Pós-Graduação em Ciência de Dados

Professora Cecília Pereira de Andrade

e

Professor Ricardo Sovat

INSTITUTO FEDERAL DE EDUCAÇÃO, CIÊNCIA E TECNOLOGIA
SÃO PAULO
Campus Campinas

Derivadas direcionais e vetor gradiente

Derivadas Direcionais

- Se $z = f(x, y)$, as derivadas parciais f_x e f_y são definidas como

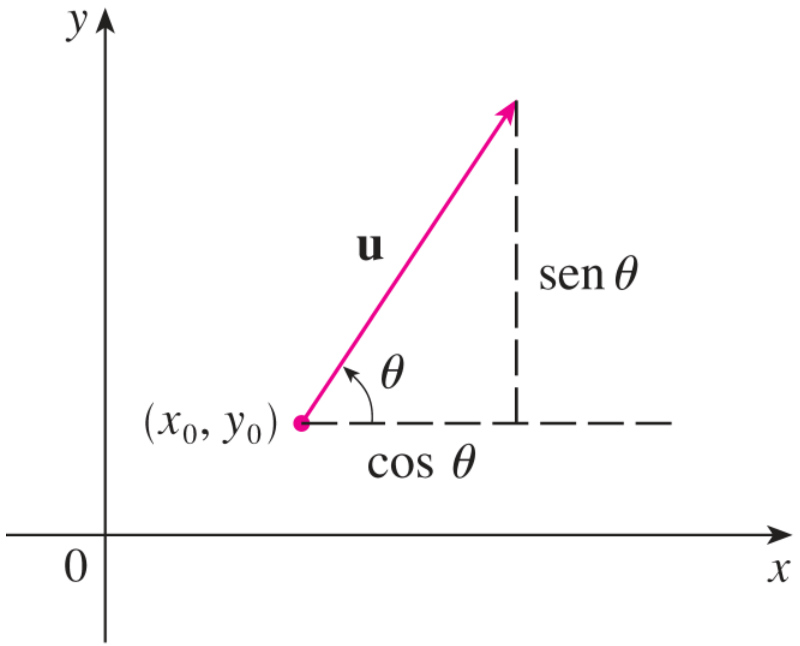
$$\boxed{1} \qquad f_x(x_0, y_0) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x_0 + h, y_0) - f(x_0, y_0)}{h}$$

$$f_y(x_0, y_0) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x_0, y_0 + h) - f(x_0, y_0)}{h}$$

e representam as taxas de mudança de z nas direções x e y, ou seja, na direção dos vetores de unidade **i** e **j**.

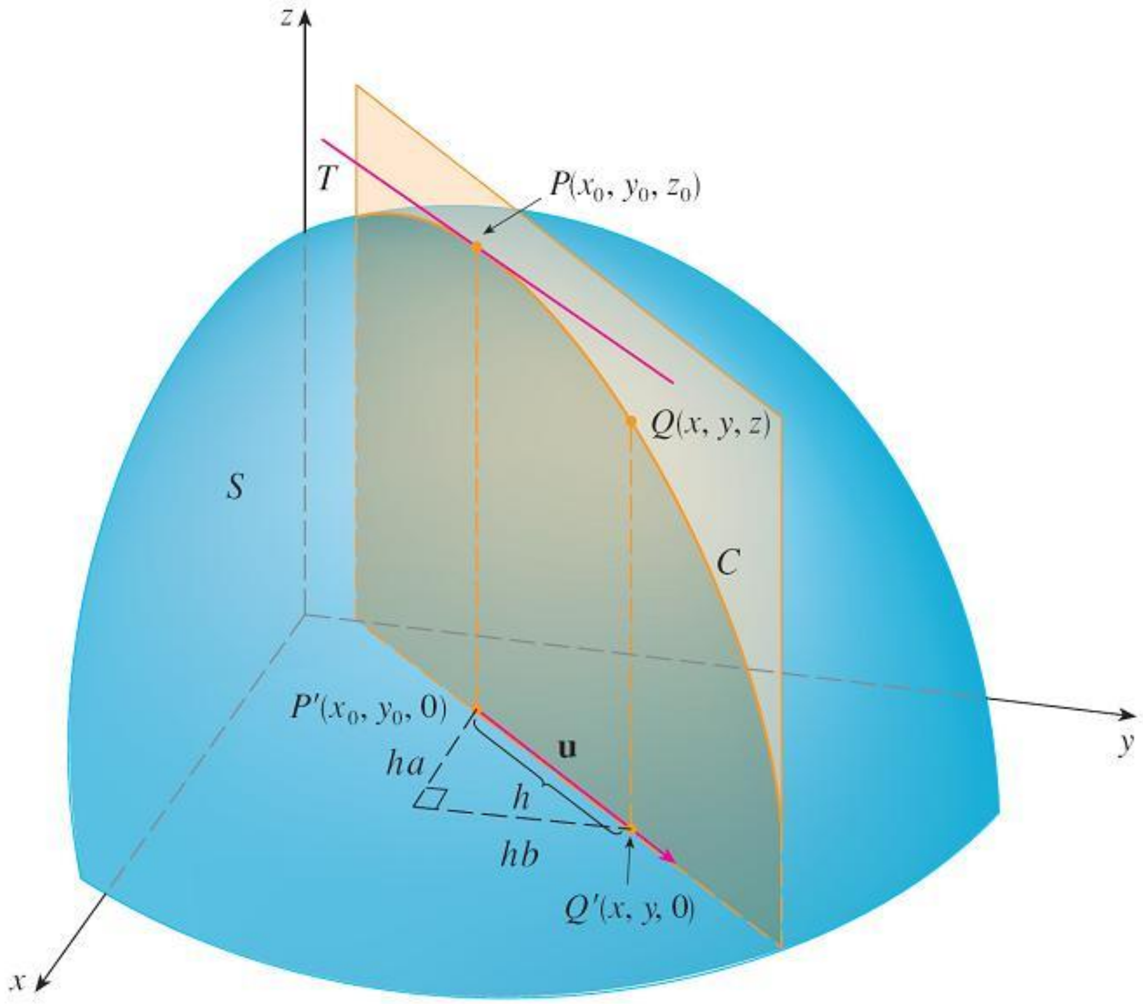
Derivadas Direcionais

- Suponha que queiramos determinar a taxa de variação de z em (x_0, y_0) na direção de um vetor unitário arbitrário $\mathbf{u} = \langle a, b \rangle$.



Um vetor unitário $\mathbf{u} = \langle a, b \rangle = \langle \cos\theta, \text{sen}\ \theta \rangle$

Derivadas Direcionais



Derivadas Direcionais

- Para fazê-lo, devemos considerar a superfície S com equação $z = f(x, y)$ (o gráfico de f) e tomar $z_0 = f(x_0, y_0)$. Então o ponto $P(x_0, y_0, z_0)$ está em S. O plano vertical que passa por P na direção de $\mathbf{u}$ intercepta S em uma curva C.

Derivadas Direcionais

- A inclinação da reta tangente T a C em P é a taxa de variação de z na direção de **u**.

- Se $Q(x, y, z)$ é outro ponto em C e P', Q' são as projeções de P, Q sobre o plano xy, então o vetor $\overrightarrow{P'Q'}$ é paralelo a **u** e, portanto

$$\overrightarrow{P'Q'} = h\mathbf{u} = \langle ha, hb \rangle$$

Derivadas Direcionais

- Para alguma escalar h. Logo, $x - x_0 = ha$,

$y - y_0 = hb$, portanto, $x = x_0 + ha$, $y = y_0 + hb$, e

$$\frac{\Delta z}{h} = \frac{z - z_0}{h} = \frac{f(x_0 + ha, y_0 + hb) - f(x_0, y_0)}{h}$$

Derivadas Direcionais

- Se tomarmos o limite quando $h \to 0$, obteremos a taxa de variação de z na direção de **u**, que é chamada derivada direcional de f na direção de **u**.

2 Definição A derivada direcionada de f em (x_0, y_0) na direção do vetor unitário $\mathbf{u} = \langle a, b \rangle$ é

$$D_{\mathbf{u}} f(x_0, y_0) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x_0 + ha, y_0 + hb) - f(x_0, y_0)}{h}$$

se esse limite existir.

Derivadas Direcionais

- Se tomarmos o limite quando $h \to 0$, obteremos a taxa de variação de *z* na direção de **u**, que é chamada derivada direcional de *f* na direção de **u**.

$\boxed{2}$ **Definição** A derivada direcionada de f em (x_0, y_0) na direção do vetor unitário $\mathbf{u} = \langle a, b \rangle$ é

$$D_{\mathbf{u}} f(x_0, y_0) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x_0 + ha, y_0 + hb) - f(x_0, y_0)}{h}$$

se esse limite existir.

Derivadas Direcionais

- Comparando a Definição 2 com as Equações 1, vemos que, se $\mathbf{u} = \mathbf{i} = \langle 1, 0 \rangle$, então $D_{\mathbf{i}} f = f_x$ e se $\mathbf{u} = \mathbf{j} = \langle 0, 1 \rangle$, então $D_{\mathbf{j}} f = f_y$.

- Em outras palavras as derivadas parciais de f relacionada a x e y são apenas casos especiais da derivada direcional.

Derivadas Direcionais

- Quando calculamos a derivada direcional de uma função definida por uma fórmula, geralmente usamos o seguinte teorema.

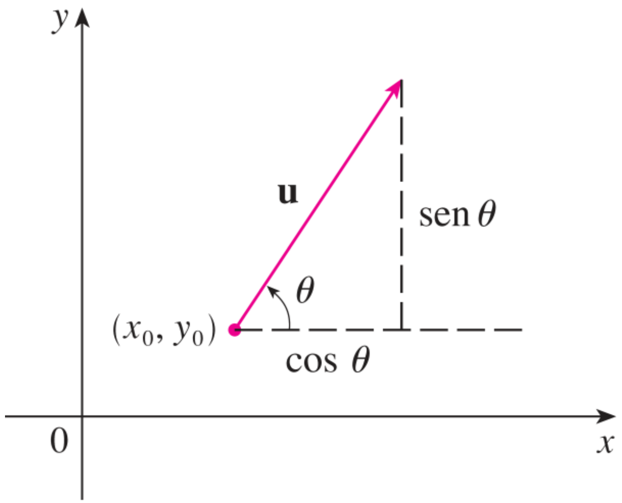
3 Teorema Se f é uma função diferenciável de x e y, então f tem derivada direcional na direção de qualquer vetor $\mathbf{u} = \langle a, b \rangle$ e

$$D_{\mathbf{u}} f(x, y) = f_x(x, y)a + f_y(x, y)b$$

Derivadas Direcionais

- Se o vetor unitário **u** faz um ângulo θ com o eixo x positivo, então podemos escrever **u** = $\langle \cos\,\theta, \text{sen}\,\theta \rangle$ e a fórmula do Teorema 3 fica

$$D_{\mathbf{u}}f\,(x, y) = f_x(x, y)\cos\,\theta + f_y(x, y)\,\text{sen}\,\theta$$



Um vetor unitário **u** = $\langle a, b\rangle = \langle \cos\,\theta, \text{sen}\,\theta\rangle$

Vetor Gradiente

- No Teorema 3,a derivada direcional de uma função diferenciável pode ser escrita como o produto escalar de dois vetores:

$$\begin{aligned} D_{\mathbf{u}}f(x, y) &= f_x(x, y)a + f_y(x, y)b \\ &= \langle f_x(x, y), f_y(x, y)\rangle \cdot \langle a, b\rangle \\ &= \langle f_x(x, y), f_y(x, y)\rangle \cdot \mathbf{u} \end{aligned}$$

Vetor Gradiente

- O primeiro vetor no produto escalar ocorre não somente no cômputo da derivada direcional, mas também em muitas outras situações.

- Assim, daremos a ele um nome especial (o *gradiente* de f) e uma notação especial (**grad** f ou ∇f, que lemos “del f ”).

Vetor Gradiente

8 Definição Se f é uma função de duas variáveis x e y, então o **gradiente** de f é a função vetorial ∇f definida por

$$\nabla f(x, y) = \langle f_x(x, y), f_y(x, y) \rangle = \frac{\partial f}{\partial x}\,\mathbf{i} + \frac{\partial f}{\partial y}\,\mathbf{j}$$

- Exemplo: Determine o gradiente de $f(x,y) = x^2y^3 - 4y$ no ponto $(2,-1)$.

$$\nabla f(x,y) = \langle f_x, f_y \rangle = \langle 2xy^3, 3x^2y^2 - 4 \rangle$$

$$\nabla f(2,-1) = \langle -4, 8 \rangle$$

Vetor Gradiente

- Como essa notação de vetor gradiente, podemos reescrever a Equação 7 para a derivada direcional de uma função diferenciável como

$$\boxed{9} \qquad \boxed{D_{\mathbf{u}} f(x, y) = \nabla f(x, y) \cdot \mathbf{u}}$$

- Isso expressa a derivada direcional na direção de **u** como a projeção escalar do vetor gradiente em **u**.

Vetor Gradiente

- Se $f\ (x, y, z)$ for diferenciável e $\mathbf{u} = \langle a, b, c \rangle$, então

$$D_{\mathrm{u}} f\ (x, y, z) = f_x(x, y, z)a + f_y(x, y, z)b + f_z(x, y, z)c$$

Vetor Gradiente

- Para uma função f de três variáveis, o **vetor gradiente**, denotado por ∇f ou **grad** f, é

  - $\nabla f(x, y, z) = \langle f_x(x, y, z), f_y(x, y, z), f_z(x, y, z) \rangle$

ou, de modo mais abreviado,

13

$$\boxed{\nabla f = \langle f_x, f_y, f_z \rangle = \frac{\partial f}{\partial x}\mathbf{i} + \frac{\partial f}{\partial y}\mathbf{j} + \frac{\partial f}{\partial z}\mathbf{k}}$$

Vetor Gradiente

- Exemplo: Determinar o vetor gradiente de

$f(x,y,z) = xyz^2$

$$\nabla f\ (x,\ y,\ z) = \langle yz^2,\ xz^2,\ 2xyz \rangle$$