeça.

Segundo Cardoso (2008), um dígrafo diz-se simples se não tem nem arcos múltiplos nem arcos com ambos os extremos no mesmo vértice. Ou seja, assim como ocorre nos grafos, os dígrafos simples são denominados apenas dígrafos e dígrafos com laços orientados e/ou arcos múltiplos são denominados por multidígrafos.

Definição 1.4.2 (Rede) *De acordo com Mary (2007), uma rede é um grafo ou dígrafo no qual a cada aresta α associa-se um número real $w(\alpha)$ chamado peso de α .*

O comprimento de um passeio em uma rede é a soma dos pesos de suas arestas, contando arestas repetidas o número apropriado de vezes.

Seja N uma rede conexa em que cada aresta tem um peso inteiro positivo. Se W é um passeio fechado que contém todas as arestas de N então tem-se que $\text{comp}(W) \geq w(N)$. Além disso, se a igualdade for válida, então W contém cada aresta de N exatamente uma vez e, portanto, W é um passeio de Euler de N .

1.5 Problema de caminho mais curto

Nesta Seção, será abordado um problema relativamente simples que está presente no cotidiano. Suponha que alguém precisa se deslocar de sua casa para o aeroporto e para isso dispõe de várias avenidas que passam por diversos bairros de sua cidades. Qual caminho oferece um trajeto de menor comprimento, ou melhor, com a menor distância da casa até o aeroporto?

Considerando que vários locais ou simplesmente cada esquina sejam vértices e as rotas entre estes locais ou as ruas entre cada esquina sejam arestas, pode-se criar um grafo valorado que representa a situação. Entre o ponto de partida (casa) até o destino (aeroporto) existe mais de um trajeto, possível. Determinar o mais favorável nem sempre é simples de ser resolvido, em muitos casos, com grafos robustos, precisa-se de algoritmos.

Um dos algoritmos que soluciona este problema foi criado por Edsger Wybe Dijkstra, em 1952, será apresentado a seguir.

1.5.1 Algoritmo de Dijkstra

O algoritmo de Dijkstra é utilizado para resolver o problemas em que deseja-se determinar a distância mais curta (menor distância) entre dois vértices de um grafo.

As distâncias em grafo, dependendo do que o grafo representa, pode-se encontrar a rota mais curta, o menor custo, entre outros, tudo usando esse algoritmo.

O algoritmo funciona partindo do vértice final v e visitando sua vizinhança, encontrando a menor distância de $N_G(v)$ até o vértice final v . Quando encontrado o vértice inicial, pode-se determinar o caminho mais curto e seu comprimento.

- **Algoritmo *Dijkstra***

1. Comece no vértice final marcando-o com uma distância 0. Chame este vértice de seu vértice atual.
2. Identifique todos os vértices da vizinhança do vértice atual como vértice aberto.
3. Calcule a distância de cada vértice desta vizinhança até o vértice atual. Marque cada um dos vértices com sua distância correspondente, mas apenas altere fechado se a distância de um vértice for menor que a distância do vértice verificado anterior.
4. Rotule o vértice atual como visitado. Depois que um vértice é visitado, não é verificado novamente.
5. Dos vértices verificados, encontre aquele com a menor distância e torne-o seu vértice atual. Retorne e comece a partir de 2.
6. Quando rotular o vértice inicial como visitado - pare. A distância do caminho mais curto é a distância até o vértice inicial.

Fim do Algoritmo.

Capítulo 2

Problema Chinês do Carteiro - PCC

Em 1962, de acordo com (GOMES et al., 2009), um matemático da Universidade Normal de Shangtun, Kwan Mei-Ko, quando trabalhou como funcionário dos correios durante a revolução cultural chinesa, preocupou-se com uma situação semelhante à de Euler e Heierholzer a respeito do problema das pontes de Königsberg, porém adequada ao percurso dos carteiros que atendiam ruas de sua cidade. Neste caso, Kwan mostrou-se interessado em definir além da travessia, a forma mais econômica de fazê-la, realizando com a menor distância possível o percurso. Kwan definiu assim o problema: *Um carteiro tem que cobrir seu local de trabalho, antes de retornar ao posto. O problema é encontrar a menor distância de percurso para o carteiro.*

Para obter uma solução do problema pode-se ser usado a *solução por força bruta*, que verifica cada possibilidade de sequências (passeios) até encontrar a solução. Porém, se por exemplo o grafo que representa o trajeto percorrido pelo carteiro tenha 20 ruas, então, tem-se $20! = 2432902008176640000$ sequências, considerando que não há repetição de ruas. De acordo com Jurkiewicz (2009), para um computador verificar um milhão de sequências por segundo demoraria cerca de 77 milênios para obter uma solução. O que torna o método de solução por força bruta não é viável para este problema por questões óbvias.

Se o grafo em questão é euleriano, então, não há problema, pois é possível encontrar um circuito de Euler no trajeto do carteiro, que pode se obtido por algoritmos. Entretanto, se não for o caso, para resolver o problema, precisa-se *eulerizar* o grafo. A

ideia de eulerizar o grafo é fazer com que, neste caso, o carteiro percorra ruas repetidas de forma econômica. Quando o grafo tem dois vértices de grau ímpar, pelo Corolário 1.2.2 é possível eulerizar o grafo.

De acordo com Gomes et al. (2009), no PCC considera-se um grafo $G = (V, L)$ como um conjunto formado por vértices e ligações. O autor destaca,

o conjunto das ligações pode ser ampliado para uma dupla de conjuntos, $L = (A, A')$, onde A são denominadas as ligações *não orientadas* (*arestas*) entre vértices de G , e A' é o conjunto das ligações *orientadas* (*arcos*) entre vértices de G . (GOMES et al., 2009).

Neste Capítulo será apresentado o caso não orientados e o caso orientado com suas classificações variadas.

2.1 PCC não Orientado - PCCS

De acordo com Gomes et al. (2009), neste caso, deseja-se gerar um percurso de custo mínimo sobre um grafo $G = (V, A)$, valorado e conexo, a partir de um vértice de origem v_0 em que $v_0 \in V(G)$.

No PCC não orientado também conhecido como caso simétrico do PCC, cada aresta α possui um peso associado de modo que o percurso entre quaisquer pares de vértices de um grafo conexo é o mesmo de v_i para v_j e de v_j para v_i .

Exemplo 2.1.1 *Um condutor de transporte escolar tem que cobrir uma área buscando os alunos em suas residências e levando-os para a escola. A direção da escola questionou-se se o trajeto feito pelo condutor é o mais econômico saindo da garagem (origem), percorrendo em todas as ruas e voltando para o ponto de partida (garagem).*

A Figura 2, ilustra o grafo G em que corresponde a área em que o condutor tem que cobrir, onde o vértice B representa a origem.

Se o grafo G é euleriano, é possível obter um circuito de Euler e este é o trajeto mais econômico para o condutor. Verificando os graus dos vértices de G , tem-se que $d_G(B) = d_G(C) = 3$, $d_G(A) = d_G(D) = \Delta(G) = 4$ e $d_G(E) = \delta(G) = 2$. Note que os vértices B e C tem grau ímpar e os demais vértices tem grau par. Pelo Teorema 1.2.1 sabe-se que G não é euleriano. Então, não existe em G um passeio que inicie em B percorra todas as arestas e termine em B sem repetir nenhuma das arestas. Pelo

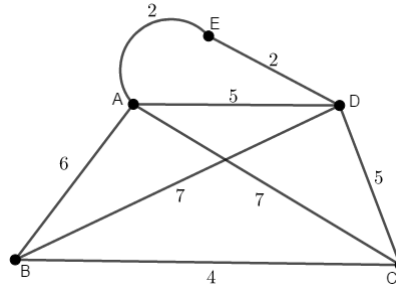


Figura 2: Representação Pictórica do grafo do Problema.

Corolário 1.2.2 G admite uma trilha de Euler de B à C . A trilha obtida cumpre as hipóteses do Corolário 1.2.2 e resolve parcialmente o problema, pois, cada aresta está presente uma única vez, porém os vértices finais são distintos. Considere G' como grafo axilar do grafo G , tal que $A(G') = A(G) \cup \{\alpha\}$, onde α é a combinação de arestas de menor distância entre os vértices B e C . Para obter α , basta usar o Algoritmo de Dijkstra, visto na Subseção 1.5.1 a partir do vértice final C . Verificando a distância entre as possíveis ligações entre estes vértices, tem-se que a menor é a ligação CB .

A Figura 3 ilustra graficamente o grafo G' .

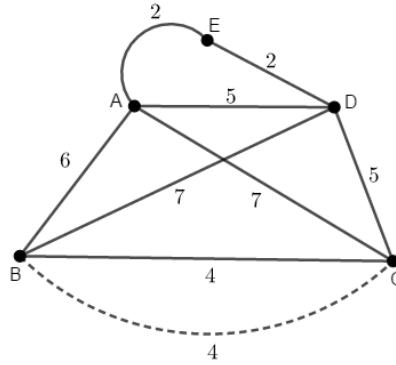


Figura 3: Representação Pictórica do grafo auxiliar do Problema.

Cada aresta representa uma rua e como não é possível criar uma nova rua, trata-se de uma aresta artificial que conecta os vértices B e C . De fato, pois a ideia, como já mencionado, é fazer com que no percurso do condutor seja percorrido ruas repetidas de forma econômica. Note que de todas as combinações possíveis de arestas que conecta os vértices B e C a mais favorável, isto é, a aresta ou combinação de arestas de menor peso é CB pois seu peso é $w(CB) = 4$.

Note que o grau de cada vértice do grafo G' é par. Pelo Teorema 1.2.1, existe um

circuito de Euler em G' e portanto, G' é euleriano. Para responder o questionamento da direção da escola, basta que seja aplicado o *Algoritmo Euler* (G, v_1) a partir do vértice B . Seja $T = \{BA, AE, ED, DC, (CB)_1, BD, DA, AC, (CB)_2\}$, onde $(CB)_1$ e $(CB)_2$ representam as arestas incidentes os vértices B e C do grafo G' ilustrado na Figura 3. Observe que T é um passeio que inicia em B e termina em B sem repetir nenhuma aresta. Portanto, T é um circuito de Euler e uma solução para o problema.

Para determinar um passeio que seja um circuito de Euler, basta utilizar o Algoritmo *Euler*(G, v_1 visto na Seção 1.2 ou outros algoritmos clássicos como por exemplo, o Algoritmo de Fleury.

2.2 PCC Orientado - PCCD

De acordo com Gomes et al. (2009), neste caso, deseja gerar um percurso de custo mínimo sobre um grafo $G = (V, A')$, valorado e fortemente conexo (f-conexo), a partir de um vértice v_0 , origem. Segundo Silva, Lins e Xavier (2020), uma condição necessária e suficiente para a existência de um circuito de Euler para o PCCD é que o grafo deve ser simétrico, ou seja, o número de arcos que entram em um determinado vértice deve ser igual ao número de arcos saindo desse vértice.

Satisfeita estas condições em um grafo, para encontrar o circuito de Euler basta utilizar algoritmos apropriados. No geral, assim como no PCCS é interessante tornar grafos não euleriano em euleriano. De acordo com Filho e Junqueira (2006), adaptação do algoritmo de Fleury para grafos direcionados dentre outros. Segundo Silva, Lins e Xavier (2020), o algoritmo de Fleury é um algoritmo de construção de rotas para traçar o circuito Euleriano, considerado um dos mais fáceis de serem implementados, aplicado apenas em grafos Eulerianos ou semieulerianos.

O algoritmo segue o seguinte procedimento:

• Algoritmo de Fleury

1. Construir uma lista vazia T que será armazenada o circuito de Euler.
2. Escolher um vértice arbitrário e adicioná-lo na lista T .
3. Escolher e marcar um aresta incidente ao vértice escolhido, desde que o grafo que resulte da escolha permaneça conexo.

4. Rotular a aresta marcada no grafo e adicionar o vértice a aresta no final da lista T .
5. Se todas as arestas do grafo original tiverem sido rotuladas, então retorne a lista T que conterá o circuito de Euler. Se não, tome um vértice adjacente ao vértice escolhido anteriormente e volte ao **passo 3**.

Fim algoritmo

2.3 PCC Misto - PCCM

De acordo com (GOMES et al., 2009), neste caso deseja-se gerar um percurso de custo mínimo sobre um grafo $G = (V, A, A')$, valorado e fortemente conexo (f-conexo), a partir de um vértice v_0 . Segundo Filho e Junqueira (2006), a condição para que um grafo misto fortemente conexo tenha um circuito Euleriano é que todos os vértices deste grafo tenham grau par e sejam balanceados. G é balanceado se $d_G^-(v_i) = d_G^+(v_i)$, $\forall v_i \in V$. Ou seja, o grau de entrada é igual ao grau de saída para todos vértices do grafo.

Se o grafo misto for Euleriano, o problema passa a ser determinar o circuito Euleriano neste grafo. Pra isso, Filho e Junqueira (2006) sugere um método em três etapas para se encontrar o circuito de Euler.

- **Método para determinar um circuito Euleriano em um grafo misto**

- *PASSO 1:* Atribuir direção aos arcos não direcionados de tal forma que o grafo se torne simétrico;
- *PASSO 2:* Atribuir direção aos arcos restantes;
- *PASSO 3:* Uma vez que o grafo esteja completamente direcionado, encontrar o circuito Euleriano utilizando um algoritmo para grafos direcionados

Assim como nos casos anteriores, se o grafo no PCCM não seja Euleriano, para torná-lo Euleriano, deve-se proceder de maneira semelhante os casos PCCS e PCCD. Ou seja, duplicar um número suficiente de arcos de tal forma que o grafo se torne Euleriano.

Suponha que no Exemplo 2.1.1, as ruas da área percorrida pelo condutor de transporte escolar teve modificações no sentido. A aresta DC ou CD passou ser um arco com sentido de C para D e as demais continuaram da mesma forma. Neste caso, note que a solução T apresentada no Exemplo 2.1.1 não é mais solução para este grafo. Pois, no passeio, T passa por esta aresta saindo de D e chegando em C .

A Figura 4 ilustra a modificação feita na região em que o condutor cobre.

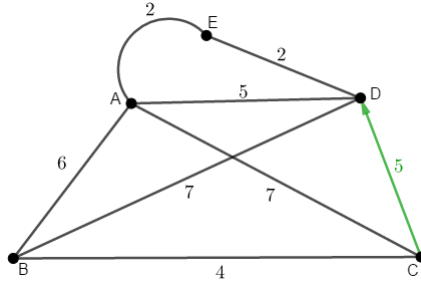


Figura 4: Representação Pictórica do grafo misto do Problema.

A Figura 5 ilustra o grafo auxiliar do grafo ilustrado na Figura 4. Como visto anteriormente, dentre todas as combinações possíveis de arestas que conecta os vértices B e C a mais favorável é CB pois seu peso é $w(CB) = 4$.

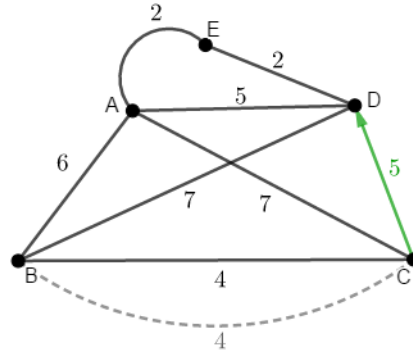


Figura 5: Representação Pictórica do grafo misto auxiliar do Problema.

A Figura 6 ilustra o grafo H na qual foi atribuído direções para as arestas que inicialmente não direcionadas. Pode-se notar que o grafo é simétrico, pois o número de arcos chegando em um determinado vértice é igual ao número de arcos saindo desse mesmo vértice. Verificando dos graus dos vértices do grafo H , tem-se. $d_H^-(A) = d_H^+(A) = d_H^-(B) = d_H^+(B) = d_H^-(C) = d_H^+(C) = d_H^-(D) = d_H^+(D) = 2$, $d_H^-(E) = d_H^+(E) = 1$ então H é balanceado. Note que H é orientado e euleriano. Neste caso, basta determinar

o circuito de Euler em H . Para isso, basta utilizar o Algoritmo de Fleury, visto na Seção 2.2.

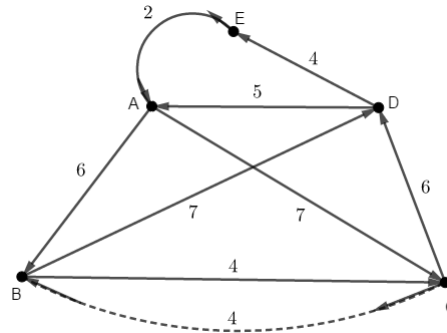


Figura 6: Representação Pictórica do grafo H .

Seja $W = \{BC, CD, DE, EA, AC, CB, BD, DA, AB\}$, observe que W é um passeio que inicia em B e termina em B sem repetir nenhum arco. Portanto, W é um circuito de Euler e uma solução para o problema.

Referências

CARDOSO, D. M. Tópicos de teoria algébrica dos grafos. 2008.

_____. Teoria dos grafos e aplicações. 2011.

FILHO, M. G.; JUNQUEIRA, R. d. Á. R. Problema do carteiro chinês: escolha de métodos de solução e análise de tempos computacionais. **Production**, SciELO Brasil, v. 16, p. 538–551, 2006.

GOMES, M. J. N.; JÚNIOR, W. R. C.; PALHANO, A. W. d. C.; COUTINHO, E. F.; CASTRO, G. A. d.; GOMES, F. J. N.; BARCELLOS, G. C.; REZENDE, B. F.; PEREIRA, L. W. L. O problema do carteiro chinês, algoritmos exatos e um ambiente mvi para análise de suas instâncias: sistema xnês. **Pesquisa Operacional**, SciELO Brasil, v. 29, p. 323–363, 2009.

JURKIEWICZ, S. Grafos—uma introdução. **São Paulo: OBMEP**, 2009.

MARY, U. d. L. Q. **Teoria de Grafos e Aplicações**. 2007. Disponível em: <<https://webpace.maths.qmul.ac.uk/b.jackson/MAS210/>>. Acesso em: 30 de janeiro de 2022.

SILVA, A. A. da; LINS, S. L. S.; XAVIER, A. da S. Uma aplicação do problema do carteiro chinês direcionado na coleta de lixo urbano. **Brazilian Journal of Development**, v. 6, n. 5, p. 24640–24659, 2020.