Pós-Graduação em Ciência de Dados

Professora Cecília Pereira de Andrade

e

Professor Ricardo Sovat

INSTITUTO FEDERAL DE EDUCAÇÃO, CIÊNCIA E TECNOLOGIA
SÃO PAULO
Campus Campinas

Funções de duas variáveis

Funções de duas variáveis

- A temperatura T em um ponto na superfície da Terra em dado instante de tempo depende da longitude x e da latitude y do ponto:

$$T = f\,(x,\ y).$$

- O volume V de um cilindro circular depende do seu raio r e de sua altura h:

$$V(r,\ h) = \pi\, r^2 h.$$

Funções de duas variáveis

Definição Uma função f de duas variáveis é uma regra que associa a cada par ordenado de números reais (x, y) de um conjunto D um único valor real, denotado por $f(x, y)$. O conjunto D é o **domínio** de f e sua **imagem** é o conjunto de valores possíveis de f, ou seja, $\{ f(x, y) | (x, y) \in D \}$.

- **Notação:** $z=f(x,y)$

Função de três ou mais variáveis

- Uma **função com três variáveis**, f, é uma regra que associa a cada tripla ordenada (x, y, z) em um domínio um único número real, denotado por $f(x, y, z)$.

- **Exemplo:** a temperatura T em um ponto da superfície terrestre depende da latitude x e da longitude y do ponto e do tempo t, de modo que podemos escrever $T = f(x, y, t)$.

Derivadas Parciais

- Exemplo: O Serviço Meteorológico do Canadá introduziu o *humidex* (ou índice de temperatura-umidade) para descrever os efeitos combinados da temperatura e umidade. O *humidex* I é a temperatura aparente do ar quando a temperatura real for T e a umidade relativa for H.

- Desse modo, I é uma função de T e H e podemos descrever $I = f(T, H)$.

Derivadas Parciais

- A tabela de valores de *I* a seguir é a parte de uma tabela compilada pelo Serviço Meteorológico.

Umidade relativa (%)

Temperatura real (°C) T \ H	40	45	50	55	60	65	70	75	80
26	28	28	29	31	31	32	33	34	35
28	31	32	33	34	35	36	37	38	39
30	34	35	36	37	38	40	41	42	43
32	37	38	39	41	42	43	45	46	47
34	41	42	43	45	47	48	49	51	52
36	43	45	47	48	50	51	53	54	56

Índice de calor *I* como uma função de temperatura e umidade

Derivadas Parciais

- Considere a coluna H = 60%. Então

$$g(T) = f(T, 60).$$

- A derivada de g quando T = 30 °C é a taxa de variação de I com relação a T quando T = 30 °C :

$$g'(30) = \lim_{h \to 0} \frac{g(30 + h) - g(30)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{f(30 + h, 60) - f(30, 60)}{h}$$

Derivadas Parciais

- Aproximando para *h* = 2 e –2:

$$g'(30) \approx \frac{g(32) - g(30)}{2} = \frac{f(32, 60) - f(30, 60)}{2} = \frac{42 - 38}{2} = 2$$

$$g'(30) \approx \frac{g(28) - g(30)}{-2} = \frac{f(28, 60) - f(30, 60)}{-2} = \frac{35 - 38}{-2} = 1{,}5$$

- Assim, $g\,'(30)$ é aproximadamente 1,75.

- Ou seja, quando t= 30 °C e H= 60%, a temperatura aparente (humidex) sobe cerca de 1,75 °C para cada grau que a temperatura real sobe.

Derivadas Parciais

- Olhemos agora para a linha sombreada da Tabela 1, que corresponde à temperatura fixa de T = 30 °C.

Umidade relativa (%)

T \ H	40	45	50	55	60	65	70	75	80
26	28	28	29	31	31	32	33	34	35
28	31	32	33	34	35	36	37	38	39
30	34	35	36	37	38	40	41	42	43
32	37	38	39	41	42	43	45	46	47
34	41	42	43	45	47	48	49	51	52
36	43	45	47	48	50	51	53	54	56

Temperatura real (°C)

Índice de calor I como uma função de temperatura e umidade

Derivadas Parciais

- *Então, G*(*H*) = *f* (30, *H*) .

- A derivada dessa função quando *H* = 60% é a taxa de variação de *I* com relação a *T* quando *H* = 60%:

$$G'(60) = \lim_{h \to 0} \frac{G(60 + h) - G(60)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{f(30, 60 + h) - f(30, 60)}{h}$$

Derivadas Parciais

- Tomando h = 5 e –5, aproximamos o valor $G'(60)$ usando os valores tabelados:

$$G'(60) \approx \frac{G(65) - G(60)}{5} = \frac{f(30, 65) - f(30, 60)}{5} = \frac{40 - 38}{5} = 0{,}4$$

$$G'(60) \approx \frac{G(55) - G(60)}{-5} = \frac{f(30, 55) - f(30, 60)}{-5} = \frac{37 - 38}{-5} = 0{,}2$$

- Obtemos a estimativa $G'(60) \approx 0{,}3$. Isso nos diz que, quando t = 30 °C e H = 60%, o humidex aumenta em cerca de 0,3 °C para cada ponto porcentual que a umidade relativa aumenta.

Derivadas Parciais

- Formalmente, se f é uma função de duas variáveis x e y, e seja $g(x) = f\,(x, b)$. Se g tem derivada em a, nós a chamaremos de **derivada parcial de f em relação a x em (a, b)** e o denotaremos por $f_x\,(a, b)$. Assim,

1 $$\boxed{f_x(a, b) = g'(a) \qquad \text{onde} \qquad g(x) = f(x, b)}$$

Derivadas Parciais

- Pela definição de derivada, temos

$$g'(a) = \lim_{h \to 0} \frac{g(a + h) - g(a)}{h}$$

- e assim a Equação 1 torna-se

$$\boxed{f_x(a, b) = \lim_{h \to 0} \frac{f(a + h, b) - f(a, b)}{h}}$$

Derivadas Parciais

- Usando um raciocínio análogo, a **derivada parcial de f em relação a y em (a, b)**, denotada por $f_y(a, b)$, é obtida mantendo-se x fixo ($x = a$) e determinando-se a derivada em b da função $G(y) = f(a, y)$:

3

$$f_y(a, b) = \lim_{h \to 0} \frac{f(a, b + h) - f(a, b)}{h}$$

Derivadas Parciais

- Com essa notação para derivadas parciais, podemos escrever as taxas de variação do humidex I com relação à temperatura real T e umidade relativa H quando T = 30 °C e H = 60% como segue:

$$f_T(30, 60) \approx 1{,}75 \qquad\qquad f_H(30, 60) \approx 0{,}3$$

Derivadas Parciais

- Se agora deixamos o ponto (a, b) variar nas Equações 2 e 3, f_x e f_y se tornam funções de duas variáveis.

4 Se f é uma função de duas variáveis, suas **derivadas parciais** são as funções f_x e f_y definidas por

$$f_x(x, y) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x + h, y) - f(x, y)}{h}$$

$$f_y(x, y) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x, y + h) - f(x, y)}{h}$$

Derivadas Parciais

- Notações:

Notações para as Derivadas Parciais Se $z = f(x, y)$, escrevemos

$$f_x(x, y) = f_x = \frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x} f(x, y) = \frac{\partial z}{\partial x} = f_1 = D_1 f = D_x f$$

$$f_y(x, y) = f_y = \frac{\partial f}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y} f(x, y) = \frac{\partial z}{\partial y} = f_2 = D_2 f = D_y f$$

Derivadas Parciais

- Lembrando que a derivada parcial com relação a x é apenas é a derivada *ordinária* da função g de uma única variável obtida mantendo-se fixo o valor de y. Então, temos a seguinte regra.

Regra para Determinar as Parciais Derivativas de $z = f(x, y)$

1. Para determinar f_x, trate y como uma constante e derive $f(x, y)$ com relação a x.
2. Para determinar f_y, trate x como uma constante e derive $f(x, y)$ com relação a y.

Derivadas Parciais

- Exemplo 1: Se $f(x, y) = x^3 + x^2y^3 - 2y^2$, encontre $f_x(2, 1)$ e $f_y(2, 1)$.

Solução: Mantendo y constante e derivando em relação a x, obtemos

$$f_x(x, y) = 3x^2 + 2xy^3$$

e, assim,

$$f_x(2, 1) = 3 \cdot 2^2 + 2 \cdot 2 \cdot 1^3 = 16$$

Derivadas Parciais

- Mantendo x constante e derivando em relação a y, obtemos

$$f_y(x, y) = 3x^2y^2 - 4y$$

e então

$$f_y(2, 1) = 3 \cdot 2^2 \cdot 1^2 - 4 \cdot 1 = 8$$

Derivadas de ordens mais altas

- Se f é uma função de duas variáveis, suas derivadas parciais f_x e f_y são funções de duas variáveis, de modo que podemos considerar novamente suas derivadas parciais $(f_x)_x$, $(f_x)_y$, $(f_y)_x$ e $(f_y)_y$, chamadas **derivadas parciais de segunda ordem** de f.

Derivadas de ordens mais altas

- Notação:

$$(f_x)_x = f_{xx} = f_{11} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right) = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 z}{\partial x^2}$$

$$(f_x)_y = f_{xy} = f_{12} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right) = \frac{\partial^2 f}{\partial y\,\partial x} = \frac{\partial^2 z}{\partial y\,\partial x}$$

$$(f_y)_x = f_{yx} = f_{21} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right) = \frac{\partial^2 f}{\partial x\,\partial y} = \frac{\partial^2 z}{\partial x\,\partial y}$$

$$(f_y)_y = f_{yy} = f_{22} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right) = \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}$$

Derivadas de ordens mais altas

- Exemplo 2: Determine as derivadas parciais de

$$f(x, y) = x^3 + x^2y^3 - 2y^2$$

Solução: No Exemplo 1, descobrimos que

$$f_x(x, y) = 3x^2 + 2xy^3 \qquad f_y(x, y) = 3x^2y^2 - 4y$$

Derivadas de ordens mais altas

- Portanto,

$$f_{xx} = \frac{\partial}{\partial x}(3x^2 + 2xy^3) = 6x + 2y^3$$

$$f_{xy} = \frac{\partial}{\partial x}(3x^2 + 2xy^3) = 6xy^2$$

$$f_{yx} = \frac{\partial}{\partial x}(3x^2y^2 - 4y) = 6xy^2$$

$$f_{yy} = \frac{\partial}{\partial x}(3x^2y^2 - 4y) = 6x^2y - 4$$