D1MAT - Lista de Exercícios 09: Transformações Lineares

July 1, 2021

1. Dada a transformação linear $T : V \longrightarrow W$, tal que $T(u) = 3u$ e $T(v) = u - v$, calcular em função de u e v.

a) $T(u + v)$

$$T(u+v) = T(u) + T(v)$$
$$T(u+v) = 3u + (u - v)$$
$$T(u+v) = 4u - v$$

Resposta: $T(u + v) = 4u - v$

---

b) $T(3u)$

$$T(3u) = 3T(u)$$
$$T(3u) = 3(3u)$$
$$T(3u) = 9u$$

Resposta: $T(3u) = 9u$

---

c) $T(4u - 5v)$

$$T(4u-5v) = T(4u) + T(-5v)$$
$$T(4u-5v) = 4T(u) - 5T(v)$$
$$T(4u-5v) = 4(3u) - 5(u - v)$$
$$T(4u-5v) = 12u - 5u + 5v$$
$$T(4u-5v) = 7u + 5v$$

Resposta: $T(4u - 5v) = 7u + 5v$

2. Seja a aplicação $T : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^3$, definida por $T(x,y) = (x+ky, x+k, y)$. Verificar em que caso(s) T é linear.

Sejam dois vetores quaisquer do $\mathbb{R}^2$, expressos por $u = (x_1, y_1)$ e $v = (x_2, y_2)$, e $\alpha \in \mathbb{R}$. A aplicação T será linear se obedecer às duas propriedades seguintes:

I) $T(u+v) = T(u) + T(v)$

II) $T(\alpha u) = \alpha T(u)$

Temos que verificar estas duas propriedades em cada caso a seguir.

a) $k = x$

$k = x \implies T(x,y) = (x+xy, x+x, y) \implies T(x,y) = (x+xy, 2x, y)$

I)

Sabendo que $u + v = (x_1, y_1) + (x_2, y_2) = (x_1 + x_2, y_1 + y_2)$

$$
\begin{aligned}
T(u+v) &= T(x_1+x_2, y_1+y_2) = (x_1+x_2+(x_1+x_2)(y_1+y_2), 2(x_1+x_2), y_1+y_2) \\
T(u+v) &= (x_1+x_2+x_1y_1+x_1y_2+x_2y_1+x_2y_2, 2x_1+2x_2, y_1+y_2) \\
T(u+v) &= (x_1(1+y_1+y_2)+x_2(1+y_1+y_2), 2x_1+2x_2, y_1+y_2)
\end{aligned}
$$

Por sua vez:

$$
\begin{aligned}
T(u)+T(v) &= T(x_1, y_1) + T(x_2, y_2) = (x_1+x_1y_1, 2x_1, y_1) + (x_2+x_2y_2, 2x_2, y_2) \\
T(u)+T(v) &= (x_1+x_1y_1+x_2+x_2y_2, 2x_1+2x_2, y_1+y_2) \\
T(u)+T(v) &= (x_1(1+y_1)+x_2(1+y_2), 2x_1+2x_2, y_1+y_2)
\end{aligned}
$$

Portanto, como $T(u+v) \neq T(u) + T(v)$, T não é linear.

Resposta: $T(x,y) = (x+xy, 2x, y)$ não é linear

---

b) $k = 1$

$k = 1 \implies T(x,y) = (x+y, x+1, y)$

I)

Sabendo que $u + v = (x_1, y_1) + (x_2, y_2) = (x_1 + x_2, y_1 + y_2)$

$$T(u+v) = T(x_1+x_2, y_1+y_2) = (x_1+x_2+y_1+y_2, x_1+x_2+1, y_1+y_2)$$

Por sua vez:

$$T(u)+T(v) = T(x_1,y_1)+T(x_2,y_2) = (x_1+y_1, x_1+1, y_1)+(x_2+y_2, x_2+1, y_2)$$
$$T(u)+T(v) = (x_1+y_1+x_2+y_2, x_1+1+x_2+1, y_1+y_2)$$
$$T(u)+T(v) = (x_1+x_2+y_1+y_2, x_1+x_2+2, y_1+y_2)$$

Portanto, como $T(u+v) \neq T(u)+T(v)$, T não é linear.

Resposta: $T(x,y) = (x+y, x+1, y)$ não é linear

---

c) $k = 0$

$k = 0 \implies T(x,y) = (x,x,y)$

I)

Sabendo que $u+v = (x_1,y_1)+(x_2,y_2) = (x_1+x_2, y_1+y_2)$

$$T(u+v) = T(x_1+x_2, y_1+y_2) = (x_1+x_2, x_1+x_2, y_1+y_2)$$
$$T(u+v) = (x_1,x_1,y_1)+(x_2,x_2,y_2)$$
$$T(u+v) = T(u)+T(v)$$

II)

Sabendo que $\alpha u = \alpha(x_1,y_1) = (\alpha x_1, \alpha y_1)$

$$T(\alpha u) = T(\alpha x_1, \alpha y_1) = (\alpha x_1, \alpha x_1, \alpha y_1)$$
$$T(\alpha u) = \alpha(x_1,x_1,y_1)$$
$$T(\alpha u) = \alpha T(u)$$

Portanto, como $T(u+v) = T(u)+T(v)$ e $T(\alpha u) = \alpha T(u)$, T é linear.

Resposta: $T(x,y) = (x,x,y)$ é linear

3. Seja $T : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ uma transformação linear definida por $T(-2,3) = (-1,0,1)$ e $T(1,-2) = (0,-1,0)$.

a) Determinar $T(x,y)$.

Primeiramente, podemos notar que $\{(-2,3),(1,-2)\}$ é uma base do $\mathbb{R}^2$ (por ser um conjunto de dois vetores LI do plano). Dessa forma, qualquer vetor $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ pode ser expresso como uma combinação linear destes dois vetores. Ou seja, existem coeficientes $a, b \in \mathbb{R}$ tal que:

$$(x,y) = a(-2,3) + b(1,-2)$$

A relação acima resulta no sistema:

$$\begin{cases} -2a + \;\; b = x \\ \;\; 3a - 2b = y \end{cases} \iff \begin{cases} -2a + b = x \\ -a \qquad = 2x + y \end{cases} \longleftarrow (2) \times (1^a \text{ eq.}) + (2^a \text{ eq.})$$

Com a 2^a equação econtramos o valor de $a = -2x - y$. Substituindo a na 1^a equação temos que:

$$-2(-2x - y) + b = x \implies 4x + 2y + b = x \implies b = -3x - 2y$$

Portanto, os vetores $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ podem ser escritos como $(x,y) = (-2x - y)(-2,3) + (-3x - 2y)(1,-2)$.

Dessa forma, temos que:

$$\begin{aligned}
T(x,y) &= T((-2x - y)(-2,3) + (-3x - 2y)(1,-2)) \\
T(x,y) &= T((-2x - y)(-2,3)) + T((-3x - 2y)(1,-2)) \\
T(x,y) &= (-2x - y)T(-2,3) + (-3x - 2y)T(1,-2) \\
T(x,y) &= (-2x - y)(-1,0,1) + (-3x - 2y)(0,-1,0) \\
T(x,y) &= (2x + y, 0, -2x - y) + (0, 3x + 2y, 0) \\
T(x,y) &= (2x + y, 3x + 2y, -2x - y)
\end{aligned}$$

Resposta: $T(x,y) = (2x + y, 3x + 2y, -2x - y)$

---

b) Determinar $\mathrm{N}(T)$ e $\mathrm{Im}(T)$.

O núcleo de T é o conjunto tal que:

$$\mathrm{N}(T) = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid T(x,y) = (0,0,0)\}$$

Portanto, encontramos $\mathrm{N}(T)$ desenvolvendo a relação:

$$(2x + y, 3x + 2y, -2x - y) = (0,0,0)$$

Que nos leva ao sistema:

$$\begin{cases} 2x + \ \ y = 0 \\ 3x + 2y = 0 \\ -2x - \ \ y = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} 2x + y = 0 \\ -x \qquad = 0 & \longleftarrow (-2) \times (1^a \text{ eq.}) + (2^a \text{ eq.}) \\ \qquad 0 = 0 & \longleftarrow (1^a \text{ eq.}) + (3^a \text{ eq.}) \end{cases}$$

Cuja solução é $x = y = 0$. E, portanto, $\mathrm{N}(T) = \{(0,0)\}$

A imagem de T é definida pelo conjunto:

$$\mathrm{Im}(T) = \{(a,b,c) \in \mathbb{R}^3 \mid T(x,y) = (a,b,c)\}$$

Ou seja, são todas as tuplas ordenadas do $\mathbb{R}^3$ que resultam da transformação de algum par (x,y) do $\mathbb{R}^2$. Ou então, os valores $a,b,c \in \mathbb{R}$ para os quais:

$$\begin{aligned} T(x,y) &= (a,b,c) \\ (2x+y, 3x+2y, -2x-y) &= (a,b,c) \end{aligned}$$

Que é repesentado pelo sistema:

$$\begin{cases} 2x + \ \ y = a \\ 3x + 2y = b \\ -2x - \ \ y = c \end{cases} \iff \begin{cases} 2x + y = a \\ -x \qquad = \ -2a + b & \longleftarrow (-2) \times (1^a \text{ eq.}) + (2^a \text{ eq.}) \\ \qquad 0 = a + c & \longleftarrow (1^a \text{ eq.}) + (3^a \text{ eq.}) \end{cases}$$

Que só terá solução quando (pela 3^a equação) $c = -a$. Portanto:

$$\begin{aligned} \mathrm{Im}(T) &= \{(a,b,c) \in \mathbb{R}^3 \mid c = -a\} \\ \mathrm{Im}(T) &= \{(a,b,-a);\ a,b \in \mathbb{R}\} \qquad (1) \end{aligned}$$

O conjunto acima já nos fornece a $\mathrm{Im}(T)$, conforme solicitado pela questão. Porém, vamos fazer mais uma observação sobre o caso. Note que podemos ainda desenvolver a relação 1 da seguinte forma:

$$\begin{aligned} \mathrm{Im}(T) &= \{(a,0,-a) + (0,b,0);\ a,b \in \mathbb{R}\} \\ \mathrm{Im}(T) &= \{a(1,0,-1) + b(0,1,0);\ a,b \in \mathbb{R}\} \\ \mathrm{Im}(T) &= \{-a(-1,0,1) + (-b)(0,-1,0);\ a,b \in \mathbb{R}\} \end{aligned}$$

Que nos mostra que a $\mathrm{Im}(T)$ é o conjunto de vetores que são combinação linear dos vetores $(-1,0,1)$ e $(0,-1,0)$, ou seja, dos vetores apresentados no enunciado do problema.

Esse resultado poderia ter sido obtido de forma direta pois já havíamos encontrado que $\mathrm{N}(T) = \{(0,0)\}$, ou seja, $\dim \mathrm{N}(T) = 0$. Pelo *Teorema do Núcleo e da Imagem*, podemos afirmar que $\dim \mathrm{Im}(T) = \dim \mathbb{R}^2 = 2$. Ou seja, a imagem de T é um plano definido no $\mathbb{R}^3$. Como o enunciado da questão nos forneceu dois vetores que pertencem à imagem da transformação e, como podemos facilmente ver que estes vetores são LI, poderíamos dizer de antemão que estes dois vetores geram o subespaço do $\mathbb{R}^3$ (plano) que corresponde à imagem de T.

Resposta: $\mathrm{N}(T) = \{(0,0)\}$ e $\mathrm{Im}(T) = [(-1,0,1),(0,-1,0)]$

4. O vetor $v = (3, 2)$ experimenta sequencialmente:
   (a) Uma reflexão em torno da reta $y = x$;
   (b) Um cisalhamento horizontal de fator 2;
   (c) Uma contração na direção Oy de fator $\frac{1}{3}$;
   (d) Uma rotação de 90° no sentido anti-horário.

a) Calcular o vetor resultade dessa sequência de operações.

Para cada uma destas operações é definida uma transformação linear plana $T : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ da forma:

(a) $T^{(a)}(x, y) = (y, x)$

$$v^{(a)} = T^{(a)}(v) = T^{(a)}(3, 2) = (2, 3)$$

(b) $T^{(b)}(x, y) = (x + 2y, y)$

$$v^{(b)} = T^{(b)}(v^{(a)}) = T^{(b)}(2, 3) = (2 + 2(3), 3) = (8, 3)$$

(c) $T^{(c)}(x, y) = \left(x, \frac{1}{3}y\right)$

$$v^{(c)} = T^{(c)}(v^{(b)}) = T^{(c)}(8, 3) = \left(8, \frac{1}{3}(3)\right) = (8, 1)$$

(d) $T_\theta(x, y) = (x\cos\theta - y\sin\theta, x\sin\theta + y\cos\theta) \implies T^{(d)}_{\pi/2}(x, y) = (x\cos\pi/2 - y\sin\pi/2, x\sin\pi/2 + y\cos\pi/2)$

$$v^{(d)} = T^{(d)}_{\pi/2}(v^{(c)}) = T^{(d)}_{\pi/2}(8, 1) = (8\cos\pi/2 - 1\sin\pi/2, 8\sin\pi/2 + 1\cos\pi/2)$$
$$v^{(d)} = (8(0) - 1(1), 8(1) + 1(0))$$
$$v^{(d)} = (-1, 8)$$

Resposta: $(-1, 8)$

---

b) Encontrar a expressão da transformação linear $T : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ que representa a composta das quatro operações.

A composta das operação, como pudemos ver na letra a), será a transformação T da seguinte forma:

$$
\begin{aligned}
T(x,y) &= (T^{(d)}_{\pi/2} \circ T^{(c)} \circ T^{(b)} \circ T^{(a)})(x,y) \\
T(x,y) &= T^{(d)}_{\pi/2}(T^{(c)}(T^{(b)}(T^{(a)}(x,y)))) \\
T(x,y) &= T^{(d)}_{\pi/2}(T^{(c)}(T^{(b)}(y,x))) \\
T(x,y) &= T^{(d)}_{\pi/2}(T^{(c)}(2x+y,x)) \\
T(x,y) &= T^{(d)}_{\pi/2}(2x+y,\frac{1}{3}x) \\
T(x,y) &= \left((2x+y)\cos\frac{\pi}{2} - \frac{1}{3}x\sin\frac{\pi}{2}, (2x+y)\sin\frac{\pi}{2} + \frac{1}{3}x\cos\frac{\pi}{2})\right) \\
T(x,y) &= \left(-\frac{1}{3}x, 2x+y\right)
\end{aligned}
$$

Resposta: $T(x,y) = \left(-\frac{1}{3}x, 2x+y\right)$