Pós-Graduação em Ciência de Dados

Professora Cecília Pereira de Andrade

e

Professor Ricardo Sovat

INSTITUTO FEDERAL DE EDUCAÇÃO, CIÊNCIA E TECNOLOGIA
SÃO PAULO
Campus Campinas

Vetores

Vetores

- **Grandezas escalares:** representadas por um número real, apenas. Por exemplo: massa, temperatura, dimensão, etc.

- **Grandezas vetoriais:** devem ser representadas por *módulo* (ou comprimento ou intensidade), *direção* e *sentido*.

Vetores

- Na figura abaixo, notamos, em (a), que a reta r_2 tem uma direção diferente das retas r_1 e r_3. Em (b), existem dois sentidos em uma mesma direção.

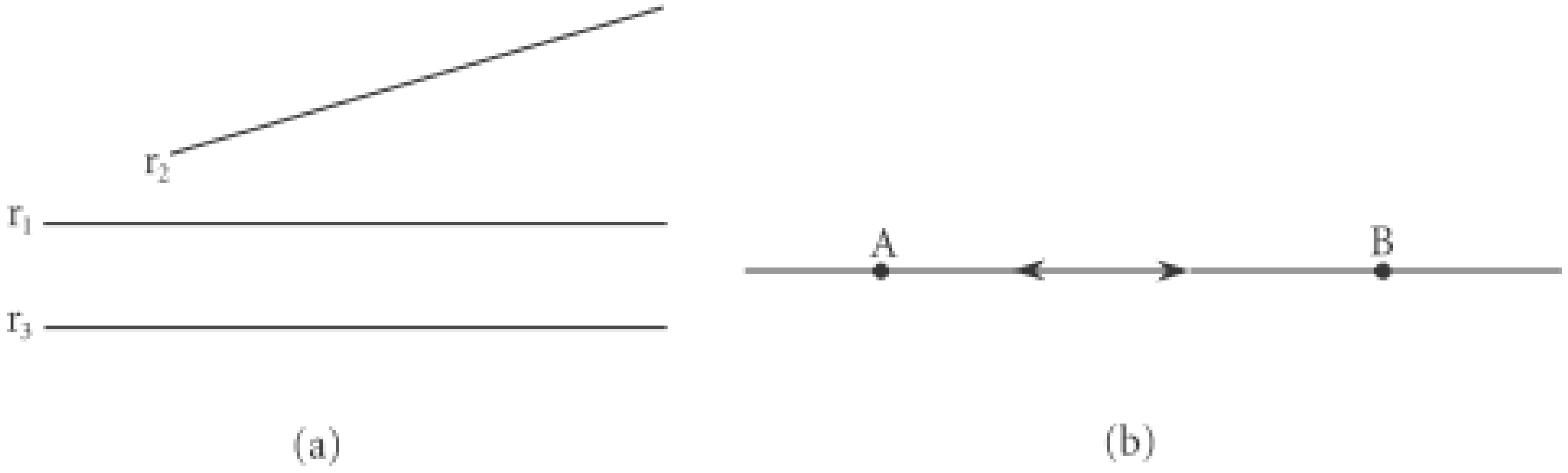


Figura 1.1

Vetores

- Notação: $\vec{v}$ ou $\overrightarrow{AB}$

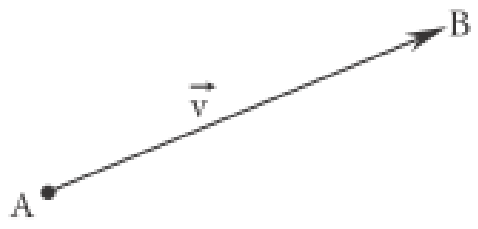


Figura 1.4

Adição de Vetores

- Para descobrir $\vec{u}+\vec{v}$, sendo $\vec{u}=\overrightarrow{AB}$ e $\vec{v}=\overrightarrow{BC}$, devemos representar os segmentos de reta, e, ao final, representarmos o vetor soma $\vec{u}+\vec{v}=\overrightarrow{AC}$.

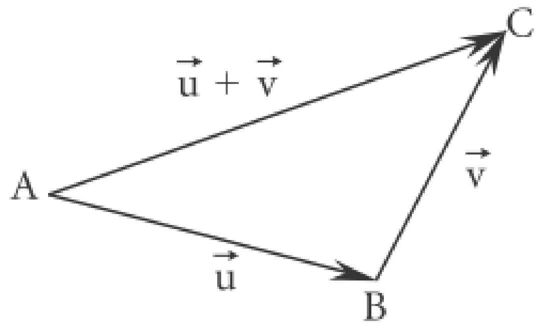


Figura 1.14

Adição de Vetores

▶ Outra forma de encontrar esse resultado é criar um paralelogramo, sendo o vetor soma a diagonal do mesmo.

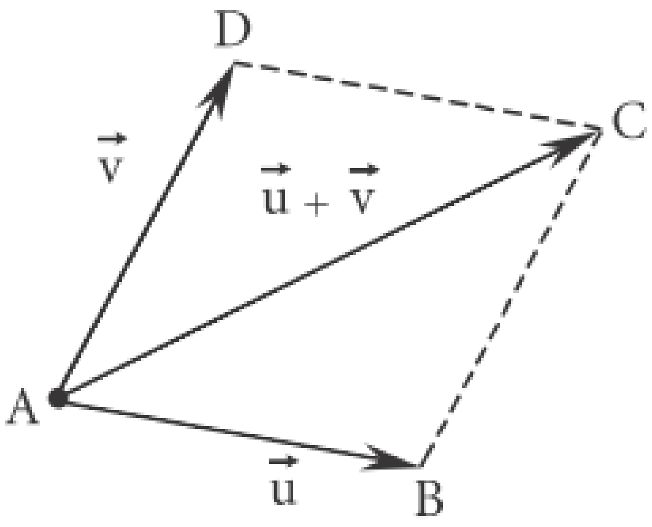


Figura 1.16

Adição de Vetores

▶Caso $\vec{u}$ e $\vec{v}$ sejam paralelos, a soma se dá da mesma forma, como representado na figura abaixo, para $\vec{u}//\vec{v}$ no mesmo sentido, em (a), e em sentidos opostos, em (b).

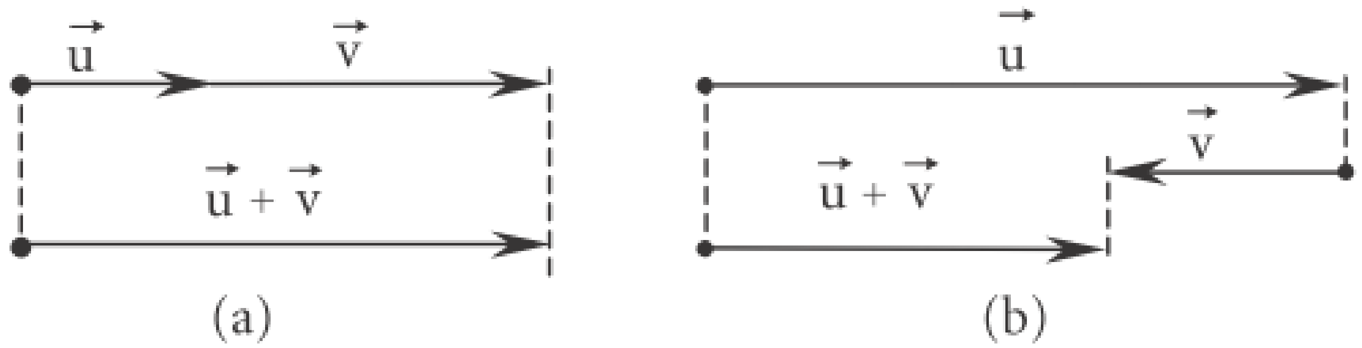


Figura 1.15

Adição de Vetores

- Para três ou mais vetores, aplica-se o mesmo procedimento (a).

- Caso a extremidade do último vetor coincida com a origem do primeiro, a soma é o vetor $\vec{0}$ (b).

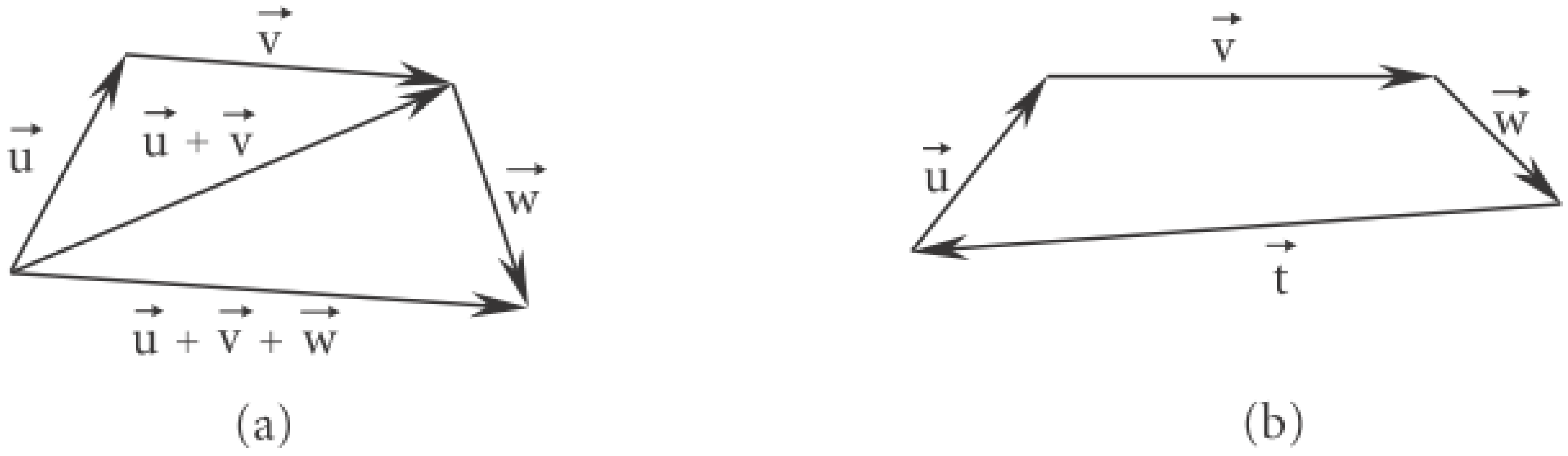


Figura 1.17

Multiplicação de Número Real por Vetor

- Na multiplicação de um numero real α e de um vetor $\vec{v}$, α interfere no comprimento de $\vec{v}$.

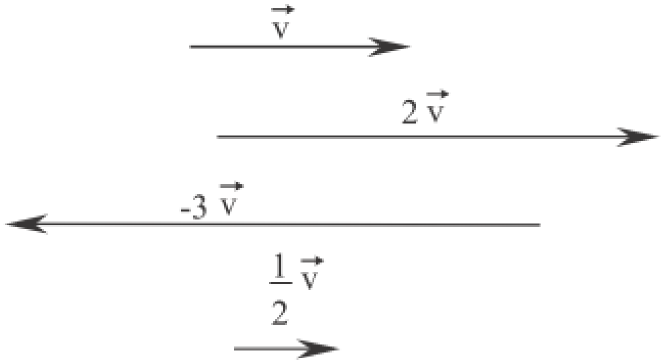


Figura 1.20

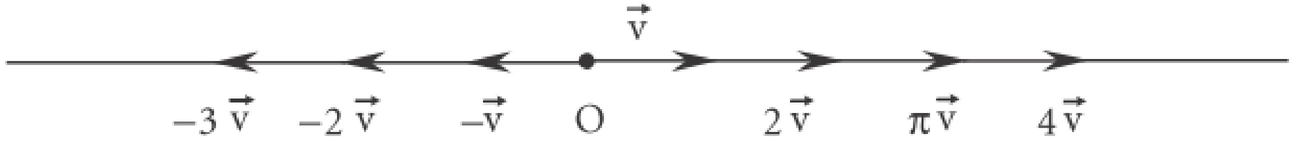


Figura 1.21

Ângulos entre Dois Vetores

- Chamamos o ângulo entre dois vetores não nulos, $\vec{u}$ e $\vec{v}$, de mesma origem, de θ. Assim, $0° < \theta < 180°$.

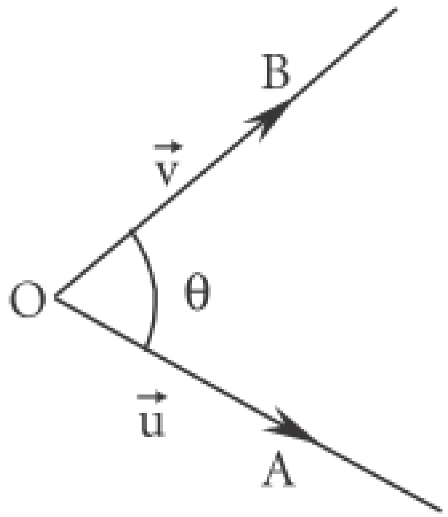


Figura 1.27

Ângulos entre Dois Vetores

- Caso os vetores tenham a mesma direção, temos o caso de $\theta=0°$ para o mesmo sentido (a) e $\theta=\pi$ para sentidos diferentes (b).

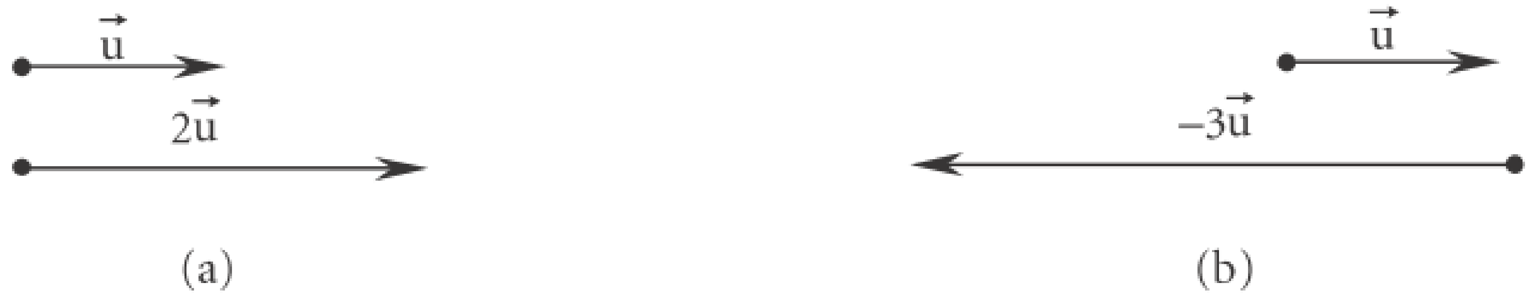


Figura 1.28

Vetores no Plano

- Todo vetor é representado por uma função. Portanto, para todo vetor $\vec{v}$, existem dois vetores $\vec{v}_1$ e $\vec{v}_2$, representados no mesmo plano, e dois valores específicos a_1 e a_2, sendo que:

$$\vec{v} = a_1 \vec{v}_1 + a_2 \vec{v}_2$$

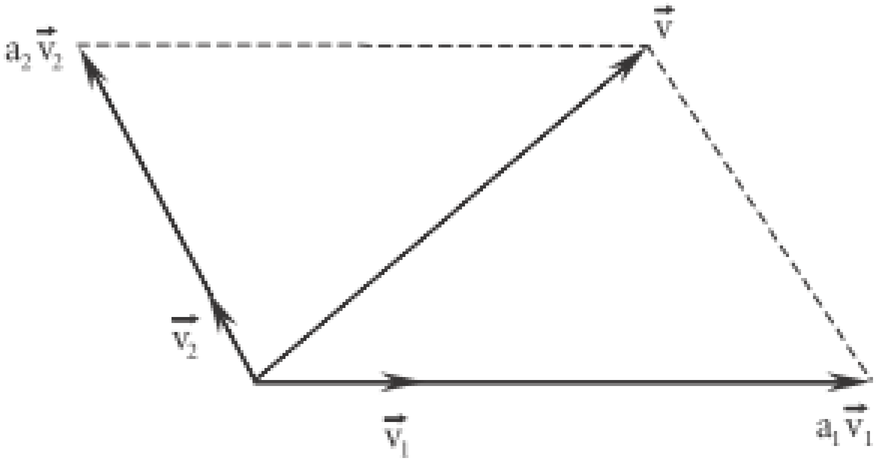


Figura 1.39

Vetores no Plano

- Podemos dizer que o vetor está inserido num plano *ortonormal*, normalmente o *sistema cartesiano ortogonal xOy.*
- Nesse sistema, os vetores são representados por $\vec{i}$ e $\vec{j}$.
- A base C = { $\vec{i}$, $\vec{j}$ } é chamada canônica.

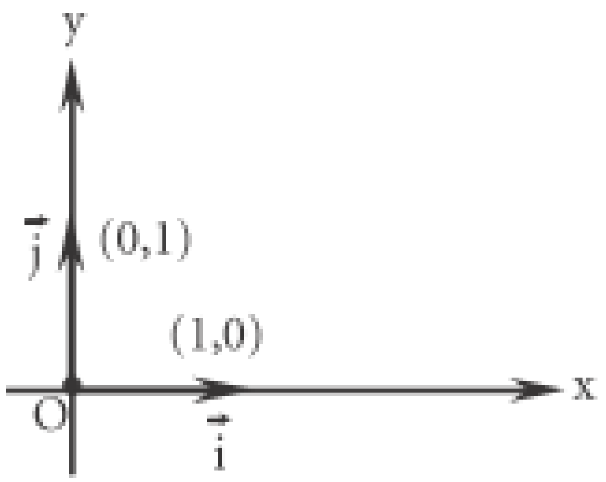


Figura 1.40

Vetores no Plano

- A base canônica trabalha com um par ordenado e seus componentes são números baseados na *abcissa* (x) e na *ordenada* (y), sendo, então:

$$\vec{v} = (x, y)$$

- Este par é chamado de expressão analítica de $\vec{v}$.

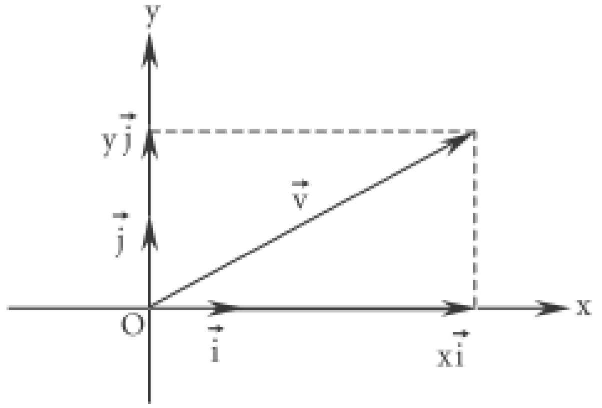


Figura 1.41

Vetores no Plano

- Para efetuar operações com vetores, pode-se usar suas expressões analíticas.

- $\overrightarrow{u} + \overrightarrow{v} = (x_1, y_1) + (x_2,y_2) = (x_1+x_2 , y_1+y_2)$

- $\alpha\overrightarrow{v} = \alpha (x, y) = (\alpha x, \alpha y)$

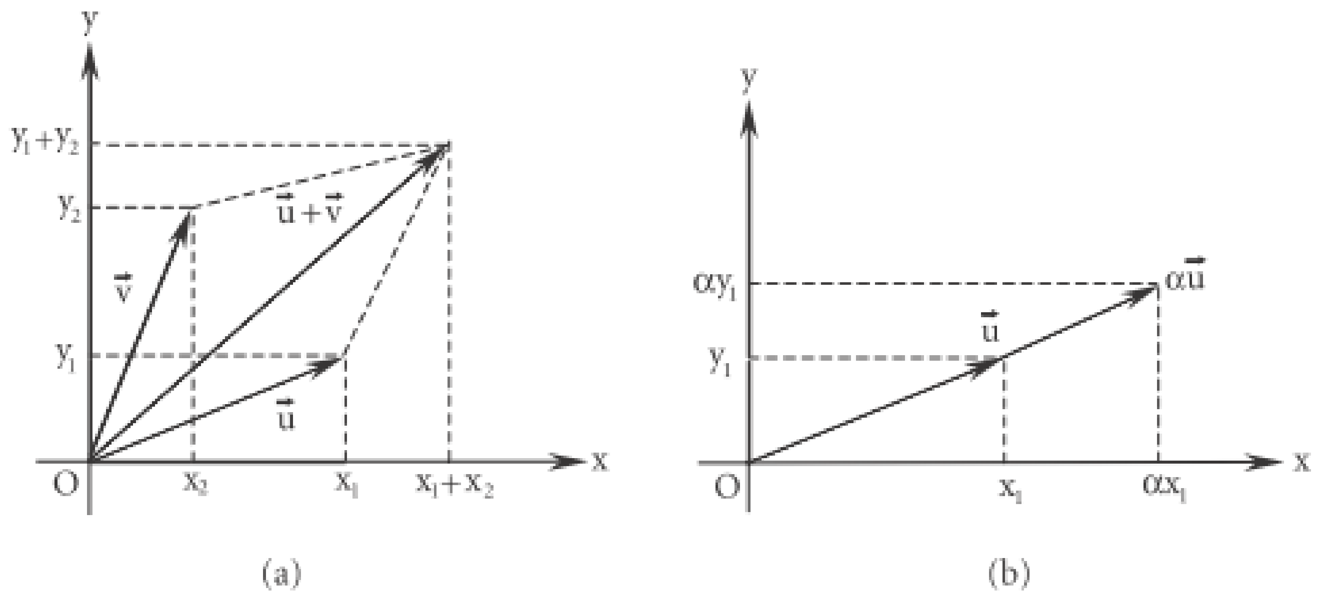


Figura 1.43

Vetores no Espaço

- Para colocarmos os vetores no espaço, usamos o *sistema cartesiano ortogonal Oxyz*.
- Assim, trabalhamos com três planos ao mesmo tempo, tendo figuras tridimensionais.

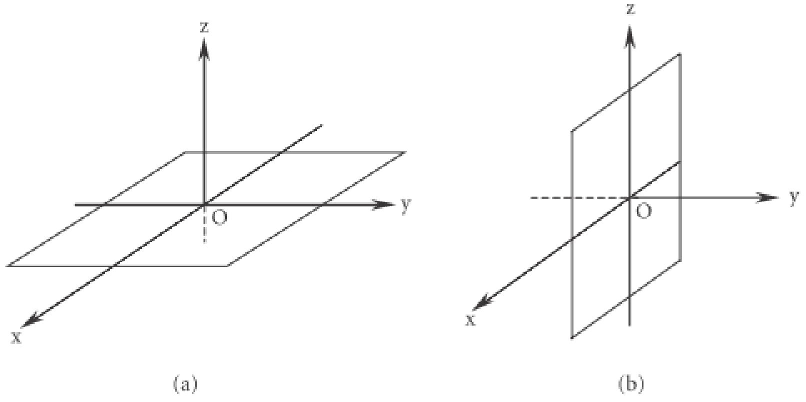


Figura 1.54

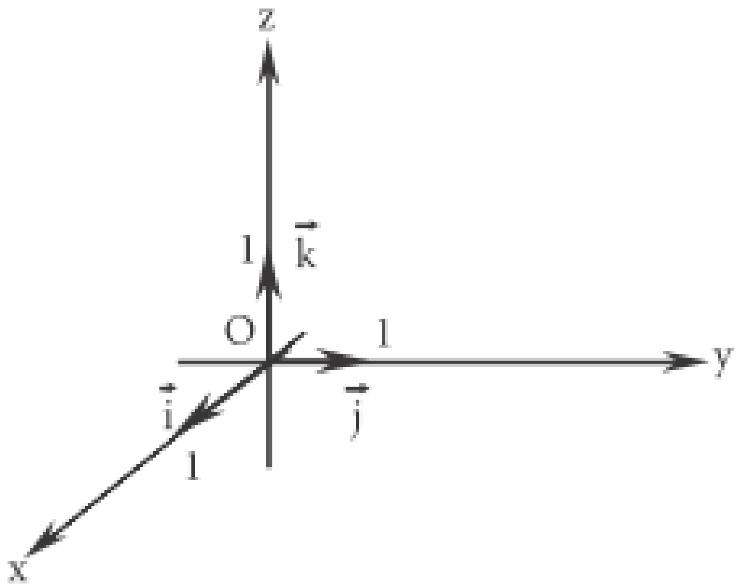


Figura 1.53

Vetores no Espaço

- Representação de um vetor no sistema cartesiano ortogonal Oxyz

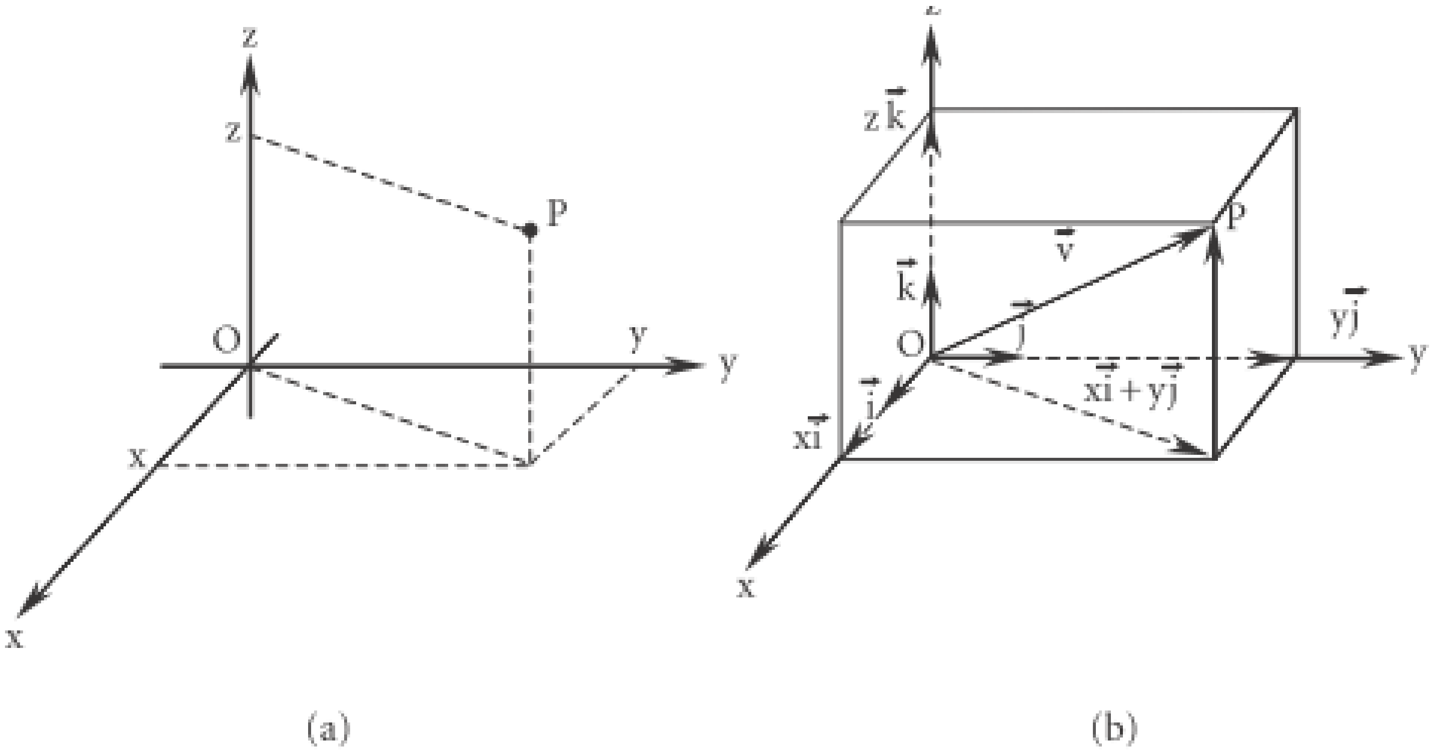


Figura 1.55

Produto Escalar

- O produto escalar é o resultado da multiplicação de dois vetores

- Se $\vec{u}=(x_1, y_1,z_1)$ e $\vec{v}=(x_2,y_2,z_2)$ então

$$\vec{u} \,.\, \vec{v} = x_1.x_2 + y_1.y_2 + z_1.z_2$$

- $< \vec{u} \,,\, \vec{v} >$

Módulo de um vetor

- Se $\vec{v}=(x,y,z)$,

$$|\vec{v}| = \sqrt{(\vec{v}.\vec{v})}$$

- Em coordenadas,

$$|\vec{v}| = \sqrt{(x^2+y^2+z^2)}$$

OBS: Versor: $\dfrac{\vec{v}}{|\vec{v}|}$

Produto Escalar – Definição Geométrica

- Se $\vec{u} \neq 0$, $\vec{v} \neq 0$ e se θ é o ângulo dos vetores

$(\ 0^\circ \leq \theta \leq 180^\circ\ )$

$$\vec{u}.\vec{v} = |\vec{u}|.|\vec{v}|.\cos\theta$$

- Ângulo entre dois vetores:

$$\cos\,\theta = \frac{\vec{u}.\vec{v}}{|\vec{u}|.|\vec{v}|}$$

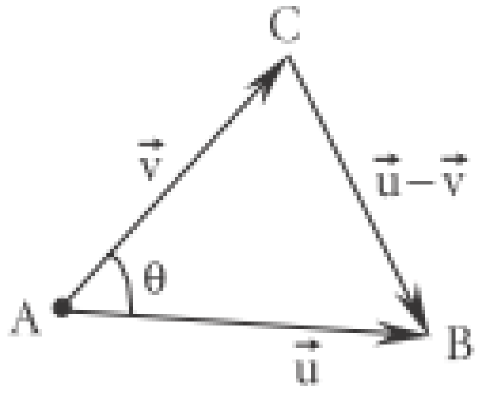


Figura 2.1

Ângulos Diretores

- São os ângulos formados pelos três vetores $\vec{i}$, $\vec{j}$ e $\vec{k}$ em que ele se divide no sistema cartesiano, sendo os cossenos diretores seus respectivos cossenos.

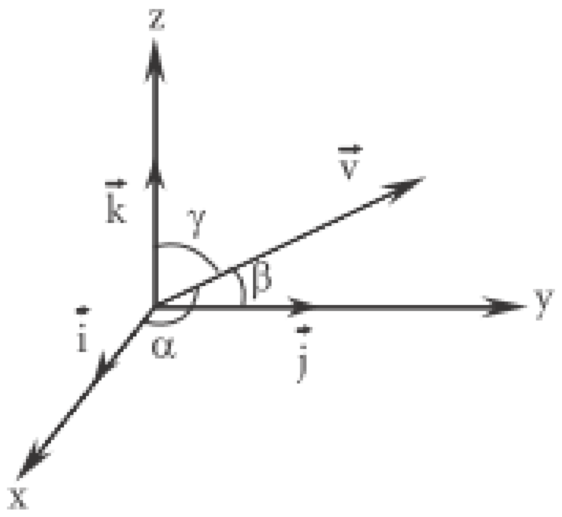


Figura 2.9

Ângulos Diretores

- Cálculo:

$$\cos\alpha = \frac{\vec{v}\cdot\vec{i}}{|\vec{v}||\vec{i}\,|} = \frac{(x,y,z)\cdot(1,0,0)}{|\vec{v}|(1)} = \frac{x}{|\vec{v}|}$$

$$\cos\beta = \frac{\vec{v}\cdot\vec{j}}{|\vec{v}||\vec{j}\,|} = \frac{(x,y,z)\cdot(0,1,0)}{|\vec{v}|(1)} = \frac{y}{|\vec{v}|}$$

$$\cos\gamma = \frac{\vec{v}\cdot\vec{k}}{|\vec{v}||\vec{k}|} = \frac{(x,y,z)\cdot(0,0,1)}{|\vec{v}|(1)} = \frac{z}{|\vec{v}|}$$

Projeção de um vetor sobre outro

- Considerando os vetores v e u, e decompondo v ($\vec{v} = \vec{v}_1 + \vec{v}_2$), temos que $\vec{v}_1 || \vec{u}$ e $v_2 \perp \vec{u}$.

- $\vec{v}_1$ é a projeção de $\vec{v}$ sobre $\vec{u}$.

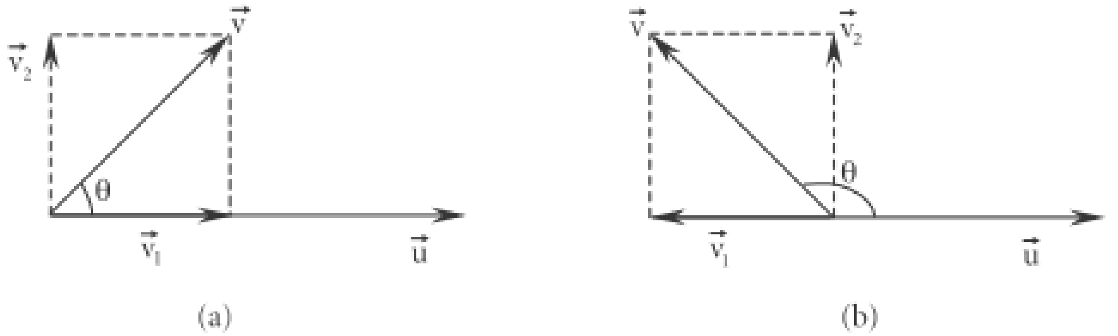


Figura 2.10

- Concluímos, então, que:

$$\text{proj}_{\vec{u}}\vec{v} = \left(\frac{\vec{v}\cdot\vec{u}}{\vec{u}\cdot\vec{u}}\right)\vec{u}$$

Produto Vetorial

- Dados $\vec{u} = x_1\vec{i} + y_1\vec{j} + z_1\vec{k}$ e $\vec{v} = x_2\vec{i} + y_2\vec{j} + z_2\vec{k}$

$$\vec{u} \text{ x } \vec{y} = (y_1z_2 - z_1y_2)\vec{i} - (x_1z_2 - z_1x_2)\vec{j} + (x_1y_2 - y_1x_2)\vec{k}$$

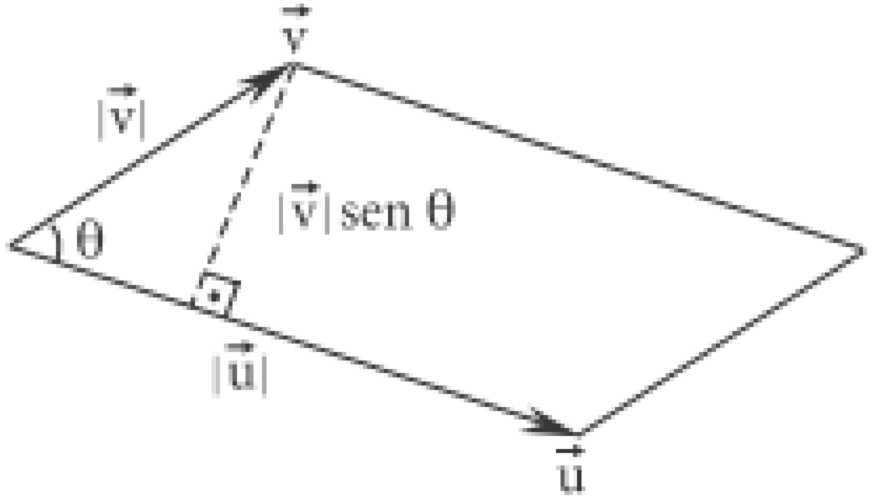
$$\vec{u} \times \vec{v} = \begin{vmatrix} y_1 & z_1 \\ y_2 & z_2 \end{vmatrix} \vec{i} - \begin{vmatrix} x_1 & z_1 \\ x_2 & z_2 \end{vmatrix} \vec{j} + \begin{vmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \end{vmatrix} \vec{k}$$

$$\vec{u} \times \vec{v} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \end{vmatrix}$$

Interpretação Geométrica

- O módulo do produto vetorial dos vetores $\vec{u}$ e $\vec{v}$ é a área do paralelogramo ABCD.

- $A = |\vec{u} \times \vec{v}|$



Produto Misto

- Dados $\vec{u} = x_1\vec{i} + y_1\vec{j} + z_1\vec{k}$, $\vec{v} = x_2\vec{i} + y_2\vec{j} + z_2\vec{k}$

e $\vec{w} = x_2\vec{i} + y_2\vec{j} + z_2\vec{k}$

$$(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}) = \vec{u}.(\vec{v} \times \vec{w}) = \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \\ x_3 & y_3 & z_3 \end{vmatrix}$$

Interpretação Geométrica

- O módulo do produto vetorial dos vetores $\vec{u}$, $\vec{v}$ e $\vec{w}$ é o volume do paralelogramo ABCD.

- $V = |(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w})|$