Definición: (experimento aleatorio) Un experimento se llama aleatorio si su resultado no puede ser determinado de antemano.

Definición: espacio muestral El conjunto Ω de todos los posibles resultados de un experimento aleatorio se llama espacio muestral. Los elementos $\omega \in \Omega$ son llamados puntos muestrales.

Exp. Aleatorio:

Ej: Lanzamiento de un dado

Esp. Muestral:

$\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ $1 \in \Omega$, $2 \in \Omega$

Ej: Lanzamiento de una moneda

$\Omega = \{c, s\}$

Definición: eventos Sea $\Im$ ~~la~~ una colección de subconjuntos del espacio muestral Ω. Los elementos de $\Im$ se conocen como eventos.

$\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$

$P(\Omega) = \{\phi, \{1\}, \ldots, \{6\}, \{1, 2\}, \{1, 3\}, \ldots \{6, 6\}, \ldots \{1,2,3,4,5,6\}$

$\Im_1 = \{\{1\}, \{2\}, \{3\}, \{4\}, \{5\}, \{6\}\}$: $\Im_1$: Lanzamiento de un dado una vez.

$\Im_2 = \{\{1, 1\}, \{1, 2\}, \{1, 3\}, \ldots, \{6, 6\}\}$: $\Im_2$: Lanzamiento de dos dados

evento: $e \in \Im_2$, $\{3, 4\}$

Definición: eventos mutuamente excluyentes Dos eventos A y B son mutuamente excluyentes si $A \cap B = \Phi \leftarrow$ Vacío

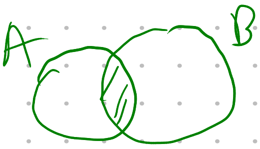
$A \cup B$

i) Unión:

$e = A \cup B$, es un evento, A y B ocurren al mismo tiempo

defi

ii) Intersección

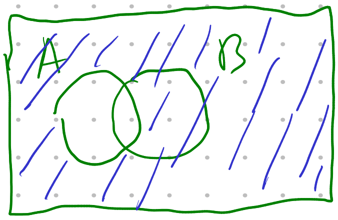


$A \cap B$

$A \cap B$

iii) Complemento

U

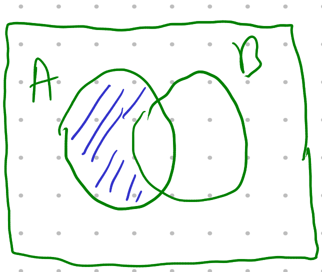


A^c

A^c

iv) $A - B$: Elementos en A pero no en B

U



$A - B$

Probabilidad

def. por

Definición: (frecuencia relativa) Para cada evento A, el número $f_r(A) := \frac{n(A)}{n}$ se llama la frecuencia relativa de A, donde $n(A)$ indica el número de veces que ocurre el evento A.

$\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$

$\Im = \{\{1\}, \{2\}, \{3\}, \{4\}, \{5\}, \{6\}\}$ $\quad 6 \in \Im$ evento

2 3 6 1 1 4

$f_r(6) = \frac{1}{6} \qquad f_r(1) = \frac{2}{6} = \frac{1}{3} \qquad f_r(5) = \frac{0}{6} = 0$

Definición: (espacio de probabilidad) Considere el espacio muestral y sus subconjuntos $(\Omega, \Im)$. La función P definida sobre $\Im$ satisface que:

Espacio

- $P(A) \geq 0$ para todo $A \in \Im$
- $P(\Omega) = 1$
- La probabilidad de la unión de un conjunto de eventos excluyentes es igual a la suma de la probabilidad de cada evento por separado.

La tripla $(\Omega, \Im, P)$ se llama espacio de probabilidad.

Espacio Muestral

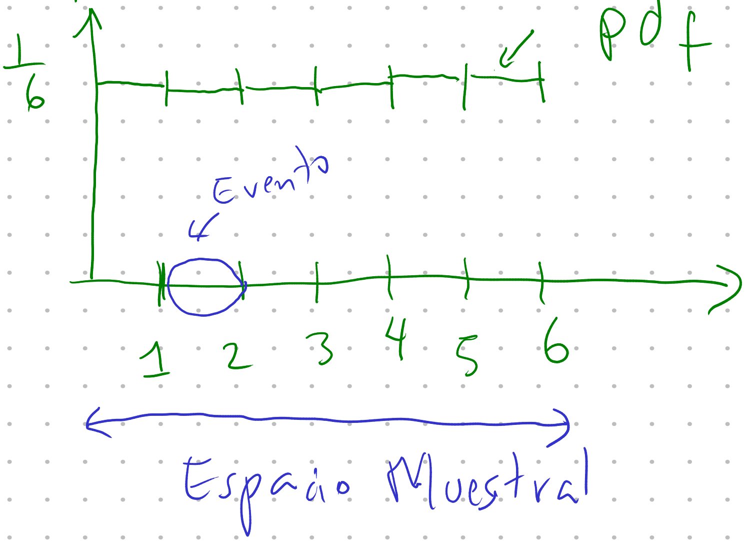
Conjunto Eventos

Función de probabilidad

función de densidad de probabilidad

pdf

Lanzo el dado



Definición (σ-álgebra) Sea $\Omega \neq \Phi$. Una colección de subconjuntos de Ω es una σ-álgebra sobre Ω, si:

- $\Omega \in \Im$ ✓
- Si $A \in \Im$ entonces $A^c \in \Im$ ✓
- Si $A_1, A_2, \cdots \in \Im$ entonces $\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i \in \Im$

Los elementos de $\Im$ se llaman eventos. ← conjunto de eventos

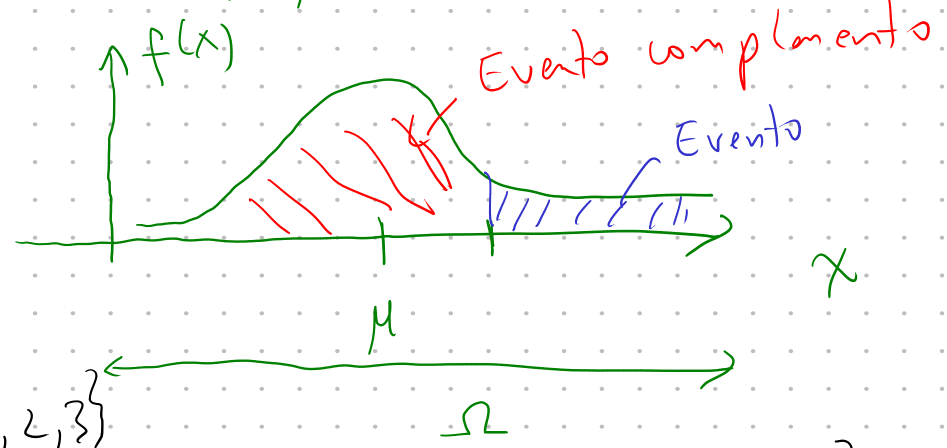
Ej: $\Omega = \{1, 2, 3\}$

$\Im = \{\phi, \{1\}, \{2, 3\}, \{1, 2, 3\}\}$

$\{1\} \in \Im \to \{2, 3\} \in \Im$

$\phi \cup \{1\} \cup \{2, 3\} \cup \{1, 2, 3\} = \{1, 2, 3\} \in \Im$

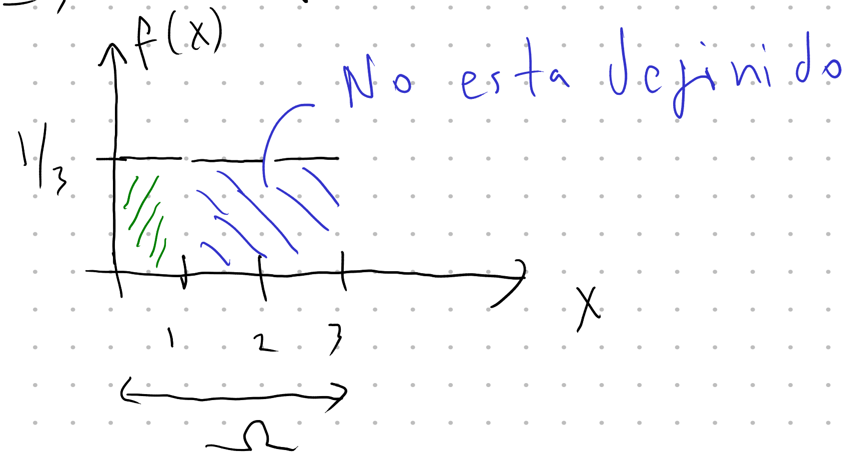
pdf



$\Omega = \{1, 2, 3\}$

$\Im = \{\phi, \{1\}, \{2\}, \{3\}, \{1, 2, 3\}\}$

$\{1\} \in \Im$ pero $\{2, 3\} \notin \Im$ ← σ-algebra



Ω = Espacio Muestral

$\omega \in \Omega$: Puntos muestrales

$\mathcal{F}$: Conjunto de eventos

$A \in \mathcal{F}$: Evento

Ejemplo:

$\Omega = \{1, 2, 3, 4\}$

$\{1\}, \{2, 3\}, \{4\}$

$\mathcal{F} = \{\Omega, \phi, \{1\}, \{2,3\}, \{4\}, \{\{1\},\{4\}\}, \{\{1\},\{2,3\}\}, \{4\}\{2,3\}$

$A :=$ "Se obtenga $\{1\}$, o $\{4\}$"

$P(\{1\}) = \frac{1}{4}$ $\quad P(\{2,3\}) = \frac{1}{2}$ $\quad P(\{4\}) = \frac{1}{4}$

$P(A) = P(\{1\} \cup \{4\}) = 1/2$

$P(\Omega) = 1$

Ejemplo:

Se lanza una moneda corriente tres veces consecutivas. Sean los dos siguientes eventos:

$$A := \text{"En el primer lanzamiento se obtiene cara"}$$

$$B := \text{"En el tercer lanzamiento se obtiene sello"}$$

1. Obtener Ω, $\Im$.
2. Describir lo siguientes eventos $A \cap B$, $A \cup B$, A^c.
3. Obtener las probabilidades de los eventos anteriores.

$\Omega = \{\{CCC\},\{CSC\},\{CCS\},\{CSS\},\{SCC\},\{SSC\},\{SCS\},\{SSS\}\}$

$\Im = \{\phi, \{CCC\},\{CSC\}, \dots \{SSS\}, \underline{\{\{CCC\},\{CSC\}\}}, \dots \{SCS\},\{SSS\}\},$
$\{\{CCC\},\{CSC\},\{CCS\}\}, \dots \Omega\}$

$C :=$ "Cara 1 Lanzm y Cara 3 Lanzminto".

$A \cap B :=$ "Cara 1 Lanz y Sello 3er Lanzm".

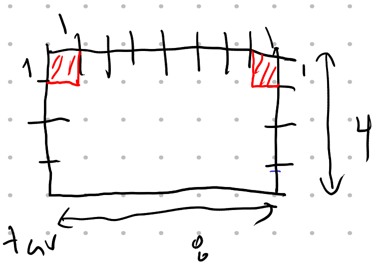
$A \cup B :=$ "Cara 1 Lanz o Sello 3er Lanzminto"

$A^c :=$ "No se obtiene Cara en el 1er Lanz" := "Se obtiene Sello en el 1er Lanz"

iii) $P(A) = \frac{4}{8} = \frac{1}{2}$ $\quad P(B) = \frac{1}{2}$

$P(A \cap B) = \frac{1}{4}$ $\quad P(A \cup B) = \frac{6}{8} = \frac{3}{4}$ $\quad P(A^c) = \frac{1}{2}$

Probabilidad Geométrica



$$P(A) := \frac{m(A)}{m(\Omega)}$$

$A :=$ "Anotar un gol"

$$P(A) = \frac{2}{32} = \frac{1}{16}$$

Ejemplo:

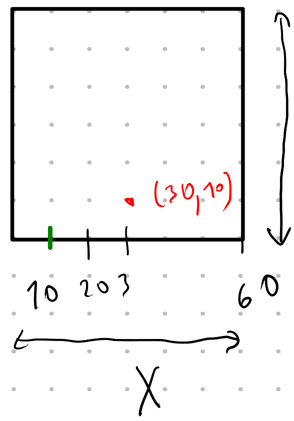
Maria y Carlos acordaron encontrarse en el centro de Bogotá entre las 12m y la 1pm. Los dos llegan en cualquier momento dentro de ese intervalo de tiempo. Suponiendo que los tiempos de llegada, de cada uno son independientes, calcular:

1. La probabilidad de que Carlos y María se encuentren si cada uno espera a los más diez minutos.
2. La probabilidad de que Carlos y María se encuentren si María sólo espera cinco minutos y Carlos sólo veinte.

$X :=$ "Llegada de Maria" $(12pm, 1pm)$

$y :=$ "Llegada de Carlos" $(12pm, 1pm)$

$\Omega = \{(x, y) : x \in X \text{ y } y \in Y\}$

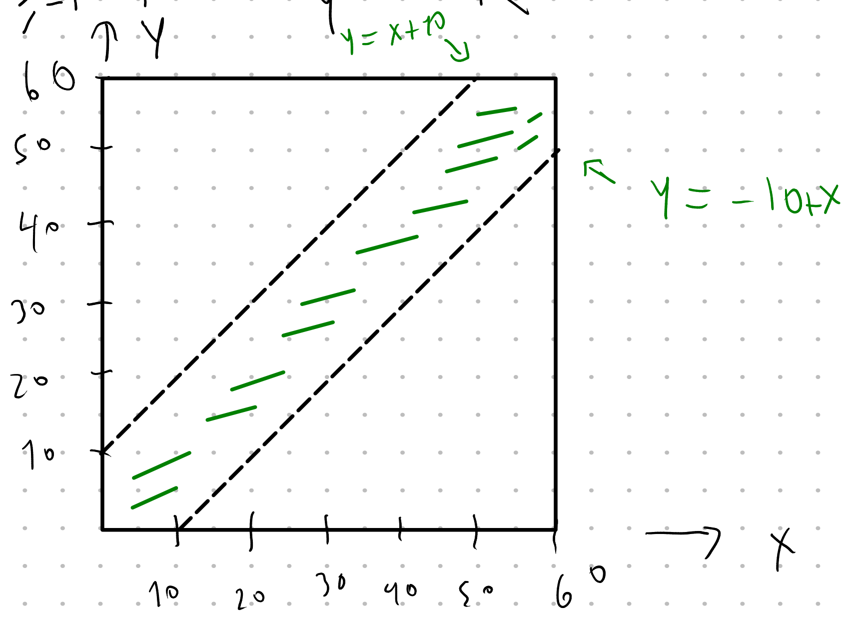


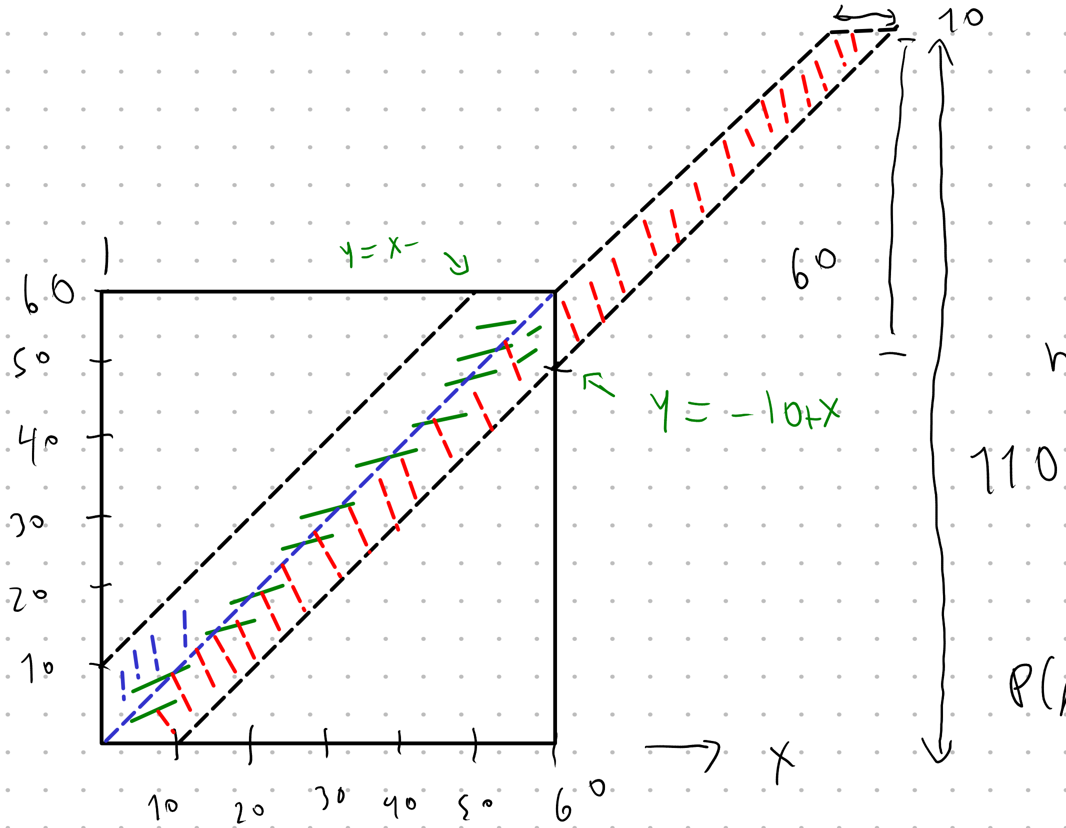
$A :=$ "Se encuentran si esperan 10 mins"

$|X - Y| \leq 10$

$X - Y \leq 10$ y $X - Y \geq -10$

(1) $Y \geq -10 + X$ y $Y \leq +10 + X$ (2)





$$A = b \times h$$

$$= 110 \times 10$$

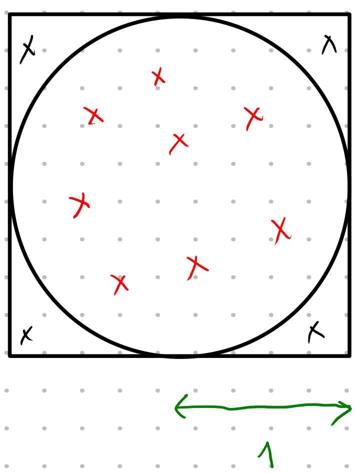
$$m(A) = 1100$$

$$m(\Omega) = 60^2$$

$$= 3600$$

$$P(A) = \frac{m(A)}{m(\Omega)} = \frac{1100}{3600}$$

$$= \frac{11}{36}$$



$$P = \frac{m(A)}{m(\Omega)}$$

$$= \frac{\pi R^2}{2^2} = \frac{\# A}{\# L}$$

$$\pi = 2^2\left(\frac{\# A}{\mathrm{len}(\Omega)}\right) \approx 4\left(\frac{\# A}{\mathrm{len}(\Omega)}\right)$$

Método de Montecarlo.