

A Velocidade de Deslizamento e o Coeficiente de Arrasto em Sistemas Bifásicos Gás-Líquido

Introdução

Generalizando, pode-se dizer que um escoamento bifásico consiste de um sem-número de regiões monofásicas cercadas por interfaces móveis. Conseqüentemente, pelo menos de um ponto de vista teórico, o problema poderia ser formulado em termos das equações padrões de balanço aplicáveis para o escoamento monofásico com as condições de contorno apropriadas na interface. Esta formulação, baseada nas variáveis instantâneas e interfaces com movimento resultaria, entretanto, em um problema com multi-fronteiras com as posições das interfaces não conhecidas. Obter uma solução com uma abordagem de tal tipo só é viável em sistemas simples, de partícula única, e é ainda impraticável na grande maioria dos casos reais devido a estas dificuldades matemáticas.

A análise de escoamentos bifásicos, conseqüentemente, é realizada com abordagens diferentes, as quais recém vimos no curso. Resumindo, a construção de um modelo bifásico segue uma das três abordagens:

- 1- modelos de difusão (o modelo homogêneo é um exemplo), que assumem que as fases interagem continuamente,
- 2- modelos de fases separadas, utilizando um balanço das equações de conservação postuladas para um volume de controle, e
- 3- métodos de média, utilizando equações de balanço médias, como o é o modelo de dois fluidos.

Em todas estas abordagens, os detalhes da estrutura local instantânea do campo de escoamento deixam de existir. Ao invés das transferências locais instantâneas na interface, a interação coletiva das partículas de fluidos e a dinâmica das interfaces são modeladas com uma visão macroscópica da formulação bifásica. Conseqüentemente, é necessário entender os mecanismos fundamentais das transferências locais e só então obter uma descrição macroscópica destas transferências. Para um escoamento em fase dispersa, por exemplo, como o escoamento em bolhas, torna-se necessário determinar o tamanho médio da partícula, a lei de arrasto para um sistema multi-particulado, taxas de evaporação e condensação, se for o caso, etc. Entre os três métodos acima mencionados, o primeiro e o segundo são fortemente baseados em hipóteses, intuições físicas e uma assumida similaridade com escoamentos monofásicos. O terceiro método, por outro lado, é matematicamente rigoroso, mas requer uma extensa manipulação de equações.

Na primeira abordagem assume-se que cada ponto do escoamento é ocupado simultaneamente pelas duas fases. As propriedades de transporte e termodinâmica dependem daquelas de cada uma das fases e da concentração das fases. Se o escoamento não é considerado homogêneo (a simplificação maior), cada uma das fases move-se com a velocidade de seu próprio centro de massa, isto é, a interdifusão das fases ocorre. De novo, tenha em mente que um escoamento bifásico é formado por regiões monofásicas envolvidas por interfaces deformáveis. Assim, há uma dificuldade conceitual sobre a premissa de *continuum* desta primeira abordagem. O que acontece, geralmente, é que os termos de

transferência interfacial são fundidos em um termo único, em uma equação de balanço. Conseqüentemente, dificuldades surgem para interpretá-lo, ou mesmo subdividi-lo em termos que façam sentido físico ou que possam ser medidos.

Na segunda abordagem escreve-se as equações de balanço de massa, quantidade de movimento e energia para um volume de controle especificado. O processo pode ser feito para a mistura como um todo ou para cada uma das fases. Na maioria dos casos o escoamento é considerado como unidimensional. O modelo então visualiza o escoamento como duas fases separadas (daí o nome da abordagem) com uma interface imaginária entre elas. Transferências ocorrem através da interface. Este modelo pode ser adequado e suficientemente preciso para escoamentos que tendem a ocorrer com as fases relativamente separadas, tais como escoamentos estratificados e anulares. Em escoamentos dispersos ou intermitentes, como o em bolhas e o pistonado, não capta os efeitos de distribuição transversal das fases, que podem ser muito importantes.

A abordagem racional para obter uma formulação macroscópica do escoamento bifásico é fazer médias apropriadas, como as que aplicamos para obter o modelo de dois fluidos na terceira abordagem. A técnica mais importante e mais usada para obter as equações médio-temporais é a descrição Euleriana do escoamento bifásico. O motivo está no uso tradicional da descrição Euleriana na termo-fluidodinâmica e na sua relação direta com a experimentação e instrumentação. Exceto em casos onde a distribuição das fases na seção transversal do escoamento é muito não-uniforme, basta usar a formulação média na seção transversal do modelo de dois fluidos. Para a maioria dos casos práticos basta esta abordagem, apesar de que as informações em direções transversais do escoamento são perdidas. As transferências de quantidade de movimento e energia entre a parede e o fluido devem ser especificadas por correlações empíricas ou por modelos simplificados. Finalmente, cabe dizer que, geralmente, a média de um produto de variáveis é diferente do produto dos valores médios. A diferença é definida como covariância e tem um papel importante na formulação média das equações. Na formulação média na área, há o importante efeito das distribuições da fração de vazio e da velocidade sobre a velocidade relativa, que deve ser considerado.

Até recentemente, os vários modelos de mistura têm sido os mais usados, dadas a simplicidade das equações de campo e a base de dados das relações constitutivas. Neste universo, os modelos de mistura mais avançados, como o modelo de deslizamento (*drift-flux model*), são as ferramentas mais confiáveis e precisas para tratar os problemas corriqueiros em escoamento bifásico.

Não basta, entretanto, estabelecer o campo macroscópico de um escoamento bifásico. É também necessário estabelecer relações constitutivas usando a formulação do *continuum* para que se obtenha o “fechamento” do modelo. De fato, a maior dificuldade é estabelecer as relações constitutivas. Muitas vezes poucos dados existem para se estender uma correlação existente para uma nova situação ou para desenvolver novas correlações. Isto implica que prever o escoamento bifásico em situações novas ou hipotéticas é sempre muito difícil. É deste tema que tratam os itens seguintes deste capítulo.

Equações Constitutivas para a Velocidade de Deslizamento

A solução do modelo de deslizamento, como o formulamos, requer o conhecimento da velocidade de deslizamento local, V_{GJ} , ou de seu valor médio na área, $\langle\langle V_{GJ} \rangle\rangle$. Em algumas situações o valor médio pode ser determinado experimentalmente, mas equações constitutivas são necessárias quando se deseja generalizar a aplicação do modelo a fluidos e geometria diversos. Pode-se chegar a expressões para a velocidade de deslizamento partindo-se da formulação de campo das equações de conservação e usando informações experimentais adequadas. As equações constitutivas aqui obtidas aplicam-se a diversos padrões de escoamento em sistemas particulados, apesar de apresentarmos, algumas vezes, somente as correlações aplicáveis a sistemas gás-líquido, para concentrar nosso interesse.

Escoamento disperso em meio infinito

Por escoamento disperso entenda-se o escoamento bifásico onde uma das fases está dispersa na outra, esta denominada de fase contínua. É o caso do escoamento em bolhas, com o gás disperso na fase líquida, ou escoamento em gotas, quando o inverso ocorre. Vamos analisar, inicialmente, o movimento relativo entre as fases considerando um meio contínuo infinito, onde a influência das fronteiras, ou paredes, não existe. Em suma, a distribuição das propriedades das fases, das variáveis do escoamento e da concentração das fases é uniforme na seção transversal.

Seja então um escoamento bifásico disperso em regime permanente. Admita que não haja transferência de massa ($\Gamma_k = 0$), que os efeitos de tensão superficial sejam desprezíveis frente às outras forças interfaciais e que a pressão e tensões na interface sejam iguais à pressão e tensão no seio do fluido.

A Eq. de Cons. da Massa é escrita:

$$\frac{\partial}{\partial t}(\alpha_k \rho_{k\alpha}) + \vec{\nabla} \cdot (\alpha_k \rho_{k\alpha} \vec{V}_{kp}) - \Gamma_k = 0$$

Considerando as simplificações, o primeiro termo, transiente, é nulo, assim como o terceiro, a transferência de massa na interface. Então,

$$\vec{\nabla} \cdot (\alpha_k \rho_{k\alpha} \vec{V}_{kp}) = 0$$

A Equação de Conservação da Quantidade de Movimento para o escoamento permanente escreve-se

$$\begin{aligned} \vec{\nabla} \cdot (\alpha_k \rho_{k\alpha} \vec{V}_{kp} \vec{V}_{kp}) = & -\alpha_k \vec{\nabla} p_{k\alpha} + \alpha_k \vec{\nabla} \cdot (\vec{\tau}_{k\alpha} + \vec{\tau}'_{k\alpha}) + \alpha_k \rho_{k\alpha} \vec{g} + (p_{ki} - p_{k\alpha}) \vec{\nabla} \alpha_k + \\ & - \nabla \alpha_k \cdot (\vec{\tau}_{ki} - (\vec{\tau}_{k\alpha} + \vec{\tau}'_{k\alpha})) + (\vec{V}_{ki} - \vec{V}_k) \Gamma_k + \vec{M}_k \end{aligned}$$

Usando a Eq. de Cons. da Massa, e as simplificações mencionadas, a Equação de Cons. da Quantidade de Movimento se reduz a:

$$\alpha_k \rho_{k\alpha} \vec{V}_{k\rho} \cdot \vec{\nabla} \vec{V}_{k\rho} = -\alpha_k \vec{\nabla} p_{k\alpha} + \alpha_k \vec{\nabla} \cdot (\tilde{\tau}_{k\alpha} + \tilde{\tau}'_{k\alpha}) + \alpha_k \rho_{k\alpha} \vec{g} + \vec{M}_k$$

A condição de transferência interfacial requer ainda que

$$\sum_k \vec{M}_k = 0$$

Vamos agora derivar uma equação para a velocidade de deslizamento a partir do modelo de dois fluidos. Considere que o escoamento disperso ocorra em um meio infinito, com ausência de fronteira. Nestas condições, o escoamento disperso se reduz a um escoamento unidimensional dominado pela gravidade, já que os perfis de velocidade e fração de vazio serão uniformes, fazendo com que as acelerações convectivas e as tensões viscosa e turbulenta turbulentas, $\tilde{\tau}_{k\alpha}$ e $\tilde{\tau}'_{k\alpha}$, se anulem. Restam tão somente as componentes axiais das forças gravitacional e interfacial e o gradiente de pressão. A equação é escrita em nomenclatura simplificada (as médias ponderadas foram escritas, por exemplo, ρ_k e não como $\rho_{k\alpha}$):

$$0 = -\alpha_k \frac{dp_m}{dz} - \alpha_k \rho_k g + \vec{M}_{kz} \quad (*)$$

Ainda, a pressão nas fases ($1 \equiv$ líquido, $2 \equiv$ gás) é

$$p_{1\alpha} = p_{2\alpha} = p = p_m$$

Somando termo a termo a equação resultante para cada uma das fases, e considerando a condição de transferência interfacial, tem-se

$$\frac{dp_m}{dz} = -\rho_M g \quad (**)$$

A força atuante sobre uma partícula da fase dispersa no escoamento (uma bolha de gás ou uma gota de líquido, por exemplo), F_D , ser dada como uma proporção da força associada ao fluxo de quantidade de movimento, $(1/2)\rho V_r |V_r| A_d$. O coeficiente de proporcionalidade é o chamado coeficiente de arrasto, C_D :

$$F_D = -\frac{1}{2} C_D \rho_c V_r |V_r| A_d \quad (***)$$

Nesta equação V_r é a velocidade relativa da fase dispersa, ρ_c é a densidade da fase contínua e A_d é a área projetada da partícula que forma a fase dispersa na direção perpendicular ao escoamento. Note que estamos fazendo uma mudança de nomenclatura para generalizar a

aplicação do modelo de dois fluidos. Ao invés de $k = 1$, $k = 2$, representando líquido e gás, respectivamente, ou $k = l$, $k = g$, vamos nomear as fases de “fase dispersa” e “fase contínua”, com os subscritos d e c . A razão é simples: o modelo de dois fluidos e as equações constitutivas que aqui deduziremos são válidos para sistemas particulados de maneira em geral. Partículas sólidas dispersas em líquidos ou gases, partículas líquidas dispersas em gás (o escoamento em gotas) e partículas gasosas dispersas em líquido (o escoamento em bolhas). Assim, os subscritos c e d podem se referir a gás, líquido ou sólido.

Convém observar que, na equação de conservação da quantidade de movimento cada termo é uma força por unidade de volume (o volume material que contém as duas fases em escoamento). A força de arrasto F_D , por outro lado, é relativa à área projetada da partícula. Consequentemente, para expressar a força interfacial M_{kz} em termos da força de arrasto deve-se fazer

$$\frac{\alpha_d F_D}{v_d} = -\frac{1}{2} \left(\alpha_d \frac{A_d}{v_d} \right) C_D \rho_c V_r |V_r| \quad (****)$$

Assim, para um escoamento em fase dispersa, alguns fatores de escala importantes podem ser definidos:

Raio médio de Sater:

$$r_{SM} \equiv \frac{3v_d}{A_i}$$

sendo A_i a área superficial de uma partícula.

Raio de arrasto:

$$r_D \equiv \frac{3v_d}{4A_d}$$

Raio equivalente:

$$r_v \equiv \left(\frac{3v_d}{4\pi} \right)^{1/3}$$

Raio superficial:

$$r_s \equiv \left(\frac{A_i}{4\pi} \right)^{1/2}$$

Se a partícula é esférica, todas as definições de raio dadas acima são equivalentes. O número de densidade de uma fase dispersa em escoamento, N_d , é dado por

$$N_d = \frac{\alpha_d}{v_d}$$

e a densidade interfacial de área (interfacial área density) por

$$a_i = N_d A_i$$

Usando as definições acima, a densidade interfacial de área pode ser expressa em diferentes formas. Por exemplo:

$$a_i = \frac{3\alpha_d}{r_{SM}} = \frac{3\alpha_d}{r_v} \left(\frac{r_s}{r_v} \right)^2 = \frac{3\alpha_d}{r_v} \left(\frac{r_D}{r_{SM}} \right)$$

Voltando à formulação de uma equação constitutiva que expresse o movimento relativo entre as fases em um escoamento disperso, as equações assinaladas com (*), (**), (***) e (****), podem ser combinadas para se chegar a (note que o raio de arrasto, r_D , é usado como escala linear)

$$V_r |V_r| = \frac{8}{3} \frac{r_D}{C_D \rho_c} (\rho_c - \rho_d) g (1 - \alpha_d)$$

A equação recém formulada, obtida de uma formulação genérica do modelo de dois fluidos aplicado a um sistema multiparticulado disperso ocorrendo em meio infinito, representa o movimento relativo entre as fases. Se desejarmos expressar o movimento relativo entre as fases para o modelo de deslizamento, basta fazer $V_{dj} = (1 - \alpha_d)V_r$. Entretanto, é necessário ainda conhecer a dependência do coeficiente de arrasto com a velocidade relativa para resolver as duas expressões. Para tanto, vejamos como ocorre o escoamento de uma partícula isolada em um meio infinito, que pode nos dar informação sobre a dependência do coeficiente de arrasto com o número de Reynolds nesta situação específica.

Velocidade Relativa de Partícula Isolada em Meio Infinito

O deslocamento de uma partícula isolada, seja ela um sólido, uma gota ou uma bolha, através de um meio fluido infinito, foi estudado exhaustivamente no passado (por exemplo, Peebles and Garber, Studies on the Motion of Gas Bubbles in Liquid, Chem. Eng. Prog., 49, 88 (1953); Harmathy, Velocity of Large Drops and Bubbles in Media of Infinite and Restricted Extent, AIChE J. 6, 281 (1960); Wallis, The Terminal Speed of Single Drops or Bubbles in an Infinite Medium, Int. J. Mult. Flow 1, 491 (1974)). Os resultados obtidos estão sumarizados na seqüência, pois serão usados em nossa análise de similaridade com sistemas multiparticulados.

Seja $V_{r\infty}$ a velocidade relativa de uma partícula isolada em um meio infinito, $V_{r\infty} = V_d - V_{c\infty}$. O coeficiente de arrasto $C_{D\infty}$ é definido então como

$$C_{D\infty} = \frac{-2F_D}{\rho_c \pi r_d^2 V_{r\infty} |V_{r\infty}|}$$

Por outro lado, a soma das forças de pressão e de corpo agindo na partícula é dada por

$$F_p + F_g = \frac{4}{3} \pi r_d^3 (\rho_c - \rho_d) g$$

e deve ser balanceada pela força de arrasto se o escoamento é permanente.

Conseqüentemente, $F_p + F_g + F_D = 0$. Introduzindo os parâmetros adimensionais para a velocidade e o raio,

$$V^* \equiv \left| V \left(\rho_c^2 / \mu_c g \Delta \rho \right)^{1/3} \right|, \quad r_d^* \equiv r_d \left(\rho_c g \Delta \rho / \mu_c^2 \right)^{1/3}$$

a solução do balanço de forças pode ser escrita como

$$r_d^* = \frac{3}{8} C_D V_{r\infty}^{*2}$$

O número de Reynolds e o número de viscosidade são definidos por

$$Re_\infty \equiv \frac{2 r_d \rho_c |V_{r\infty}|}{\mu_c} = 2 r_d^* V_{r\infty}^*$$

$$N_\mu \equiv \frac{\mu_c}{\left(\rho_c \sigma \sqrt{\frac{\sigma}{g \Delta \rho}} \right)^{1/2}}$$

onde N_μ é uma medida da força viscosa em relação à força de tensão superficial.

Estudos indicam que, em geral, o coeficiente de arrasto é uma função do número de Reynolds. Entretanto, a forma funcional exata depende se a partícula é sólida, uma gota ou uma bolha.

Para o padrão viscoso, a função $C_{D\infty}$ é dada por

$$C_{D\infty} = \frac{24}{Re_\infty} \left(1 + 0,1 Re_\infty^{0,75} \right)$$

Para partículas sólidas, o coeficiente de arrasto é constante e igual a $C_{D\infty} = 0,45$ para $Re \geq 1000$. Este padrão ocorre até $Re_\infty = 2 \times 10^5$.

Para partículas fluidas, como gotas ou bolhas, o padrão de escoamento é caracterizado pela distorção da forma das partículas e por movimentos irregulares. No padrão de partícula distorcida os dados experimentais mostram que a velocidade terminal é independente do tamanho. Baseado nisso conclui-se que o coeficiente de arrasto $C_{D\infty}$ não depende da viscosidade, mas deve ser proporcional ao raio da partícula. Fisicamente isto indica que a força de arrasto é governada pela distorção da forma e pelo movimento de zig-zag da partícula, e que a alteração da forma da partícula é no sentido de aumentar a área de seção transversal. Consequentemente, a escala para $C_{D\infty}$ deve ser o raio da partícula, e não o número de Reynolds. Logo,

$$C_{D\infty} = \frac{4}{3} r_d \sqrt{g \Delta \rho / \sigma} \quad , \quad \text{ou} \quad C_{D\infty} = \frac{4}{3} N_\mu^{2/3} r_d^*$$

para

$$N_\mu \geq 36\sqrt{2} \frac{(1 + 0,1 \text{Re}_\infty^{0,75})}{\text{Re}_\infty^2}$$

Entretanto, desde que a velocidade terminal neste padrão pode ser unicamente relacionada a propriedades físicas, a equação anterior pode ser reescrita em termos da velocidade terminal ou do número de Reynolds como

$$C_{D\infty} = \frac{2\sqrt{2}}{3} N_\mu r_d^* V_{r\infty}^* \quad , \quad \text{ou} \quad C_{D\infty} = \frac{\sqrt{2}}{3} N_\mu \text{Re}_\infty$$

À medida em que as bolhas crescem mais, elas se tornam “*spherical-cap bubbles*”, isto é, bolhas com nariz esférico. O coeficiente de arrasto tem então um valor constante e igual a $C_{D\infty} = 8/3$. A transição do padrão de partícula distorcida para o padrão de bolhas com nariz esférico ocorre em torno de $r_d^* = 2 / N_\mu^{2/3}$. No caso de uma gota, eventualmente ela pode crescer e desintegrar-se em gotas menores. Este limite é dado pelo bem conhecido critério do número de Weber, $r_d^* \leq 3 / N_\mu^{2/3}$ e $C_{D\infty} \leq 4$.

Desde que a lei de arrasto, $C_{D\infty} = C_{D\infty}(\text{Re}_\infty)$, é conhecida para todos os padrões de escoamento, pode-se agora calcular a velocidade terminal da equação que resulta do balanço de forças.

No padrão de Stokes a velocidade terminal da partícula isolada em meio infinito é

$$V_{r\infty}^* \cong \frac{4,86}{r_d^*} \left[\left(1 + 0,08 r_d^{*3} \right)^{4/7} - 1 \right]$$

No padrão de Newton para partículas sólidas o coeficiente de arrasto é constante e assim

$$V_{r\infty}^* \cong 2,43 r_d^{*1/2}$$

que vale para $r_d^* \geq 34,65$.

No padrão de partícula distorcida a velocidade terminal tem um valor constante, e é independente do tamanho da partícula

$$V_{r\infty}^* = \sqrt{2} / N_{\mu}^{1/3}$$

Finalmente, no padrão de bolha de nariz esférico a velocidade terminal é

$$V_{r\infty}^* = r_d^{*1/2}$$

Leis de Arrasto para Sistema Multiparticulado

A idéia básica para estabelecer as leis de arrasto para um sistema multiparticulado é a similaridade com as leis respectivas que são válidas em sistemas de partículas isoladas em meio infinito. A correlação para o coeficiente de arrasto em um sistema de partícula única depende não somente do padrão de escoamento mas também da natureza da partícula, se sólida (particulado sólido), líquida (gota) ou gás (bolha). Conseqüentemente, em sistemas de múltiplas partículas, esta diferença tem um papel importante na fixação de um coeficiente de arrasto. Neste item do trabalho as correlações de arrasto em sistemas multiparticulados serão apresentadas considerando os seguintes padrões de escoamento:

- | | |
|----------------------------------|--|
| Sistemas de partículas sólidas – | - padrão de escoamento viscoso
- padrão de escoamento de Newton |
| Sistema de partículas fluidas | - escoamento viscoso (partículas não-distorcidas)
- padrão de escoamento de partículas distorcidas
- padrão de escoamento agitante-turbulento
- padrão de escoamento intermitente |

No padrão de escoamento viscoso (Stokes), eventuais distorções da partícula são desprezíveis. Conseqüentemente, neste padrão de escoamento os sistemas particulados fluido e sólido seguem a mesma análise. Os outros padrões de escoamento são analisados separadamente pela diferença significativa do escoamento em torno das partículas e o movimento das interfaces.

Coeficiente de arrasto em sistemas multiparticulados				
	Fluido-partícula			Sólido-partícula
	Bolhas em líquido	Gotas em líquido	Gotas em gás	
Viscosity model	$\frac{\mu_m}{\mu_c} = \left(1 - \frac{\alpha_d}{\alpha_{dm}}\right)^{-2,5\alpha_{dm}\mu^*}$	$\mu^* \equiv \frac{\mu_d + 0,4\mu_c}{\mu_d + \mu_c}$		
Max.				

empacotamento	~ 1	~ 1	$0,62 \sim 1$	$\sim 0,62$
μ^*	0,4	$\sim 0,7$	1	1
μ_m/μ_c	$(1-\alpha_d)^{-1}$	$(1-\alpha_d)^{-1,75}$	$\sim (1-\alpha_d)^{-2,5}$	$\left(1-\frac{\alpha_d}{0,62}\right)^{-1,55}$
Stokes	$C_D = 24 / Re$, onde $Re = 2r_d\rho_c v_r/\mu_m$			
Newton				$C_D = 0,45x$ $x \left\{ \frac{1+17,67[f(\alpha_d)]^{6/7}}{18,67f(\alpha_d)} \right\}^2$
Partícula distorcida	$C_D = \frac{4}{3}r_d\sqrt{\frac{g\Delta\rho}{\sigma}} \left\{ \frac{1+17,67[f(\alpha_d)]^{6/7}}{18,67f(\alpha_d)} \right\}^2$			
	onde	onde	onde	onde
	$f(\alpha_d) = (1-\alpha_d)^{1,5}$	$= (1-\alpha_d)^{2,25}$	$= (1-\alpha_d)^3$	$f(\alpha_d) = \sqrt{1-\alpha_d} \left(\frac{\mu_c}{\mu_m} \right)$
Agitante-turbulento	$C_D = \frac{3}{8}(1-\alpha_d)^2$			
Escoamento pistonado	$C_D = 9,8(1-\alpha_d)^3$			

Algumas observações devem ser feitas quanto às correlações para o coeficiente de arrasto. No padrão de Stokes e no padrão de Newton há uma dependência do coeficiente de arrasto com uma certa viscosidade da mistura, μ_m . No padrão de Stokes ela surge no número de Reynolds, que é definido como

$$Re = \frac{2r_d\rho_c V_r}{\mu_m}$$

sendo a viscosidade da mistura

$$\frac{\mu_m}{\mu_c} = \left(1 - \frac{\alpha_d}{\alpha_{dm}}\right)^{-2,5\alpha_{dm}(\mu_d+0,4\mu_c)/(\mu_d+\mu_c)}$$

O uso de uma viscosidade de mistura é explicado como se segue: uma certa partícula movendo-se através de uma mistura bifásica impõe movimento à fase contínua. Entretanto, à medida em que este fluido se move, sua deformação causa movimentos de translação e de rotação nas partículas que estão na vizinhança. Desde que as partículas são mais resistentes

à deformação do que o fluido, elas impõem um sistema de forças que reage sobre o fluido. Como resultado de tensões adicionais, a partícula original sofre um aumento de resistência ao seu deslocamento, que parece ser induzida por um aumento da viscosidade. Conseqüentemente, em uma análise do movimento de partículas em suspensão, a viscosidade da mistura deve ser utilizada (esta justificativa deve-se a Novak Zuber, publicada em On the Dispersed Two-Phase Flow on the Laminar Flow Regime, Chem. Eng. Sci. 19, 897 (1964)).

A dependência do coeficiente de arrasto com o número de Reynolds, para o padrão de Stokes, está na Figura 1 para uma partícula isolada. Na Figura 2 a mesma dependência é mostrada, com a concentração das partículas como um parâmetro. Note que o coeficiente de arrasto aumenta com a concentração das partículas para um mesmo número de Reynolds.

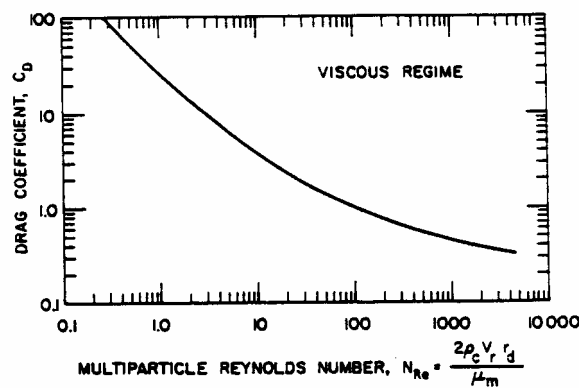


Figura 1. Dependência de C_D com o número de Reynolds para o padrão de Stokes em sistema multiparticulado

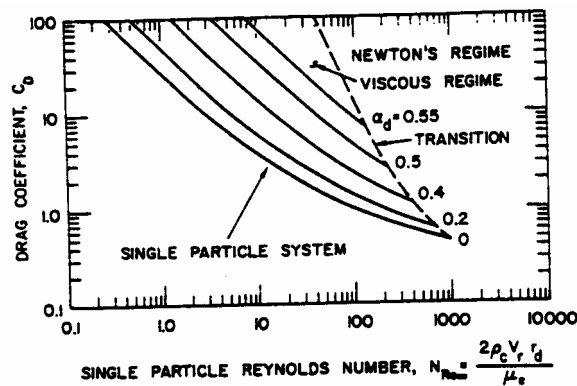


Figura 2. Dependência de C_D com o número de Reynolds de partícula isolada para o padrão de Stokes, tendo a concentração de partículas como parâmetro, e transição para o padrão de Newton.

As Figuras 3 e 4 mostram a dependência do coeficiente de arrasto com a concentração das partículas para os padrões de Newton e de partículas distorcidas. Observe que o coeficiente de arrasto, da mesma forma que no padrão de Stokes, aumenta com α_d . Nas Figuras 5 e 6 estão a dependência do coeficiente de arrasto com a concentração de partículas para os padrões “agitante-turbulento” e pistonado de um escoamento gás-líquido. Observe que o

comportamento é o oposto do que ocorre com os padrões de Stokes, de Newton e de partícula distorcida, pois o coeficiente de arrasto decresce com a concentração das partículas.

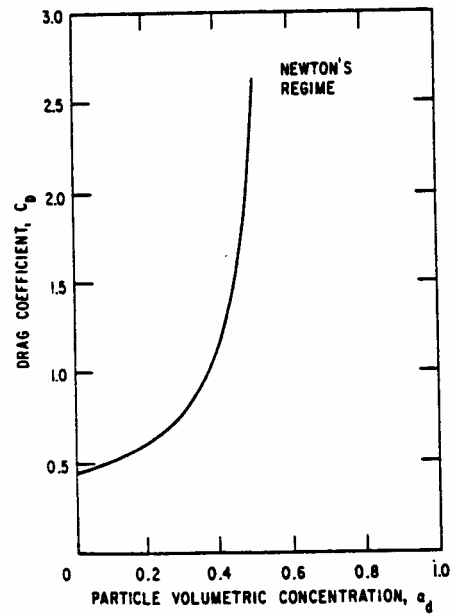


Figura 3. Dependência de C_D com a concentração de partículas para o padrão de Newton.

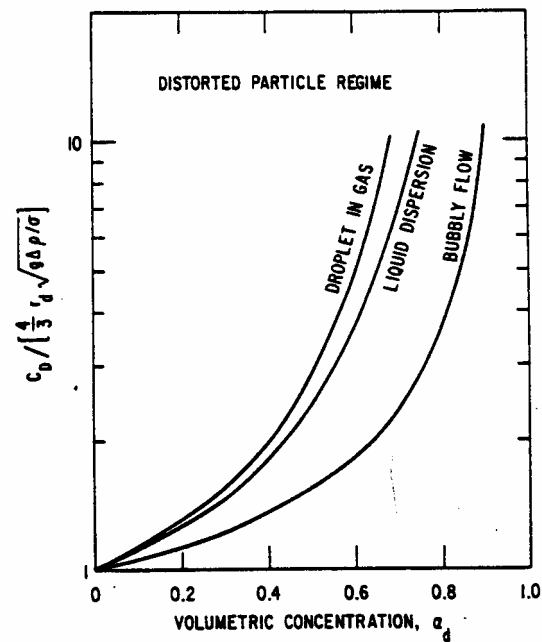


Figura 4. Dependência de C_D com a concentração de partículas para o padrão de partícula distorcida.

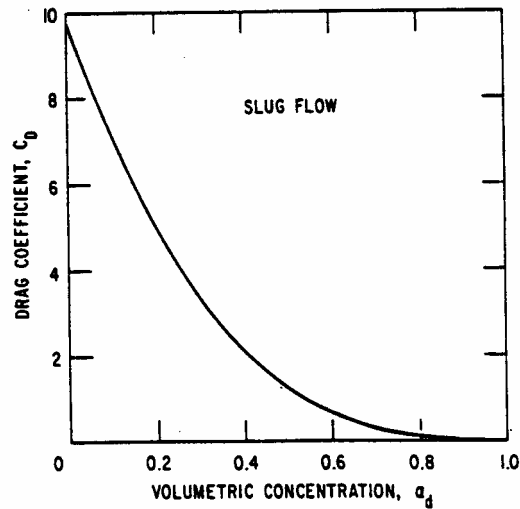


Figura 5. Dependência de C_D com a concentração de partículas para o padrão pistonado de um escoamento gás-líquido.

Nos padrões de escoamento pistonado (*slug flow*) e agitante-turbulento (*churn-turbulent*), a redução do coeficiente de arrasto com o aumento da concentração volumétrica deve ocorrer devido ao efeito de agregação de partículas pequenas pela esteira formada pelas partículas maiores. Este fenômeno permite o transporte de fase dispersa sem aumento na força de arrasto. À medida em que a concentração volumétrica aumenta, a interação entre partículas aumenta no sentido de reduzir a força de arrasto.

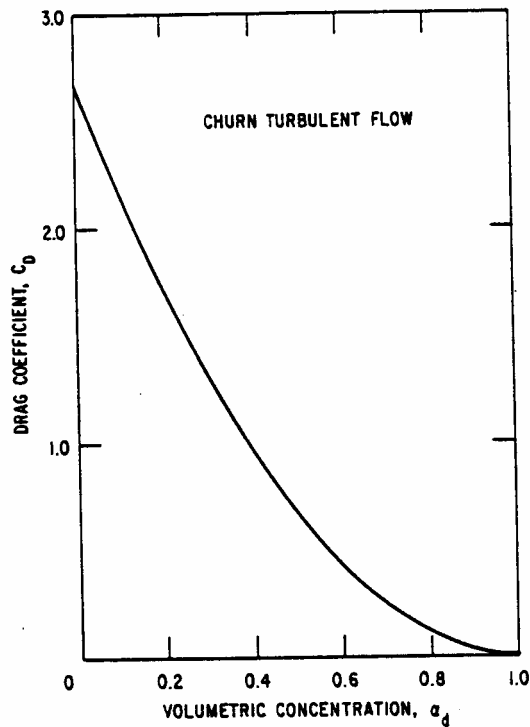


Figura 6. Dependência de C_D com a concentração de partículas para o padrão agitante-turbulento de um escoamento gás-líquido.

Velocidade Relativa em Sistema Multiparticulado

Até agora vimos que, para um sistema multiparticulado em escoamento unidimensional dominado pela gravidade, que

$$V_r |V_r| = \frac{8}{3} \frac{r_D}{C_D \rho_c} (\rho_c - \rho_d) g (1 - \alpha_d)$$

Vimos também que, para o caso do escoamento de uma bolha isolada, o balanço entre as forças peso, empuxo e arrasto produz a seguinte equação geral:

$$V_{r\infty} |V_{r\infty}| = \frac{8}{3} \frac{r_D}{C_{D\infty} \rho_c} (\rho_c - \rho_d) g$$

Para o caso de uma partícula isolada se deslocando através de um meio infinito vimos a formulação das leis de arrasto, $C_{D\infty} = C_D(Re_\infty)$, que se aplicam a cada um dos padrões de escoamento possíveis. E vimos também como são as leis de arrasto $C_D = C_D(Re)$. para um sistema multiparticulado, obtidas por similaridade com as mesmas leis válidas para sistemas de partículas isoladas. De posse destas relações, então, é possível obter a velocidade relativa V_r (ou a velocidade de deslizamento, V_{dj}) em termos da velocidade terminal da partícula isolada, $V_{r\infty}$. Dividindo as duas equações acima,

$$C_{D\infty}(Re_\infty) = C_D(Re) \left(\frac{V_r}{V_{r\infty}} \right)^2 \frac{1}{(1 - \alpha_d)}$$

onde os números de Reynolds são como já definimos anteriormente, $Re = 2r_d \rho_c V_r / \mu_m$, sendo μ_m a viscosidade de mistura, e $Re_\infty = 2r_d \rho_c V_{r\infty} / \mu_c$ sendo μ_c a viscosidade da fase contínua.

Vamos considerar agora os padrões de escoamento, e limitá-los aos que ocorrem em escoamentos dispersos de gás em líquido (as demais velocidades relativas para sistemas particulados aparecem na tabela seguinte) .

- padrão de escoamento laminar em bolhas (*laminar bubbly flow*), caracterizado por uma baixa fração de vazio e bolhas de pequeno diâmetro se deslocando linearmente através do líquido. As bolhas circundantes não interferem no escoamento da bolha vizinha. Este caso é uma analogia com o escoamento de Stokes. Assim,

$$C_D = \frac{24}{Re} (1 + 0,1 Re^{0,75})$$

e a razão entre as velocidades relativas é

$$\frac{V_r}{V_{r\infty}} \cong (1-\alpha_d)^{1/2} f(\alpha_d) \frac{1+0,1Re^{0,75}}{1+0,1Re^{0,75}[f(\alpha_d)]^{6/7}}$$

sendo

$$f(\alpha_d) = (1-\alpha_d)^{1/2} \frac{\mu_c}{\mu_m}$$

Lembrando que $V_{dj} = V_r (1-\alpha_d)$ e recorrendo às identidades seguintes

$$\psi(r_d^*) = 0,55 \left[(1+0,08r_d^{*3})^{4/7} - 1 \right]^{0,75}$$

$$r_d^* = r_d \left[\frac{\rho_c g \Delta \rho}{\mu_c^2} \right]^{1/3}, \quad V_{r\infty}^* = V_{r\infty} \left[\frac{\rho_c^2}{\mu_c g \Delta \rho} \right]^{1/3}$$

$$Re_{\infty} = 2r_d^* V_{r\infty}^*$$

chega-se à velocidade de deslizamento de um escoamento “laminar em bolhas”:

$$V_{dj} \cong V_{r\infty} (1-\alpha_d)^{1/2} f(\alpha_d) \frac{1+\psi(r_d^*)}{1+\psi(r_d^*)[f(\alpha_d)]^{6/7}}$$

onde a velocidade terminal pode ser calculada, aproximadamente, de

$$V_{r\infty}^* \cong \frac{4,86}{r_d^*} \left[(1+0,08r_d^{*3})^{4/7} - 1 \right]$$

A equação para V_{dj} no padrão laminar em bolhas é válida para

$$N_{\mu} \leq 0,11 \frac{1+\psi(r_d^*)}{\psi(r_d^*)^{8/3}}$$

- padrão de partícula distorcida, quando a bolha tem distorção de esfericidade, resultante da ação não-uniforme do campo de tensões na interface. A bolha se move em “zig-zag”. No escoamento da partícula isolada neste padrão o coeficiente de arrasto é independente do número de Reynolds, sendo função somente das propriedades do fluido e dimensão da partícula. Assim, se

$$C_{D\infty} = \left(\frac{4}{3}\right) r_d (g\Delta\rho / \sigma)^{1/2}$$

a velocidade de deslizamento será

$$V_{dj} \cong V_{r\infty} (1-\alpha)^{1,75}$$

com a velocidade terminal calculada de

$$V_{r\infty} = \sqrt{2} \left(g\sigma\Delta\rho / \rho_c^2 \right)^{0,25}$$

O padrão de partícula distorcida é válido para

$$N_\mu \geq 0,11 \frac{(1+\psi)}{\psi^{8/3}}$$

- o padrão de escoamento “turbulento-agitante” em bolhas se caracteriza por uma influência crescente do movimento de uma bolha sobre o fluido e sobre as outras partículas circundantes. Há agregação de bolhas na esteira de outras e processos de coalescência e desintegração motivados pela turbulência. Com base nesta observação, pode-se postular que no padrão de escoamento “turbulento-agitante” em bolhas o movimento relativo não se dá entre a fase dispersa (bolhas) e a fase contínua (líquido), e sim entre a fase dispersa e a mistura (gás+líquido). A força de arrasto deve então ser reescrita como

$$F_D = -C_D \left(\frac{1}{2} \right) \rho_c V_{dj} |V_{dj}| \pi r_d^2$$

sendo $C_D = 8/3$. A velocidade de deslizamento é, então,

$$V_{dj} = \sqrt{2} \left(g\sigma\Delta\rho / \rho_c^2 \right)^{1/4}$$

O limite de ocorrência do padrão agitante-turbulento em bolhas é dado pelo critério de Weber baseado na velocidade de deslizamento,

$$2\rho_c V_{dj}^2 r_d / \sigma \geq 8$$

Escoamento disperso em meio finito

Considere agora um escoamento disperso em um meio de fronteira restrita. A Equação de Conservação da Quantidade de Movimento para um meio restrito havia sido escrita como

$$\alpha_k \rho_{k\alpha} \vec{V}_{k\rho} \cdot \vec{\nabla} \vec{V}_{k\rho} = -\alpha_k \vec{\nabla} p_{k\alpha} + \alpha_k \vec{\nabla} \cdot (\vec{\tau}_{k\alpha} + \vec{\tau}'_{k\alpha}) + \alpha_k \rho_{k\alpha} \vec{g} + \vec{M}_k$$

Sua componente axial é

$$0 = -\alpha_k \frac{dp_m}{dz} - \alpha_k M_{\tau_z} - \alpha_k \rho_{k\alpha} g_z + M_{k_z}$$

Quando a força interfacial é eliminada das equações de cada uma das fases (o mesmo procedimento que já utilizamos anteriormente), a Equação de Conservação da Quantidade de Movimento para a mistura é escrita

$$\frac{dp_m}{dz} = -M_{\tau_{m_z}} - \rho_m g_z$$

sendo

$$M_{\tau_{m_z}} = \alpha_d M_{\tau_{dz}} + (1 - \alpha_d) M_{\tau_{cz}}$$

A equação para M_{dz} é, conseqüentemente, escrita

$$M_{dz} = -\alpha_d [M_{\tau_{cz}} (1 - \alpha_d) - M_{\tau_{dz}} (1 - \alpha_d)] - g_z \alpha_d [(1 - \alpha_d) \rho_c - (1 - \alpha_d) \rho_d]$$

Em escoamentos gás-líquido, $M_{\tau_d} \gg M_{\tau_c}$, assim como $\rho_d \ll \rho_c$. Simplificando, a equação se restringirá aos termos referentes ao meio contínua, o líquido:

$$M_{dz} = -M_{\tau_{cz}} \alpha_d (1 - \alpha_d) - g_z \alpha_d (1 - \alpha_d) \rho_c$$

Tendo a força interfacial acima e a expressão geral para a força de arrasto, a velocidade relativa pode ser calculada:

$$V_r |V_r| = \frac{8}{3} \frac{r_d}{C_D \rho_c} \left[(\rho_c - \rho_d) g_z (1 - \alpha_d) + (1 - \alpha_d) M_{\tau_{cz}} \right]$$

Finalmente podemos escrever, repetindo procedimento de item anterior:

$$C_{D\infty} = C_D \left(\frac{V_r}{V_{r\infty}} \right)^2 \frac{1}{(1 - \alpha_d) \left[1 + \left(\frac{M_{\tau_{cz}}}{(\rho_c - \rho_d) g_z} \right) \right]}$$

Podemos agora obter expressões para os vários possíveis padrões de escoamento disperso usando o mesmo princípio de similaridade da lei de arrasto entre os sistemas de partícula única e multiparticulado. Vamos nos restringir aos padrões de sistemas gás-líquido, objeto

maior do curso. Observe, entretanto que temos uma incógnita a mais nas relações, a força associada às tensões viscosa e cisalhante. Há que se ter uma relação constitutiva para ela.

- escoamento no padrão laminar em bolhas:

$$V_{dj} \equiv V_{r\infty} (1-\alpha_d)^2 \left\{ 1 + \left[M_{\tau_{cz}} / (\rho_c - \rho_d) g_z \right] \right\} \frac{\mu_c}{\mu_m} \frac{1 + \psi(r_d^*)}{1 + \psi(r_d^*) [f(\alpha_d)]^{6/7}}$$

onde

$$f(\alpha_d) = \left[(1-\alpha_d) \left(1 + \left(M_{\tau_{cz}} / (\rho_c - \rho_d) g_z \right) \right) \right]^{1/2} \frac{\mu_c}{\mu_m}$$

- escoamento no padrão de bolhas distorcidas:

$$V_{dj} \equiv V_{r\infty} (1-\alpha_d)^2 \left\{ 1 + \left[M_{\tau_{cz}} / (\rho_c - \rho_d) g_z \right] \right\} \frac{\mu_c}{\mu_m} \frac{18,67}{1 + 17,67 [f(\alpha_d)]^{6/7}}$$

- escoamento no padrão de “agitante-turbulento” em bolhas:

$$V_{dj} \equiv \sqrt{2} \left(\frac{g \sigma \Delta \rho}{\rho_c^2} \right)^{0,25} \left\{ (1-\alpha_d) \left\{ 1 + \left[M_{\tau_{cz}} / (\rho_c - \rho_d) g_z \right] \right\} \right\}^{0,25}$$

Fica evidente então que, quando os efeitos resultantes da presença de fronteira no escoamento devem ser considerados, a solução para a velocidade de deslizamento depende de uma equação constitutiva para as forças resultantes da ação das tensões viscosa e turbulenta. Em um escoamento laminar em um tubo, por exemplo, a tensão viscosa poderia ser calculada a partir do gradiente radial da velocidade do escoamento junto à parede da tubulação. Em um escoamento turbulento, entretanto, há a necessidade de calcular as tensões turbulentas.

Escoamento anular

Como já vimos, a Equação de Conservação da Quantidade de Movimento de um escoamento multifásico pode ser escrita como

$$\alpha_k \rho_k \frac{D}{Dt} (\vec{V}_k) = -\alpha_k \vec{\nabla} p_k + \vec{\nabla} \cdot \left[\alpha_k (\vec{\tau}_k^*) \right] + \alpha_k \rho_k \vec{g}_k - \\ - (\vec{V}_k - \vec{V}_{ki}) \Gamma_k + (p_{ki} - p_k) \vec{N} \alpha_k + \vec{M}_{ki}^{(d)} + \vec{M}_{ki}^{(nd)} - \vec{\nabla} \alpha_k \cdot \vec{\tau}_{ki}$$

Nesta equação o subscrito $_k$ indica a fase e $_{ki}$ indica o valor da variável da fase junto à interface. Partindo desta equação genérica, a idéia é obter a equação unidimensional

aplicável a um escoamento anular vertical, para então, usando o mesmo procedimento recém-visto, obter equações constitutivas para a velocidade de deslizamento.

O escoamento anular é intrinsecamente transiente, como qualquer outro escoamento bifásico. Entretanto, os processos de transferência podem ser considerados estacionários se um tempo de observação suficientemente longo for adotado como referência. Ademais, se este escoamento anular for tratado como axi-simétrico e desenvolvido, se a separação de fases é total (isto é, não há dispersão de qualquer das fases na outra), e se não há mudança de fase, a equação simplifica-se para:

$$-\alpha_k \bar{\nabla} p_k + \bar{\nabla} \cdot [\alpha_k (\tilde{\tau}_k^*)] + \alpha_k \rho_k \bar{g}_k + \\ + (p_{ki} - p_k) \bar{\nabla} \alpha_k + \bar{M}_{ki}^{(d)} + \bar{M}_{ki}^{(nd)} - \bar{\nabla} \alpha_k \cdot \tilde{\tau}_{ki} = 0$$

A soma do terceiro e quarto termo na equação acima, $[(p_{ki} - p_k) \bar{\nabla} \alpha_k + \bar{M}_{ki}^{(d)}]$ é o que Ishii denomina **força de arrasto generalizada** ("generalized particle drag"), dominante nos escoamentos bifásicos do tipo disperso, mas pouco significativa nos escoamentos separados, como o escoamento anular. No escoamento anular real, estará presente na interação do gás com gotas de líquido dispersas no fluxo central, ou eventuais bolhas de gás dispersas no filme de líquido. Compõem a força $\bar{M}_{ki}^{(nd)}$, entre outras, a sustentação lateral e a força de massa virtual. A sustentação lateral atuará nas gotas dispersas do núcleo gasoso e contribui para o estabelecimento da distribuição lateral da fase dispersa. A força de massa virtual, como vimos, resulta de variação da velocidade relativa, isto é, é a força requerida para acelerar a **massa virtual** da fase circundante. Nos escoamentos anulares do tipo **anular rugoso** ("rough annular flow"), o padrão da interface está estabelecido e não há alterações significativas na velocidade relativa.

O último termo na equação acima, $\bar{\nabla} \alpha_k \cdot \tilde{\tau}_{ki}$, particularmente importante nos escoamentos separados, resulta do cisalhamento interfacial e do gradiente da fração de residência.

Assim, em um escoamento anular permanente e desenvolvido, o balanço das forças significativas atuantes seria representado por

$$-\alpha_k \bar{\nabla} p_k + \bar{\nabla} \cdot [\alpha_k (\tilde{\tau}_k^*)] + \alpha_k \rho_k \bar{g}_k - \bar{\nabla} \alpha_k \cdot \tilde{\tau}_{ki} = 0$$

Discriminando as fases resulta

$$-\alpha \vec{\nabla} p_g + \vec{\nabla} \cdot \left[\alpha \left(\vec{\tau}_g^* \right) \right] + \alpha \rho_g \vec{g} - \vec{\nabla} \alpha \cdot \vec{\tau}_{gi} = 0$$

$$-(1-\alpha) \vec{\nabla} p_l + \vec{\nabla} \cdot \left[(1-\alpha) \vec{\tau}_l^* \right] + (1-\alpha) \rho_l \vec{g} - \vec{\nabla} (1-\alpha) \cdot \vec{\tau}_{li} = 0$$

onde $\alpha = \alpha_g$ e $(1-\alpha) = \alpha_l$.

A forma unidimensional destas equações é obtida integrando-as na seção transversal ao escoamento. Para o gás, resulta um balanço entre as forças resultantes da tensão interfacial, peso e gradiente de pressão. Para o líquido, acrescenta-se ao balanço a força que resulta da tensão cisalhante na fronteira sólida do escoamento, a parede da tubulação.

Adicionalmente, não consideraremos a ação da tensão superficial: a pressão será uniforme na seção transversal, $p_g = p_l = p_m$; e o balanço interfacial estabelecerá que a soma dos termos de cisalhamento interfacial para o gás e o líquido é nula. Assim,

$$-\alpha \frac{dp_m}{dz} - \alpha \rho_g g_z - \left\langle \vec{\nabla} \alpha \cdot \vec{\tau}_{gi} \right\rangle = 0$$

$$-(1-\alpha) \frac{dp_m}{dz} - \frac{\tau_{lw} \xi_w}{A_T} - (1-\alpha) \rho_l g_z - \left\langle \vec{\nabla} (1-\alpha) \cdot \vec{\tau}_{li} \right\rangle = 0$$

onde $p = p_l = p_g$, e $\left\langle \vec{\nabla} \alpha \cdot \vec{\tau}_{gi} \right\rangle = - \left\langle \vec{\nabla} (1-\alpha) \cdot \vec{\tau}_{li} \right\rangle$. τ_{lw} é a tensão cisalhante exercida no filme de líquido junto à parede, ξ_w é o perímetro e A_T é a área transversal da tubulação.

O termo de cisalhamento na interface deve ser objeto de análise cuidadosa. A integração na seção transversal deve ser precedida pelo estabelecimento dos perfis de τ_{ki} e α . Uma aproximação, válida para os escoamentos anulares rugosos ($\delta \ll R_w$, isto é, para um filme de líquido de espessura muito inferior ao raio da tubulação), é:

$$-\left\langle \vec{\nabla} \alpha \cdot \vec{\tau}_{gi} \right\rangle = -\frac{1}{A_T A} \int \left(\vec{\nabla} \alpha \cdot \vec{\tau}_{gi} \right) 2\pi R dr$$

$$-\left\langle \vec{\nabla} \alpha \cdot \vec{\tau}_{gi} \right\rangle = -\frac{1}{A_T} \lim_{\delta \rightarrow 0} \int_{\delta} \frac{\partial \alpha}{\partial r} (\tau_{gi}) 2\pi R dr$$

$$-\left\langle \vec{\nabla} \alpha \cdot \vec{\tau}_{gi} \right\rangle = -\frac{\zeta_i}{A_T} \tau_{gi}$$

Note que a integração de $(d\alpha/dr)$ é necessariamente unitária, pois α é uma distribuição de probabilidade, como já vimos, e $(d\alpha/dr)$, então, é uma densidade de probabilidade, cuja integral é unitária entre os limites de ocorrência. Evidentemente, tivemos que assumir que τ_{gi} , a tensão cisalhante média que atua na interface gás-líquido, fosse constante em r para tê-la fora da integral. Ainda, ξ_i é o perímetro da interface.

Notar que $\left(\frac{\partial\alpha}{\partial r}\tau_{gi}\right)$ é a força por unidade de volume que resulta da ação da tensão τ_{gi} (a componente axial do produto vetorial $\vec{\nabla}\alpha \cdot \vec{\tau}_{gi}$ é a soma $\frac{\partial\alpha}{\partial z}\tau_{zz} + \frac{\partial\alpha}{\partial r}\tau_{rz} + \frac{\partial\alpha}{\partial \theta}\tau_{\theta z}$, onde, no caso em questão, só o segundo termo não se anula, e a tensão τ_{rz} , que atua em um plano perpendicular a r , na direção z , é τ_{gi}).

Assim, os balanços de forças resultantes para o gás e o líquido são aqueles bem conhecidos, que resultam da formulação do Modelo de fases Separadas:

$$-\left(\frac{dp_m}{dz} - \rho_g g_z\right) = \frac{\xi_i}{\langle\alpha\rangle A_T} \tau_{gi}$$

$$-\left(\frac{dp_m}{dz} + \rho_l g_z\right) = \frac{\xi_w}{(1-\langle\alpha\rangle)A_T} \tau_{lw} - \frac{\xi_i}{(1-\langle\alpha\rangle)A_T} \tau_{gi}$$

Note que se os termos dos gradientes de pressão axial de cada fase forem igualados, a equação resultante conterá os termos de tensão interfacial e tensão cisalhante na parede, que poderão ser relacionados, respectivamente, com a velocidade relativa entre as fases (e então com a velocidade de deslizamento) e com a velocidade média do filme de líquido. Assim, expressando a tensão cisalhante na parede através de

$$\tau_w = \frac{1}{2} f_w \rho_l \langle\langle V_l \rangle\rangle^2 - \frac{1}{3} \Delta p g_z \delta$$

onde f_w é o fator de atrito. Nesta expressão o último termo à direita do sinal de igualdade é um fator de correção gravitacional. O fator de atrito pode ser calculado pelo modo convencional: se o escoamento for laminar, $f_w = 16/Re$; se o escoamento for turbulento, com a correlação de Blasius, $f_w = 0,079 Re^{-0,25}$. O número de Reynolds é calculado de $Re = \rho_l \langle j_f \rangle D / \mu_f$. De forma similar para o fator de atrito,

$$\tau_w = \frac{1}{2} f_i \rho_g \langle\langle V_r \rangle\rangle^2$$

onde V_r é a velocidade relativa média entre gás e líquido e f_i é o fator de atrito, obtido da seguinte correlação, válida para filme de líquido com interface rugosa: $f_i = 0,005[1+75(1-\langle\alpha\rangle)]$. Usando ainda as seguintes relações,

$$\varsigma = \frac{\xi_i}{\xi_w}, \quad \text{de onde} \quad \varsigma = \langle \alpha \rangle^{1/2}$$

$$\frac{4\delta}{D} = (1 - \langle \alpha \rangle), \quad \text{válida para} \quad \delta \ll D$$

e sabendo que

$$\overline{V}_{gj} = (1 - \langle \alpha \rangle) \overline{V}_r, \quad \text{e} \quad \overline{V}_r = \langle \langle V_g \rangle \rangle - \langle \langle V_g l \rangle \rangle$$

a expressão da velocidade de deslizamento do gás em um escoamento anular cujo filme de líquido escoar no regime laminar é:

$$\overline{V}_{gj} = \frac{16\langle \alpha \rangle}{\rho_g f_i \varsigma} \left[(\mu_l \langle j_l \rangle / D) + (\Delta \rho g_z D (1 - \langle \alpha \rangle)^3 / 48) \right]^{1/2}$$

Se o filme de líquido é turbulento, a velocidade de deslizamento é

$$\overline{V}_{gj} = \pm \left[\frac{\langle \alpha \rangle (1 - \langle \alpha \rangle)^3 D}{\rho_g f_i \varsigma} \left| \frac{0,005 \rho_l \langle j_l \rangle^2}{(1 - \langle \alpha \rangle)^3 D} + \frac{1}{3} \Delta \rho g_z \right| \right]^{1/2}$$