Pós-Graduação em Ciência de Dados

Professora Cecília Pereira de Andrade

e

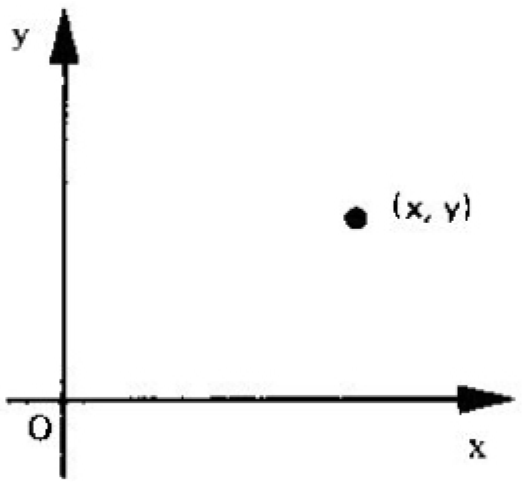
Professor Ricardo Sovat

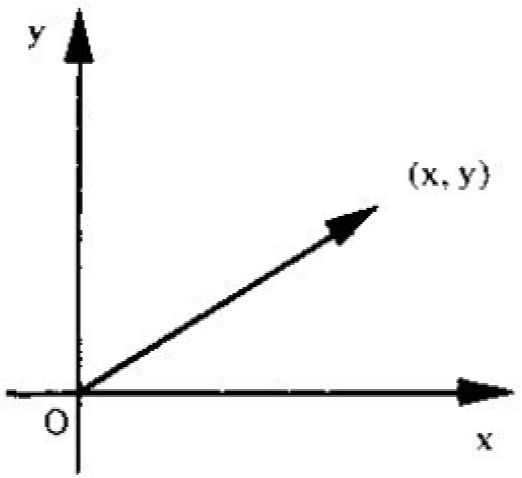
INSTITUTO FEDERAL DE EDUCAÇÃO, CIÊNCIA E TECNOLOGIA
SÃO PAULO
Campus Campinas

Transformações lineares

Espaços Vetoriais

- $\mathbb{R}^2 = \{(x,y) | x,y \in \mathbb{R}\}$





Espaços Vetoriais

- O espaço de dimensão n ou n-dimensional é constituído de todas a n-uplas ordenadas e representadas por $\mathbb{R}^n$

$$\mathbb{R}^n = \{(x_1, x_2, \ldots., x_n) | x_i \in \mathbb{R}\}$$

Espaços Vetoriais

- A maneira de se trabalhar nesses espaços é idêntica àquela vista em $\mathbb{R}^2$ e $\mathbb{R}^3$.

- Se u= $(x_1,x_2,....,x_n)$ e v = $(y_1,y_2,....,y_n)$ ϵ $\mathbb{R}^3$ e α ϵ $\mathbb{R}$
- $u = v \leftrightarrow x_1 = y_1,\ x_2 = y_2\ ,\ ...,\ x_n = y_n$.
- $u + v = (x_1 + y_1, x_2 + y_2, ..., x_n + y_n)$.
- $\alpha u = (\alpha x_1,\ \alpha x_2, ...,\ \alpha x_n)$
- $u.v = x_1.\ y_1 + x_2.\ y_2 + ... + x_n.\ y_n$.
- $|u| = \sqrt{u.u} = \sqrt{x_1{}^2 + x_2{}^2 + ... + x_n{}^2}$.

Espaços Vetoriais

- O vetor $u = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$ pode aparecer com a notação matricial

$$u = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$$

e também todas as operações vistas anteriormente.

Espaços Vetoriais

- Seja um conjunto V, não-vazio, sobre o qual são definidas as operações adição e multiplicação por escalar:

$\forall$ u,v $\in$ V, u + v $\in$ V

$\forall\ \alpha \in \mathbb{R}$, $\forall$ u $\in$ V, αu $\in$ V

O conjunto V com essas duas operações é chamado **espaço vetorial** se forem verificados os seguintes aximoas:

Espaços Vetoriais

- A) Em relação à adição:

A_1) $(u + v) + w = u + (v + w), \forall\ u, v, w \in V$

A_2) $u + v = v + u, \forall\ u, v \in V$

A_3) $\exists\ 0 \in V, \forall\ u \in V, u + 0 = u$

A_4) $\forall\ u \in V, \exists\ (-u) \in V, u + (-u) = 0$

Espaços Vetoriais

- A) Em relação à multiplicação por escalar:

M_1) $(\alpha\beta)u = \alpha(\beta u)$

M_2) $(\alpha+\beta)u = \alpha u + \beta u$

M_3) $\alpha(u + v) = \alpha u + \alpha v$

M_4) $1u = u$

$\forall$ u,v, w $\in$ V e $\forall$ α, β $\in$ $\mathbb{R}$

Espaços Vetoriais

- Observações:

1) Os elementos do espaço vetorial são chamados vetores, independentemente da sua natureza.
2) Se na definição tivéssemos tomado para os escalares o conjunto $\mathbb{C}$, V seria um espaço vetorial complexo.

Espaços Vetoriais

- Exemplos:

1) $\mathbb{R}^n$ com as operações usuais
2) O conjunto M(m,n) das matrizes m x n com as operações usuais.
3) O conjunto $P_n = \{ a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_nx^n; a_i \in \mathbb{R}\}$ dos polinômios com coeficientes reais de grau $\leq$ n, mais o polinômio nulo.

Subespaços Vetoriais

- Sejam V um espaço vetorial e S um subconjunto não-vazio de V. S é **subespaço vetorial** de V se S é um espaço vetorial em relação à adição e à multiplicação definidas em V.

1) Para quaisquer u, v $\in$ S, tem-se u + v $\in$ S.
2) Para quaisquer $\alpha \in \mathbb{R}$, u $\in$ S, tem-se αu $\in$ S.

Subespaços Vetoriais

- Exemplo:

Os subespaços triviais de V= $\mathbb{R}^3$ são {(0,0,0} e o próprio $\mathbb{R}^3$.

Os subespações próprios do $\mathbb{R}^3$ são as retas e os planos que passam pela origem.

Combinação linear

- Sejam os vetores $v_1, v_2, \ldots, v_n$ do espaço vetorial V e os escalares $a_1, a_2, \ldots, a_n$. Qualquer vetor $v \in \mathbb{R}$ da forma

$$v = a_1 v_1 + a_2 v_2 + \ldots + a_n v_n$$

É uma **combinação linear** dos vetores $v_1, v_2, \ldots, v_n$.

Subespaços Vetoriais

- **Exemplo:** No espaço vetorial P_2 dos polinômios de grau ≤ 2, o polinômio $v=7x^2+11x-26$ é combinação linear dos polinômios

$$v_1=5x^2-3x+2 \text{ e } v_2=-x^2+5x-8$$

pois $v=3v_1+4v_2$.

Subespaços Gerados

- Seja V um espaço vetorial. Consideremos um conjunto $A=\{v_1,v_2, \ldots, v_n\} \subset V$, $A \neq 0$.

O conjunto S de todos os vetores de V que são combinações lineares dos vetores de A é um subespaço vetorial de V.

Subespaços Gerados

- O subespaço S diz-se **gerado** pelos vetores v_1,v_2, ..., v_n, ou gerado pelo conjunto A, e representa-se por:

$S=[v_1,v_2, ..., v_n]$ ou $S=G(A)$.

- Os vetores v_1,v_2, ..., v_n são chamados **geradores** do subespaço S, enquanto A é o **conjunto gerador** de S.

Subespaços Gerados

- Exemplo: Os vetores i=(1,0) e j=(0,1) geram o espaço vetorial $\mathbb{R}^2$, pois qualquer (x,y) ϵ $\mathbb{R}^2$, é combinação linear de i e j:

$$(x,y) = xi+yj = x(1,0)+y(0,1) = (x,0) + (0,y) = (x,y)$$

Então:

$$[i,j]= \mathbb{R}^2$$

Espaços Vetoriais Finitamente Gerados

- Um espaço vetorial V é **finitamente gerado** se existe um conjunto finite A, A C V, tal que V=G(A).

- Exemplo: $\mathbb{R}^2$

Dependência e Independência Linear

- Seja V um espaço vetorial e $A=\{v_1, v_2, \ldots, v_n\} \subset V$.

- Consideremos a equação $a_1v_1 + a_2v_2 + \ldots + a_nv_n = 0$. (1)

- O conjunto A diz-se **linearmente independente** (LI), ou os vetores $v_1, v_2, \ldots, v_n$ são LI caso a Equação (1) admita apenas a solução trivial.

- Se existirem soluções $a_i \neq 0$, diz-se que o conjunto A é linearmente dependente (LD) os que vetores $v_1, v_2, \ldots, v_n$ são LD.

Dependência e Independência Linear

- Exemplos:

1) No espaço vetorial V= $\mathbb{R}^3$, os vetores $v_1=(2,-1,3)$, $v_2=(-1,0,2)$ e $v_3=(2,-3,1)$ formam um conjunto linearmente depentende, pois $3v_1 + 4v_2 - v_3 = 0$.

$$a(2,-1,3) + b(-1,0,2) + c(2,-3,1) = (0,0,0)$$

$$(2a-b+2c,\ -a-3c,\ 3a+2b+c) = (0,0,0)$$

$$a=3,\ b=4 \text{ e } c=-1$$

Dependência e Independência Linear

- Exemplos:

2) No espaço vetorial V= $\mathbb{R}^4$, os vetores $v_1=(2,2,3,4)$, $v_2=(0,5,-3,1)$ e $v_3=(0,0,4,-2)$ formam um conjunto linearmente indepentende.

$a(2,2,3,4)+b(0,5,-3,1)+c(0,0,4,-2)=(0,0,0,0)$

$(2a,\ 2a+5b,\ 3a-3b+4c,\ 4a+b-2c)=(0,0,0,0)$

$a=0$, $b=0$ e $c=0$.

Base e Dimensão

- Base de um espaço vetorial

Um conjunto $B=\{v_1,v_2, \ldots, v_n\} \subset V$ é uma base do espaço vetorial V se:

I) B é LI;

II) B gera V.

Base e Dimensão

- **Exemplo:** B={(1,1), (-1,0)} é base de $\mathbb{R}^2$.

I) B é LI, pois a(1,1)+b(-1,0)= (0,0) implica:

$$\begin{cases} a - b = 0 \\ a = 0 \end{cases}$$ e daí a = b = 0.

Base e Dimensão

- **Exemplo:** B={(1,1), (-1,0)} é base de $\mathbb{R}^2$.

II) B gera $\mathbb{R}^2$, pois para todo (x,y) є $\mathbb{R}^2$,tem-se:

$$(x,y)=a(1,1)+b(-1,0)$$

$\begin{cases} a-b=x \\ a=y \end{cases}$ e daí a = y e b=y-x.

Base e Dimensão

- Dimensão de um espaço vetorial

Seja V um espaço vetorial. Se V possui uma base com n vetores, então V tem dimensão n.

Notação: dim V = n

Se V não possui base, dim V = 0.

Se V tem uma base com infinitos vetores, então dim V = ∞ .

Base e Dimensão

- Exemplo:

1) $\dim \mathbb{R}^2 = 2$;

2) $\dim \mathbb{R}^n = n$;

3) $\dim \{0\} = 0$.

Transformações Lineares

- Tipo especial de função, onde o domínio e o contradomínio são espaços vetoriais reais.

- Variáveis são vetores

- Chamadas funções vetoriais

Transformações Lineares

- $T: V \to W$

- Cada v ϵ V tem um só vetor imagem w ϵ T, indicado por w=T(w).

- Exemplo: Seja T: $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$, definada por

T(x,y)= (3x, -2y, x-y).

T(2,1)= (3.2, -2.1, 2-1) = (6,-2,1)

Transformações Lineares

- Sejam V e W espaços vetoriais. Uma aplicação $T: V \to W$ é **chamada transformação** linear de V em W se:

i) $T(u+v)=T(u)=T(v)$

ii) $T(\alpha u)= \alpha T(u)$

para todo u, v ϵ V e para todo α ϵ $\mathbb{R}$.

Transformações Lineares

- OBS: T: V $\rightarrow$ V é chamado **operador linear.**

- Exemplo: T: $\mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$, T(x,y)=(3x,-2y,x-y) é linear.

De fato, sejam u=(x_1,y_1) e v=(x_2,y_2) vetores de $\mathbb{R}^2$.

Transformações Lineares

- $T(u+v) = T(x_1 + x_2,\ y_1 + y_2)$

  $T(u+v) = (3(x_1 + x_2),\ -2(y_1 + y_2),\ (x_1 + x_2)-(y_1 + y_2))$

  $T(u+v) = (3x_1 + 3x_2,\ -2y_1 - 2y_2,\ x_1 + x_2 - y_1 - y_2)$

  $T(u+v) = (3x_1,\ -2y_1 - 2y_2,\ x_1 - y_1) + (3x_2, -2y_2,\ x_2 - y_2)$

  $T(u+v) = T(u) + T(v).$

- Para todo $\alpha \in \mathbb{R}$ e para qualquer $(x_1, y_1) \in \mathbb{R}$

  $T(\alpha u) = T(\alpha\, x_1,\ \alpha\, y_1)$

  $T(\alpha u) = (3\,\alpha\, x_1,\ -2\,\alpha\, y_1 - 2y_2,\ \alpha\, x_1 - \alpha\, y_1)$

  $T(\alpha u) = \alpha\ (3x_1,\ -2y_1 - 2y_2,\ x_1 - y_1)$

  $T(\alpha u) = \alpha T(u)$

Transformações Lineares

- Obs: Se T é uma transformação linear, então $T(0)=0$.

De fato, se considerarmos $\alpha = 0$ em ii), temos:

$T(0)=T(0.v)=0.T(v) = 0$.

- A recíproca não é verdadeira.

Exemplo: $T: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$, $T(x,y)=(x^2,3y)$.

Transformações Lineares

Exemplos:

- I: $V \to V$, $I(v)=v$ (identidade);
- T: $V \to W$, $T(v)=0$ (nula);
- T: $\mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, $T(v)= -v$ (simetria);
- T: $\mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, $T(v)= (x,y,0)$ (projeção ortogonal)
- Seja o espaço $V=P_n$, dos polinômios de grau $\leq n$.

A aplicação D: $P_n \to P_n$, que leva $f \in P_n$, em sua derivada f' é linear.

Transformações Lineares

Exemplos:

- Considere A=$\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -2 & 3 \\ 0 & 4 \end{bmatrix}$. Essa matriz determina a

transformação T_A: $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$, T(v)=Av, que é linear.

Seja v=(x,y) ϵ $\mathbb{R}^2$,

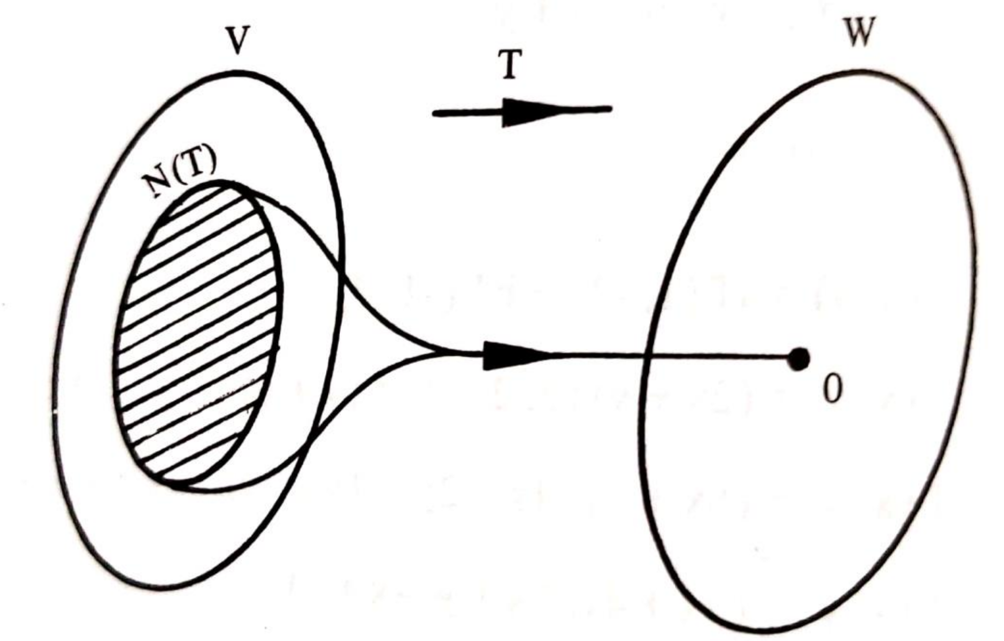
$\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -2 & 3 \\ 0 & 4 \end{bmatrix}$v= $\begin{bmatrix} x + 2y \\ -2x + 3x \\ 4y \end{bmatrix}$ e portanto, T_A(x,y)=(x+2y,-2x+3y,4y)

Núcleo de uma transformação linear

- Chama-se núcleo de uma transformação linear $T: V \to W$ ao conjunto de todos os vetores $v \in V$ que são trasnformados em $0 \in W$.

- Notação: $N(T)$ ou $\ker(T)$

- $N(T) = \{v \in V | \ T(v) = 0\}$



Núcleo de uma transformação linear

- Exemplo:

Determine o núcleo da transformação T: $\mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$, T(x,y)=(x+y,2x-y).

T(x,y)= (0,0) implica que (x+y,2x-y)= (0,0)

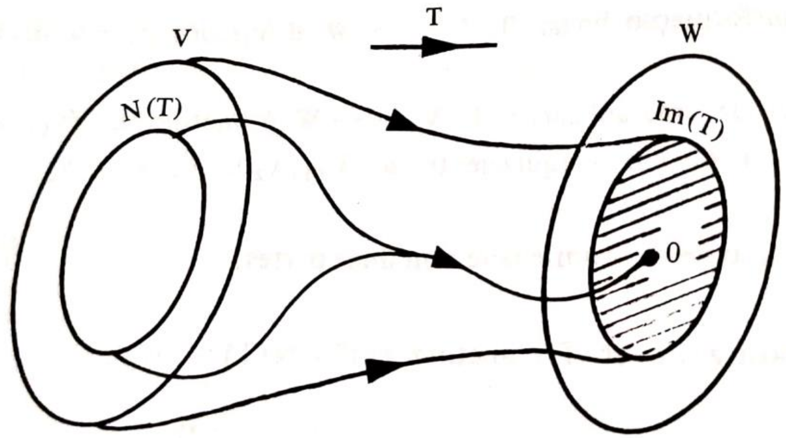
Logo, $\begin{cases} x + y = 0 \\ 2x - y = 0 \end{cases}$ e daí x = 0 e y=0.

Portanto, N(T)={(0,0)}.

Imagem de uma transformação linear

- Chama-se imagem de uma transformação linear T: V → W ao conjunto dos vetores w ϵ W que são imagens de pelo menos um vetor V ϵ V.

- Notação: Im(T) ou T(v)



- Im(T)={w ϵ W|T(v)=w, para algum v ϵ v}

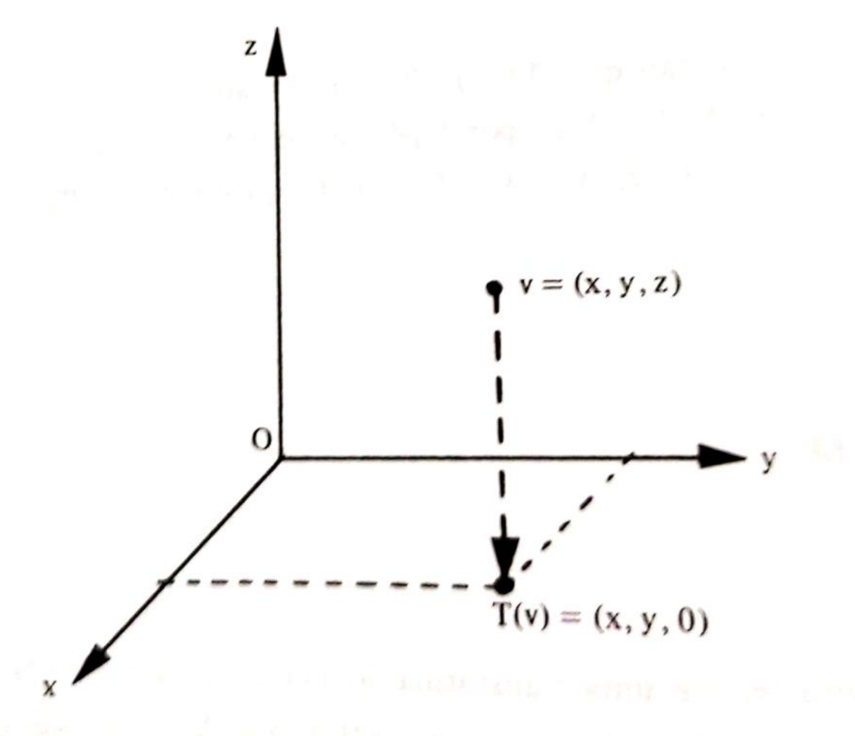
Imagem de uma transformação linear

- Seja T: $\mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$, T(x,y,z)= (x,y,0) a projeção orthogonal do $\mathbb{R}^3$ sobre o plano xy.

A imagem de T é o próprio plano xy.

$Im(T)=\{(x,y,0) \in \mathbb{R}^3 \mid x, y \in \mathbb{R}\}$

$N(T) = \{(0,0,z) \mid z \in \mathbb{R}\}$



Teorema do Núcleo e da Imagem

- Seja V um espaço vetorial de dimensão finite e T: V → W uma transformação linear. Então:

$$\dim N(T) + \dim Im(T) = \dim V$$

Teorema do Núcleo e da Imagem

- Exemplo: determinar o núcleo e a imagem do operador linear

T: $\mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$, T(x,y,z)=(x+2y-z, y+2z,x+3y+z).

- N(T) = { (x,y,z) $\in \mathbb{R}^3$ | T(x,y,z)=(0,0,0)}.

De (x+2y-z, y+2z,x+3y+z) = (0,0,0)

temos a solução geral (5z, -2z, z), z $\in \mathbb{R}$.

Teorema do Núcleo e da Imagem

- Logo,

$$N(T) = \{ (5z,-2z,z) \mid z \in \mathbb{R}\}$$
$$= \{ 5(5,-2,1) \mid z \in \mathbb{R}\}$$
$$= [(5,-2,1)].$$

Note que dim (N(T)) = 1. Logo, pelo teorema, dim (Im(T)) deverá ser 2.

Teorema do Núcleo e da Imagem

- $Im(T) = \{ (a,b,c) \in \mathbb{R}^3 \mid T(x,y,z)=(a,b,c)\}$

- $(a,b,c) \in Im(T)$ se existe $(x,y,z) \in \mathbb{R}^3$ tal que

$(x+2y-z,\ y+2z, x+3y+z) = (a,b,c)$

O sistema só terá solução se $a + b - c = 0$.

Logo, $Im(T) = \{(a,b,c) \in \mathbb{R}^3 \mid a + b - c = 0)\}$

Teorema do Núcleo e da Imagem

- O vetor imagem $T(x,y,z)$ pode ser expresso como:

$$(x+2y-z,\ y+2z, x+3y+z) = (x,0,x)+(2y,y,3y)+(-z,2z,z)$$

ou

$$(x+2y-z,\ y+2z, x+3y+z) = x(1,0,1)+y(2,1,3)+z(-1,2,1)$$

Portanto, $Im(T) = [(1,0,1),\ (2,1,3),(-1,2,1)]$.

Matriz de uma transformação linear

- Sejam $T: V \rightarrow W$ uma transformação linear, A uma base de V e B uma base de W.

- SPG, vamos assumer dim V=2 e dim W = 3.

- $A = \{v_1, v_2\}$ e $B = \{w_1, w_2, w_3\}$

- $v = x_1v_1 + x_2v_2$ ou $v_A = (x_1, x_2)$

Matriz de uma transformação linear

- $T(v) = y_1w_1 + y_2w_2 + y_3w_3$ ou $T(v)_B = (y_1, y_2, y_3)$

- Por outro lado,

$$T(v) = T(x_1v_1 + x_2v_2) = x_1T(v_1) + x_2T(v_2)$$

Matriz de uma transformação linear

- Como $T(v_1)$ e $T(v_2)$ são vetores de W

$T(v_1) = a_{11}w_1 + a_{21}w_2 + a_{31}w_3$

$T(v_2) = a_{12}w_1 + a_{22}w_2 + a_{32}w_3$

Substituindo em $T(v) = x_1T(v_1) + x_2T(v_2)$ temos

$T(v) = x_1(a_{11}w_1 + a_{21}w_2 + a_{31}w_3) + x_2(v\ a_{12}w_1 + a_{22}w_2 + a_{32}w_3)$

Matriz de uma transformação linear

-

$T(v) = x_1(a_{11}w_1 + a_{21}w_2 + a_{31}w_3) + x_2(v\ a_{12}w_1 + a_{22}w_2 + a_{32}w_3)$

$T(v) = w_1(a_{11}x_1 + a_{12}x_2) + w_2(a_{21}x_1 + a_{22}x_2) + w_3(a_{31}x_1 + a_{32}x_2)$

- Comparando com $T(v) = y_1w_1 + y_2w_2 + y_3w_3$ temos:
- $y_1 = a_{11}x_1 + a_{12}x_2$
- $y_2 = a_{21}x_1 + a_{22}x_2$
- $y_1 = a_{31}x_1 + a_{32}x_2$

Matriz de uma transformação linear

- Matricialmente:

$$\begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$$

- Simbolicamente:

$$[T(v)]_B = [T]_B^A [v]_A$$

Matriz de uma transformação linear

- Observações:

1) A matriz $[T]_B^A$ é de ordem 3x2 quando dim V=2 e dim W = 3.

2) As colunas da matriz $[T]_B^A$ são componentes das imagens dos vetores da base A em relação à base B.

Matriz de uma transformação linear

- Exemplo: Seja T: $\mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$, T(x,y,z)=(2x-y+z, 3x+y-2z), linear. Consideremos as bases A={v_1,v_2,v_3}, com v_1=(1,1,1), v_2=(0,1,1), v_3=(0,0,1) e B={w_1,w_2}, sendo w_1=(2,1) e w_2=(5,3).

- $[T]_B^A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{bmatrix}$

$$\begin{array}{ccc} \uparrow & \uparrow & \uparrow \\ T(v_1)_B & T(v_2)_B & T(v_3)_B \end{array}$$

Matriz de uma transformação linear

- $T(v_1) = T(1,1,1) = (2,2) = a_{11}(2,1) + a_{21}(5,3)$

Portanto, $a_{11} = -4$ e $a_{21} = 2$.

- $T(v_2) = T(0,1,1) = (0,-1) = a_{12}(2,1) + a_{22}(5,3)$

Portanto, $a_{12} = 5$ e $a_{22} = -2$.

- $T(v_3) = T(0,0,1) = (1,-2) = a_{13}(2,1) + a_{23}(5,3)$

Portanto, $a_{13} = 13$ e $a_{23} = -5$.

Matriz de uma transformação linear

- Portanto,

$$[T]_B^A = \begin{bmatrix} -4 & 5 & 13 \\ 2 & -2 & -5 \end{bmatrix}.$$

Operações com transformações lineares

- Adição

Sejam $T_1: V \rightarrow W$ e $T_2: V \rightarrow W$. Chama-se **soma** das transformações lineares T_1 e T_2 à transformação linear

$T_1 + T_2 : V \rightarrow W$, $(T_1 + T_2)(v) = T_1(v) + T_2(v)$, $\forall$ v ∈ V.

Operações com transformações lineares

- ## Multiplicação por escalar

Sejam T: $V \rightarrow W$ e $\alpha \in \mathbb{R}$. Chama-se **produto** de T pelo escalar α à transformação linear

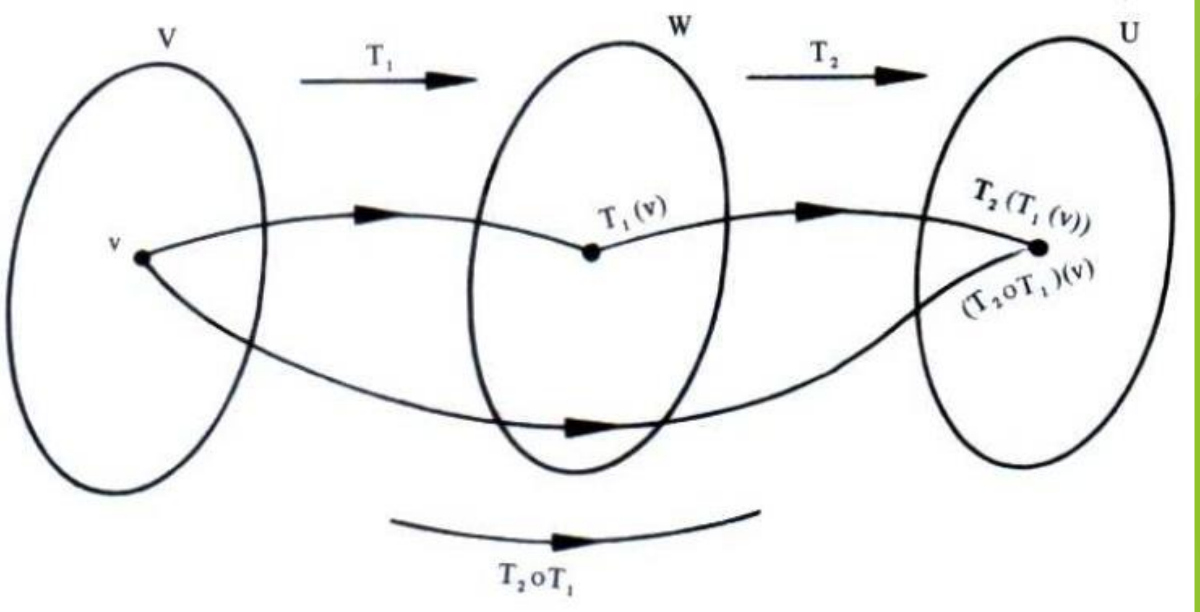
$$(\alpha T)(v) = \alpha T(v), \forall\ v \in V.$$

Operações com transformações lineares

- Composição

Sejam $T_1: V \to W$ e $T_2: W \to U$. Chama-se aplicação **composta** de T_1 com T_2, à transformação linear

$(T_1 \circ T_2)(v) = T_2(T_1(v)), \forall\, v \in V.$



Operações com transformações lineares

- Exemplo 1:

Sejam $T_1: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ e $T_2: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ transformações lineares definidas por

$T_1(x,y) = (x+2y, 2x-y,x)$ e $T_2(x,y)=(-x,y,x+y)$.

- $T_1 + T_2$

$(T_1 + T_2)(x,y)= T_1(x,y) + T_2(x,y)$

$(T_1 + T_2)(x,y)= (x+2y, 2x-y,x) +(-x,y,x+y) = (2y, 2x,2x+y)$

Operações com transformações lineares

- Exemplo1:

- $3T_1 - 2T_2$

$(3T_1 - 2T_2)(x,y) = (3T_1)(x,y) - (2T_2)(x,y)$

$(3T_1 - 2T_2)(x,y) = 3T_1(x,y) - 2T_2(x,y)$

$(3T_1 - 2T_2)(x,y) = 3(x+2y, 2x-y, x) - 2(-x, y, x+y)$

$(3T_1 - 2T_2)(x,y) = (5x+6y, 6x-5y, x-2y)$

Operações com transformações lineares

- Exemplo 2:

Sejam S e T operadores lineares no $\mathbb{R}^3$ definidos por

S(x,y) = (2x,y) e T(x,y)=(x,x-y).

- S o T

(S o T)(x,y) = S(T(x,y)) = S(x,x-y) – (2x, x-y)

- T o S

(T o S)(x,y) = T(S(x,y)) = T(2x,y) = (2x, 2x-y).

Transformações Lineares Planas

- Entende-se por transformações lineares planas as transformações de $\mathbb{R}^2$ em $\mathbb{R}^2$.

- Veremos algumas de especial importância e suas interpretações geométricas.

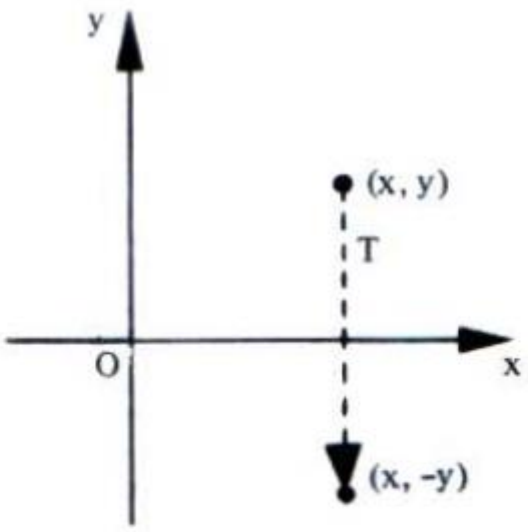
Transformações Lineares Planas

- Reflexões
- Refexão em torno do eixo dos x

Leva cada ponto (x,y) para sua imagem (-x,-y), simétrica em relação ao eixo x.

T: $\mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ ou $T(x,y) = (x, -y)$

$(x,y) \mapsto (x,-y)$

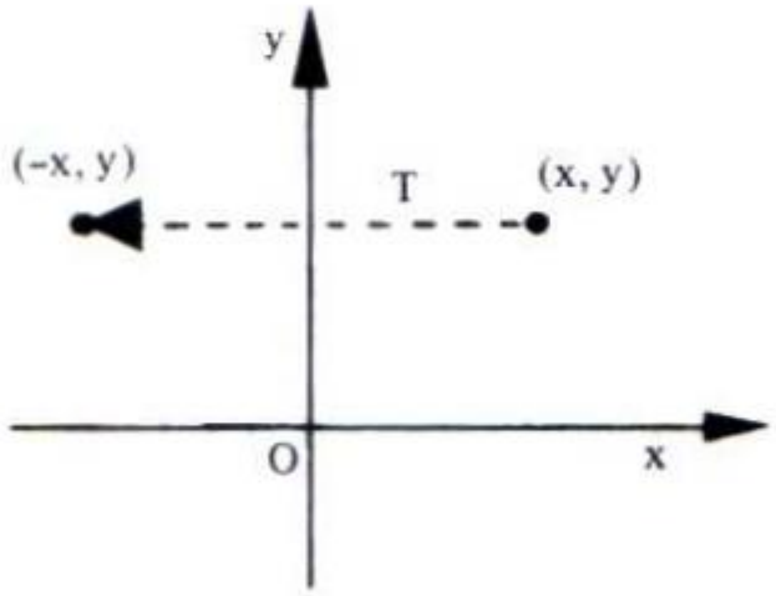


Transformações Lineares Planas

- Refexão em torno do eixo dos y

T: $\mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ ou $T(x,y) = (-x, y)$

$(x,y) \mapsto (-x,y)$

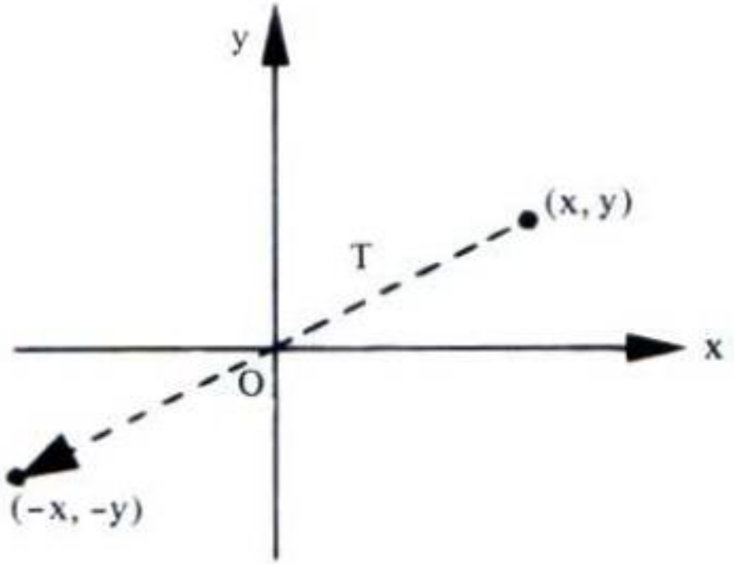


Transformações Lineares Planas

- Refexão na origem

T: $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ ou T(x,y) = (-x, -y)

$(x,y) \mapsto (-x,-y)$

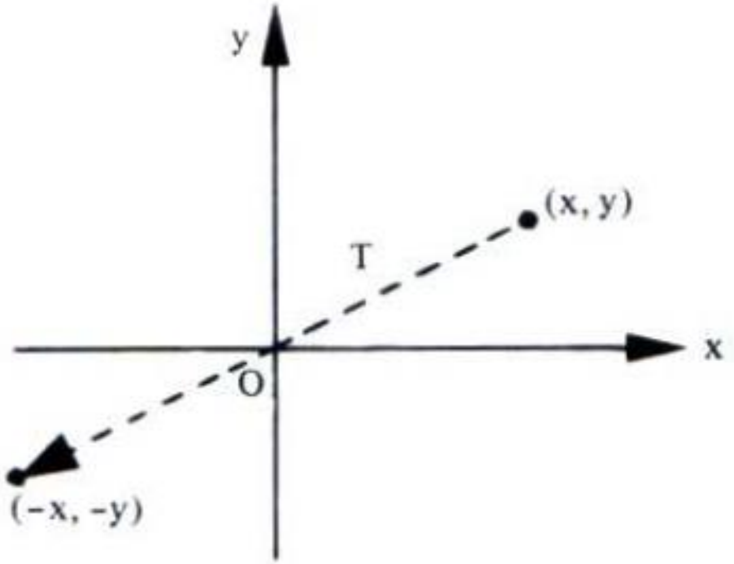


Transformações Lineares Planas

- Refexão na origem

T: $\mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ ou $T(x,y) = (-x, -y)$

$(x,y) \mapsto (-x,-y)$

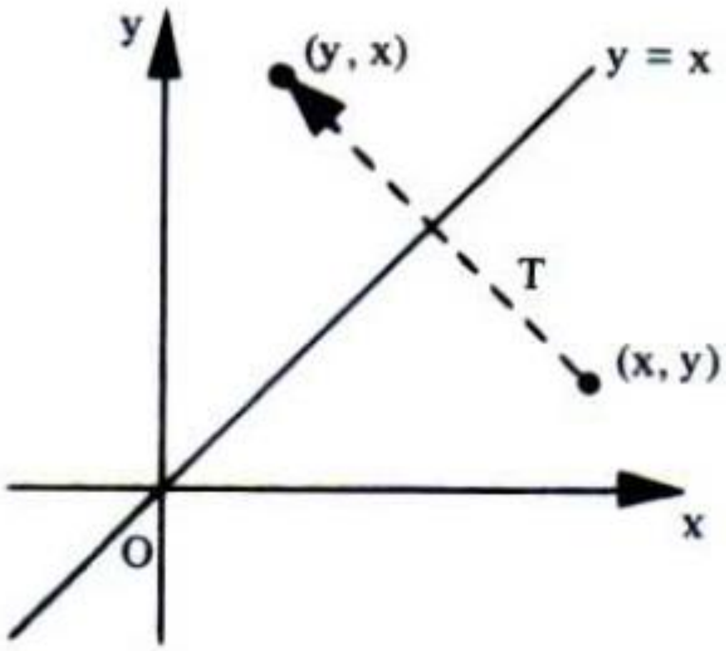


Transformações Lineares Planas

- Refexão em torno da reta y=x

T: $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ ou T(x,y) = (y, x)

$(x,y) \mapsto (y,x)$

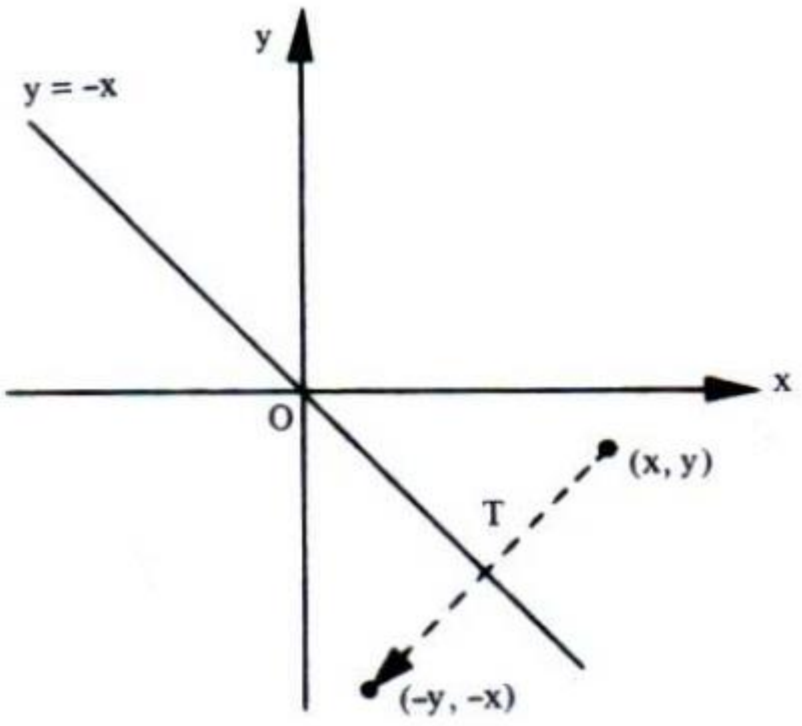


Transformações Lineares Planas

- Refexão em torno da reta y=-x

T: $\mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ ou T(x,y) = (-y, -x)

$(x,y) \mapsto (-y,-x)$

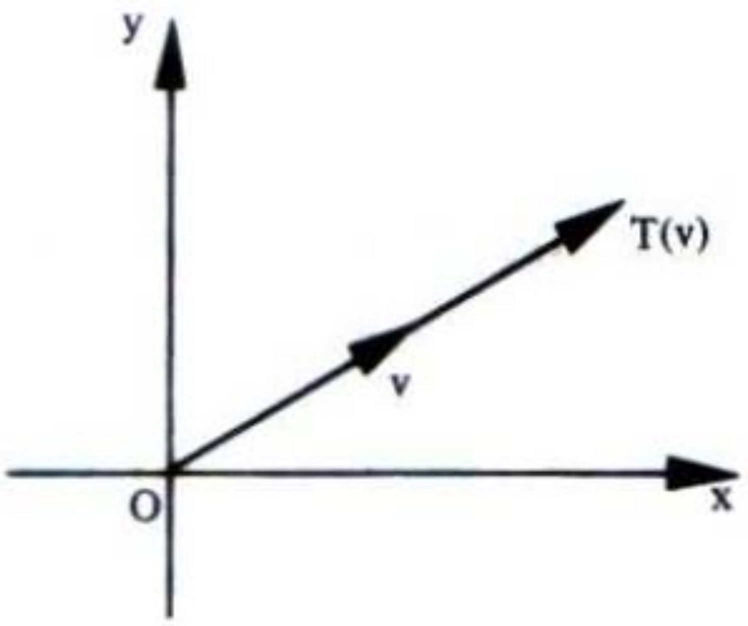


Transformações Lineares Planas

- Dilatações e Contrações
- Dilatação ou contração na direção do vetor

T: $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$

$(x,y) \mapsto \alpha(x,y)$, $\alpha \in \mathbb{R}$

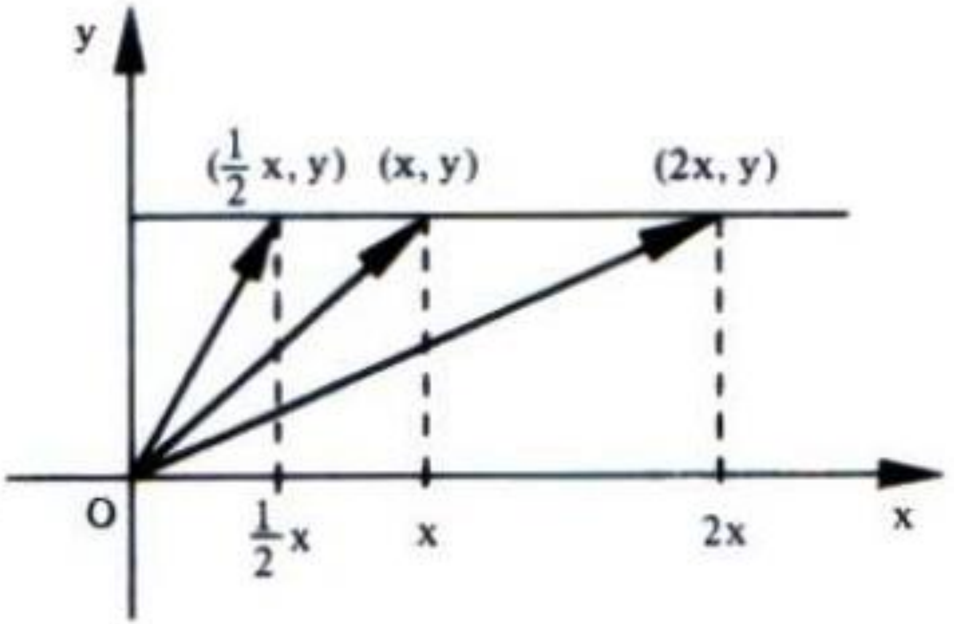


Transformações Lineares Planas

- Dilatação ou contração na direção do eixo dos x

T: $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$

$(x,y) \mapsto (\alpha x,y)$, $\alpha > 0$



Note que:

se $\alpha > 1$, T dilata o vetor

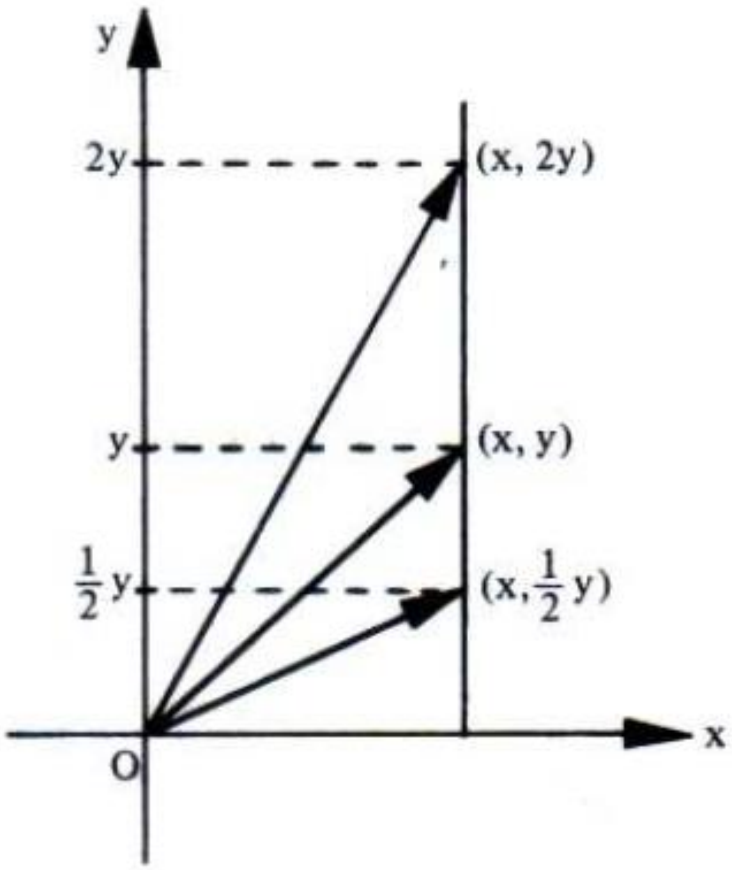
se $0 < \alpha < 1$, T contrai o vetor

Transformações Lineares Planas

- Dilatação ou contração na direção do eixo dos y

T: $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$

$(x,y) \mapsto (x, \alpha y)$, $\alpha > 0$

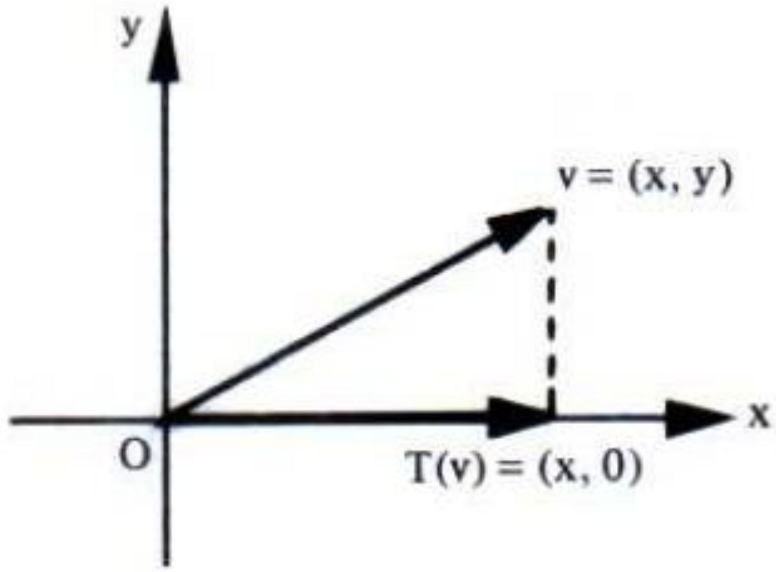


Transformações Lineares Planas

- Dilatação ou contração na direção do eixo dos y

Note que, se $\alpha = 0$, temos a projeção orthogonal do plano sobre o eixo dos x.

$(x,y) \mapsto (x, 0)$

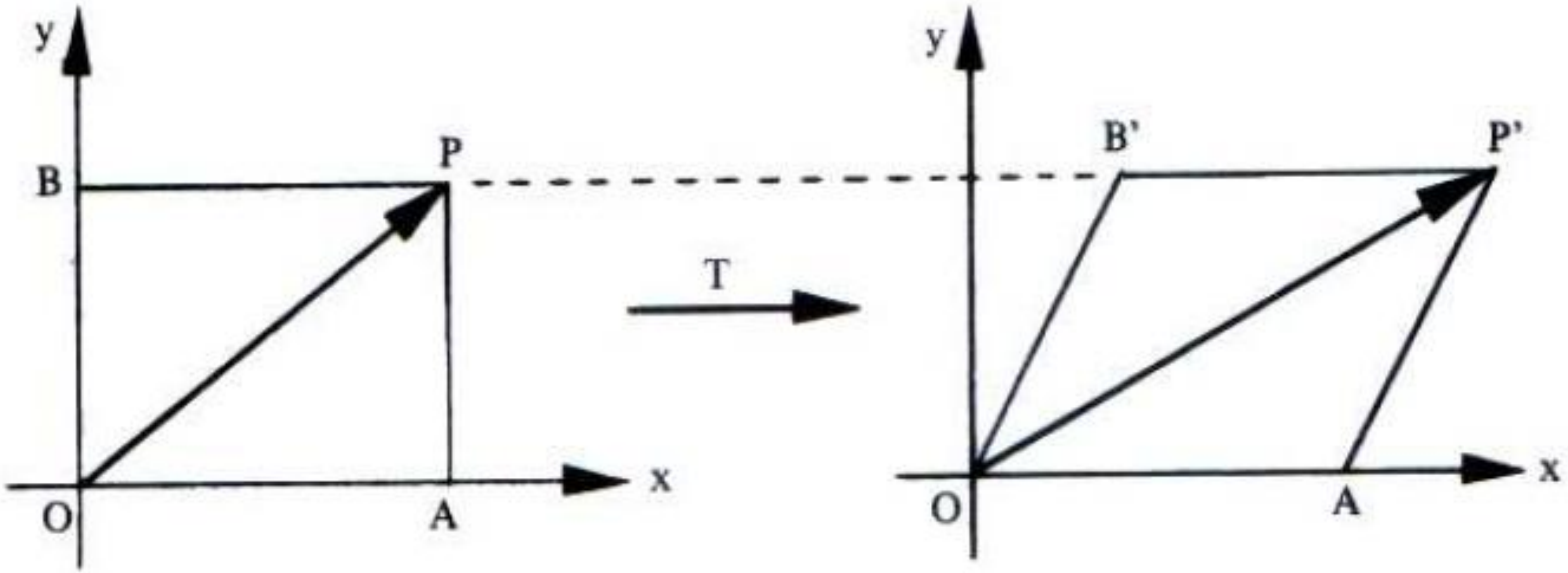


Transformações Lineares Planas

- Cisalhamentos
- Cisalhamento na direção do eixo dos x

$T: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$

$(x,y) \mapsto (x + \alpha y,\ y)$

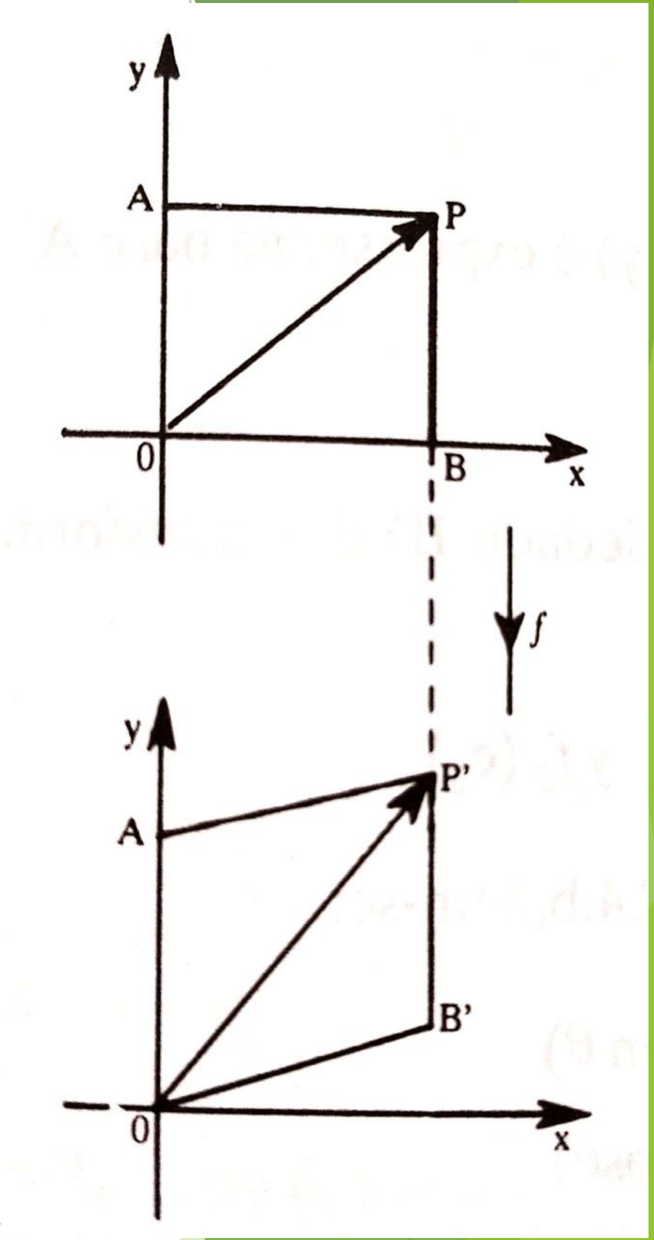


Transformações Lineares Planas

- Cisalhamento na direção do eixo dos y

T: $\mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$

$(x,y) \mapsto (x,\ y+\alpha x)$



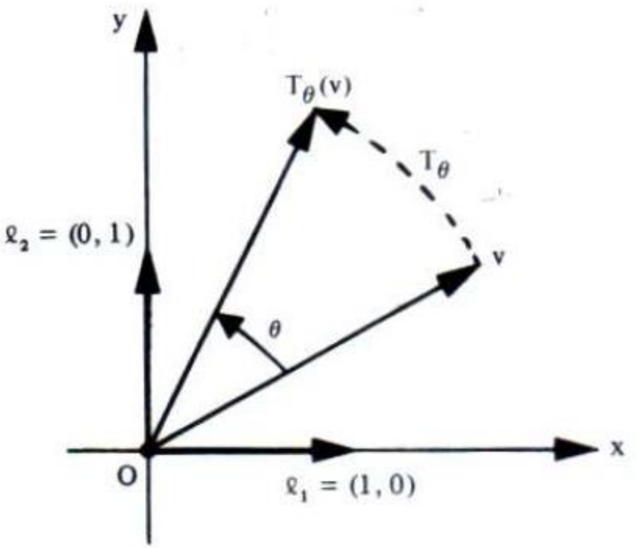
Transformações Lineares Planas

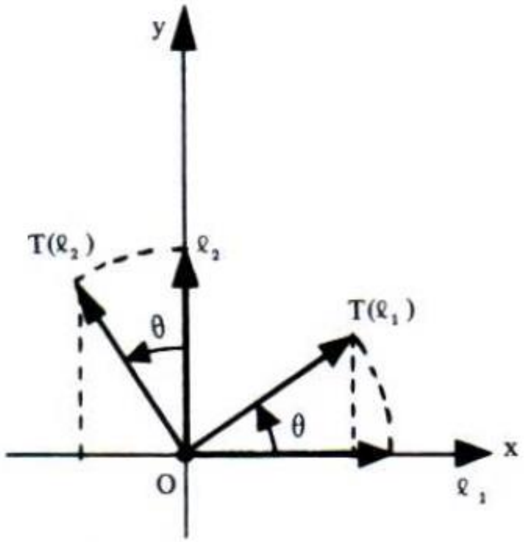
- Rotação

A rotação do plano em torno da origem, que faz cada ponto descrever um ângulo θ, determina

$T_\theta : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$

$(x,y) \mapsto (x\cos\theta - y\,\mathrm{sen}\,\theta,\ x\,\mathrm{sen}\,\theta + y\cos\theta)$





Transformações Lineares Planas

- Rotação

Matriz da transformação:

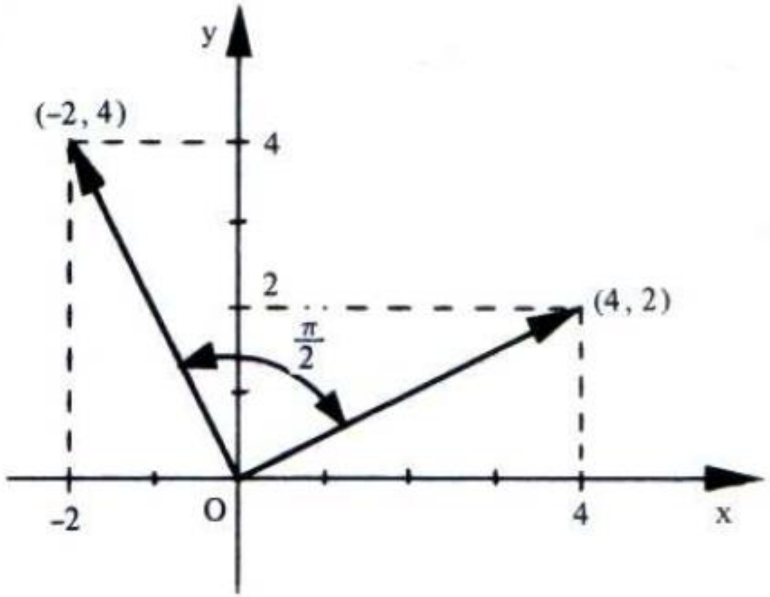
$$[T_\theta] = \begin{bmatrix} cos\ \theta & -sen\ \theta \\ sen\ \theta & cos\ \theta \end{bmatrix}$$

Transformações Lineares Planas

- Rotação

Desejamos a imagem do vetor v=(4,2) pela rotação de $\theta = \pi/2$

$$[T(4,2)] = \begin{bmatrix} cos\,\pi/2 & -sen\,\pi/2 \\ sen\,\pi/2 & cos\,\pi/2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 4 \\ 2 \end{bmatrix}$$



$$[T(4,2)] = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 4 \\ 2 \end{bmatrix} \text{ ou } [T(4,2)] = \begin{bmatrix} -2 \\ 4 \end{bmatrix}$$

Transformações Lineares no Espaço

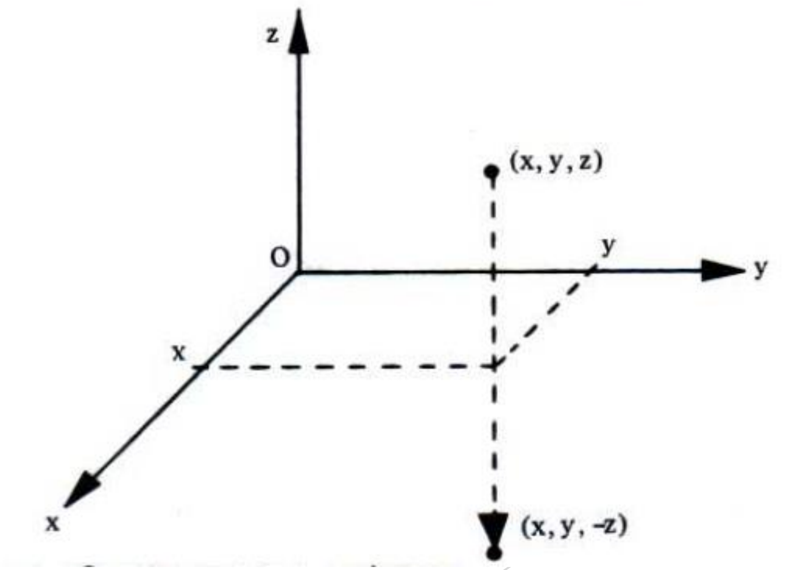
- São as transformações de $\mathbb{R}^3$ em $\mathbb{R}^3$.
- Examinaremos as reflexões e as rotações.

Transformações Lineares no Espaço

- Reflexões
- Reflexões em relação aos planos coordenados

A reflexão em relação ao plano xOy leva cada ponto (x,y,z) na sua imagem (x,y,-z), simétrica em relação ao plano xOy.

$$T(x,y,z) = (x,y,-z)$$

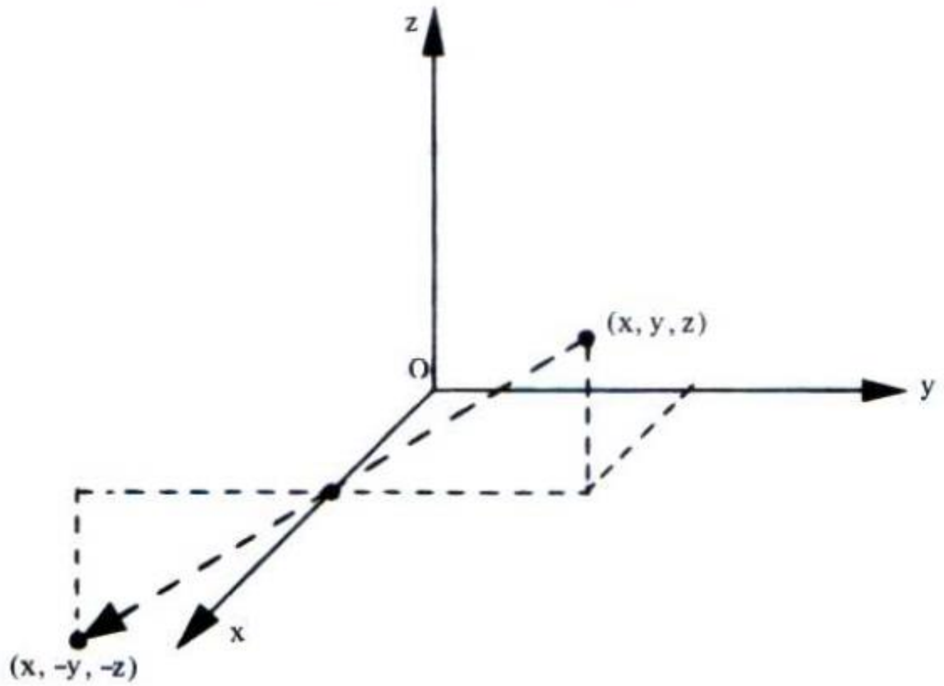


Transformações Lineares no Espaço

- Reflexões em relação aos eixos coordenados

A reflexão em relação ao eixo x é o operador liner definido por

$$T(x,y,z) = (x,-y,-z)$$

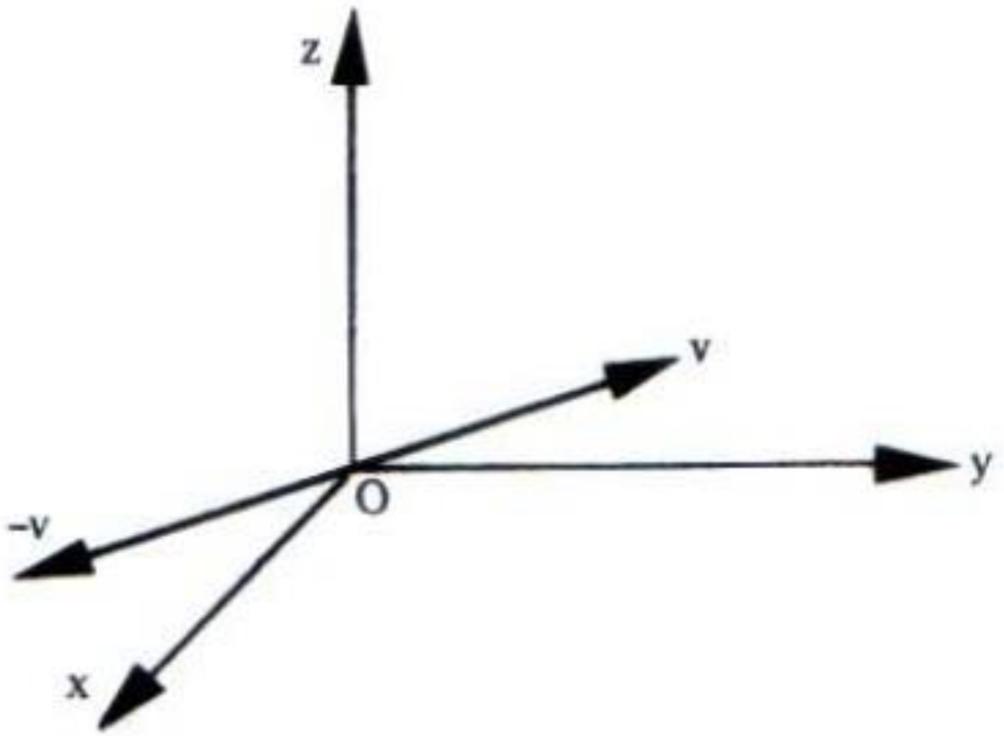


Transformações Lineares no Espaço

- Reflexões na origem

T: $\mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$

$(x,y) \mapsto (-x,\ -y,\ -z)$



Transformações Lineares no Espaço

- Rotação

Vamos mostrar a rotação do espaço em torno do eixo dos x, que faz cada ponto descrever um ângulo θ.

$T_\theta : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$

$(x,y,z) \mapsto (x\cos\theta - y\,\mathrm{sen}\,\theta,\ x\,\mathrm{sen}\,\theta + y\cos\theta, z)$

Transformações Lineares Planas

- Rotação

Matriz da transformação:

$$[T_\theta] = \begin{bmatrix} \cos\theta & -\operatorname{sen}\theta & 0 \\ \operatorname{sen}\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$