UNIVERSIDAD
DE SANTIAGO
DE CHILE

Ayudantía

# Análisis de datos – PEP 2

Ayudante Gustavo Hurtado

# Contenido incluido en la PEP 2

- Capítulo V – Reglas de Asociación.
- Capítulo VI – Clasificación Bayesiana.
- Capítulo VII – Árboles de Decisión.

## Objetivos

- Comprender el entorno de problemas y la génesis de las reglas de asociación.
- Conocer las definiciones formales de las reglas de asociación.
- Comprender y manipular los parámetros necesarios para evaluar en forma cualitativa una regla.
- Comprender los problemas combinatorios subyacentes a la búsqueda de relaciones frecuentes.
- Evaluar las diferentes medidas de calidad de una regla de asociación.
- Dominar los algoritmos para la búsqueda de reglas frecuentes.

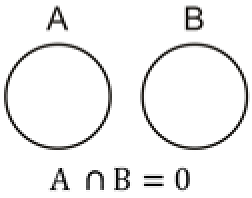
**Problema:**

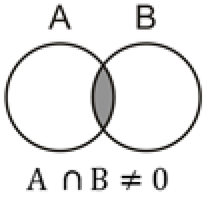
Mejorar la calidad de decisiones comerciales a través del análisis de transacciones de compras que se han realizado en el pasado.

## Definiciones básicas de Probabilidades :

**Sucesos mutuamente excluyentes,** no pueden ocurrir al mismo tiempo son disjuntos, la ocurrencia de uno impide la del otro.

**Sucesos no excluyentes,** pueden ocurrir al mismo tiempo pero no dependen uno del otro para que se realice su ocurrencia.




$P(A \cup B) = P(A) + P(B)$ Reglas de Adición $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$

## Definiciones básicas de Probabilidades :

| **Sucesos independientes,** son sucesos cuya ocurrencia no tiene efecto sobre la probabilidad de ocurrencia de otro. | **Sucesos dependientes,** son sucesos cuya ocurrencia tiene efecto directo sobre la probabilidad de ocurrencia de otro. |
|---|---|

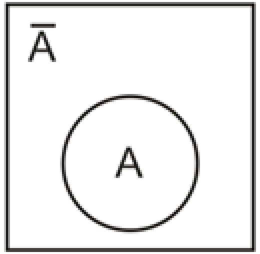
$P(A \cap B) = P(A)P(B)$ Reglas de Multiplicación $P(A \cap B) = P(A)P(B|A)$

- Dónde $P(B|A)$ probabilidad condicional de $B$ dado $A$, y al despejar la probabilidad condicional obtenemos:

$$P(B|A) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)}$$

## Definiciones básicas de Probabilidades:

- **Sucesos complementarios,** la no aparición de ellos obliga la ocurrencia del otro.




A = Conjunto de A

Ā = Complemento de A

Se deduce que P(A) + P (Ā ) = 1

## Definición: Sistema de Información Operacional

Considere una base de datos o *Sistema de Información Operacional* compuesto por la 4-tupla:

$$SI = <U, Q, V, f>$$

Dónde:

$U$ es un universo cerrado (conjunto finito) no vacío de $n$ objetos $[x_1, x_2, \ldots, x_n]$.

$Q$ es un conjunto finito, no vacío, de $p$ atributos $[q_1, q_2, \ldots, q_p]$.

$V$ representa el dominio o valores que pueden adquirir los atributos $q$.

$f{:}UxQ \rightarrow V$ es una función de decisión o *función de información* (correspondencia funcional) $f(x,q) \in V_q$ para cualquier $q \in Q$ y $x \in U$; y un par "atributo, valor" o $(q,v)$ para todo $q \in Q$, $v \in Vq$ es llamado **descriptor**.

## Definición: Transacción

- Establezcamos a $S$ como un conjunto de transacciones del sistema de información $SI$, y en donde cada transacción $x_i$ agrupa un conjunto de atributos (o productos), tal que $x_i \subseteq V$.

```
1 ['q8', 'q1', 'q6', 'q7', 'q5']
2 ['q14', 'q10', 'q12', 'q13', 'q5']
3 ['q3', 'q12', 'q14', 'q7', 'q11', 'q5', 'q8', 'q4']
4 ['q5', 'q14', 'q2', 'q3', 'q11', 'q4', 'q7', 'q8']
5 ['q15', 'q14', 'q7', 'q13', 'q6']
6 ['q7', 'q3', 'q12', 'q4', 'q5', 'q13']
7 ['q12', 'q1', 'q11', 'q4', 'q3']
8 ['q1', 'q3', 'q15', 'q6', 'q7', 'q13', 'q8', 'q5', 'q11']
…
```

$x_i$ ['q9', 'q13', 'q8', 'q5', 'q10', 'q11', 'q4', 'q12']

## Definición: Transacción

- Por consiguiente se dice que cada transacción $s_i$ contiene un conjunto $A$ de productos $q$ en $V$, si $A \subseteq SI$.

| U | q1 | q2 | q3 | q4 | q5 | q6 | q7 | q8 | q9 | q10 | q11 | q12 | q13 | q14 | q15 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | V | F | F | F | V | V | V | V | F | F | F | F | F | F | F |
| 2 | F | F | F | F | V | F | F | F | F | V | F | V | V | V | F |
| 3 | F | F | V | V | V | F | V | V | F | F | V | V | F | V | F |
| 4 | F | V | V | V | V | F | V | V | F | F | V | F | F | V | F |
| 5 | F | F | F | F | F | V | V | F | F | F | F | F | V | V | V |
| … | … | … | … | … | … | … | … | … | … | … | … | … | … | … | … |
| 996 | F | F | F | V | V | F | F | F | F | V | F | F | F | F | F |
| 997 | V | V | F | F | F | V | F | V | F | F | V | F | F | F | F |
| 998 | F | F | F | F | V | F | V | F | F | V | V | F | F | F | F |
| 999 | F | V | V | F | F | V | F | F | V | F | F | V | F | F | F |
| 1000 | F | F | F | F | F | F | V | F | V | V | F | V | F | F | F |

## Definición: Regla de Asociación

- Una *Regla de Asociación* es una implicación de la forma:

$$A \Longrightarrow B$$

- En donde $A$ y $B$ representan dos conjuntos de atributos que cumplen con las condiciones $A \subset V, B \subset V$ y $(A \cap B)\ V = \emptyset$ . $A$ es conjunto de productos de la **condición de la regla** denominado *Antecedente* y $B$ es el conjunto de productos de la **conclusión de la regla** denominado *Consecuente*.

## Definición: Soporte

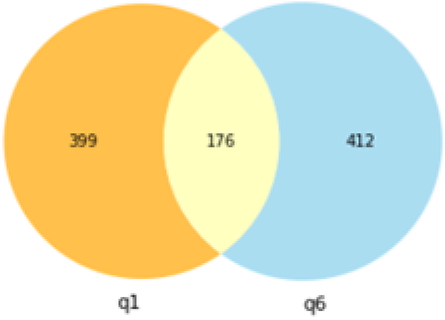
- El **soporte de un conjunto** $A$ de transacciones $Sop(A)$, se define como el número de transacciones de los atributos de $A$ que toman el valor verdadero.
- El **soporte de una regla** $Sop(A, B)$ es el número de transacciones en el conjunto $S$ en donde $A$=$B$=$Verdadero$.

$$Sop(A, B) = A \cap B$$

Ejemplo:

$A$ = q1, $B$ = q6

$Sop$(q1, q6) = 176



## Definición: Soporte normalizado

- De igual forma para el cálculo de los distintos indicadores, se utiliza la proporción de las transacciones conjuntas entre $A$ y $B$ divididas por el número total de transacciones $n$. Así el **soporte normalizado** corresponde a la estimación de la probabilidad de la intersección (o juntura) entre $A$ y $B$ se define como:

$$Sopn(A,\ B) = \frac{Sop(A,\ B)}{n} = P(A \cap B)$$

## Definición: Soporte

- Esta una medida es **anti monótona**, al especializar una regla se mantiene o disminuye el soporte.

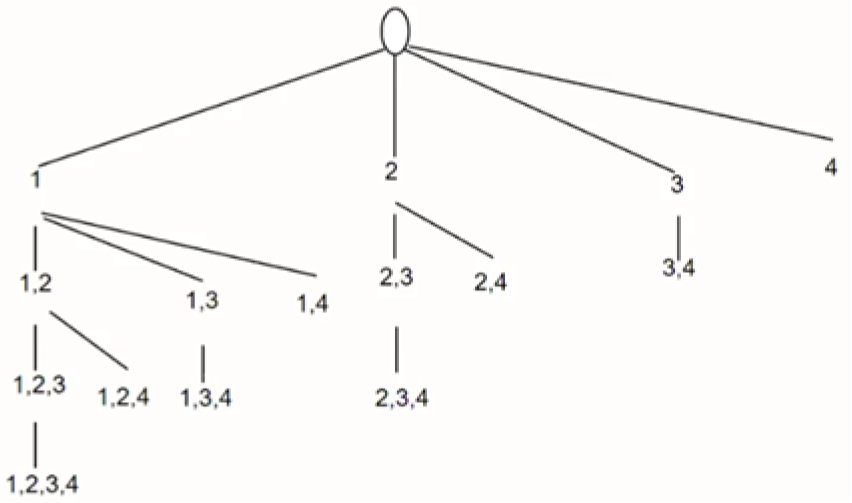
$$Sop(A, B) = A \cap B$$

Ejemplo:

| | | |
|---|---|---|
| $A$ = q1; $B$ = q6 | $A$ = [q1, q3]; $B$ = q6 | $A$ = [q1, q3, q7]; $B$ = q6 |
| $Sop$(q1, q6) = 176 | $Sop$([q1, q3], q6) = 79 | $Sop$([q1, q3, q7], q6) = 23 |

**Definición:** **Soporte mínimo (*minsop*)**

- El algoritmo inicial de Agrawal utiliza esta combinatoria para generar el árbol paso a paso y va realizando una pre-poda por soporte.
- Cuando encuentra un nodo cuyo soporte es inferior al ***minsop*** entonces no genera las combinaciones.



## Definición: Confianza

- Dada una regla de asociación $A \Longrightarrow B$ , la confianza de dicha regla en un conjunto $S$ se define como la proporción de transacciones conjuntas entre $A$ y $B$ divididas por el número de casos de $A$.

$$Conf(A \Longrightarrow B) = \frac{Sop(A, B)}{Sop(A)}$$

**Definición: Confianza normalizada**

- De igual forma que en el soporte, podemos normalizar el indicador al dividir por el número total de transacciones $n$. Consideremos entonces la estimación de la probabilidad de $A$ corresponde a dividir al soporte de $A$ por $n$, así por definición de probabilidad condicional obtenemos:

$$Confn(A \Rightarrow B) = \frac{\frac{Sop(A,B)}{n}}{\frac{Sop(A)}{n}} = \frac{P(A \cap B)}{P(A)} = P(B/A)$$

## Medidas de Calidad: Lift

- Representa una medida de independencia dependencia entre A y B.
- Es una medida de eficiencia a través de correlación entre variables binarias.
- Es **monótona en confianza** al especializar una regla, el *Lift* disminuye proporcional a $A$, puesto que $P(B)$ se mantiene constante para el proceso de especialización.

$$Lift(A,B) = \frac{Confn(A \Rightarrow B)}{Sopn(B)} \qquad Lift(A,B) = \frac{\mathrm{P}(B|\mathrm{A})}{P(B)} \qquad Lift(A,B) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)P(B)}$$

## Medidas de Calidad: Lift

- *Lift* = 1, el conjunto aparece una cantidad de veces acorde a lo esperado bajo condiciones de independencia.
- *Lift* > 1, el conjunto aparece una cantidad de veces superior a lo esperado bajo condiciones de independencia. La ocurrencia de los items de “B” influye en la probabilidad de la ocurrencia de los items de “A”.
- *Lift* < 1, el conjunto aparece una cantidad de veces inferior a lo esperado bajo condiciones de independencia. La ocurrencia de los items de “B” influye en la probabilidad de NO ocurrencia de los items de “A”.

## Medidas de Calidad: Convicción

- Es una medida que evalúa el grado en que el antecedente influye en la ocurrencia del consecuente, representa la independencia de A y B, y es monótona en confianza. A diferencia del *Lift* es unidireccional.

$$Conviccion(A \Longrightarrow B) = \frac{n - Sop(B)}{n[1 - Conf(A \Longrightarrow B)]} \qquad Conviccion(A \Longrightarrow B) = \frac{P(A).P(\bar{B})}{P(A \cap \bar{B})}$$

- El valor tiene un rango entre $[1, +\infty]$.
- Cuanto más alto, mayor probabilidad de ocurrencia del consecuente cuando el antecedente ocurra. El valor 1 indica la independencia de los términos de la regla.

## Medidas de Calidad: Laplace

- Es una medida monótona en confianza, para un soporte constante, y es monótona en soporte, para un el confianza constante.

$$Laplace(A \Longrightarrow B) = \frac{Sop(A,B)+1}{Sop(A)+k} \qquad Laplace(A \Longrightarrow B) = \frac{Sop(A,B)+1}{\frac{Sop(A\neg, B)}{c+k}}$$

Dónde: $k$ es una la constante entera mayor que 1, (en clasificadores basados en reglas es el número de clases) y $c$ es igual a la confianza.

## Medidas de Calidad: Ganancia

$$Ganancia = Sop(A, B) - \theta Sop(A)$$

con $\theta < q < 1$

- Si la confianza se mantiene constante y $c > \theta$ se observa claramente que la ganancia disminuirá al disminuir el soporte de la regla, puesto que son proporcionales.

## Pregunta 3

Una parte de la medida *Gini* para evaluar reglas de asociación está definida como:

$$Gini(A \rightarrow B) = P(A)[1 - P(B/A)]^2 + [1 - P(B/A)]^2$$

- Determine su monotonicidad (monótona o anti-monótona) para el caso del soporte (con confianza constante) y para el caso de confianza (con soporte constante).

## Pregunta 3 - Desarrollo

$$Gini(A \rightarrow B) = \overbrace{P(A)}^{Sopn(A)}[1 - \overbrace{P(B/A)}^{Confn(A \Longrightarrow B)}]^2 + [1 - \overbrace{P(B/A)}^{Confn(A \Longrightarrow B)}]^2$$

$$Gini(A \rightarrow B) = P(A)[1 - 2P(B/A) + (B/A)^2] + [1 - 2P(B/A) + (B/A)^2]$$

## Pregunta 3 - Desarrollo

$$Gini(A \to B) = \overbrace{P(A)}^{Sopn(A)}[1 - \overbrace{P(B/A)}^{Confn(A \Longrightarrow B)}]^2 + [1 - \overbrace{P(B/A)}^{Confn(A \Longrightarrow B)}]^2$$

$$Gini(A \to B) = P(A)[1 - 2P(B/A) + (B/A)^2] + [1 - 2P(B/A) + (B/A)^2]$$

Evaluar: Caso del soporte (con confianza constante).

$Sopn(A)$=0,2

$Confn(A \Longrightarrow B)$=0,5

$$Gini(A \to B) = (0{,}2)[1 - 2(0{,}5) + (0{,}5)^2] + [1 - 2(0{,}5) + (0{,}5)^2] = 0{,}3$$

$Sopn(A)$=0,1

$Confn(A \Longrightarrow B)$=0,5

$$Gini(A \to B) = (0{,}1)[1 - 2(0{,}5) + (0{,}5)^2] + [1 - 2(0{,}5) + (0{,}5)^2] = 0{,}275$$

## Pregunta 3 - Desarrollo

$$Gini(A \rightarrow B) = \overbrace{P(A)}^{Sopn(A)}[1 - \overbrace{P(B/A)}^{Confn(A\Rightarrow B)}]^2 + [1 - \overbrace{P(B/A)}^{Confn(A\Rightarrow B)}]^2$$

$$Gini(A \rightarrow B) = P(A)[1 - 2P(B/A) + (B/A)^2] + [1 - 2P(B/A) + (B/A)^2]$$

Evaluar: Caso del soporte (con confianza constante).

$Sopn(A)=0{,}2$

$Confn(A\Rightarrow B)=0{,}5$

$$Gini(A \rightarrow B) = (0{,}2)[1 - 2(0{,}5) + (0{,}5)^2] + [1 - 2(0{,}5) + (0{,}5)^2] = 0{,}3$$

$Sopn(A)=0{,}1$

$Confn(A\Rightarrow B)=0{,}5$

$$Gini(A \rightarrow B) = (0{,}1)[1 - 2(0{,}5) + (0{,}5)^2] + [1 - 2(0{,}5) + (0{,}5)^2] = 0{,}275$$

Al especializar el soporte es **Anti-monótona**

## Pregunta 3 - Desarrollo

$$Gini(A \rightarrow B) = \overbrace{P(A)}^{Sopn(A)}[1 - \overbrace{P(B/A)}^{Confn(A \Rightarrow B)}]^2 + [1 - \overbrace{P(B/A)}^{Confn(A \Rightarrow B)}]^2$$

$$Gini(A \rightarrow B) = P(A)[1 - 2P(B/A) + (B/A)^2] + [1 - 2P(B/A) + (B/A)^2]$$

Evaluar: Caso de confianza (con soporte del *Antecedente* constante).

## Pregunta 3 - Desarrollo

$$Gini(A \rightarrow B) = \overbrace{P(A)}^{Sopn(A)}[1 - \overbrace{P(B/A)}^{Confn(A \Rightarrow B)}]^2 + [1 - \overbrace{P(B/A)}^{Confn(A \Rightarrow B)}]^2$$

$$Gini(A \rightarrow B) = P(A)[1 - 2P(B/A) + (B/A)^2] + [1 - 2P(B/A) + (B/A)^2]$$

Evaluar: Caso de confianza (con soporte del *Antecedente* constante).

$Sopn(A)$=0,1

$Confn(A \Rightarrow B)$=0,5

$$Gini(A \rightarrow B) = (0{,}1)[1 - 2(0{,}5) + (0{,}5)^2] + [1 - 2(0{,}5) + (0{,}5)^2] = 0{,}275$$

$Sopn(A)$=0,1

$Confn(A \Rightarrow B)$=0,6

$$Gini(A \rightarrow B) = (0{,}1)[1 - 2(0{,}6) + (0{,}6)^2] + [1 - 2(0{,}6) + (0{,}6)^2] = 0{,}176$$

## Pregunta 3 - Desarrollo

$$Gini(A \to B) = \underbrace{P(A)}_{Sopn(A)}[1 - \underbrace{P(B/A)}_{Confn(A \Rightarrow B)}]^2 + [1 - \underbrace{P(B/A)}_{Confn(A \Rightarrow B)}]^2$$

$$Gini(A \to B) = P(A)[1 - 2P(B/A) + (B/A)^2] + [1 - 2P(B/A) + (B/A)^2]$$

Evalúar: Caso de confianza (con soporte del *Antecedente* constante).

$Sopn(A)=0,1$

$Confn(A \Rightarrow B)=0,5$

$$Gini(A \to B) = (0,1)[1 - 2(0,5) + (0,5)^2] + [1 - 2(0,5) + (0,5)^2] = 0,275$$

$Sopn(A)=0,1$

$Confn(A \Rightarrow B)=0,6$

$$Gini(A \to B) = (0,1)[1 - 2(0,6) + (0,6)^2] + [1 - 2(0,6) + (0,6)^2] = 0,176$$

Al especializar la confianza es **Anti-monótona**

## Pregunta 5

- Un analista de marketing tiene la hipótesis que existe una fuerte relación (más del 50%) entre personas que están suscritas al diario *El Mercurio* y *Estrategia*, con las personas que toman sus vacaciones en el extranjero y en el sur del país. Para comprobar esta hipótesis posee las bases de datos de las suscripciones a los periódicos y de la empresa *Latam*.
- Construya una base de datos de no más de 10 ejemplos que compruebe la hipótesis. Considerando un soporte de más del 10%, cuando el universo está constituido por las personas comunes a las tres bases de datos.

## Pregunta 5 - Desarrollo

| | Rut Cliente | El Mercurio (EM) | Estrategia (ES) | Latam (LT) |
|---|---|---|---|---|
| 1 | 11200200-0 | V | V | V |
| 2 | 12300300-1 | V | F | V |
| 3 | 13400400-2 | V | V | F |
| 4 | 14500500-3 | V | V | V |
| 5 | 15600600-4 | F | V | V |
| 6 | 16700700-5 | V | V | V |
| 7 | 11800800-6 | V | F | F |
| 8 | 12900900-7 | V | V | V |
| 9 | 13010010-8 | V | V | F |
| 10 | 14020020-9 | V | F | V |

$H_0$: $Confn(A, B) \leq 0{,}5$

$H_A$: $Confn(A, B) > 0{,}5$

## Pregunta 5 - Desarrollo

$A$ = El Mercurio (EM), Estrategia (ES); $B$ = Latam (LT)

| | Rut Cliente | El Mercurio (EM) | Estrategia (ES) | Latam (LT) |
|---|---|---|---|---|
| 1 | 11200200-0 | V | V | V |
| 2 | 12300300-1 | V | F | V |
| 3 | 13400400-2 | V | V | F |
| 4 | 14500500-3 | V | V | V |
| 5 | 15600600-4 | F | V | V |
| 6 | 16700700-5 | V | V | V |
| 7 | 11800800-6 | V | F | F |
| 8 | 12900900-7 | V | V | V |
| 9 | 13010010-8 | V | V | F |
| 10 | 14020020-9 | V | F | V |

$$Sop(A, B) = A \cap B$$

$$Sopn(A, B) = \frac{Sop(A, B)}{n} = P(A \cap B)$$

$A$ = [EM, ES]; $B$ = LT

$n$ = 10

$Sop$([EM, ES], LT) = 4

$Sopn$([EM, ES], LT) = 4/10 = 0,4

## Pregunta 5 - Desarrollo

$A$ = El Mercurio (EM), Estrategia (ES); $B$ = Latam (LT)

| | Rut Cliente | El Mercurio (EM) | Estrategia (ES) | Latam (LT) |
|---|---|---|---|---|
| 1 | 11200200-0 | V | V | V |
| 2 | 12300300-1 | V | F | V |
| 3 | 13400400-2 | V | V | F |
| 4 | 14500500-3 | V | V | V |
| 5 | 15600600-4 | F | V | V |
| 6 | 16700700-5 | V | V | V |
| 7 | 11800800-6 | V | F | F |
| 8 | 12900900-7 | V | V | V |
| 9 | 13010010-8 | V | V | F |
| 10 | 14020020-9 | V | F | V |

$$Conf(A \Rightarrow B) = \frac{Sop(A,\ B)}{Sop(A)}$$

$$Confn(A \Rightarrow B) = \frac{\frac{Sop(A,B)}{n}}{\frac{Sop(A)}{n}} = \frac{P(A \cap B)}{P(A)} = P(B/A)$$

$$Confn(A \Rightarrow B) = \frac{0{,}4}{0{,}6} = 0{,}66$$

## Pregunta 5 - Desarrollo

$A$ = El Mercurio (EM), Estrategia (ES); $B$ = Latam (LT)

| | Rut Cliente | El Mercurio (EM) | Estrategia (ES) | Latam (LT) |
|---|---|---|---|---|
| 1 | 11200200-0 | V | V | V |
| 2 | 12300300-1 | V | F | V |
| 3 | 13400400-2 | V | V | F |
| 4 | 14500500-3 | V | V | V |
| 5 | 15600600-4 | F | V | V |
| 6 | 16700700-5 | V | V | V |
| 7 | 11800800-6 | V | F | F |
| 8 | 12900900-7 | V | V | V |
| 9 | 13010010-8 | V | V | F |
| 10 | 14020020-9 | V | F | V |

$$Conf(A \Rightarrow B) = \frac{Sop(A,\ B)}{Sop(A)}$$

$$Confn(A \Rightarrow B) = \frac{\frac{Sop(A,B)}{n}}{\frac{Sop(A)}{n}} = \frac{P(A \cap B)}{P(A)} = P(B/A)$$

$$Confn(A \Rightarrow B) = \frac{0{,}4}{0{,}6} = 0{,}66$$

$H_0$: $Confn(A,\ B) \leq 0{,}5$

$H_A$: $Confn(A,\ B) > 0{,}5$

## Objetivos

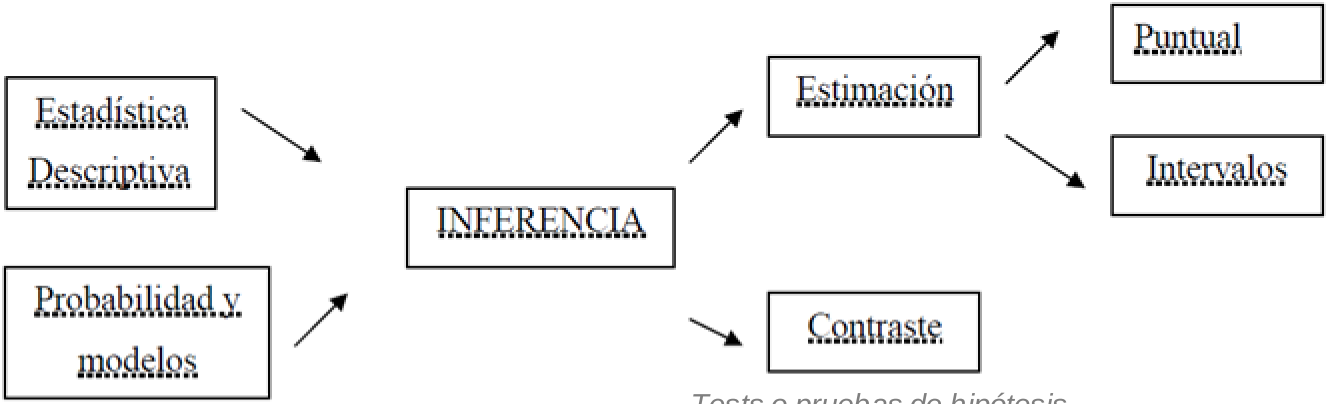
- Cuantificar **probabilidad a priori**.
- Comprender el **costo del error** de clasificar basado en **probabilidad a priori**.
- Cuantificar el **riesgo condicional**.
- Usar los conceptos anteriores para obtener un método de clasificación a mínimo riesgo condicional para un **problema multivariado**.
- Analizar clasificador **Bayesiano simple**.
- Comprender los fundamentos de un clasificador **Bayesiano ingenuo**.

## Antecedentes teóricos

- En la cotidianidad muchas situaciones poseen resultados diferentes aunque las condiciones iniciales en las que se producen son las mismas, (manifestación física de situaciones que **envuelven incertidumbre**). Estos fenómenos son denominados fenómenos aleatorios.
- El objetivo del Cálculo de Probabilidades es el estudio de **métodos de análisis del comportamiento** de fenómenos aleatorios.
- Cálculo de Probabilidades y la Estadística son disciplinas íntimamente relacionadas, **ambas se refieren al estudio de un mismo tipo de situaciones**.
- Mientras que Cálculo de probabilidades **desarrolla los modelos teóricos** para tratar fenómenos aleatorios, la Estadística **ajusta dichos modelos** a situaciones concretas.

## Antecedentes teóricos

Métodos básicos investigación




*Tests o pruebas de hipótesis*

## Antecedentes teóricos

Paralelismo entre la **Estadística** y el **Cálculo de Probabilidades**:

| ESTADÍSTICA | PROBABILIDAD |
|---|---|
| $f_i$, $F_i$ | Probabilidad |
| Variable Unidimensional | Variable aleatoria |
| Variable Bidimensional | Vectores aleatorios |
| Distribución de frecuencias | Distribución de Probabilidad (Función de distribución) |
| Medias, Momentos | Esperanza, Momentos |
| Independencia Estadística | Independencia Estocástica |
| Series Temporales | Procesos Estocásticos |

## Variable aleatoria v.a.

- Este concepto surge de la necesidad de **calcular probabilidades** de **conjuntos de interés definidos** en términos de **dicha variable**.
- Es un valor numérico que corresponde al resultado de un **experimento aleatorio** (las v.a. pueden ser *discretas o continuas*).
- Permiten definir la probabilidad como una **función numérica de variable real** (en lugar de como una función de un conjunto dado).
- Dado un espacio de probabilidad $(\Omega, \mathcal{A}, P)$, una variable aleatoria es cualquier función $X$:

$$X : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}. \qquad \mathcal{A} = \mathcal{P}(\Omega); \qquad A_i \in \mathcal{A}$$

- Cada valor de $X$ se corresponde con el subconjunto de puntos de $\Omega$ que se aplica en dicho valor, esto es $\{\omega \in \Omega \mid X(\omega) = x\}$.

## Distribución de probabilidad de una variable aleatoria

- Cuando se considera una v.a. $X$ sobre un espacio de probabilidad $(\Omega, A, \Pr)$, los únicos sucesos de interés son los que se expresan en términos de esta variable, bajo la forma:

$$\{\omega \in \Omega \;/\; X(\omega) \in B\} = X^{-1}(B) = \{X \in B\} \in \mathcal{A}$$

- Las probabilidades de estos sucesos describen completamente el comportamiento de la variable $X$ y dan lugar a lo que se denomina la **distribución de probabilidad** de $X$.

## Distribución de probabilidad de una variable aleatoria

La función de distribución de una variable aleatoria X satisface:

- Es monótona (no decreciente).
- Es continua a la derecha.
- $\lim_{x \to +\infty} F(x) = 1$ y $\lim_{x \to -\infty} F(x) = 0$

## Teorema de Bayes

Planteada por el filósofo inglés *Thomas Bayes* (1702-1761), expresa la **probabilidad condicional de un evento aleatorio** $A$ dado $B$ en términos de la **distribución de probabilidad condicional del evento** $B$ dado $A$ y la **distribución de probabilidad marginal** de sólo $A$.

## Teorema de Bayes

- Sea $\{A_1, A_2, ..., A_n\}$ un conjunto de **sucesos mutuamente excluyentes y exhaustivos**, tal que la probabilidad de cada uno de ellos es distinta de cero (0).
- Sea $B$ un suceso cualquiera del que se **conocen las probabilidades condicionales** $P(B|A_i)$. Entonces, la probabilidad $P(A_i|B)$ viene dada por la expresión:

$$P(A_i|B) = \frac{P(B|A_i)P(A_i)}{P(B)}$$

**Dónde**:

$P(A_i)$ son las **probabilidades a priori** de la hipótesis $A_i$.

$P(B)$ es la **probabilidad** de observar el **conjunto de entrenamiento** $B$.

$P(B \mid A_i)$ es la **probabilidad** de observar el **conjunto de entrenamiento** $B$ **en un universo** donde se **verifica la hipótesis** $A_i$.

$P(A_i|B)$ es la **probabilidad a posteriori** de $A_i$, cuando se ha observado el **conjunto de entrenamiento** $B$.

## Teorema de Bayes

- Es válido en **todas las aplicaciones** de la teoría de la probabilidad.
- La **Estadística Bayesiana** está demostrando su utilidad en ciertas estimaciones basadas en el conocimiento subjetivo a priori y el hecho de permitir revisar esas estimaciones en función de la evidencia empírica es lo que está abriendo nuevas formas de hacer conocimiento.
- Se utiliza también en herramientas de Inteligencia de Negocios (BI).
- Como observación, se tiene:

$$\sum_{i=1}^{n} P(A_i|B) = 1$$

## Clasificación a priori

La probabilidad a priori $p(c_i)$ será la probabilidad de que el próximo sujeto se clasifique en la clase $c_i$ con $i=1, 2$.

$$p(c_i) = \lim_{n \to \infty} \frac{n_i}{n}$$

sí $p(c_1) > p(c_2)$ entonces $\text{Clase}(x) = c_1$

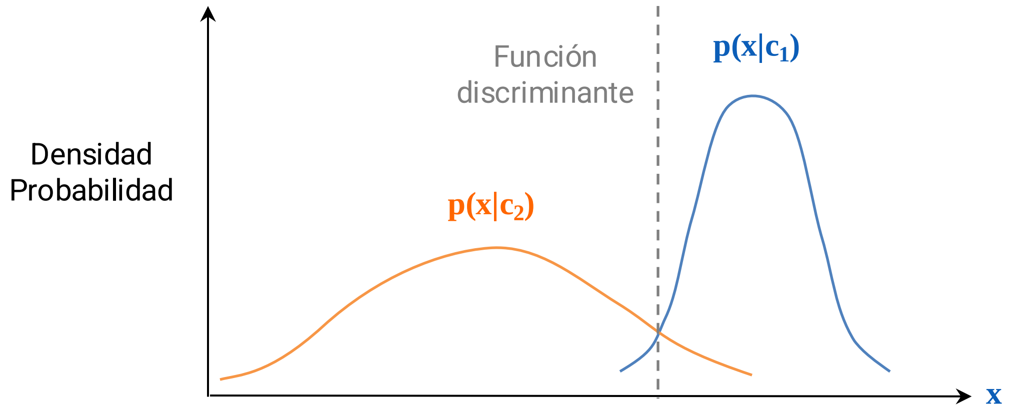
sí $p(c_2) > p(c_1)$ entonces $\text{Clase}(x) = c_2$

Para un sujeto en particular la probabilidad de **error de la clasificación** será:

$$\text{p(error de clasificación)} = \begin{cases} p(c_2)\ si\ se\ decide\ \ C = c_1 \\ p(c_1)\ si\ se\ decide\ \ C = c_2 \end{cases}$$

## Clasificación condicionada

- El interés será contar con funciones de densidad de probabilidad condicionales $p(x|c_i)$, con $i=1,2$.




- $p(x|c_i)$ es la función de densidad de probabilidades condicionales para un valor de $x$ dada la clase.

## Clasificación condicionada

- Usando las definiciones anteriores se tiene el *Teorema de Bayes*;

$$p(c_i|x) = \frac{p(x|c_i)p(c_i)}{p(x)}$$

## Clasificación condicionada

- Usando las definiciones anteriores se tiene el *Teorema de Bayes*;

$$p(c_i|x) = \frac{p(x|c_i)p(c_i)}{p(x)} \qquad p(x) = \sum_{i=1}^{2} P(x|c_i)P(c_i)$$

## Clasificación condicionada

- Usando las definiciones anteriores se tiene el *Teorema de Bayes*;

$$p(c_i|x) = \frac{p(x|c_i)p(c_i)}{p(x)} \qquad p(x) = \sum_{i=1}^{2} P(x|c_i)P(c_i) \qquad p(c_i|x) = \frac{p(x|c_i)p(c_i)}{\sum_{i=1}^{2} p(x|c_i)p(c_i)}$$

- Para obtener el **conocimiento a posteriori** solo se requiere el **conocimiento a priori** y el **conocimiento de la verosimilitud** de las clases $c_i$ respecto a $x$.

## Minimización del Riesgo Condicional

- **Maximización de la Probabilidad a Posteriori (MAP):** Al clasificar una v.a. $x$, se asigna a la clase $c_i$ que tenga el mayor valor de $p(c_i|x)$.

$$Clase_{MAP} = \arg\max_{c_i}\{p(c_i/x)\} \quad \text{O} \quad Clase_{MAP} = \arg\max_{c_i}\{p(x/c_i)p(c_i)\}$$

- La mejor clasificación será aquella que **minimice la probabilidad de error** (*regla de clasificación estadística*).

## Clasificación multivariada

- Dado un sujeto con un vector de características $\overset{\rightharpoonup}{x}$ determinar la clase a la cual pertenece dicho sujeto $p(c_i/\overset{\rightharpoonup}{x})$

$$Clase_{MAP} = \arg\max_{c_i} \{p(\overset{\rightharpoonup}{x}/c_i)p(c_i)\}$$

- Definiendo la probabilidad como la **función discriminante** $d_i(\overset{\rightharpoonup}{x}) = p(\overset{\rightharpoonup}{x}/c_i)P(c_i)$ y su logaritmo $L_i(\overset{\rightharpoonup}{x}) = \ln d_i(\overset{\rightharpoonup}{x})$

$$L_i(\overset{\rightharpoonup}{x}) = \ln\{p(\overset{\rightharpoonup}{x}/c_i)P(c_i)\}$$

## Clasificador Bayesiano Ingenuo

- El clasificador óptimo obtenido por MAP supone los atributos reales y dependientes entre sí.
- Al generalizar, se pueden considerar diferentes tipos de atributos $\{a_1, a_2, \ldots, a_p\}$ que pueden ser *reales, nominales o binarios* y el clasificador óptimo será determinado por:

$$Clase_{MAP} = \arg\max_{c_i} \{p(c_i / a_1, a_2 \ldots, a_p)\}$$

- o al usar la verosimilitud y la probabilidad a priori:

$$Clase_{MAP} = \arg\max_{c_i} \{p(a_1, a_2 \ldots, a_p / c_i) p(c_i)\}$$

## Clasificador Bayesiano Ingenuo

- Dada una clase, la probabilidad de observar la conjunción de los $\{a_1, a_2, \ldots, a_p\}$ corresponde al producto de las probabilidades individuales de los atributos:

$$p(a_1, a_2 \ldots, a_p / c_i) = \prod_{j=1}^{p} P(a_j / c_i)$$

- Sustituyendo esto en el clasificador Bayesiano óptimo obtenido por MAP, se tiene el **clasificador Bayesiano ingenuo**:

$$Clase_{NBC} = \arg \max_{c_i} \left\{ p(c_i) \prod_{j=1}^{p} P(a_j / c_i) \right\}$$

- Así, es muy fácil estimar los $p(a_j/c_i)$ del conjunto de datos.

## Clasificador Bayesiano Ingenuo

En caso de **atributos nominales**:

Ej: Suponiendo que aj puede tomar 4 valores $k \in \{0,1,2,3\}$ entonces:

$$\hat{p}(a_j = k / c_i) = \frac{N^o\, casos\ en\ que\ a_j = k\ en\ la\ clase\ c_i}{Total\ de\ casos\ de\ la\ clase\ i}$$

En **atributos reales** se puede asumir una *distribución normal*.

Se estima la media $\bar{a}_j$ y la varianza $\hat{\sigma}_{a_j}$ del atributo y se obtiene la estimación de la probabilidad como:

$$\hat{p}(a_j / c_i) = \frac{1}{\hat{\sigma}_{a_j}\sqrt{2\pi}}\, e^{-\frac{(a_j - \bar{a}_j)^2}{2\hat{\sigma}^2_{a_j}}}$$

## Clasificador Bayesiano Ingenuo

En caso de **atributos nominales**:

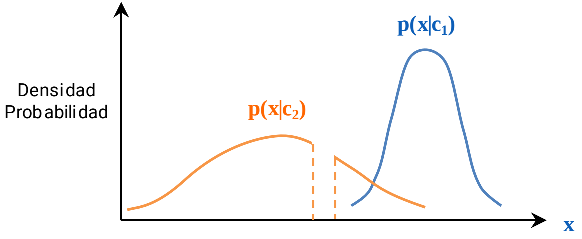
Ej: Suponiendo que aj puede tomar 4 valores $k \in \{0,1,2,3\}$ entonces:

$$\hat{p}(a_j = k / c_i) = \frac{N^o\, casos\, en\, que\, a_j = k\, en\, la\, clase\, c_i}{Total\, de\, casos\, de\, la\, clase\, i}$$

En **atributos reales** se puede asumir una *distribución normal*.

Se estima la media $\bar{a}_j$ y la varianza $\hat{\sigma}_{a_j}$ del atributo y se obtiene la estimación de la probabilidad como:

$$\hat{p}(a_j / c_i) = \frac{1}{\hat{\sigma}_{a_j}\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(a_j - \bar{a}_j)^2}{2\hat{\sigma}_{a_j}^2}}$$



## Clasificador Bayesiano Ingenuo

En caso de **atributos nominales**:

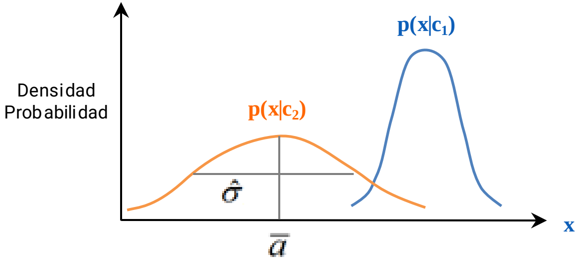
Ej: Suponiendo que aj puede tomar 4 valores $k \in \{0,1,2,3\}$ entonces:

$$\hat{p}(a_j = k / c_i) = \frac{N^o\, casos\ en\ que\ a_j = k\ en\ la\ clase\ c_i}{Total\ de\ casos\ de\ la\ clase\ i}$$

En **atributos reales** se puede asumir una *distribución normal*.

Se estima la media $\bar{a}_j$ y la varianza $\hat{\sigma}_{a_j}$ del atributo y se obtiene la estimación de la probabilidad como:

$$\hat{p}(a_j / c_i) = \frac{1}{\hat{\sigma}_{a_j}\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(a_j - \bar{a}_j)^2}{2\hat{\sigma}^2_{a_j}}}$$



## Pregunta 1. Accidentabilidad conductores

- Diseñe un **clasificador Bayesiano ingenuo** para el siguiente problema. Una compañía de seguros especializada en pólizas de automóviles, requiere tener un modelo que determine si el postulante a un seguro **tendrá o no accidente**, basado en las variables **sexo** (M=masculino; F=femenino) y el **tipo de auto** que conduce (P=particular; T=trabajo).

## Pregunta 1. Accidentabilidad conductores - Desarrollo

Para diseñar el clasificador se cuenta con la siguiente BD, donde se indica si el cliente ha tenido accidentes previamente:

| # | Sexo | Tipo | Accidente |
|---|---|---|---|
| 1 | M | P | Sí |
| 2 | F | P | No |
| 3 | M | P | Sí |
| 4 | F | T | No |
| 5 | M | T | No |
| 6 | F | P | No |
| 7 | M | T | Sí |
| 8 | F | P | Sí |

## Pregunta 1. Accidentabilidad conductores - Desarrollo

$$Clase_{NBC} = \arg\max_{c_i} \left\{ p(c_i) \prod_{j=1}^{p} P(a_j / c_i) \right\}$$

## Pregunta 1. Accidentabilidad conductores - Desarrollo

$$Clase_{NBC} = \arg\max_{c_i} \left\{ p(c_i) \prod_{j=1}^{p} P(a_j / c_i) \right\}$$

**Probabilidad a priori** $P(C_i)$

$P(C_1)$ = P(Accidente=Sí) = 4/8 = 0,5 = 50%

$P(C_2)$ = P(Accidente=No) = 4/8 = 0,5 = 50%

## Pregunta 1. Accidentabilidad conductores - Desarrollo

$$Clase_{NBC} = \arg\max_{c_i}\left\{ p(c_i)\prod_{j=1}^{p} P(a_j / c_i)\right\}$$

**Probabilidad a priori** $P(C_i)$

$P(C_1)$ = P(Accidente=Sí) = 4/8 = 0,5 = 50%

$P(C_2)$ = P(Accidente=No) = 4/8 = 0,5 = 50%

**Verosimilitudes** $P(x|Ci)$

P(Sexo=M | Accidente=Sí) = 3/4 = 0,75 = 75%

P(Sexo=M | Accidente=No) = 1/4 = 0,25 = 25%

P(Sexo=F | Accidente=Sí) = 1/4 = 0,25 = 25%

P(Sexo=F | Accidente=No) = 3/4 = 0,75 = 75%

P(Tipo=P | Accidente=Sí) = 3/4 = 0,75 = 75%

P(Tipo=P | Accidente=No) = 2/4 = 0,50 = 50%

P(Tipo=T | Accidente=Sí) = 1/4 = 0,25 = 25%

P(Tipo=T | Accidente=No) = 2/4 = 0,50 = 50%

## Pregunta 1. Accidentabilidad conductores - Desarrollo

$$Clase_{NBC} = \arg\max_{c_i} \left\{ p(c_i) \prod_{j=1}^{p} P(a_j / c_i) \right\}$$

**Ejemplo Clasificar:** <Sexo=F, Tipo=T>

P(Accidente=Sí) P(Sexo=F|Accidente=Sí) P(Tipo=T|Accidente=Sí) = (0,5) (0,25) (0,25) = 0,03125

P(Accidente=No) P(Sexo=F|Accidente=No)P(Tipo=T|Accidente=No) = (0,5) (0,75) (0,50) = 0,1875

$$\text{ClaseNB} = \text{argmax} \{ \underset{c_1}{0{,}03125}; \underset{c_2}{0{,}1875} \}$$

**Solución:** Accidente=No

## Pregunta 3. Evaluación de riesgo en pacientes

- Estime las probabilidades para diseñar un **clasificador Bayesiano Ingenuo** que clasifique el **riesgo de los pacientes** (riesgoso / no riesgoso), utilizando los datos de sus ***edades*** y ***tipos de cirugías*** (codificados en 1, 2 o 3), incluidos en la siguiente tabla.
- Aplicando el clasificador determine si los pacientes de 25 años con cirugía tipo 2 son riesgosos o no.

## Pregunta 3. Evaluación de riesgo en pacientes

Base de datos (20 observaciones).

| Edad paciente | Tipo de cirugía | Riesgo |
|---|---|---|
| 15 | 3 | Riesgoso |
| 55 | 1 | No Riesgoso |
| 36 | 1 | No Riesgoso |
| 20 | 2 | Riesgoso |
| 40 | 1 | No Riesgoso |
| 17 | 3 | Riesgoso |
| 33 | 1 | No Riesgoso |
| 18 | 1 | No Riesgoso |
| 62 | 3 | Riesgoso |
| 26 | 2 | No Riesgoso |
| 38 | 2 | No Riesgoso |
| 57 | 3 | Riesgoso |
| 22 | 3 | No Riesgoso |
| 70 | 1 | Riesgoso |
| 16 | 1 | No Riesgoso |
| 72 | 1 | No Riesgoso |
| 24 | 1 | No Riesgoso |
| 45 | 2 | No Riesgoso |
| 15 | 2 | No Riesgoso |
| 26 | 2 | No Riesgoso |

## Pregunta 3. Evaluación de riesgo en pacientes – Desarrollo

$$Clase_{NBC} = \arg\max_{c_i} \left\{ p(c_i) \prod_{j=1}^{p} P(a_j / c_i) \right\}$$

**Probabilidad a priori** $P(C_i)$

$P(C_1)$ = P(Riesgo=No Riesgoso) = 14/20 = 0,7 = 70%

$P(C_2)$ = P(Riesgo=Riesgoso) = 6/20 = 0,3 = 30%

## Pregunta 3. Evaluación de riesgo en pacientes – Desarrollo

$$Clase_{NBC} = \arg\max_{c_i} \left\{ p(c_i) \prod_{j=1}^{p} P(a_j / c_i) \right\}$$

**Probabilidad a priori** *P(C$_i$)*

*P(C$_1$)* = P(Riesgo=No Riesgoso) = 14/20 = 0,7 = 70%

*P(C$_2$)* = P(Riesgo=Riesgoso) = 6/20 = 0,3 = 30%

**Verosimilitudes** *P(x|Ci)*

P(Tipo de cirugía=1|No Riesgoso) = 8/14 = 0,571 = 57,1%

P(Tipo de cirugía=1|Riesgoso) = 1/6 = 0,167 = 16,7%

P(Tipo de cirugía=2|No Riesgoso) = 5/14 = 0,357 = 35,7%

P(Tipo de cirugía=2|Riesgoso) = 1/6 = 0,167 = 16,7%

P(Tipo de cirugía=3|No Riesgoso) = 1/14 = 0,071 = 7,1%

P(Tipo de cirugía=3|Riesgoso) = 4/6 = 0,667 = 66,7%

## Pregunta 3. Evaluación de riesgo en pacientes – Desarrollo

$$Clase_{NBC} = \arg\max_{c_i} \left\{ p(c_i) \prod_{j=1}^{p} P(a_j / c_i) \right\}$$

**Probabilidad a priori** *$P(C_i)$*

$P(C_1)$ = P(Riesgo=No Riesgoso) = 14/20 = 0,7 = 70%

$P(C_2)$ = P(Riesgo=Riesgoso) = 6/20 = 0,3 = 30%

**Verosimilitudes** *$P(x|Ci)$*

Edad Paciente|No Riesgoso =

{ 55, 36, 40, 33, 18, 26, 38, 22, 16, 72, 24, 45, 15, 26 }

$\mu$(Edad Paciente|Riesgo=No Riesgoso) = 33,3

$\sigma$(Edad Paciente|Riesgo=No Riesgoso) = 16,1

DN Edad Paciente|No Riesgoso = $N(\bar{\mu}=33.3,\ \sigma=16.1)$

## Pregunta 3. Evaluación de riesgo en pacientes – Desarrollo

$$Clase_{NBC} = \arg\max_{c_i} \left\{ p(c_i) \prod_{j=1}^{p} P(a_j / c_i) \right\}$$

**Probabilidad a priori** $P(C_i)$

$P(C_1)$ = P(Riesgo=No Riesgoso) = 14/20 = 0,7 = 70%

$P(C_2)$ = P(Riesgo=Riesgoso) = 6/20 = 0,3 = 30%

**Verosimilitudes** $P(x|Ci)$

Edad Paciente|Riesgoso = { 15, 20, 17, 62, 57, 70 }

$\mu$(Edad Paciente|Riesgo=Riesgoso) = 40,2

$\sigma$(Edad Paciente|Riesgo=Riesgoso) = 25,4

DN Edad Paciente|Riesgoso = $N(\mu$=33.3, $\sigma$ =16.1)

## P3. Evaluación de riesgo en pacientes

Función de Densidad de Probabilidad (Normal) Gaussiana

$$Clase_{NBC} = \arg\max_{c_i}\left\{ p(c_i)\prod_{j=1}^{p} P(a_j / c_i)\right\}$$

$$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{\frac{-(x-\mu)^2}{(2\sigma^2)}}$$

**Clasificar:** <Edad Paciente=25, Cirugía=2>

*P($C_1$)* = P(Riesgo=No Riesgoso) P(Edad Paciente=25 | No Riesgoso) P(Cirugia=2 |No Riesgoso) =
(0,7) (0,021) (0,357) = 0,005

*P($C_2$)* = P(Riesgo=Riesgoso) P(Edad Paciente=25 | Riesgoso) P(Cirugia=2 | Riesgoso) =
(0,3) (0,013) (0,167) = 0,0006

**Solución:** ClaseNB = argmax { 0,005; 0,0006 } => Riesgo=No Riesgoso

## Aprendizaje Bayesiano

El aprendizaje se puede ver como el proceso de encontrar la hipótesis más probable, dado un conjunto de ejemplos de entrenamiento $B$ y un *conocimiento a priori* sobre la probabilidad de cada hipótesis.

## Importancia

- Los algoritmos de aprendizaje bayesiano pueden calcular probabilidades explícitas para cada hipótesis.
- También nos proporcionan un marco para estudiar otros algoritmos de aprendizaje.

## Razonamiento Bayesiano

- Provee un **enfoque probabilístico** de la inferencia.
- Está basado en asumir que las **incógnitas de interés** siguen distribuciones probabilísticas.
- Es posible obtener una **solución óptima** por medio de estas distribuciones y datos observados.
- Nos da la posibilidad de realizar una **ponderación de la posibilidad** de ocurrencia de una **hipótesis de manera cuantitativa**.

# Capítulo VII – Árboles de Decisión

- Comprender la generación de un árbol de decisión.
- Cuantificar la ganancia de información para un atributo en un conjunto de datos.
- Comprender los algoritmos de generación de los árboles de decisión.
- Establecer los mecanismos de poda de los árboles de decisión.
- Comprender los mecanismos de equivalencia de reglas y la generalización de reglas simples.

## Definición: Sistema de Información Operacional

Considere una base de datos o *Sistema de Información Operacional* compuesto por la 4-tupla:

$$SI = <U, Q, V, f>$$

**Dónde:**

$S \subseteq U$ es un universo cerrado (conjunto finito) no vacío de $n$ objetos $[x_1, x_2, \ldots, x_n]$.

$Q$ es un conjunto finito, no vacío, de $p$ atributos $[q_1, q_2, \ldots, q_p]$.

$V = \bigcup_{q \in Q} V_i^q$ , donde $V_i^q$ representa el dominio o valores que pueden adquirir los atributos $q$.

$f: SxQ \rightarrow V$ es una función de decisión *llamada función de información,* tal que $f(x,q) \in V^q$ para cualquier $q \in Q$, $x \in S$.

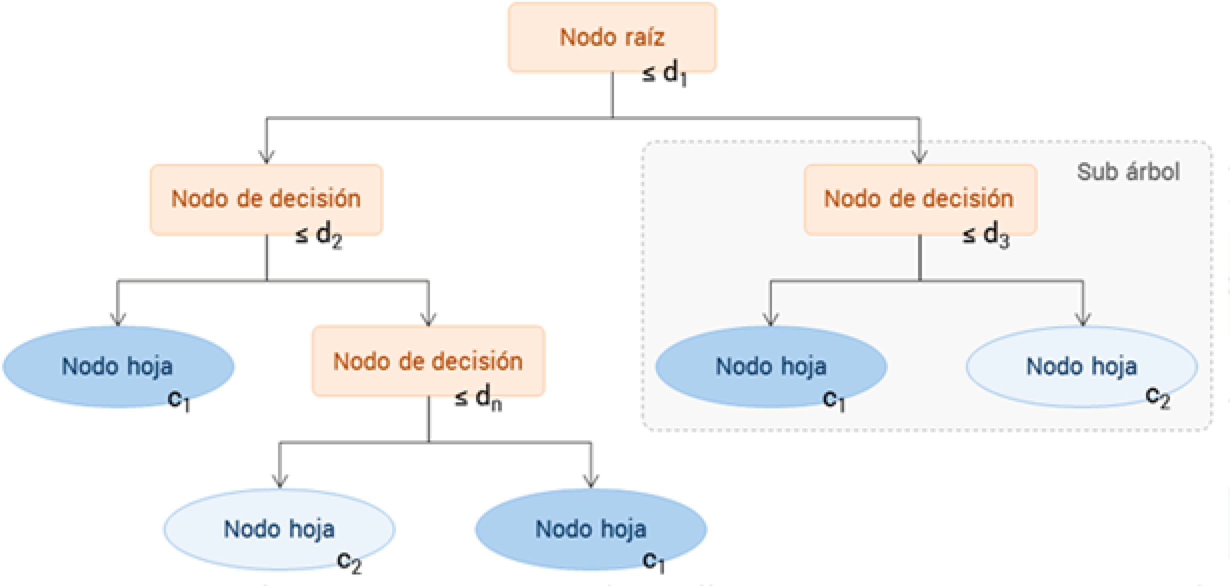
- El $SI$ puede ser representado por una tabla finita de datos, donde las columnas están indicadas por los atributos y las filas por los objetos.

| Objeto | Atributos | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| S | $q_1$ | $q_2$ | … | $q_j$ | … | $q_{p-1}$ | $q_p$ |
| $x_1$ | $V_1^1$ | $V_2^2$ | $V_3^j$ | | | $V_1^{p-1}$ | $V_1^p$ |
| $x_2$ | $V_3^1$ | $V_1^2$ | $V_2^j$ | | | $V_2^{p-1}$ | $V_2^p$ |
| . . | $V_4^1$ | $V_4^2$ | $V_4^j$ | | | $V_2^{p-1}$ | $V_k^p$ |

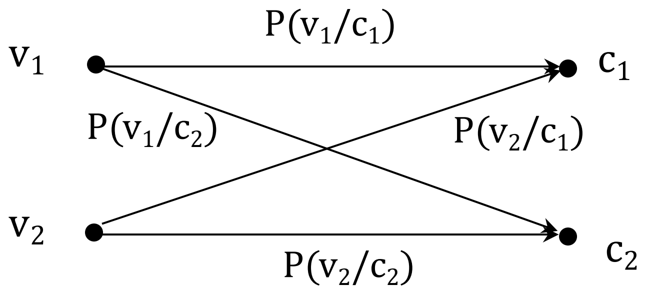
- Se denominan atributos estudiantes a los atributos comprendidos entre $q_1$ a $q_{p-1}$.
- Se denomina atributo experto o de características al atributo $q_p$ que separa los $n$ objetos en $k$ clases $\{V_1^p, V_2^p, \ldots, V_k^p\}$.

- La idea inicial del método de Hunt es construir un árbol de decisión desde un conjunto de casos de entrenamiento $S$ que consiste de $\mathrm{n}$ ejemplos, pertenecientes a $\mathrm{k}$ diferentes clases $\{ \mathrm{C}_1, \mathrm{C}_2, \ldots, \mathrm{C}_\mathrm{k} \}$ indicadas por el atributo experto $\mathrm{q}_\mathrm{p}$.
- La tarea es dividir el conjunto de entrenamiento $S$ en conjuntos disjuntos $\mathrm{T}_1, \mathrm{T}_2, \ldots, \mathrm{T}_\mathrm{n}$; creando una partición, basada en una característica simple.

## Árbol de decisión



## Cálculo de Entropía




Se mide la independencia de $V_i$ y $C_k$ mediante probabilidad conjunta $p(v_i \cap c_k)$ o de juntura $p(v_i; c_k)$.

$$\frac{p(v_i; c_k)}{P(v_i)P(c_k)}$$

- Si son independientes la relación será 1.
- Si son completamente dependientes $p(v_i;c_k)=p(v_i)=p(c_k)$ con lo cual la relación será o $1/p(v_i)$ o $1/p(c_k)$.

## Cálculo de Entropía de la información

Para que esta medida sea cero en el caso de independencia, se toma el logaritmo en base 2 de la relación, resultando una medida de información, en bit.

$$ld\left(\frac{p(v_i;c_k)}{P(v_i)P(c_k)}\right)[bit]$$

- Esta medida es cero en el caso de ser independientes $V$ y $C$.
- En el caso de ser completamente dependientes la información es: $-\mathrm{ld}(\mathrm{p}(v_i))$ o $-\mathrm{ld}(\mathrm{p}(c_k))$.

## Cálculo de la Ganancia de información

Para cuantificar la relación de dependencia entre cualquiera de los atributos estudiantes $V_j$ y el atributo experto $C$, se toma la Ganancia de información (promedio de la información) entre los atributos.

$$Ganancia(v^j, c) = \sum_i \sum_k p(v_i; c_k) ld\left(\frac{p(v_i; c_k)}{P(v_i)P(c_k)}\right)$$

Usando la definición de probabilidad condicional $p(v_i;c_k)=p(c_k/v_i)p(v_i)$ se puede separar en:

$$Ganancia(V, C) = \sum_i \sum_k p(v_i; c_k) ld(p(c_k / v_i)) - \sum_i \sum_k p(v_i; c_k) ld(p(c_k))$$

- La **información de la clase $C$ condicionada** (particionada) **por la instancia** $v_i$ del atributo estudiante $V_j$.

$$Inf(C/vi) = -\sum_k p(c_k / v_i) ld(p(c_k / v_i))$$

El **promedio de la información** de $C$ condicionada por $V_j$ será la ponderación de la información particionada:

$$Inf(C/V) = \sum_i P(v_i) inf(C / v_i)$$

$$Inf(C) = \sum_k P(c_k) ldP(c_k)$$

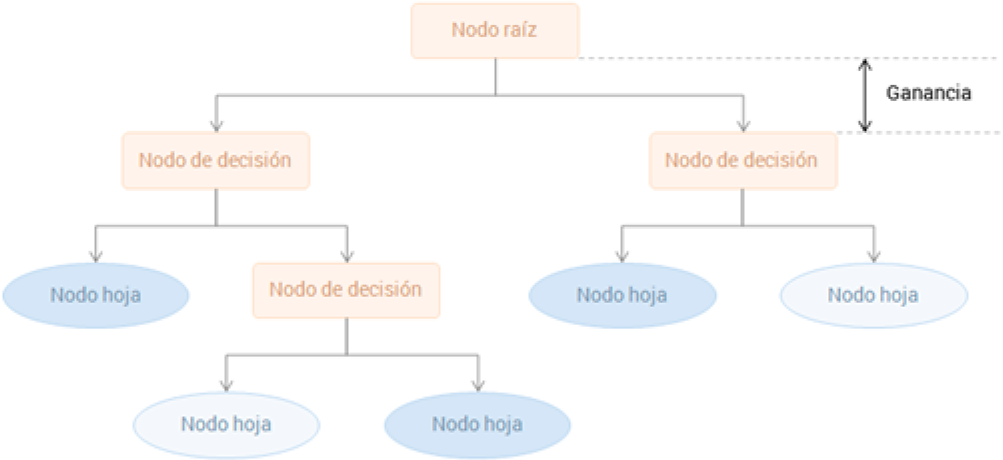
La **ganancia (de información)** será Ganancia(V)= Inf(C)-Inf(C/V)

Con esta ganancia es posible determinar cual de los atributos estudiantes $V^j$ $(j=1..p-1)$ **separa o caracteriza de una forma más adecuada las clases** $c_k$.

Para realizar esto se calcula:

$$\max_{j} (\text{Ganancia}(V^j))$$

El atributo j será la raíz del árbol.



**Principales pasos del modelo Árboles de Decisión**

- Cálculo de Ganancia o Razón de Ganancia (variables mixtas).

$$Razón\ Ganancia(V) = Ganancia(V)/Inf(V)$$

- Pre poda o poda en Árboles de Decisión (probabilidad de error a través de la binomial).
- Transformación de Árboles de Decisión en reglas.
  - Reducción de reglas redundantes.

## Pregunta 1. Razón de ganancia

Para la siguiente base de datos muestre los cálculos de la razón de ganancia propuestos por Quinlan, para **seleccionar el atributo que presenta mejor discriminación de la clase**.

| A | B | Clase |
|---|---|---|
| 0 | 0 | Sí |
| 0 | 0 | No |
| 0 | 1 | No |
| 0 | 1 | Sí |
| 1 | 0 | Sí |
| 1 | 1 | Sí |
| 1 | 0 | Sí |
| 1 | 1 | Sí |
| 2 | 0 | No |
| 2 | 0 | No |
| 2 | 1 | Sí |
| 2 | 1 | Sí |

## Pregunta 1. Razón de ganancia – Desarrollo

Atributos estudiantes

- A = { 0, 1, 2 }
- B = { 0, 1 }

Atributo experto

- Clase = { Sí, No }

| # | A | B | Clase |
|---|---|---|---|
| 1 | 0 | 0 | Sí |
| 2 | 0 | 0 | No |
| 3 | 0 | 1 | No |
| 4 | 0 | 1 | Sí |
| 5 | 1 | 0 | Sí |
| 6 | 1 | 1 | Sí |
| 7 | 1 | 0 | Sí |
| 8 | 1 | 1 | Sí |
| 9 | 2 | 0 | No |
| 10 | 2 | 0 | No |
| 11 | 2 | 1 | Sí |
| 12 | 2 | 1 | Sí |

## Pregunta 1. Razón de ganancia – Desarrollo

Probabilidades atributos estudiantes

- P(A=0) = 4/12 = 1/3 = 0,33
- P(A=1) = 4/12 = 1/3 = 0,33
- P(A=2) = 4/12 = 1/3 = 0,33

- P(B=0) = 6/12 = 1/6 = 0,50
- P(B=1) = 6/12 = 1/6 = 0,50

| # | A | B | Clase |
|---|---|---|---|
| 1 | 0 | 0 | Sí |
| 2 | 0 | 0 | No |
| 3 | 0 | 1 | No |
| 4 | 0 | 1 | Sí |
| 5 | 1 | 0 | Sí |
| 6 | 1 | 1 | Sí |
| 7 | 1 | 0 | Sí |
| 8 | 1 | 1 | Sí |
| 9 | 2 | 0 | No |
| 10 | 2 | 0 | No |
| 11 | 2 | 1 | Sí |
| 12 | 2 | 1 | Sí |

## Pregunta 1. Razón de ganancia – Desarrollo

Probabilidades atributos estudiantes

- P(A=0) = 4/12 = 1/3 = 0,33
- P(A=1) = 4/12 = 1/3 = 0,33
- P(A=2) = 4/12 = 1/3 = 0,33

- P(B=0) = 6/12 = 1/6 = 0,50
- P(B=1) = 6/12 = 1/6 = 0,50

Probabilidades Atributo experto

- P(Clase=Sí) = 8/12 = 2/3 = 0,67
- P(Clase=No) = 4/12 = 1/3 = 0,33

| # | A | B | Clase |
|---|---|---|---|
| 1 | 0 | 0 | Sí |
| 2 | 0 | 0 | No |
| 3 | 0 | 1 | No |
| 4 | 0 | 1 | Sí |
| 5 | 1 | 0 | Sí |
| 6 | 1 | 1 | Sí |
| 7 | 1 | 0 | Sí |
| 8 | 1 | 1 | Sí |
| 9 | 2 | 0 | No |
| 10 | 2 | 0 | No |
| 11 | 2 | 1 | Sí |
| 12 | 2 | 1 | Sí |

## Pregunta 1. Razón de ganancia – Desarrollo

Partición 1

| | Sí | No | Entropía | Ganancia = $\text{Inf}(C)\text{-Inf}(C/V)$ |
|---|---|---|---|---|
| | 8 | 4 | | |
| A=0 | 2 | 2 | | $\text{Ganancia}(C/A)$ |
| A=1 | 2 | 2 | | |
| A=2 | 2 | 2 | | |
| B=0 | 3 | 3 | | $\text{Ganancia}(C/B)$ |
| B=1 | 5 | 1 | | |

## Pregunta 1. Razón de ganancia – Desarrollo

Partición 1

$$Inf(C) = -\sum_k P(c_k)\, ld P(c_k)$$

| | Sí | No | Entropía | Ganancia = Inf(C)-Inf(C/V) |
|---|---|---|---|---|
| | 8 | 4 | | |
| A=0 | 2 | 2 | | Ganancia(C/A) |
| A=1 | 2 | 2 | | |
| A=2 | 2 | 2 | | |
| B=0 | 3 | 3 | | Ganancia(C/B) |
| B=1 | 5 | 1 | | |

## Pregunta 1. Razón de ganancia – Desarrollo

Partición 1

$$Inf(C) = -\sum_k P(c_k)\, ld P(c_k)$$

| | Sí | No | Entropía | Ganancia = Inf(C)-Inf(C/V) |
|---|---|---|---|---|
| | 8 | 4 | Inf(C) = -(P(Clase=Sí)ld(P(Clase=Sí)) + P(Clase=No)ld(P(Clase=No))) | |
| A=0 | 2 | 2 | | |
| A=1 | 2 | 2 | | Ganancia(C/A) |
| A=2 | 2 | 2 | | |
| B=0 | 3 | 3 | | Ganancia(C/B) |
| B=1 | 5 | 1 | | |

## Pregunta 1. Razón de ganancia – Desarrollo

Partición 1

$$Inf(C/V) = \sum_i P(v_i)\, inf(C/v_i)$$

| | Sí | No | Entropía | Ganancia = Inf(C)-Inf(C/V) |
|---|---|---|---|---|
| | 8 | 4 | Inf(C) = -(P(Clase=Sí)ld(P(Clase=Sí)) + P(Clase=No)ld(P(Clase=No))) | |
| A=0 | 2 | 2 | | Ganancia(C/A) |
| A=1 | 2 | 2 | | |
| A=2 | 2 | 2 | | |
| B=0 | 3 | 3 | | Ganancia(C/B) |
| B=1 | 5 | 1 | | |

$$Inf(C/v_i) = -\sum_k p(c_k / v_i) ld(p(c_k / v_i))$$

## Pregunta 1. Razón de ganancia – Desarrollo

Partición 1

$$Inf(C/V) = \sum_i P(v_i) inf(C / v_i)$$

| | Sí | No | Entropía | Ganancia = Inf(C)-Inf(C/V) |
|---|---|---|---|---|
| | 8 | 4 | Inf(C) = -(P(Clase=Sí)ld(P(Clase=Sí)) + P(Clase=No)ld(P(Clase=No))) | |
| A=0 | 2 | 2 | | |
| A=1 | 2 | 2 | | |
| A=2 | 2 | 2 | | |
| B=0 | 3 | 3 | | |
| B=1 | 5 | 1 | | |

$$Inf(C/v_i) = -\sum_k p(c_k / v_i) ld(p(c_k / v_i))$$

## Pregunta 1. Razón de ganancia – Desarrollo

Partición 1

$$Inf(C/V) = \sum_i P(v_i) inf(C / v_i)$$

| | Sí | No | Entropía | Ganancia = Inf(C)-Inf(C/V) |
|---|---|---|---|---|
| | 8 | 4 | Inf(C) = -(P(Clase=Sí)ld(P(Clase=Sí)) + P(Clase=No)ld(P(Clase=No))) | |
| A=0 | 2 | 2 | Inf(C\|A=0) = -(P(Clase=Sí\|A=0)ld(P(Clase=Sí\|A=0)) + P(Clase=No\|A=0)ld(P(Clase=No\|A=0))) | Ganancia(C/A) |
| A=1 | 2 | 2 | Inf(C\|A=1) = -(P(Clase=Sí\|A=1)ld(P(Clase=Sí\|A=1)) + P(Clase=No\|A=1)ld(P(Clase=No\|A=1))) | |
| A=2 | 2 | 2 | Inf(C\|A=2) = -(P(Clase=Sí\|A=2)ld(P(Clase=Sí\|A=2)) + P(Clase=No\|A=2)ld(P(Clase=No\|A=2))) | |
| B=0 | 3 | 3 | | |
| B=1 | 5 | 1 | | |

$$Inf(C/v_i) = -\sum_k p(c_k / v_i) ld(p(c_k / v_i))$$

## Pregunta 1. Razón de ganancia – Desarrollo

Partición 1

$$Inf(C/V) = \sum_i P(v_i) inf(C / v_i)$$

| | Sí | No | Entropía | Ganancia = Inf(C)-Inf(C/V) |
|---|---|---|---|---|
| | 8 | 4 | Inf(C) = -(P(Clase=Sí)ld(P(Clase=Sí)) + P(Clase=No)ld(P(Clase=No))) | |
| A=0 | 2 | 2 | Inf(C\|A=0) = -(P(Clase=Sí\|A=0)ld(P(Clase=Sí\|A=0)) + P(Clase=No\|A=0)ld(P(Clase=No\|A=0))) | Ganancia(C/A) |
| A=1 | 2 | 2 | Inf(C\|A=1) = -(P(Clase=Sí\|A=1)ld(P(Clase=Sí\|A=1)) + P(Clase=No\|A=1)ld(P(Clase=No\|A=1))) | |
| A=2 | 2 | 2 | Inf(C\|A=2) = -(P(Clase=Sí\|A=2)ld(P(Clase=Sí\|A=2)) + P(Clase=No\|A=2)ld(P(Clase=No\|A=2))) | |
| B=0 | 3 | 3 | Inf(C\|B=0) = -(P(Clase=Sí\|B=0)ld(P(Clase=Sí\|B=0)) + P(Clase=No\|B=0)ld(P(Clase=No\|B=0))) | Ganancia(C/B) |
| B=1 | 5 | 1 | Inf(C\|B=1) = -(P(Clase=Sí\|B=1)ld(P(Clase=Sí\|B=1)) + P(Clase=No\|B=1)ld(P(Clase=No\|B=1))) | |

## Pregunta 1. Razón de ganancia – Desarrollo

Partición 1

$$Inf(C/V) = \sum_i P(v_i)\, inf(C/v_i)$$

| | Sí | No | Entropía | Ganancia = Inf(C)-Inf(C/V) |
|---|---|---|---|---|
| | 8 | 4 | Inf(C) = -(P(Clase=Sí)ld(P(Clase=Sí)) + P(Clase=No)ld(P(Clase=No))) | |
| A=0 | 2 | 2 | Inf(C\|A=0) = -(P(Clase=Sí\|A=0)ld(P(Clase=Sí\|A=0)) + P(Clase=No\|A=0)ld(P(Clase=No\|A=0))) | Ganancia(A)= Inf(C)-(P(A=0)*Inf(C\|A=0)+ P(A=1)*Inf(C\|A=1)+ P(A=2)*Inf(C\|A=2)) |
| A=1 | 2 | 2 | Inf(C\|A=1) = -(P(Clase=Sí\|A=1)ld(P(Clase=Sí\|A=1)) + P(Clase=No\|A=1)ld(P(Clase=No\|A=1))) | |
| A=2 | 2 | 2 | Inf(C\|A=2) = -(P(Clase=Sí\|A=2)ld(P(Clase=Sí\|A=2)) + P(Clase=No\|A=2)ld(P(Clase=No\|A=2))) | |
| B=0 | 3 | 3 | Inf(C\|B=0) = -(P(Clase=Sí\|B=0)ld(P(Clase=Sí\|B=0)) + P(Clase=No\|B=0)ld(P(Clase=No\|B=0))) | Ganancia(B)= Inf(C)-(P(B=0)*Inf(C\|B=0)+ P(B=1)*Inf(C\|B=1)) |
| B=1 | 5 | 1 | Inf(C\|B=1) = -(P(Clase=Sí\|B=1)ld(P(Clase=Sí\|B=1)) + P(Clase=No\|B=1)ld(P(Clase=No\|B=1))) | |

## Pregunta 1. Razón de ganancia – Desarrollo

Partición 1

| | Sí | No | Entropía | Ganancia = $\mathrm{Inf(C)\text{-}Inf(C/V)}$ |
|---|---|---|---|---|
| | 8 | 4 | $\mathrm{Inf(C)} = 0{,}918$ | |
| A=0 | 2 | 2 | $\mathrm{Inf(C\|A{=}0)} = 0{,}862$ | 1,206 |
| A=1 | 2 | 2 | $\mathrm{Inf(C\|A{=}1)} = 0{,}862$ | |
| A=2 | 2 | 2 | $\mathrm{Inf(C\|A{=}2)} = 0{,}862$ | |
| B=0 | 3 | 3 | $\mathrm{Inf(C\|B{=}0)} = 1{,}000$ | 0,831 |
| B=1 | 5 | 1 | $\mathrm{Inf(C\|B{=}1)} = 0{,}825$ | |

$$\mathrm{J = Max\ (Ganancia(\{Ganancia(A), Ganancia(B)\})) = Ganancia(A)}$$

```
|--- A <= 0.50
|   |--- clase: Sí
|--- A >  0.50
|   |--- B <= 0.50
|   |   |--- clase: No
|   |--- B >  0.50
|   |   |--- clase: Sí
```

## Pregunta 1. Razón de ganancia – Desarrollo

Partición 1

| | Sí | No | Entropía | Ganancia = $\text{Inf(C)-Inf(C/V)}$ |
|---|---|---|---|---|
| | 8 | 4 | $\text{Inf(C)} = 0{,}918$ | |
| A=0 | 2 | 2 | $\text{Inf(C\|A=0)} = 0{,}862$ | 1,206 |
| A=1 | 2 | 2 | $\text{Inf(C\|A=1)} = 0{,}862$ | |
| A=2 | 2 | 2 | $\text{Inf(C\|A=2)} = 0{,}862$ | |
| B=0 | 3 | 3 | $\text{Inf(C\|B=0)} = 1{,}000$ | 0,831 |
| B=1 | 5 | 1 | $\text{Inf(C\|B=1)} = 0{,}825$ | |

$$\text{J} = \text{Max}\ (\text{Ganancia}(\{\text{Ganancia}(\text{A}), \text{Ganancia}(\text{B})\})) = \text{Ganancia}(\text{A})$$

## Pregunta 3. Posiciones promotor genético

- En genética es muy importante determinar si un gen está expresado en un organismo particular. Una forma de averiguar si el gen está expresado o no, es saber si existe un *promotor* antes del gen. La existencia de un determinado *promotor* se puede medir por la existencia de aminoácidos en el inicio y final del *promotor*. Para el caso de un organismo específico, se sabe que en el inicio del *promotor* existen dos valores posibles: Glicina (G) y Prolina (P); y en el fin del *promotor* existen tres alternativas: Histidina (H), Metionina (M) y Lisina (L).
- Usando el método de máxima entropía propuesto por Quinlan, determine cuál de las dos posiciones (inicio o fin) del *promotor* discrimina mejor su existencia.

| Inicio | Fin | Promotor |
|---|---|---|
| G | H | Sí |
| G | H | No |
| P | H | Sí |
| G | M | Sí |
| P | L | Sí |
| P | M | Sí |
| P | H | No |
| G | M | Sí |
| G | L | No |
| G | L | No |
| P | M | Sí |
| P | L | Sí |

## Pregunta 3. Posiciones promotor genético

| | Sí | No | Entropía | Ganancia = Inf(C)-Inf(C/V) |
|---|---|---|---|---|
| | 8 | 4 | | |
| Inicio=G | 3 | 3 | | |
| Inicio=P | 5 | 1 | | |
| Fin=H | 2 | 2 | | |
| Fin=L | 2 | 2 | | |
| Fin=M | 4 | 0 | | |

$$\mathrm{J} = \mathrm{Max}\ (\mathrm{Ganancia}(\{\mathrm{Ganancia}(\mathrm{Inicio}), \mathrm{Ganancia}(\mathrm{Fin})\}))$$

## Pregunta 3. Posiciones promotor genético

$$Inf(C) = -\sum_k P(c_k)\, ld P(c_k)$$

| | Sí | No | Entropía | Ganancia = Inf(C)-Inf(C/V) |
|---|---|---|---|---|
| | 8 | 4 | Inf(C) = -(P(Promotor=Sí)ld(P(Promotor=Sí)) + P(Promotor=No)ld(P(Promotor=No))) | |
| Inicio=G | 3 | 3 | | |
| Inicio=P | 5 | 1 | | |
| Fin=H | 2 | 2 | | |
| Fin=L | 2 | 2 | | |
| Fin=M | 4 | 0 | | |

UNIVERSIDAD DE SANTIAGO DE CHILE



$$Inf(C/v_i) = -\sum_k p(c_k / v_i) ld(p(c_k / v_i))$$

$$Inf(C/V) = \sum_i P(v_i) inf(C / v_i)$$

## Pregunta 3. Posiciones promotor genético

| | Sí | No | Entropía | Ganancia = Inf(C)-Inf(C/V) |
|---|---|---|---|---|
| | 8 | 4 | Inf(C) = -(P(Promotor=Sí)ld(P(Promotor=Sí)) + P(Promotor=No)ld(P(Promotor=No))) | |
| Inicio=G | 3 | 3 | Inf(C\|Inicio=G) = -(P(Promotor=Sí\|Inicio=G)ld(P(Promotor=Sí\|Inicio=G))+ P(Promotor=No\|Inicio=G)ld(P(Promotor=Sí\|Inicio=G))) | Ganancia(C/Inicio) |
| Inicio=P | 5 | 1 | Inf(C\|Inicio=P) = -(P(Promotor=Sí\|Inicio=P)ld(P(Promotor=Sí\|Inicio=P))+ P(Promotor=No\|Inicio=P)ld(P(Promotor=Sí\|Inicio=P))) | |
| Fin=H | 2 | 2 | Inf(C\|Inicio=H) = -(P(Promotor=Sí\|Inicio=P)ld(P(Promotor=Sí\|Inicio=P))+ P(Promotor=No\|Inicio=P)ld(P(Promotor=Sí\|Inicio=P))) | |
| Fin=L | 2 | 2 | Inf(C\|Fin=L) = -(P(Promotor=Sí\|Fin=L)ld(P(Promotor=Sí\|Fin=L))+ P(Promotor=No\|Fin=L)ld(P(Promotor=Sí\|Fin=L))) | Ganancia(C/Fin) |
| Fin=M | 4 | 0 | Inf(C\|Fin=M) = -(P(Promotor=Sí\|Fin=M)ld(P(Promotor=Sí\|Fin=M))+ P(Promotor=No\|Fin=M)ld(P(Promotor=Sí\|Fin=M))) | |

## Pregunta 3. Posiciones promotor genético

$$Inf(C/V) = \sum_i P(v_i)\, inf(C/v_i)$$

| | Sí | No | Entropía | Ganancia = Inf(C)-Inf(C/V) |
|---|---|---|---|---|
| | 8 | 4 | Inf(C) = -(P(Promotor=Sí)ld(P(Promotor=Sí)) + P(Promotor=No)ld(P(Promotor=No))) | |
| Inicio=G | 3 | 3 | Inf(C\|Inicio=G) = -(P(Promotor=Sí\|Inicio=G)ld(P(Promotor=Sí\|Inicio=G))+ P(Promotor=No\|Inicio=G)ld(P(Promotor=Sí\|Inicio=G))) | Ganancia(Inicio)= Inf(C)- (P(Inicio=G)*Inf(C\|Inicio=G)+ P(Inicio=P)*Inf(C\|Inicio=P)) |
| Inicio=P | 5 | 1 | Inf(C\|Inicio=P) = -(P(Promotor=Sí\|Inicio=P)ld(P(Promotor=Sí\|Inicio=P))+ P(Promotor=No\|Inicio=P)ld(P(Promotor=Sí\|Inicio=P))) | |
| Fin=H | 2 | 2 | Inf(C\|Inicio=H) = -(P(Promotor=Sí\|Inicio=P)ld(P(Promotor=Sí\|Inicio=P))+ P(Promotor=No\|Inicio=P)ld(P(Promotor=Sí\|Inicio=P))) | Ganancia(Fin)= Inf(C)- (P(Fin=H)*Inf(C\|Fin=H)+ P(Fin=L)*Inf(C\|Fin=L)+ P(Fin=M)*Inf(C\|Fin=M)) |
| Fin=L | 2 | 2 | Inf(C\|Fin=L) = -(P(Promotor=Sí\|Fin=L)ld(P(Promotor=Sí\|Fin=L))+ P(Promotor=No\|Fin=L)ld(P(Promotor=Sí\|Fin=L))) | |
| Fin=M | 4 | 0 | Inf(C\|Fin=M) = -(P(Promotor=Sí\|Fin=M)ld(P(Promotor=Sí\|Fin=M))+ P(Promotor=No\|Fin=M)ld(P(Promotor=Sí\|Fin=M))) | |

## Pregunta 3. Posiciones promotor genético

| | Sí | No | Entropía | Ganancia = Inf(C)-Inf(C/V) |
|---|---|---|---|---|
| | 8 | 4 | $\text{Inf(C)} = 0{,}918$ | |
| Inicio=G | 3 | 3 | $\text{Inf(C\|Inicio=G)} = 1{,}000$ | Ganancia(Inicio)= 0,831 |
| Inicio=P | 5 | 1 | $\text{Inf(C\|Inicio=P)} = 0{,}825$ | |
| Fin=H | 2 | 2 | $\text{Inf(C\|Inicio=H)} = 0{,}862$ | Ganancia(Fin)= 1,094 |
| Fin=L | 2 | 2 | $\text{Inf(C\|Fin=L)} = 0{,}862$ | |
| Fin=M | 4 | 0 | $\text{Inf(C\|Fin=M)} = 0{,}528$ | |

## Pregunta 3. Posiciones promotor genético

| | Sí | No | Entropía | Ganancia = Inf(C)-Inf(C/V) |
|---|---|---|---|---|
| | 8 | 4 | $\text{Inf(C)} = 0{,}918$ | |
| Inicio=G | 3 | 3 | $\text{Inf(C\|Inicio=G)} = 1{,}000$ | Ganancia(Inicio)= 0,831 |
| Inicio=P | 5 | 1 | $\text{Inf(C\|Inicio=P)} = 0{,}825$ | |
| Fin=H | 2 | 2 | $\text{Inf(C\|Inicio=H)} = 0{,}862$ | Ganancia(Fin)= 1,094 |
| Fin=L | 2 | 2 | $\text{Inf(C\|Fin=L)} = 0{,}862$ | |
| Fin=M | 4 | 0 | $\text{Inf(C\|Fin=M)} = 0{,}528$ | |

$$\text{J} = \text{Max (Ganancia(\{Ganancia(Inicio), Ganancia(Fin)\}))} = \text{Ganancia(Fin)}$$

# Consultas