Pós-Graduação em Ciência de Dados

Professora Cecília Pereira de Andrade

e

Professor Ricardo Sovat

INSTITUTO FEDERAL DE EDUCAÇÃO, CIÊNCIA E TECNOLOGIA
SÃO PAULO
Campus Campinas

Transformações lineares

Transformações Lineares

- Tipo especial de função, onde o domínio e o contradomínio são espaços vetoriais reais.

- Variáveis são vetores

- Chamadas funções vetoriais

Transformações Lineares

- T: V $\rightarrow$ W

- Cada v ϵ V tem um só vetor imagem w ϵ T, indicado por w=T(v).

- Exemplo: Seja T: $\mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$, definida por

T(x,y)= (3x, -2y, x-y).

T(2,1)= (3.2, -2.1, 2-1) = (6,-2,1)

Transformações Lineares

- Sejam V e W espaços vetoriais. Uma aplicação $T: V \to W$ é **chamada transformação** linear de V em W se:

i) $T(u+v)=T(u)+T(v)$

ii) $T(\alpha u)= \alpha T(u)$

para todo u, v $\in$ V e para todo $\alpha \in \mathbb{R}$.

Transformações Lineares

- OBS: T: V $\longrightarrow$ V é chamado **operador linear.**

- Exemplo: T: $\mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^3$, T(x,y)=(3x,-2y,x-y) é linear.

  De fato, sejam u=(x_1,y_1) e v=(x_2,y_2) vetores de $\mathbb{R}^2$.

Transformações Lineares

- $T(u+v) = T(x_1 + x_2, y_1 + y_2)$

  $T(u+v) = (3(x_1 + x_2), -2(y_1 + y_2), (x_1 + x_2)-(y_1 + y_2))$

  $T(u+v) = (3x_1 + 3x_2, -2y_1 -2y_2, x_1 + x_2 - y_1 - y_2)$

  $T(u+v) = (3x_1, -2y_1, x_1 - y_1) + (3x_2, -2y_2, x_2 - y_2)$

  $T(u+v) = T(u) + T(v).$

- Para todo $\alpha \in \mathbb{R}$ e para qualquer $(x_1, y_1) \in \mathbb{R}$

  $T(\alpha u) = T(\alpha x_1, \alpha y_1)$

  $T(\alpha u) = (3 \alpha x_1, -2 \alpha y_1, \alpha x_1 - \alpha y_1)$

  $T(\alpha u) = \alpha (3x_1, -2y_1, x_1 - y_1)$

  $T(\alpha u) = \alpha T(u)$

Transformações Lineares

- Obs: Se T é uma transformação linear, então $T(0)=0$.

De fato, se considerarmos $\alpha = 0$ em ii), temos:

$T(0)=T(0.v)=0.T(v) = 0$.

- A recíproca não é verdadeira.

  Exemplo: T: $\mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$, $T(x,y)=(x^2,3y)$.

Transformações Lineares

Exemplos:

- $I: V \to V$, $I(v)=v$ (identidade);
- $T: V \to W$, $T(v)=0$ (nula);
- $T: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, $T(v)= -v$ (simetria);
- $T: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, $T(v)= (x,y,0)$ (projeção ortogonal)
- Seja o espaço $V=P_n$, dos polinômios de grau $\leq n$.

A aplicação $D: P_n \to P_n$, que leva $f \in P_n$, em sua derivada f' é linear.

Transformações Lineares

Exemplos:

- Considere A=$\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -2 & 3 \\ 0 & 4 \end{bmatrix}$. Essa matriz determina a transformação T_A: $\mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$, T(v)=Av, que é linear.

Seja v=(x,y) ϵ $\mathbb{R}^2$,

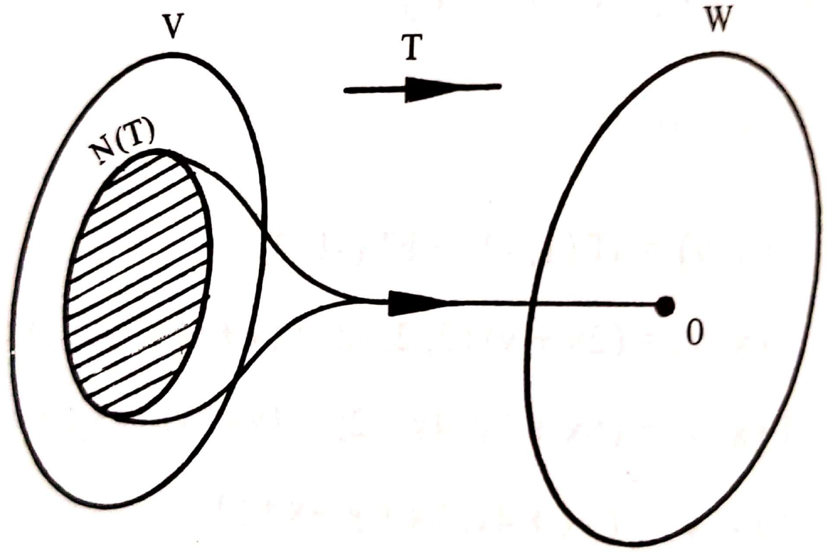
$\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -2 & 3 \\ 0 & 4 \end{bmatrix}$v= $\begin{bmatrix} x + 2y \\ -2x + 3x \\ 4y \end{bmatrix}$ e portanto, T_A(x,y)=(x+2y,-2x+3y,4y)

Núcleo de uma transformação linear

- Chama-se núcleo de uma transformação linear $T: V \to W$ ao conjunto de todos os vetores $v \in V$ que são transformados em $0 \in W$.

- Notação: $N(T)$ ou $\ker(T)$

- $N(T) = \{v \in V \mid T(v) = 0\}$



Núcleo de uma transformação linear

- Exemplo:

Determine o núcleo da transformação T: $\mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$, T(x,y)=(x+y,2x-y).

T(x,y)= (0,0) implica que (x+y,2x-y)= (0,0)

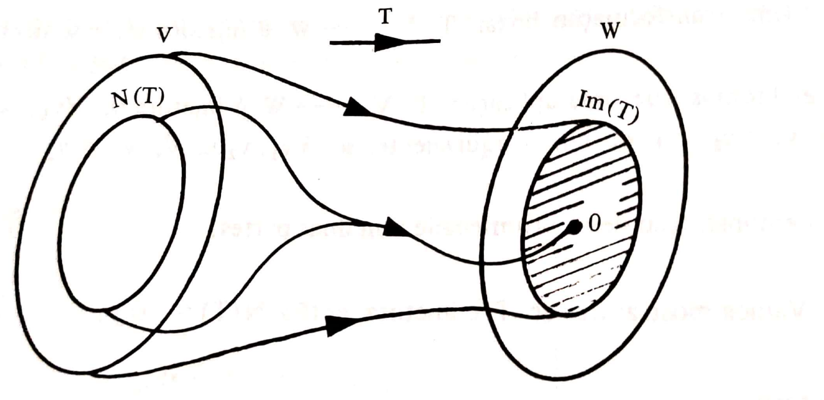
Logo, $\begin{cases} x+y=0 \\ 2x-y=0 \end{cases}$ e daí x = 0 e y=0.

Portanto, N(T)={(0,0)}.

Imagem de uma transformação linear

- Chama-se imagem de uma transformação linear T: V → W ao conjunto dos vetores w ϵ W que são imagens de pelo menos um vetor V ϵ V.

- Notação: Im(T) ou T(v)



- Im(T)={w ϵ W | T(v)=w, para algum v ϵ V}

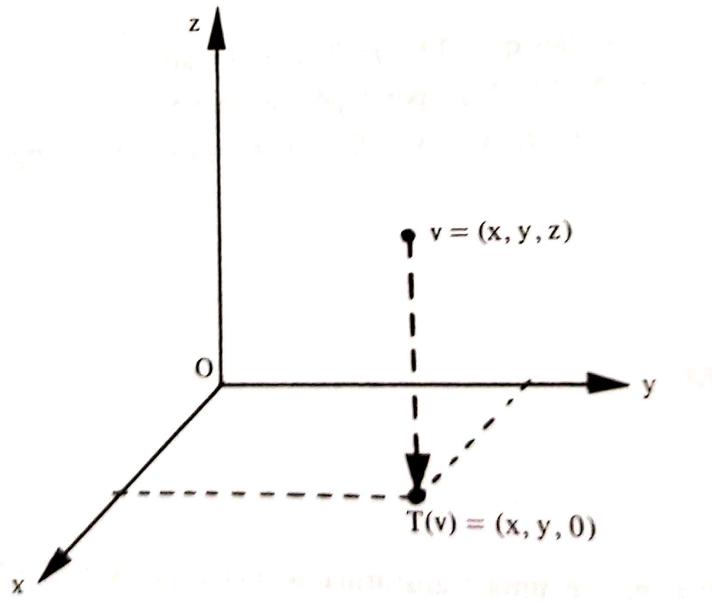
Imagem de uma transformação linear

- Seja T: $\mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$, T(x,y,z)= (x,y,0) a projeção ortogonal do $\mathbb{R}^3$ sobre o plano xy.

A imagem de T é o próprio plano xy.

Im(T)={(x,y,0) ϵ $\mathbb{R}^3$ | x, y ϵ $\mathbb{R}$}

N(T) = {(0,0,z)|z ϵ $\mathbb{R}$ }



Teorema do Núcleo e da Imagem

- Seja V um espaço vetorial de dimensão finita e $T: V \rightarrow W$ uma transformação linear. Então:

$$\dim N(T) + \dim Im(T) = \dim V$$

Teorema do Núcleo e da Imagem

- Exemplo: determinar o núcleo e a imagem do operador linear

T: $\mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, T(x,y,z)=(x+2y-z, y+2z,x+3y+z).

- N(T) = { (x,y,z) ϵ $\mathbb{R}^3$ | T(x,y,z)=(0,0,0)}.

De (x+2y-z, y+2z,x+3y+z) = (0,0,0)

temos a solução geral (5z, -2z, z), z ϵ $\mathbb{R}$.

Teorema do Núcleo e da Imagem

- Logo,

$$N(T) = \{ (5z,-2z,z) \mid z \in \mathbb{R}\}$$
$$= \{ z(5,-2,1) \mid z \in \mathbb{R}\}$$
$$= [(5,-2,1)].$$

Note que dim (N(T)) = 1. Logo, pelo teorema, dim (Im(T)) deverá ser 2.

Teorema do Núcleo e da Imagem

- $Im(T) = \{ (a,b,c) \in \mathbb{R}^3 \mid T(x,y,z)=(a,b,c)\}$

- $(a,b,c) \in Im(T)$ se existe $(x,y,z) \in \mathbb{R}^3$ tal que

$(x+2y-z,\ y+2z, x+3y+z) = (a,b,c)$

O sistema só terá solução se $a + b - c = 0$.

Logo, $Im(T) = \{(a,b,c) \in \mathbb{R}^3 \mid a + b - c = 0)\}$

Teorema do Núcleo e da Imagem

- O vetor imagem $T(x,y,z)$ pode ser expresso como:

$$(x+2y-z,\ y+2z, x+3y+z) = (x,0,x)+(2y,y,3y)+(-z,2z,z)$$

ou

$$(x+2y-z,\ y+2z, x+3y+z) = x(1,0,1)+y(2,1,3)+z(-1,2,1)$$

Portanto, $Im(T) = [(1,0,1),\ (2,1,3),(-1,2,1)]$.

Matriz de uma transformação linear

- Sejam T: V → W uma transformação linear, A uma base de V e B uma base de W.

- SPG, vamos assumr dim V=2 e dim W = 3.

- $A = \{v_1, v_2\}$ e $B = \{w_1, w_2, w_3\}$

- $v = x_1v_1 + x_2v_2$ ou $v_A = (x_1, x_2)$

Matriz de uma transformação linear

- $T(v) = y_1w_1 + y_2w_2 + y_3w_3$ ou $T(v)_B = (y_1, y_2, y_3)$

- Por outro lado,

$$T(v) = T(x_1v_1 + x_2v_2) = x_1T(v_1) + x_2T(v_2)$$

Matriz de uma transformação linear

- Como $T(v_1)$ e $T(v_2)$ são vetores de W

$$T(v_1) = a_{11}w_1 + a_{21}w_2 + a_{31}w_3$$

$$T(v_2) = a_{12}w_1 + a_{22}w_2 + a_{32}w_3$$

Substituindo em $T(v) = x_1T(v_1) + x_2T(v_2)$ temos

$$T(v) = x_1(a_{11}w_1 + a_{21}w_2 + a_{31}w_3) + x_2(a_{12}w_1 + a_{22}w_2 + a_{32}w_3)$$

Matriz de uma transformação linear

-

$T(v) = x_1(a_{11}w_1 + a_{21}w_2 + a_{31}w_3) + x_2(v\ a_{12}w_1 + a_{22}w_2 + a_{32}w_3)$

$T(v) = w_1(a_{11}x_1 + a_{12}x_2) + w_2(a_{21}x_1 + a_{22}x_2) + w_3(a_{31}x_1 + a_{32}x_2)$

- Comparando com $T(v) = y_1w_1 + y_2w_2 + y_3w_3$ temos:
- $y_1 = a_{11}x_1 + a_{12}x_2$
- $y_2 = a_{21}x_1 + a_{22}x_2$
- $y_1 = a_{31}x_1 + a_{32}x_2$

Matriz de uma transformação linear

- Matricialmente:

$$\begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$$

- Simbolicamente:

$$[T(v)]_B = [T]_B^A [v]_A$$

Matriz de uma transformação linear

- Observações:

1) A matriz $[T]_B^A$ é de ordem 3x2 quando dim V=2 e dim W = 3.

2) As colunas da matriz $[T]_B^A$ são componentes das imagens dos vetores da base A em relação à base B.

Matriz de uma transformação linear

- Exemplo: Seja T: $\mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^2$, T(x,y,z)=(2x-y+z, 3x+y-2z), linear. Consideremos as bases A={v_1,v_2,v_3}, com v_1=(1,1,1), v_2=(0,1,1), v_3=(0,0,1) e B={w_1,w_2}, sendo w_1=(2,1) e w_2=(5,3).

- $[T]_B^A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{bmatrix}$

$$\begin{array}{ccc} \uparrow & \uparrow & \uparrow \\ T(v_1)_B & T(v_2)_B & T(v_3)_B \end{array}$$

Matriz de uma transformação linear

- $T(v_1) = T(1,1,1) = (2,2) = a_{11}(2,1) + a_{21}(5,3)$

Portanto, a_{11}= -4 e a_{21}= 2.

- $T(v_2) = T(0,1,1) = (0,-1) = a_{12}(2,1) + a_{22}(5,3)$

Portanto, a_{12}= 5 e a_{22}= -2.

- $T(v_3) = T(0,0,1) = (1,-2) = a_{13}(2,1) + a_{23}(5,3)$

Portanto, a_{13}= 13 e a_{23}= -5.

Matriz de uma transformação linear

- Portanto,

$$[T]_B^A = \begin{bmatrix} -4 & 5 & 13 \\ 2 & -2 & -5 \end{bmatrix}.$$

Operações com transformações lineares

- Adição

Sejam $T_1: V \to W$ e $T_2: V \to W$. Chama-se **soma** das transformações lineares T_1 e T_2 à transformação linear

$$T_1 + T_2 : V \to W, \; (T_1 + T_2)(v) = T_1(v) + T_2(v), \; \forall \, v \in V.$$

$$[T_1 + T_2]_B^A = [T_1]_B^A + [T_2]_B^A$$

Operações com transformações lineares

- Multiplicação por escalar

Sejam T: $V \to W$ e $\alpha \in \mathbb{R}$. Chama-se **produto** de T pelo escalar α à transformação linear

$$(\alpha T)(v) = \alpha T(v),\ \forall\ v \in V.$$

$$[\alpha T]_B^A = \alpha[T]_B^A$$

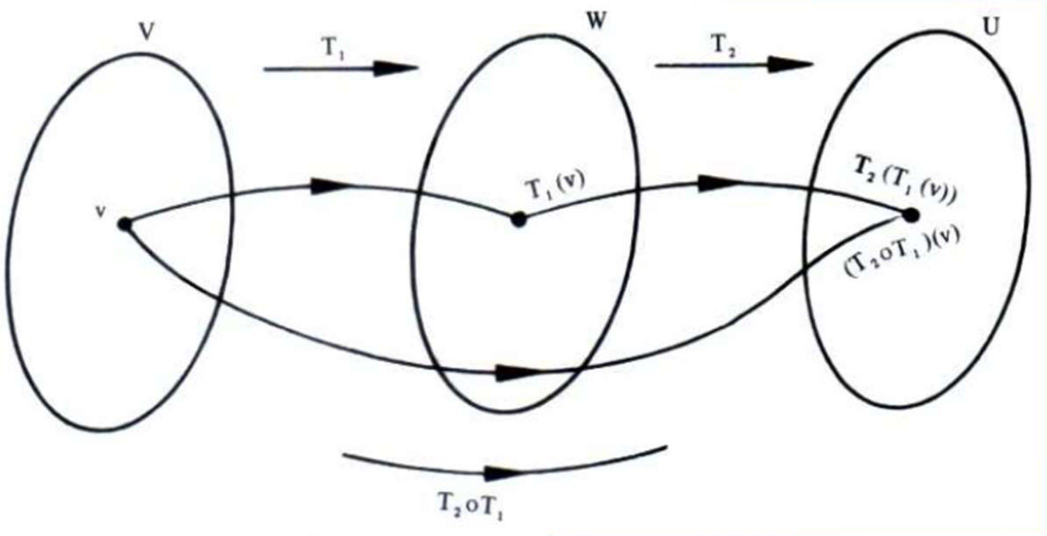
Operações com transformações lineares

- Composição

Sejam T_1: $V \rightarrow W$ e T_2: $W \rightarrow U$. Chama-se aplicação **composta** de T_1 com T_2, à transformação linear

$(T_1 \circ T_2)(v) = T_2(T_1(v)), \forall\ v \in V.$

$[T_1 \circ T_2]_C^A = [T_2]_C^A \times [T_1]_B^A$



Operações com transformações lineares

- Exemplo 1:

Sejam $T_1: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ e $T_2: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ transformações lineares definidas por

$T_1(x,y) = (x+2y,\ 2x-y,x)$ e $T_2(x,y)=(-x,y,x+y)$.

- $T_1 + T_2$

$(T_1 + T_2)(x,y)= T_1(x,y) + T_2(x,y)$

$(T_1 + T_2)(x,y)= (x+2y,\ 2x-y,x) +(-x,y,x+y) = (2y,\ 2x,2x+y)$

Operações com transformações lineares

- Exemplo1:

- $3T_1 - 2T_2$

$(3T_1 - 2T_2)(x,y) = (3T_1)(x,y) - (2T_2)(x,y)$

$(3T_1 - 2T_2)(x,y) = 3T_1(x,y) - 2T_2(x,y)$

$(3T_1 - 2T_2)(x,y) = 3(x+2y,\ 2x-y, x) - 2(-x, y, x+y)$

$(3T_1 - 2T_2)(x,y) = (5x+6y,\ 6x-5y,\ x-2y)$

Operações com transformações lineares

- Exemplo 2:

Sejam S e T operadores lineares no $\mathbb{R}^3$ definidos por $S(x,y) = (2x,y)$ e $T(x,y)=(x,x-y)$.

- $S \circ T$

$(S \circ T)(x,y) = S(T(x,y)) = S(x,x-y) = (2x,\ x-y)$

- $T \circ S$

$(T \circ S)(x,y) = T(S(x,y)) = T(2x,y) = (2x,\ 2x-y)$.

Transformações Lineares Planas

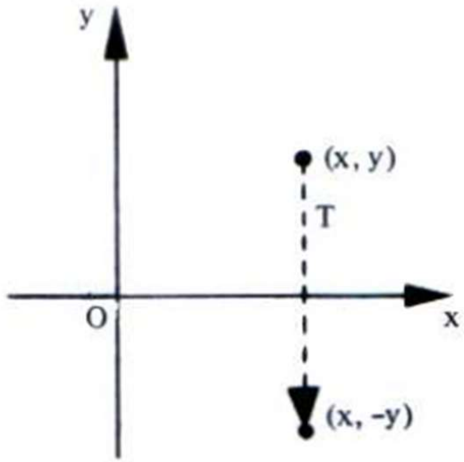
- Entende-se por transformações lineares planas as transformações de $\mathbb{R}^2$ em $\mathbb{R}^2$.

- Veremos algumas de especial importância e suas interpretações geométricas.

Transformações Lineares Planas

- Reflexões
- Reflexão em torno do eixo dos x

Leva cada ponto (x,y) para sua imagem (-x,-y), simétrica em relação ao eixo x.



T: $\mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ ou T(x,y) = (x, -y)

$(x,y) \mapsto (x,-y)$

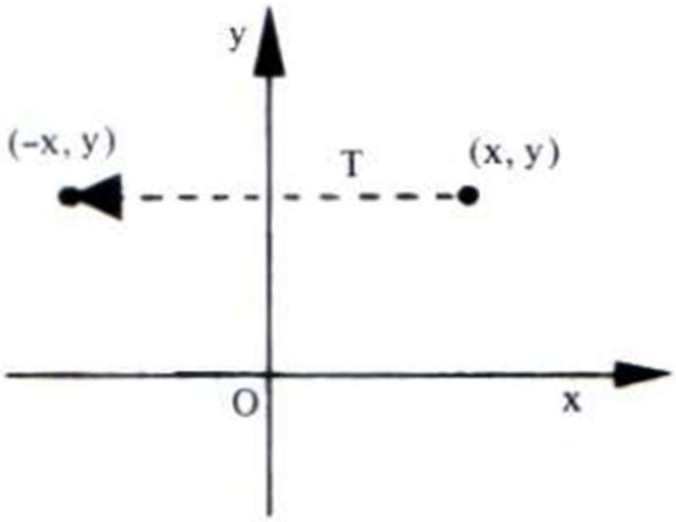
Matriz canônica: $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$

Transformações Lineares Planas

- Reflexão em torno do eixo dos y

T: $\mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ ou T(x,y) = (-x, y)

$(x,y) \mapsto (-x,y)$



Matriz canônica: $\begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$

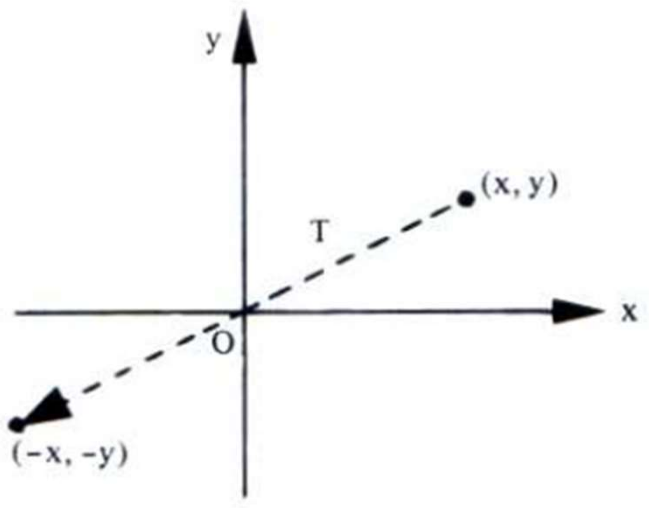
Transformações Lineares Planas

- Reflexão na origem

T: $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ ou T(x,y) = (-x, -y)

$(x,y) \mapsto (-x,-y)$

Matriz canônica: $\begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$

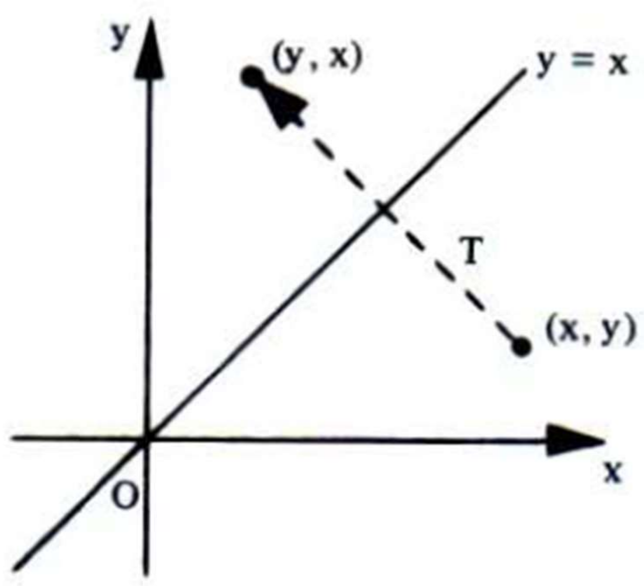


Transformações Lineares Planas

- Reflexão em torno da reta y=x

T: $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ ou T(x,y) = (y, x)

(x,y) $\mapsto$ (y,x)



Matriz canônica: $\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$

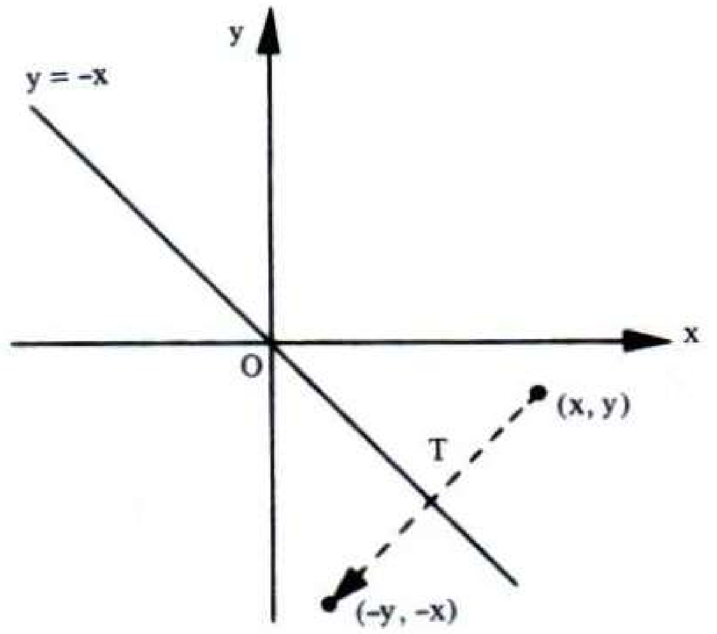
Transformações Lineares Planas

- Reflexão em torno da reta y=-x

T: $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ ou T(x,y) = (-y, -x)

(x,y) $\mapsto$ (-y,-x)

Matriz canônica: $\begin{bmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$



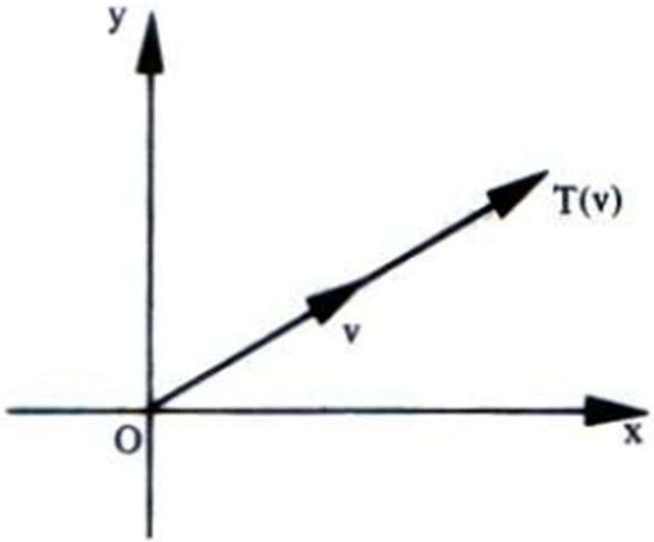
Transformações Lineares Planas

- Dilatações e Contrações
- Dilatação ou contração na direção do vetor

T: $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$

$(x,y) \mapsto \alpha(x,y)$, $\alpha \in \mathbb{R}$

Matriz canônica: $\begin{bmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & \alpha \end{bmatrix}$



Transformações Lineares Planas

- Dilatações e Contrações
- Dilatação ou contração na direção do vetor

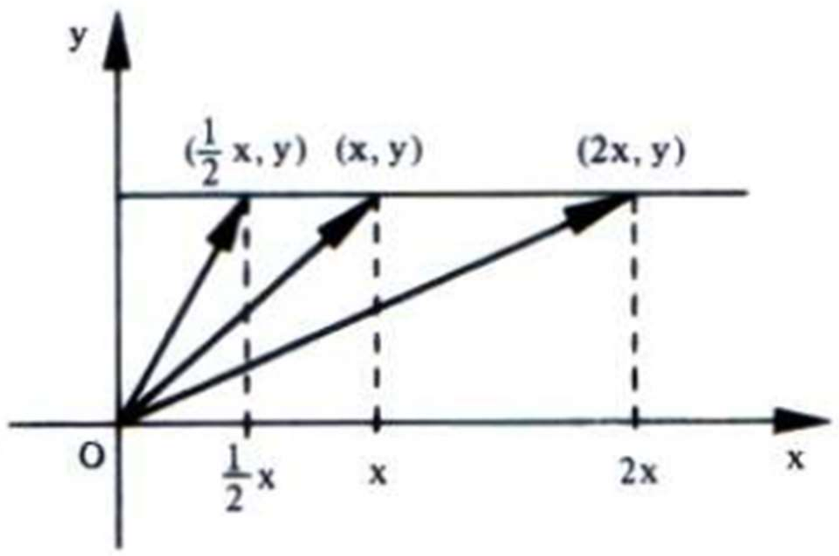
- Se $|\alpha| > 1$, T dilata o vetor.
- Se $|\alpha| < 1$, T contrai o vetor.
- Se $|\alpha| = 1$, T é a identidade I.
- Se $\alpha<0$, T troca o sentido do vetor.

Transformações Lineares Planas

- Dilatação ou contração na direção do eixo dos x

T: $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$

$(x,y) \mapsto (\alpha x,y)$, $\alpha > 0$



Transformações Lineares Planas

- Dilatação ou contração na direção do eixo dos x

Note que:

se $\alpha > 1$, T dilata o vetor

se $0 < \alpha < 1$, T contrai o vetor

Matriz canônica: $\begin{bmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$

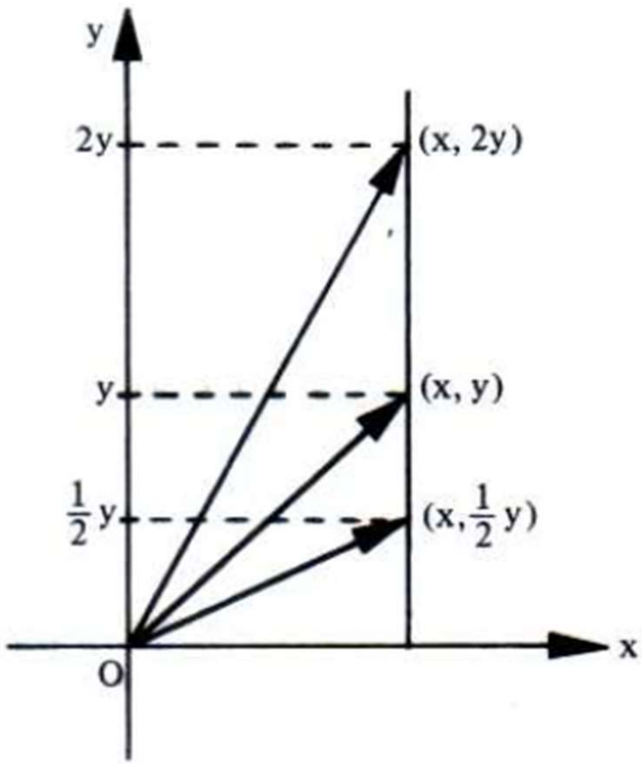
Transformações Lineares Planas

- Dilatação ou contração na direção do eixo dos y

T: $\mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$

$(x,y) \mapsto (x, \alpha y)$, $\alpha > 0$

Matriz canônica: $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \alpha \end{bmatrix}$

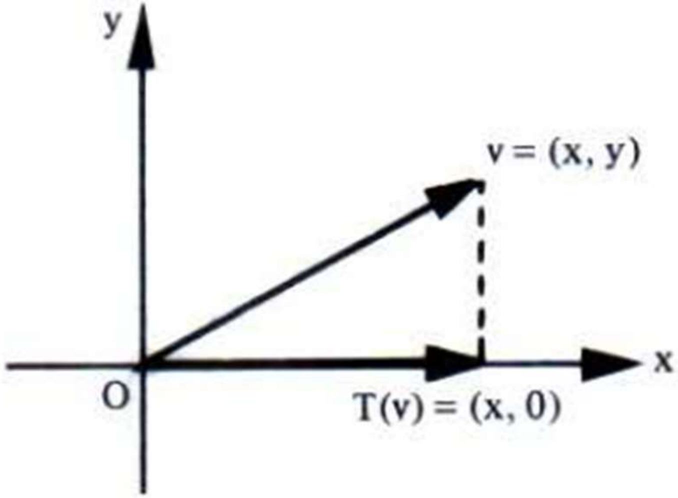


Transformações Lineares Planas

- Dilatação ou contração na direção do eixo dos y

Note que, se $\alpha = 0$, temos a projeção ortogonal do plano sobre o eixo dos x.

$(x,y) \mapsto (x, 0)$

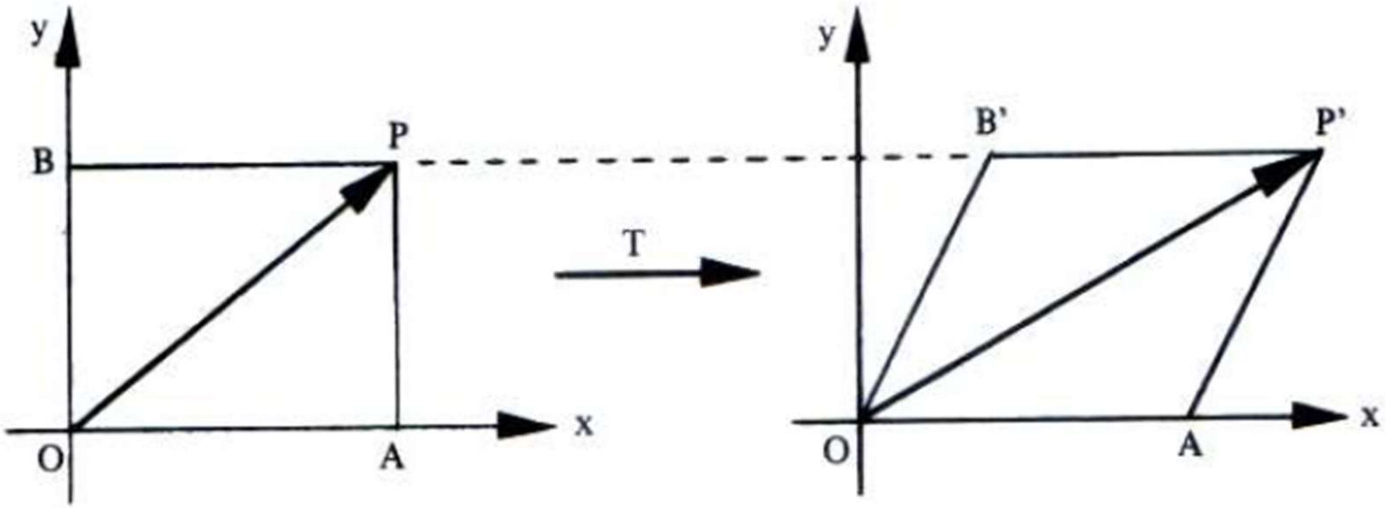


Transformações Lineares Planas

- Cisalhamentos
- Cisalhamento na direção do eixo dos x

T: $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$

$(x,y) \mapsto (x + \alpha y, y)$



Matriz canônica:

$$\begin{bmatrix} 1 & \alpha \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

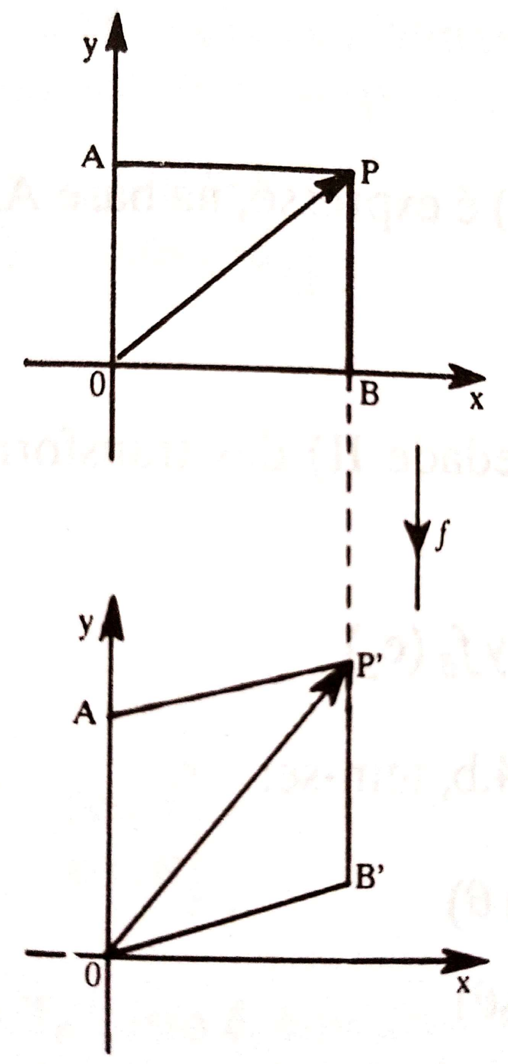
Transformações Lineares Planas

- Cisalhamento na direção do eixo dos y

T: $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$

$(x,y) \mapsto (x,\ y+\alpha x)$

Matriz canônica: $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ \alpha & 1 \end{bmatrix}$



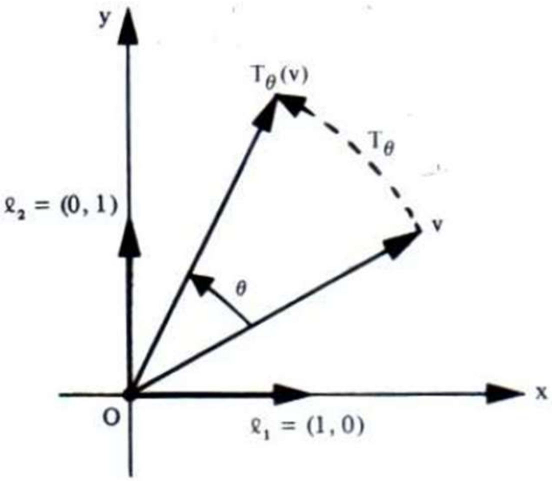
Transformações Lineares Planas

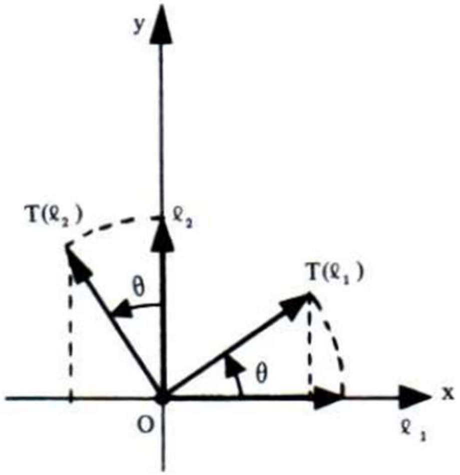
- Rotação

A rotação do plano em torno da origem, que faz cada ponto descrever um ângulo θ, determina

$T_\theta : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$

$(x,y) \mapsto (x\cos\theta - y\,\mathrm{sen}\,\theta,\ x\,\mathrm{sen}\,\theta + y\cos\theta)$





Transformações Lineares Planas

- Rotação

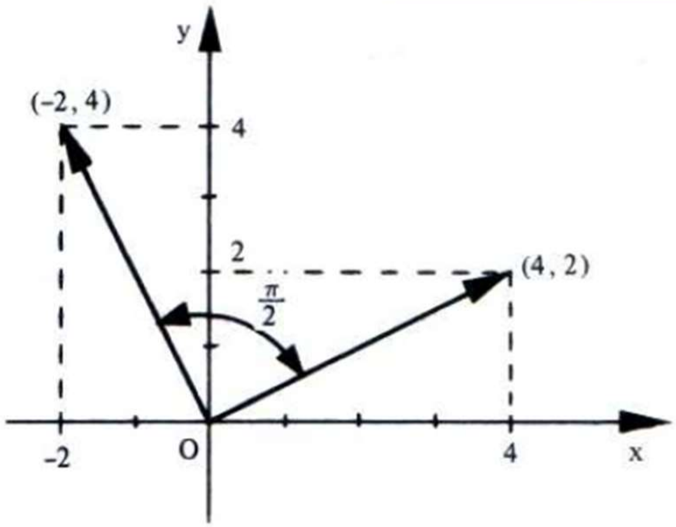
Matriz da transformação:

$$[T_\theta] = \begin{bmatrix} cos\,\theta & -sen\,\theta \\ sen\,\theta & cos\,\theta \end{bmatrix}$$

Transformações Lineares Planas

- Rotação

Desejamos a imagem do vetor v=(4,2) pela rotação de $\theta = \pi/2$



$$[T(4,2)] = \begin{bmatrix} cos\ \pi/2 & -sen\ \pi/2 \\ sen\ \pi/2 & cos\ \pi/2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 4 \\ 2 \end{bmatrix}$$

$$[T(4,2)] = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 4 \\ 2 \end{bmatrix} \text{ ou } [T(4,2)] = \begin{bmatrix} -2 \\ 4 \end{bmatrix}$$

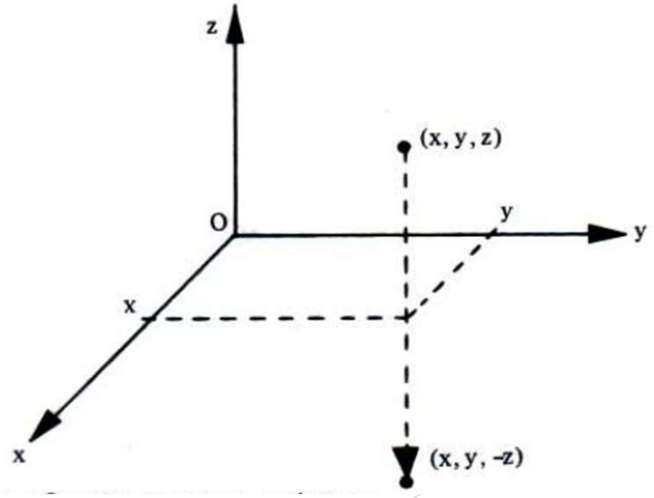
Transformações Lineares no Espaço

- São as transformações de $\mathbb{R}^3$ em $\mathbb{R}^3$.
- Examinaremos as reflexões e as rotações.

Transformações Lineares no Espaço

- Reflexões
- Reflexões em relação aos planos coordenados

A reflexão em relação ao plano xOy leva cada ponto (x,y,z) na sua imagem (x,y,-z), simétrica em relação ao plano xOy.



$$T(x,y,z) = (x,y,-z)$$

Transformações Lineares no Espaço

- Reflexões em relação aos planos coordenados

Matriz canônica (xOy): $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$

Matriz canônica (xOz): $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

Matriz canônica (yOz): $\begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

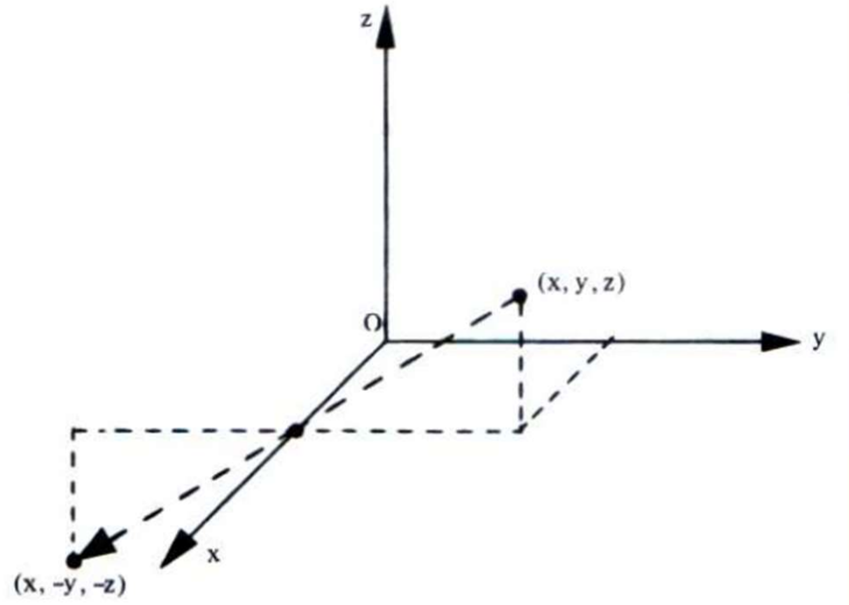
Transformações Lineares no Espaço

- Reflexões em relação aos eixos coordenados

A reflexão em relação ao eixo x é o operador linear definido por

$$T(x,y,z) = (x,-y,-z)$$

Matriz canônica: $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$



Transformações Lineares no Espaço

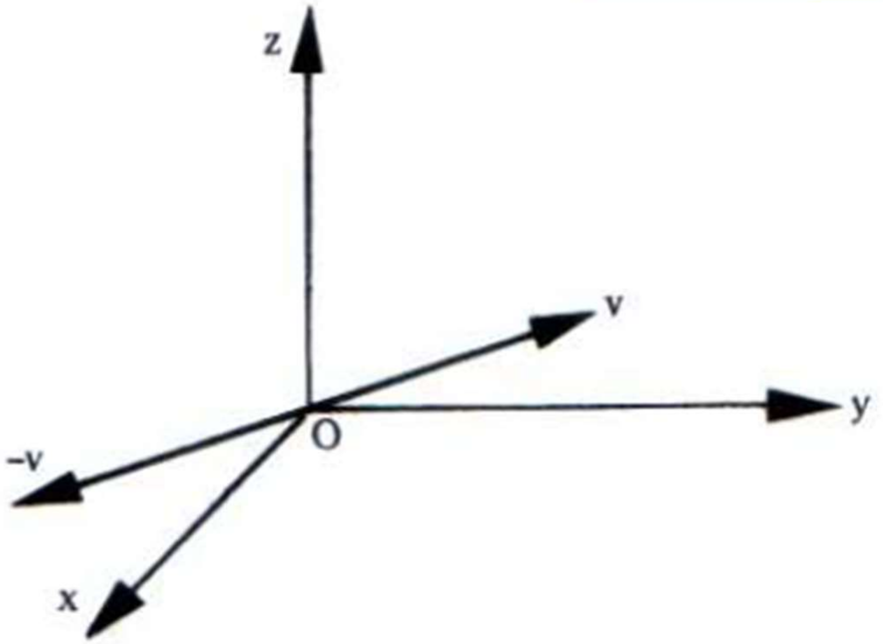
- Reflexões na origem

T: $\mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$

(x,y) $\mapsto$ (-x, -y, -z)

-

Matriz canônica = $\begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$



Transformações Lineares no Espaço

- Rotação

Vamos mostrar a rotação do espaço em torno do eixo dos x, que faz cada ponto descrever um ângulo θ.

$T_\theta : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$

$(x,y,z) \mapsto (x\cos\theta - y\operatorname{sen}\theta,\ x\operatorname{sen}\theta + y\cos\theta, z)$

Transformações Lineares Planas

- Rotação

Matriz da transformação:

$$[T_\theta] = \begin{bmatrix} \cos\theta & -\operatorname{sen}\theta & 0 \\ \operatorname{sen}\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$