Universidad de Santiago de Chile
Facultad de Ingeniería
Depto. de Ingeniería Informática

Análisis de Datos
Capítulo VIII
"Análisis de Series Temporales"

Profesor: Dr. Max Chacón.

Objetivos

- Características de las señales temporales
- Identificación de señales
- Modelos lineales no paramétricos
- Modelos lineales paramétricos
- Evaluación de modelos.

➢Conceptos Básicos

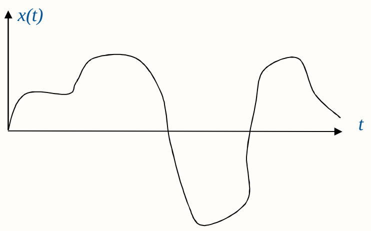
Señal: variación de una cantidad mensurable que posee información relativa a un sistema o su entorno.

Se caracteriza por usar como parámetro el tiempo pero es una representación del desarrollo dinámico de un fenómeno o sistema.

La señal puede tener varias representaciones, la cuales entregan en diferentes formas la información del fenómeno contenido en la señal.

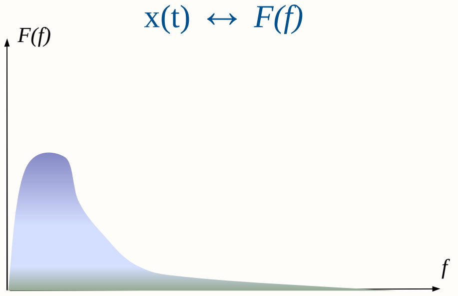
La representación mas común es en el tiempo:

Su representación en **t**:

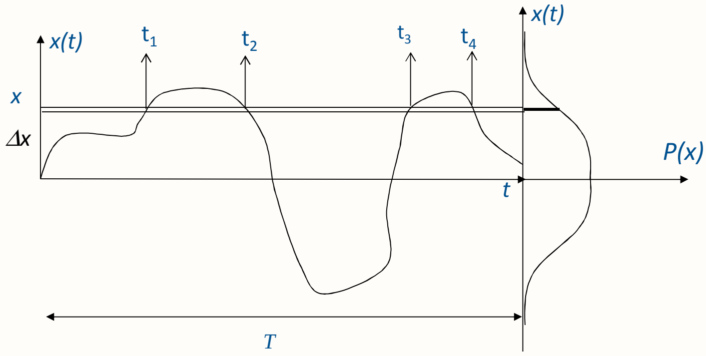


Una trasformación a la frecuencia: $F(f) = \mathscr{F}[x(t)] = \int_{-\infty}^{\infty} x(t) e^{-j2\pi f t} dt$

x(t) ↔ *F(f)*



Su representación en la probabilidad:



Representada por su función densidad de probabilidad

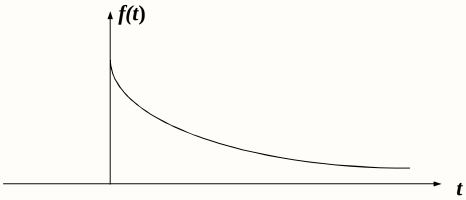
8.1. Señales continuas y discretas

Señal de tiempo continuo

Función continua o no, de variable independiente continua tiempo

Ej.

$$\boldsymbol{f}(\boldsymbol{t}) = \begin{cases} 0{,}5^{t} & \text{para } \boldsymbol{t} > 0 \\ 0 & \text{otro caso} \end{cases}$$



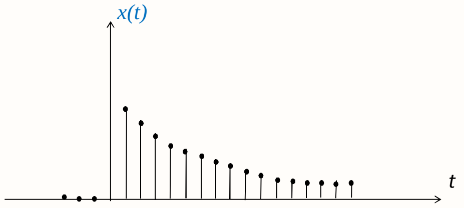
la señal de tiempo discreto representa valores en tiempos determinados

Señal de tiempo discreto

Definida solo en un conjunto determinado de instantes de tiempo.

Ej.

$$x(n) = \begin{cases} 0{,}5^n \text{ para } n \geq 0 \\ 0 \text{ para } n < 0 \end{cases}$$



la señal de tiempo discreto representa valores en tiempos determinados

Como: datos atmosféricos diarios o mensuales, utilidades anuales, índices de la bolsa de valores diarios, etc.

Los instantes que se grafican los valores se llaman instantes de muestreo, se considera muestreo constante

Def: $t = nT$, $n = 0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, \ldots$; *T: Intervalo de muestreo*

Para una señal se puede representar $x(n)$ en función de la variable entera n

Para el procesamiento se puede considerar la señal como una *secuencia ordenada* de valores $x(0), x(1), x(2), \ldots$; para $n=0,1,2,\ldots$

Existen varias formas de representación

- *representación funcional*

$$f(n)=\begin{cases}1, \text{ para } n=1,3\\ 4, \text{ para } n=2\\ 0, \text{ otro caso}\end{cases}$$

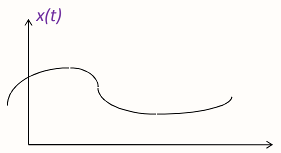
- *representación tabular*

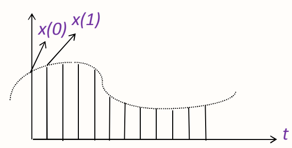
n	...	-2	-1	0	1	2	3	4	5 ...
$f(n)$	...	0	0	0	1	4	1	0	0 ...

- *representación en secuencia*

$$f(n)=\{\dots\ 0,\ 0,\ \underset{\uparrow}{1},\ 4,\ 1,\ 0,\ 0,\ \dots\}$$

En muchos casos se obtiene la señal discreta al muestrear una señal de tiempo continuo





donde $x(n)$ se define como $x(n)=x(nT)$; $n=0, \pm 1, \pm 2, \dots$

Con: T *[seg] periodo de muestreo*

$F_s=1/T$ *[muestras/seg] frecuencia de muestreo*

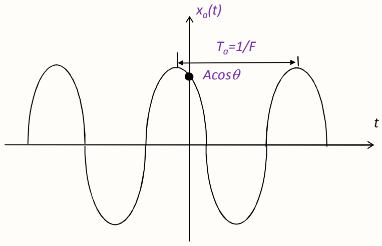
y el tiempo continuo se obtiene

$$t=nT=n/F_s$$

Frecuencia de señales periódicas

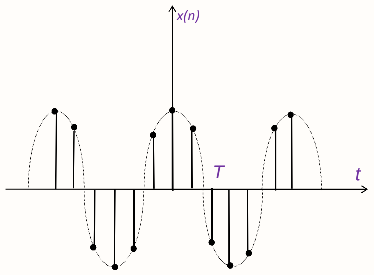
Suponga una señal periódica continua : $x_a(t)=A\cos(\Omega t+\theta)$

Ω: [radianes/seg], θ: [radianes], F: [ciclos/seg] y T_a : [seg]



$W=2pF$ y $T_a=1/F$ *(periodo de la sinusoide)* (1)

Suponga ahora que se quiere transformar esta señal en una señal de tiempo discreto, con muestreo uniforme de periodo T



Muestreando a una tasa $F_s=1/T$ se tiene:

$$x(n)=x_a(nT)=A\cos(2\pi FnT+\theta)$$

$$x(n) = A\cos\left(\frac{2\pi nF}{F_s}+\theta\right)$$

Entonces la señal discreta en tiempo será:

$$x(n)= A\cos(2\pi fn+\theta)=A\cos(\omega n+\theta)$$

Donde: *f* *[veces]* es la *frecuencia relativa* de la sinusoide discreta

$$f=F/F_s \quad y \quad \omega=\Omega T$$

Así para determinar F necesitamos siempre F_s

¿Cual será el rango de f y Ω?

El teorema de muestreo dice que para recuperar una señal (hacerla distinguible) se requiere muestrear por lo menos al doble de la máxima frecuencia de la señal original

En este caso la máxima frecuencia será

$$F_{max}=F \Rightarrow F_s \geq 2F$$

Entonces la frecuencia relativa será: $f \leq F/2F=1/2$

Así: $f \leq |1/2|$ y $W \leq |\pi|$

Tabla resumen

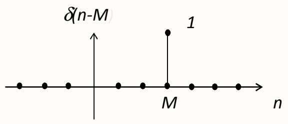
Señal continua		Señal discreta
Ω=2πF		$\omega=2\pi f$
[rad/seg] [Hz]		[rad/mues] [cilos/mues]
	$\rightarrow$	
	$\omega=\Omega T$, $f=F/F_s$	$-\pi \leq \omega \leq \pi$
		$-1/2 \leq f \leq 1/2$
	$\leftarrow$	
	$\Omega=\omega/T$, $F=f\,F_s$	
$-\infty \leq \Omega \leq \infty$		$-\pi/T \leq \Omega \leq \pi T$
$-\infty \leq F \leq \infty$		$-F_s/2 \leq F \leq F_s/2$

➢ Clasificación de funciones discretas

Funciones elementales

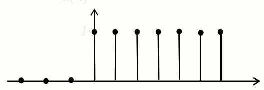
i) Impulso unitario

$$\delta(n) = \begin{cases} 1, \text{ para } n = 0 \\ 0, \text{ para } n \neq 0 \end{cases}$$



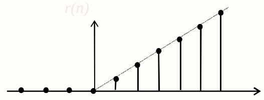
ii) Escalón unitario

$$u(n) = \begin{cases} 1, \text{ para } n \geq 0 \\ 0, \text{ para } n < 0 \end{cases}$$



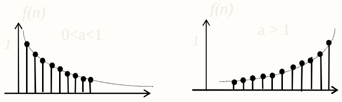
iii) Rampa

$$r(n) = \begin{cases} n, \text{ para } n \geq 0 \\ 0, \text{ para } n < 0 \end{cases}$$



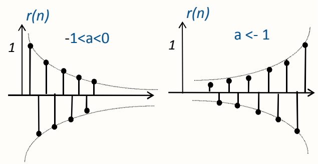
iv) Explonencial

$$f(n) = a^n \ \forall n$$



Con *a* complejo

$$x(n) = r^n e^{j\theta n} = r^n(\cos\theta n + j \operatorname{sen}\theta n)$$



Esta función también se puede representar en forma polar (modulo y fase)

$$|x(n)| = A(n) = r^n \qquad \angle x(n) = \phi(n) = \theta n$$

Clasificación por energía y potencia

Def : Señal de energía

La energía E_x de una señal *x(n)* es definida como:

$$E_x \equiv \sum_{n=-\infty}^{\infty} |x(n)|^2$$

Si E_x es finita entonces *x(n)* es una señal de energía

Def : Señal de potencia

La potencia media *P* de una señal *x(n)* se define

$$P \equiv \lim_{N\to\infty} \frac{1}{2N+1} \sum_{n=-N}^{N} |x(n)|^2$$

Si *P* es finita distinta de cero, la señal *x(n)* es llamada de señal de potencia

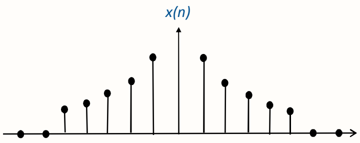
Nota: si E_x es finita $\rightarrow$ *P=0*

si E_x es infinita la potencia *P* puede ser finita o no

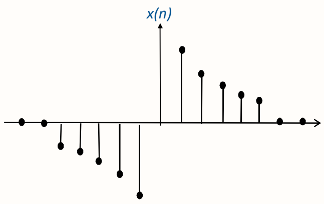
Las señales periódicas son señales de potencia

Señales simétricas y anti-simétricas

Una señal es simétrica o par si se cumple: *x(-n)=x(n)*



Una señal es anti-simétrica o impar si se cumple: *x(-n)=-x(n)*

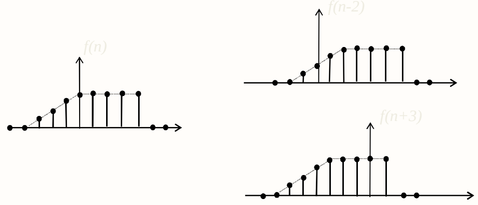


- Manipulación de funciones discretas

- *Desplazamiento en el tiempo*: *f(n)* puede ser desplazada reemplazando *n* por *n-k* y será *f(n-k).*

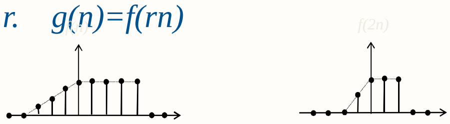
-Si *k* es positivo, se retrasa en *k* unidades

- Si *k* es negativo, se adelanta en *k* unidades



- *Reflexión*: al cambiar *n* por *-n*, *f(n)* es reflejada en torno al eje

- *Escalamiento*: Modificación del eje de las abscisas por un factor *r.* *g(n)=f(rn)*



- *Suma*: La suma de dos funciones discretas en *n* es una función discreta en *n* cuyo valor es igual a la suma de los valores de las dos funciones

Ej.: Obtener la función *h(n)=g(n)+f(n)*, con:

$$g(n)=\begin{cases} 0 & 0\le n\le 2 \\ 2^{-n}+5 & n\ge 3 \end{cases}$$

$$h(n)=g(n)+f(n)=\begin{cases} 3-2^{n} & 0\le n\le 1 \\ 4 & n=2 \\ 2^{-n}+n+7 & n\ge 3 \end{cases}$$

$$f(n)=\begin{cases} 3-2^{n} & 0\le n\le 1 \\ n+2 & n\ge 2 \end{cases}$$

- *Multiplicación:* El producto es una función discreta, cuyo valor es igual al producto de los valores de las funciones individuales para cada *n*.

Ej.: Obtener la función *h(n)=g(n)f(n).*

$$h(n) = g(n)\,f(n) = \begin{cases} 0 & 0 \le n \le 2 \\ n2^{-n} + 2^{-n+1} + 5n + 10 & n \ge 3 \end{cases}$$

- *Convolución:* Es una función discreta definida como:

Sol: $$\boldsymbol{f(n) * g(n) = \sum_{k=0}^{n} f(k)g(n-k)}$$

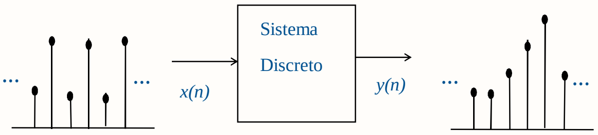
8.2. Sistemas discretos

Def: Dispositivo o algoritmo que desarrolla alguna operación sobre señales discretas

- Conjunto de operaciones aplicadas a una entrada *x(n)* (excitación) que produce una salida *y(n)* (respuesta)

$$\boldsymbol{y(n)} = \mathcal{T}[\boldsymbol{x(n)}]$$

$\mathcal{T}$: Transformación u operador



La descripción del sistema consiste en una expresión matemática o regla que representa la relación *entrada-salida*

La representación es solo un modelo de la realidad

$$x(n) \xrightarrow{\mathcal{T}} y(n)$$

Ej:

- *y(n)=x(n)*
- *y(n)=x(n-1)*
- *y(n)=Max{y(n+1)+x(n)+x(n-1)}*
- $y(n) = \sum_{k=-n}^{n} x(k) = y(n-1) + x(n)$

(acumulador)

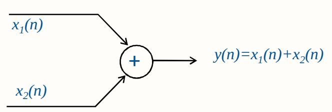
nota: los sistemas no dependen sólo del instante de tiempo *n* si no de los instantes de tiempo pasados

- Diagramas de bloques

Permiten representar interacciones complejas entre sistemas de una forma mas eficiente que las ecuaciones de diferencias

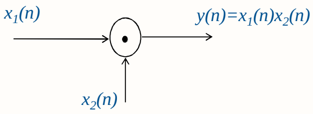
Estructuras básicas

Sumador (s. mem.)

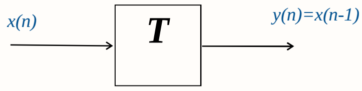


Sumador (s. mem.)

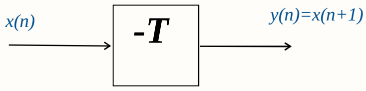
Multiplicador de señal (s. mem.)



Retardo unitario (mem)



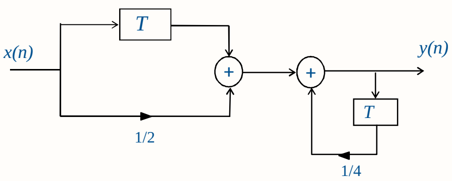
Adelanto unitario



En sistemas reales o de tiempo real no pueden ocurrir adelantos. Es posible realizarlos en sistemas que almacenan información

Ej: Diagrama de bloques

$$y(n)=1/4y(n-1)+1/2x(n)+x(n-1)$$



- Clasificación de sistemas discretos

Sistemas estáticos/dinámicos

- Sistema es *estático* (o sin memoria) si su salida en cualquier instante n depende solo de la muestra en el mismo instante

Ej:

$$y(n)=ax(n)$$
$$y(n)=nx(n)+bx^2(n)$$

- Sistema es *dinámico* de memoria de largo N si en el instante n está completamente determinado por las muestras de $[n-N,n]$

Ej: $y(n)=x(n)+3x(n-1)$

$$y(n)=\sum_{k=0}^{N}x(n-k)$$

Si $N=0$ el sistema es estático

Si $N\to\infty$ el sistema es dinámico de memoria infinita

Sistemas variantes/invariantes en el tiempo

- Sistema es *invariante* en el tiempo sí su relación entrada salida no depende del tiempo

$$y(n)=T[x(n)]$$

Teo : Un sistema es invariante ssi

Para una entrada: $x(n)\xrightarrow{\mathcal{T}}y(n)$

y para: $x(n-k)\xrightarrow{\mathcal{T}}y(n-k)$

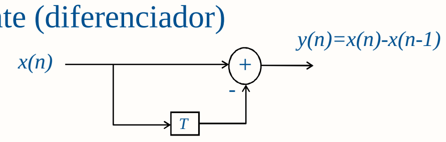
para cualquier $x(n)$ y cualquier k

El procedimiento para aplicar el teorema es el siguiente

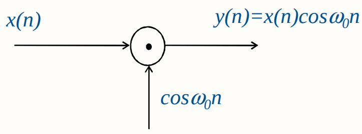
calcular la salida como $y(n\text{-}k)$
y calcular la salida como $y(n,k)=T[x(n-k)]$

Comparar $y(n\text{-}k)$ con $y(n,k)$
si $y(n-k)=y(n,k)$ es invariante
si $y(n-k)\neq y(n,k)$ es variante en t

Ej: invariante (diferenciador)



variante (modulador)



Sistemas lineales/no-lineales

- *Sistema es lineal* si cumple con el principio de superposición (multiplicación escalar, aditividad)

Teo: un sistema es lineal sii

$$T[a_1x_1(n)+a_2x_2(n)]=a_1T[x_1(n)]+a_2T[x_2(n)]$$

nota: si las constantes a_i son cero $y(n)=0$

Sistemas causales/no-causales

Teo: Sistema es causal si la salida depende solo de las entradas presentes y pasadas, pero no de las entradas futuras

$$y(n)=F[x(n),x(n-1),x(n-2),x(n-3), \ldots]$$

Nota: los sistemas de tiempo real tienen que ser causales solo pueden existir sistemas no causales cuando la señal es almacenada (off-line)

Sistemas estables/inestables

Teo: un sistema es estable sii para entradas acotadas produce salidas acotadas

Para una secuencia de entrada $x(n)$ y para una secuencia de salida $y(n)$ existen números finitos M_x y M_y tal que:

$$|x(n)| \leq M_x < \infty \quad \text{y} \quad |y(n)| \leq M_y < \infty \qquad \forall n$$

Ej: sea el sistema $y(n)=by(n-1)+x(n)$

con $x(n)=\delta(n-1)$ y $y(0)=0$

La solución será : $y(n)=b^{n-1}$ no acotada $1<|b|<\infty$

• *Análisis de Sistemas Discretos Lineales Invariantes* (SDLI)

Para analizar un sistema en el tiempo existen dos métodos

Resolver directamente la ecuación de diferencias

Analizar el comportamiento del sistema para una entrada dada

Un SDLI se caracteriza por la ecuación (ARMA)

$$y(n) = -\sum_{k=1}^{N} a_k y(n-k) + \sum_{k=0}^{M} b_k x(n-k)$$

$$Auto-regressive \succ -\sum_{k=1}^{N} a_k y(n-k) \quad Moving\ Average \succ \sum_{k=0}^{M} b_k x(n-k)$$

con a_k y b_k parámetros constantes

- Respuesta al impulso

Cualquier señal *x(n)* se puede representar por una suma de señales elementales $\delta(n-k)$ ponderadas por constantes

$$x(n)=\sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k\,\delta(n-k)$$

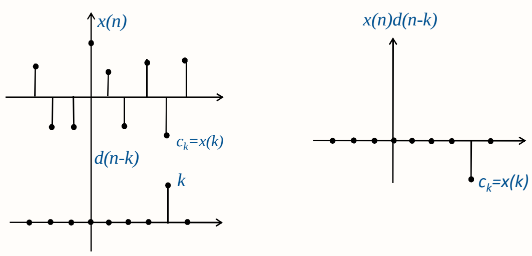
Ej: $x(n)=\{1,\underset{\uparrow}{2},3,4\} \rightarrow \delta(n+1)+2\delta(n)+3\delta(n-1)+4\delta(n-2)$

Def: *y(n,k)=T [δ(n-k)]* La respuesta al impulso unitario en *k*

La respuesta de un sistema lineal a *x(n)* será :

$$\boldsymbol{y(n)}=\mathcal{T}[\boldsymbol{x(n)}]=\mathcal{T}\left[\sum_{k=-\infty}^{\infty}\boldsymbol{c_k}\,\delta(\boldsymbol{n}-\boldsymbol{k})\right]$$
$$=\sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k T[\delta(n-k)]=\sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k\, y(n,k)$$

Por otro lado $c_k = x(n)\delta(n\text{-}k)$



y se cumple también que *x(n)δ(n-k) = x(k)δ(n-k)*

así la respuesta a *x(n)* para un sistema lineal será:

$$y(n)=\sum_{k=-\infty}^{\infty} x(n)\,y(n,k)$$

La respuesta a una señal cualquiera queda determinada por la suma de la señal *x(n)* ponderada por la respuesta *y(n,k)* a cada señal unitaria $\delta(n\text{-}k)$

Entonces el sistema lineal es caracterizado por:

$$y(n,k)=h(n,k)$$

Donde $h(n,k)$ es la respuesta al impulso unitario $\delta(n-k)$, n es el índice tiempo y k la localización del impulso.

En la figura anterior se puede observar que, considerando que se cumple $x(n)\delta(n-k)=x(k)\delta(n-k)$

Entonces $$y(n)=\sum_{k=-\infty}^{\infty}x(n)h(n,k)$$

- Convolución y respuesta

Para un sistema lineal $$y(n)=\sum_{k=-\infty}^{\infty}x(n)h(n,k)$$

con : $h(n,k)=\mathcal{T}[\delta(n-k)]$

Def: $h(n) \equiv \mathcal{T}[\delta(n)]$ para un impulso en cero

Para un sistema invariante se debe cumplir

$$T[\delta(n)]=h(n) \quad \Rightarrow \quad \mathcal{T}[\delta(n-k)] = h(n-k)$$

Entonces la respuesta de SDLI para una entrada $x(n)$ será:

$$y(n)=\sum_{k=-\infty}^{\infty}x(n)h(n,k)$$

Esta función es llamada *Suma de Convolución*

se dice que $x(n)$ es *convolucionada* con la respuesta al impulso $h(n)$ para producir la salida $y(n)$

La respuesta característica o respuesta al impulso $h(n)$ para un sistema expresado en función de la entrada $x(n)$

$$y(n)=\sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k x(n-k)$$

Esta se obtiene al reemplazar $x(n-k)$ por $\delta(n-k)$

$$h(n)=\sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k \delta(n-k)$$

Para calcular $y(n)$ en el tiempo se requiere:

i) Rotar $h(n)$ en torno a $k=0$; $h(k) \rightarrow h(-k)$

ii) Desplazar $h(k)$ en $n_0 \rightarrow h(n_0-k)$

iii) Multiplicar $x(n)h(n-k)$ obtener el resultado $\forall k$

$$Rn_0(k)=x(n)h(n-k)$$

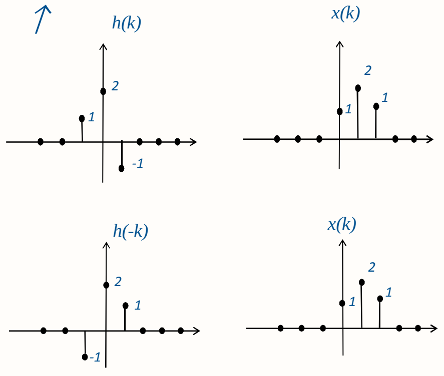
iv) Sumar todos los productos Rn_0 para obtener el punto $y(n_0)$

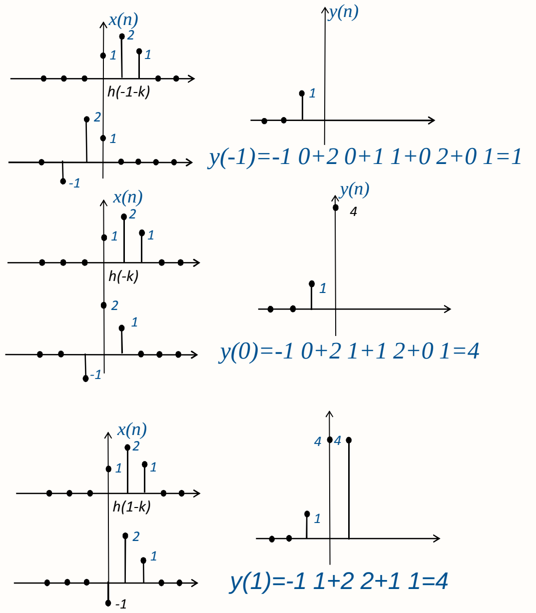
v) Repetir desde *i)* para cada punto

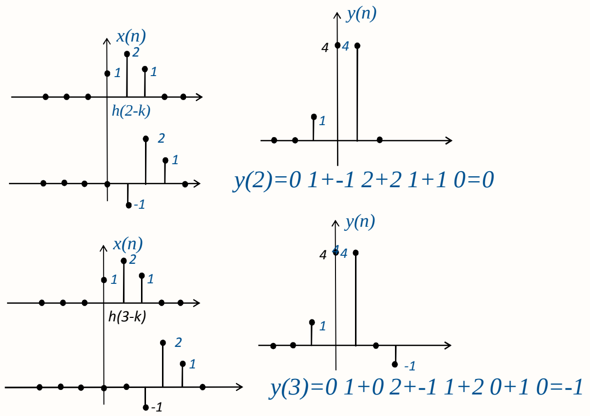
Ej numérico y convolución gráfica

obtener $y(n)=x(n-1)+2x(n)-x(n-1)$ con $x(n)=\{1,2,1\}$
↑

Sol: $h(n)=\{1,2,-1\}$ (notese : $y(n)=0$, $n<-1$)
↑







Propiedades de la Convolución

La suma de convolución se puede definir como un operador entre una señal y la respuesta de un sistema

$$y(n) = x(n) * h(n) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x(k)h(n-k)$$

Conmutatividad

$$x(n)*h(n)=h(n)*x(n)$$

Dem: $$x(n)*h(n)=\sum_{k=-\infty}^{\infty}x(k)h(n-k)$$

sea $m=n\text{-}k\ \ n \quad \Rightarrow \quad k=n\text{-}m$

$k \rightarrow -\infty\ ;m \rightarrow \infty\ ;\ k \rightarrow \infty\ ;\ m \rightarrow -\infty$

$$x(n)*h(n)=\sum_{m=\infty}^{-\infty}x(n-m)h(m)$$

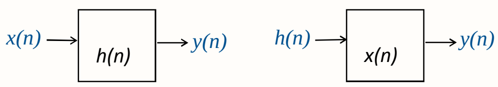
sea $m=n\text{-}k\ \ n \quad \Rightarrow \quad k=n\text{-}m$

$k \rightarrow -\infty\ ;m \rightarrow \infty\ ;\ k \rightarrow \infty\ ;\ m \rightarrow -\infty$

pero $\sum_{-\infty}^{\infty}=\sum_{\infty}^{-\infty}$

$$x(n)*h(n)=\sum_{m=-\infty}^{\infty}h(m)x(n-m)=h(n)*x(n)$$

$\Rightarrow$ se puede usar la respuesta al impulso como excitación a un sistema *x(n)* y la salida será idéntica

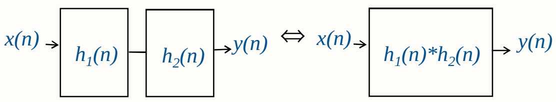


La operación matemática *x(n)*h(n)* se puede interpretar como la operación de dos señales *x(n)* y *h(n)*

- *Asociatividad*

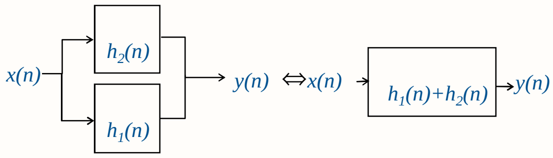
$$[x(n)*h_1(n)]*h_2(n)=x(n)[h_1(n)*h_2(n)]$$

Si $h_1(n)$ y $h_2(n)$ son SDLI



➢ *Distributividad*

$x(n)*[h_1(n)+h_2(n)]=x(n)*h_1(n)+x(n)*h_2(n)$



➢ *Sistemas lineales invariantes causales*

Un SDLI es causal ssi su respuesta al impulso $h(n)=0\ \forall\ n<0$

entonces $y(n)=\sum_{k=0}^{\infty} h(n)x(n-k)=\sum_{k=-\infty}^{n} x(k)h(n-k)$

➢ *Sistemas estables*

Es estable si la suma de la respuesta al impulso es finita

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} |h(k)| < \infty$$

➢ *Sistemas de duración finita e infinita*

Según la duración de la respuesta al impulso $h(n)$ los sistemas causales se pueden dividir en dos tipos

- *Sistemas de respuesta al impulso finita* (FIR)

donde $h(n)=0\ \ \forall\, n<0$ *y* $n \geq N$

$$y(n)=\sum_{k=0}^{N-1} h(k)x(n-k)$$

- *Sistemas de respuesta al impulso infinita* (IIR)

donde $h(n)=0\ \ \forall n<0$

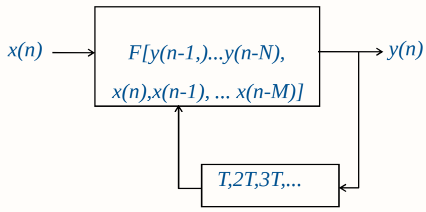
$$y(n)=\sum_{k=0}^{\infty} h(k)x(n-k)$$

➢ *Sistemas recursivos*

Un sistema recursivo se caracteriza por que su salida depende además de las entradas por las salidas pasadas

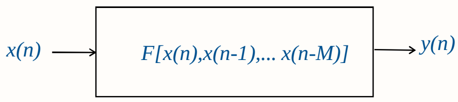
(*ecuación de diferencias*)

Esto implica que es su diagrama existen lazos de realimentación desde la salida



➢ *Sistemas no recursivos*

La salida depende solo de las entradas presentes y pasadas



Un sistema no recursivo puede ser transformado en un sistema recursivo formando una ecuación de diferencias

Esto en general reduce los cálculos computacionales

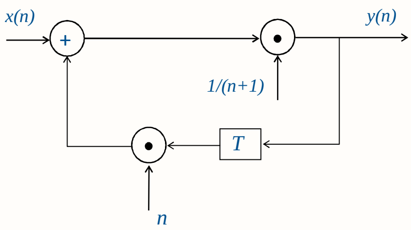
Ej: cálculo de la media

$$y(n) = \frac{1}{n+1}\sum_{k=0}^{n} x(k)$$

$$(n+1)y(n) = \sum_{k=0}^{n} x(k) = \sum_{k=0}^{n-1} x(k) + x(n)$$

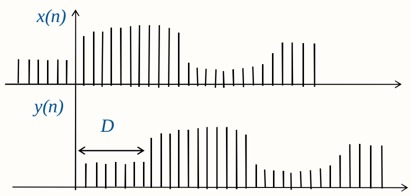
$$(n+1)y(n) = ny(n-1) + x(n)$$

$$y(n) = \frac{n}{(n+1)}y(n-1) + \frac{1}{(n+1)}x(n)$$

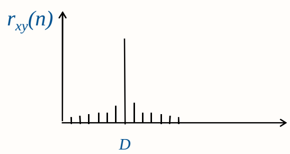


➢ Correlación de señales discretas

Problema: suponga que se requiere conocer la similitud de dos señales *x(n)* e *y(n)*



Sol: Generar una nueva señal que indique la similitud entre *x(n)* e *y(n)*



➢ Correlación cruzada y auto-correlación

Suponga dos señales $x(n)$ e $y(n)$ con energía finita

La *secuencia de correlación cruzada* se define:

$$r_{xy}(l)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}x(n)y(n-l) \qquad r_{xy}(l)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}x(n+l)y(n)$$

con $l=0,\pm1,\pm2,\pm3$ ... índice del desplazamiento de $x(n)$ e $y(n)$

el orden xy indica que si l crece $y(n)$ es desplazada de izquierda a derecha o que $x(n)$ es desplazada de derecha a izquierda

- se puede tener también:

$$r_{yx}(l)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}y(n)x(n-l) \qquad r_{yx}(l)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}y(n+l)x(n)$$

$yx \Rightarrow x(n)$ es desplazada de izquierda a derecha

se concluye que: $r_{xy}(l)=r_{yx}(-l)$

La *correlación* se puede relacionar con la *convolución*:

$$r_{xy}(l)=x(l)*y(-l)$$

Un caso especial de la correlación cruzada es cuando las señales $x(n)$ e $y(n)$ son iguales $x(n)=y(n)$

- auto-correlación

$$\boldsymbol{r_{xx}(l)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}x(n)x(n-l)} \quad \text{o} \quad r_{xx}(l)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}x(n+l)x(n)$$

Nota : $r_{xx}(l)=r_{xx}(-l)$

- Propiedades

Suponga una combinación lineal de dos señales

$$ax(n)+by(n-l)$$

a y b constantes y l un desplazamiento en el tiempo

La energía de estas señales será

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty}[ax(n)+by(n-l)]^2 =$$

$$a^2 \sum_{n=-\infty}^{\infty} x^2(n) + b^2 \sum_{n=-\infty}^{\infty} y^2(n-l) + 2ab \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n)y(n-l)$$

$$=a^2 r_{xx}(0)+b^2 r_{yy}(0)+2ab r_{xy}(l)$$

Donde: $r_{xx}(0)=E_x$ y $r_{yy}(0)=E_y$ la energía de x e y.

entonces: $a^2 r_{xx}(0)+b^2 r_{yy}(0)+2ab r_{xy}(l) \geq 0$

dividiendo por b^2 con $b \neq 0$

$$r_{xx}(0)\left(\frac{a}{b}\right)^2 + 2r_{xy}(l)\left(\frac{a}{b}\right) + r_{yy}(0) \geq 0$$

si $(a/b)=x$ es una ecuación cuadrática positiva $\Rightarrow$ el discriminante de la raíz es positivo

$$4\left[r_{xy}^2(l) - r_{xx}(0)r_{yy}(0)\right] \leq 0$$

entonces

$$|r_{xy}(l)| \leq \sqrt{r_{xx}(0)r_{yy}(0)} = \sqrt{E_x E_y}$$

cuando $y(n)=x(n)$

$$|r_{xx}(l)| \leq r_{xx}(0) = E_x$$

$\Rightarrow$ la auto-correlación tiene su máximo en cero

Sabiendo que el valor máximo de la correlación se encuentra en las señales puestas en cero, es posible normalizar las secuencia para que sus valores máximos existan entre -1 y 1

La correlación normalizada será:

$$\rho_{xy}(l) = \frac{r_{xy}(l)}{\sqrt{r_{xx}(0) r_{yy}(0)}}$$

y la auto-correlación

$$\rho_{xx}(l) = \frac{r_{xx}(l)}{r_{xx}(0)}$$

- Correlación de señales periódicas

Sea *x(n)* e *y(n)* una señal de potencia periódica, entonces la correlación cruzada o correlación será:

$$r_{xy}(l) = \lim_{M\to\infty} \frac{1}{2M+1} \sum_{n=-M}^{M} x(n) y(n-l)$$

Si *x(n)=y(n)* la auto-correlación será:

$$r_{xx}(l) = \lim_{M\to\infty} \frac{1}{2M+1} \sum_{n=-M}^{M} x(n) x(n-l)$$

Para dos secuencias particulares de período *N*, su correlación puede ser calculada sobre el período *N*, obteniéndose el mismo resultado

$$r_{xy}(l) = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} x(n) y(n-l)$$

$$r_{xx}(l) = \frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N-1} x(n)x(n-l)$$

Ej : Identificar periodicidad

Sea *y(n)=x(n)+no(n)* una señal *x(n)* de periodo *N* contaminada con ruido *no(n)*

Suponiendo que se tienen *M* muestras de *y(n)* con *M>>N*

La auto-correlación para *y(n)* será

$$r_{yy}(l) = \frac{1}{M}\sum_{n=0}^{M-1} y(n)y(n-l)$$

Reemplazando *y(n)=x(n)+no(n)*

$$r_{yy}(l) = \frac{1}{M}\sum_{n=0}^{M-1}[x(n)+no(n)][x(n-l)+no(n-l)]$$

$$= \frac{1}{M}\sum_{n=0}^{M-1} x(n)x(n-l) + \frac{1}{M}\sum_{n=0}^{M-1} x(n)no(n-l) + \frac{1}{M}\sum_{n=0}^{M-1} no(n)x(n-l) + \frac{1}{M}\sum_{n=0}^{M-1} no(n)no(n-l)$$

$$= r_{xx}(l) + r_{xno}(l) + r_{nox}(l) + r_{nono}(l)$$

$r_{xx}(l)$ es la auto-correlación de *x(n)*. Como *x(n)* es periódica, también lo será $r_{xx}(l)$, con “peaks” en *l=0,N,2N,..*

Si $M \rightarrow N$ los “peaks” serán mas reducidos

Las correlaciones cruzadas $r_{xno}(l)$ y $r_{nox}(l)$ deben aportar bajos niveles por ser señales poco correlacionadas

La auto-correlación del ruido $r_{nono}(l)$ solo aportará “peaks” positivos en *l=0*

Entonces $r_{yy}(l)$ solo contendrá los “peaks” de $r_{xx}(l)$ para *l>0*. Lo que permite detectar el periodo de la señal *x(n)*.

8.3. Identificación de señales

Las señales deterministas se pueden representar completamente en el dominio del tiempo y en el dominio de la frecuencia.

Para las señales aleatorias, es necesario utilizar distribuciones de probabilidades para describirlas en términos estadísticos.

- ***Definición de Procesos Aleatorios***

Una señal es aleatoria, cuando no es posible describir por una relación matemática el proceso físico que la produce, pues cada una de sus observaciones es única.

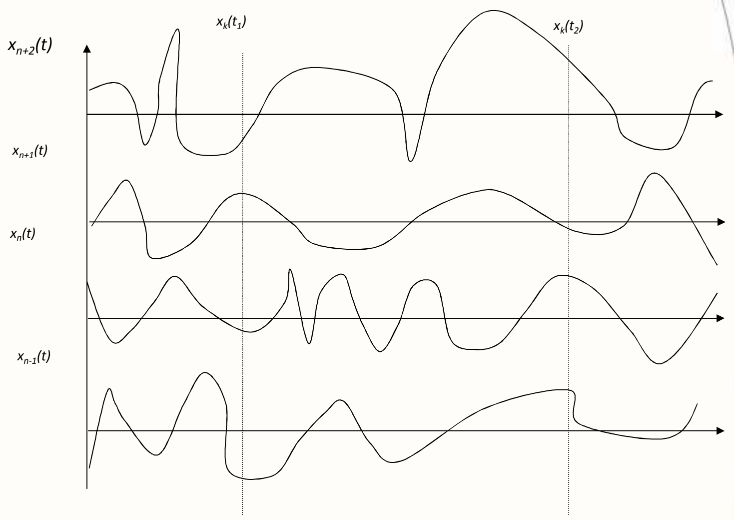
Cualquier colección de datos del fenómeno representa uno de los muchos resultados.

Un registro único en un intervalo de tiempo determinado es denominado *Función Muestra* (***x(t)***) o *muestra* del fenómeno físico.

*La colección de todas las posibles funciones muestra del fenómeno físico se denomina **Proceso Aleatorio (X(t))**.*

El estudio del proceso aleatorio se realiza considerando un conjunto de registros temporales. Conjunto de funciones muestras.

Se puede considerar un experimento que produce señales aleatorias que es repetido *N* veces, para producir *N* registros.



Para este conjunto de registros pueden ser obtenidas propiedades estadísticas tanto en el tiempo como en las muestras (espacio de estados) de los diferentes registros.

Se definirán diferentes parámetros de medida en el espacio de estados.

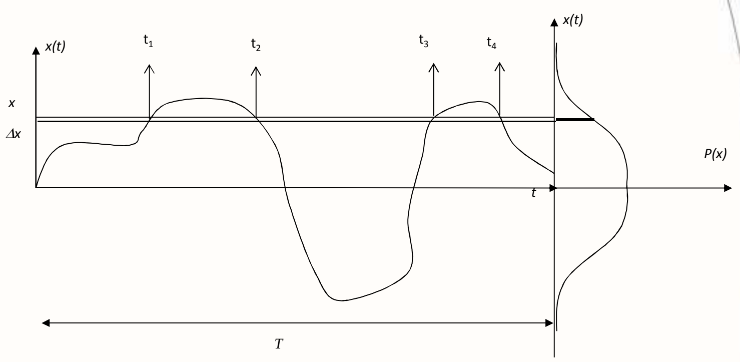
Parámetros de medida de Procesos Aleatorios

Para describir un proceso aleatorio se deben usar diferentes estimaciones (o parámetros) que caracterizan la señal.

Las estimaciones se pueden dividir en tres grupos, *Amplitud*, *Tiempo* y *Frecuencia*.

Amplitud: ***Def***: *Función Densidad de Probabilidad*

Describe la probabilidad de que la amplitud de la señal esté contenida en un ciento intervalo *[x,Δx]*



Considerando *t'* como la fracción de tiempo del registro total *T* que la señal está contenida entre los valores *x* y Δx.

$$t' = \sum_{p=0}^{k} t_p (x, x + \Delta x)$$

La función densidad de probabilidad será:

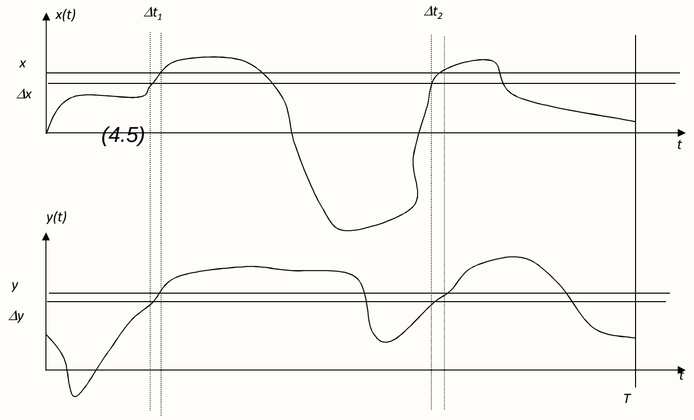
$$p(x) = \lim_{T \to \infty} \frac{t'}{t\Delta x}$$

También es importante obtener *la Función Distribución de Probabilidad* que indica la probabilidad de que *x(t)* sea menor o igual que un valor x_0 dado.

$$P(x) = \int_{-\infty}^{x_0} p(x)dx$$

Def: Función de Probabilidad Conjunta

Describe la probabilidad de que la amplitud de la señal esté contenida en un ciento intervalo *[x,Δx]*



(4.4)

$$t'_{xy} = \sum_{i=1}^{k} \Delta t_i$$

$$p(x,y) = \lim_{T\to\infty} \frac{t'_{xy}}{T\Delta x \Delta y}$$

$$P(x,y) = \int_{-\infty}^{x} \int_{-\infty}^{y} p(x,y)\,dy\,dx$$

Momentos

Def: *Momento de orden* ***l*** *(en las muestras)*

$$E\left[x_k^l(t_i)\right] = \lim_{N\to\infty} \sum_{k=-N}^{N} x_k^l(t_i)\, p(x_k(t_i))$$

Donde la estimación del momento de orden **1** es la media en las muestras.

$$\mu_x = \lim_{N\to\infty} \frac{1}{N} \sum_{k=1}^{N} x_k(t_i)$$

$$\hat{\mu}_x = \langle x(t_i) \rangle = \frac{1}{N}\sum_{k=1}^{N} x_k(t_i)$$

También se puede obtener una estimación de la media en el tiempo.

$$m_x = E[X(n)] = \lim_{M\to\infty} \frac{1}{2M+1}\sum_{n=-M}^{M} x(n)$$

$$\hat{m}_x = \bar{x}_{2M} = \frac{1}{2M+1}\sum_{n=-M}^{M} x(n)$$

La estimación del momento de orden 2 es el valor medio cuadrático en las muestras (potencia promedio).

$$\psi_x^2 = \lim_{N\to\infty} \frac{1}{N}\sum_{k=1}^{N} x_k^2(t_1)$$

Cuando el momento de orden 2 es centrado, se llama varianza:

$$\sigma_x^2 = E\left[(x_k(t_1) - \mu_{x(t_1)})^2\right] = \lim_{N\to\infty} \frac{1}{N}\sum_{k=1}^{N} (x_k(t_1) - \mu_{x(t_1)})^2$$

Tiempo: *Momentos Conjuntos*

Def: secuencia de ***Autocorrelación*** (en las muestras):

$$R_{xx}(t_1, t_2) = E[x_k(t_l), x_k(t_2)] = \lim_{N\to\infty} \frac{1}{N}\sum_{k=1}^{N} x_k(t_1) x_k(t_2)$$

Def: secuencia de ***Correlación Cruzada*** (en las muestras)

$$R_{xy}(t_1, t_2) = E[x_k(t_l), y_k(t_2)] = \lim_{N\to\infty} \frac{1}{N}\sum_{k=1}^{N} x_k(t_1) y_k(t_2)$$

Def: Función de ***autocovarianza***

$$c_{xx} = E\left[(x_k(t_1) - \mu_{x(t_1)})(x_k(t_2) - \mu_{x(t_2)})\right] =$$

$$\lim_{N\to\infty} \frac{1}{N}\sum_{k=1}^{N}(x_k(t_1) - \mu_{x(t_1)})(x_k(t_2) - \mu_{x(t_2)}) =$$

$$R_{xx}(t_1, t_2) - \mu_{x(t_1)}\mu_{x(t_2)}$$

Frecuencia:

Def: Función ***Densidad Espectral de Potencia***

$$s(f) = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{T}\int_0^T \frac{x_{\Delta f}^2(t)}{\Delta f} df$$

Donde es el valor al cuadrado de la señal contenido en un intervalo de frecuencia *[f,Δf]*

La densidad espectral de potencia puede ser estimada por el cuadrado del módulo de la transformada de Fourier de la señal

$$s(f) = |X(f)|^2$$

Def: Función ***Densidad Espectral de Potencia Cruzada***

$$s_{xy}(f) = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{T}\int_0^T \frac{x_{\Delta f}(t)y_{\Delta f}(t)}{\Delta f} df$$

El espectro cruzado es una función compleja

$$S_{xy}(f) = C_{xy}(f) + jQ_{xy}(f)$$

Def: Función de *Coherencia*

Es una cantidad real definida por:

$$\gamma_{xy}(f) = \frac{\left|S_{xy}(f)\right|^2}{S_x(f)S_y(f)} \leq 1$$

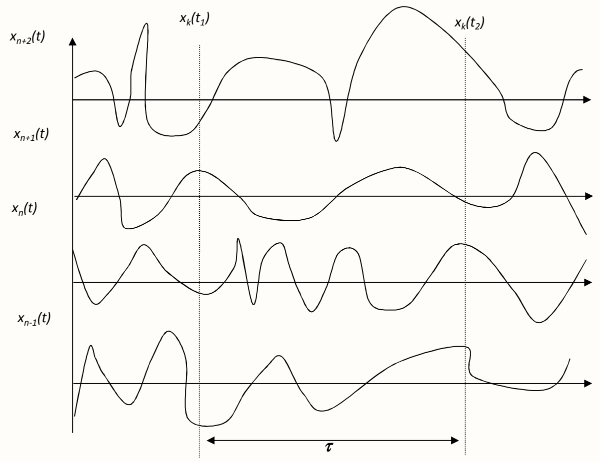
➢ ***Clasificación Procesos Aleatorios***

Clasificación de señales

$$\textit{señales}\begin{cases} \text{Determinísticas} \begin{cases} \text{Periódicas} \\ \text{No} - \text{periódicas} \end{cases} \\ \text{P. Aleatórios} \begin{cases} \text{Estacionários} \begin{cases} \text{Ergódicos} \\ \text{No} - \text{Ergódicos} \end{cases} \\ \text{No} - \text{estacionários} \end{cases} \end{cases}$$

➢ ***Proceso aleatorio estacionario***

Suponiendo que se tiene una colección de N muestras, se toman muestras en los intervalos t_1 y t_2 separados una distancia ***t***, para las N muestras



Donde cada valor en el tiempo tiene una distribución de probabilidad conjunta

$p(x_1(t_i),x_2(t_i),\ldots,x_N(t_i))$.

Se dice que el proceso es ***estacionario en sentido estricto*** o ***fuertemente estacionario*.**

Si las funciones densidad de probabilidad conjunta para los dos instantes de tiempo son idénticas.

$$p(x_1(t_1),x_2(t_1),\ldots,x_N(t_1)) = p(x_1(t_1+\tau),x_2(t_1+\tau),\ldots,x_N(t_1+\tau))$$

Para todo ***t*** y para todo ***k.***

También la señal o el proceso aleatorio es estacionario si todos los momentos de cualquier orden son idénticos.

$$E\left[x_k^l(t_1)\right] = E\left[x_k^l(t_1+\tau)\right] \quad \forall\tau$$

- Propiedades de los procesos estacionarios

Momentos:

Si el proceso es estacionario $\boldsymbol{P(x_k(t_1))=P(x_k(t_1+t))}$ para todo ***t***, por lo tanto los momentos de orden ***l*** son independientes del tiempo

Momentos conjuntos:

Cuando el proceso es estacionario las funciones distribución de probabilidad conjuntas:

$P(x_k(t_1), x_k(t_2)) = P(x_k(t_1+t), x_k(t_2+t))$

son idénticas para un ***t*** arbitrario.

Eso implica que la función de autocorrelación depende sólo de la diferencia de los tiempos ***$t_2 - t_1 = t$***

$$R_{xx}(\tau) = E[x_k(t), x_k(t+\tau)] = \lim_{N\to\infty} \frac{1}{N}\sum_{k=1}^{N} x_k(t)x_k(t+\tau)$$

y para una señal discreta en el tiempo ***t=m***, es igual a:

$$r_{xx}(\tau) = E[x(n), x(n+m)] = \lim_{M\to\infty} \frac{1}{2M+1}\sum_{n=-M}^{M} x(n)x(n+m)$$

Además $R_{xx}(\tau) = R_{xx}(-\tau)$ es una función par y
$R_{xx}(0) = \psi_x^2$
La ***correlación cruzada*** será:

$$R_{xy}(\tau) = E[x_k(t), y_k(t+\tau)] = \lim_{N\to\infty} \frac{1}{N}\sum_{k=1}^{N} x_k(t)y_k(t+\tau)$$

$$r_{xy}(\tau) = E[x(n), y(n+m)] = \lim_{m\to\infty} \frac{1}{2M+1}\sum_{n=-M}^{M} x(n)y(n+m)$$

La función de ***autocorrelación***

$$c_{xx}(\tau) = R_{xx}(\tau) - \mu_x^2$$

Además la varianza del proceso será:

$$\sigma_x^2 = c_{xx}(0) = R_{xx}(\tau) - \mu_x^2$$

Teorema de Wiener-Khinchine

La densidad espectral de potencia puede ser estimada obteniendo la transformada de Fourier de la función de ***autocorrelación***

$$s_x(f) = F[R_{xx}(\tau)] = \int_{-\infty}^{\infty} R_{xx}(\tau) e^{-j2\pi f\tau} d\tau$$

$$s_x(f) = \int_{-\infty}^{\infty} \left[\int_{-\infty}^{\infty} x(t)x(t+\tau)dt \right] e^{-j2\pi f\tau} d\tau$$

$$s_x(f) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t) \left[\int_{-\infty}^{\infty} x(t+\tau) e^{-j2\pi f\tau} d\tau \right] dt$$

$$s_x(f) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t) e^{j2\pi ft} \left[\int_{-\infty}^{\infty} x(x) e^{-j2\pi fx} dx \right] dt = |X(f)| \int_{-\infty}^{\infty} x(t) e^{j2\pi ft} dt$$

$$s_x(f) = |X(f)||X(-f)| = |X(f)|^2$$

$$R_{xx}(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} S_x(f) e^{j2\pi f\tau} df$$

También se puede extender a dos procesos conjuntamente estacionarios *X(t)* y *Y(t)* que tienen una función de correlación cruzada $R_{xy}(t)$.

Así la ***Densidad Espectral de Potencia Cruzada*** se obtiene de*:*

$$s_{xy}(f) = F[R_{xy}(\tau)] = \int_{-\infty}^{\infty} R_{xy}(\tau) e^{-j2\pi f\tau} d\tau$$

$$R_{xy}(\tau) = F^{-1}[S_{xy}(f)] = \int_{-\infty}^{\infty} S_{xy}(f) e^{-j2\pi\tau f} df$$

➢ ***Proceso Débilmente Estacionario o Estacionario en sentido amplio***

Estos son procesos no-estacionarios con la propiedad de que el valor medio del proceso (μ_x) es una constante y la función de autocorrelación satisface la propiedad de $R_{xx}(t_1,t_2)=R_{xx}(t)$.

Claramente ésta es una condición menos severa que la estacionariedad estricta. Pero existe una gran cantidad de señales que la cumplen.

➢ ***Procesos Ergódicos***

En general en la práctica se tiene una sola muestra del proceso.

Para obtener promedios que sean válidos a partir de una sola muestra en el tiempo, el proceso debe ser ergódico.

Para que el proceso sea ***ergódico*** se debe cumplir que:

La media de las muestra debe ser igual a la media de la colección

$$m_x = \lim_{M\to\infty} \frac{1}{2M+1}\sum_{n=-M}^{M} x(n) = \lim_{N\to\infty}\frac{1}{N}\sum_{k=1}^{N} x_k(t_i) = \mu_x$$

La ***autocorrelación*** de la muestra debe ser igual a la de la colección.

$$r_{xx}(m) = \lim_{M\to\infty} \frac{1}{2M+1}\sum_{n=-M}^{M} x(n)x(n+m) =$$

$$R_{xx}(t_1,t_2) = \lim_{N\to\infty}\frac{1}{N}\sum_{k=1}^{N} x_k(t_1)x_k(t_2)$$