# D1MAT - Lista de Exercícios 06: Matrizes

Diego Machado de Assis

June 4, 2021

1. (FGV-2005) As meninas 1 = Adriana; 2 = Bruna e 3 = Carla falam muito ao telefone entre si. A matriz $M$ mostra cada elemento $a_{ij}$ representando o número de telefonemas que "i" deu para "j" no mês de setembro:
$M = \begin{bmatrix} 0 & 13 & 10 \\ 18 & 0 & 6 \\ 9 & 12 & 0 \end{bmatrix}$. Quem mais telefonou e quem mais recebeu ligações?

Cada linha $i$ da matriz $M$ representa as ligações feitas pela menina $i$. E cada coluna $j$ representa as ligações recebidas pela menina $j$. Dessa forma, temos que:

(linha 1) Ligações de Adriana $= 0 + 13 + 10 = 23$
(linha 2) Ligações de Bruna $= 18 + 0 + 6 = 24$
(linha 3) Ligações de Carla $= 9 + 12 + 0 = 21$

(coluna 1) Ligações para Adriana $= 0 + 18 + 9 = 27$
(coluna 2) Ligações para Bruna $= 13 + 0 + 12 = 25$
(coluna 1) Ligações para Carla $= 10 + 6 + 0 = 16$

Olhando para as linhas, podemos concluir que quem mais realizou chamadas foi *Bruna*, com um total de 24 ligações. As colunas nos infomam que quem mais recebeu ligações foi *Adriana*, com um total de 27 chamadas.

**Resposta**: Quem mais telefonou foi *Bruna*. Quem mais recebeu ligações foi *Adriana*.

---

2. Uma matriz $A$ é do tipo $3 \times 5$, outra matriz $B$ é do tipo $5 \times 2$ e a matriz $C$ é do tipo $m \times 4$. Qual o valor de **m** para que exista o produto $(A \cdot B) \cdot C$?

Sendo $A$ uma matriz $3 \times 5$ e $B$ uma matriz $5 \times 2$, tempos que o produto $A \cdot B$ terá como resultado uma matriz com o número de linhas de $A$ e o número de colunas de $B$, ou seja, $A \cdot B$ será uma matriz do tipo $3 \times 2$.

Para que exista o produto $(A \cdot B) \cdot C$, o número de linhas de $C$ (valor de $m$) deve ser igual ao número de colunas de $A \cdot B$, ou seja, $m = 2$.

**Resposta**: $m = 2$

---

3. Dadas as matrizes $A = \begin{bmatrix} 3 & 5 \\ 1 & -3 \end{bmatrix}$ e $B = \begin{bmatrix} 4 & 0 \end{bmatrix}$ obtenha $X$ tal que $X \cdot A = B$

Para que o produto $X \cdot A$ exista, o número de colunas de $X$ deve ser igual ao número de linhas de $A$, ou seja, $X$ possui 2 colunas. O resultado deste produto será uma matriz com o mesmo número de linhas de $X$, ou seja, como $B$ possui 1 linha, o número de linhas de $X$ também será 1. Portanto, sabemos que $X$ é uma matriz do tipo $1 \times 2$. Seja $X = \begin{bmatrix} x_1 & x_2 \end{bmatrix}$, temos que:

$$\begin{bmatrix} x_1 & x_2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 3 & 5 \\ 1 & -3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{cases} 3x_1 + x_2 = 4 \\ 5x_1 - 3x_2 = 0 \end{cases}$$

Pela segunda equação acima, temos:

$$5x_1 - 3x_2 = 0 \implies 3x_2 = 5x_1 \implies x_2 = \frac{5}{3}x_1$$

Substituindo o valor de $x_2$ na primeira equação:

$$3x_1 + x_2 = 4 \implies 3x_1 + \frac{5}{3}x_1 = 4 \implies \frac{9}{3}x_1 + \frac{5}{3}x_1 = 4 \implies \frac{14}{3}x_1 = 4 \implies x_1 = \frac{12}{14} \implies x_1 = \frac{6}{7}$$

E, por fim:

$$x_2 = \frac{5}{3}x_1 \implies x_2 = \frac{5}{3} \cdot \frac{6}{7} \implies x_2 = \frac{10}{7}$$

**Resposta**: $X = \begin{bmatrix} \frac{6}{7} & \frac{10}{7} \end{bmatrix}$

---

4. (FGV-2004) Uma matriz $X$ possui elementos cuja soma vale 1. Se $X \cdot \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \cdot X^T = \begin{bmatrix} 1 \end{bmatrix}$ onde $X^T$ é a transposta de $X$, calcule o produto dos elementos de $X$.

Para que o primeiro produto exista, sabemos que $X$ deve possuir 2 colunas. Como o resultado final do segundo produto é uma matriz $1 \times 1$, podemos dizer que $X^T$ possui 1 coluna e, portanto, $X$ possui 1 linha. Seja então $X = \begin{bmatrix} x_1 & x_2 \end{bmatrix}$, temos que:

$$\begin{bmatrix} x_1 & x_2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} x_1 - x_2 & -x_1 + x_2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \end{bmatrix}$$

Ou seja:

$$\begin{aligned} x_1(x_1-x_2)+x_2(-x_1+x_2) &= 1 \\ x_1^2 - x_1x_2 - x_1x_2 + x_2^2 &= 1 \\ x_1^2 - 2x_1x_2 + x_2^2 &= 1 \\ (x_1-x_2)^2 &= 1 \\ x_1 - x_2 &= \pm 1 \end{aligned}$$

Pelo enunciado temos que $x_1 + x_2 = 1$.

$$\text{Se } x_1 - x_2 = 1 \implies \begin{cases} x_1 + x_2 = 1 \\ x_1 - x_2 = 1 \end{cases} \implies x_1 = 1;\ x_2 = 0$$

$$\text{Se } x_1 - x_2 = -1 \implies \begin{cases} x_1 + x_2 = 1 \\ x_1 - x_2 = -1 \end{cases} \implies x_1 = 0;\ x_2 = 1$$

Em ambos os casos, teremos que $x_1 \cdot x_2 = 0$

**Resposta**: O produto dos elementos de $X$ é igual a 0

---

5. Determine $x$ e $y$ na igualdade $\begin{bmatrix} x & 3 \\ 4 & y \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -1 & 5 \\ 8 & y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & 8 \\ 12 & -6 \end{bmatrix}$

$$x + (-1) = 4 \implies x = 5$$

$$y + y = -6 \implies y = -3$$

**Resposta**: $x = 5$ e $y = -3$

---

6, Dadas as matrizes $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 4 & 5 & 6 \end{bmatrix}$ e $B = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 3 & 0 \\ 4 & -3 \end{bmatrix}$, determine $A + 2B^T$.

$$B^T = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 4 \\ -2 & 0 & -3 \end{bmatrix}$$

$$2B^T = 2 \cdot \begin{bmatrix} 1 & 3 & 4 \\ -2 & 0 & -3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 6 & 8 \\ -4 & 0 & -6 \end{bmatrix}$$

$$A + 2B^T = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 4 & 5 & 6 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2 & 6 & 8 \\ -4 & 0 & -6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 8 & 5 \\ 0 & 5 & 0 \end{bmatrix}$$

**Resposta**: $A + 2B^T = \begin{bmatrix} 3 & 8 & 5 \\ 0 & 5 & 0 \end{bmatrix}$

---

7. (PUC) Um batalhão do exército, resolveu codificar suas mensagens através da multiplicação de matrizes. Primeiramente, associa as letras do alfabeto aos números, segundo a correspondência abaixo considerada:

| A | B | C | D | E | F | G | H | I | J | L | M | N | O | P | Q | R | S | T | U | V | W | X | Y | Z |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 | 11 | 12 | 13 | 14 | 15 | 16 | 17 | 18 | 19 | 20 | 21 | 22 | 23 | 24 | 25 |

Desta forma, supondo que o batalhão, em questão, deseja enviar a mensagem "PAZ", pode-se tomar uma matriz $2 \times 2$, da forma: $\begin{bmatrix} P & A \\ Z & - \end{bmatrix}$, a qual, usando-se da tabela acima, será dado por: $M = \begin{bmatrix} 15 & 1 \\ 25 & 0 \end{bmatrix}$. Tomando-se a matriz-chave $C$ para o código, isto é: $C = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$, transmite-se a mensagem "PAZ" através da multiplicação das matrizes $M$ e $C$, ou seja: $M \cdot C = \begin{bmatrix} 15 & 1 \\ 25 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 31 & 47 \\ 50 & 75 \end{bmatrix}$. Ou através da cadeia de números 31 47 50 75. Desta forma, utilizando-se a mesma matriz-chave $C$, a decodificação da mensagem 51 81 9 14 será compreendida pelo batalhão como a transmissão de qual palavra? E a mensagem 27 49 48 79?

O primeiro passo para decodificar uma mensagem é encontrarmos a matriz inversa de $C$, pois:

$$M \cdot C \cdot C^{-1} = M \cdot I_2 = M$$

Seja $C^{-1} = \begin{bmatrix} x & y \\ z & w \end{bmatrix}$ a matriz inversa de $C$. Temos que:

$$C \cdot C^{-1} = I_2$$

$$\begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x & y \\ z & w \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 2x + 3z & 2y + 3w \\ x + 2z & y + 2w \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Pela primeira coluna da igualdade, temos:

$$\begin{cases} 2x + 3z = 1 \\ x + 2z = 0 \implies x = -2z \end{cases}$$

Substituindo a segunda equação da primeira:

$$2(-2z) + 3z = 1 \implies -4z + 3z = 1 \implies z = -1$$
$$x = -2z \implies x = -2(-1) \implies x = 2$$

Pela segunda coluna da igualdade, temos:

$$\begin{cases} 2y + 3w = 0 \\ y + 2w = 1 \implies y = 1 - 2w \end{cases}$$

Substituindo a segunda equação da primeira:

$$2(1 - 2w) + 3w = 0 \implies 2 - 4w + 3w = 0 \implies w = 2$$
$$y = 1 - 2w \implies y = 1 - 2(2) \implies y = -3$$

Portanto, $C^{-1} = \begin{bmatrix} x & y \\ z & w \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & -3 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}$

Para decodificar a mensagem 51 81 9 14:

$$\begin{bmatrix} 51 & 81 \\ 9 & 14 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 2 & -3 \\ -1 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 51(2) + 81(-1) & 51(-3) + 81(2) \\ 9(2) + 14(-1) & 9(-3) + 14(2) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 21 & 9 \\ 4 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} V & I \\ D & A \end{bmatrix} = V\ I\ D\ A$$

Para decodificar a mensagem 27 49 48 79:

$$\begin{bmatrix} 27 & 49 \\ 48 & 79 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 2 & -3 \\ -1 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 27(2) + 49(-1) & 27(-3) + 49(2) \\ 48(2) + 79(-1) & 48(-3) + 79(2) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 & 17 \\ 17 & 14 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} E & R \\ R & O \end{bmatrix} = E\ R\ R\ O$$

**Resposta**: A mensagem 51 81 9 14 será compreendida como **VIDA** e a mensagem 27 49 48 79 será compreendida como **ERRO**.