D1MAT - Lista de Exercícios 02: Derivadas e Probabilidade

Diego Machado de Assis

May 11, 2021

1. Um apartamento está alugado por $R\$4500{,}00$. Este aluguel sofrerá um reajuste anual de $R\$1550{,}00$.

a) Expresse a função com a qual podemos calcular a taxa de variação do aluguel, em t anos.

Solução

Seja $V(t)$ a função que define o preço do aluguel em t anos.

$$V(t) = 4500 + 1550t \qquad t \in \mathbb{N}$$

A taxa de variação do aluguel pode ser expressa pela derivada da função $V(t)$ em relação a t

$$V'(t) = \frac{dV}{dt} = 1550\ R\$/\text{ano}$$

Ou seja, a função que define a taxa de variação do aluguel em t anos é a constante do reajuste **1550,00 R\$/ano**

---

b) Calcule a taxa de variação do aluguel após 4 anos

Solução

Após 4 anos, a taxa de variação do aluguel será de $1550{,}00 R\$/\text{ano}$

---

c) Qual a porcentagem de variação do aluguel depois de 1 ano do primeiro reajuste?

Solução

A porcentagem de variação do aluguel após t reajustes $P(t)$ pode ser expressa como:

$$P(t) = \begin{cases} 0 & \text{para } t = 0 \\ \frac{V(t)}{V(t-1)} - 1 & \text{para } t \in \mathbb{N}^* \end{cases}$$

Após 1 ano do primeiro reajuste teremos o segundo reajuste, ou seja:

$$P(2) = \frac{V(2)}{V(1)} - 1 = \frac{4500 + 1550(2)}{4500 + 1550(1)} - 1 \approx 0{,}256$$

Portanto, a variação do aluguel depois de 1 ano do primeiro reajuste será de aproximadamente **25,6%**

---

d) Que acontecerá à porcentagem de variação depois de alguns anos?

Solução

Como a taxa de reajuste é constante ao longo dos anos, **a porcentagem de variação irá diminuir a cada ano**.

Pela expressão acima, para $t > 0$ temos que:

$$P(t) = \frac{V(t)}{V(t-1)} - 1 = \frac{V(t)}{V(t-1)} - \frac{V(t-1)}{V(t-1)} = \frac{V(t) - V(t-1)}{V(t-1)} \tag{1}$$

Podemos também expressar $V(t-1)$, para $t > 0$, como:

$$V(t-1) = 4500 + 1550(t-1) = 4500 + 1550t - 1550 = V(t) - 1550 \tag{2}$$

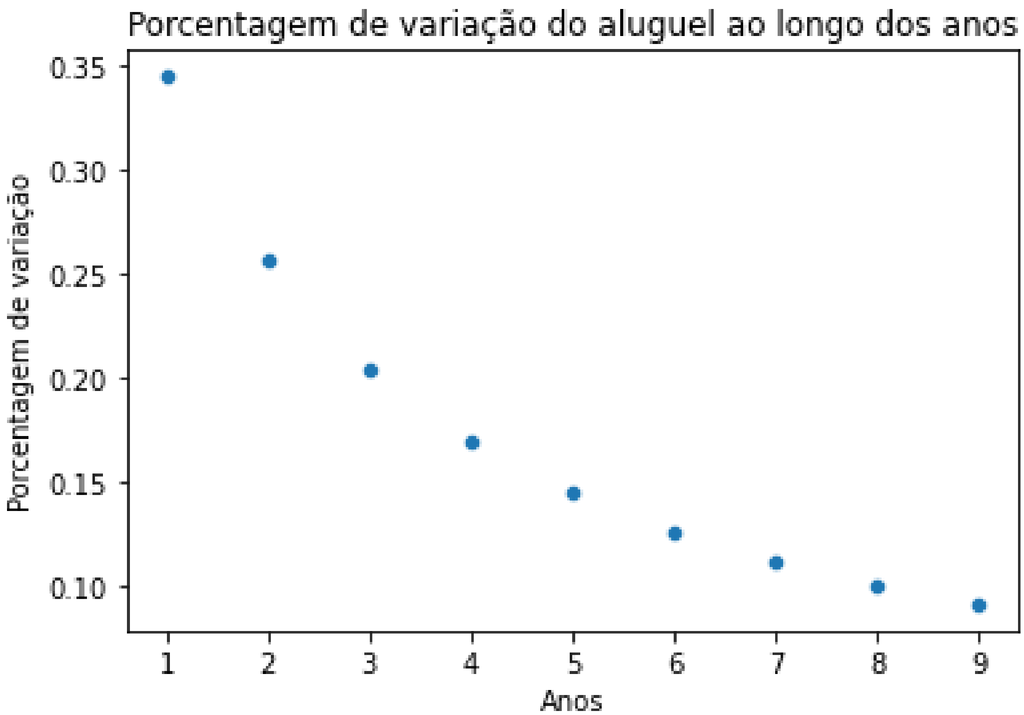
Substituindo (2) em (1) temos:

$$P(t) = \frac{V(t) - (V(t) - 1550)}{V(t-1)} = \frac{1550}{4500 + 1550(t-1)} \tag{3}$$

Pela equação (3) é mais fácil visualizar que o valor de $P(t)$ diminui para valores maiores de t. Ou seja, a medida que os anos passam (t aumenta), a porcentagem de variação do aluguel $P(t)$ diminui.

Por fim, podemos ver pelo gráfico abaixo como a porcentagem de variação do aluguel diminui ao longo dos anos

[1]:
```
import matplotlib.pyplot as plt
import seaborn as sns

def V(t):
    return 4500 + 1550*t

def P(t):
    return 0 if t == 0 else V(t)/V(t-1) - 1

t = range(1, 10)
p = [P(t) for t in t]
sns.scatterplot(x=t, y=p)

plt.title('Porcentagem de variação do aluguel ao longo dos anos', fontsize=12)
plt.xlabel('Anos')
plt.ylabel('Porcentagem de variação')
plt.show()
```


Porcentagem de variação do aluguel ao longo dos anos
Porcentagem de variação
0.35
0.30
0.25
0.20
0.15
0.10
1
2
3
4
5
6
7
8
9
Anos

2. Uma folha de papel contém $375cm^2$ de matéria impressa, com margem superior de $3{,}5cm$, margem inferior de $2cm$, margem lateral direita de $2cm$ e margem lateral esquerda de $2{,}5cm$. Determinar quais devem ser as dimensões da folha para que haja o máximo de economia de papel.

Solução

Para determinar a máxima economia de papel, queremos calcular a área (A) mínima da folha de papel que obedeça as dimensões especificadas.

Sejam p_h e p_w as dimensões da altura e largura da área impressa da folha, respectivamente. Sabemos que:

$$p_h p_w = 375 \tag{4}$$

$$p_h = \frac{375}{p_w} \quad \text{e} \quad p_w = \frac{375}{p_h} \tag{5}$$

Considerando as margens, podemos definir a altura (h) e largura (w) totais da página como sendo:

$$h = p_h + 3{,}5 + 2 \implies h = p_h + 5{,}5 \tag{6}$$
$$w = p_w + 2 + 2{,}5 \implies w = p_w + 4{,}5 \tag{7}$$

Portanto, a área total da folha pode ser expressa como:

$$A = hw = (p_h + 5{,}5)(p_w + 4{,}5)$$
$$A = p_h p_w + 4{,}5p_h + 5{,}5p_w + 24{,}75 \tag{8}$$

Utilizando (4) e (5) e substituindo na equação (8), podemos expressar a área total da folha em função de p_h ou p_w:

$$A(p_h) = 4{,}5p_h + \frac{2062{,}5}{p_h} + 399{,}75$$
$$A(p_w) = 5{,}5p_w + \frac{1687{,}5}{p_w} + 399{,}75$$

Para encontrarmos a área mínima, vamos primeiramente encontrar os números críticos da função A.

Vamos aplicar para $A(p_h)$, primeiramente encontrando a função derivada $A'(p_h)$:

$$A'(p_h) = 4{,}5 - \frac{2062{,}5}{p_h^2}$$

Os números críticos da função são então:

$$A'(p_h) = 4{,}5 - \frac{2062{,}5}{p_h^2} = 0$$

$$\frac{2062{,}5}{p_h^2} = 4{,}5 \implies p_h^2 = \frac{2062{,}5}{4{,}5} \implies p_h \approx \pm 21{,}41$$

Como p_h representa uma dimensão, podemos descartar o valor negativo e, portanto, afirmar que $p_h \approx 21{,}41$ é um número crítico da função $A(p_h)$. Para saber se o número crítico encontrado é um valor de máximo ou mínimo da função, podemos analisar o sinal de $A'(p_h)$.

Quando $p_h < 21{,}41$, a fração $\frac{2062{,}5}{p_h^2}$ se torna maior do que 4,5, implicando em $A'(p_h)$ negativo. Por sua vez, quando $p_h > 21{,}41$ a mesma fração passa a ser um número menor do que 4,5, implicando em $A'(p_h)$ positivo. Como o sinal de A' varia de negativo para positivo no ponto, pelo *Teste da Primeira Derivada* podemos afirmar que a função $A(p_h)$ possui um valor mínimo em $p_h \approx 21{,}41$.

Sabendo-se o valor de p_h que minimiza o valor da área, podemos encontrar p_w por (5):

$$p_w \approx \frac{375}{21{,}41} \approx 17{,}52$$

Finalmente podemos determinar as dimensão da folha que minimizam a área total do papel utilizando as equações (6) e (7):

$$\begin{aligned} h = p_h + 5{,}5 &\implies \mathbf{h \approx 26{,}91cm} \\ w = p_w + 4{,}5 &\implies \mathbf{w \approx 22{,}02cm} \end{aligned}$$

Uma questão que fica: se optarmos por calcular a área mínima da folha de papel utilizando a função $A(p_w)$ em vez de $A(p_h)$, obtemos o mesmo resultado? Vamos conferir:

$$A'(p_w) = 5{,}5 - \frac{1687{,}5}{p_w^2}$$

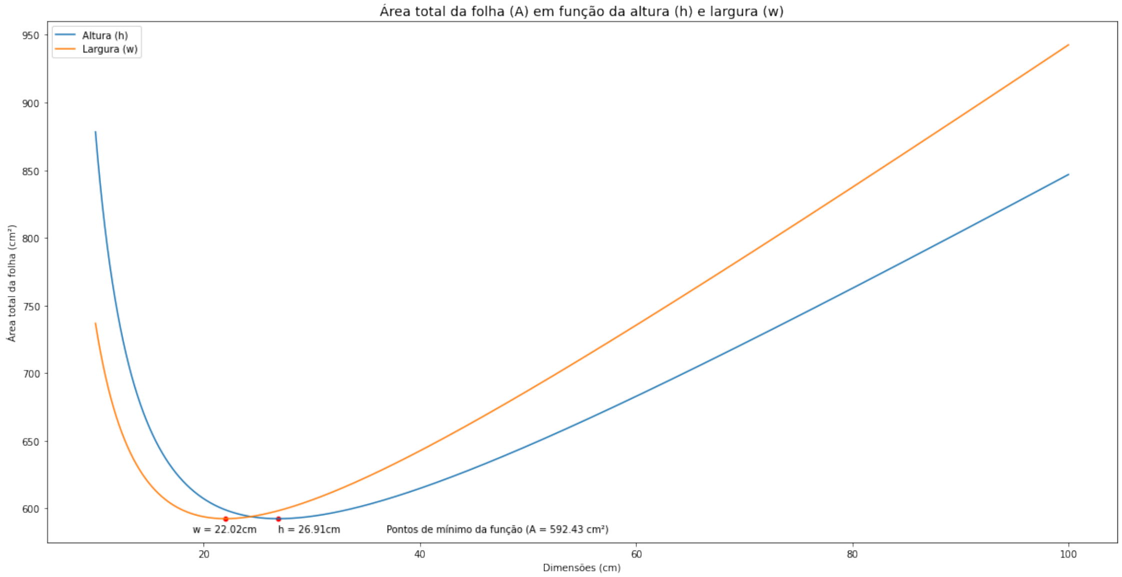
Fazendo $A'(p_w) = 0$ para encontrar os números críticos da função, chegamos em $p_w \approx \pm 17{,}52$. Seguindo o raciocínio análogo ao que fizemos anteriormente para p_h, vamos concluir que a função $A(p_w)$ possui um mínimo em $p_w \approx 17{,}52$. Ou seja, o mesmo resultado que obtivemos anteriormente.

Podemos visualizar graficamente a função da área total da folha, com destaque para os pontos mínimos encontrados para a altura (h) e largura (w).

[2]:
```
import numpy as np
import pandas as pd
import matplotlib.pyplot as plt
import seaborn as sns

plt.figure(figsize=(20,10))

# Altura da área impressa (p_h) em função da altura (h)
```

```python
def p_h(h):
    return h - 5.5

# Largura da área impressa (p_w) em função da largura (w)
def p_w(w):
    return w - 4.5

# Área da folha (A_h) em função de sua altura (h)
def A_h(h):
    return 4.5*p_h(h) + 2062.5/p_h(h) + 399.75

# Área da folha (A_w) em função de sua largura (w)
def A_w(w):
    return 5.5*p_w(w) + 1687.5/p_w(w) + 399.75

# Intervalo de dimensões para plot do gráfico
x = np.arange(10, 100, 0.01)

# Pontos da função de área em relação a h e w
lines = pd.DataFrame({
    'Dimensão': x,
    'Altura (h)': [A_h(h) for h in x],
    'Largura (w)': [A_w(w) for w in x]
})

sns.lineplot(x='Dimensão', y='value', hue='variable', data=pd.melt(lines,␣
 ↪['Dimensão']))

# Pontos de mínimo da função
h_min = 26.91
w_min = 22.02

sns.scatterplot(
    x=[h_min, w_min],
    y=[A_h(h_min),
    A_w(w_min)],
    color='red'
)
plt.text(x=w_min-3, y=A_w(w_min)-10, s=f'w = {w_min}cm')
plt.text(x=h_min, y=A_h(h_min)-10, s=f'h = {h_min}cm')
plt.text(x=h_min+10, y=A_h(h_min)-10, s=f'Pontos de mínimo da função (A =␣
 ↪{A_h(h_min):.2f} cm²)')

plt.title('Área total da folha (A) em função da altura (h) e largura (w)',␣
 ↪fontsize=14)
plt.ylabel('Área total da folha (cm²)')
plt.xlabel('Dimensões (cm)')
```

```
plt.show()
```



Área total da folha (A) em função da altura (h) e largura (w)
Altura (h)
Largura (w)
Área total da folha (cm²)
Dimensões (cm)
w = 22.02cm
h = 26.91cm
Pontos de mínimo da função (A = 592.43 cm²)
600
650
700
750
800
850
900
950
20
40
60
80
100

3. Exercícios do texto sobre probalibidade

Seção 1.4, Exercício 4 (PUC-SP) Com os elementos do conjunto $A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ são formados números com três algarismos distintos. A quantidade de números formados, cuja soma dos algarismos é um número par, é:

$a)30$ $b)36$ $c)52$ $d)60$ $e)72$

Solução

A soma dos algarismos de um número de 3 algarismos será par quando exatamente 0 ou 2 algarismos deste número for ímpar.

i. 0 algarismos ímpares

Neste caso, teremos números formados com os 3 algarismos pares do conjunto. O número de possibilidades será então:

$n_i = 3 \times 2 \times 1 = 6$

ii. 2 algarismos ímpares

Neste caso, os números deverão conter exatamente 1 algarismo par do conjunto. Este algarismo poderá estar em qualquer posição, portanto:

- Par na 1^a posição: 3 (pares) $\times$ 3 (ímpares) $\times$ 2 (ímpares) $=$ 18 possibilidades
- Par na 2^a posição: 3 (ímpares) $\times$ 3 (pares) $\times$ 2 (ímpares) $=$ 18 possibilidades
- Par na 3^a posição: 3 (ímpares) $\times$ 2 (ímpares) $\times$ 3 (pares) $=$ 18 possibilidades

Dessa forma, $n_{ii} = 18 + 18 + 18 = 54$

Portanto, o total de números possíveis é de:

$$n = n_i + n_{ii} = 6 + 54 = \mathbf{60}$$

Resposta: letra $d)60$

Seção 1.4, Exercício 18 (MACK-SP) O total de números, formados com os algarismos distintos, maiores que 50.000 e menores que 90.000 e que são divisíveis por 5, é:

$a)$1.596 $b)$2.352 $c)$2.686 $d)$2.788 $e)$4.032

Solução

i. Quando o primeiro algarismo for 5 (1 escolha), resta apenas 1 escolha (o dígito 0) para o último algarismo. Para os algarismos intermediários, temos $8 \times 7 \times 6 = 336$ escolhas

ii. Quando o primeiro algarismo for 6, 7 ou 8 (3 escolhas), teremos 2 escolhas para o útlimo algarismo (os dígitos 0 ou 5). Para os algarismos intermediários, temos novamente 336 escolhas. Portanto, teremos $3 \times 2 \times 336 = 2.016$ escolhas

Portanto, o total de números formados será de:

$$n = 336 + 2.016 = \mathbf{2.352}$$

Resposta: letra $b)$2.352

Seção 1.8, Exercício 2 (UNIFOR-CE) Um casal e seus quatro filhos vão ser colocados lado a lado, para tirar uma foto. Se todos os filhos devem ficar entre os pais, de quantos modos distintos os seis podem posar para tirar a foto?

$a)21$ $b)48$ $c)96$ $d)120$ $e)720$

Solução

Os pais, cada um em uma das pontas da fila, podem ocupar duas posições diferentes. Os quatro filhos podem ser ordenados de $4 \times 3 \times 2 \times 1 = 24$ formas diferentes.

Portanto, as seis pessoas podem ser ordenadas de $2 \times 24 = \mathbf{48}$ formas distintas

Resposta: letra $b)48$

Seção 1.8, Exercício 9 (UFOP-MG) Podemos ordenar as pessoas que estão numa certa fila de 24 maneiras diferentes. Então, nessa fila estão quantas pessoas?

$a)4$ $b)5$ $c)6$ $d)12$ $e)24$

Solução

Sabendo-se que o número de permutações de n elemento é dado por $n!$, devemos encontrar o número n tal que $n! = 24$. Ou seja, $n = \mathbf{4}$

Resposta: letra $a)4$

Seção 1.11, Exercício 4 (USP) Uma comissão de cinco alunos deve ser formada para discutir e planejar o desenvolvimento das partes esportiva de sua escola. Sabendo-se que estes cinco alunos devem ser escolhidos de um grupo de 10 alunos, então o número possível de escolha é:

$a)$360 $b)$180 $c)$21.600 $d)$252 $e)$210

Solução

Precisamos calcular o número de combinações de 5 alunos que podem ser formadas a partir de um grupo de 10 alunos:

$$C_{10,5} = \frac{10!}{(10-5)!5!} = \frac{10.9.8.7.6.5!}{5.4.3.2.1.5!} = \mathbf{252}$$

Resposta: letra $d)$252

Seção 1.11, Exercício 18 (UFF-RJ) Uma empresa vai fabricar cofres com senhas de 4 letras, usando 18 consoantes e 5 vogais. Se cada senha deve começar com uma consoante e terminar com uma vogal, sem repetir letras, o número de senhas possíveis é:

$a)$3.060 $b)$24.480 $c)$37.800 $d)$51.210 $e)$53.440

Solução

Como a primeira letra da senha deve ser uma consoante, então para ela existem 18 escolhas possíveis. Para a última letra, que deve ser vogal, existem 5 escolhas. Definidas as letras de início e fim, para as duas letras intermediárias restam 21×20 escolhas. Portanto o número de senhas possíveis será de:

$$n = 18 \times 5 \times 21 \times 20 = 37800$$

Resposta: letra $c)$37.800

Seção 2.5, Exercício 1 No lançamento de um dado perfeito, qual é a probabilidade de que o resultado seja:

Espaço Amostral: $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\} \implies n(\Omega) = 6$

---

a) Um número par?

Evento $A = \{2, 4, 6\} \implies n(A) = 3$

$$P(A) = \frac{n(A)}{n(\Omega)} = \frac{3}{6} = \frac{1}{2} = 0{,}5 = 50\%$$

---

b) Um número primo?

Evento $B = \{2, 3, 5\} \implies n(B) = 3$

$$P(B) = \frac{n(B)}{n(\Omega)} = \frac{3}{6} = \frac{1}{2} = 0{,}5 = 50\%$$

---

c) O número 3?

Evento $C = \{3\} \implies n(C) = 1$

$$P(C) = \frac{n(C)}{n(\Omega)} = \frac{1}{6} \approx 0{,}167 \approx 16{,}7\%$$

---

d) Um número menor do que 3?

Evento $D = \{1, 2\} \implies n(D) = 2$

$$P(D) = \frac{n(D)}{n(\Omega)} = \frac{2}{6} = \frac{1}{3} \approx 0{,}333 \approx 33{,}3\%$$

---

e) Um número menor do que 1?

Evento $E = \{\} \implies n(E) = 0$

$$P(E) = \frac{n(E)}{n(\Omega)} = \frac{0}{6} = 0 = 0\%$$

---

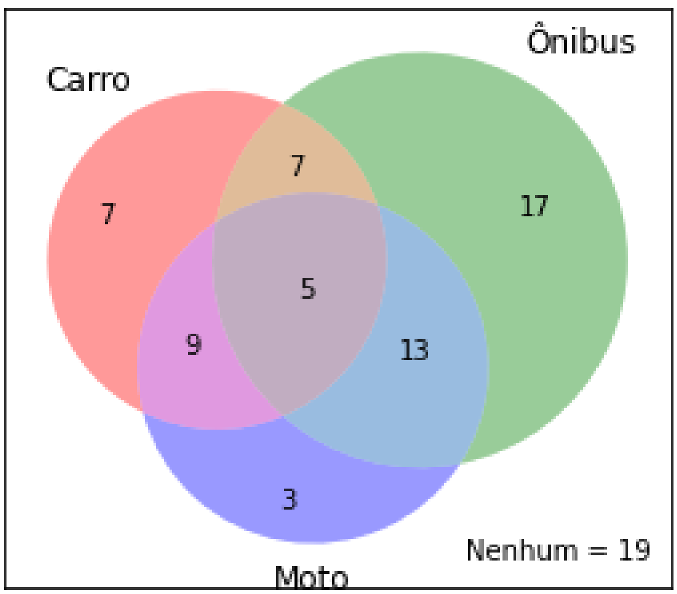
f) Um número menor do que 7?

Evento $F = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\} \implies n(F) = 6$

$$P(F) = \frac{n(F)}{n(\Omega)} = \frac{6}{6} = 1 = 100\%$$

Seção 2.5, Exercício 9 Numa equipe foram entrevistadas 80 pessoas sobre os meios de transporte que utilizavam para ir ao trabalhoe/ou à escola. Quarenta e duas responderam ônibus, 28 responderam carro e 30 responderam moto. Doze utilizavam-se de ônibus e carro, 14 de carro e moto e 18 de ônibus e moto. Cinco utilizavam-se dos três: carro, ônibus e moto. Qual é a probabilidade de que uma dessas pessoas, selecionada ao acaso, utilize:

[13]:
```
import matplotlib.pyplot as plt
from matplotlib_venn import venn3

subsets = (7, 17, 7, 3, 9, 13, 5)

venn3(subsets=subsets, set_labels=('Carro', 'Ônibus', 'Moto'))

plt.text(x=0.3, y=-0.6, s=f'Nenhum = {80-sum(subsets)}')

plt.gca().set_axis_on()
plt.show()
```



Espaço Amostral: $n(\Omega) = 80$

---

a) Somente ônibus?

$$n(A) = 17 \implies P(A) = \frac{n(A)}{n(\Omega)} = \frac{17}{80} = 0{,}2125 = 21{,}25\%$$

---

b) Somente carro?

$$n(B) = 7 \implies P(B) = \frac{n(B)}{n(\Omega)} = \frac{7}{80} = 0{,}0875 = 8{,}75\%$$

---

c) Carro e ônibus, mas não moto?

$$n(C) = 7 \implies P(C) = \frac{n(C)}{n(\Omega)} = \frac{7}{80} = 0{,}0875 = 8{,}75\%$$

---

d) Nenhum dos três veículos?

$$n(D) = 19 \implies P(D) = \frac{n(D)}{n(\Omega)} = \frac{19}{80} = 0{,}2375 = 23{,}75\%$$

---

e) Apenas um desses veículos?

$$n(E) = 7 + 17 + 3 = 27 \implies P(E) = \frac{n(E)}{n(\Omega)} = \frac{27}{80} = 0{,}3375 = 33{,}75\%$$

Seção 2.8, Exercício 5 Uma moeda é lançada três vezes. Determine a probabilidade de se obter:

Espaço Amostral: $\Omega = \{CCC, CCK, CKC, CKK, KCC, KCK, KKC, KKK\} \implies n(\Omega) = 8$

---

a) 3 caras.

Evento $A = \{CCC\} \implies n(A) = 1$

$$P(A) = \frac{n(A)}{n(\Omega)} = \frac{1}{8} = 0{,}125 = 12{,}5\%$$

---

b) 3 caras, dado que a primeira foi cara.

Evento A: obter 3 caras $\implies A = \{CCC\}$

Evento B: a primeira foi cara $\implies B = \{CCC, CCK, CKC, CKK\} \implies P(B) = \frac{n(B)}{n(\Omega)} = \frac{4}{8} = \frac{1}{2}$

$A \cap B = \{CCC\} \implies P(A \cap B) = \frac{n(A\cap B)}{n(\Omega)} = \frac{1}{8}$

$$P(A/B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = \frac{\frac{1}{8}}{\frac{1}{2}} = \frac{1}{4} = 0{,}25 = 25\%$$

---

c) exatamente 2 caras.

Evento $C = \{CCK, CKC, KCC\} \implies n(C) = 3$

$$P(C) = \frac{n(C)}{n(\Omega)} = \frac{3}{8} = 0{,}375 = 37{,}5\%$$

---

d) 2 caras, dado que a primeira foi coroa.

Evento A: obter 2 caras $\implies A = \{CCK, CKC, KCC\}$

Evento B: a primeira foi coroa $\implies B = \{KCC, KCK, KKC, KKK\} \implies P(B) = \frac{n(B)}{n(\Omega)} = \frac{4}{8} = \frac{1}{2}$

$A \cap B = \{KCC\} \implies P(A \cap B) = \frac{n(A\cap B)}{n(\Omega)} = \frac{1}{8}$

$$P(A/B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = \frac{\frac{1}{8}}{\frac{1}{2}} = \frac{1}{4} = 0{,}25 = 25\%$$

---

e) cara no 2^o lançamento, dado que 2 coroas e 1 cara foram obtidas.

Evento A: obter cara no 2^o lançamento $\implies A = \{CCC, CCK, KCC, KCK\}$

Evento B: 2 coroas e 1 cara foram obtidas $\implies B = \{CKK, KCK, KKC\} \implies P(B) = \frac{n(B)}{n(\Omega)} = \frac{3}{8}$

$A \cap B = \{KCK\} \implies P(A \cap B) = \frac{n(A\cap B)}{n(\Omega)} = \frac{1}{8}$

$$P(A/B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = \frac{\frac{1}{8}}{\frac{3}{8}} = \frac{1}{3} = 0{,}333 = 33{,}3\%$$

---

f) cara no 2^o lançamento, dado que 3 caras foram obtidas.

Evento A: obter cara no 2^o lançamento $\implies A = \{CCC, CCK, KCC, KCK\}$

Evento B: 3 caras foram obtidas $\implies B = \{CCC\} \implies P(B) = \frac{n(B)}{n(\Omega)} = \frac{1}{8}$

$A \cap B = \{CCC\} \implies P(A \cap B) = \frac{n(A\cap B)}{n(\Omega)} = \frac{1}{8}$

$$P(A/B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = \frac{\frac{1}{8}}{\frac{1}{8}} = 1 = 100\%$$

---

g) cara no 2^o lançamento, dado que pelo menos 1 cara foi obtida.

Evento A: obter cara no 2^o lançamento $\implies A = \{CCC, CCK, KCC, KCK\}$

Evento B: Pelo menos 1 cara foi obtida

$\implies B = \{CCC, CCK, CKC, CKK, KCC, KCK, KKC\} \implies P(B) = \frac{n(B)}{n(\Omega)} = \frac{7}{8}$

$A \cap B = \{CCC, CCK, KCC, KCK\} \implies P(A \cap B) = \frac{n(A\cap B)}{n(\Omega)} = \frac{4}{8}$

$$P(A/B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = \frac{\frac{4}{8}}{\frac{7}{8}} = \frac{4}{7} \approx 0{,}571 \approx 57{,}1\%$$

Seção 2.8, Exercício 6 Para ter acesso às informações de sua conta bancária, um usuário utiliza um terminal de computador, no qual ele deverá digitar seu código secreto, formado por quatro dígitos, numa determinada ordem. O usuário não se lembra exatamente do código secreto, mas lembra que o código não tem dígitos repetidos, os dígitos estão em ordem crescente e o número formado pelos dígitos é maior que 4000.

[7]:
```
codigos_possiveis = [];
for codigo in range(4001, 10000):
    digitos = [int(d) for d in str(codigo)]
    if digitos[0] < digitos[1] and digitos[1] < digitos[2] and digitos[2] <␣
 ↪digitos[3]:
        codigos_possiveis.append(codigo)

print('Código possíveis:', codigos_possiveis)
print('Total de códigos possíveis:', len(codigos_possiveis))
```

```
Código possíveis: [4567, 4568, 4569, 4578, 4579, 4589, 4678, 4679, 4689, 4789,
5678, 5679, 5689, 5789, 6789]
Total de códigos possíveis: 15
```

Espaço Amostral: $\Omega = \{4567, 4568, 4569, 4578, 4579, 4589, 4678, 4679, 4689, 4789, 5678, 5679, 5689, 5789, 6789\}$

$n(\Omega) = 15$

---

a) Qual é a probabilidade de ele digitar o código corretamente na 1^a tentativa?

Evento A: digitar o código correto na 1^a tentativa $\implies n(A) = 1$

$$P(A) = \frac{n(A)}{n(\Omega)} = \frac{1}{15} \approx 0{,}0667 \approx 6{,}67\%$$

---

b) Tendo errado em duas tentativas, qual é a probabilidade de ele acertar o código na terceira tentativa?

Considerando que o usuário não irá repetir os códigos das tentativas anteriores, o número de códigos possíveis passa a ser de 13. Portanto, $n(\Omega) = 13$

$$P(B) = \frac{n(B)}{n(\Omega)} = \frac{1}{13} \approx 0{,}0769 \approx 7{,}69\%$$

Seção 2.9, Exercício 2 Uma caixa contém exatamente 7 parafusos: 4 de aço e 3 de ferro. Retira-se ao caso um parafuso da caixa, registra-se o metal de que é feito, e repõe-se o parafuso na caixa. A seguir retira-se, novamente ao acaso, outro parafuso da caixa registrando o metal que o compõe. Calcular a probabilidade de:

a) Sair o primeiro parafuso de aço e o segundo de ferro.

Como é feita a reposição do parafuso antes da próxima retirada, temos que:

$$P = \frac{n(\text{aço})}{n(\Omega)} \times \frac{n(\text{ferro})}{n(\Omega)} = \frac{4}{7} \times \frac{3}{7} = \frac{12}{49} \approx 0{,}2449 \approx 24{,}49\%$$

---

b) Saírem 2 parafusos de metais diferentes.

Neste caso, temos duas sequências possíveis:

Primeiro de aço e segundo de ferro: $P_1 = \dfrac{n(\text{aço})}{n(\Omega)} \times \dfrac{n(\text{ferro})}{n(\Omega)} = \dfrac{4}{7} \times \dfrac{3}{7} = \dfrac{12}{49}$

Primeiro de ferro e segundo de aço: $P_2 = \dfrac{n(\text{ferro})}{n(\Omega)} \times \dfrac{n(\text{aço})}{n(\Omega)} = \dfrac{3}{7} \times \dfrac{4}{7} = \dfrac{12}{49}$

Portanto,

$$P = P_1 + P_2 = \frac{12}{49} + \frac{12}{49} = \frac{24}{49} \approx 0{,}4898 \approx 48{,}98\%$$

Seção 2.9, Exercício 4 Uma caixa de joias contém exatamente 5 pérolas falsas e 6 pérolas verdadeiras. Retirando simultaneamente 4 pérolas dessa urna, calcule a probabilidade de obter:

a) 3 verdadeiras e 1 falsa.

$$P(A) = \frac{n(A)}{n(\Omega)} = \frac{C_{6,3}.C_{5,1}}{C_{11,4}} = \frac{\frac{6.5.4.3!}{3.2.1.3!} \cdot \frac{5.4!}{4!}}{\frac{11.10.9.8.7!}{4.3.2.1.7!}} = \frac{20.5}{330} = \frac{10}{33} \approx 0{,}303 \approx 30{,}3\%$$

---

b) todas verdadeiras.

$$P(B) = \frac{n(B)}{n(\Omega)} = \frac{C_{6,4}}{C_{11,4}} = \frac{15}{330} = \frac{1}{22} \approx 0{,}045 \approx 4{,}5\%$$

---

c) pelo menos uma falsa.

“Pelo menos uma falsa” é o evento complementar de “Todas Verdadeiras”. Portanto,

$$P(C) = 1 - P(B) = 1 - \frac{1}{22} = \frac{21}{22} \approx 0{,}955 \approx 95{,}5\%$$