Pós-Graduação em Ciência de Dados

Professora Cecília Pereira de Andrade

e

Professor Ricardo Sovat

INSTITUTO FEDERAL DE EDUCAÇÃO, CIÊNCIA E TECNOLOGIA
SÃO PAULO
Campus Campinas

Mudança de base

Mudança de base

- Sejam A e B bases de V. Vamos relacionar as coordenadas de v na base A com as coordenadas de v na base B

- Vamos assumir dim V=3.

- $A = \{v_1, v_2, v_3\}$ e $B = \{w_1, w_2, w_3\}$

Mudança de base

- $v = x_1v_1 + x_2v_2 + x_3v_3$
- ou $v_A = (x_1, x_2, x_3)$
- $v = y_1w_1 + y_2w_2 + y_3w_3$
- ou $v_B = (y_1, y_2, y_3)$

Mudança de base

- Os vetores de A podem ser escritos em relação à B

$v_1 = a_{11}w_1 + a_{21}w_2 + a_{31}w_3$

$v_2 = a_{12}w_1 + a_{22}w_2 + a_{32}w_3$

$v_3 = a_{13}w_1 + a_{23}w_2 + a_{33}w_3$

Mudança de base

- Substituindo em $v = x_1v_1 + x_2v_2 + x_3v_3$

$$v = x_1(a_{11}w_1 + a_{21}w_2 + a_{31}w_3) + x_2(a_{12}w_1 + a_{22}w_2 + a_{32}w_3) + x_3(a_{13}w_1 + a_{23}w_2 + a_{33}w_3)$$

- ou

$$v = w_1(a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3) + w_2(a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3) + w_3(a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3)$$

Mudança de base

- Comparando

$$v = w_1(a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3) + w_2(a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3) + w_3(a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3)$$

com $v = y_1w_1 + y_2w_2 + y_3w_3$:

- $y_1 = a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3$
- $y_2 = a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3$
- $y_1 = a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3$

Mudança de base

- Matricialmente:

$$\begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}$$

- Simbolicamente:

$$[v]_B = [I]_B^A [v]_A$$

Mudança de base

$$[I]_B^A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}$$

$$\begin{array}{ccc} \uparrow & \uparrow & \uparrow \\ [v_1]_B & [v_2]_B & [v_3]_B \end{array}$$

é chamada **matriz de mudança de base** de A para B ou **matriz de transição** de A para B.

- $[I]_B^A$ é o operador identidade considerado nas bases A e B.

Mudança de base

- $[I]_B^A$ leva vetores LI de A em vetores LI de B, portanto, é invertível. Logo,

De $[v]_B=[I]_B^A[v]_A$

temos $[v]_A=\left([I]_B^A\right)^{-1}[v]_B$

e portanto $\left([I]_B^A\right)^{-1}=[I]_A^B$

Mudança de base

- Exemplo: Consideremos as bases do $\mathbb{R}^2$

$A=\{v_1,v_2\}$, com $v_1=(2,-1)$, $v_2=(-1,1)$
e $B=\{w_1,w_2\}$, sendo $w_1=(1,0)$ e $w_2=(2,1)$.

a) Determinar a matriz mudança de base de A para B.

b) Utilizar a matriz $[I]_B^A$ para calcular $[v]_B$, sabendo que $[v]_A = \begin{bmatrix} 4 \\ 3 \end{bmatrix}$.

Mudança de base

a) $[I]_B^A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}$

$\qquad\qquad\quad\uparrow \qquad\quad \uparrow$

$\qquad\qquad [v_1]_B \quad [v_2]_B$

- Expressando os vetores de A em relação à B:

$v_1 = (2,-1) = a_{11}(1,0) + a_{21}(2,1)$ e portanto $[v_1]_B = \begin{bmatrix} 4 \\ -1 \end{bmatrix}$.

Mudança de base

v_2= (-1,1) = a_{12}(1,0) + a_{22}(2,1) e portanto $[v_2]_B$ = $\begin{bmatrix} -3 \\ 1 \end{bmatrix}$.

Logo, $[I]_B^A = \begin{bmatrix} 4 & -3 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$.

Mudança de base

b) Sabendo que $[v]_B=[I]_B^A[v]_A$ e $[v]_A = \begin{bmatrix} 4 \\ 3 \end{bmatrix}$

$$[v]_B = \begin{bmatrix} 4 & -3 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 4 \\ 3 \end{bmatrix}$$

Portanto, $[v]_B = \begin{bmatrix} 7 \\ -1 \end{bmatrix}$.

Matriz-Mudança de base (outra maneira)

- Considere as bases $A=\{v_1,v_2\}$, com $v_1=(2,-1)$, $v_2=(-1,1)$ e $B=\{w_1,w_2\}$, sendo $w_1=(1,0)$ e $w_2=(2,1)$ e seja $C=\{(1,0),\ (0,1)\}$.

$$[I]_C^A = \begin{array}{c} \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \\ \begin{array}{cc} \uparrow & \uparrow \\ v_1 & v_2 \end{array} \end{array}$$

pois $(2,-1) = 2(1,0) - 1(0,1)$ e $(-1,1) = -1(1,0)+1(0,1)$

Matriz-Mudança de base (outra maneira)

- De maneira análoga,

$$[I]_C^B = \begin{array}{c} \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \\ \uparrow \quad \uparrow \\ w_1 \quad w_2 \end{array}$$

pois $(1,0) = 1(1,0) + 0(0,1)$ e $(2,1) = 2(1,0)+1(0,1)$

- Chamemos $[I]_C^A = A$ e $[I]_C^B = B$.

Matriz-Mudança de base (outra maneira)

- $[I]_A^B = [I \circ I]_A^B = [I]_B^C [I]_C^A = ([I]_C^B)^{-1} [I]_C^A = B^{-1}A$

- Para as bases A e B dadas

$$[I]_A^B = B^{-1}A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 4 & -3 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$$

Matrizes Semelhantes

- Seja T: $V \rightarrow V$. Se A e B são bases de V e $[T]_A$ e $[T]_B$ as matrizes que representam o operador T nas bases A e B, então

$$[T]_B = ([I]_A^B)^{-1}[T]_A[I]_A^B$$

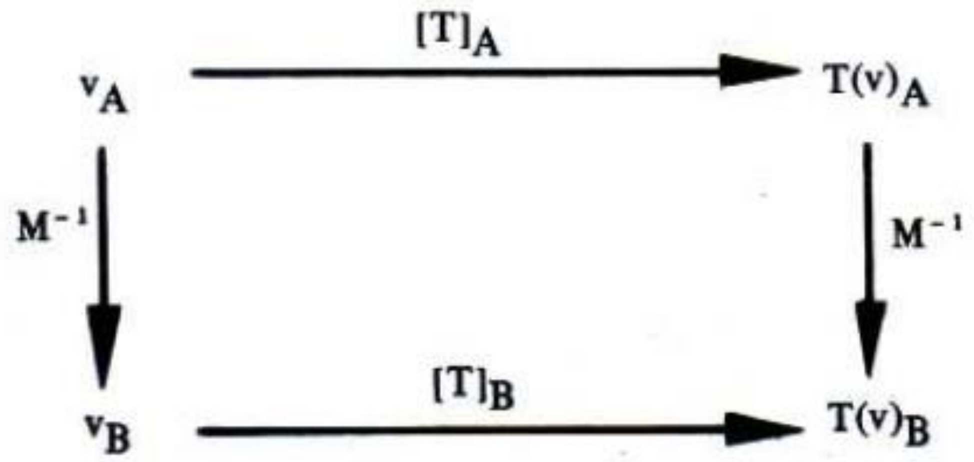
As matrizes $[T]_A$ e $[T]_B$ são chamadas **semelhantes**.

Matrizes Semelhantes

- Duas matrizes $[T]_A$ e $[T]_B$ são semelhantes quando definem em V um mesmo operador linear T.

- Mais precisamente, $[T]_A$ e $[T]_B$ são semelhantes se existe uma matriz invertível M tal que

$$[T]_B = M^{-1}[T]_A M$$



Matrizes Semelhantes

Exemplo: Sejam T: $\mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ e

A={(3,4), (5,7)} e B={(1,1), (-1,1)}

E seja $[T]_A = \begin{bmatrix} -2 & 4 \\ 2 & -1 \end{bmatrix}$

Calculemos $[T]_B$ pela relação $[T]_B = M^{-1}[T]_A M$,

na qual M é a matriz-mudança de base de B para A.

Matrizes Semelhantes

$$M = [I]_A^B = A^{-1}B$$

$$M = \begin{bmatrix} 3 & 5 \\ 4 & 7 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 7 & -5 \\ -4 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 12 \\ -1 & 7 \end{bmatrix}$$

e

$$M^{-1} = \begin{bmatrix} 7/2 & 6 \\ 1/2 & 1 \end{bmatrix}$$

Matrizes Semelhantes

Logo,

$$[T]_B = \begin{bmatrix} 7/2 & 6 \\ 1/2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -2 & 4 \\ 2 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 12 \\ -1 & 7 \end{bmatrix}$$

$$[T]_B = \begin{bmatrix} 5 & 8 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 12 \\ -1 & 7 \end{bmatrix}$$

$$[T]_B = \begin{bmatrix} 2 & -4 \\ 1 & -5 \end{bmatrix}$$

Autovetores e autovalores

- Sejam $T: V \to V$ um operador linear. Um vetor $v \in V$, $v \neq 0$, é **autovetor** (ou vetor próprio ou vetor característico) do operador T se existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tal que

$$T(v) = \lambda v$$

O número real λ tal que $T(v) = \lambda v$ é denominado **autovalor** (ou valor próprio ou valor característico) de T associado ao vetor próprio v.

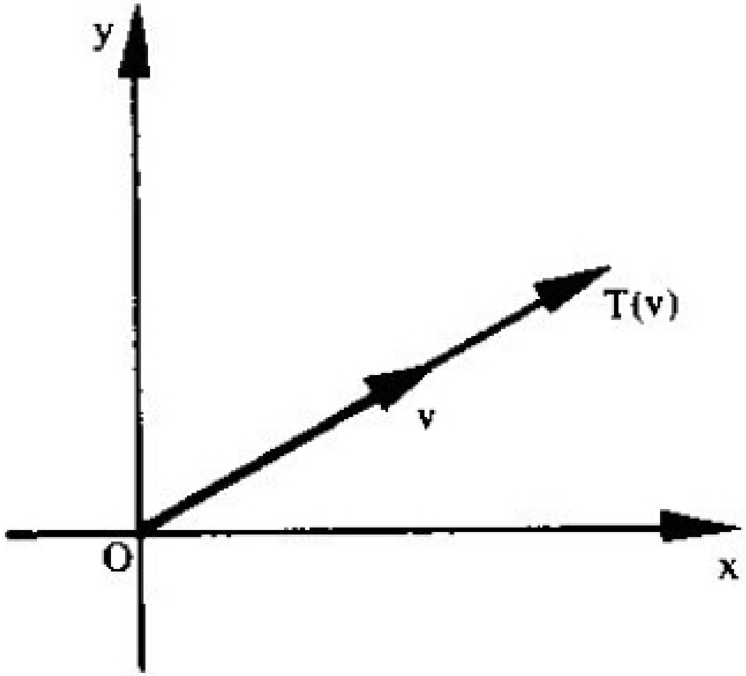
Autovetores e autovalores

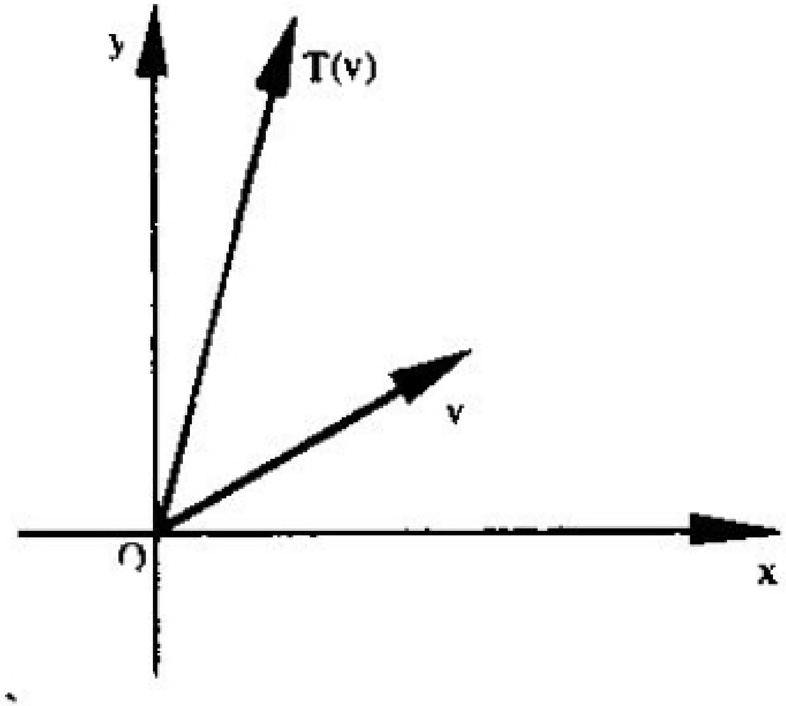
- Observações:

- No $\mathbb{R}^2$ e $\mathbb{R}^3$ no diríamos que v e T(v) têm a mesma direção.

- Dependendo do valor de λ, o operador T dilata v, contrai v, inverte o sentido de v ou o anula no caso de $\lambda = 0$.

Autovetores e autovalores





Autovetores e autovalores

- Exemplos:

- O vetor v=(5,2) é autovetor do operador T: $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, T(x,y)=(4x+5y, 2x+y) associado ao autovalor $\lambda = 6$, pois:

$$T(v)=T(5,2)=(30,12)=6(5,2)=6v.$$

- Já v=(2,1) não é autovetor de T, pois

$$T(2,1)=(13,5) \neq \lambda(2,1), \text{ para todo } \lambda \in \mathbb{R}.$$

Determinação de autovetores e autovalores

- Seja o operador T: $\mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, cuja matriz canônica é:

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}$$

isto é, A=[T].

- $A.v = \lambda v$ ou $Av - \lambda v = 0$.

Determinação de autovetores e autovalores

- Como v=Iv, Podemos escrever Av - λIv = 0

ou (A - λI)v = 0

- Para que

$$v = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} \neq \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

deve-se ter

det (A - λI) = 0.

Determinação de autovetores e autovalores

- Ou

$$\det\left(\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \lambda & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & \lambda \end{bmatrix}\right) = 0$$

ou ainda

$$\det\begin{bmatrix} a_{11}-\lambda & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22}-\lambda & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33}-\lambda \end{bmatrix} = 0$$

Determinação de autovetores e autovalores

- A equação det $(A - \lambda I) = 0$ é denominada **equação característica** do operador T ou da matriz A.

- Suas raízes são os autovalores do operador T ou da matriz A.

- O determinante det $(A - \lambda I)$ é um polinômio em λ denominado **polinômio característico**.

Determinação de autovetores e autovalores

- A substituição de λ pelos seus valores no sistema homogêneo de equações lineares

$$(A - \lambda I)v = 0$$

permite determinar os autovetores associados.

Determinação de autovetores e autovalores

- Exemplo: Determinar os autovalores e autovetores da matriz A = $\begin{bmatrix} 4 & 5 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$.

A equação característica de A é

det (A - λI) $= \begin{vmatrix} 4-\lambda & 5 \\ 2 & 1-\lambda \end{vmatrix} = 0$

isto é, $(4-\lambda)(1-\lambda) - 10 = 0$

Determinação de autovetores e autovalores

Ou

$$4 - 4\lambda - \lambda - \lambda^2 - 10 = 0$$

$$\lambda^2 - 5\lambda - 6 = 0$$

As raízes da equação (autovalores) são:

$$\lambda_1 = 6 \text{ e } \lambda_2 = -1$$

Determinação de autovetores e autovalores

O sistema que permite o cálculo dos autovetores é

$$(A - \lambda I)v = 0$$

Considere v = $\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$

O sistema fica: $\begin{bmatrix} 4-\lambda & 5 \\ 2 & 1-\lambda \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$

Determinação de autovetores e autovalores

Substituindo λ por 6, teremos os autovetores associados ao autovalor λ_1=6.

$$\begin{bmatrix} -2 & 5 \\ 2 & -5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Isto é, $\begin{cases} -2x + 5y = 0 \\ 2x - 5y = 0 \end{cases}$

cuja solução é y=2/5x.

Determinação de autovetores e autovalores

- Vetores do tipo $v_1=(x,2/5x)$ ou $v_1= x(1,2/5)$, $x \neq 0$, ou ainda $v_1=x(5,2)$ são autovetores associados ao autovalor $\lambda_1=6$.

Determinação de autovetores e autovalores

Substituindo λ por -1, teremos os autovetores associados ao autovalor λ_2=-1.

$$\begin{bmatrix} 5 & 5 \\ 2 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Isto é, $\begin{cases} 5x + 5y = 0 \\ 2x + 2y = 0 \end{cases}$

cuja solução é y=-x.

Determinação de autovetores e autovalores

- Vetores do tipo $v_2=(x,-x)$ ou $v_2= x(1,-1)$, $x \neq 0$, são autovetores associados ao autovalor $\lambda_2=-1$.

Propriedades dos autovetores e autovalores

- Se v é um autovetor associado ao autovalor λ de um operador linear T, o vetor αv, para qualquer real $\alpha \neq 0$, é também autovetor de T associado ao mesmo autovalor λ.

- Tendo em vista que αv é autovetor associado ao autovalor λ, fazendo $\alpha = \frac{1}{|v|}$ pode-se obter o autovetor unitário associado ao autovalor λ.

Propriedades dos autovetores e autovalores

- Se λ é um autovalor de um operador linear $T:V \rightarrow V$, o conjunto S_λ de todos os vetores v $\in$ V, inclusive o vetor nulo, associados ao autovalor λ é um subespaço vetorial de V.

- $S_\lambda = \{v \in V \mid T(v) = \lambda v\}$ é denominado **subespaço associado ao autovalor** λ ou **espaço característico** de T correspondente a λ ou *auto-espaço* associado a λ.

Propriedades dos autovetores e autovalores

- Matrizes semelhantes têm o mesmo polinômimo característico e, por isso, os mesmos autovalores.

- Autovetores associados a autovalores distintos de um operador $T: V \rightarrow V$ são linearmente independentes.

Propriedades dos autovetores e autovalores

- Se $T: V \rightarrow V$ é linear, $\dim V = n$ e T possui n autovalores distintos, o conjunto $\{v_1, v_2, \dots v_n\}$, formado pelos autovetores correspondentes, é uma base de V.

Diagonalização

- A matriz quadrada A é **diagonalizável** se existe uma matriz P invertível tal que $P^{-1}AP$ seja diagonal.

- Dizemos que P diagonaliza A ou que p a matriz diagonalizadora.

- P é a matriz composta dos autovetores distintos.

Diagonalização

- Exemplo: Determinar uma matriz P que diagonalize $A=\begin{bmatrix} 3 & -1 & 1 \\ -1 & 5 & -1 \\ 1 & -1 & 3 \end{bmatrix}$ e calcular $P^{-1}AP$.

Temos que os auvalores e autovetores são $\lambda_1=2$ e $v_1=(1,0,-1)$, $\lambda_2=3$ e $v_2=(1,1,1)$ e $\lambda_3=6$ e $v_3=(1,-2,1)$.

Diagonalização

Como os λ_i são distintos, o conjuto $P=\{v_1, v_2, v_3\}$ forma uma base do $\mathbb{R}^3$ e, portanto, a matriz

$$P=\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -2 \\ -1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$ diagonaliza A.

Diagonalização

$$P^{-1}AP = \begin{bmatrix} 1/2 & 0 & -1/2 \\ 1/3 & 1/3 & 1/3 \\ 1/6 & -1/3 & 1/6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 & -1 & 1 \\ -1 & 5 & -1 \\ 1 & -1 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -2 \\ -1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$P^{-1}AP = \begin{bmatrix} 1/2 & 0 & -1/2 \\ 1/3 & 1/3 & 1/3 \\ 1/6 & -1/3 & 1/6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 3 & 6 \\ 0 & 3 & -12 \\ -2 & 3 & 6 \end{bmatrix}$$

$$P^{-1}AP = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 6 \end{bmatrix} = D$$