Bayesian Statistics

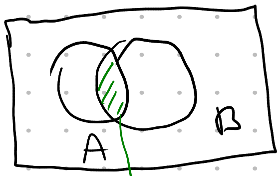
Ω: Espacio Muestral

$\mathcal{F}$: Espacio de Eventos

Joint Probability (Probabilidad Conjunta)

$$P(A, B) = P(A \cap B)$$

Ω



$P(A \cap B)$

Lanzo un dado regular

A:= "El resultado es par"

B:= "El resultado es multiplo de tres"

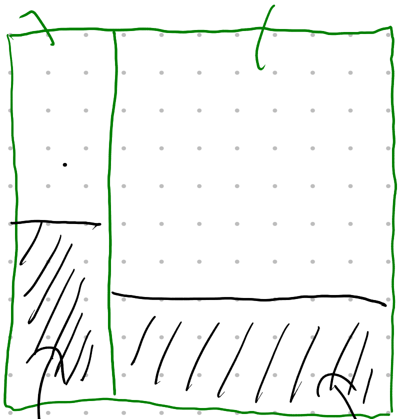
$P(A) = \frac{1}{2}$ $\qquad$ $P(B) = \frac{1}{3}$

$$p(A, B) = \frac{\{6\}}{\{1, \ldots, 6\}} = \frac{1}{6}$$

persona $\begin{cases} \text{Meticuloso} \\ \text{Organizado} \end{cases}$

$\boxed{\text{Bibliotecario}}$, $\boxed{\text{Granjero}}$

Bibliotecario A $\qquad$ granjero B



$P(A, C)$ $\qquad$ $P(A, B)$

Es granjero

A:= {"Es meticuloso y organizado"

B:= {"Es granjero"

C:= "Es Bibliotecario"

$$P(B \mid A) = \frac{P(A \mid B)\, P(B)}{P(A)}$$

$$P(C \mid A) = \frac{P(A \mid C)\, P(C)}{P(A)}$$

$P(B|A) > P(C|A)$

$P(A|B)\,P(B) > P(A|C)\,P(C)$

Meticuloso dado Granjero

P(Granjero)> Meticulo dado que es Bibliote, P(Biblioterario

$P(A|C) > P(A|B)$ Menor.

$P(B) > P(A)$ Mayor.

Conditional Probability

$$P(B|A) := \frac{P(A\cap B)}{P(A)}$$

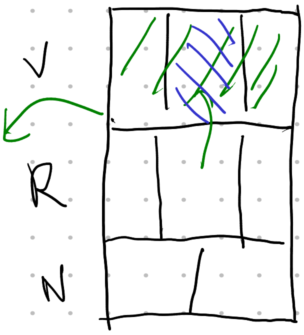
Probabilidad de B dado A

Ejemplo:

$P(P, V)$

1 2 3	4 7 8	10 15
V	R	N

$P(E|V)$



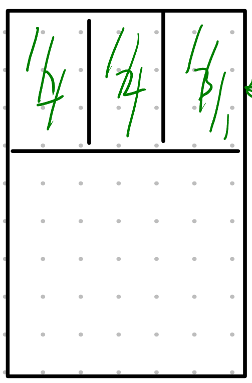
$P(V)$

$$P(\text{Even} \mid \text{Verde}) = \frac{1}{3}$$

$$P(\text{Even} \mid \text{Verde}) = \frac{P(E, V)}{P(V)} = \frac{1/8}{3/8} = \frac{1}{3} \qquad P(E|V) = \frac{P(P,V)}{P(V)}$$

Total Probability

$$P(B) = \sum_i P(B|A_i)P(A_i)$$



$P(V)$

$$P(V) = P(V,1) + P(V,2) + P(V,3)$$

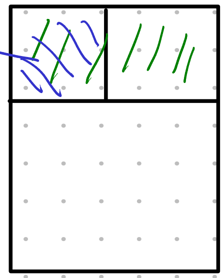
$$= \sum_i P(V, A_i)$$

$$= \sum_i P(V|A_i)\, P(A_i)$$

$$\frac{3}{8} = \frac{1}{8} + \frac{1}{8} + \frac{1}{8} = \frac{3}{8}$$

$$P(V, 2) = P(V|2)\,P(2) = 1 \cdot \frac{1}{8} = \frac{1}{8}$$

$P(A,B) = \frac{1}{6}$



$P(B) = \frac{1}{3}$

$P(A|B) = \frac{\frac{1}{6}}{\frac{1}{3}} = \frac{1}{2}$

Bayes' Theorem

A dado B

$$P(A|B) = \frac{P(B|A)P(A)}{P(B)}$$

Dem:

$$P(A|B) = \frac{P(A,B)}{P(B)} \Rightarrow P(A,B) = P(B)P(A|B)$$

$$P(B|A) = \frac{P(A,B)}{P(A)} \Rightarrow P(A,B) = P(A)P(B|A)$$

$$P(B)P(A|B) = P(A)P(B|A)$$

$$P(A|B) = \frac{P(B|A)P(A)}{P(B)}$$

Ej:

$\boxed{1 \quad 2 \quad 3}$ $\boxed{4 \quad 7 \quad 8}$ $\boxed{10 \quad 15}$ $P(V \cap E)$

V   R   N

$\Omega = \{\{1, V\}, \{2, V\}, \ldots, \{10, N\}, \{15, N\}\}$

$V :=$ "Es verde"

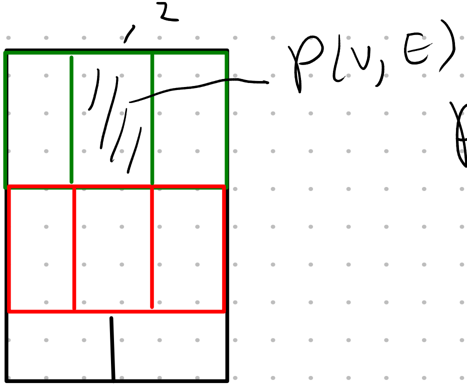
$E :=$ "Es par"

$P(V,E) = \frac{1}{8}$ $P(V) = \frac{3}{8}$

$P(E|V) = \frac{1}{3}$ $P(E) = \frac{1}{2}$

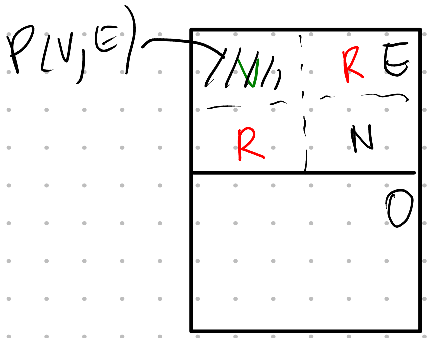
$P(V|E) = \frac{1}{4}$ ✓

$$P(V|E) = \frac{P(E|V)P(V)}{P(E)} = \frac{\frac{1}{3} \cdot \frac{3}{8}}{\frac{1}{2}} = \frac{\frac{1}{8}}{\frac{1}{2}} = \frac{1}{4}$$ ✓



$$P(E|V) = \frac{P(V,E)}{P(V)} = \frac{\frac{1}{8}}{\frac{3}{8}}$$

$$P(V,E) = P(V)\,P(E|V)$$



$$P(V,E) = P(E)\,P(V|E)$$

$$= \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{4} = \frac{1}{8}$$

$$P(E)\,P(V|E) = P(V)\,P(E|V)$$

$$P(V|E) = \frac{P(V)\,P(E|V)}{P(E)}$$

Ejemplo:

La cuarta parte de una población está vacunada contra una enfermedad contagiosa. En el transcurso de una epidemia debida a tal enfermedad, se observa que de cada cinco enfermos sólo uno está vacunado. Se sabe además que de cada doce vacunados sólo uno está enfermo. Calcular la probabilidad de que un no vacunado esté enfermo.