D1MAT - Lista de Exercícios 08: Espaços Vetoriais

June 22, 2021

1. Verifique se o conjunto $A = \left\{ \begin{bmatrix} 0 & a \\ b & 0 \end{bmatrix} \in M(2,2) | a, b \in \mathbb{R} \right\}$ com as operações usuais é um espaço vetorial.

Vamos considerar três vetores quaisquer de A, expressos por

$u = \begin{bmatrix} 0 & a_1 \\ b_1 & 0 \end{bmatrix}$, $v = \begin{bmatrix} 0 & a_2 \\ b_2 & 0 \end{bmatrix}$ e $w = \begin{bmatrix} 0 & a_3 \\ b_3 & 0 \end{bmatrix}$

Solução 1

Para sabermos se o conjunto A é um espaço vetorial com as operações usuais, devemos verificar os oito axiomas a seguir:

$A_1)$ $\quad (u + v) + w = u + (v + w), \ \forall u, v, w \in A$

$$
\begin{aligned}
(u+v)+w &= \left(\begin{bmatrix} 0 & a_1 \\ b_1 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & a_2 \\ b_2 & 0 \end{bmatrix} \right) + \begin{bmatrix} 0 & a_3 \\ b_3 & 0 \end{bmatrix} \\
(u+v)+w &= \left(\begin{bmatrix} 0 & a_1 + a_2 \\ b_1 + b_2 & 0 \end{bmatrix} \right) + \begin{bmatrix} 0 & a_3 \\ b_3 & 0 \end{bmatrix} \\
(u+v)+w &= \begin{bmatrix} 0 & (a_1 + a_2) + a_3 \\ (b_1 + b_2) + b_3 & 0 \end{bmatrix} \\
(u+v)+w &= \begin{bmatrix} 0 & a_1 + (a_2 + a_3) \\ b_1 + (b_2 + b_3) & 0 \end{bmatrix} \\
(u+v)+w &= \begin{bmatrix} 0 & a_1 \\ b_1 & 0 \end{bmatrix} + \left(\begin{bmatrix} 0 & a_2 + a_3 \\ b_2 + b_3 & 0 \end{bmatrix} \right) \\
(u+v)+w &= \begin{bmatrix} 0 & a_1 \\ b_1 & 0 \end{bmatrix} + \left(\begin{bmatrix} 0 & a_2 \\ b_2 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & a_3 \\ b_3 & 0 \end{bmatrix} \right) \\
(u+v)+w &= u + (v + w)
\end{aligned}
$$

$A_2)\quad u+v=v+u,\ \forall u,v\in A$

$$\begin{aligned}
u+v &= \begin{bmatrix}0 & a_1\\ b_1 & 0\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}0 & a_2\\ b_2 & 0\end{bmatrix}\\
u+v &= \begin{bmatrix}0 & a_1+a_2\\ b_1+b_2 & 0\end{bmatrix}\\
u+v &= \begin{bmatrix}0 & a_2+a_1\\ b_2+b_1 & 0\end{bmatrix}\\
u+v &= \begin{bmatrix}0 & a_2\\ b_2 & 0\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}0 & a_1\\ b_1 & 0\end{bmatrix}\\
u+v &= v+u
\end{aligned}$$

$A_3)\quad \exists 0\in A,\ \forall u\in A,\ u+0=u$

Seja $0=\begin{bmatrix}0 & 0\\ 0 & 0\end{bmatrix}\in A$

$$\begin{aligned}
u+0 &= \begin{bmatrix}0 & a_1\\ b_1 & 0\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}0 & 0\\ 0 & 0\end{bmatrix}\\
u+0 &= \begin{bmatrix}0 & a_1+0\\ b_1+0 & 0\end{bmatrix}\\
u+0 &= \begin{bmatrix}0 & a_1\\ b_1 & 0\end{bmatrix}\\
u+0 &= u
\end{aligned}$$

$A_4)\quad \forall u\in A,\ \exists(-u)\in A,\ u+(-u)=0$

Seja $(-u)=\begin{bmatrix}0 & -a_1\\ -b1 & 0\end{bmatrix}\in A$

$$\begin{aligned}
u+(-u) &= \begin{bmatrix}0 & a_1\\ b_1 & 0\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}0 & -a_1\\ -b_1 & 0\end{bmatrix}\\
u+(-u) &= \begin{bmatrix}0 & a_1+(-a_1)\\ b_1+(-b_1) & 0\end{bmatrix}\\
u+(-u) &= \begin{bmatrix}0 & a_1-a_1\\ b_1-b_1 & 0\end{bmatrix}\\
u+(-u) &= \begin{bmatrix}0 & 0\\ 0 & 0\end{bmatrix}\\
u+(-u) &= 0
\end{aligned}$$

$M_1)\quad (\alpha\beta)u=\alpha(\beta u),\ \forall u\in A,\ \forall\alpha,\beta\in\mathbb{R}$

$$\begin{aligned}
(\alpha\beta)u &= (\alpha\beta)\begin{bmatrix}0 & a_1\\ b_1 & 0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0 & (\alpha\beta)a_1\\ (\alpha\beta)b_1 & 0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0 & \alpha(\beta a_1)\\ \alpha(\beta b_1) & 0\end{bmatrix}\\
(\alpha\beta)u &= \alpha\begin{bmatrix}0 & \beta a_1\\ \beta b_1 & 0\end{bmatrix}=\alpha\left(\beta\begin{bmatrix}0 & a_1\\ b_1 & 0\end{bmatrix}\right)\\
(\alpha\beta)u &= \alpha(\beta u)
\end{aligned}$$

$M_2)\quad (\alpha+\beta)u = \alpha u + \beta u,\ \forall u \in A,\ \forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}$

$$(\alpha+\beta)u = (\alpha+\beta)\begin{bmatrix} 0 & a_1 \\ b_1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & (\alpha+\beta)a_1 \\ (\alpha+\beta)b_1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & \alpha a_1 + \beta a_1 \\ \alpha b_1 + \beta b_1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$(\alpha+\beta)u = \begin{bmatrix} 0 & \alpha a_1 \\ \alpha b_1 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & \beta a_1 \\ \beta b_1 & 0 \end{bmatrix} = \alpha \begin{bmatrix} 0 & a_1 \\ b_1 & 0 \end{bmatrix} + \beta \begin{bmatrix} 0 & a_1 \\ b_1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$(\alpha+\beta)u = \alpha u + \beta u$$

$M_3)\quad \alpha(u+v) = \alpha u + \alpha v,\ \forall u, v \in A,\ \forall \alpha \in \mathbb{R}$

$$\alpha(u+v) = \alpha\left(\begin{bmatrix} 0 & a_1 \\ b_1 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & a_2 \\ b_2 & 0 \end{bmatrix}\right) = \alpha \begin{bmatrix} 0 & a_1 + a_2 \\ b_1 + b_2 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & \alpha(a_1 + a_2) \\ \alpha(b_1 + b_2) & 0 \end{bmatrix}$$

$$\alpha(u+v) = \begin{bmatrix} 0 & \alpha a_1 + \alpha a_2 \\ \alpha b_1 + \alpha b_2 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & \alpha a_1 \\ \alpha b_1 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & \alpha a_2 \\ \alpha b_2 & 0 \end{bmatrix} = \alpha \begin{bmatrix} 0 & a_1 \\ b_1 & 0 \end{bmatrix} + \alpha \begin{bmatrix} 0 & a_2 \\ b_2 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\alpha(u+v) = \alpha u + \alpha v$$

$M_4)\quad 1u = u,\ \forall u \in A$

$$1u = 1\begin{bmatrix} 0 & a_1 \\ b_1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1a_1 \\ 1b_1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & a_1 \\ b_1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$1u = u$$

Como todos os oito axiomas que definem um espaço vetorial puderam ser verificados para o conjunto A com as operações usuais de soma e multiplicação por escalar, podemos afirmar que trata-se de um espaço vetorial.

Solução 2

Se considerarmos de antemão a informação de que o conjunto de todas as matrizes quadradas de ordem 2 com coeficientes reais $M(2,2)$ é um espaço vetorial, podemos verificar que o conjunto A (um subconjunto não-vazio de $M(2,2)$) é um espaço vetorial apenas demonstrando que A (o conjunto das matrizes quadradas de ordem 2 cujos elementos da diagonal principal são iguais a zero) é um subespaço vetorial de $M(2,2)$. Para tanto, apenas duas condições precisam ser verificadas:

I) $\forall u, v \in A,\ u + v \in A$

$$u + v = \begin{bmatrix} 0 & a_1 \\ b_1 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & a_2 \\ b_2 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & a_1 + a_2 \\ b_1 + b_2 & 0 \end{bmatrix} \in A$$

II) $\forall \alpha \in \mathbb{R}, u \in A,\ \alpha u \in A$

$$\alpha u = \alpha \begin{bmatrix} 0 & a_1 \\ b_1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & \alpha a_1 \\ \alpha b_1 & 0 \end{bmatrix} \in A$$

Resposta: A é um subespaço vetorial de $M(2,2)$ com as operações usuais.

2. O conjunto $S = \{(x, y)|x + 3y = 0\}$ é um subconjunto do $\mathbb{R}^2$. Verifique se é um subespaço vetorial relativo às operações de adição e multiplicação por escalar usuais.

De forma imediata podemos afirmar que trata-se de um subespaço vetorial do $\mathbb{R}^2$ pois qualquer vetor de S pertence a uma reta que passa pela origem do plano. Porém, vamos desenvolver melhor o raciocínio que leva a esta conclusão.

A equação $x + 3y = 0$ pode ser reescrita como $x = -3y$. Portanto:

$$
\begin{aligned}
S &= \{(x, y)|x + 3y = 0\} \\
S &= \{(x, y)|x = -3y\} \\
S &= \{(-3y, y); y \in \mathbb{R}\}
\end{aligned}
$$

Ou seja, S é o conjunto de todas as duplas ordenadas no plano cartesiano cuja primeira componente é -3 vezes a segunda componente.

Podemos ver que S é não-vazio pois ao menos o elemento $(0, 0) \in S$. Para então demonstrar que S é um subespaço vetorial do $\mathbb{R}^2$, devemos verificar se são satisfeitas as duas condições a seguir.

Considerando dois vetores quaisquer de S, representados por $u = (-3y_1, y_1)$ e $v = (-3y_2, y_2)$:

I) $\forall u, v \in S,\ u + v \in S$

$$
\begin{aligned}
u + v &= (-3y_1, y_1) + (-3y_2, y_2) = (-3y_1 + (-3y_2), y_1 + y_2) \\
u + v &= (-3(y_1 + y_2), y_1 + y_2)
\end{aligned}
$$

Como a primeira componente do vetor $u + v$ é igual a -3 vezes a segunda componente, podemos afirmar que $u + v \in S$

II) $\forall \alpha \in \mathbb{R}, u \in S,\ \alpha u \in S$

$$
\begin{aligned}
\alpha u &= \alpha(-3y_1, y_1) = (\alpha(-3y_1), \alpha y_1) \\
\alpha u &= (-3(\alpha y_1), \alpha y_1)
\end{aligned}
$$

De modo similar, como a primeira componente do vetor αu é igual a -3 vezes a segunda componente, podemos afirmar que $\alpha u \in S$

Verificadas as duas propriedades, podemos afirmar que S é um subespaço vetorial do $\mathbb{R}^2$.

Resposta: S é um subespaço vetorial do $\mathbb{R}^2$ com as operações usuais de adição e multiplicação por escalar.

3. Sejam os vetores $u = (2, -3, 2)$ e $v = (-1, 2, 4)$ em $\mathbb{R}^3$.

a) Escrever o vetor $w = (7, -11, 2)$ como combinação linear de u e v.

Precisamos encontrar coeficientes a_1 e a_2 tais que $w = a_1u + a_2v$. Ou seja:

$$\begin{aligned}
(7, -11, 2) &= a_1(2, -3, 2) + a_2(-1, 2, 4)\\
(7, -11, 2) &= (2a_1, -3a_1, 2a_1) + (-1a_2, 2a_2, 4a_2)\\
(7, -11, 2) &= (2a_1 - a_2, -3a_1 + 2a_2, 2a_1)
\end{aligned}$$

Que pode ser reescrito na forma do sistema:

$$\begin{cases} 2a_1 - a_2 = 7\\ -3a_1 + 2a_2 = -11\\ 2a_1 + 4a_2 = 2 \end{cases}$$

Dividindo a terceira equação por 2 e trocando a ordem da primeira e terceira equações, resulta no sistema equivalente:

$$\begin{cases} a_1 + 2a_2 = 1\\ -3a_1 + 2a_2 = -11\\ 2a_1 - a_2 = 7 \end{cases}$$

Escalonando:

$$\begin{cases} a_1 + 2a_2 = 1 & \\ 8a_2 = -8 & \longleftarrow (3) \times (1^a \text{ eq.}) + (2^a \text{ eq.})\\ -5a_2 = 5 & \longleftarrow (-2) \times (1^a \text{ eq.}) + (3^a \text{ eq.}) \end{cases}$$

Pela 2^a e 3^a equações temos que $a_2 = -1$. Logo, substituindo seu valor na 1^a equação:

$$a_1 + 2(-1) = 1 \implies a_1 = 3$$

Resposta: $w = 3u - 1v$

---

b) Para que valor de k o vetor $(-8, 14, k)$ é combinação linear de u e v?

Devem existir coeficientes a_1 e a_2 tais que $(-8, 14, k) = a_1u + a_2v$

$$\begin{aligned}
(-8, 14, k) &= a_1(2, -3, 2) + a_2(-1, 2, 4)\\
(-8, 14, k) &= (2a_1, -3a_1, 2a_1) + (-1a_2, 2a_2, 4a_2)\\
(-8, 14, k) &= (2a_1 - a_2, -3a_1 + 2a_2, 2a_1)
\end{aligned}$$

A partir do que obtemos o seguinte sistema e escalonamos:

$$\begin{cases} 2a_1 - a_2 = -8 \\ -3a_1 + 2a_2 = 14 \\ 2a_1 + 4a_2 = k \end{cases} \iff \begin{cases} 2a_1 - a_2 = -8 \\ \dfrac{1}{2}a_2 = 2 & \longleftarrow \left(\dfrac{3}{2}\right) \times (1^a \text{ eq.}) + (2^a \text{ eq.}) \\ 5a_2 = k + 8 & \longleftarrow (-1) \times (1^a \text{ eq.}) + (3^a \text{ eq.}) \end{cases}$$

Pela 2^a equação temos que $a_2 = 4$. Para que o sistema admita solução, temos na terceira equação que:

$$5a_2 = k + 8 \implies 5(4) = k + 8 \implies k = 12$$

Com a primeira equação podemos encontrar $a_1 = 2$ e verificar que, de fato:

$$(-8, 14, 12) = -2(2, -3, 2) + 4(-1, 2, 4)$$

Resposta: $k = 12$

---

c) Determinar uma condição entre a, b e c para que o vetor (a, b, c) seja uma combinação linear de u e v.

Análogo ao que fizemos anteriormente, devemos ter coeficientes a_1 e a_2 tais que $(a, b, c) = a_1(2, -3, 2) + a_2(-1, 2, 4)$.

Para a qual obtemos os sistema (escalonado em seguida):

$$\begin{cases} 2a_1 - a_2 = a \\ -3a_1 + 2a_2 = b \\ 2a_1 + 4a_2 = c \end{cases} \iff \begin{cases} 2a_1 - a_2 = a \\ \dfrac{1}{2}a_2 = \dfrac{3}{2}a + b & \longleftarrow \left(\dfrac{3}{2}\right) \times (1^a \text{ eq.}) + (2^a \text{ eq.}) \\ 5a_2 = -a + c & \longleftarrow (-1) \times (1^a \text{ eq.}) + (3^a \text{ eq.}) \end{cases}$$

Igualando os valores de a_2 na 2^a e 3^a equações temos que:

$$2\left(\frac{3}{2}a + b\right) = \frac{-a + c}{5}$$

$$15a + 10b = -a + c$$

$$16a + 10b - c = 0 \tag{1}$$

$$c = 16a + 10b \tag{2}$$

Como o vetor (a, b, c) só será uma combinação linear de u e v quando existirem os coeficientes a_1 e a_2, ou seja, quando existir solução para o sistema acima, podemos afirmar que a equação 1 é uma condição para que um vetor do $\mathbb{R}^3$ seja combinação linear dos vetores u e v.

Em outras palavras, os vetores $(a, b, c) \in \mathbb{R}^3$ que tem a forma $(a, b, 16a + 10b)$ (alternativa apresentada na equação 2), com $a, b \in \mathbb{R}$ são combinação linear dos vetores u e v.

Resposta: $\{(a, b, c) \in \mathbb{R}^3 | 16a + 10b - c = 0\}$

4. Seja o conjunto $A = \{v_1, v_2\}$, sendo $v_1 = (-1, 3, 1)$ e $v_2 = (1, -2, 4)$. Determinar

a) O subespaço $G(A)$.

O subespaço $G(A)$ é dado por todos os vetores do $\mathbb{R}^3$ que são combinação linear dos vetores de A

$$G(A) = [v_1, v_2] = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 | (x, y, z) = a_1(-1, 3, 1) + a_2(1, -2, 4), a_1, a_2 \in \mathbb{R}\}$$

Da igualdade na condição para $(x, y, z) \in G(A)$, podemos montar o sistema a seguir e escalonar como:

$$\begin{cases} -a_1 + \ \ a_2 = x \\ 3a_1 - 2a_2 = y \\ \ \ a_1 + 4a_2 = z \end{cases} \iff \begin{cases} -a_1 + \ \ a_2 = x \\ \qquad\quad a_2 = 3x + y & \longleftarrow (3) \times (1^a \text{ eq.}) + (2^a \text{ eq.}) \\ \qquad\ \ 5a_2 = x + z & \longleftarrow (1^a \text{ eq.}) + (3^a \text{ eq.}) \end{cases}$$

Igualando o valor de a_2 na 2^a e 3^a equações temos que:

$$\begin{aligned} 3x + y &= \frac{x + z}{5} \\ 15x + 5y &= x + z \\ 14x + 5y - z &= 0 \qquad (3) \\ z &= 14x + 5y \qquad (4) \end{aligned}$$

Como o vetor $(x, y, z) \in G(A)$ quando existir solução do sistema acima, podemos dizer que o subespaço gerado por v_1 e v_2 é o plano definido pela equação 3, ou ainda, os vetores com a forma $(x, y, 14x + 5y)$ com $x, y \in \mathbb{R}$ (definindo z em função das variáveis livres x e y, como explicitado pela equação 4).

Resposta: $G(A) = \{(x, y, 14x + 5y);\ x, y \in \mathbb{R}\}$

---

b) O valor de k para que o vetor $v = (5, k, 11)$ pertença a $G(A)$.

Pelo resultado encontrado acima, o vetor $v \in G(A)$ se obedecer à equação do plano $14x + 5y - z = 0$. Portanto:

$$\begin{aligned} 14(5) + 5k - 11 &= 0 \\ 5k &= 11 - 70 \\ k &= -\frac{59}{5} \end{aligned}$$

Resposta: $k = -\frac{59}{5}$

5. Verificar quais dos seguintes vetores formam uma base do $\mathbb{R}^2$.

a) $\{(1,2),(-1,3)\}$

b) $\{(3,-6),(-4,8)\}$

c) $\{(0,0),(2,3)\}$

d) $\{(3,-1),(2,3)\}$

6. Determinar a dimensão e uma base para o espaço-solução do sistema $S = \begin{cases} x+2y-2z-\ \ t=0 \\ 2x+4y+\ \ z+\ \ t=0 \\ x+2y+3z+2t=0 \end{cases}$