D1MAT - Lista de Exercícios 10: Mudança de Base

July 1, 2021

1. Consideremos as seguintes bases do $\mathbb{R}^2$: $A = \{(1,1),(0,-1)\}$ e $B = \{(2,-3),(-3,5)\}$.

a) Determinar a matriz-mudança de base $[I]^A_B$.

As colunas de $[I]^A_B$ serão os vetores da base A expressos em relação à base B. Dito de outra forma, precisamos encontrar os coeficientes que expressem os vetores da base A como combinação linear dos vetores da base B, ou seja:

$$(1,1) = a_{11}(2,-3) + a_{21}(-3,5) \tag{1}$$
$$(0,-1) = a_{12}(2,-3) + a_{22}(-3,5) \tag{2}$$

Por 1 temos o sistema:

$$\begin{cases} 2a_{11} - 3a_{21} = 1 \\ -3a_{11} + 5a_{21} = 1 \end{cases} \iff \begin{cases} 2a_{11} - \ 3a_{21} = 1 \\ \qquad \dfrac{1}{2}a_{21} = \dfrac{5}{2} \quad \longleftarrow \left(\dfrac{3}{2}\right) \times (1^a \text{ eq.}) + (2^a \text{ eq.}) \end{cases}$$

Que é resolvido para $a_{21} = 5$ e $a_{11} = 8$.

Portanto, $(1,1)_B = (8,5)$.

E por 2 montamos o sistema:

$$\begin{cases} 2a_{12} - 3a_{22} = 0 \\ -3a_{12} + 5a_{22} = \ -1 \end{cases} \iff \begin{cases} 2a_{12} - \ 3a_{22} = 0 \\ \qquad \dfrac{1}{2}a_{22} = \ -1 \quad \longleftarrow \left(\dfrac{3}{2}\right) \times (1^a \text{ eq.}) + (2^a \text{ eq.}) \end{cases}$$

Que é resolvido para $a_{22} = -2$ e $a_{12} = -3$.

Portanto, $(0,-1)_B = (-3,-2)$

Resposta: $[I]^A_B = \begin{bmatrix} 8 & -3 \\ 5 & -2 \end{bmatrix}$

---

b) Utilizar a matriz obtida no item $a)$ para calcular v_B, sendo $v_A = (2,3)$.

Temos que:

$$[v]_B = [I]^A_B [v]_A \quad \text{e} \quad [v]_A = \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \end{bmatrix}$$

Portanto:

$$[v]_B = \begin{bmatrix} 8 & -3 \\ 5 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 7 \\ 4 \end{bmatrix}$$

Resposta: $v_B = (7, 4)$

---

c) Determinar a matriz-mudança de base de B para A.

Queremos encontrar a inversa da matriz-mudança de base de A para B, ou seja:

$$[I]^B_A = ([I]^A_B)^{-1}$$

Para isto, precisamos encontrar coeficientes $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ tal que:

$$\begin{bmatrix} 8 & -3 \\ 5 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

A relação acima resulta no sistema:

$$\begin{cases} 8a - 3c = 1 \\ 5a - 2c = 0 \\ 8b - 3d = 0 \\ 5b - 2d = 1 \end{cases}$$

Resolvido para $a = 2$, $b = -3$, $c = 5$ e $d = -8$

Resposta: $[I]^B_A = ([I]^A_B)^{-1} = \begin{bmatrix} 2 & -3 \\ 5 & -8 \end{bmatrix}$

2. Sabendo que $[I]_B^A = \begin{bmatrix} -1 & 4 \\ 4 & -11 \end{bmatrix}$ e $B = \{(3,5),(1,2)\}$, determinar a base A.

Sejam $v_1 = (x_1, y_1)$ e $v_2 = (x_2, y_2)$ os vetores da base A. Temos que:

$$(x_1, y_1) = -1(3,5) + 4(1,2) = (-3+4, -5+8) = (1,3)$$
$$(x_2, y_2) = 4(3,5) + (-11)(1,2) = (12-11, 20-22) = (1,-2)$$

Resposta: $A = \{(1,3),(1,-2)\}$

3. Seja $T : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ um operador linear. Consideremos as bases A canônica e $B = \{(4,1), (-11,-3)\}$. Sabendo que $[T]_B = \begin{bmatrix} 3 & 5 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$, determinar $[T]_A$, utilizando a relação entre matrizes semelhantes.

A relação de matrizes semelhantes diz que:

$$[T]_A = ([I]_B^A)^{-1}[T]_B[I]_B^A$$

Sendo A a base canônica do $\mathbb{R}^2$, temos que $[I]_A^B = \begin{bmatrix} 4 & -11 \\ 1 & -3 \end{bmatrix} = ([I]_B^A)^{-1}$

Podemos encontrar $[I]_B^A$ calculando a inversa de $[I]_A^B$. Para isto, precisamos encontrar coeficientes $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ tal que:

$$\begin{bmatrix} 4 & -11 \\ 1 & -3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

A relação acima resulta no sistema:

$$\begin{cases} 4a - 11c = 1 \\ a - 3c = 0 \\ 4b - 11d = 0 \\ b - 3d = 1 \end{cases}$$

Que é resolvido para $a = 3$, $b = -11$, $c = 1$ e $d = -4$

Portanto, $[I]_B^A = \begin{bmatrix} 3 & -11 \\ 1 & -4 \end{bmatrix}$

Dessa forma, temos:

$$[T]_A = ([I]_B^A)^{-1}[T]_B[I]_B^A$$
$$[T]_A = \begin{bmatrix} 4 & -11 \\ 1 & -3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 & 5 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 & -11 \\ 1 & -4 \end{bmatrix}$$
$$[T]_A = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 & -11 \\ 1 & -4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -3 \\ -1 & 4 \end{bmatrix}$$

Resposta: $[T]_A = \begin{bmatrix} 1 & -3 \\ -1 & 4 \end{bmatrix}$