
CAPÍTULO 1

TÉCNICAS DE CONTAGEM

Dois conceitos são fundamentais para a análise combinatória: Fatorial de um número e o Princípio Fundamental da Contagem.

Os três tipos principais de agrupamentos são as Permutações, os Arranjos e as Combinações. Estes agrupamentos podem ser simples, com repetição ou circulares.

1.1 Fatorial de um Número

Nos problemas de contagem é muito comum um tipo de problema em que, para se obter o resultado referente ao total das possibilidades, deve-se multiplicar um determinado número natural pelos seus antecedentes até chegar à unidade.

Para facilitar a obtenção desses resultados, as calculadoras (consideradas científicas) vêm com uma tecla conhecida como fatorial de n , que significa produto do número natural n pelos seus antecedentes até chegar à unidade.

Considere n um número inteiro não negativo. O fatorial de n , indicado por $n!$, é definido como sendo a seguinte multiplicação:

$$n! = n.(n-1).(n-2).\dots.3.2.1.$$

A definição acima refere-se a números maiores ou igual a 2, ou seja, $n \geq 2$. Se n for igual a zero ou um, define-se:

$$0! = 1 \text{ e } 1! = 1.$$

Exemplo: $7! = 7.6.5.4.3.2.1 = 5040$.

1.1.1 Exercícios

1. Utilizando uma calculadora, verifique se a desigualdade $3100 > 100!$ é verdadeira ou falsa.
2. Se $x = 92!$ e $y = 91!$, então:
 - a) Qual a relação entre x e y ?
 - b) Calcule x/y .
3. Assinale V ou F , conforme for verdadeira ou falsa, respectivamente, cada afirmação a seguir:
 - a) $() 7! = 7.6.5!$
 - b) $() 9! = 3! + 6!$
 - c) $() 10!/5! = 2$
 - d) $() 6!/4! = 30$
 - e) $()$ Se $n! = 6$, então $n = 3$
4. Encontre um número natural n tal que $n! - 12.(n - 1)! = 0$.
5. Simplifique as expressões:
 - a) $50!/49!$
 - b) $n!/(n - 1)!$
 - c) $100! + 99!/99!$
 - d) $(2n)!/(2n - 1)!$

1.2 Princípio Fundamental da Contagem

Se determinado acontecimento ocorre em n etapas diferentes, e se a primeira etapa pode ocorrer de k_1 maneiras diferentes, a segunda de k_2 maneiras diferentes, e assim sucessivamente, então o número total T de maneiras de ocorrer o acontecimento é dado por: $T = k_1.k_2.k_3.\dots.k_n$.

Exemplos:

1. Imagine que dispomos de uma moeda e um dado. Lançando simultaneamente o dado e a moeda, quantos são os possíveis resultados? $6 \times 2 = 12$
2. Uma senha eletrônica é constituída de uma vogal, um algarismo escolhido entre 5, 7 e 9 e uma consoante escolhida entre R e T . Qual o número de senhas que podem ser formadas? $5 \times 3 = 15$

1.2.1 Exercícios

1. Uma montadora de automóveis apresenta um carro em 3 modelos diferentes e em 6 cores diferentes. Se você vai adquirir um veículo dessa montadora, quantas opções tem de escolha?
2. Considere os algarismos 1, 3, 5, 7 e 9. Quantos números naturais de três algarismos podem ser formados?
3. Em relação à questão anterior, responda:
 - a) Quantos números naturais de três algarismos distintos podem ser formados?
 - b) Quantos números naturais de três algarismos podem ser formados sabendo que pelo menos um deles se repete?
4. Uma prova de Matemática é constituída por 10 questões do tipo verdadeiro ou falso. Se um aluno chuta cada uma das questões, qual o número total de maneiras de apresentar o gabarito?
5. Lançando uma mesma moeda 5 vezes consecutivamente, qual o número total de possíveis resultados?
6. Num restaurante há 4 tipos de saladas, 5 tipos de pratos quentes e apenas 2 tipos de sobremesa. Quantas possibilidades temos para fazer uma refeição com 1 salada, 1 prato quente e 1 sobremesa?
7. Usando apenas os algarismos 3, 4, 5, 6, 7, 8 e 9, responda:
 - a) Quantos números de 3 algarismos podemos formar?
 - b) Quantos números ímpares de 3 algarismos podemos formar?
 - c) Quantos números de 3 algarismos distintos podemos formar?
 - d) Quantos números ímpares de 3 algarismos ímpares podemos formar?
 - e) Quantos números com 3 algarismos ímpares podemos formar?
 - f) Quantos números com 3 ímpares e distintos podemos formar?
8. Dado o conjunto $A = \{a; b; c\}$ obtenha:
 - a) O número de subconjuntos que ele admite;
 - b) Todos os subconjuntos.

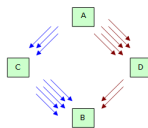
Obs: Um conjunto A que possui n elementos admite 2^n subconjuntos.
9. A partir da decomposição em fatores primos de um número natural, é possível obter o número de seus divisores naturais.
 - a) Quantos divisores naturais admite o número 60?
 - b) Quais são os divisores naturais do número 60?

1.3 Princípio Aditivo da Contagem

Existem situações de contagem, em que adicionamos as possibilidades, e existem outras, nas quais multiplicamos as possibilidades. Já estudamos aquelas situações em que tivemos que efetuar uma multiplicação. Em tais situações utilizamos o princípio multiplicativo para justificar. Mas como sabemos, diante de um experimento, se multiplicamos ou adicionamos as possibilidades?

Antes de procurarmos dar uma resposta a essa questão, o que é fundamental para os problemas de contagem, é importante entender a utilização de 2 conectivos em nossa língua portuguesa: E ou OU. O conectivo E é utilizado, em princípio, na Língua Portuguesa no sentido aditivo. Porém, em Matemática, o mesmo conectivo E indica simultaneamente, dependência. O conectivo OU é utilizado, em princípio, na Língua Portuguesa, no sentido excludente. Em Matemática, o mesmo conectivo OU indica adição e inclusão, como também pode acontecer na Língua Portuguesa. Portanto, quando, num problema de contagem, aparecer o conectivo E, devemos pensar em simultaneidade, em dependência. Quando aparecer o conectivo OU num problema de contagem, deveremos interpretá-lo no sentido aditivo.

Exemplo: Para ir de uma cidade A até uma cidade B , existem dois percursos, passando pela cidade C ou pela cidade D . Os caminhos possíveis estão indicados no esquema abaixo. Quantas são as possibilidades de sair da cidade A e chegar à cidade B ?



Para obtermos o número de elementos de $A \cup B$, $n(A \cup B)$, adicionamos o número de elementos de A , com o número de elementos de B e diminuímos o número de elementos pertencentes a A e a B , simultaneamente.

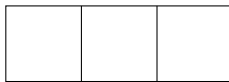
$$n(A \cup B) = n(A) + n(B) - n(A \cap B).$$

Subtraímos $n(A \cap B)$ porque esses foram contados duas vezes; em $n(A)$ e em $n(B)$.

1.3.1 Exercícios

1. Explique o significado, em cada frase, do conectivo OU:
 - a) José ou João vai passar no vestibular.
 - b) José ou João vão passar no vestibular.
2. Quantos números naturais de 4 ou cinco algarismos distintos podem ser formados com os algarismos 1, 2, 3, 5, 7 e 9?
3. Para a diretoria de uma empresa, concorrem 4 candidatos à presidência e 6 à vice-presidência. Quantas maneiras distintas podem ocorrer na ocupação desses dois cargos?

4. Para ir de uma cidade A a outra cidade B dispomos de cinco empresas de ônibus, três de aviões e uma de navio. De quantos modos podemos viajar de A até B ?
5. Você deve pintar cada quadradinho de amarelo, ou de verde ou de azul. De quantas maneiras diferentes isso é possível?



6. Um baralho tem 52 cartas. Se retirarmos duas cartas, uma de cada vez e sem reposição, quantas possibilidades existem?
7. Quantos números de 5 algarismos distintos há em nosso sistema de numeração?
8. Um anfiteatro possui 5 portas. De quantos modos ele pode ser aberto?
9. Num estádio de futebol há 12 portões de entrada. Quantas possibilidades existem de uma pessoa:
 - a) entrar por um portão e depois sair?
 - b) entrar por um portão e depois sair por outro diferente?

1.4 Exercícios de Processos Básicos de Contagens

1. (PUC-SP) O total de números naturais de três algarismos distintos que existem no nosso sistema de numeração é:
a) 650 b) 615 c) 640 d) 649 e) 648
2. A quantidade de números inteiros compreendidos entre 30.000 e 65.000 que podemos formar utilizando somente os algarismos 2, 3, 4, 6 e 7, de modo que não figurem algarismos repetidos, é:
a) 48 b) 66 c) 96 d) 120
3. (UFU-MG) De quantas maneiras três mães e seus respectivos três filhos podem ocupar uma fila com seis cadeiras, de modo que cada mãe sente junto de seu filho?
a) 6 b) 18 c) 12 d) 36 e) 48
4. (PUC-SP) Com os elementos do conjunto $A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ são formados números com três algarismos distintos. A quantidade de números formados, cuja soma dos algarismos é um número par, é:
a) 30 b) 36 c) 52 d) 60 e) 72
5. (UNIFOR-CE) Um casal e seus quatro filhos vão ser colocados lado a lado para tirar uma foto. Se todos os filhos devem ficar entre os pais, de quantos modos distintos os seis podem posar para tirar a foto?
a) 24 b) 48 c) 96 d) 120 e) 720

6. (MACK-SP) Os conjuntos M e N são finitos. Sabe-se que $n(M \cup N) = 38$, $n(M \cap N) = 12$ e $n(M) = 35$, então $n(N)$ vale:
a) 23 b) 15 c) 3 d) 26 e) 50
7. (FGV-SP) Um restaurante oferece no cardápio duas saladas distintas, 4 tipos de pratos de carne, 5 variedades de bebidas e 3 sobremesas diferentes. Uma pessoa deseja uma salada, um prato de carne, uma bebida e uma sobremesa. De quantas maneiras a pessoa poderá fazer seu pedido?
a) 120 b) 144 c) 14 d) 60 e) 12
8. (UCSAL-BA) Um código para leitura ótica é constituído por 6 barras, brancas ou pretas. Nenhum código, tem barras de uma só cor. Quantos desses códigos, distintos entre si, podem ser formados?
a) 128 b) 64 c) 62 d) 32 e) 16
9. (UFR-PE) Qual o número de placas de carros que poderiam ser registradas (cada uma contendo apenas três letras) fazendo uso das letras A, B, C, D ?
a) 34 b) 72 c) 96 d) 64 e) 102
10. (PUC-RS) O número de múltiplos de 11, inteiros e positivos, formados por três algarismos é?
a) 79 b) 80 c) 81 d) 99 e) 100
11. (UFRN) A quantidade de números pares de 5 algarismos, sem repetição, que podemos formar com os dígitos 2, 3, 4, 5, 6, 7 e 8 é igual a:
a) 720 b) 1.140 c) 2.160 d) 2.280 e) 3.600
12. (CESESP-PE) Num acidente automobilístico, após se ouvirem várias testemunhas, concluiu-se que o motorista culpado do acidente dirigia o veículo cuja placa era constituída de duas vogais distintas e quatro algarismos diferentes, e o algarismo das unidades era o dígito 2. Assinale, então, a única alternativa correspondente ao número de veículos suspeitos:
a) 1.080 b) 10.800 c) 10.080 d) 840 e) 60.480
13. (UM-SP) Um trem de passageiros é constituído de uma locomotiva e seis vagões distintos, sendo um deles restaurante. Sabendo-se que a locomotiva deve ir à frente e que o vagão-restaurante não pode ser colocado imediatamente após a locomotiva, o número de modos diferentes de montar a composição é: a) 120 b) 320 c) 500 d) 600 e) 720
14. (UFBA) Uma firma deseja imprimir calendários de diversos modelos variando a quantidade de meses em cada folha do calendário, desde que o número de meses incluídos em cada folha de determinado modelo seja constante. O número de modelos que podem ser feitos é:
a) 6 b) 12 c) 28 d) 794 e) 13.345
15. (PUC-RS) Com os algarismos significativos formam-se todos os números de quatro algarismos distintos, sendo que x deles possuem um algarismo ímpar na ordem das centenas. O valor de x é:
a) 336 b) 567 c) 1.680 d) 3.335 e) 3.403

16. (CESGRANRIO-RJ) Um mágico se apresenta em público vestindo calça e paletó de cores diferentes. Para que ele possa se apresentar em 24 sessões com conjuntos diferentes, o número mínimo de peças (número de paletós mais número de calças) de que precisa é:
a)24 b)11 c)12 d)10 e)8
17. Se 5 moedas distinguíveis forem lançadas simultaneamente, o número de maneiras possíveis de elas caírem é dado por:
a)25 b)10 c)32 d)120 e)240
18. (MACK-SP) O total de números, formados com os algarismos distintos, maiores que 50.000 e menores que 90.000 e que são divisíveis por 5, é:
a)1.596 b)2.352 c)2.686 d)2.788 e)4.032
19. (PUC-SP) Chamam-se palíndromos números inteiros que não se alteram quando é invertida a ordem de seus algarismos (por exemplo: 383, 4.224, 74.847). O número total de palíndromos de cinco algarismos é:
a)900 b)1.000 c)1.900 d)2.500 e)5.000
20. (USP-SP) Quantos números ímpares de 4 algarismos, sem repetição, podem ser formados com os dígitos 1, 2, 3, 4, 5 e 6?
a)120 b)60 c)30 d)180 e)90

1.5 Permutação Simples

Permutações, são agrupamentos com n elementos, de forma que os n elementos sejam distintos entre si pela ordem. As permutações podem ser simples, com repetição ou circulares.

Permutações simples de n elementos distintos são os agrupamentos formados com todos os n elementos e que diferem uns dos outros pela ordem de seus elementos. O número de permutações simples de n objetos distintos é representado por $P_n = n!$.

Exemplos:

1) Conjunto Z : $Z = \{A, B, C\}$; $n = 3$ - Permutação Simples: $P_n = \{ABC, ACB, BAC, BCA, CAB, CBA\}$.

Fórmula de Cálculo: $P_n = n! \Rightarrow P_3 = 3! = 6$

2) ROMA é uma das permutações das letras da palavra AMOR. No caso de letras, cada permutação formada denomina-se anagrama. Considerando os anagramas da palavra AMOR, teremos $P_4 = 4! = 24$ anagramas.

1.5.1 Exercícios

1. Você dispõe de 9 livros: 3 de Matemática, 4 de Física e 2 de Química. Todos são distintos.

- a) Qual o número de maneiras distintas de dispor esses 9 livros lado a lado numa mesma prateleira?.
 - b) Qual o número de maneiras de dispor esses livros deixando juntos os da mesma disciplina?.
2. Considerando as letras da palavra FORTE, calcule:
- a) o número total de anagramas que podem ser formados com as 5 letras;
 - b) o número de anagramas que começam e terminam por consoante.
3. Cinco rapazes e duas moças devem ocupar os sete lugares de uma mesma fila de um cinema.
- a) De quantas maneiras distintas eles podem ocupar esses sete lugares?
 - b) De quantos modos eles podem ocupar esses sete lugares se as moças devem ficar juntas?
 - c) De quantos modos eles podem ocupar esses sete lugares se as moças devem ficar separadas?
4. Permutam-se de todos os modos possíveis os algarismos 1, 3, 5, 7 e 9 e escrevem-se assim números com cinco algarismos distintos, colocando-os em ordem crescente.
- a) Qual o lugar ocupado pelo número 53.719;
 - b) Qual a soma dos números assim formados?
5. Considere apenas os algarismos 2, 4, 6 e 8.
- a) Quantos números naturais de 4 algarismos podemos formar?
 - b) Quantos números naturais de 4 algarismos distintos podemos formar?
 - c) Quantos números naturais de 4 algarismos, onde pelo menos 1 algarismo se repita, podemos formar?
6. Suponhamos que você tenha uma nota de 100 reais, uma nota de 50 reais, uma nota de 10 reais, uma nota de 5 reais e uma nota de 1 real. Colocando-as lado a lado, de quantas maneiras diferentes elas podem ser dispostas, como na fotografia, apenas mudando as posições entre elas?
7. Quantos são os anagramas da palavra SENHOR?
8. Quantos são os anagramas da palavra SENHOR que começam e terminam por vogal?
9. Considere 5 moças e 5 rapazes que irão sentar-se em 10 cadeiras colocadas uma do lado da outra. (obs.: cada uma das 10 pessoas ocupará uma cadeira.)
- a) De quantas formas diferentes essas cadeiras poderão ser ocupadas?
 - b) De quantas formas diferentes essas cadeiras poderão ser ocupadas sendo que não pode haver dois ou mais rapazes (ou duas ou mais moças) juntos?
10. Você deve escolher 6 algarismos para formar uma senha com base nos algarismos 1, 2, 3, 4, 5 e 6. Então, calcule:
- a) o número de senhas que podem ser formadas.
 - b) o número de senhas que podem ser formadas se os algarismos não podem se repetir.

1.6 Arranjo Simples

Arranjos, são agrupamentos formados com k elementos, de forma que os k elementos sejam distintos entre si pela ordem ou pela espécie. Os arranjos podem ser simples ou com repetição.

Não ocorre a repetição de qualquer elemento em cada grupo de k elementos. Considerando um conjunto com n elementos, chama-se arranjo simples de taxa k todo agrupamento de k elementos distintos dispostos numa certa ordem. Dois arranjos diferem entre si, pela ordem de colocação dos elementos. Veja um exemplo abaixo:

Conjunto Z : $Z = \{A, B, C\}; n = 3$

Nº de elementos dos Grupos $k = 2$

Arranjo Simples: $A_{3,2} = \{AB, AC, BA, BC, CA, CB\}$

Fórmula de Cálculo : $A_{n,k} = n!/(n-k)! \Rightarrow A_{3,2} = 3!/(3-2)! = 6$

Considere 6 pessoas e 4 cadeiras apenas. Qual o número de formas de dispor essas pessoas nesses lugares? Nessa situação, temos que formar grupos com 4 pessoas a partir de 6 pessoas e, em cada grupo, tivemos que ordená-las. Em Análise Combinatória, tal procedimento é conhecido como Arranjo Simples de 6 elementos 4 a 4. Mas, antes de tirarmos alguma conclusão, devemos observar uma outra situação:

Utilizando os algarismos 1, 3, 5, 7 e 9, vamos formar números naturais com 3 algarismos distintos. Como calcular quantos números podem ser formados? Essa quantidade de arranjos simples poderia ser indicada por $A_{5,3}$ ou A_5^3 (lê-se arranjo de 5 elementos tomados 3 a 3).

Podemos calcular o número de arranjos de 5 elementos tomados 3 a 3, utilizando fatorial, ou seja: $A_{5,3} = 5.4.3 = 5.4.3.2!/2! = 5!/2! = 5!/(5-3)!$

Portanto, o cálculo do número de n elementos tomados p a p , com $n \geq p$ é dado por

$$A_{n,p} = A_n^p = \frac{n!}{(n-p)!}.$$

É importante observar que tanto os problemas relacionados ao que aqui denominamos permutação quanto arranjo simples são resolvidos pelo princípio multiplicativo.

1.6.1 Exercícios

1. Calcule:

a) $A_{7,3}$ b) $A_{5,2}$ c) $A_{10,5}$

2. Quantos números naturais de 2 algarismos distintos podemos formar com os algarismos de 1 até 9?

3. De quantas maneiras 7 meninos podem sentar-se num banco que tem apenas 4 lugares?

4. Se A é um conjunto com 5 elementos e B é um conjunto com 8 elementos, quantas funções $f : A \rightarrow B$ são injetoras?

1.7 Arranjo com Repetição

Todos os elementos podem aparecer repetidos em cada grupo de k elementos. Veja o exemplo abaixo:

Conjunto Z : $Z = \{A, B, C\}; n = 3$

Nº de elementos dos Grupos: $k = 2$

Arranjos com Repetição: $AR_3^2 = AR_{3,2} = \{AA, AB, AC, BA, BB, BC, CA, CB, CC\}$

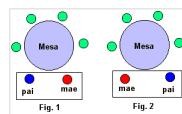
Fórmula de Cálculo : $AR_{n,k} = AR_n^k = n^k \Rightarrow AR_3^2 = 3^2 = 9$.

1.8 Permutação Circular

Existe um tipo de permutação denominada circular, em que os elementos são dispostos em círculos ou ao redor de uma mesa circular. Por exemplo, vamos colocar três objetos A, B , e C , distintos em 3 lugares numa circunferência. Sendo PC_3 o número de permutações circulares de três elementos temos que: $PC_3 = 2!$.

Exemplos:

1. Uma família é composta por seis pessoas: o pai, a mãe e quatro filhos. Num restaurante, essa família vai ocupar uma mesa redonda. Em quantas disposições diferentes essas pessoas podem se sentar em torno da mesa de modo que o pai e a mãe fiquem juntos? Sabendo que pai e mãe devem ficar juntos, vamos amarrar os dois e tratá-los como se fossem um único elemento. Veja a figura 1 abaixo:



Ao tratar o pai e mãe como um único elemento, passamos a ter somente 5 elementos. Portanto, utilizando a permutação circular de 5 elementos, calculamos o número de possibilidades desta família sentar-se ao redor da mesa com pai e mãe juntos sendo que o pai está à esquerda da mãe.

Permutação circular PC de 5 elementos calcula-se: $PC_5 = P_4 = (5 - 1)! = 4! = 4.3.2.1 = 24$.

Portanto, para o pai à esquerda da mãe, temos 24 posições diferentes. Mas o pai pode estar à direita da mãe, como na figura 2, e então teremos mais 24 posições diferentes para contar (novamente PC_5). Portanto, o número total de disposições é 48.

2. Dois meninos e três meninas formarão uma roda dando-se as mãos. De quantos modos diferentes poderão formar a roda de modo que os dois meninos não fiquem juntos?

No total temos 5 elementos para dispor em círculo, ou seja, novamente utilizaremos Permutação Circular. Mas agora a restrição é diferente, os dois meninos NÃO podem ficar juntos. Para esta situação, iremos calcular

o número total de disposições (sem restrição) e diminuir deste resultado o número de disposições em que os meninos estão juntos (para calcular o número de disposições deles juntos, fazemos como no exercício 1).

O número total de disposições é $PC_5 = (5 - 1)! = 4! = 4.3.2.1 = 24$. Agora, para calcular o número de disposições com os meninos juntos, devemos amarrá-los e tratá-los como um único elemento, lembrando que podemos ter duas situações:

O número total de disposições com os meninos juntos é $2.PC_4$ (4 elementos pois os meninos estão juntos e valem por 1). Calculando este valor: $2.PC_4 = 2.(4 - 1)! = 2.3! = 2.3.2.1 = 12$. Portanto, o número de disposições em que os meninos não estão juntos é $24 - 12 = 12$.

1.8.1 Exercícios de Fixação

- (UFU-MG) De quantas maneiras três mães e seus três respectivos filhos podem ocupar uma fila com seis cadeiras, de modo que cada mãe sente junto de seu filho?
a)6 b)12 c)18 d)36 e)48
- (UNIFOR-CE) Um casal e seus quatro filhos vão ser colocados lado a lado, para tirar uma foto. Se todos os filhos devem ficar entre os pais, de quantos modos distintos os seis podem posar para tirar a foto?
a)21 b)48 c)96 d)120 e)720
- (UFRS) A expressão $[(n + 1)! - n!]/[(n + 1)! + n!]$ com n inteiro estritamente positivo vale:
a) $(n^2 + n)/(1 + n)$ b) $(n^2 + n - 1)/2$ c) $(n^2 - n)/(1 + n)$ d) $n/(n + 2)$
- (FUVEST-SP) O número de anagramas da palavra FUVEST que começa e termina por vogal é?
a)24 b)48 c)96 d)120 e)144
- (FEI-SP) Obter o número de anagramas da palavra REPÚBLICA nos quais as vogais se mantêm nas respectivas posições.
- (FGV-SP) Numa sala de reuniões há 10 cadeiras e 8 participantes. De quantas maneiras distintas podemos sentar os participantes. (Duas pessoas ficarão de pé?)
a)181.440 b)3.628.800 c)1.814.400 d)40.320 e)403.200
- (FCC-BA) Considerem-se todos os anagramas da palavra MORENA. Quantos deles têm as vogais juntas?
a)36 b)712 c)120 d)144 e)180
- (PUC-SP) O número de anagramas da palavra ALUNO que tem as vogais em ordem alfabética é:
a)20 b)30 c)60 d)80 e)100
- (UFOP-MG) Podemos ordenar as pessoas que estão numa certa fila de 24 maneiras diferentes. Então, nessa fila estão quantas pessoas?
a)4 b)5 c)6 d)12 e)24

10. (TAUBATÉ-SP) Numa estante existem três livros de Matemática, três livros de História e um de Geografia. Se desejarmos sempre um livro de História em cada extremidade, então o número de maneiras de se arrumar esses sete livros é:
a)720 b)36 c)81 d)126
11. (UFCE) A quantidade de números inteiros compreendidos entre 30.000 e 65.000 que podemos formar utilizando somente os algarismos 2, 3, 4, 6 e 7, de modo que não figurem algarismos repetidos, é:
a)48 b)66 c)96 d)120
12. (UFRN) Quantos números de 7 dígitos, maiores que 6.000.000, podem ser formados com os algarismos 0, 1, 3, 4, 6, 7 e 9, sem repeti-los?
a)1.800 b)720 c)5400 d)5040 e)2160
13. (UFBA) Para abrir um cofre eletrônico deve-se digitar uma sequência formada por quatro algarismos distintos, sendo que o primeiro é o triplo do segundo. Uma pessoa que desconhece essa sequência pretende abrir o cofre. O maior número possível de seqüências que ela deve digitar é:
a)170 b)240 c)180 d)280 e)168
14. Descubra o número de permutações circulares de:
a)4 objetos b)5 objetos c) n objetos
15. (SANTA CECÍLIA-SP) O número de maneiras em que podemos dispor vinte pessoas em torno de uma mesa redonda é:
a)20! b)20!/2 c)19! d)19!/2
16. (PUC-SP) Dois meninos e três meninas formarão uma roda dando-se as mãos. De quantos modos diferentes poderão formar a roda de modo que os dois meninos não fiquem juntos?
a)15 b)24 c)18 d)16 e)12
17. (UFPE) Qual o maior inteiro n para que $20!$ Seja divisível por $3n$?
a)2 b)7 c)8 d)9 e)20

1.9 Combinação

Combinações, são agrupamentos de k elementos, de forma que os k elementos sejam distintos entre si apenas pela espécie. A posição dos elementos não importa e não os distingue.

Combinações simples de n elementos distintos tomados k a k são subconjuntos formados por k elementos distintos escolhidos entre os n elementos dados. Duas combinações são diferentes quando possuem elementos distintos, não importando a ordem em que os elementos são colocados:

Conjunto $Z : Z = \{A, B, C\}, n = 3$

Nº de elementos dos Grupos: $k = 2$

Grupos de Combinação Simples: $C_3^2 = C_{3,2} = \{AB, AC, BC\}$

Fórmula de Cálculo: $C_{n,k} = n!/k!(n-k)! \Rightarrow C_{3,2} = 3!/2!(3-2)! = 3$.

O número acima também é conhecido como Número Binomial. O número binomial é indicado por: $\binom{n}{k} = n!/k!(n-k)!$.

Exemplo: Numa faculdade os alunos dos cursos foram convidados a participar de um campeonato de futebol de salão. Inscreveram-se ao todo 15 times. Considerando que todos os times se enfrentarão uma única vez (um turno) e que o campeão será aquele que formar mais pontos, obtenha o número total de jogos disputados.

$$C_{15}^2 = 15!/13!2! = 105.$$

Para escolhermos p objetos distintos entre n objetos distintos dados, ou, o que é equivalente para formarmos subconjuntos com p elementos do conjunto $\{a_1; a_2; a_3; \dots a_n\}$, temos $C_{n,p}$ possibilidades ($n \geq p$), onde

$$C_{n,p} = n.(n-1).(n-2).(\dots).(n-p+1)/p!$$

$$C_{n,p} = n.(n-1).(n-2).(\dots).(n-p+1)/p!.(n-p)!/(n-p)!$$

$$C_{n,p} = n!/p!(n-p)!.$$

Observação: Quando calculamos o número de combinações de n objetos tomados p a p , estamos calculando o número de maneiras de escolher p objetos de um agrupamento de n objetos.

1.9.1 Exercícios

1. Em uma turma, você deverá escolher 4 pessoas como representantes da turma. Qual o número total de escolhas possíveis?
2. Ao final da aula, cada aluno da turma deverá apertar a mão de todos os colegas uma única vez. Quantos apertos de mão existirão no total?
3. Considere 8 vértices de um octógono convexo. Você deverá formar segmentos ligando esses pontos dois a dois. Qual o número total de segmentos que podem ser formados?
4. Resolva a equação $C_{n,2} = 10$.
5. Cinco pontos distintos A, B, C, D e E foram marcados numa circunferência.
 - a. Quantos segmentos, com extremidades em 2 desses pontos, podem ser formados?
 - b. Quantos triângulos ficam determinados com vértices em 3 desses pontos?
 - c. Quantos polígonos ficam determinados com vértices nesses pontos?

6. Considerando os alunos de sua turma, responda:
 - a. Quantas duplas distintas podem ser formadas?
 - b. Quantas equipes com 5 elementos podem ser formadas?
7. Um polígono convexo com n vértices (n lados também) possui d diagonais, onde $D = n.(n-3)/2$. Utilizando análise combinatória, prove tal relação.
8. Considere o conjunto A , onde $A = \{2, 3, 4, 5, 6\}$.
 - a. Quantos subconjuntos de A podem ser formados com 1 elemento?
 - b. Quantos subconjuntos de A podem ser formados com 3 elementos?
 - c. Quantos subconjuntos admitem (ao todo) o conjunto A ?
9. Uma comissão de cinco membros será escolhida dentre 8 pessoas. Calcule o número de comissões diferentes que podem ser formadas.
10. Considere 6 pontos distintos marcados na reta r e 4 pontos distintos marcados na reta s . Sabendo-se que r e s são retas paralelas, qual o número total de triângulos que podem ser formados com vértices nesses pontos?
11. Considere um grupo formado por uma menina e cinco rapazes. Uma comissão com 3 pessoas será formada. Então:
 - a. Qual o total de comissões distintas que podem ser formadas?
 - b. Em quantas dessas comissões a menina figura?
 - c. Em quantas dessas comissões a menina não figura?
 - d. É verdadeiro que $C_{6,3} = C_{5,2} + C_{5,3}$?

1.10 Permutação com Repetição

Se entre os n elementos de um conjunto existem a elementos repetidos, b elementos repetidos, c elementos repetidos e assim sucessivamente, o número total de permutações que podemos formar é dado por:

$$P_n^{(a,b,c,\dots)} = \frac{n!}{a!b!c!\dots}$$

Conjunto Z : $Z = \{B, A, B, A\}; n = 4$

Repetição de elementos: $B = 2, A = 2 \Rightarrow a = 2, b = 2$

Permutação com Repetição: $P_n^{(a,b,c,\dots)} = \{BABA, BAAB, BBAA, AABB, ABAB, ABBA\}$

Fórmula de Cálculo: $P_n^{(a,b,c,\dots)} = n!/a!b!c!\dots \Rightarrow P_4^{(2,2)} = 4!/2!2! = 6$.

Você já estudou problemas de Análise Combinatória que tratavam da formação de anagramas das letras de uma palavra qualquer. Assim, por exemplo, a palavra *RODA* admite um total de 24 anagramas. Agora descubra quantos são os anagramas da palavra *ARARA*.

Na palavra ARARA, existem letras repetidas que dificultam, a princípio, o cálculo do número total de anagramas. Mais tarde, voltaremos a essa palavra; por enquanto, vamos buscar um modo de calcular o número total de anagramas de uma palavra que tenha letras repetidas. Vamos considerar a palavra TARTARUGA.

Para formar um anagrama de TARTARUGA, temos que dispor $3A, 2T, 2R, 1Ge1U$ em 9 lugares.

o número de modos de escolher os lugares para os $3A$ é $C_{9,3}$;

o número de modos de escolher os lugares para os $2T$ é $C_{6,2}$; (três lugares foram ocupados para os $3A$);

o número de modos de escolher os lugares para os $2R$ é $C_{4,2}$;

o número de modos de escolher os lugares para G é $C_{2,1}$;

o número de modos de escolher os lugares para os U é 1 (o que sobrou).

Quando escolhemos elementos, não estamos preocupados com a ordem, ou seja, fazemos uma combinação.

Agora, pelo princípio multiplicativo, temos que o número total de anagramas das letras de TARTARUGA é:

$$C_{9,3} \cdot C_{6,2} \cdot C_{4,2} \cdot C_{2,1} \cdot 1 = 9!/3!2!2!$$

9!: permutação das 9 letras

3!: permutação dos $3A$

2!: permutação dos $2T$

2!: permutação dos $2R$

Se as 9 letras fossem diferentes, teríamos $P_9 = 9!$ Anagramas. Como os A são iguais, contamos cada anagrama 3! vezes (devemos então dividir por 3!). Da mesma forma, contamos cada anagrama 2! vezes e 2! vezes por serem iguais os T e os R , respectivamente (então devemos dividir por 2! 4 por 2!).

Isto tudo nos leva a pensar em permutação de 9 letras, das quais 3 são iguais a A , 2 são iguais a T , 2 são iguais a R , 1 é a letra G e 1 a letra U . ($3 + 2 + 2 + 1 + 1 = 9$)

Em símbolos:

$$P_9^{3,2,2,1,1} = 9!/3!2!2!.$$

Retorne agora à palavra ARARA, teremos $P_5^{3,2} = 5!/3!2! = 10$.

1.11 Exercícios

- (FGV-SP) Quantos números diferentes obtemos reagrupando os algarismos do número 718.844?
a)90 b)720 c)15 d)30 e)180
- (UFU-MG) O número de anagramas da palavra ERNESTO, começando e terminando por consoante, é:
a)480 b)720 c)1.440 d)1.920 e)5.040
- (UFPA) Uma cobaia percorre um labirinto tendo sete pontos em que pode virar à direita, à esquerda ou seguir em frente. De quantas maneiras esta cobaia percorre o labirinto, se segue um caminho diferente em cada vez?
a) $A_{7,3}$ b) $C_{7,3}$ c)7 d)37 e) $7!/3!$

4. (USP) Uma comissão de cinco alunos deve ser formada para discutir e planejar o desenvolvimento das partes esportiva de sua escola. Sabendo-se que estes cinco alunos devem ser escolhidos de um grupo de 10 alunos, então o número possível de escolha é:
a)360 b)180 c)21.600 d)252 e)210
5. (UFV-MG) Resolvendo a equação $C_x^2 = 21$, encontramos:
a) $x = -6$ ou $x = 7$ b) $x = -6$ c) $x = 21$ d) $x = 13$ e) $x = 7$
6. (UFRGS) A solução da equação $2.A_x^4 = 4!C_x^{x-5}$ é:
a)14 b)12 c)10 d)8 e)6
7. (CESGRANRIO-RJ) Seja M um conjunto de 20 elementos. O número de subconjuntos de M que contêm exatamente 18 elementos é:
a)360 b)190 c)180 d)120 e)18
8. (UFSC) Um experimento consiste em lançar uma moeda 6 vezes. Considera-se como resultado desse experimento a sequência das faces obtidas no 1º, 2º, 3º, 4º, 5º e 6º lançamento, respectivamente. Por exemplo, indicando por c a face cara e por k a face coroa, um resultado possível desse experimento é a sequência (c, c, k, c, k, c) . O número de resultados possíveis desse experimento apresentando quatro caras e duas coroas é:
a)30 b)24 c)20 d)18 e)15
9. (FGV-SP) Sobre uma mesa são colocadas em linha 6 moedas. O número total de modos possíveis pelos quais podemos obter 2 caras e 4 coroas voltados para cima é:
a)360 b)48 c)30 d)120 e)15
10. (UFBA) Dispondo-se de abacaxi, acerola, goiaba, laranja, maçã, mamão e melão; calcule de quantos sabores diferentes pode-se preparar um suco, usando-se três frutas distintas.
a)90 b)35 c)15 d)30 e)50
11. (PUC-MG) O número de maneiras pelas quais 6 pessoas podem ser distribuídas em 3 grupos, cada um formado por 2 pessoas, é:
a)60 b)75 c)80 d)85 e)90
12. (UFRGS) Em uma classe de doze alunos, um grupo de cinco será selecionado para uma viagem. De quantas maneiras distintas esse grupo poderá ser formado, sabendo que, entre os doze alunos, dois são irmãos e só poderão viajar se estiverem juntos?
a)30.240 b)594 c)462 d)408 e)372
13. (UFMG) Numa Câmara de Vereadores, trabalham 6 vereadores do partido A , 5 vereadores do partido B e 4 vereadores do partido C . O número de comissões de 7 vereadores que podem ser formadas, devendo cada comissão ser constituída de 3 vereadores do partido A , 2 vereadores do partido B e 2 vereadores do partido C , é igual a:
a)7 b)36 c)152 d)1.200 e)28.800

14. (UFSE) Considere todos os produtos de três fatores distintos que podem ser obtidos com os elementos do conjunto $A = \{1, 2, 3, 5, 7, 11\}$. Quantos deles são pares?
a)10 b)18 c)20 d)36 e)60
15. (FUVEST) Numa primeira fase de um campeonato de xadrez, cada jogador joga uma vez contra os demais. Nessa fase foram realizados 78 jogos. Quantos eram os jogadores?
a)10 b)11 c)12 d)13 e)14
Sugestão: indique por n o número de jogadores.
16. (UFPA) O elevador de um prédio de 12 andares parte lotado do 1º andar. Sabe-se que as pessoas descerão em 3 andares diferentes na subida. De quantas maneiras isso pode ocorrer, se ninguém descer no 2º andar?
a)120 b)220 c)720 d)980 e)1320
17. (UFRN) Com sete pontos sobre uma circunferência, quantos triângulos, com vértices nesses pontos, podem ser formados?
a)35 b)45 c)47 d)53 e)54
18. (UFF-RJ) Uma empresa vai fabricar cofres com senhas de 4 letras, usando 18 consoantes e 5 vogais. Se cada senha deve começar com uma consoante e terminar com uma vogal, sem repetir letras, o número de senhas possíveis é:
a)3.060 b)24.480 c)37.800 d)51.210 e)53.440
19. (PUC-RS) Dispondo-se de 6 números positivos e 6 negativos, o número de modos diferentes de escolher 4 números cujo produto seja positivo é: a) 720 b) 625 c) 480 d) 300 e) 255
19. (FEI-SP) Sejam duas retas paralelas (r e s). Tomam-se 5 pontos distintos em r e 4 em s . A razão entre o número total de quadriláteros convexo e o número total de triângulos que podem ser formados com vértices nesses pontos é:
a)1/2 b)3/4 c)2/3 d)6/7 e)4/5
20. (FUVEST-SP) A escrita braile para cegos é um sistema de símbolos com o qual cada caractere é formado por uma matriz de 6 pontos, dos quais pelo menos um se destaca em relação aos outros. Assim, por exemplo:

$$\begin{array}{cc} \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot \end{array}$$

Qual o número máximo de caracteres distintos que podem ser representados nesse sistema de escrita?

- a)62 b)89 c)26 d)720 e)36
21. (ITA) O número de soluções inteiras e não-negativas da equação $x + y + z + w = 5$ é: a)36 b)48 c)52 d)54 e)56
22. (ITA) Um general possui n soldados para tomar uma posição inimiga. Desejando efetuar um ataque com dois grupos, um frontal com r soldados e outro de retaguarda com s soldados ($r + s = n$), ele poderá dispor seus homens de quantas maneiras distintas nesse ataque?
a) $n!/(r + s)!$ b) $n!/r!s!$ c) $n!/(rs)!$ d) $2(n!)/(r + s)!$ e) $2(n!)/r!s!$

CAPÍTULO 2

PROBABILIDADE

A teoria das probabilidades busca estimar as chances de ocorrer um determinado acontecimento. É um ramo da matemática que cria, elabora e pesquisa modelos para estudar experimentos ou fenômenos aleatórios.

Experimento aleatório: É um experimento que pode apresentar resultados diferentes, quando repetido nas mesmas condições.

Espaço amostral: É o conjunto de todos os resultados possíveis de um experimento aleatório. Indicamos o espaço amostral por Ω .

Evento: Chama-se evento a qualquer subconjunto do espaço amostral.

Observação: Dizemos que um espaço amostral é equiprovável quando seus elementos têm a mesma chance de ocorrer.

2.1 Eventos certo, impossível e mutuamente exclusivos

Evento certo: Ocorre quando um evento coincide com o espaço amostral.

Evento impossível: Ocorre quando um evento é vazio.

Exemplo 1: Lançar um dado e registrar os resultados:

Espaço amostral: $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$

Evento A : Ocorrência de um número menor que 7 e maior do que zero: $A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$

Portanto $A = \Omega$, logo o evento é certo.

Evento B : Ocorrência de um número maior do que 6.

$B = \emptyset$

Não existe número maior que 6 no dado, portanto o evento é impossível

Evento C : Ocorrência de um número par $\Rightarrow C = \{2, 4, 6\}$

Evento D : Ocorrência de múltiplo de 3 $\Rightarrow D = \{3, 6\}$

Evento E : Ocorrência de número par ou número múltiplo de 3 $\Rightarrow E = C \cup D \Rightarrow \{E = 2, 4, 6\} \cup \{3, 6\} \Rightarrow E = \{2, 3, 4, 6\} \Rightarrow$ União de eventos.

Evento F : Ocorrência de número par e múltiplo de 3 $\Rightarrow F = C \cap D \Rightarrow F = \{2, 4, 6\} \cap \{3, 6\} \Rightarrow F = \{6\} \Rightarrow$ Interseção de eventos.

Evento H : Ocorrência de número ímpar: $H = \{1, 3, 5\}$

Observação: C e H são chamados eventos complementares. Observe que $C \cap H = \emptyset$. Quando a interseção de dois eventos é o conjunto vazio, eles são chamados eventos mutuamente exclusivos.

2.2 Probabilidade de ocorrer um evento

$$P(A) = \frac{\text{número de elementos de } A}{\text{número de elementos de } \Omega} \Rightarrow P(A) = \frac{n(A)}{n(\Omega)}$$

Exemplo 1: Consideremos o experimento Aleatório do lançamento de um moeda perfeita. Calcule a probabilidade de sair cara.

Espaço amostral: $\Omega = \{\text{cara}, \text{coroa}\} \Rightarrow n(\Omega) = 2$.

Evento A : $A = \{\text{cara}\} \Rightarrow n(A) = 1$.

Como $P(A) = \frac{n(A)}{n(\Omega)}$, temos $P(A) = \frac{1}{2}$ ou $0,50 = 50\%$.

Exemplo 2: No lançamento de um dado perfeito, qual é a probabilidade de sair número maior do que 4?

Espaço amostral: $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\} \Rightarrow n(\Omega) = 6$.

Evento A : $A = \{5, 6\} \Rightarrow n(A) = 2$ ou $0,33 = 33\%$.

Exemplo 3: No lançamento simultâneo de 3 moedas perfeitas distinguíveis, qual é a probabilidade de serem obtidas:

- a) pelo menos 2 caras?
- b) Exatamente 2 caras?

$C = \text{cara}$; $K = \text{coroa}$

$$\Omega = \{CCC, CCK, CKC, CKK, KCC, KCK, KKC, KKK\} \Rightarrow n(\Omega) = 8$$

a) $A = \{CCC, CCK, CKC, KCC\} \Rightarrow n(A) = 4.$

b) $B = \{CCK, CKC, KCC\} \Rightarrow n(B) = 3.$

Exemplo 4: Vamos formar todos os números de 3 algarismos distintos, permutando os dígitos 7, 8 e 9. Qual é a probabilidade de, escolhendo um número desses ao acaso, ele ser:

a) ímpar

b) par?

c) múltiplo de 6?

d) múltiplo de 4?

e) maior que 780?

$$\Omega = \{789, 798, 879, 897, 978, 987\} \Rightarrow n(\Omega) = 6$$

a) Evento A : ser ímpar $\Rightarrow A = \{789, 879, 897, 987\} \Rightarrow n(A) = 4.$

$$P(A) = \frac{4}{6} = \frac{2}{3} = 0,66 = 66\%.$$

b) Evento B : ser par $\Rightarrow B = \{798, 978\} \Rightarrow n(B) = 2.$

$$P(B) = \frac{2}{6} = \frac{1}{3} = 0,33 = 33\%.$$

c) Evento C : ser múltiplo de 6 $\Rightarrow C = \{798, 978\}.$

$$P(C) = \frac{2}{6} = \frac{1}{3} = 0,33 = 33\%.$$

d) Evento D : ser múltiplo de 4 $\Rightarrow D = \emptyset \Rightarrow n(D) = 0.$

$$P(D) = \frac{n(D)}{n(\Omega)} = \frac{0}{6} = 0 = 0\%.$$

e) Evento E : ser maior que 780 $\Rightarrow E = \Omega \Rightarrow n(E) = 6.$

$$P(E) = \frac{n(E)}{n(\Omega)} = \frac{6}{6} = 1 = 100\%.$$

Exemplo 5: Consideremos todos os números naturais de 4 algarismos distintos que se podem formar com os algarismos 1, 3, 4, 7, 8 e 9. Escolhendo um deles ao acaso, qual é a probabilidade de sair um número que comece por 3 e termine por 7?

$$- - - n(\Omega) = A_{6,4} = \frac{6!}{(6-4)!} = \frac{6!}{2!} = \frac{6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2!}{2!} = 360.$$

$$3 - - 7 n(A) = A_{4,4} = \frac{4!}{(4-2)!} = \frac{4!}{2!} = \frac{4 \cdot 3 \cdot 2!}{2!} = 12.$$

Exemplo 6: Num grupo de 75 jovens, 16 gostam de música, esporte e leitura; 24 gostam de música e esporte; 30 gostam de música e leitura; 22 gostam de esporte e leitura; 6 gostam somente de música; 9 gostam somente de esporte e 5 gostam somente de leitura. Calcule a probabilidade de escolher, ao acaso, um desses jovens:

- a) ele gostar de música;
b) ele não gostar de nenhuma dessas atividades.

$$n(\Omega) = 75$$

$$\text{gostam de música: } 6 + 8 + 16 + 14 = 44$$

$$\text{não gostam de nenhuma dessas atividades: } 75 - (6 + 9 + 5 + 8 + 6 + 14 + 16) = 75 - 64 = 11$$

- a) a probabilidade de gostar de música: $P(A) = \frac{n(A)}{n(\Omega)} = \frac{44}{75} \approx 58\%$.
b) probabilidade de não gostar de nenhuma dessas atividades: $P(B) = \frac{n(B)}{n(\Omega)} = \frac{11}{75} \approx 14\%$.

2.3 Probabilidade da União de dois eventos

Consideremos dois eventos A e B de um mesmo espaço amostral Ω . Da teoria dos conjuntos sabemos que:

$$n(A \cup B) = n(A) + n(B) - n(A \cap B).$$

Dividindo os membros da equação por $n(\Omega)$, temos:

$$\frac{n(A \cup B)}{n(\Omega)} = \frac{n(A)}{n(\Omega)} + \frac{n(B)}{n(\Omega)} - \frac{n(A \cap B)}{n(\Omega)} \Rightarrow P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B).$$

Exemplo 1: No lançamento de um dado, qual é a probabilidade de se obter o número 3 ou um número ímpar?

$$\text{Espaço amostral: } \Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\} \Rightarrow n(\Omega) = 6$$

$$\text{Evento } A: \text{ número 3} \Rightarrow A = \{3\} \Rightarrow n(A) = 1$$

$$\text{Evento } B: \text{ número ímpar} \Rightarrow B = \{1, 3, 5\} \Rightarrow n(B) = 3$$

$$A \cap B = 3 \cap 1, 3, 5 = 3$$

$$n(A \cap B) = 1$$

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$

$$P(A \cup B) = \frac{1}{6} + \frac{3}{6} - \frac{1}{6} \Rightarrow P(A \cup B) = \frac{3}{6}$$

$$P(A \cup B) = \frac{1}{2} \text{ ou } 50\%$$

Exemplo 2: Ao retirar uma carta de um baralho de 52 cartas, qual é a probabilidade de que essa carta seja vermelha ou um ás?

$$N(\Omega) = 52$$

$$\text{Evento } A: \text{ a carta é vermelha } \Rightarrow n(A) = 26$$

$$\text{Evento } B: \text{ a carta é ás } \Rightarrow n(B) = 4$$

$$n(A \cap B) = 2$$

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$

$$P(A \cup B) = \frac{26}{52} + \frac{4}{52} - \frac{2}{52} \Rightarrow P(A \cup B) = \frac{28}{52}$$

$$P(A \cup B) = \frac{7}{13} \approx 53,8\%$$

2.4 Probabilidade do Evento Complementar

A probabilidade de não ocorrer o evento A é a probabilidade de ocorrer o evento complementar de A , representado por \bar{A} . Nessas condições, temos $A \cup \bar{A} = \Omega$ e $A \cap \bar{A} = \emptyset$. Logo, $P(\Omega) = P(A \cup \bar{A})$. Então,

$$1 = P(A) + P(\bar{A}) \Rightarrow P(\bar{A}) = 1 - P(A).$$

Exemplo 1: No lançamento simultâneo de dois dados perfeitos distinguíveis, vamos calcular a probabilidade de NÃO sair soma 5.

$$\Omega = \{(1, 1), (1, 2), (1, 3), (1, 4), (1, 5), (1, 6), (2, 1), (2, 2), (2, 3), (2, 4), (2, 5), (2, 6), (3, 1), (3, 2), (3, 3), (3, 4), (3, 5), (3, 6), (4, 1), (4, 2), (4, 3), (4, 4), (4, 5), (4, 6), (5, 1), (5, 2), (5, 3), (5, 4), (5, 5), (5, 6), (6, 1), (6, 2), (6, 3), (6, 4), (6, 5), (6, 6)\}$$

$$n(\Omega) = 36.$$

$$\text{Seja } A \text{ o evento "sair soma 5". Então: } A = \{(1, 4), (2, 3), (3, 2), (4, 1)\} \Rightarrow n(A) = 4.$$

$$P(A) = \frac{n(A)}{n(\Omega)} = \frac{4}{36} = \frac{1}{9}.$$

$$P(\bar{A}) = 1 - P(A) \Rightarrow P(\bar{A}) = 1 - \frac{1}{9} = \frac{8}{9}.$$

Exemplo 2: Uma máquina produziu 50 parafusos dos quais 5 eram defeituosos. Ao pegar ao acaso 3 parafusos, qual é a probabilidade de que:

- a) Os três sejam perfeitos?
- b) Os três sejam defeituosos?
- c) Pelo menos um seja defeituoso?

$N(\Omega)$ = n° de combinações de 50 elementos tomados 3 a 3.

$$N(\Omega) = C_{50,3} = \frac{50!}{3!(50-3)!} = \frac{50!}{3!47!} = \frac{50.49.48.47!}{3!47!} = 19600.$$

- a) evento A : os três parafusos são perfeitos

$$n(A) = C_{45,3} = \frac{45!}{3!(45-3)!} = \frac{45!}{3!42!} = \frac{45.44.43.42!}{3!42!} = 14190.$$

$$P(A) = \frac{n(A)}{n(\Omega)} = \frac{14190}{19600} \approx 0,72398 \text{ ou } 72,4\%.$$

- b) evento B : os três parafusos são defeituosos

$$n(A) = C_{5,3} = \frac{5!}{3!(5-3)!} = \frac{5!}{3!2!} = \frac{5.4.3!}{3!2!} = 10.$$

$$P(B) = \frac{n(B)}{n(\Omega)} = \frac{10}{19600} \approx 0,00005 \text{ ou } 0,005\%.$$

- c) evento C : pelo menos um é defeituoso, o que corresponde ao complementar de A (os três são perfeitos). Logo:

$$P(C) = P(\bar{A}) = 1 - P(A) = 1 - 0,72398 = 0,27602 \approx 27,6\%.$$

2.5 Exercícios

1. No lançamento de um dado perfeito, qual é a probabilidade de que o resultado seja:

- a) Um número par?

- b) Um número primo?
 - c) O número 3?
 - d) Um número menor do que 3?
 - e) Um número menor do que 1?
 - f) Um número menor do que 7?
2. Num caixa há 6 bolas brancas e 4 bolas vermelhas. Qual é a probabilidade de, ao acaso, retirar:
- a) Uma bola vermelha?
 - b) Uma bola branca?
3. Escreva em pedaços iguais de papel os números de 1 a 13. Dobre-os igualmente, de modo que qualquer um deles tenha a mesma chance de ser retirado de uma caixa. Qual é a probabilidade de que o número retirado seja:
- a) Par?
 - b) Divisível por 3?
 - c) Um número primo?
 - d) Maior do que 8?
 - e) Menor do que 10?
 - f) Um número entre 5 e 10?
 - g) Múltiplo de 4?
4. No lançamento simultâneo de dois dados perfeitos e distinguíveis, um branco e outro vermelho, qual é a probabilidade de que:
- a) A soma seja 7?
 - b) A soma seja par?
 - c) A soma seja um número primo?
 - d) A soma seja maior do que 1 e menor do que 8?
 - e) Ambos os números sejam pares?
 - f) Ambos os números sejam iguais?
 - g) O primeiro número seja múltiplo do segundo?
5. No lançamento simultâneo de duas moedas perfeitas e distinguíveis, qual é a probabilidade de que:
- a) Em ambas ocorra cara?
 - b) Em uma ocorra cara e na outra coroa?

- c) Não ocorra nenhuma cara?
- d) Ocorra exatamente uma coroa.
6. Um casal planeja ter exatamente 3 crianças. Faça um diagrama de árvore para mostrar todos os possíveis arranjos de meninos e meninas. Qual é a probabilidade de que:
- a) Duas crianças sejam meninos e a outra, menina?
- b) Todas as crianças sejam meninas?
- c) Pelo menos uma criança seja menino?
- d) Todas as crianças sejam do mesmo sexo?
- e) Nenhuma criança seja menina?
7. Numa classe há 16 homens e 20 mulheres, sendo que metade dos homens e metade das mulheres têm cabelos castanhos. Ao escolher um aluno ao acaso, qual é a probabilidade de que seja homem ou tenha cabelos castanhos?
8. Uma moeda e um dado são lançados simultaneamente. Qual é a probabilidade de se obter cara ou um 6?
9. Numa equipe foram entrevistadas 80 pessoas sobre os meios de transporte que utilizavam para ir ao trabalho e/ou à escola. Quarenta e duas responderam ônibus, 28 responderam carro e 30 responderam moto. Doze utilizavam-se de ônibus e carro, 14 de carro e moto e 18 de ônibus e moto. Cinco utilizavam-se dos três: carro, ônibus e moto. Qual é a probabilidade de que uma dessas pessoas, selecionada ao acaso, utilize:
- a) Somente ônibus?
- b) Somente carro?
- c) Carro e ônibus, mas não moto?
- d) Nenhum dos três veículos?
- e) Apenas um desses veículos?
10. Suponhamos que A e B sejam eventos de um mesmo espaço amostral e que $P(A) = 0,4$, $P(B) = 0,3$ e $P(A \cap B) = 0,1$. Determine a probabilidade de cada um dos eventos:
- | | |
|--------------------------|--------------------------|
| a) $A \cup B$ | e) $\overline{A \cap B}$ |
| b) $\overline{A \cup B}$ | f) A mas não B |
| c) \bar{A} | g) B mas não A |
| d) \bar{B} | h) nem A nem B |
11. Numa urna existem bolas numeradas de 1 a 17. Qualquer uma delas tem a mesma chance de ser retirada. Qual é a probabilidade de se retirar uma bola cujo número seja:
- a) Par?

- b) Primo?
 - c) Par e primo?
 - d) Par ou primo?
 - e) Nem par nem primo?
 - f) Par mas não primo?
 - g) Primo mas não par?
12. No lançamento de um dado perfeito, qual é a probabilidade de não sair o 6?
13. Uma carta é retirada ao acaso de um baralho de 52 cartas. Qual é a probabilidade de a carta retirada ser:
- a) Copas?
 - b) Dama?
 - c) Copas e dama (dama de copas)?
 - d) Copa ou dama ?
 - e) Não copas?
 - f) Não dama?
 - g) Nem copas nem dama?

2.6 Probabilidade Condicional

A probabilidade condicional de um evento A ocorrer, já tendo ocorrido B é dada por $P(A/B)$ e é calculada por:

$$P(A/B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} \text{ ou } P(A \cap B) = P(A/B) \cdot P(B).$$

Exemplo 1: Ao retirar uma carta de um baralho de 52 cartas, qual é a probabilidade de sair um ás vermelho sabendo que ela é de copas?

$$n(\Omega) = 52$$

Evento A : sair ás vermelho

Evento B : sair copas

O que o problema pede é $P(A/B)$, ou seja, a probabilidade de sair ás vermelho tendo saído copas.

Evento A : { ás de copas , ás de ouros }

Evento B : cartas de copas

$$A \cap B = \{ \text{ás de copas} \} \Rightarrow n(A \cap B) = 1$$

$$\text{Logo, } P(A \cap B) = \frac{1}{52} \text{ e } P(B) = \frac{13}{52}. \text{ Portanto: } P(A/B) = \frac{n(A \cap B)}{P(B)} = \frac{\frac{1}{52}}{\frac{13}{52}} = \frac{1}{13}.$$

Exemplo 2: Uma família planejou ter 3 crianças. Qual é a probabilidade de que a família tenha 3 homens, já que a primeira criança que nasceu é homem ?

Neste caso, chamando M : mulher e H : homem, temos:

$$\Omega = \{HHH, HHM, HMH, MHH, HMM, MHM, MMH, MMM\} \Rightarrow n(\Omega) = 8$$

evento A : a família tem 3 homens $\Rightarrow A = \{HHH\}$

evento B : a primeira criança é homem $\Rightarrow B = \{HHH, HMM, HHM, HMH\}$

$$A \cap B = \{HHH\}; P(A \cap B) = \frac{1}{8}; P(B) = \frac{4}{8} = \frac{1}{2}$$

$$P(A/B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = \frac{\frac{1}{8}}{\frac{1}{2}} = \frac{1}{4}.$$

2.7 Eventos Independentes

Dois eventos A e B de um espaço amostral Ω (com $P(A) \neq 0$ e $P(B) \neq 0$) são independentes se e somente se $P(A/B) = P(A)$, ou de modo equivalente:

$$P(A \cap B) = P(A).P(B).$$

Com isso, podemos afirmar que dois eventos A e B são dependentes quando $P(A \cap B) \neq P(A).P(B)$.

Exemplo 1: Uma moeda perfeita é lançada duas vezes. Considerando os eventos A : sair cara na 1ª jogada e B : sair cara na 2ª jogada, demonstre que os eventos A e B são independentes.

$$\Omega = \{CC, CK, KC, KK\}$$

$$A = \{CC, CK\} \Rightarrow P(A) = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$$

$$B = \{CC, KC\} \Rightarrow P(B) = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$$

$$A \cap B = \{CC\} \Rightarrow P(A \cap B) = \frac{1}{4}$$

Como $\frac{1}{4} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2}$, então $P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$. Logo, A e B são independentes.

Exemplo 2: Consideremos uma cria de cachorros com 3 filhotes. Sejam os eventos A : obtenção de pelo menos dois machos e B : obtenção de pelo menos um de cada sexo. Os eventos A e B são independentes? Por quê?

m : macho; f : fêmea

$$\Omega = \{mmm, mmf, mfm, fmm, mff, fmf, ffm, fff\}$$

$$A = \{mmm, mmf, mfm, fmm\} \Rightarrow P(A) = \frac{1}{2}$$

$$B = \{mmf, mfm, fmm, mff, fmf, ffm\} \Rightarrow P(B) = \frac{3}{4}$$

$$A \cap B = \{mmf, mfm, fmm\} \Rightarrow P(A \cap B) = \frac{3}{8}$$

Vemos que $\frac{3}{8} = \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{4}$. Como $P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$, temos que A e B são independentes.

2.8 Exercícios

- Se A e B são eventos com $P(A) = \frac{3}{5}$, $P(B) = \frac{1}{2}$ e $P(A \cap B) = \frac{3}{10}$, determine a probabilidade de:
 - A dado B
 - B dado A
 - A dado $A \cup B$
 - $A \cup B$ dado A
- Jogam-se dois dados. Qual é a probabilidade de se obter o 4 no primeiro dado, se a soma dos resultados é 9?
- Um grupo de pessoas está classificado da seguinte maneira:

	Professor	Advogado	Dentista
Homens	60	80	50
Mulheres	90	40	30

Definindo que H : homem; M : mulher; P : professor; A : advogado; D : dentista; escreva em palavras o que significa cada uma das expressões, supondo que cada pessoa tenha uma única profissão e calcule os valores de cada item.

- $P(A/H)$

- b) $P(P/M)$
 - c) $P(D/H)$
 - d) $P(\bar{D}/H)$
4. Uma família planeja ter 3 crianças. Qual é a probabilidade de que a família tenha exatamente 2 meninas, dado que a primeira criança que nasceu é menina?
5. Uma moeda é lançada três vezes. Determine a probabilidade de se obter:
- a) 3 caras.
 - b) 3 caras, dado que a primeira foi cara.
 - c) exatamente 2 caras.
 - d) 2 caras, dado que a primeira foi coroa.
 - e) cara no 2º lançamento, dado que 2 coroas e 1 cara foram obtidas.
 - f) cara no 2º lançamento, dado que 3 caras foram obtidas.
 - f) cara no 2º lançamento, dado que pelo menos 1 cara foi obtida.
6. Para ter acesso às informações de sua conta bancária, um usuário utiliza um terminal de computador, no qual ele deverá digitar seu código secreto, formado por quatro dígitos, numa determinada ordem. O usuário não se lembra exatamente do código secreto, mas lembra que o código não tem dígitos repetidos, os dígitos estão em ordem crescente e o número formado pelos dígitos é maior que 4000.
- a) Qual é a probabilidade de ele digitar o código corretamente na 1ª tentativa?
 - b) Tendo errado em duas tentativas, qual é a probabilidade de ele acertar o código na terceira tentativa?
7. (Fuvest-SP) Considere o experimento que consiste no lançamento de um dado perfeito (todas as seis faces têm probabilidades iguais). Com relação a esse experimento considere os seguintes eventos:
- I) O resultado do lançamento é par.
 - II) O resultado do lançamento é estritamente maior do que 4.
 - III) O resultado é múltiplo de 3.
- a) I e II são eventos independentes ? Resp.: Sim
 - b) II e III são eventos independentes ? Resp.: Não
8. Se A e B são eventos independentes com $P(A) = 0,2$ e $P(B) = 0,4$, determine.
- a) $P(A \cap B)$
 - b) $P(A \cup B)$
9. Se A e B são eventos independentes com $P(A) = 0,5$ e $P(A \cap B) = 0,3$, determine $P(B)$.

10. Se $P(A) = 0,3$, $P(B) = 0,2$ e $P(A \cup B) = 0,4$, determine $P(A/B)$. A e B são independentes?
11. Consideremos uma família com 3 crianças e os eventos A : a família tem no máximo 1 menino; B : a família tem crianças de ambos os sexos. Os eventos A e B são independentes?
12. No jogo da Quina, mantida pela Caixa Econômica Federal, são sorteadas cinco dezenas de um total de 80. O apostador deve marcar um mínimo de 5 e um máximo de 8 dezenas em um volante. O valor da aposta varia de acordo com o número de dezenas marcadas, segundo a tabela:

Aposta (dezenas)	Preço (R\$)
5	0,50
6	1,00
7	2,00
8	4,00

Carlos encontrou 4 reais no bolso e decidiu apostar na sorte. Diante da porta da lotérica, olhando a tabela de preços, veio-lhe a dúvida: o que seria preferível?

Opção 1 : gastar 4 reais fazendo um volante com 8 dezenas marcadas.

Opção 2 : gastar 4 reais fazendo dois volantes com 7 dezenas marcadas.

Opção 3 : gastar 4 reais fazendo quatro volantes com 6 dezenas marcadas.

Opção 4 : gastar 4 reais fazendo oito volantes com 5 dezenas marcadas.

Ajude Carlos a tomar a decisão correta.

13. (PUC-SP) Um jogo de crianças consiste em lançar uma caixa de fósforos sobre uma mesa. Ganha quem conseguir fazer com que a caixa fique apoiada sobre sua menor face. Suponha que a probabilidade de uma face ficar apoiada sobre a mesa é proporcional à sua área e que a constante de proporcionalidade é a mesma para cada face. Se as dimensões da caixa são 2 cm, 4 cm e 8 cm, qual é a probabilidade de a caixa ficar apoiada sobre sua face menor?
14. (Fuvest-SP)
- Uma urna contém três bolas pretas e cinco bolas brancas. Quantas bolas azuis devem ser colocadas nessa urna de modo que, retirando-se uma bola ao acaso, a probabilidade de ela ser azul seja igual a $\frac{2}{3}$?
 - Considere agora uma outra urna que contém uma bola preta, quatro bolas brancas e x bolas azuis. Uma bola é retirada ao acaso dessa urna, a sua cor é observada e a bola é devolvida à urna. Em seguida, retira-se novamente, ao acaso, uma bola dessa urna. Para que valores de x a probabilidade de que as duas bolas sejam da mesma cor vale $\frac{1}{2}$?
15. (PUC-SP) Em uma caixa há quatro bolas vermelhas e sete bolas azuis, todas elas do mesmo tamanho. Um experimento consiste em retirar uma bola e, sem devolvê-la para a caixa, retirar uma segunda bola. Se a

primeira bola retirada for azul, a probabilidade de que a segunda retirada seja vermelha é igual a:

a) 20% b) 30% c) 40% d) 50% e) 60%

16. (PUC-SP) De sua turma de 30 alunos, é escolhida uma comissão de três representantes. Qual a probabilidade de você fazer parte da comissão?

a) $\frac{1}{10}$ b) $\frac{1}{12}$ c) $\frac{5}{24}$ d) $\frac{1}{3}$ e) $\frac{3}{8}$

17. Em uma classe de 25 alunos há dois irmãos gêmeos. Três alunos são sorteados ao acaso para apresentar um trabalho. Qual é a probabilidade de que os gêmeos estejam entre os escolhidos?

18. (U.F. Juiz de Fora - MG) Um programa de apoio a uma comunidade conta com 7 assistentes sociais, 6 enfermeiros e 4 médicos.

a) Quantos grupos distintos de 7 profissionais podem ser formados se devem participar de cada um desses grupos 3 assistentes sociais, 2 enfermeiros e 2 médicos?

b) Qual a probabilidade de se escolher, ao acaso, um grupo de 3 assistentes sociais constituídos de duas mulheres e um homem, se dos 7 assistentes sociais, 3 são homens e 4 são mulheres?

19. Uma moeda é viciada de tal modo que, com ela, obter cara é três vezes mais provável que obter coroa. Qual é a probabilidade de se conseguir cara em um único lançamento dessa moeda?

20. Duas cartas, de um baralho de 52 cartas, são extraídas sucessivamente. Qual é a probabilidade de saírem duas cartas de um mesmo naipe, se a extração é feita:

a) Sem reposição?

b) Com reposição?

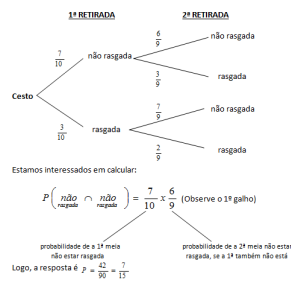
2.9 Teorema da Multiplicação de Probabilidades

Para se calcular a probabilidade de ocorrer a intersecção dos eventos A e B (ocorrência simultânea de A e B), que é $P(A \cap B)$, é preciso multiplicar a probabilidade de ocorrer um deles C pela probabilidade de ocorrer o outro, sabendo que o primeiro já ocorreu ($P(A/B)$), conforme visto em probabilidade condicional.

Exemplo 1: Em um cesto de roupas há dez meias, das quais três estão rasgadas. Retirando-se uma meia do cesto duas vezes e sem reposição, qual é a probabilidade de que as duas meias retiradas não estejam rasgadas?

Exemplo 2: Uma urna contém exatamente nove bolas: cinco azuis (A) e quatro vermelhas (V).

- a) Retirando-se simultaneamente três bolas da urna, qual é a probabilidade de se obterem duas bolas azuis e uma vermelha?



O espaço amostral Ω é formado por todos os conjuntos possíveis de três bolas da urna. Assim, temos: $n(\Omega) = C_{9,3} = 84$.

O evento A que nos interessa é formado por todos os conjuntos possíveis de três bolas da urna, sendo duas azuis e uma vermelha. Assim, temos: $n(A) = C_{5,2} \cdot C_{4,1} = 10 \cdot 4 = 40$. Logo: $P(A) = \frac{n(A)}{n(\Omega)} = \frac{40}{84} = \frac{10}{21}$.

- b) Retirando-se sucessivamente, sem reposição, três bolas da urna, qual é a probabilidade de se obterem duas bolas azuis e uma vermelha?

Temos três sequências possíveis, com as respectivas probabilidades:

$$\begin{aligned} AAV : P_1 &= \frac{5}{9} \cdot \frac{4}{8} \cdot \frac{4}{7} = \frac{10}{63} \text{ ou} \\ AVA : P_2 &= \frac{5}{9} \cdot \frac{4}{7} \cdot \frac{4}{8} = \frac{10}{63} \text{ ou} \\ VAA : P_3 &= \frac{4}{9} \cdot \frac{5}{8} \cdot \frac{4}{7} = \frac{10}{63}. \end{aligned}$$

Logo, a probabilidade total é: $P = P_1 + P_2 + P_3 = \frac{10}{63} + \frac{10}{63} + \frac{10}{63} = \frac{30}{63} = \frac{10}{21}$.

Comparando os itens $a)$ e $b)$, acima, percebemos que a probabilidade de retirarmos simultaneamente as bolas da urna é igual a probabilidade de retirá-las sucessivamente e sem reposição. Assim, sugerimos que todo problema em que for pedida a probabilidade de retiradas simultâneas seja transformado em retiradas sucessivas e sem reposição. (OBS: Nas retiradas sucessivas, a ordem dos elementos retirados deve ser levada em consideração).

2.9.1 Exercícios

- Em uma caixa há vinte selos, sendo 12 nacionais e 8 importados. Retira-se ao acaso um selo da caixa e registra-se sua origem. A seguir retira-se outro selo da caixa, sem que o primeiro seja repostado; e anota-se a origem. Qual é a probabilidade de saírem selos diferentes?
- Uma caixa contém exatamente 7 parafusos: 4 de aço e 3 de ferro. Retira-se ao caso um parafuso da caixa, registra-se o metal de que é feito, e repõe-se o parafuso na caixa. A seguir retira-se, novamente ao acaso, outro parafuso da caixa registrando o metal que o compõe. Calcular a probabilidade de:
 - Sair o primeiro parafuso de aço e o segundo de ferro.
 - Saírem 2 parafusos de metais diferentes.

-
3. Uma urna contém 10 bolas, sendo precisamente: 3 bolas verdes, 2 pretas e 5 azuis. Retirando 3 bolas da urna, uma de cada vez e sem reposição, calcule a probabilidade de saírem:
- a) a primeira bola verde, a segunda preta e a terceira azul.
 - b) 3 bolas de cores diferentes.
 - c) 3 bolas azuis.
4. Uma caixa de joias contém exatamente 5 pérolas falsas e 6 pérolas verdadeiras. Retirando simultaneamente 4 pérolas dessa urna, calcule a probabilidade de obter:
- a) 3 verdadeiras e 1 falsa.
 - b) todas verdadeiras.
 - c) pelo menos uma falsa.

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- [1] AKAMINE, Carlos Takeo; YAMAMOTO, Roberto Katsuhiro. *Estatística Descritiva* 3 ed. revisada São Paulo: Érica, 2013.
- [2] BARBOSA, Dalva Regina Ribeiro; MILONE, Giuseppe. *Estatística Aplicada ao Turismo e Hotelaria* São Paulo: Pioneira Thomson Learning, 2004.
- [3] LARSON, Ron; FARBER, Betsy. *Estatística Aplicada* 4. ed, São Paulo: Pearson Prentice Hall, 2010.
- [4] Arquivos disponíveis na rede.