D1MAT - Lista de Exercícios 11: Autovetores e autovalores

Diego Machado de Assis

July 11, 2021

1. Determinar os autovalores e autovetores da transformação linear $T : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2, T(x, y) = (x + 2y, -x + 4y)$.

A matriz canônica da transformação T é dada por

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 4 \end{bmatrix}$$

E sua equação característica é dada por

$$\det(A - \lambda I) = \begin{vmatrix} 1-\lambda & 2 \\ -1 & 4-\lambda \end{vmatrix} = 0$$

Resolvendo o determinante temos que:

$$\begin{aligned} (1-\lambda)(4-\lambda) - 2(-1) &= 0 \\ 4 - \lambda - 4\lambda + \lambda^2 + 2 &= 0 \\ \lambda^2 - 5\lambda + 6 &= 0 \end{aligned} \tag{1}$$

As raízes da equação 1 são os autovalores da transformação linear: $\lambda_1 = 3$ e $\lambda_2 = 2$

Para encontrar os autovetores, devemos resolver o sistema:

$$(A - \lambda I)v = 0$$

Em que $v = (x, y)$ representa o autovetor associado ao autovalor λ.

O sistema ficará então da seguinte forma:

$$\begin{bmatrix} 1-\lambda & 2 \\ -1 & 4-\lambda \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Para $\lambda_1 = 3$ o sistema será:

$$\begin{bmatrix} -2 & 2 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Ou ainda:

$$\begin{cases} -2x + 2y = 0 \\ -x + y = 0 \end{cases}$$

Que é resolvido para $y = x$. E portanto, os vetores do tipo $v_1 = (x, x)$ ou $v_1 = x(1, 1), x \neq 0$ são autovetores associados ao autovalor $\lambda_1 = 3$.

Para $\lambda_2 = 2$ o sistema será:

$$\begin{bmatrix} -1 & 2 \\ -1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Ou ainda:

$$\begin{cases} -x + 2y = 0 \\ -x + 2y = 0 \end{cases}$$

Que é resolvido para $x = 2y$. E portanto, os vetores do tipo $v_2 = (2y, y)$ ou $v_2 = y(2, 1), y \neq 0$ são autovetores associados ao autovalor $\lambda_2 = 2$.

Resposta: $\lambda_1 = 3$ e $v_1 = x(1, 1)$; $\lambda_2 = 2$ e $v_2 = x(2, 1)$. Para $x \neq 0$.

2. Seja $T : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ o operador linear definido por $T(x,y) = (7x - 4y, -4x + y)$

a) Determinar uma base do $\mathbb{R}^2$ em relação à qual a matriz do operador T é diagonal.

A base em relação à qual a matriz do operador T é diagonal é composta pelo conjunto de autovetores distintos de T. Portanto, precisamos encontrar esses autovetores.

A matriz canônica da transformação T é dada por

$$A = \begin{bmatrix} 7 & -4 \\ -4 & 1 \end{bmatrix}$$

E sua equação característica é dada por

$$\det(A - \lambda I) = \begin{vmatrix} 7-\lambda & -4 \\ -4 & 1-\lambda \end{vmatrix} = 0$$

Resolvendo o determinante temos que:

$$\begin{aligned} (7-\lambda)(1-\lambda) - (-4)(-4) &= 0 \\ 7 - 7\lambda - \lambda + \lambda^2 - 16 &= 0 \\ \lambda^2 - 8\lambda - 9 &= 0 \end{aligned} \tag{2}$$

As raízes da equação 2 são os autovalores do operador T: $\lambda_1 = 9$ e $\lambda_2 = -1$

Para encontrar os autovetores, devemos resolver o sistema:

$$(A - \lambda I)v = 0$$

Em que $v = (x,y)$ representa o autovetor associado ao autovalor λ.

O sistema ficará então da seguinte forma:

$$\begin{bmatrix} 7-\lambda & -4 \\ -4 & 1-\lambda \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Para $\lambda_1 = 9$ o sistema será:

$$\begin{bmatrix} -2 & -4 \\ -4 & -8 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Ou ainda:

$$\begin{cases} -2x - 4y = 0 \\ -4x - 8y = 0 \end{cases}$$

Que é resolvido para $x = -2y$. E portanto, os vetores do tipo $v_1 = (-2y, y)$ ou $v_1 = y(-2,1), y \neq 0$ são autovetores associados ao autovalor $\lambda_1 = 9$.

Para $\lambda_2 = -1$ o sistema será:

$$\begin{bmatrix} 8 & -4 \\ -4 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Ou ainda:

$$\begin{cases} 8x - 4y = 0 \\ -4x + 2y = 0 \end{cases}$$

Que é resolvido para $y = 2x$. E portanto, os vetores do tipo $v_2 = (x, 2x)$ ou $v_2 = x(1, 2), x \neq 0$ são autovetores associados ao autovalor $\lambda_2 = -1$.

Resposta: O operador T é diagonal à base $P = \{(-2, 1), (1, 2)\}$

---

b) Dar a matriz de T nessa base.

A matriz do operador T na base dos seus autovetores é uma matriz diagonal cujos elementos da diagonal principal são os autovalores associados. Portanto:

$$[T]_P = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 9 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$$

Resposta: $[T]_P = \begin{bmatrix} 9 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$

3. Verifique se $A = \begin{bmatrix} 2 & 4 \\ 3 & 1 \end{bmatrix}$ é diagonalizável e, caso seja, determinar uma matriz P que diagonaliza A e calcular $P^{-1}AP$.

A matriz A será diagonalizável se existir uma base do $\mathbb{R}^2$ formada por autovetores de A. Para isso, precisamos então encontrar dois autovalores distintos de A.

A equação característica de A é dada por

$$\det(A - \lambda I) = \begin{vmatrix} 2-\lambda & 4 \\ 3 & 1-\lambda \end{vmatrix} = 0$$

Resolvendo o determinante temos que:

$$\begin{aligned} (2-\lambda)(1-\lambda) - 4 \cdot 3 &= 0 \\ 2 - 2\lambda - \lambda + \lambda^2 - 12 &= 0 \\ \lambda^2 - 3\lambda - 10 &= 0 \end{aligned} \tag{3}$$

As raízes da equação 3 são os autovalores de A: $\lambda_1 = 5$ e $\lambda_2 = -2$

Como A possui dois autovalores distintos, A é diagonalizável e a matriz P que diagonaliza A será a matriz formada a partir dos autovetores de A.

Para encontrar os autovetores, devemos resolver o sistema:

$$(A - \lambda I)v = 0$$

Em que $v = (x, y)$ representa o autovetor associado ao autovalor λ.

O sistema ficará então da seguinte forma:

$$\begin{bmatrix} 2-\lambda & 4 \\ 3 & 1-\lambda \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Para $\lambda_1 = 5$ o sistema será:

$$\begin{bmatrix} -3 & 4 \\ 3 & -4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Ou ainda:

$$\begin{cases} -3x + 4y = 0 \\ 3x - 4y = 0 \end{cases}$$

Que é resolvido para $y = \frac{3}{4}x$. E portanto, os vetores do tipo $v_1 = \left(x, \frac{3}{4}x\right)$ ou $v_1 = \frac{x}{4}(4,3), x \neq 0$ são autovetores associados ao autovalor $\lambda_1 = 5$.

Para $\lambda_2 = -2$ o sistema será:

$$\begin{bmatrix} 4 & 4 \\ 3 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Ou ainda:

$$\begin{cases} 4x + 4y = 0 \\ 3x + 3y = 0 \end{cases}$$

Que é resolvido para $x = -y$. E portanto, os vetores do tipo $v_2 = (-y, y)$ ou $v_2 = y(-1, 1), y \neq 0$ são autovetores associados ao autovalor $\lambda_2 = -2$.

O conjunto $P = \{(4, 3), (-1, 1)\}$ forma uma base do $\mathbb{R}^2$ e portanto uma matriz que diagonaliza A é:

$$P = \begin{bmatrix} 4 & -1 \\ 3 & 1 \end{bmatrix}$$

$P^{-1}AP$ será a matriz diagonal cujos elementos da diagonal principal são os autovalores de A. Portanto:

$$P^{-1}AP = \begin{bmatrix} 5 & 0 \\ 0 & -2 \end{bmatrix}$$

Resposta: $P = \begin{bmatrix} 4 & -1 \\ 3 & 1 \end{bmatrix}$ e $P^{-1}AP = \begin{bmatrix} 5 & 0 \\ 0 & -2 \end{bmatrix}$