Pós-Graduação em Ciência de Dados

Professora Cecília Pereira de Andrade

e

Professor Ricardo Sovat

INSTITUTO FEDERAL DE EDUCAÇÃO, CIÊNCIA E TECNOLOGIA
SÃO PAULO
Campus Campinas

Derivadas

O problema da tangente

- Seja C com equação $y = f(x)$ e vamos encontrar a reta tangente a C em um ponto $P(a, f(a))$.

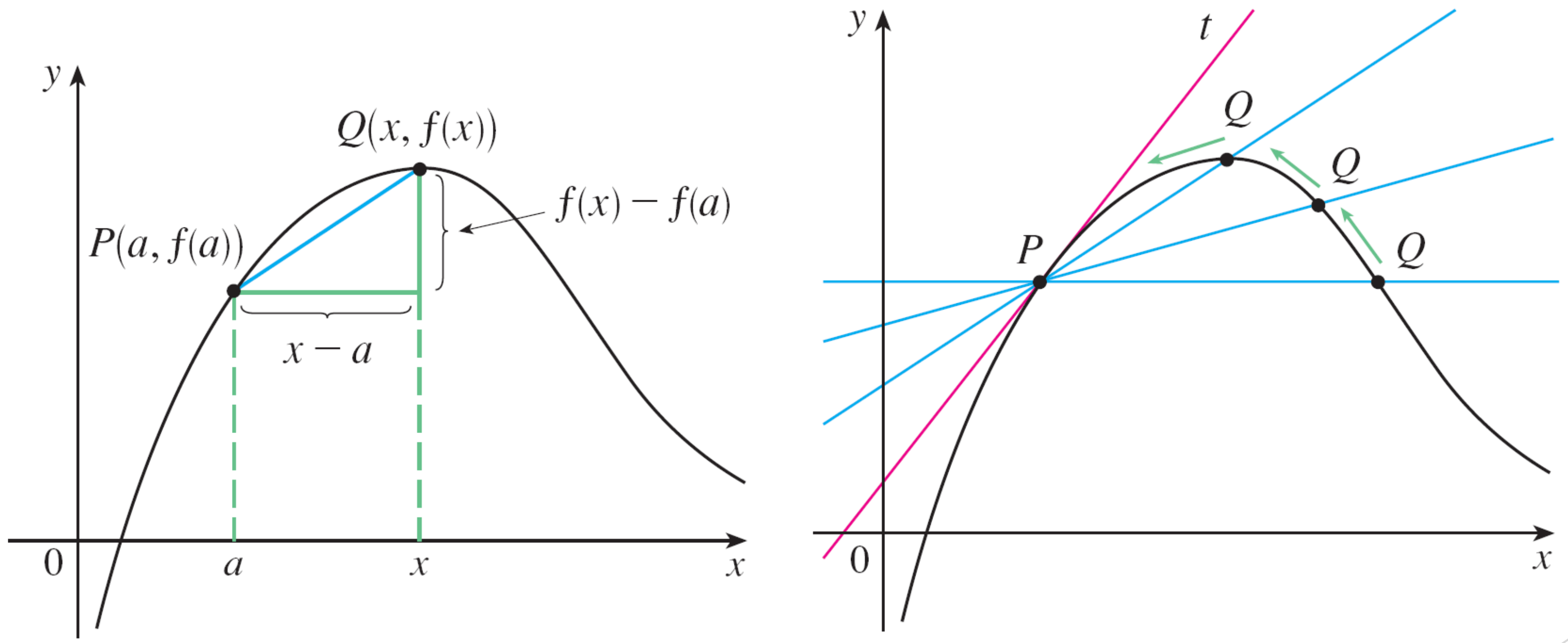
- Consideramos um ponto próximo $Q(x, f(x))$, onde $x \neq a$, e calculamos a inclinação da reta secante PQ:

$$m_{PQ} = \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$$

- Então fazemos Q aproximar-se de P ao longo da curva C ao obrigar x tender a a.

O problema da tangente

- A *tangente t* é a reta que passa por *P* e tem inclinação *m*.



O problema da tangente

$\boxed{1}$ **Definição** A **reta tangente** à curva $y = f(x)$ em um ponto $P(a, f(a))$ é a reta passando por P com a inclinação

$$m = \lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$$

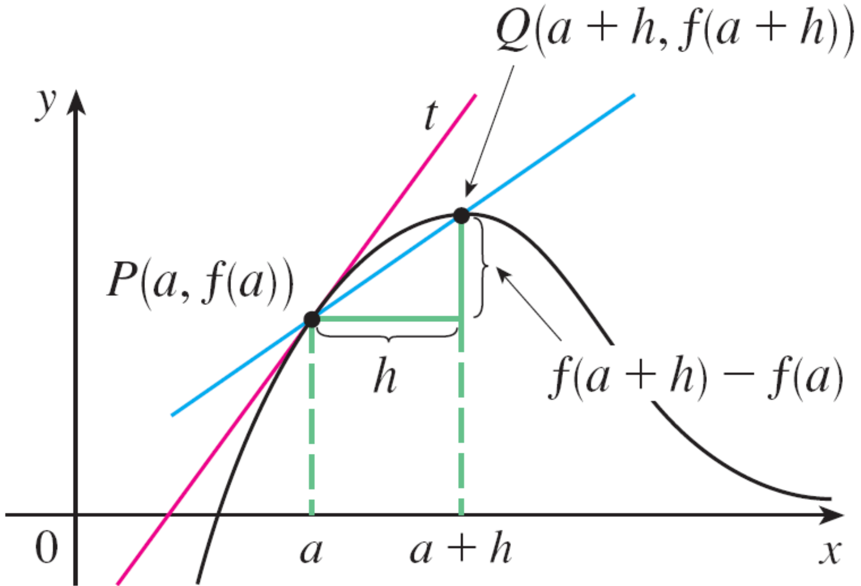
desde que esse limite exista.

O problema da tangente

- Se $h = x - a$, então $x = a + h$ e, assim, a inclinação da reta secante PQ é

$$m_{PQ} = \frac{f(a+h) - f(a)}{h}.$$

- O caso $h > 0$ é ilustrado e Q está à direita de P.



O problema da tangente

- Observe que quando *x* tende a *a*, *h* tende a 0 (pois $h = x - a$). Logo,

$$\boxed{m = \lim_{h \to 0} \frac{f(a + h) - f(a)}{h}.}$$

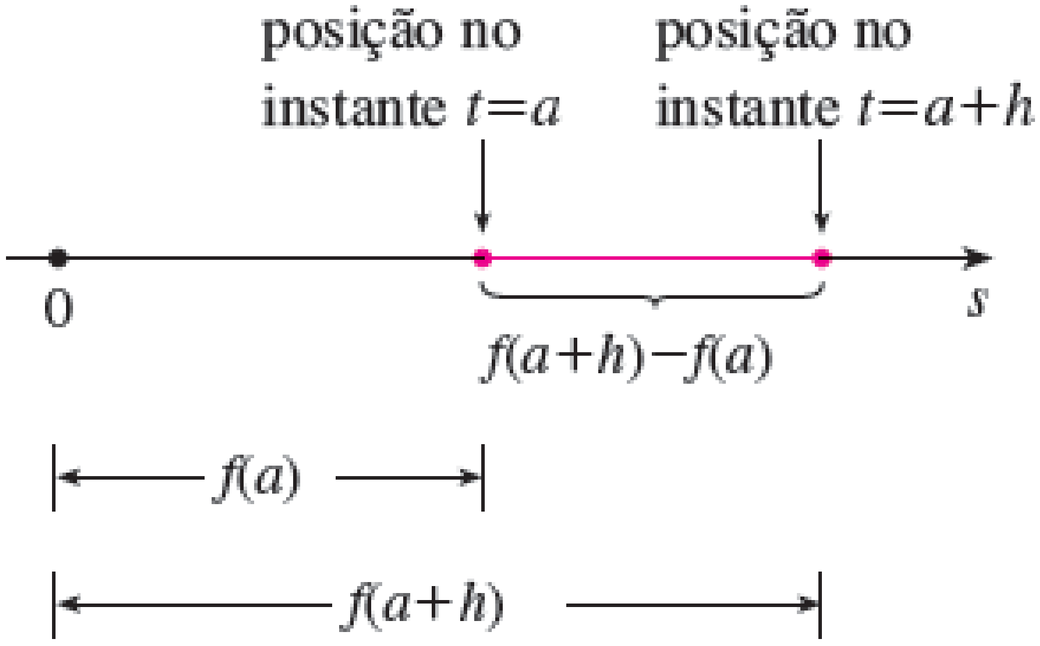
O problema da velocidade

- Seja $s = f(t)$, em que s é o deslocamento do objeto a partir da origem no instante t.

- A função f que descreve o movimento é chamada **função posição** do objeto.

- No intervalo de tempo entre $t = a$ e $t = a + h$, a variação na posição será de $f(a + h) - f(a)$.

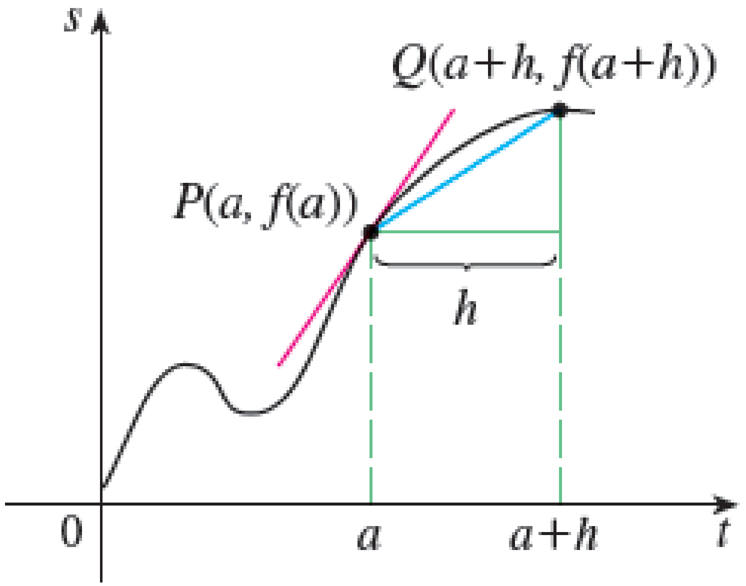
O problema da velocidade



O problema da velocidade

- A velocidade média nesse intervalo é

$$\text{velocidade média} = \frac{\text{deslocamento}}{\text{tempo}} = \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$$



$$m_{PQ} = \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$$

$$= \text{velocidade média}$$

O problema da velocidade

- A velocidade média é calculada em intervalos cada vez menores $[a, a + h]$ ($h \to 0$).

- Definimos **velocidade** (ou **velocidade instantânea**) $v(a)$ no instante $t = a$ como o limite dessas velocidades médias:

$$\boxed{v(a) = \lim_{h \to 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}.}$$

Derivadas

- Os limites do tipo

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(a + h) - f(a)}{h}$$

surgem sempre que calculamos uma taxa de variação em qualquer ramo das ciências ou engenharia

Derivadas

4 **Definição** **A derivada de uma função *f* em um número *a***, denotada por $f'(a)$, é

$$f'(a) = \lim_{h \to 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$$

se o limite existir.

- Se $x = a + h$, então $h = x - a$ e h tende a 0 se, e somente se, x tende a a.

$$f'(a) = \lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$$

Exemplo 1:

- Encontre a derivada da função $f\,(x) = x^2 - 8x + 9$ em um número a.

$$f'(a) = \lim_{h \to 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{[(a+h)^2 - 8(a+h) + 9] - [a^2 - 8a + 9]}{h}$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{a^2 + 2ah + h^2 - 8a - 8h + 9 - a^2 + 8a - 9}{h}$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{2ah + h^2 - 8h}{h} \quad = \lim_{h \to 0} (2a + h - 8) = 2a - 8$$

Taxas de variação

- Seja y uma quantidade que depende de outra quantidade x ($y = f(x)$).

- Se x variar de x_1 a x_2, então a variação em x (também chamada **incremento** de x) será

$$\Delta x = x_2 - x_1$$

e a variação correspondente em y será

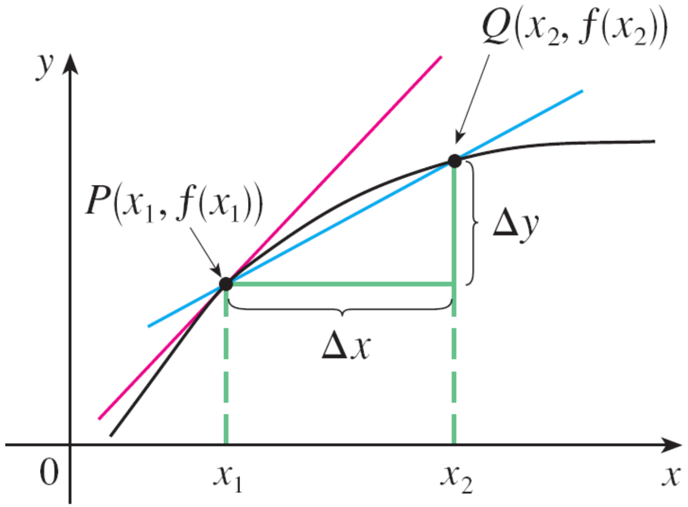
$$\Delta y = f(x_2) - f(x_1)$$

Taxas de variação

- O quociente da diferença

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}$$

é denominado **taxa média de variação de y em relação a x** no intervalo $[x_1, x_2]$ e pode ser interpretado como a inclinação da reta secante *PQ*



Taxas de variação

- Seja a taxa média de variação em intervalos cada vez menores fazendo x_2 tender a x_1 ($\Delta x \to 0$).

- O limite dessas taxas médias de variação é chamado **taxa (instantânea) de variação de *y* em relação a *x*** em

$x = x_1$, que é interpretada como a inclinação da tangente à curva $y = f(x)$ em $P(x_1, f(x_1))$:

$$\boxed{6} \qquad \text{taxa instantânea de variação} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{x_2 \to x_1} \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}.$$

- Reconhecemos este limite como a derivada $f'(x_1)$.

Taxas de variação

- Temos uma segunda interpretação para as derivadas:

A derivada $f'(a)$ é a taxa instantânea de variação de $y = f(x)$ em relação a x quando $x = a$.

- Se esboçarmos a curva $y = f(x)$, então a taxa instantânea da variação será a inclinação da tangente a essa curva no ponto onde $x = a$.

A derivada como uma função

- Dado qualquer número x para o qual esse limite exista, atribuímos a x o número $f'(x)$. Assim, podemos considerar f' como a nova função, chamada **derivada de f.**

- O domínio de f' é o conjunto $\{x \mid f'(x) \text{ existe}\}$ e pode ser menor que o domínio de f.

Notações

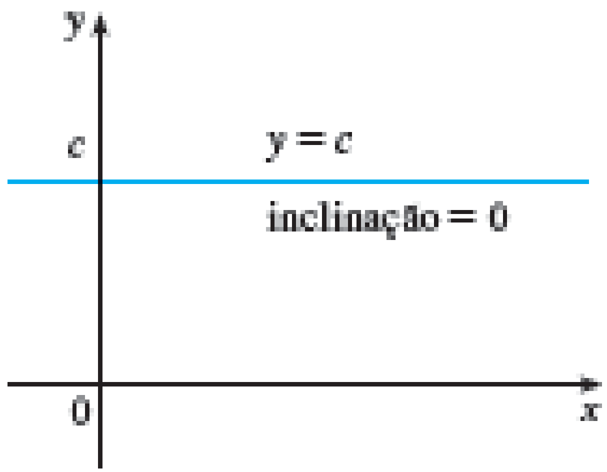
$$f'(x) = y' = \frac{dy}{dx} = \frac{df}{dx} = \frac{d}{dx}f(x) = Df(x) = D_x f(x)$$

- Os símbolos D e d/dx são chamados **operadores diferenciais**, pois indicam a operação de **diferenciação**, que é o processo de cálculo de uma derivada.

Derivadas de funções polinomiais

- Vamos iniciar com a função mais simples, a função constante $f(x) = c$.

- O gráfico dessa função é a reta horizontal $y = c$, cuja inclinação é 0; logo devemos ter $f'(x) = 0$



Derivadas de funções polinomiais

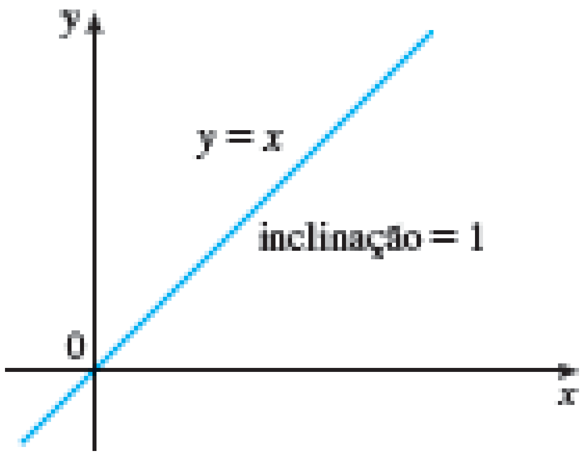
- Formalmente,

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x + h) - f(x)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{c - c}{h} = \lim_{h \to 0} 0 = 0$$

Derivadas de funções polinomiais

- Seja $f(x) = x^n$, onde n é um inteiro positivo.

- Se $n = 1$, o gráfico de $f(x) = x$ é a reta $y = x$, cuja inclinação é 1



Derivadas de funções polinomiais

- Formalmente,

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{x+h-x}{h}$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{h}{h} = \lim_{h \to 0} 1 = 1.$$

Derivadas de funções polinomiais

- Para n=2, $f(x)= x^2$ e

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h)-f(x)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{(x+h)^2 - x^2}{h}$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{x^2+2xh+h^2 - x^2}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{h(2x+h)}{h}$$

$$= \lim_{h \to 0} (2x + h) = 2x.$$

Derivadas de funções polinomiais

- Para n=3, f(x)= x^3 e

$$f'(x) = \lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{(x+h)^3-x^3}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0}\frac{x^3+3x^2h+3xh^2+h^3-x^3}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{h(3x^2+3xh+h^2)}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0}(3x^2+3xh+h^2) = 3x^2.$$

Derivadas de funções polinomiais

- Uma conjectura plausível que, quando *n* é um inteiro positivo,

$$(x^n)' = nx^{n-1}.$$

A Regra da Potência Se n for um inteiro positivo, então

$$\frac{d}{dx}(x^n) = nx^{n-1}.$$

Exemplos:

- (a) Se $f(x) = x^6$, então $f'(x) = 6x^5$.
- (b) Se $y = x^{1.000}$, então $y' = 1.000x^{999}$.
- (c) Se $y = t^4$, então $\dfrac{dy}{dt} = 4t^3$.
- (d) $\dfrac{d}{dr}(r^3) = 3r^2$.

Derivadas de ordem superior

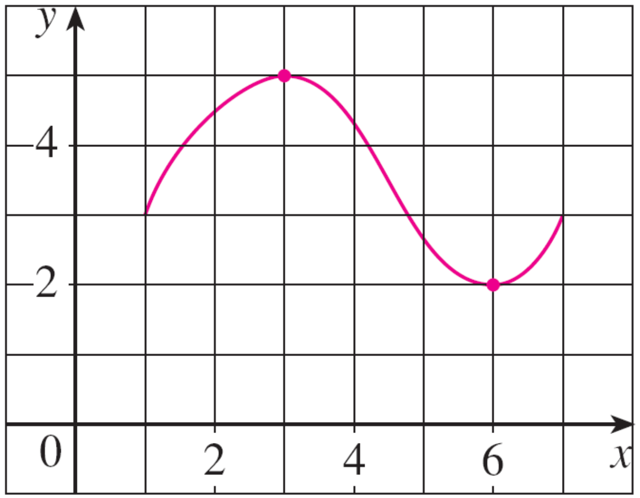
- Se f for uma função diferenciável, então f' pode ter sua própria derivada, denotada por $(f')' = f''$.

- f'' é chamada de **segunda derivada** de f pois é a derivada de ordem dois de f.

$$\underbrace{\frac{d}{dx}}_{\substack{\text{derivada}\\\text{de}}} \underbrace{\left(\frac{dy}{dx}\right)}_{\substack{\text{primeira}\\\text{derivada}}} = \underbrace{\frac{d^2y}{dx^2}}_{\substack{\text{segunda}\\\text{derivada}}}$$

Aplicação: valores máximo e mínimo

- Vamos primeiro explicar exatamente o que queremos dizer por valores máximo e mínimo.
- Vemos que o ponto mais alto no gráfico da função f mostrado na Figura 1 é o ponto (3, 5).
- Em outras palavras, o maior valor de f é $f(3) = 5$. Da mesma forma, o menor valor é $f(6) = 2$.



Aplicação: valores máximo e mínimo

- Dizemos que $f\,(3) = 5$ é o *máximo absoluto de f* e $f\,(6) = 2$ é o *mínimo absoluto*.

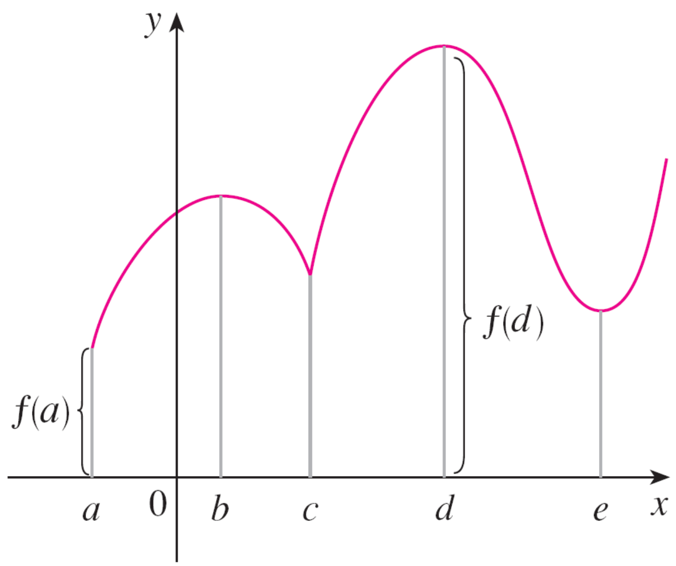
1 Definição Seja c um número no domínio D de uma função f. Então $f\,(c)$ é o

- valor **máximo absoluto** de f em D se $f(c) \geqslant f(x)$ para todo x em D.
- valor **mínimo absoluto** de f em D se $f(c) \leqslant f(x)$ para todo x em D.

- Um máximo ou mínimo absoluto às vezes é chamado de máximo ou mínimo **global**.
- Os valores máximos e mínimos de f são chamados de **valores extremos** de f.

Aplicação: valores máximo e mínimo

- Na Figura 2, se considerarmos apenas os valores de x próximos b então $f\ (b)$ é o maior destes valores de $f\ (x)$ e é chamado de *valor máximo local* de f.



Mínimos absolutos $f(a)$, máximos absolutos $f(d)$, mínimos locais $f(c)$, $f(e)$, máximos locais $f(b)$, $f(d)$

Figura 2

Aplicação: valores máximo e mínimo

- Para encontrar valores máximo e mínimo, precisamos do conceito de ponto ou número crítico

$\boxed{6}$ **Definição** Um **número crítico** de uma função f é um número c no domínio de f tal que a $f'(c) = 0$ ou $f'(c)$ não existem.

Aplicação: valores máximo e mínimo

- Para encontrarmos um máximo ou um mínimo absoluto de uma função contínua em um intervalo fechado, o seguinte procedimento de três etapas sempre funciona.

O Método do Intervalo Fechado Para encontrar os valores máximo e mínimo *absolutos* de uma função contínua f em um intervalo fechado $[a, b]$:

1. Encontre os valores de f nos números críticos de f em (a, b).
2. Encontre os valores de f nas extremidades do intervalo.
3. O maior valor entre as etapas 1 e 2 é o valor máximo absoluto, ao passo que o menor desses valores é o valor mínimo absoluto.

Aplicação: valores máximo e mínimo

- Para encontrarmos um máximo ou um mínimo local

Teste da Primeira Derivada Suponha que c seja um número crítico de uma função contínua f.

(a) Se o sinal de f' mudar de positivo para negativo em c, então f tem um máximo local em c.

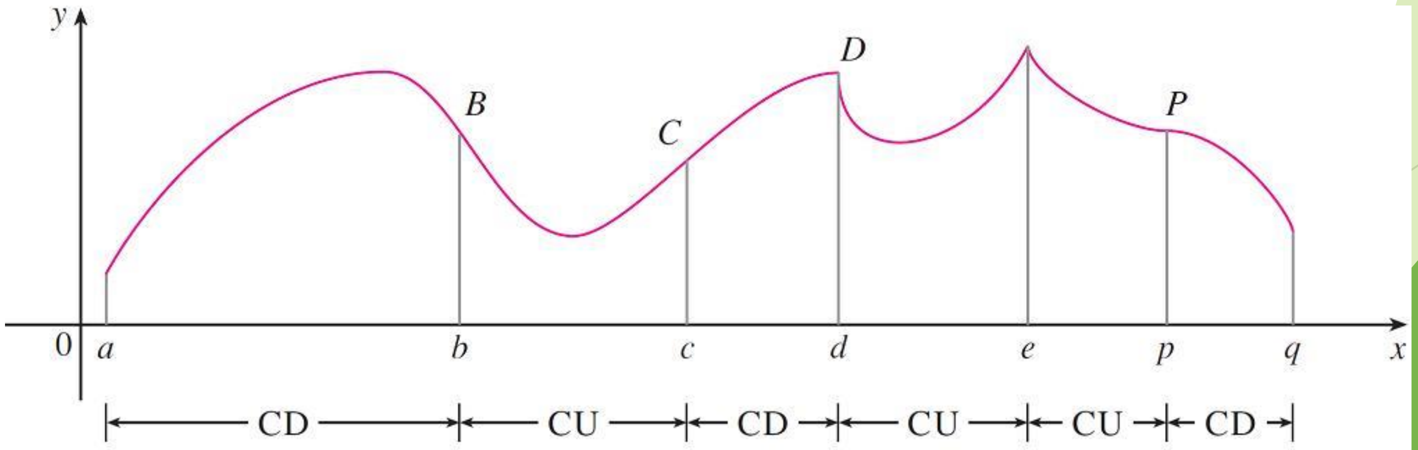
(b) Se o sinal de f' mudar de negativo para positivo em c, então f tem um mínimo local em c.

(c) Se f' é positiva à esquerda e a direita de c, ou negativa à esquerda e à direita de c, então f não tem máximo ou mínimo locais em c.

Aplicação: valores máximo e mínimo

- O que f'' nos diz sobre f?

- Temos o gráfico de uma função que é côncava para cima (abrevia-se CC) nos intervalos (*b*, *c*), (*d*, *e*) e (*e*, *p*), e côncava para baixo (CB) nos intervalos (*a*, *b*), (*c*, *d*) e (*p*, *q*).



Aplicação: valores máximo e mínimo

- Agora, como podemos usar a segunda derivada para achar máximos e mínimos?

Definição Um ponto P na curva $y = f(x)$ é chamado **ponto de inflexão** se f é contínua no ponto e a curva mudar de côncava para cima para côncava para baixo ou vice-versa em P.

Teste da Segunda Derivada Suponha que f'' seja contínua na proximidade de c.

(a) Se $f'(c) = 0$ e $f''(c) > 0$, então f tem um mínimo local em c.

(b) Se $f'(c) = 0$ e $f''(c) < 0$, então f tem um máximo local em c.

Aplicação: valores máximo e mínimo

- Exemplo: Examine a curva $y = x^4 - 4x^3$ em relação aos pontos críticos, aos pontos de inflexão e mínimos e máximos locais.

Solução: Se $f(x) = x^4 - 4x^3$, então

$$f'(x) = 4x^3 - 12x^2 = 4x^2(x - 3),$$

$$f''(x) = 12x^2 - 24x = 12x(x - 2).$$

Aplicação: valores máximo e mínimo

- Para acharmos os números críticos:

$f'(x) = 0$ e obtemos $x = 0$ e $x = 3$.

- Para usar o Teste da Segunda Derivada, calculamos f'' nesses pontos críticos:

  - $f''(0) = 0$, $f''(3) = 36 > 0$.

Aplicação: valores máximo e mínimo

- Uma vez que $f\,'(3) = 0$ e $f\,''(3) > 0$, $f\,(3) = -27$ é um mínimo local.

- Uma vez que $f\,''(0) = 0$, o Teste da Segunda Derivada não fornece informações sobre o número crítico 0.

Aplicação: valores máximo e mínimo

- Para achar os pontos de inflexão, fazemos $f''(x)=0$

$f''(x) = 12x(x - 2) = 0 \leftrightarrow x = 0$ ou $x = 2$