Matrizes

31 de maio de 2021

MATRIZ

- Agrupamento retangular de elementos, dispostos em m linhas e n colunas.

Matriz

- Agrupamento retangular de elementos, dispostos em m linhas e n colunas.
- O *tamanho* (ou *dimensão*): $m \times n$.

Matriz

- Agrupamento retangular de elementos, dispostos em m linhas e n colunas.

- O *tamanho* (ou *dimensão*): $m \times n$.

- elemento a_{ij} ao componente da matriz que ocupar a linha i e a coluna j.

Matriz

- Agrupamento retangular de elementos, dispostos em m linhas e n colunas.
- O *tamanho* (ou *dimensão*): $m \times n$.
- elemento a_{ij} ao componente da matriz que ocupar a linha i e a coluna j.

$$M = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

EXEMPLO 1

$M = \begin{bmatrix} -1 & 5 & 0 \\ 2 & -4 & 6 \end{bmatrix}$ é uma matriz 2×3, em que:

$a_{11} = -1$ é o elemento da linha 1 e coluna 1.

$a_{12} = 5$ é o elemento da linha 1 e coluna 2.

$a_{13} = 0$ é o elemento da linha 1 e coluna 3.

$a_{21} = 2$ é o elemento da linha 2 e coluna 1.

$a_{22} = -4$ é o elemento da linha 2 e coluna 2.

$a_{23} = 6$ é o elemento da linha 2 e coluna 3.

EXEMPLO 2:

Seja $M = (a_{ij})_{3\times 2} = i - 2j$. Consideremos a representação genérica de uma matriz 3×2:

$$M = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{bmatrix}.$$

Exemplo 2:

Seja $M = (a_{ij})_{3\times 2} = i - 2j$. Consideremos a representação genérica de uma matriz 3×2:

$$M = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{bmatrix}.$$

Para descobrir o elemento a_{11}, sabemos que $i = 1$ e $j = 1$. Substituindo na relação, temos que $a_{11} = 1 - 2.1 = -1$.

EXEMPLO 2:

Seja $M = (a_{ij})_{3\times 2} = i - 2j$. Consideremos a representação genérica de uma matriz 3×2:

$$M = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{bmatrix}.$$

Para descobrir o elemento a_{11}, sabemos que $i = 1$ e $j = 1$. Substituindo na relação, temos que $a_{11} = 1 - 2.1 = -1$.

Para o elemento a_{12}, sabemos que $i = 1$ e $j = 2$. Substituindo na relação, temos que $a_{12} = 1 - 2.2 = -3$.

Exemplo 2:

Seja $M = (a_{ij})_{3\times 2} = i - 2j$. Consideremos a representação genérica de uma matriz 3×2:

$$M = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{bmatrix}.$$

Para descobrir o elemento a_{11}, sabemos que $i = 1$ e $j = 1$. Substituindo na relação, temos que $a_{11} = 1 - 2.1 = -1$.

Para o elemento a_{12}, sabemos que $i = 1$ e $j = 2$. Substituindo na relação, temos que $a_{12} = 1 - 2.2 = -3$.

$$M = \begin{bmatrix} -1 & -3 \\ 0 & -2 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$$

Tipos de Matrizes

1. **Matriz linha:** $1 \times n$.

TIPOS DE MATRIZES

1. **Matriz linha:** $1 \times n$.

   Exemplo: $M_{1\times n} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \end{bmatrix}$.

TIPOS DE MATRIZES

1. **Matriz linha:** $1 \times n$.

   Exemplo: $M_{1\times n} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \end{bmatrix}$.

2. **Matriz coluna:** $m \times 1$

Tipos de Matrizes

1. **Matriz linha:** $1 \times n$.

   Exemplo: $M_{1\times n} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \end{bmatrix}$.

2. **Matriz coluna:** $m \times 1$

   Exemplo: $M_{m\times 1} = \begin{bmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \vdots \\ a_{m1} \end{bmatrix}$.

Tipos de Matrizes

1. **Matriz linha:** $1 \times n$.

   Exemplo: $M_{1\times n} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \end{bmatrix}$.

2. **Matriz coluna:** $m \times 1$

   Exemplo: $M_{m\times 1} = \begin{bmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \vdots \\ a_{m1} \end{bmatrix}$.

3. **Matriz nula: Notação:** $0_{m\times n}$.

Tipos de Matrizes

1. **Matriz linha:** $1 \times n$.

   Exemplo: $M_{1\times n} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \end{bmatrix}$.

2. **Matriz coluna:** $m \times 1$

   Exemplo: $M_{m\times 1} = \begin{bmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \vdots \\ a_{m1} \end{bmatrix}$.

3. **Matriz nula: Notação:** $0_{m\times n}$.

   Exemplo: $0 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$.

TIPOS DE MATRIZES

1. **Matriz quadrada de ordem** n**:** $n \times n$.

Tipos de matrizes

1. **Matriz quadrada de ordem n:** $n \times n$.

Exemplo: $M = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix}$.

TIPOS DE MATRIZES

1. **Matriz quadrada de ordem n:** $n \times n$.

   Exemplo: $M = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix}$.

2. **Matriz diagonal de ordem n:** $a_{ij} = 0$ para todo $i \neq j$.

Tipos de matrizes

1. **Matriz quadrada de ordem** n**:** $n \times n$.

   Exemplo: $M = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix}$.

2. **Matriz diagonal de ordem** n**:** $a_{ij} = 0$ para todo $i \neq j$.

   Exemplo: $M = \begin{bmatrix} 10 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -3 \end{bmatrix}$

Tipos de matrizes

1. **Matriz quadrada de ordem n:** $n \times n$.

   Exemplo: $M = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix}$.

2. **Matriz diagonal de ordem n:** $a_{ij} = 0$ para todo $i \neq j$.

   Exemplo: $M = \begin{bmatrix} 10 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -3 \end{bmatrix}$

Tipos de matrizes

1. **Matriz identidade (ou matriz unidade) de ordem** n**:**
   Notação: I_n.

Tipos de matrizes

1. **Matriz identidade (ou matriz unidade) de ordem** n**:**
   Notação: I_n.

   Exemplo: $M = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

Tipos de matrizes

1. **Matriz triangular:** é toda matriz quadrada em que os elementos acima ou abaixo da diagonal são todos nulos. Em uma matriz triangular, ela é chamada triangular superior se $(a_{ij}) = 0$, para $i > j$ ou triangular inferior, $a_{ij} = 0$ para $i < j$.

Tipos de matrizes

1. **Matriz triangular:** é toda matriz quadrada em que os elementos acima ou abaixo da diagonal são todos nulos. Em uma matriz triangular, ela é chamada triangular superior se $(a_{ij}) = 0$, para $i > j$ ou triangular inferior, $a_{ij} = 0$ para $i < j$.

   Exemplo: A matriz $A = \begin{bmatrix} 10 & 5 & 7 \\ 0 & -1 & 3 \\ 0 & 0 & -3 \end{bmatrix}$ é uma matriz triangular superior e $A = \begin{bmatrix} -1 & 6 & 4 \\ 3 & 3 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ é uma matriz triangular inferior.

Igualdade de matrizes

Duas matrizes $A = (a_{ij})_{m \times n}$ e $B = (b_{ij})_{m \times n}$ são iguais quando $a_{ij} = b_{ij}$ para todo $i = 1, \ldots, m$ e todo $j = 1, \ldots, n$.

Isto significa que, para serem iguais, duas matrizes devem ser de mesma ordem e apresentar todos os elementos correspondentes iguais.

Igualdade de matrizes

Duas matrizes $A = (a_{ij})_{m\times n}$ e $B = (b_{ij})_{m\times n}$ são iguais quando $a_{ij} = b_{ij}$ para todo $i = 1, \ldots, m$ e todo $j = 1, \ldots, n$.

Isto significa que, para serem iguais, duas matrizes devem ser de mesma ordem e apresentar todos os elementos correspondentes iguais.

Exemplos:

a) $\begin{bmatrix} 1 & -3 \\ 7 & -4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -3 \\ 7 & -4 \end{bmatrix}$, pois $a_{11} = b_{11}, a_{12} = b_{12}, a_{21} = b_{21}$ e $a_{22} = b_{22}$.

Igualdade de matrizes

Duas matrizes $A = (a_{ij})_{m \times n}$ e $B = (b_{ij})_{m \times n}$ são iguais quando $a_{ij} = b_{ij}$ para todo $i = 1, \ldots, m$ e todo $j = 1, \ldots, n$.

Isto significa que, para serem iguais, duas matrizes devem ser de mesma ordem e apresentar todos os elementos correspondentes iguais.

Exemplos:

a) $\begin{bmatrix} 1 & -3 \\ 7 & -4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -3 \\ 7 & -4 \end{bmatrix}$, pois $a_{11} = b_{11}, a_{12} = b_{12}, a_{21} = b_{21}$ e $a_{22} = b_{22}$.

b) $\begin{bmatrix} 1 & -3 \\ 7 & -4 \end{bmatrix} \neq \begin{bmatrix} 1 & 7 \\ -3 & -4 \end{bmatrix}$, pois $a_{12} \neq b_{12}$ e $a_{21} \neq b_{21}$.

Adição de matrizes

Dadas duas matrizes $A = (a_{ij})_{m \times n}$ e $B = (b_{ij})_{m \times n}$, denomina-se *soma* ou *adição* da matriz A com a matriz B, e é indicada por $A + B$, a matriz $C = (c_{ij})_{m \times n}$, tal que $c_{ij} = a_{ij} + b_{ij}$, $\forall i,j$, $i = 1, \ldots, m$ e $j = 1, \ldots, n$.

Adição de matrizes

Dadas duas matrizes $A = (a_{ij})_{m\times n}$ e $B = (b_{ij})_{m\times n}$, denomina-se *soma* ou *adição* da matriz A com a matriz B, e é indicada por $A + B$, a matriz $C = (c_{ij})_{m\times n}$, tal que $c_{ij} = a_{ij} + b_{ij}$, $\forall i,j, i = 1, \ldots, m$ e $j = 1, \ldots, n$.

Observação: Para efetuar a soma de matrizes, elas precisam ser do mesmo tamanho.

Adição de matrizes

Dadas duas matrizes $A = (a_{ij})_{m\times n}$ e $B = (b_{ij})_{m\times n}$, denomina-se *soma* ou *adição* da matriz A com a matriz B, e é indicada por $A + B$, a matriz $C = (c_{ij})_{m\times n}$, tal que $c_{ij} = a_{ij} + b_{ij}$, $\forall i,j$, $i = 1, \dots, m$ e $j = 1, \dots, n$.

Observação: Para efetuar a soma de matrizes, elas precisam ser do mesmo tamanho.

Exemplo: Sejam $A = \begin{bmatrix} -5 & -8 & 1 \\ 4 & 0 & 3 \end{bmatrix}$ e $B = \begin{bmatrix} 2 & -4 & 4 \\ -6 & 3 & 1 \end{bmatrix}$.

Então,

$$A + B = \begin{bmatrix} -5+2 & -8+(-4) & 1+4 \\ 4+(-6) & 0+3 & 3+1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -3 & -12 & 5 \\ -2 & 3 & 4 \end{bmatrix}.$$

Subtração de matrizes

Dada a matriz $A = (a_{ij})_{m \times n}$, chama-se *matriz oposta de A* a matriz B, tal que $A + B = 0$.

Subtração de matrizes

Dada a matriz $A = (a_{ij})_{m \times n}$, chama-se *matriz oposta de A* a matriz B, tal que $A + B = 0$.

Notação: $B = -A$.

Subtração de matrizes

Dada a matriz $A = (a_{ij})_{m\times n}$, chama-se *matriz oposta de A* a matriz B, tal que $A + B = 0$.

Notação: $B = -A$.

Exemplo: Se $A = \begin{bmatrix} -4 & 13 \\ 2 & -9 \end{bmatrix}$, então $-A = \begin{bmatrix} 4 & -13 \\ -2 & 9 \end{bmatrix}$.

Subtração de matrizes

Dada a matriz $A = (a_{ij})_{m\times n}$, chama-se *matriz oposta de A* a matriz B, tal que $A + B = 0$.

Notação: $B = -A$.

Exemplo: Se $A = \begin{bmatrix} -4 & 13 \\ 2 & -9 \end{bmatrix}$, então $-A = \begin{bmatrix} 4 & -13 \\ -2 & 9 \end{bmatrix}$.

Dadas duas matrizes $A = (a_{ij})_{m\times n}$ e $B = (b_{ij})_{m\times n}$, denomina-se *diferença* da matriz A com a matriz B, e é indicada por $A - B$, a matriz soma de A com a oposta de $B(A - B = A + (-B))$.

SUBTRAÇÃO DE MATRIZES

Dada a matriz $A = (a_{ij})_{m \times n}$, chama-se *matriz oposta de* A a matriz B, tal que $A + B = 0$.

Notação: $B = -A$.

Exemplo: Se $A = \begin{bmatrix} -4 & 13 \\ 2 & -9 \end{bmatrix}$, então $-A = \begin{bmatrix} 4 & -13 \\ -2 & 9 \end{bmatrix}$.

Dadas duas matrizes $A = (a_{ij})_{m \times n}$ e $B = (b_{ij})_{m \times n}$, denomina-se *diferença* da matriz A com a matriz B, e é indicada por $A - B$, a matriz soma de A com a oposta de $B (A - B = A + (-B))$.

Exemplo: Sejam $A = \begin{bmatrix} -5 & -8 & 1 \\ 4 & 0 & 3 \end{bmatrix}$ e $B = \begin{bmatrix} 2 & -4 & 4 \\ -6 & 3 & 1 \end{bmatrix}$.

Então, $A - B = \begin{bmatrix} -5 + (-2) & -8 + 4 & 1 + (-4) \\ 4 + 6 & 0 + (-3) & 3 + (-1) \end{bmatrix} =$

Multiplicação de um escalar por uma matriz

O produto de um escalar (ou um número real) k pela matriz $A = (a_{ij})_{m\times n}$, cuja notação é $k.A$, é a matriz obtida multiplicando-se cada elemento de A por $k (k.A = (k.a_{ij})_{m\times n})$.

Multiplicação de um escalar por uma matriz

O produto de um escalar (ou um número real) k pela matriz $A = (a_{ij})_{m\times n}$, cuja notação é $k.A$, é a matriz obtida multiplicando-se cada elemento de A por $k(k.A = (k.a_{ij})_{m\times n})$.

$$k.M = \begin{bmatrix} ka_{11} & ka_{12} & \dots & ka_{1n} \\ ka_{21} & ka_{22} & \dots & ka_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ ka_{m1} & ka_{m2} & \dots & ka_{mn} \end{bmatrix}.$$

Multiplicação de um escalar por uma matriz

O produto de um escalar (ou um número real) k pela matriz $A = (a_{ij})_{m\times n}$, cuja notação é $k.A$, é a matriz obtida multiplicando-se cada elemento de A por $k (k.A = (k.a_{ij})_{m\times n})$.

$$k.M = \begin{bmatrix} ka_{11} & ka_{12} & \dots & ka_{1n} \\ ka_{21} & ka_{22} & \dots & ka_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ ka_{m1} & ka_{m2} & \dots & ka_{mn} \end{bmatrix}.$$

Exemplo: Seja $A = \begin{bmatrix} -5 & 2 \\ 8 & 9 \\ 7 & 1 \end{bmatrix}$. Então

$$5A = \begin{bmatrix} 5.(-5) & 5.2 \\ 5.8 & 5.9 \\ 5.7 & 5.1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -25 & 10 \\ 40 & 45 \\ 35 & 5 \end{bmatrix}.$$

Produto de matrizes

Só é possível multiplicar duas matrizes se o número de colunas da primeira matriz (A) for igual ao número de linhas da segunda matriz (B). A matriz resultante tem o mesmo número de linhas da matriz A e o mesmo número de colunas da matriz B.

Produto de matrizes

Só é possível multiplicar duas matrizes se o número de colunas da primeira matriz (A) for igual ao número de linhas da segunda matriz (B). A matriz resultante tem o mesmo número de linhas da matriz A e o mesmo número de colunas da matriz B.

Isto é, se o tamanho de A é $m \times n$ e o de B é $p \times q$, obrigatoriamente temos que ter $n = q$. E a matriz $A \times B$ terá o tamanho $m \times q$.

Produto de matrizes

Exemplo: Sejam $A = \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ 3 & -4 \end{bmatrix}_{(2\times 2)}$ e $B = \begin{bmatrix} -6 & 2 \\ 3 & 1 \end{bmatrix}_{(2\times 2)}$.
Vamos determinar $A.B$ e $B.A$.

$$A.B = \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ 3 & -4 \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} -6 & 2 \\ 3 & 1 \end{bmatrix} =$$
$$\begin{bmatrix} (-2).(-6)+1.3 & (-2).2+1.1 \\ 3.(-6)+(-4).3 & 3.2+(-4).1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 15 & -3 \\ -30 & 2 \end{bmatrix}.$$

Produto de matrizes

Exemplo: Sejam $A = \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ 3 & -4 \end{bmatrix}_{(2\times 2)}$ e $B = \begin{bmatrix} -6 & 2 \\ 3 & 1 \end{bmatrix}_{(2\times 2)}$.

Vamos determinar $A.B$ e $B.A$.

$$A.B = \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ 3 & -4 \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} -6 & 2 \\ 3 & 1 \end{bmatrix} =$$

$$\begin{bmatrix} (-2).(-6) + 1.3 & (-2).2 + 1.1 \\ 3.(-6) + (-4).3 & 3.2 + (-4).1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 15 & -3 \\ -30 & 2 \end{bmatrix}.$$

$$B.A = \begin{bmatrix} -6 & 2 \\ 3 & 1 \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ 3 & -4 \end{bmatrix} =$$

$$\begin{bmatrix} (-6).(-2) + 2.3 & (-6).1 + 2.(-4) \\ 3.(-2) + 1.3 & 3.1 + 1.(-4) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 18 & -14 \\ -3 & 1 \end{bmatrix}.$$

Matriz transposta

Dada a matriz $A = (a_{ij})_{m \times n}$, denomina-se *transposta* de A a matriz $B = (b_{ji})_{n \times m}$, tal que $b_{ji} = a_{ij}, \forall i, j, i = 1, \ldots, m$ e $j = 1, \ldots, n$.

Matriz transposta

Dada a matriz $A = (a_{ij})_{m \times n}$, denomina-se *transposta* de A a matriz $B = (b_{ji})_{n \times m}$, tal que $b_{ji} = a_{ij}, \forall i, j, i = 1, \ldots, m$ e $j = 1, \ldots, n$.

Para determinar a matriz transposta de A, basta trocar suas linhas por colunas ou suas colunas por linhas. A notação utilizada é A^t, A^T ou A'.

Matriz transposta

Dada a matriz $A = (a_{ij})_{m\times n}$, denomina-se *transposta* de A a matriz $B = (b_{ji})_{n\times m}$, tal que $b_{ji} = a_{ij}, \forall i,j, i = 1,\ldots,m$ e $j = 1,\ldots,n$.

Para determinar a matriz transposta de A, basta trocar suas linhas por colunas ou suas colunas por linhas. A notação utilizada é A^t, A^T ou A'.

Exemplo: Seja $A = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 4 & -6 \\ 2 & 5 \end{bmatrix}_{3\times 2}$. Então,

$A^T = \begin{bmatrix} -1 & 4 & 4 \\ 0 & -6 & 5 \end{bmatrix}_{2\times 3}$.

Matriz simétrica e antissimétrica

1. Uma matriz é dita *simétrica* se for quadrada e $A = A^T$.

MATRIZ SIMÉTRICA E ANTISSIMÉTRICA

1. Uma matriz é dita *simétrica* se for quadrada e $A = A^T$.

Exemplo: $A = \begin{bmatrix} 6 & -2 & 3 \\ -2 & 5 & 9 \\ 3 & 9 & 0 \end{bmatrix} = A^T.$

Matriz simétrica e antissimétrica

1. Uma matriz é dita *simétrica* se for quadrada e $A = A^T$.

   Exemplo: $A = \begin{bmatrix} 6 & -2 & 3 \\ -2 & 5 & 9 \\ 3 & 9 & 0 \end{bmatrix} = A^T.$

2. Uma matriz é dita *antissimétrica* se for quadrada e $A = -A^T$.

Matriz simétrica e antissimétrica

1. Uma matriz é dita *simétrica* se for quadrada e $A = A^T$.

   Exemplo: $A = \begin{bmatrix} 6 & -2 & 3 \\ -2 & 5 & 9 \\ 3 & 9 & 0 \end{bmatrix} = A^T.$

2. Uma matriz é dita *antissimétrica* se for quadrada e $A = -A^T$.

   Exemplo: $A = \begin{bmatrix} 0 & -2 & 3 \\ 2 & 0 & -9 \\ -3 & 9 & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow A^T =$
   $\begin{bmatrix} 0 & 2 & -3 \\ -2 & 0 & 9 \\ 3 & -9 & 0 \end{bmatrix} = -\begin{bmatrix} 0 & -2 & 3 \\ 2 & 0 & -9 \\ -3 & 9 & 0 \end{bmatrix} = -A.$

Inversa de uma matriz

Uma matriz quadrada A, de ordem n, se diz *invertível* (ou não singular) se existir uma matriz B, tal que $A.B = B.A = I_n$. A matriz B é dita inversa de A e é única. Uma matriz não invertível é denominada *singular*.

Inversa de uma matriz

Uma matriz quadrada A, de ordem n, se diz *invertível* (ou não singular) se existir uma matriz B, tal que $A.B = B.A = I_n$. A matriz B é dita inversa de A e é única. Uma matriz não invertível é denominada *singular*.

Notação: $B = A^{-1}$.

Inversa de uma matriz

Uma matriz quadrada A, de ordem n, se diz *invertível* (ou não singular) se existir uma matriz B, tal que $A.B = B.A = I_n$. A matriz B é dita inversa de A e é única. Uma matriz não invertível é denominada *singular*.

Notação: $B = A^{-1}$.

Exemplo:

Se $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 4 & 3 \end{bmatrix}$, definamos a inversa de A como

$A^{-1} = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$, tal que $A.A^{-1} = I$.

Inversa de uma matriz

Uma matriz quadrada A, de ordem n, se diz *invertível* (ou não singular) se existir uma matriz B, tal que $A.B = B.A = I_n$. A matriz B é dita inversa de A e é única. Uma matriz não invertível é denominada *singular*.

Notação: $B = A^{-1}$.

Exemplo:

Se $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 4 & 3 \end{bmatrix}$, definamos a inversa de A como

$A^{-1} = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$, tal que $A.A^{-1} = I$.

Assim, $A.A^{-1} = I \Rightarrow \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 4 & 3 \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \Rightarrow$

$\begin{bmatrix} 2a + c & 2b + d \\ 4a + 3c & 4b + 3d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$.

Inversa de uma matriz

Uma matriz quadrada A, de ordem n, se diz *invertível* (ou não singular) se existir uma matriz B, tal que $A.B = B.A = I_n$. A matriz B é dita inversa de A e é única. Uma matriz não invertível é denominada *singular*.

Notação: $B = A^{-1}$.

Exemplo:

Se $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 4 & 3 \end{bmatrix}$, definamos a inversa de A como $A^{-1} = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$, tal que $A.A^{-1} = I$.

Assim, $A.A^{-1} = I \Rightarrow \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 4 & 3 \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \Rightarrow$

$\begin{bmatrix} 2a + c & 2b + d \\ 4a + 3c & 4b + 3d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$.

Então, $\begin{cases} 2a + c = 1 \\ 4a + 3c = 0 \\ 2b + d = 0 \\ 4b + 3d = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} c = 1 - 2a \\ 4a + 3c = 0 \\ d = -2b \\ 4b + 3d = 1 \end{cases}$.

Então, $\begin{cases} 2a + c = 1 \\ 4a + 3c = 0 \\ 2b + d = 0 \\ 4b + 3d = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} c = 1 - 2a \\ 4a + 3c = 0 \\ d = -2b \\ 4b + 3d = 1 \end{cases}$.

Substituindo as equações $c = 1 - 2a$ em $4a + 3c = 0$ e $d = -2b$ em $4b + 3d = 1$, temos:

$$\begin{cases} c = 1 - 2a \\ 4a + 3(1 - 2a) = 0 \\ d = -2b \\ 4b + 3(-2b) = 1 \end{cases}$$

Então, $\begin{cases} 2a + c = 1 \\ 4a + 3c = 0 \\ 2b + d = 0 \\ 4b + 3d = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} c = 1 - 2a \\ 4a + 3c = 0 \\ d = -2b \\ 4b + 3d = 1 \end{cases}$.

Substituindo as equações $c = 1 - 2a$ em $4a + 3c = 0$ e $d = -2b$ em $4b + 3d = 1$, temos:

$$\begin{cases} c = 1 - 2a \\ 4a + 3(1 - 2a) = 0 \\ d = -2b \\ 4b + 3(-2b) = 1 \end{cases}$$

Da equação $4a + 3c = 0$, temos
$4a + 3(1 - 2a) = 4a + 3 - 6a = 0 \Rightarrow 2a = 3 \Rightarrow a = \frac{3}{2}$.

Então, $\begin{cases} 2a + c = 1 \\ 4a + 3c = 0 \\ 2b + d = 0 \\ 4b + 3d = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} c = 1 - 2a \\ 4a + 3c = 0 \\ d = -2b \\ 4b + 3d = 1 \end{cases}$.

Substituindo as equações $c = 1 - 2a$ em $4a + 3c = 0$ e $d = -2b$ em $4b + 3d = 1$, temos:

$$\begin{cases} c = 1 - 2a \\ 4a + 3(1 - 2a) = 0 \\ d = -2b \\ 4b + 3(-2b) = 1 \end{cases}$$

Da equação $4a + 3c = 0$, temos
$4a + 3(1 - 2a) = 4a + 3 - 6a = 0 \Rightarrow 2a = 3 \Rightarrow a = \frac{3}{2}$.

Substituindo na equação $c = 1 - 2a$,
$c = 1 - 2.\frac{3}{2} = 1 - 3 \Rightarrow c = -2$.

Então, $\begin{cases} 2a + c = 1 \\ 4a + 3c = 0 \\ 2b + d = 0 \\ 4b + 3d = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} c = 1 - 2a \\ 4a + 3c = 0 \\ d = -2b \\ 4b + 3d = 1 \end{cases}$.

Substituindo as equações $c = 1 - 2a$ em $4a + 3c = 0$ e $d = -2b$ em $4b + 3d = 1$, temos:

$$\begin{cases} c = 1 - 2a \\ 4a + 3(1 - 2a) = 0 \\ d = -2b \\ 4b + 3(-2b) = 1 \end{cases}$$

Da equação $4a + 3c = 0$, temos
$4a + 3(1 - 2a) = 4a + 3 - 6a = 0 \Rightarrow 2a = 3 \Rightarrow a = \frac{3}{2}$.

Substituindo na equação $c = 1 - 2a$,
$c = 1 - 2.\frac{3}{2} = 1 - 3 \Rightarrow c = -2$.

Da equação $4b + 3d = 1$,

$4b - 6b = 1 \Rightarrow 2b = -1 \Rightarrow b = -\frac{1}{2}$.

Da equação $4b + 3d = 1$,

$4b - 6b = 1 \Rightarrow 2b = -1 \Rightarrow b = -\frac{1}{2}$.

Substituindo na equação $d = -2b$,

$d = (-2).\left(-1\frac{1}{2}\right) d = 1$.

Da equação $4b + 3d = 1$,

$4b - 6b = 1 \Rightarrow 2b = -1 \Rightarrow b = -\frac{1}{2}$.

Substituindo na equação $d = -2b$,

$d = (-2).\left(-1\frac{1}{2}\right) d = 1$.

Logo, a inversa da matriz A é a matriz $A^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{3}{2} & -\frac{1}{2} \\ -2 & 1 \end{bmatrix}$.

Dúvidas???