UNIVERSIDAD
DE SANTIAGO
DE CHILE

Ayudantía

Análisis de Datos– PEP 3

Ayudante Daniel Calderón

UNIVERSIDAD DE SANTIAGO DE CHILE

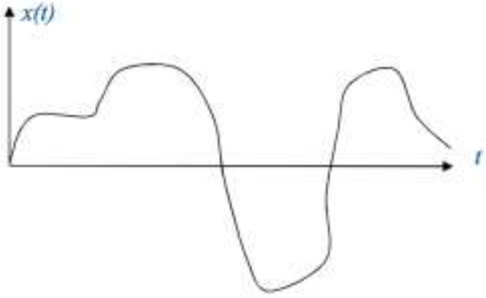
Contenido incluido en la PEP 3

- Capítulo VIII – Series temporales

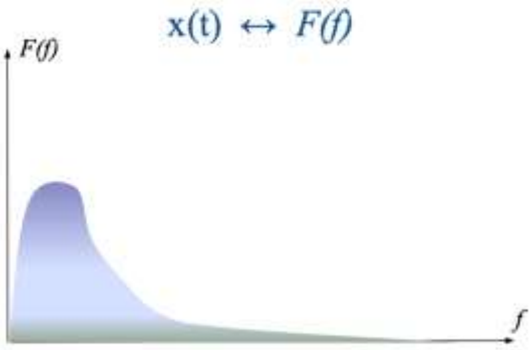
Definiciones básicas: Señales

Señal: Variación de una cantidad mensurable que posee información relativa a un sistema o su entorno

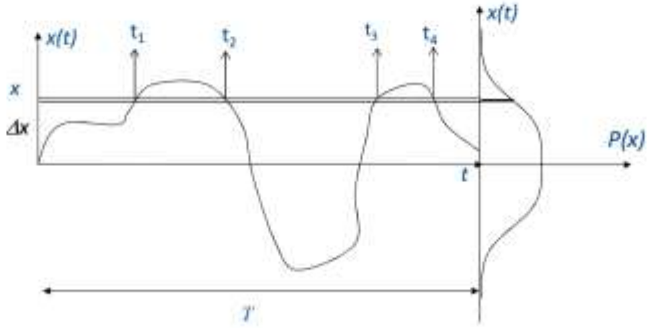
Una señal se caracteriza por usar como parámetro el tiempo, pero es la representación de un fenómeno o sistema



Representación en el tiempo t



Representación en la frecuencia (Fourier)



Representación en densidad de probabilidad

Definiciones básicas: Complejidad

- Un **sistema complejo** posee varias características de difícil tratamiento matemático

$$\frac{\partial \phi}{\partial x} + \frac{\partial \phi}{\partial y} + \frac{\partial \phi}{\partial z} = f(x, y, z)$$

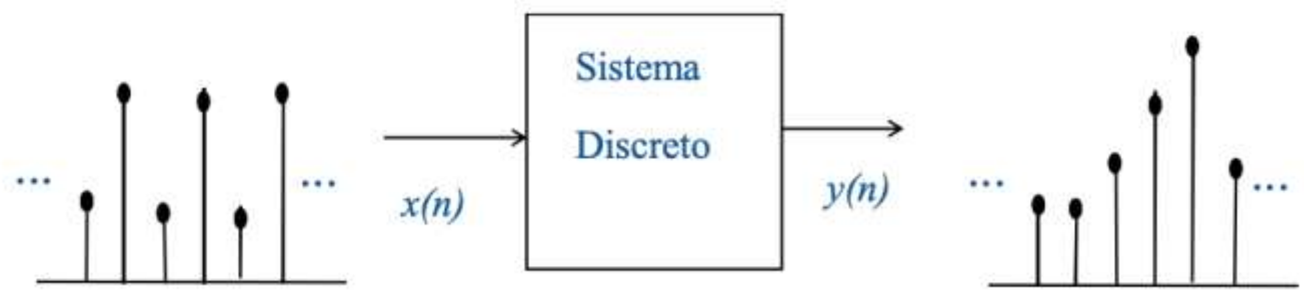
$$z^2 y^2 \frac{\partial \phi}{\partial x} + \frac{\partial \phi}{\partial z}\frac{\partial \phi}{\partial y} + x^2 \frac{\partial \phi}{\partial z} = f(x, y, z)$$

$$z(t)^2 \frac{\partial \phi}{\partial x} + t^2 \frac{\partial \phi}{\partial z}\frac{\partial \phi}{\partial y} + x^2 \frac{\partial \phi}{\partial z} + \frac{\partial \phi}{\partial t} = g(x, y, z, t)$$

Representaciones diferentes para sistemas complejos

Definiciones básicas: Sistemas discretos

- Dispositivo o algoritmo que desarrolla alguna operación sobre señales discretas
- Conjunto de operaciones aplicadas a una entrada x(n), que produce una salida y(n)



Efecto de un sistema discreto en X(n)

Definiciones básicas: Sistemas Discretos Lineales Invariantes (SDLI)

- Existen dos formas de analizar un **sistema o señal en el tiempo**:

Resolver la ecuación diferencial

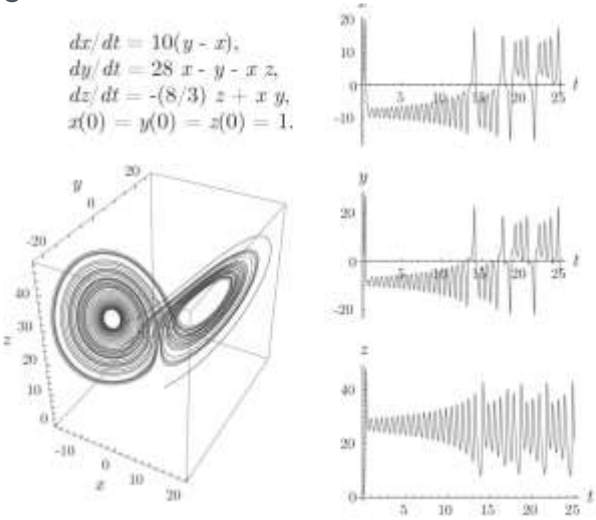
Muchas veces es difícil de hacer cuando se tienen sistemas complejos:
Es aburrido, buu.

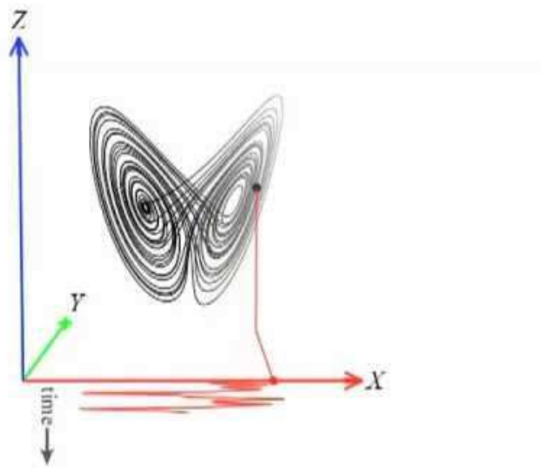
Analizar el comportamiento del sistema dada una entrada.

Es más intuitivo y funciona similar al concepto de caja negra:
So much fun!

Definiciones básicas: Teorema de Takens

- En 1980 Takens mostro que señal producida por un sistema dinámico multidimensional, puede ser representado por un conjunto de señales en el tiempo, que se desprenden de la propia señal original.





Definiciones básicas: Teorema de Takens

- Con una señal en t, intentaremos representar el fenómeno. Por el teorema de Takens es posible probar que **es posible realizar predicción de la señal, en tiempos futuros**.
- El problema que se desea resolver ahora es **determinar la complejidad de esta señal** sin conocer todas las propiedades fenomenológicas de la señal, a pesar que esta señal esté contaminada con ruido.

Definiciones básicas: Señal periódica contínua

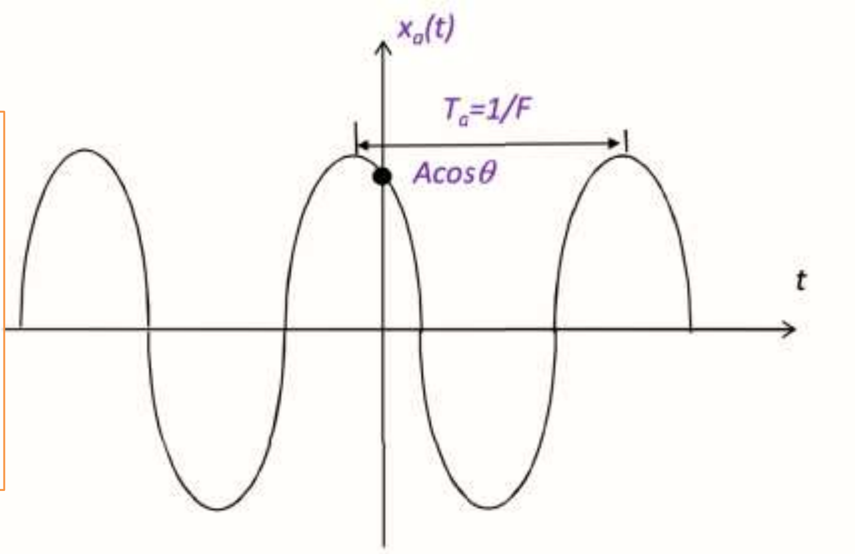
$$x_a(t) = A\cos(\Omega t + \theta)$$

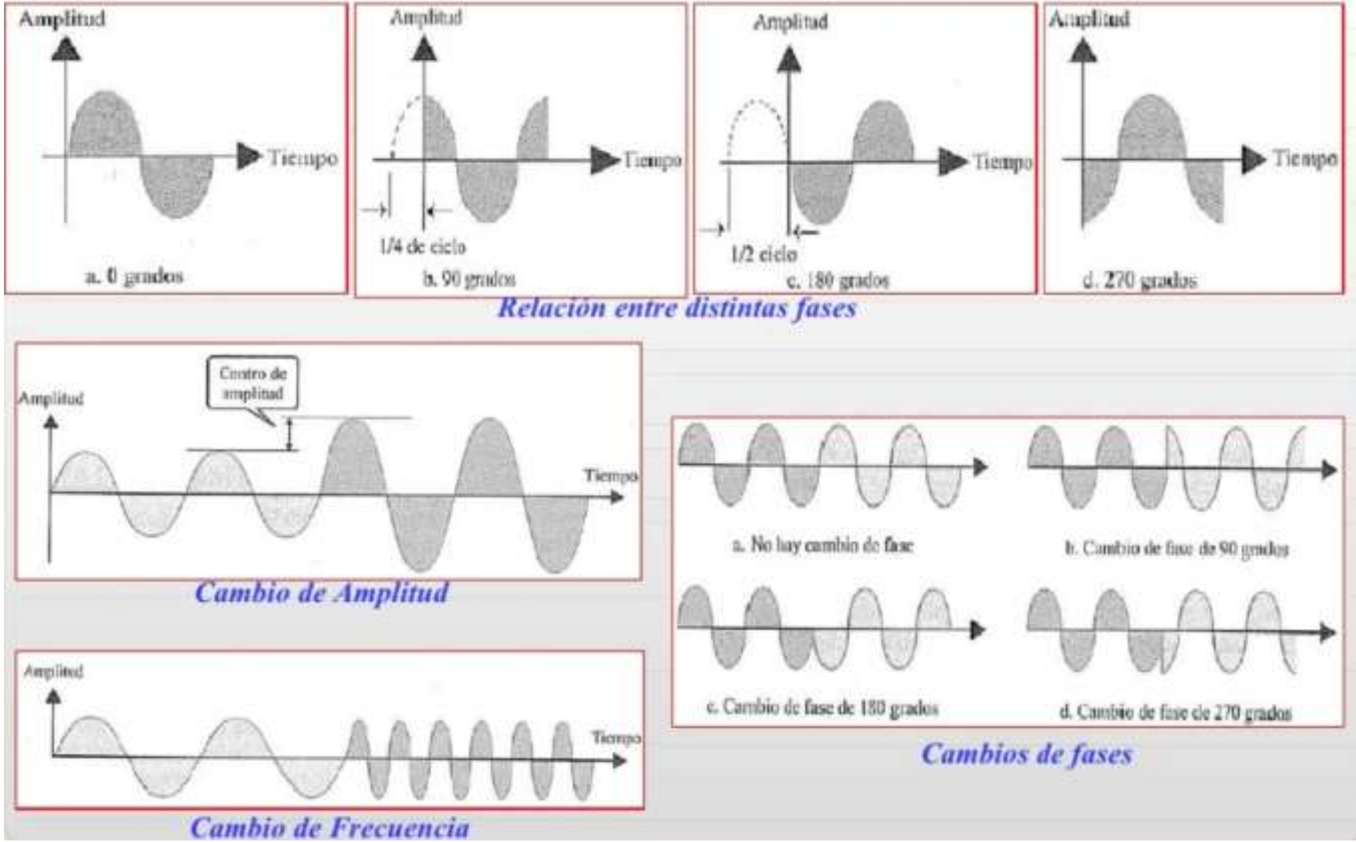
$\Omega\,[radianes/seg] = 2\pi F$

$\theta\,[radianes] = Fase\ de\ la\ señal$

$F\,[ciclos/seg] = Frecuencia\ de\ muestreo$

$T_a\,[seg] = Período\ sinusoide$

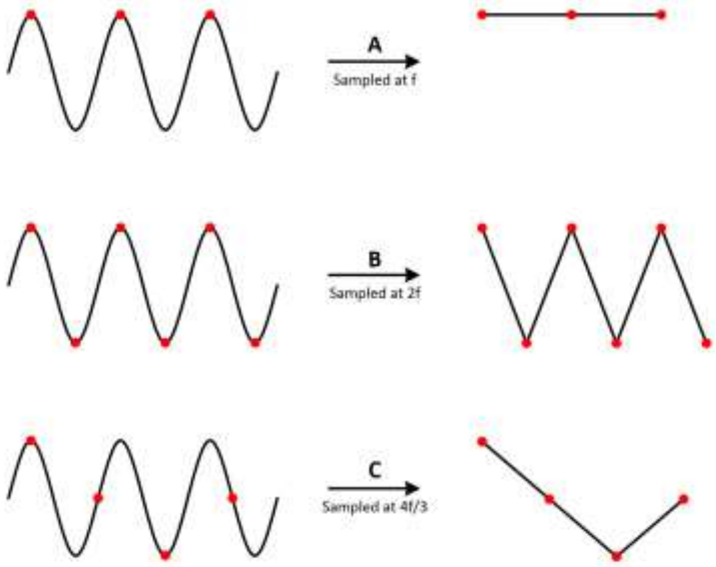



Amplitud
Tiempo
a. 0 grados
1/4 de ciclo
b. 90 grados
1/2 ciclo
c. 180 grados
d. 270 grados
Relación entre distintas fases
Centro de amplitud
Cambio de Amplitud
a. No hay cambio de fase
b. Cambio de fase de 90 grados
c. Cambio de fase de 180 grados
d. Cambio de fase de 270 grados
Cambios de fases
Cambio de Frecuencia

Definiciones básicas: Teorema del muestreo (Nyquist)

- Explica la relación entre la velocidad de muestreo y la frecuencia de la señal medida.
- Afirma que la velocidad de muestreo f_s debe ser mayor que el doble del componente de interés de frecuencia más alto en la señal medida.
- Esta frecuencia por lo general se conoce como la frecuencia Nyquist, f_N.
- **Importante: Si se tiene más de 1 sin o cos dentro de la señal, para el muestreo se considera la máxima frecuencia.**

$$F_s > 2 * f_N$$



Definiciones básicas: Señal periódica discreta

$$x_a(n) = A\cos\left(\frac{2\pi * n * F}{f_s} + \theta\right)$$

θ [radianes] = *Fase de la señal*

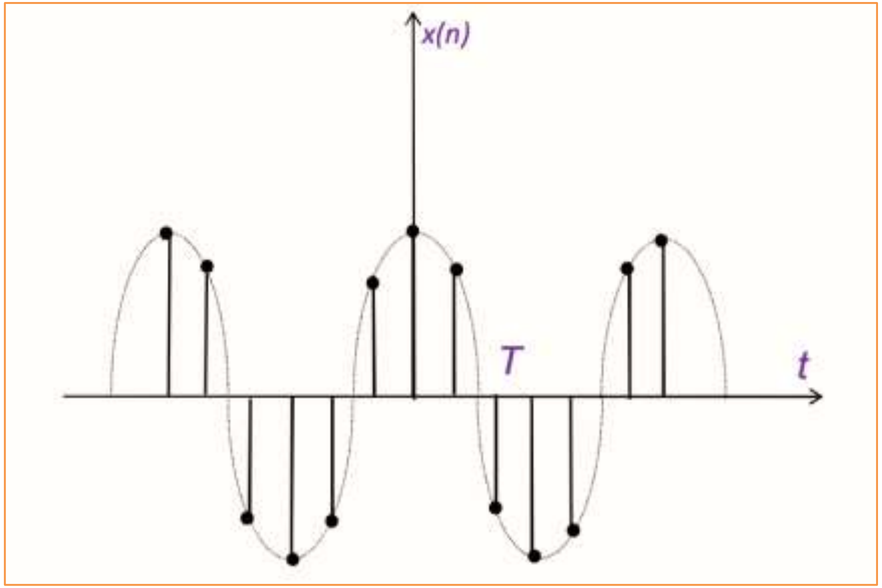
F [ciclos/seg] = *Frecuencia de muestreo*

f_s[ciclos/seg] = *Tasa de muestreo*

T_a [seg] = *Período sinusoide*

$$-\frac{F_s}{2} <= F <= \frac{F_s}{2}$$

$$-\frac{\pi}{t} <= \Omega <= \frac{\pi}{t}$$



1. La señal análoga $x(t)=2sen(100\pi t)+0.8cos(178\pi t)$, en seg. Se muestrea con una frecuencia 13,5 veces mayor que la frecuencia de Nyquist.
   i) Primero determine la frecuencia de Nyquist (F_N) y luego a $13.5xF_N$:
   ii) Determine la expresión de la señal digital.

1. La señal análoga $x(t)=2sen(100\pi t)+0.8cos(178\pi t)$, en seg. Se muestrea con una frecuencia 13,5 veces mayor que la frecuencia de Nyquist.
   i) Primero determine la frecuencia de Nyquist (F_N) y luego a $13,5xF_N$:
   ii) Determine la expresión de la señal digital.

a)

$$x(t) = 2sen(50 * 2\pi * t) + 0.8cos(89 * 2\pi * t)$$

$$fs_1 = 50 \; y \; fs_2 = 89$$

$$fs_{max} = 89 \, [Hz]$$

$$Frecuencia \; de \; Nyquist \; => F_n = 2 * 89 = 178 \, [Hz]$$

$$13.5 \; veces \; frecuencia \; de \; Nyquist \; => 13.5 * 178 = 2403 \, [Hz]$$

1. La señal análoga $x(t)=2sen(100\pi t)+0.8cos(178\pi t)$, en seg. Se muestrea con una frecuencia 13,5 veces mayor que la frecuencia de Nyquist.
   i) Primero determine la frecuencia de Nyquist (F_N) y luego a $13.5xF_N$:
   ii) Determine la expresión de la señal digital.

b)

Fs = 2403 [Hz]

$$x(t) = 2sen(50 * 2\pi * t) + 0.8cos(89 * 2\pi * t)$$

$$x(n) = 2sen(\frac{50 * 2\pi * n}{Fs}) + 0.8cos(\frac{89 * 2\pi * n}{Fs})$$

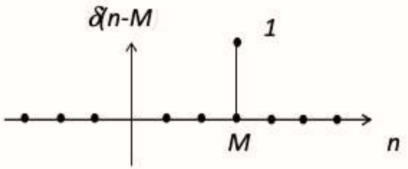
$$x(n) = 2sen(\frac{50 * 2\pi * n}{2403}) + 0.8cos(\frac{2\pi * n}{27})$$

$$x(n) = 2sen(2\pi * \frac{50}{2403} * n) + 0.8cos(2\pi * \frac{1}{27} * n)$$

Definiciones básicas: Señales elementales

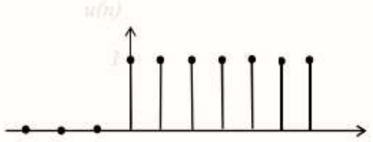
i) Impulso unitario

$$\delta(n)=\begin{cases}1, \text{ para } n=0\\ 0, \text{ para } n\neq 0\end{cases}$$



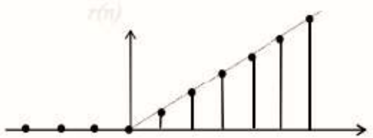
ii) Escalón unitario

$$u(n)=\begin{cases}1, \text{ para } n\geq 0\\ 0, \text{ para } n<0\end{cases}$$



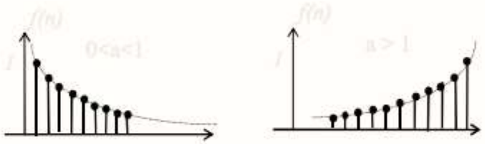
iii) Rampa

$$r(n)=\begin{cases}n, \text{ para } n\geq 0\\ 0, \text{ para } n<0\end{cases}$$



iv) Explonencial

$$f(n)=a^n\ \forall n$$



UNIVERSIDAD
DE SANTIAGO
DE CHILE

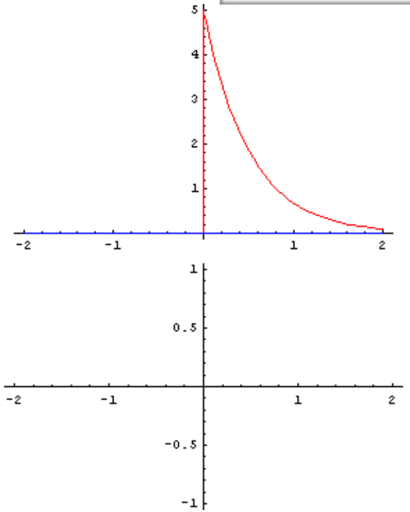
Convolución

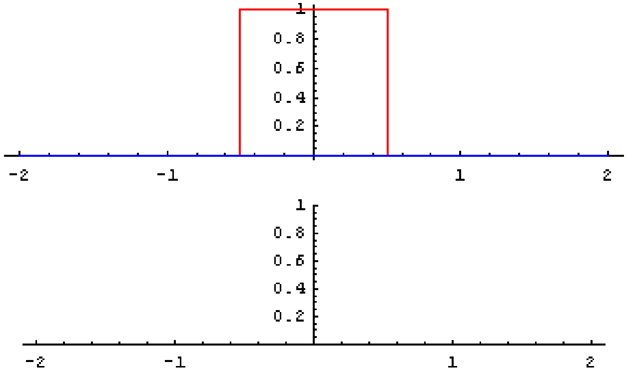
Continuos Time

$$x(t)*y(t)=\int_{-\infty}^{+\infty} x(\tau)\, y(t-\tau)\, d\tau$$

Discrete Time

$$x[n]*y[n]=\sum_{k=-\infty}^{+\infty} x[n]\, y[n\text{-}k]$$

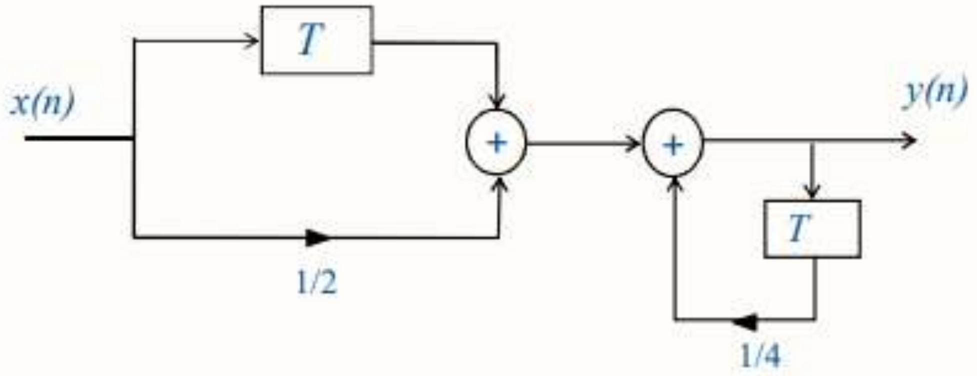




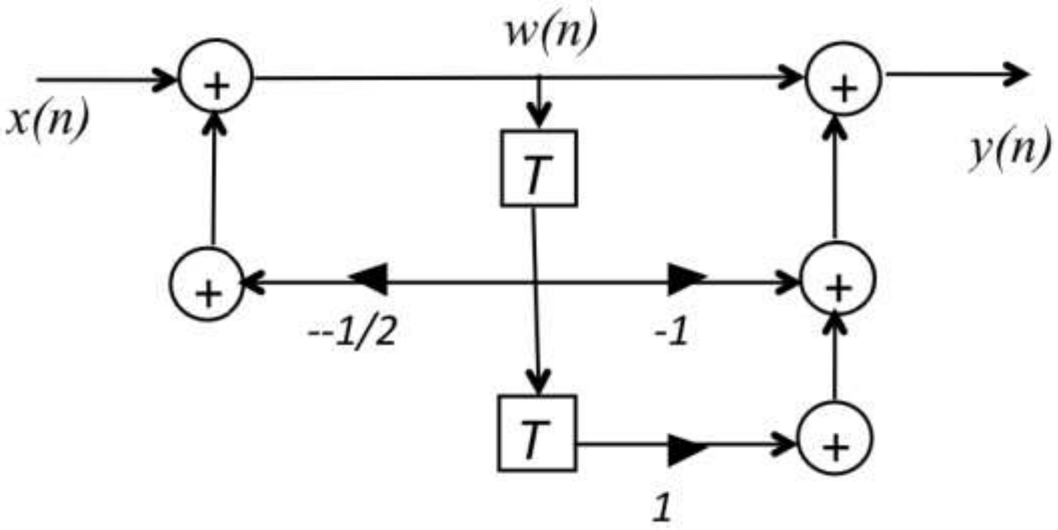
UNIVERSIDAD
DE SANTIAGO
DE CHILE

Ejemplo

$$y(n)=1/4y(n-1)+1/2x(n)+x(n-1)$$



4. El SDLI del diagrama, es excitado por la señal $x(n)=2^{-n}(u(n)-u(n-4))*\delta(n-2)$
   i) Obtenga la secuencia de muestras de $x(n)$ gráficamente.
   ii) Calcule la respuesta al impulso al sistema.
   iii) Sugiera el procedimiento para obtener la salida del sistema.



2. Determine gráficamente la respuesta al impulso del sistema equivalente, al interconectar en cascada, los sistemas que poseen la siguientes funciones de transferencia $h_1(n)=u(n+1)-u(n-3)$ y $h_2(n)=r(n)-u(n-4)r(n)$. (1).

Tipos de Sistemas

- Sistema es *estático* (o sin memoria) si su salida en cualquier instante n depende solo de la muestra en el mismo instante

Ej:

$$y(n)=ax(n)$$
$$y(n)=nx(n)+bx^2(n)$$

- Sistema es *dinámico* de memoria de largo N si en el instante n está completamente determinado por las muestras de $[n-N,n]$

Ej: $y(n)=x(n)+3x(n-1)$

$$y(n)=\sum_{k=0}^{N} x(n-k)$$

Tipos de Sistemas

- Sistema es *invariante* en el tiempo sí su relación entrada salida no depende del tiempo

$$y(n)=T[x(n)]$$

Teo : Un sistema es invariante ssi

Para una entrada: $x(n) \xrightarrow{T} y(n)$

y para: $x(n-k) \xrightarrow{T} y(n-k)$

para cualquier $x(n)$ y cualquier k

Tipos de Sistemas

- *Sistema es lineal* si cumple con el principio de superposición (multiplicación escalar, aditividad)

Teo: un sistema es lineal sii

$$T[a_1x_1(n)+a_2x_2(n)]=a_1T[x_1(n)]+a_2T[x_2(n)]$$

nota: si las constantes a_i son cero $y(n)=0$

Sistemas causales/no-causales

Teo: Sistema es causal si la salida depende solo de las entradas presentes y pasadas, pero no de las entradas futuras

$$y(n)=F[x(n),x(n-1),x(n-2),x(n-3),\ \dots\ ]$$

Tipos de Sistemas

Sistemas estables/inestables

Teo: un sistema es estable sii para entradas acotadas produce salidas acotadas

Para una secuencia de entrada $x(n)$ y para una secuencia de salida $y(n)$ existen números finitos M_x y M_y tal que:

$$|x(n)| \leq M_x < \infty \quad \text{y} \quad |y(n)| \leq M_y < \infty \quad \forall n$$

Ej: sea el sistema $\quad y(n)=by(n-1)+x(n)$

$$con \quad x(n)=\delta(n-1) \ \text{ y } \ y(0)=0$$

La solución será : $y(n)=b^{n-1}$ no acotada $1<|b|<\infty$

3. Determine si el siguiente sistemas cumple con las propiedades de linealidad, causalidad, estabilidad e invariancia temporal, $y(n)=x^2(n)sen(\omega n)$. (1).

y(n) = x^2(n)sen(wn)
y(n) = f(y(n-k), x(n-m))

f = **combinación lineal** de constantes y variables

- *Sistema es lineal* si cumple con el principio de superposición (multiplicación escalar, aditividad)

Teo: un sistema es lineal sii

$$T[a_1x_1(n)+a_2x_2(n)]=a_1T[x_1(n)]+a_2T[x_2(n)]$$

nota: si las constantes a_i son cero $y(n)=0$

3. Determine si el siguiente sistemas cumple con las propiedades de linealidad, causalidad, estabilidad e invariancia temporal, $y(n)=x^2(n)sen(\omega n)$. (1).

y(n) = x^2(n)sen(wn) => NO LINEAL

y(n) = f(y(n-k), x(n-m))

f = **combinación lineal** de constantes y variables

- *Sistema es lineal* si cumple con el principio de superposición (multiplicación escalar, aditividad)

Teo: un sistema es lineal sii

$$T[a_1x_1(n)+a_2x_2(n)]=a_1T[x_1(n)]+a_2T[x_2(n)]$$

nota: si las constantes a_i son cero $y(n)=0$

3. Determine si el siguiente sistemas cumple con las propiedades de linealidad, causalidad, estabilidad e invarianca temporal, $y(n)=x^2(n)sen(\omega n)$. (1).

Sistemas causales/no-causales

Teo: Sistema es causal si la salida depende solo de las entradas presentes y pasadas, pero no de las entradas futuras

$$y(n)=F[x(n),x(n-1),x(n-2),x(n-3),\ ...\ ]$$

Nota: los sistemas de tiempo real tienen que ser causales solo pueden existir sistemas no causales cuando la señal es almacenada (off-line)

Capítulo V – Series temporales

3. Determine si el siguiente sistemas cumple con las propiedades de linealidad, causalidad, estabilidad e invariancia temporal, $y(n)=x^2(n)sen(\omega n)$. (1).

y(n) = x^2(n)sen(wn) => CAUSAL

y(n) = x(n+1) - 7y(n)
y(n) = x(n-1) + 8y(n+2)

EJEMPLOS DE NO CAUSALES

Sistemas causales/no-causales

Teo: Sistema es causal si la salida depende solo de las entradas presentes y pasadas, pero no de las entradas futuras

$$y(n)=F[x(n),x(n-1),x(n-2),x(n-3),\ldots]$$

Nota: los sistemas de tiempo real tienen que ser causales solo pueden existir sistemas no causales cuando la señal es almacenada (off-line)

3. Determine si el siguiente sistemas cumple con las propiedades de linealidad, causalidad, estabilidad e invariancia temporal, $y(n)=x^2(n)sen(\omega n)$. (1).

y(n) = x^2(n)sen(wn)

Los coeficientes de la ecuación no pueden depender de n (tiempo).

En este caso, no hay ningún n multiplicando a x^2 o a sen(wn).

Contra ejemplo: y(n) = (n+1)x^2(n)nsen(wn)

Sistemas estables/inestables

Teo: un sistema es estable sii para entradas acotadas produce salidas acotadas

Para una secuencia de entrada $x(n)$ y para una secuencia de salida $y(n)$ existen números finitos M_x y M_y tal que:

$$|x(n)| \leq M_x < \infty \quad y \quad |y(n)| \leq M_y < \infty \quad \forall n$$

Ej: sea el sistema $y(n)=by(n-1)+x(n)$

con $x(n)=\delta(n-1)$ y $y(0)=0$

La solución será : $y(n)=b^{n-1}$ no acotada $1<|b|<\infty$

8. Determine si los siguientes sistemas cumplen con las propiedades de linealidad, causalidad, estabilidad BIBO e invariancia temporal.

i) $y(n)=2x(n-n_0)$, con $n_0>0$.

ii) $y(n)=n(n+3)x(n-3)$.

iii) $y(n)=5nx^2(n)$.

iv) $x(n)=\alpha+\sum_{k=-4}^{4}x(n-k)$

UNIVERSIDAD
DE SANTIAGO
DE CHILE

Consultas