D1MAT - Lista de Exercícios 01: Limites

Diego Machado de Assis

May 1, 2021

Link para o notebook que gerou este documento:

https://github.com/dieguim-ifsp-posCD/D1MAT/blob/main/exercicios/20210427-D1MAT-lista01-resolucao.ipynb

** Professora, me desculpe a verbosidade desta resolução, mas aproveitei para desenferrujar o LaTeX e o cálculo. Peço perdão se isso causou algum transtorno*

1. Um tanque com capacidade para 1.000 litros de água é drenado pela base em meia hora. Os valores na tabela mostram o volume V de água remanescente no tanque (em litros) após t minutos.

t(**min**)	5	10	15	20	25	30
V(**L**)	694	444	250	111	28	0

a) Se P é o ponto $(15, 250)$ sobre o gráfico de V, encontre as inclinações das retas secantes PQ, onde Q é o ponto sobre o gráfico com $t = 5, 10, 20, 25$ e 30.

Solução

Sejam os pontos $P = (t_p, V_p)$ e $Q = (t_q, V_q)$ no gráfico de Volume (V) x Tempo (t). A inclinação (coeficiente angular) da reta secante à curva em P e Q (m_{pq}) representa a **vazão média** de água do tanque no intervalo de tempo entre t_p e t_q, e pode ser calculada pela fórmula:

$$m_{pq} = \frac{V_q - V_p}{t_q - t_p} (\text{L/min}) \tag{1}$$

i. Para $Q = (5, 694)$

$$m_{pq} = \frac{694 - 250}{5 - 15} = -\mathbf{44{,}4}\,\text{L/min}$$

ii. Para $Q = (10, 444)$

$$m_{pq} = \frac{444 - 250}{10 - 15} = -\mathbf{38{,}8}\,\text{L/min}$$

iii. Para $Q = (20, 111)$

$$m_{pq} = \frac{111 - 250}{20 - 15} = -\mathbf{27{,}8}\,\text{L/min}$$

iv. Para $Q = (25, 28)$

$$m_{pq} = \frac{28 - 250}{25 - 15} = -\mathbf{22{,}2}\,\text{L/min}$$

v. Para $Q = (30, 0)$

$$m_{pq} = \frac{0 - 250}{30 - 15} \approx -\mathbf{16{,}7}\,\text{L/min}$$

b) Estime a inclinação da reta tangente em P pela média das inclinações de duas retas secantes.

Solução

Podemos utilizar os pares de retas (*i*, *iv*) ou (*ii*, *iii*) do exercício anterior para calcular a média de inclinação, pois os pontos Q pelos quais cada uma delas passa tem coordenadas em t equidistantes de P.

Utilizando as retas *i* e *iv*:

$$m_p = \frac{-44{,}4 + (-22{,}2)}{2} = -33{,}3$$

Utilizando as retas *ii* e *iii*:

$$m_p = \frac{-38{,}8 + (-27{,}8)}{2} = -33{,}3$$

Portanto podemos estimar a inclinação da reta tangente em P, ou seja, a vazão instantânea de água do tanque em $t = 15$ como sendo de $\mathbf{-33{,}3\ L/min}$

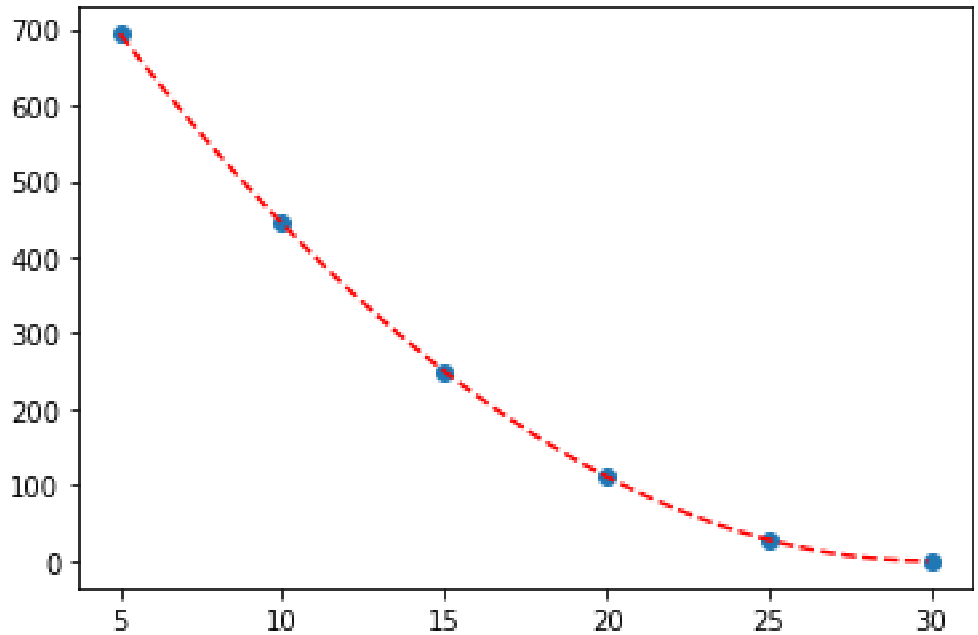
c) Use um gráfico da função para estimar a inclinação da tangente em P. (Essa inclinação representa a razão na qual a água flui do tanque após 15 minutos.)

Solução

Vamos tentar deduzir o gráfico da função usando a biblioteca SciPy do Python

[4]:
```
import numpy as np
import matplotlib.pyplot as plt
from scipy.optimize import curve_fit

# Vamos usar uma função polinomial de grau 2 como objetivo
## y = ax² + bx + c
def objective(x, a, b, c):
    return a * x**2 + b * x + c

# Lista de tuplas que representam os pontos (t, V) do nosso tanque de água
tanque = [(5, 694), (10, 444), (15, 250), (20, 111), (25, 28), (30, 0)]

# Colocando os valores de cada eixo dos pontos nas variáveis 'x' e 'y'
x, y = list(zip(*tanque))

# Realizando o fit da curva com nossa função polinomial
popt, _ = curve_fit(objective, x, y)

# Colocando os coeficientes retornados pelo fit nas variáveis 'a', 'b' e 'c'
a, b, c = popt
print('Função estimada: y = %.5f * x^2 %+.5f * x %+.5f' % (a, b, c))

# Plotando os pontos do gráfico
plt.scatter(x, y)

## Plotando a nossa curva estimada
# Sequência dentro do intervalo em 'x', variando em 0,1
x_line = np.arange(min(x), max(x), 0.1)
# Valores de 'y' para cada ponto da sequência em 'x'
y_line = objective(x_line, a, b, c)
# Plotando uma linha para a função estimada
plt.plot(x_line, y_line, '--', color='red')
plt.show()
```

```
Função estimada: y = 1.11000 * x^2 -66.60429 * x +999.20000
```



Pelo desenho do gráfico acima, nos parece que a função estimada é bastante razoável para descrever os pontos. Dessa forma, vamos então considerar a nossa função de vazão como sendo:

$$V(t) = 1{,}11t^2 - 66{,}6t + 999{,}2$$

Agora, para estimar o valor da tangente em P, podemos fazer de duas formas:

***i.* Inclinação das retas secantes PQ para pontos Q muito próximos de P**

A partir de nossa função estimada, podemos calcular os valores de $V(t_p)$, $V(t_p + \delta)$ e $V(t_p - \delta)$ para valores muito pequenos de δ e, dessa forma, estimar numericamente o valor da inclinação da tangente no ponto P

[5]:
```
tp = 15
delta = 1e-6

m1 = (objective(tp + delta, a, b, c) - objective(tp, a, b, c))/((tp + delta) -␣
 ↪tp)
m2 = (objective(tp - delta, a, b, c) - objective(tp, a, b, c))/((tp - delta) -␣
 ↪tp)

print(f'Inclinação para t + delta = {m1}')
print(f'Inclinação para t - delta = {m2}')
```

```
Inclinação para t + delta = -33.30428458175926
Inclinação para t - delta = -33.30428685549602
```

Portanto, utilizando este método numérico, o valor estimado para a vazão instantânea de água no momento $t = 15$ é de $\mathbf{-33{,}3\ L/min}$

ii. **Valor da derivada de $V(t)$ no ponto $t = 15$**

A partir da função $V(t)$, podemos calcular sua derivada (função de variação da vazão ao longo do tempo) e calcular seu valor para $t_p = 15$.

A derivada de $V(t)$, definida por $V'(t)$ é dada por:

$$V'(t) = 2{,}22t - 66{,}6$$

Para $t = t_p = 15$, temos:

$$V'(t_p) = V'(15) = -33{,}3$$

Portanto, o valor estimado para a vazão instantânea de água no momento $t = 15$ é de $\mathbf{-33{,}3\ L/min}$

---

2. Calcule os limites:

a) $\lim_{t \to -3} \dfrac{t^2 - 9}{2t^2 + 7t + 3}$

Solução

O polinômio $t^2 - 9$ pode ser reescrito, da seguinte forma:

$$t^2 - 9 = (t+3)(t-3) \tag{2}$$

Por sua vez, sendo $\left(-3; -\frac{1}{2}\right)$ as raízes do polinômio $2t^2 + 7t + 3$, podemos decompô-lo como:

$$2t^2 + 7t + 3 = 2(t+3)\left(t + \frac{1}{2}\right) \tag{3}$$

Pelas equações (2) e (3) temos:

$$\lim_{t \to -3} \frac{t^2 - 9}{2t^2 + 7t + 3} = \lim_{t \to -3} \frac{(t+3)(t-3)}{2(t+3)\left(t + \frac{1}{2}\right)}$$

Cancelando o termo $(t+3)$ na divisão:

$$\lim_{t \to -3} \frac{t^2 - 9}{2t^2 + 7t + 3} = \lim_{t \to -3} \frac{t - 3}{2\left(t + \frac{1}{2}\right)} = \frac{-3 - 3}{2\left(-3 + \frac{1}{2}\right)} = \frac{-6}{-5} = \frac{6}{5}$$

Método 2 (L'Hôpital)

A regra de L'Hôpital basicamente (ignorando muito da formalidade) enuncia que:

Se $\lim_{x \to c} \dfrac{f(x)}{g(x)} = \dfrac{0}{0}$ OU $\dfrac{\infty}{\infty}$ OU $\dfrac{-\infty}{-\infty}$

Então $\lim_{x \to c} \dfrac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \to c} \dfrac{f'(x)}{g'(x)}$

Como

$$\lim_{t \to -3} \frac{t^2 - 9}{2t^2 + 7t + 3} = \frac{(-3)^2 - 9}{2(-3)^2 + 7(-3) + 3} = \frac{0}{0}$$

Então podemos usar a regra de L'Hôpital para calcular o limite. Ou seja:

$$\lim_{t \to -3} \frac{t^2 - 9}{2t^2 + 7t + 3} = \lim_{t \to -3} \frac{2t}{4t + 7} = \frac{2(-3)}{4(-3) + 7} = \frac{-6}{-5} = \frac{6}{5}$$

b) $\lim_{x \to 0} \dfrac{\sqrt{1+x} - \sqrt{1-x}}{x}$

Solução

Vamos multiplicar o numerador e o denominador da divisão por $\sqrt{1+x} + \sqrt{1-x}$:

$$\begin{aligned}
\lim_{x \to 0} \frac{\sqrt{1+x} - \sqrt{1-x}}{x} &= \lim_{x \to 0} \frac{\sqrt{1+x} - \sqrt{1-x}}{x} \times \frac{\left(\sqrt{1+x} + \sqrt{1-x}\right)}{\left(\sqrt{1+x} + \sqrt{1-x}\right)} \\
&= \lim_{x \to 0} \frac{\left(\sqrt{1+x}\right)^2 - \left(\sqrt{1-x}\right)^2}{x\left(\sqrt{1+x} + \sqrt{1-x}\right)} \\
&= \lim_{x \to 0} \frac{1 + x - (1-x)}{x\left(\sqrt{1+x} + \sqrt{1-x}\right)} \\
&= \lim_{x \to 0} \frac{2x}{x\left(\sqrt{1+x} + \sqrt{1-x}\right)}
\end{aligned}$$

Cancelando x na divisão:

$$\lim_{x \to 0} \frac{\sqrt{1+x} - \sqrt{1-x}}{x} = \lim_{x \to 0} \frac{2}{\sqrt{1+x} + \sqrt{1-x}} = \frac{2}{\sqrt{1+0} + \sqrt{1+0}} = \frac{2}{2} = 1$$

Método 2 (L'Hôpital)

Como

$$\lim_{x \to 0} \frac{\sqrt{1+x} - \sqrt{1-x}}{x} = \frac{\sqrt{1+0} - \sqrt{1-0}}{0} = \frac{0}{0}$$

Então podemos usar L'Hôpital para calcular o limite.

Derivando o numerador $f(x) = \sqrt{1+x} - \sqrt{1-x}$ usando a *Regra da Cadeia* para cada termo da subtração temos que:

$$\frac{d}{dx}\sqrt{1+x} = \frac{1}{2\sqrt{1+x}} \qquad \text{e} \qquad \frac{d}{dx}\sqrt{1-x} = -\frac{1}{2\sqrt{1-x}}$$

Portanto,

$$\lim_{x \to 0} \frac{\sqrt{1+x} - \sqrt{1-x}}{x} = \lim_{x \to 0} \frac{\frac{1}{2\sqrt{1+x}} - \left(-\frac{1}{2\sqrt{1-x}}\right)}{1} = \frac{1}{2\sqrt{1+0}} + \frac{1}{2\sqrt{1-0}} = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1$$

---

c) $\lim_{x \to -4} \frac{\frac{1}{4} + \frac{1}{x}}{4 + x}$

Solução

Multiplicando a fração por $\frac{4x}{4x}$, temos:

$$\begin{aligned}
\lim_{x \to -4} \frac{\frac{1}{4} + \frac{1}{x}}{4 + x} &= \lim_{x \to -4} \frac{\frac{1}{4} + \frac{1}{x}}{4 + x} \times \frac{4x}{4x} \\
&= \lim_{x \to -4} \frac{4x\left(\frac{1}{4} + \frac{1}{x}\right)}{4x(4 + x)} \\
&= \lim_{x \to -4} \frac{x + 4}{4x(x + 4)}
\end{aligned}$$

Cancelando o termo $(x + 4)$ na divisão:

$$\lim_{x \to -4} \frac{\frac{1}{4} + \frac{1}{x}}{4 + x} = \lim_{x \to -4} \frac{1}{4x} = \frac{1}{4(-4)} = -\frac{1}{16}$$

Método 2 (L'Hôpital)

Como

$$\lim_{x \to -4} \frac{\frac{1}{4} + \frac{1}{x}}{4 + x} = \frac{\frac{1}{4} + \frac{1}{-4}}{4 + (-4)} = \frac{0}{0}$$

Então podemos usar L'Hôpital:

$$\lim_{x \to -4} \frac{\frac{1}{4} + \frac{1}{x}}{4 + x} = \lim_{x \to -4} \frac{-\frac{1}{x^2}}{1} = -\frac{1}{(-4)^2} = -\frac{1}{16}$$