Determinantes e Sistemas Lineares

8 de junho de 2021

Determinantes

O determinante de uma matriz é um escalar (número) obtido dos elementos da matriz, mediante operações específicas.

Determinantes

O determinante de uma matriz é um escalar (número) obtido dos elementos da matriz, mediante operações específicas.

Os determinantes são definidos somente para matrizes quadradas.

DETERMINANTES

O determinante de uma matriz é um escalar (número) obtido dos elementos da matriz, mediante operações específicas.

Os determinantes são definidos somente para matrizes quadradas.

$$\mathbf{det}A = |A| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{vmatrix}.$$

Determinante de 1ª ordem

O determinante da matriz $A = [a_{11}]$ é dado por **det** $A = a_{11}$.

CÁLCULO DE DETERMINANTES

Determinante de 1ª ordem

O determinante da matriz $A = [a_{11}]$ é dado por $\mathbf{det}\, A = a_{11}$.

Exemplo: $A = [-8] \Rightarrow \mathbf{det}\, A = -8$.

Cálculo de determinantes

Determinante de 1ª ordem

O determinante da matriz $A = [a_{11}]$ é dado por $\mathbf{det}\, A = a_{11}$.

Exemplo: $A = [-8] \Rightarrow \mathbf{det}\, A = -8$.

Determinante de 2ª ordem

$$\mathbf{det}\, A = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}.a_{22} - a_{12}.a_{21}.$$

Cálculo de determinantes

Determinante de 1ª ordem

O determinante da matriz $A = [a_{11}]$ é dado por $\mathbf{det}\, A = a_{11}$.

Exemplo: $A = [-8] \Rightarrow \mathbf{det}\, A = -8$.

Determinante de 2ª ordem

$$\mathbf{det}\, A = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}.a_{22} - a_{12}.a_{21}.$$

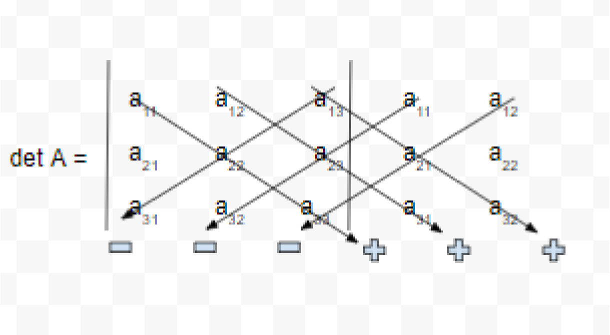
Exemplo:

$$A = \begin{bmatrix} 6 & -3 \\ 5 & -1 \end{bmatrix} \Rightarrow \mathbf{det}\, A = \begin{vmatrix} 6 & -3 \\ 5 & -1 \end{vmatrix} = 6.(-1) - (-3).5 = 9.$$

Cálculo de determinantes

Determinante de 3ª ordem: Regra de Sarrus

Figura: *Regra de Sarrus*

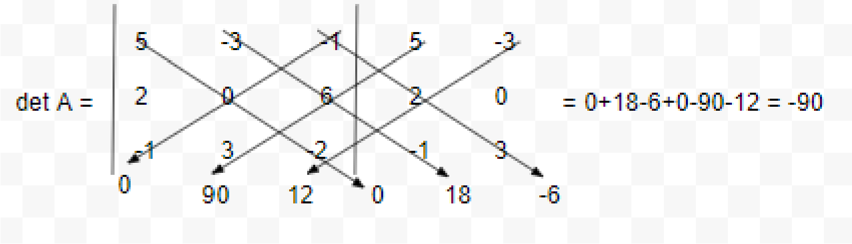


Fonte: elaborado pelo autor

Exemplo: Seja $A = \begin{bmatrix} 5 & -3 & -1 \\ 2 & 0 & 6 \\ -1 & 3 & -2 \end{bmatrix}$.

CÁLCULO DE DETERMINANTES

Figura: *Exemplo da Regra de Sarrus*



Fonte: elaborado pelo autor

Teorema de Laplace

Determinantes de matrizes de ordem superior a 3 serão aqui resolvidos por um procedimento conhecido como expansão de cofatores. Seja $A = [a_{ij}]_{n \times n}$. Eliminando-se a i-ésima linha e a j-ésima coluna da matriz, obtém-se outra matriz, de ordem $(n-1) \times (n-1)$, representada por $A = [a_{ij}]_{(n-1) \times (n-1)}$. O determinante dessa matriz é denominado *menor* ou *menor principal* ou *menor complementar* da matriz A. O escalar $C_{ij} = (-1)^{i+j}.|M_{ij}|$ é chamado *cofator* da matriz A.

EXEMPLO 1:

Seja $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$. Os cofatores relativos a todos os elementos dessa matriz são:

Exemplo 1:

Seja $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$. Os cofatores relativos a todos os elementos dessa matriz são:

$C_{11} = (-1)^{1+1}.|4| = 4;$

EXEMPLO 1:

Seja $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$. Os cofatores relativos a todos os elementos dessa matriz são:

$C_{11} = (-1)^{1+1}.|4| = 4;$

$C_{12} = (-1)^{1+2}.|3| = -3;$

Exemplo 1:

Seja $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$. Os cofatores relativos a todos os elementos dessa matriz são:

$C_{11} = (-1)^{1+1}.|4| = 4;$

$C_{12} = (-1)^{1+2}.|3| = -3;$

$C_{21} = (-1)^{2+1}.|4| = -2;$

Exemplo 1:

Seja $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$. Os cofatores relativos a todos os elementos dessa matriz são:

$C_{11} = (-1)^{1+1}.|4| = 4;$

$C_{12} = (-1)^{1+2}.|3| = -3;$

$C_{21} = (-1)^{2+1}.|4| = -2;$

$C_{22} = (-1)^{2+2}.|1| = 1.$

EXEMPLO 2:

Seja $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{bmatrix}$. Os cofatores relativos a todos os elementos dessa matriz são:

EXEMPLO 2:

Seja $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{bmatrix}$. Os cofatores relativos a todos os elementos dessa matriz são:

$C_{11} = (-1)^{1+1}.\begin{vmatrix} 5 & 6 \\ 8 & 9 \end{vmatrix} = 1.(43 - 48) = -3$; $C_{12} = (-1)^{1+2}.\begin{vmatrix} 4 & 6 \\ 7 & 9 \end{vmatrix} = -1.(36 - 42) = 6$;

EXEMPLO 2:

Seja $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{bmatrix}$. Os cofatores relativos a todos os elementos dessa matriz são:

$C_{11} = (-1)^{1+1}.\begin{vmatrix} 5 & 6 \\ 8 & 9 \end{vmatrix} = 1.(43 - 48) = -3; C_{12} = (-1)^{1+2}.\begin{vmatrix} 4 & 6 \\ 7 & 9 \end{vmatrix} = -1.(36 - 42) = 6;$

$C_{13} = (-1)^{1+3}.\begin{vmatrix} 4 & 5 \\ 7 & 8 \end{vmatrix} = 1.(32 - 35) = -3; C_{21} = (-1)^{2+1}.\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 8 & 9 \end{vmatrix} = -1.(18 - 24) = 6;$

Exemplo 2:

Seja $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{bmatrix}$. Os cofatores relativos a todos os elementos dessa matriz são:

$C_{11} = (-1)^{1+1}.\begin{vmatrix} 5 & 6 \\ 8 & 9 \end{vmatrix} = 1.(43 - 48) = -3$; $C_{12} = (-1)^{1+2}.\begin{vmatrix} 4 & 6 \\ 7 & 9 \end{vmatrix} = -1.(36 - 42) = 6$;

$C_{13} = (-1)^{1+3}.\begin{vmatrix} 4 & 5 \\ 7 & 8 \end{vmatrix} = 1.(32 - 35) = -3$; $C_{21} = (-1)^{2+1}.\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 8 & 9 \end{vmatrix} = -1.(18 - 24) = 6$;

$C_{22} = (-1)^{2+2}.\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 7 & 9 \end{vmatrix} = 1.(9 - 21) = -12$; $C_{23} = (-1)^{2+3}.\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 7 & 8 \end{vmatrix} = -1.(8 - 14) = 6$;

Exemplo 2:

Seja $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{bmatrix}$. Os cofatores relativos a todos os elementos dessa matriz são:

$C_{11} = (-1)^{1+1}.\begin{vmatrix} 5 & 6 \\ 8 & 9 \end{vmatrix} = 1.(43-48) = -3; C_{12} = (-1)^{1+2}.\begin{vmatrix} 4 & 6 \\ 7 & 9 \end{vmatrix} = -1.(36-42) = 6;$

$C_{13} = (-1)^{1+3}.\begin{vmatrix} 4 & 5 \\ 7 & 8 \end{vmatrix} = 1.(32-35) = -3; C_{21} = (-1)^{2+1}.\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 8 & 9 \end{vmatrix} = -1.(18-24) = 6;$

$C_{22} = (-1)^{2+2}.\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 7 & 9 \end{vmatrix} = 1.(9-21) = -12; C_{23} = (-1)^{2+3}.\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 7 & 8 \end{vmatrix} = -1.(8-14) = 6;$

$C_{31} = (-1)^{3+1}.\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 5 & 6 \end{vmatrix} = 1.(12-15) = -3; C_{32} = (-1)^{3+2}.\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 4 & 6 \end{vmatrix} = -1.(6-12) = 6;$

EXEMPLO 2:

Seja $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{bmatrix}$. Os cofatores relativos a todos os elementos dessa matriz são:

$C_{11} = (-1)^{1+1}.\begin{vmatrix} 5 & 6 \\ 8 & 9 \end{vmatrix} = 1.(43 - 48) = -3; C_{12} = (-1)^{1+2}.\begin{vmatrix} 4 & 6 \\ 7 & 9 \end{vmatrix} = -1.(36 - 42) = 6;$

$C_{13} = (-1)^{1+3}.\begin{vmatrix} 4 & 5 \\ 7 & 8 \end{vmatrix} = 1.(32 - 35) = -3; C_{21} = (-1)^{2+1}.\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 8 & 9 \end{vmatrix} = -1.(18 - 24) = 6;$

$C_{22} = (-1)^{2+2}.\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 7 & 9 \end{vmatrix} = 1.(9 - 21) = -12; C_{23} = (-1)^{2+3}.\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 7 & 8 \end{vmatrix} = -1.(8 - 14) = 6;$

$C_{31} = (-1)^{3+1}.\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 5 & 6 \end{vmatrix} = 1.(12 - 15) = -3; C_{32} = (-1)^{3+2}.\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 4 & 6 \end{vmatrix} = -1.(6 - 12) = 6;$

$C_{33} = (-1)^{3+3}.\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 5 \end{vmatrix} = 1.(5 - 8) = -3.$

EXEMPLO 2:

Seja $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{bmatrix}$. Os cofatores relativos a todos os elementos dessa matriz são:

$C_{11} = (-1)^{1+1} . \begin{vmatrix} 5 & 6 \\ 8 & 9 \end{vmatrix} = 1.(43 - 48) = -3$; $C_{12} = (-1)^{1+2} . \begin{vmatrix} 4 & 6 \\ 7 & 9 \end{vmatrix} = -1.(36 - 42) = 6$;

$C_{13} = (-1)^{1+3} . \begin{vmatrix} 4 & 5 \\ 7 & 8 \end{vmatrix} = 1.(32 - 35) = -3$; $C_{21} = (-1)^{2+1} . \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 8 & 9 \end{vmatrix} = -1.(18 - 24) = 6$;

$C_{22} = (-1)^{2+2} . \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 7 & 9 \end{vmatrix} = 1.(9 - 21) = -12$; $C_{23} = (-1)^{2+3} . \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 7 & 8 \end{vmatrix} = -1.(8 - 14) = 6$;

$C_{31} = (-1)^{3+1} . \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 5 & 6 \end{vmatrix} = 1.(12 - 15) = -3$; $C_{32} = (-1)^{3+2} . \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 4 & 6 \end{vmatrix} = -1.(6 - 12) = 6$;

$C_{33} = (-1)^{3+3} . \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 5 \end{vmatrix} = 1.(5 - 8) = -3.$

Matriz dos cofatores $C = \begin{bmatrix} -3 & 6 & -3 \\ 6 & -12 & 6 \\ -3 & 6 & -3 \end{bmatrix}$.

Determinante via Laplace

O determinante de uma matriz quadrada $A = [a_{ij}]_{n \times n}$, com $n \geq 2$, pode ser obtido pela soma dos produtos dos elementos de uma linha ou coluna da matriz A multiplicada pelos respectivos cofatores, isto é:

a) Fixando a coluna j, temos $\mathbf{det}\, A = \sum_{i=1}^{n} a_{ij}.C_{ij}$.

b) Fixando a linha i, temos $\mathbf{det}\, A = \sum_{j=1}^{n} a_{ij}.C_{ij}$.

EXEMPLO:

Seja $A = \begin{bmatrix} 6 & 1 & 0 \\ -2 & 3 & 4 \\ 5 & 2 & -3 \end{bmatrix}$. Fixemos, por exemplo, a 1^{a} linha.

EXEMPLO:

Seja $A = \begin{bmatrix} 6 & 1 & 0 \\ -2 & 3 & 4 \\ 5 & 2 & -3 \end{bmatrix}$. Fixemos, por exemplo, a 1^{a} linha.

det $A = \sum_{j=1}^{3} a_{1j}.C_{1j} = a_{11}.C_{11} + a_{12}.C_{12} + a_{13}.C_{13}$, em que $a_{11} = 6$, $a_{12} = 1$ e $a_{13} = 0$.

EXEMPLO:

Seja $A = \begin{bmatrix} 6 & 1 & 0 \\ -2 & 3 & 4 \\ 5 & 2 & -3 \end{bmatrix}$. Fixemos, por exemplo, a 1^{a} linha.

$\mathbf{det}\, A = \sum_{j=1}^{3} a_{1j}.C_{1j} = a_{11}.C_{11} + a_{12}.C_{12} + a_{13}.C_{13}$, em que $a_{11} = 6$, $a_{12} = 1$ e $a_{13} = 0$.

Retirando a primeira linha e a primeira coluna, $C_{11} = (-1)^{1+1}. \begin{vmatrix} 3 & 4 \\ 2 & -3 \end{vmatrix} = 1.(-9 - 8) = -17.$

EXEMPLO:

Seja $A = \begin{bmatrix} 6 & 1 & 0 \\ -2 & 3 & 4 \\ 5 & 2 & -3 \end{bmatrix}$. Fixemos, por exemplo, a 1^{a} linha.

det $A = \sum_{j=1}^{3} a_{1j}.C_{1j} = a_{11}.C_{11} + a_{12}.C_{12} + a_{13}.C_{13}$, em que $a_{11} = 6$, $a_{12} = 1$ e $a_{13} = 0$.

Retirando a primeira linha e a primeira coluna, $C_{11} = (-1)^{1+1}. \begin{vmatrix} 3 & 4 \\ 2 & -3 \end{vmatrix} = 1.(-9-8) = -17$.

Retirando a primeira linha e a segunda coluna, $C_{12} = (-1)^{1+2}. \begin{vmatrix} -2 & 4 \\ 5 & -3 \end{vmatrix} = -1.(6-20) = 14$.

EXEMPLO:

Seja $A = \begin{bmatrix} 6 & 1 & 0 \\ -2 & 3 & 4 \\ 5 & 2 & -3 \end{bmatrix}$. Fixemos, por exemplo, a 1^{a} linha.

det $A = \sum_{j=1}^{3} a_{1j}.C_{1j} = a_{11}.C_{11} + a_{12}.C_{12} + a_{13}.C_{13}$, em que $a_{11} = 6$, $a_{12} = 1$ e $a_{13} = 0$.

Retirando a primeira linha e a primeira coluna, $C_{11} = (-1)^{1+1}.\begin{vmatrix} 3 & 4 \\ 2 & -3 \end{vmatrix} = 1.(-9-8) = -17$.

Retirando a primeira linha e a segunda coluna, $C_{12} = (-1)^{1+2}.\begin{vmatrix} -2 & 4 \\ 5 & -3 \end{vmatrix} = -1.(6-20) = 14$.

Retirando a primeira linha e a terceira coluna, $C_{13} = (-1)^{1+3}.\begin{vmatrix} -2 & 3 \\ 5 & 2 \end{vmatrix} = 1.(-4-15) = -19$.

EXEMPLO:

Seja $A = \begin{bmatrix} 6 & 1 & 0 \\ -2 & 3 & 4 \\ 5 & 2 & -3 \end{bmatrix}$. Fixemos, por exemplo, a 1^{a} linha.

$\textbf{det}\, A = \sum_{j=1}^{3} a_{1j}.C_{1j} = a_{11}.C_{11} + a_{12}.C_{12} + a_{13}.C_{13}$, em que $a_{11} = 6$, $a_{12} = 1$ e $a_{13} = 0$.

Retirando a primeira linha e a primeira coluna, $C_{11} = (-1)^{1+1}.\begin{vmatrix} 3 & 4 \\ 2 & -3 \end{vmatrix} = 1.(-9-8) = -17$.

Retirando a primeira linha e a segunda coluna, $C_{12} = (-1)^{1+2}.\begin{vmatrix} -2 & 4 \\ 5 & -3 \end{vmatrix} = -1.(6-20) = 14$.

Retirando a primeira linha e a terceira coluna, $C_{13} = (-1)^{1+3}.\begin{vmatrix} -2 & 3 \\ 5 & 2 \end{vmatrix} = 1.(-4-15) = -19$.

Daí, $\textbf{det}\, A = 6.(-17) + 1.14 + 0.(-19) = -109 + 14 + 0 = -88$.

Regra de Chió

Calcula o determinante de uma matriz de ordem n através de uma matriz de ordem $n - 1$ (uma ordem abaixo).

REGRA DE CHIÓ

Calcula o determinante de uma matriz de ordem n através de uma matriz de ordem $n-1$ (uma ordem abaixo).

Condição: o elemento a_{11} deve ser igual a 1.

Regra de Chió

Calcula o determinante de uma matriz de ordem n através de uma matriz de ordem $n-1$ (uma ordem abaixo).

Condição: o elemento a_{11} deve ser igual a 1.

A regra de Chió é dada da seguinte forma:

- suprima a primeira linha e a primeira coluna da matriz.
- sos elementos que restaram na matriz, subtraia o produto dos dois elementos suprimidos (um da linha e o outro da coluna) correspondente a este elemento restante.
- com os resultados das subtrações realizadas no passo anterior, será obtida uma nova matriz, com ordem menor, entretanto com determinante igual à matriz original.

EXEMPLO:

Calcule o determinante da matriz $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 5 & 3 & 2 \\ 1 & 3 & 7 & 3 & 4 \\ 0 & 5 & 2 & 2 & 1 \\ 1 & 3 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 6 & 7 & 4 & 7 \end{bmatrix}$.

$$\mathbf{det}\, A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 5 & 3 & 2 \\ 1 & 3 & 7 & 3 & 4 \\ 0 & 5 & 2 & 2 & 1 \\ 1 & 3 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 6 & 7 & 4 & 7 \end{pmatrix} = \mathbf{det} \begin{pmatrix} 3-1.2 & 7-1.5 & 3-1.3 & 4-1.2 \\ 5-0.2 & 2-0.5 & 2-0.3 & 1-0.2 \\ 3-1.2 & 0-1.5 & 1-1.3 & 2-1.2 \\ 6-0.2 & 7-0.5 & 4-0.3 & 7-0.2 \end{pmatrix} =$$

$$\mathbf{det} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 2 \\ 5 & 2 & 2 & 1 \\ 1 & -5 & -2 & 0 \\ 6 & 7 & 4 & 7 \end{pmatrix}.$$

EXEMPLO:

Calcule o determinante da matriz $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 5 & 3 & 2 \\ 1 & 3 & 7 & 3 & 4 \\ 0 & 5 & 2 & 2 & 1 \\ 1 & 3 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 6 & 7 & 4 & 7 \end{bmatrix}$.

$$\mathbf{det}\, A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 5 & 3 & 2 \\ 1 & 3 & 7 & 3 & 4 \\ 0 & 5 & 2 & 2 & 1 \\ 1 & 3 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 6 & 7 & 4 & 7 \end{pmatrix} = \mathbf{det} \begin{pmatrix} 3-1.2 & 7-1.5 & 3-1.3 & 4-1.2 \\ 5-0.2 & 2-0.5 & 2-0.3 & 1-0.2 \\ 3-1.2 & 0-1.5 & 1-1.3 & 2-1.2 \\ 6-0.2 & 7-0.5 & 4-0.3 & 7-0.2 \end{pmatrix} =$$

$$\mathbf{det} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 2 \\ 5 & 2 & 2 & 1 \\ 1 & -5 & -2 & 0 \\ 6 & 7 & 4 & 7 \end{pmatrix}.$$

$$\mathbf{det} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 2 \\ 5 & 2 & 2 & 1 \\ 1 & -5 & -2 & 0 \\ 6 & 7 & 4 & 7 \end{pmatrix} = \mathbf{det} \begin{pmatrix} 2-5.2 & 2-5.0 & 1-5.2 \\ -5-1.2 & -2-1.0 & 0-1.2 \\ 7-6.2 & 4-6.0 & 7-6.2 \end{pmatrix} =$$

$$\mathbf{det} \begin{pmatrix} -8 & 2 & -9 \\ -7 & -2 & -2 \\ -5 & 4 & -5 \end{pmatrix}.$$

EXEMPLO:

Calcule o determinante da matriz $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 5 & 3 & 2 \\ 1 & 3 & 7 & 3 & 4 \\ 0 & 5 & 2 & 2 & 1 \\ 1 & 3 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 6 & 7 & 4 & 7 \end{bmatrix}$.

$$\mathbf{det}\, A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 5 & 3 & 2 \\ 1 & 3 & 7 & 3 & 4 \\ 0 & 5 & 2 & 2 & 1 \\ 1 & 3 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 6 & 7 & 4 & 7 \end{pmatrix} = \mathbf{det} \begin{pmatrix} 3-1.2 & 7-1.5 & 3-1.3 & 4-1.2 \\ 5-0.2 & 2-0.5 & 2-0.3 & 1-0.2 \\ 3-1.2 & 0-1.5 & 1-1.3 & 2-1.2 \\ 6-0.2 & 7-0.5 & 4-0.3 & 7-0.2 \end{pmatrix} =$$

$$\mathbf{det} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 2 \\ 5 & 2 & 2 & 1 \\ 1 & -5 & -2 & 0 \\ 6 & 7 & 4 & 7 \end{pmatrix}.$$

$$\mathbf{det} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 2 \\ 5 & 2 & 2 & 1 \\ 1 & -5 & -2 & 0 \\ 6 & 7 & 4 & 7 \end{pmatrix} = \mathbf{det} \begin{pmatrix} 2-5.2 & 2-5.0 & 1-5.2 \\ -5-1.2 & -2-1.0 & 0-1.2 \\ 7-6.2 & 4-6.0 & 7-6.2 \end{pmatrix} =$$

$$\mathbf{det} \begin{pmatrix} -8 & 2 & -9 \\ -7 & -2 & -2 \\ -5 & 4 & -5 \end{pmatrix}.$$

$$\mathbf{det} \begin{pmatrix} -8 & 2 & -9 \\ -7 & -2 & -2 \\ -5 & 4 & -5 \end{pmatrix} = 148$$

Propriedades:

1. Quando todos os elementos de uma linha ou coluna são nulos, o determinante dessa matriz será zero.

Exemplo: $\det \begin{pmatrix} a & b & c \\ 0 & 0 & 0 \\ g & h & i \end{pmatrix} = 0$

PROPRIEDADES:

1. Quando todos os elementos de uma linha ou coluna são nulos, o determinante dessa matriz será zero.

   Exemplo: det $\begin{pmatrix} a & b & c \\ 0 & 0 & 0 \\ g & h & i \end{pmatrix} = 0$

2. Quando trocamos a posição de duas linhas (ou colunas) paralelas o determinante muda de sinal.

   Exemplo: Se $\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ -1 & 4 \end{vmatrix} = 11$, então $\begin{vmatrix} -1 & 4 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} = -11$, uma vez que a primeira linha foi trocada com a segunda.

PROPRIEDADES:

1. Quando duas linhas ou colunas são iguais, o determinante dessa matriz será zero.

   Exemplo: $A = \begin{pmatrix} a & b & c \\ 0 & 0 & 0 \\ a & b & c \end{pmatrix}. \Rightarrow \mathbf{det}\, A = 0.$

Propriedades:

1. Quando duas linhas ou colunas são iguais, o determinante dessa matriz será zero.

   Exemplo: $A = \begin{pmatrix} a & b & c \\ 0 & 0 & 0 \\ a & b & c \end{pmatrix}$. $\Rightarrow$ $\mathbf{det}\, A = 0$.

2. $\mathbf{det}\, B = k.\mathbf{det}\, A$.

   Exemplo: Seja $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 4 & 3 \end{pmatrix}$. Temos que $\mathbf{det}\, A = 10$. Vamos multiplicar por 4 a segunda coluna de A, obtendo $B = \begin{pmatrix} 2 & -4 \\ 4 & 12 \end{pmatrix}$. Assim, $\mathbf{det}\, B = 40$ que é equivalente a $\mathbf{det}\, B = 4.\mathbf{det}\, A$.

PROPRIEDADES:

1. Quando duas linhas ou colunas são proporcionais (uma múltipla da outra), o determinante dessa matriz será zero.

   Exemplo: Seja $A = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 2 \\ 5 & 4 & 1 \\ 18 & -6 & 12 \end{pmatrix}$. Note que a terceira linha é igual à primeira linha multiplicada por três. Logo, $\mathbf{det}\, A = 0$

Propriedades:

1. Quando duas linhas ou colunas são proporcionais (uma múltipla da outra), o determinante dessa matriz será zero.

   Exemplo: Seja $A = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 2 \\ 5 & 4 & 1 \\ 18 & -6 & 12 \end{pmatrix}$. Note que a terceira linha é igual à primeira linha multiplicada por três. Logo, $\mathbf{det}\, A = 0$

2. Teorema de Jacobi: Quando os elementos de uma linha (coluna) forem combinações lineares dos elementos correspondentes das outras linhas (colunas), o determinante dessa matriz será zero.

   Exemplo: Seja $A = \begin{pmatrix} 5 & 11 \\ -4 & 3 \end{pmatrix}$. Temos que $\mathbf{det}\, A = 59$. Vamos substituir a segunda linha de A pela soma dela com a primeira linha multiplicada por -2 e obter $B = \begin{pmatrix} 5 & 11 \\ -14 & -19 \end{pmatrix}$. Portanto, $\mathbf{det}\, B = 59$.

PROPRIEDADES:

1. O determinante de uma matriz e o de sua transposta são iguais.

   Exemplo: Seja $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$. Temos que $\mathbf{det}\, A = -6$. Transpondo a matriz A temos que $A^T = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 0 \end{pmatrix}$ e portanto $\mathbf{det}\, A^T = -6$.

Propriedades:

1. O determinante de uma matriz e o de sua transposta são iguais.

   Exemplo: Seja $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$. Temos que $\mathbf{det}\, A = -6$. Transpondo a matriz A temos que $A^T = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 0 \end{pmatrix}$ e portanto $\mathbf{det}\, A^T = -6$.

2. Teorema de Binet: $\mathbf{det}\,(A.B) = (\mathbf{det}\, A).(\mathbf{det}\, B)$

   Conclui-se que: $\mathbf{det}\,(A^{-1}) = \dfrac{1}{\mathbf{det}\, A}$, pois $A.A^{-1} = I_n$.

   Exemplo: Seja $A = \begin{pmatrix} 6 & 2 \\ -1 & 4 \end{pmatrix}$ e $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -3 & 2 \end{pmatrix}$. Temos que $\mathbf{det}\, A = 26$ e $\mathbf{det}\, B = 2$. Fazendo o produto das duas matrizes, temos $A.B = \begin{pmatrix} 0 & 4 \\ -13 & 8 \end{pmatrix}$ e $\mathbf{det}\, A.B = 58$. Por outro lado, $\mathbf{det}\, A.\mathbf{det}\, B = 26.2 = 58$. Portanto, $\mathbf{det}\, A.B = \mathbf{det}\, A.\mathbf{det}\, B$.

PROPRIEDADES:

1. Seja $A = [a_{ij}]_{n\times n}$ e $k \in \mathbb{R}$. $\mathbf{det}\,(k.A) = k^n.\mathbf{det}\,(A)$.

   Exemplo: Seja $A = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$. Temos que $\mathbf{det}\, A = 7$.
   Vamos multiplicar a matriz A por 3, obtendo
   $B = \begin{pmatrix} 9 & 3 \\ -3 & 6 \end{pmatrix}$, cujo determinante é 63.
   Note que $\mathbf{det}\, B = 63 = 9.7 = 3^2.7$, em que, de acordo com a propriedade, temos a ordem da matriz $n = 2$ e $k = 3$.

PROPRIEDADES:

1. Seja $A = [a_{ij}]_{n \times n}$ e $k \in \mathbb{R}$. $\mathbf{det}\ (k.A) = k^n.\mathbf{det}\ (A)$.

   Exemplo: Seja $A = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$. Temos que $\mathbf{det}\ A = 7$.
   Vamos multiplicar a matriz A por 3, obtendo
   $B = \begin{pmatrix} 9 & 3 \\ -3 & 6 \end{pmatrix}$, cujo determinante é 63.
   Note que $\mathbf{det}\ B = 63 = 9.7 = 3^2.7$, em que, de acordo com a propriedade, temos a ordem da matriz $n = 2$ e $k = 3$.

2. O determinante de uma matriz triangular é o produto dos elementos da diagonal principal.

   Exemplo: Exemplo: Seja $A = \begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & b & 0 \\ 0 & 0 & c \end{pmatrix}$. Assim,

   $\mathbf{det}\ A = a.b.c.$

MATRIZ INVERSA VIA MATRIZ DOS COFATORES

Para calcular a matriz inversa de uma matriz A $n \times n$, usando cofatores, primeiro calculamos todos os cofatores e depois montamos uma matriz,e em que cada cofator ocupe a posição de índice equivalente.

$$cof(A) = \begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} & \dots & C_{1n} \\ C_{21} & C_{22} & \dots & C_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ C_{n1} & C_{n2} & \dots & C_{nn} \end{bmatrix}.$$

Matriz inversa via matriz dos cofatores

Para calcular a matriz inversa de uma matriz A $n \times n$, usando cofatores, primeiro calculamos todos os cofatores e depois montamos uma matriz,e em que cada cofator ocupe a posição de índice equivalente.

$$cof(A) = \begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} & \dots & C_{1n} \\ C_{21} & C_{22} & \dots & C_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ C_{n1} & C_{n2} & \dots & C_{nn} \end{bmatrix}.$$

Portanto, a matriz inversa de A é dada por

$$A^{-1} = \frac{(cof(A))^t}{\mathbf{det}\,(A)}.$$

Sistemas Lineares

Equação linear

Equação linear: $a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = b$.

Equação linear

Equação linear: $a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = b$.

Informalmente, são equações em que a variável tem expoente igual a um e não existe produto entre variáveis.

Equação linear

Equação linear: $a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = b$.

Informalmente, são equações em que a variável tem expoente igual a um e não existe produto entre variáveis.

Exemplo: $3x_1 + 4x_2 - 5x_3 - x_4 = 5$.

Equação linear

Equação linear: $a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = b$.

Informalmente, são equações em que a variável tem expoente igual a um e não existe produto entre variáveis.

Exemplo: $3x_1 + 4x_2 - 5x_3 - x_4 = 5$.

Observação: Note que não são lineares as equações:
$2x_1^2 + 4x_2 - x_3 = 0;\ 2x_1x_2 + x_3 - x_4 = 0;\ x_1 + \sqrt{x_2} - x_3 = 4$.

Equação linear

Equação linear: $a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = b$.

Informalmente, são equações em que a variável tem expoente igual a um e não existe produto entre variáveis.

Exemplo: $3x_1 + 4x_2 - 5x_3 - x_4 = 5$.

Observação: Note que não são lineares as equações:
$2x_1^2 + 4x_2 - x_3 = 0;\ 2x_1x_2 + x_3 - x_4 = 0;\ x_1 + \sqrt{x_2} - x_3 = 4$.

$(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n)$ é uma solução da equação linear $a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = b$ se $a_{11}\alpha_1 + a_{12}\alpha_2 + \ldots + a_{1n}\alpha_n = b$ for uma sentença verdadeira.

Equação linear

Equação linear: $a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = b$.

Informalmente, são equações em que a variável tem expoente igual a um e não existe produto entre variáveis.

Exemplo: $3x_1 + 4x_2 - 5x_3 - x_4 = 5$.

Observação: Note que não são lineares as equações:
$2x_1^2 + 4x_2 - x_3 = 0;\ 2x_1x_2 + x_3 - x_4 = 0;\ x_1 + \sqrt{x_2} - x_3 = 4$.

$(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n)$ é uma solução da equação linear $a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = b$ se $a_{11}\alpha_1 + a_{12}\alpha_2 + \ldots + a_{1n}\alpha_n = b$ for uma sentença verdadeira.

Exemplo: Seja $2x_1 + 3x_2 - x_3 + x_4 = 3$. A sequência $(1,2,3,-2)$ é solução, pois $2.(-1) + 3.(2) - (3) + (-2) = 3$ é sentença verdadeira, porém a sequência (1,1,2,1) não é solução, pois $2.(1) + 3.(1) - (2) + (1) = 3$ é sentença falsa.

Sistema linear

É um conjunto de $m (m \geq 1)$ equações lineares, nas incógnitas $x_1, x_2, \ldots, x_n$.

$$S = \left\{ \begin{array}{ccccccccc} a_{11}x_1 & + & a_{12}x_2 & + & \ldots & + & a_{1n}x_n & = & b_1 \\ a_{21}x_1 & + & a_{22}x_2 & + & \ldots & + & a_{2n}x_n & = & b_2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1}x_1 & + & a_{m2}x_2 & + & \ldots & + & a_{mn}x_n & = & b_m \end{array} \right.$$

Sistema linear

É um conjunto de $m(m \geq 1)$ equações lineares, nas incógnitas $x_1, x_2, \ldots, x_n$.

$$S = \left\{ \begin{array}{ccccccccc} a_{11}x_1 & + & a_{12}x_2 & + & \ldots & + & a_{1n}x_n & = & b_1 \\ a_{21}x_1 & + & a_{22}x_2 & + & \ldots & + & a_{2n}x_n & = & b_2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1}x_1 & + & a_{m2}x_2 & + & \ldots & + & a_{mn}x_n & = & b_m \end{array} \right.$$

Forma matricial:

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \ldots & a_{mn} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{bmatrix}.$$

Sistema linear

É um conjunto de $m(m \geq 1)$ equações lineares, nas incógnitas $x_1, x_2, \ldots, x_n$.

$$S = \left\{ \begin{array}{ccccccccc} a_{11}x_1 & + & a_{12}x_2 & + & \ldots & + & a_{1n}x_n & = & b_1 \\ a_{21}x_1 & + & a_{22}x_2 & + & \ldots & + & a_{2n}x_n & = & b_2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1}x_1 & + & a_{m2}x_2 & + & \ldots & + & a_{mn}x_n & = & b_m \end{array} \right.$$

Forma matricial:

$$\left[\begin{array}{cccc} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \ldots & a_{mn} \end{array} \right] . \left[\begin{array}{c} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{array} \right] = \left[\begin{array}{c} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{array} \right].$$

EXEMPLO:

O sistema linear $S = \left\{ \begin{array}{ccccc} 2x & + & 3y & = & 4 \\ x & - & y & = & 2 \end{array} \right.$ pode ser escrito na forma matricial $\begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 \\ 2 \end{bmatrix}$.

Solução de um sistema linear

Dizemos que a sequência ou ênupla ordenada de números reais $(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n)$ é solução de um sistema linear S, se for solução de *todas* as equações de S, isto é,

$$\begin{array}{ccccccccccc}
a_{11}\alpha_1 & + & a_{12}\alpha_2 & + & \ldots & + & a_{1n}\alpha_n & = & b_1 & \text{sentença} & \text{verdadeira} \\
a_{21}\alpha_1 & + & a_{22}\alpha_2 & + & \ldots & + & a_{2n}\alpha_n & = & b_2 & \text{sentença} & \text{verdadeira} \\
\vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & & \\
a_{m1}\alpha_1 & + & a_{m2}\alpha_2 & + & \ldots & + & a_{mn}\alpha_n & = & b_m & \text{sentença} & \text{verdadeira}
\end{array}$$

Solução de um sistema linear

Dizemos que a sequência ou ênupla ordenada de números reais $(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n)$ é solução de um sistema linear S, se for solução de *todas* as equações de S, isto é,

$$\begin{array}{ccccccccccl} a_{11}\alpha_1 & + & a_{12}\alpha_2 & + & \ldots & + & a_{1n}\alpha_n & = & b_1 & \text{sentença verdadeira} \\ a_{21}\alpha_1 & + & a_{22}\alpha_2 & + & \ldots & + & a_{2n}\alpha_n & = & b_2 & \text{sentença verdadeira} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \\ a_{m1}\alpha_1 & + & a_{m2}\alpha_2 & + & \ldots & + & a_{mn}\alpha_n & = & b_m & \text{sentença verdadeira} \end{array}$$

EXEMPLOS:

1. O sistema $S = \begin{cases} x & + & y & + & z & = & 6 \\ 2x & + & y & - & z & = & 1 \\ 3x & - & y & + & z & = & 4 \end{cases}$ admite como solução a tripla ordenada (1,2,3), pois

$$\begin{array}{ccccccccl} 1 & + & 2 & + & 3 & = & 6 & \text{sentença verdadeira} \\ 2.1 & + & 2 & - & 3 & = & 1 & \text{sentença verdadeira} \\ 3.1 & - & 2 & + & 3 & = & 4 & \text{sentença verdadeira} \end{array}.$$

Exemplos:

1. O sistema $S = \begin{cases} x + y + z = 6 \\ 2x + y - z = 1 \\ 3x - y + z = 4 \end{cases}$ admite como solução a tripla ordenada (1,2,3), pois

$$\begin{array}{ccccccccl} 1 & + & 2 & + & 3 & = & 6 & \text{sentença verdadeira} \\ 2.1 & + & 2 & - & 3 & = & 1 & \text{sentença verdadeira} \\ 3.1 & - & 2 & + & 3 & = & 4 & \text{sentença verdadeira} \end{array}.$$

S não admite, porém, como solução, a tripla $(-5,11,0)$, pois

$$\begin{array}{ccccccccl} -5 & + & 11 & + & 0 & = & 6 & \text{sentença verdadeira} \\ 2.(-5) & + & 11 & - & 0 & = & 1 & \text{sentença verdadeira} \\ 3.(-5) & - & 11 & + & 0 & = & 4 & \text{sentença falsa} \end{array}.$$

EXEMPLOS:

1. O sistema $S = \left\{ \begin{array}{ccccccc} x & + & y & + & z & = & 6 \\ 2x & + & y & - & z & = & 1 \\ 3x & - & y & + & z & = & 4 \end{array} \right.$ admite como solução a tripla ordenada (1,2,3), pois

$$\begin{array}{cccccccl} 1 & + & 2 & + & 3 & = & 6 & \text{sentença verdadeira} \\ 2.1 & + & 2 & - & 3 & = & 1 & \text{sentença verdadeira} \\ 3.1 & - & 2 & + & 3 & = & 4 & \text{sentença verdadeira} \end{array}.$$

   S não admite, porém, como solução, a tripla $(-5,11,0)$, pois

$$\begin{array}{cccccccl} -5 & + & 11 & + & 0 & = & 6 & \text{sentença verdadeira} \\ 2.(-5) & + & 11 & - & 0 & = & 1 & \text{sentença verdadeira} \\ 3.(-5) & - & 11 & + & 0 & = & 4 & \text{sentença falsa} \end{array}.$$

2. O sistema linear $S = \left\{ \begin{array}{ccccccc} x & + & 2y & + & 3z & = & 5 \\ x & - & y & + & 4z & = & 1 \\ 0x & + & 0y & + & 0z & = & 6 \end{array} \right.$ não admite solução, pois a última equação não é satisfeita por nenhuma tripla $(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$

Classificação

Se um sistema linear S tiver uma única solução, dizemos que ele é *possível* ou *compatível* e *determinado*.

Se ele admitir várias soluções, ele é *possível* ou *compatível* e *indeterminado*.

Se ele não admitir solução, ele é *impossível* ou *incompatível*.

Fazer essa classificação é o mesmo que discutir um sistema linear.

Classificação

Se um sistema linear S tiver uma única solução, dizemos que ele é *possível* ou *compatível* e *determinado*.

Se ele admitir várias soluções, ele é *possível* ou *compatível* e *indeterminado*.

Se ele não admitir solução, ele é *impossível* ou *incompatível*.

Fazer essa classificação é o mesmo que discutir um sistema linear.

Sistema linear homogêneo

Chamamos de *sistema linear homogêneo* todo aquele em que o termo independente de todas as equações vale zero.

Exemplos:

1. $S_1 = \left\{ \begin{array}{ccccccc} x & + & y & + & z & = & 0 \\ 2x & - & y & + & z & = & 0 \end{array} \right. .$

Sistema linear homogêneo

Chamamos de *sistema linear homogêneo* todo aquele em que o termo independente de todas as equações vale zero.

Exemplos:

1. $S_1 = \begin{cases} x + y + z = 0 \\ 2x - y + z = 0 \end{cases}.$

2. $S_2 = \begin{cases} 3x + 4y + z - t = 0 \\ 3x - y - 3z = 0 \\ x + 2y + z - 3t = 0 \\ 4x - z + t = 0 \end{cases}.$

Um sistema linear homogêneo admite sempre como solução a sequência $(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n)$ em que $\alpha_i = 0,\ \forall i \in \{1,2,3,\ldots,n\}$, chamada *solução nula, trivial ou imprópria*.

Matrizes de um sistema

Dado um sistema linear S de m equações e n incógnitas, consideremos as matrizes:

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix} \text{ e}$$

$$B = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} & b_2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} & b_m \end{bmatrix}.$$

A é chamada *matriz incompleta* do sistema e B, *matriz completa* ou *matriz ampliada*. Notemos que B foi obtida a partir de A, acrescentando-se a esta a coluna formada pelos termos independentes das equações do sistema.

Exemplo:

Seja $S = \left\{ \begin{array}{rcrcr} 2x & + & y & = & 3 \\ x & - & y & = & 4 \end{array} \right.$. Então $A = \left[\begin{array}{cc} 2 & 1 \\ 1 & -1 \end{array} \right]$ e $B = \left[\begin{array}{ccc} 2 & 1 & 3 \\ 1 & -1 & 4 \end{array} \right]$.

Sistemas lineares 2×2

Um sistema linear 2×2, nas incógnitas x e y, é um conjunto de duas equações lineares em que x e y são as incógnitas de cada uma dessas equações.

Sistemas lineares 2×2

Um sistema linear 2×2, nas incógnitas x e y, é um conjunto de duas equações lineares em que x e y são as incógnitas de cada uma dessas equações.

Método da Adição

Considere o sistema linear $S = \left\{ \begin{array}{rcrcr} 3x & + & 2y & = & 30 \\ 2x & + & y & = & 17 \end{array} \right.$.

$$\left\{ \begin{array}{rcrcr} 3x & + & 2y & = & 30 \\ -4x & - & 2y & = & -34 \end{array} \right. \Rightarrow \left\{ \begin{array}{rcrcrl} 3x & + & \cancel{2y} & = & 30 & \\ -4x & - & \cancel{2y} & = & -34 & \oplus \\ \hline -x & & & = & -4 & \end{array} \right.$$

Logo, $x = 4$. Substituindo em qualquer uma das equações anteriores, achamos y:

$3x + 2y = 30 \Rightarrow 3.4 + 2y = 30 \Rightarrow 2y = 18 \Rightarrow y = 9.$

Observe que $x = 4$ e $y = 9$ satisfazem simultaneamente as duas equações e portanto, o conjunto solução do sistema é: $S = \{(4, 9)\}$.

Método da substituição

Primeiro escolhemos uma das equações e nela isolamos uma das variáveis. Vamos escolher a segunda equação e isolar o valor de y: $y = 17 - 2x$.

Daí, pegamos o valor isolado e substituímos na outra equação, para achar a variável faltante.

$$3x + 2.(17 - 2x) = 30 \Rightarrow -x + 34 = 30 \Rightarrow x = 4.$$

Por fim, substituímos o valor de x encontrado na equação em que isolamos y para determinar o seu valor, ou seja:

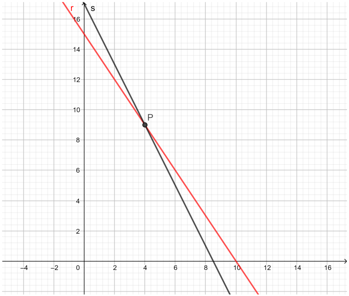
$$y = 17 - 2x \Rightarrow y = 17 - 2.4 = 9.$$

Portanto, encontramos o conjunto solução $S = \{(4, 9)\}$.

INTERPRETAÇÃO GEOMÉTRICA E CLASSIFICAÇÃO

A equação linear $3x + 2y = 30$ é equivalente a $y = \dfrac{30 - 3x}{2} = 15 - \dfrac{3}{2}$, (r) e $2x + y = 17$ equivale a $y = -2x + 17$, (s).

Figura: *Sistema Possível e Determinado*



Fonte: elaborado pelo autor

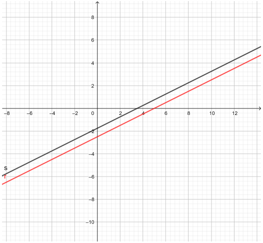
Dizemos que o **sistema é possível e determinado (S.P.D.).**

Seja o sistema $S = \begin{cases} x & - & 2y & = & 5 \\ 2x & - & 4y & = & 7 \end{cases}$.

$$\begin{cases} x & - & 2y & = & 5 & .(-2) \\ 2x & - & 4y & = & 7 & \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \cancel{-2x} & + & \cancel{4y} & = & -10 & \\ \cancel{2x} & - & \cancel{4y} & = & 7 & \oplus \\ \hline 0.x & + & 0.y & = & -3 & \end{cases}.$$

Graficamente, $y = \dfrac{x-5}{2}$ e $y = \dfrac{2x-7}{4}$ têm por gráficos retas paralelas distintas.

Figura: *Sistema Imossível*



Fonte: elaborado pelo autor

Dizemos que o **sistema é impossível e indicamos por S.I** e $S = \emptyset$.

Seja $S = \left\{ \begin{array}{rcrcr} x & + & y & = & 1 \\ 2x & + & 2y & = & 2 \end{array} \right.$. Usando o método da adição, obtemos:

$$\left\{ \begin{array}{rcrcrl} x & + & y & = & 1 & .(-2) \\ 2x & + & 2y & = & 2 & \end{array} \right. \Rightarrow$$

$$\left\{ \begin{array}{rcrcrl} \cancel{-2x} & - & \cancel{2y} & = & -2 & \\ \cancel{2x} & + & \cancel{2y} & = & 2 & \oplus \\ \hline 0.x & + & 0.y & = & 0 (\text{ou } 0 = 0) & \end{array} \right. .$$

Seja $S = \left\{ \begin{array}{ccccc} x & + & y & = & 1 \\ 2x & + & 2y & = & 2 \end{array} \right.$. Usando o método da adição, obtemos:

$$\left\{ \begin{array}{cccccc} x & + & y & = & 1 & .(-2) \\ 2x & + & 2y & = & 2 & \end{array} \right. \Rightarrow$$

$$\left\{ \begin{array}{cccccc} \cancel{-2x} & - & \cancel{2y} & = & -2 & \\ \cancel{2x} & + & \cancel{2y} & = & 2 & \oplus \\ \hline 0.x & + & 0.y & = & 0 (\text{ou } 0 = 0) & \end{array} \right. .$$

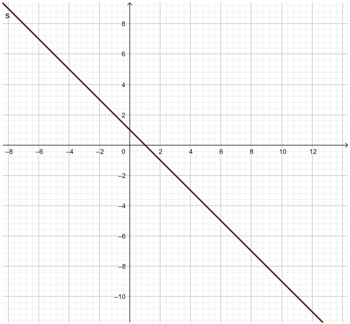
O sistema proposto se reduz à equação $x + y = 1$, que possui infinitas soluções, por exemplo: $(0, 1); (2, -1); (1, 0); (25, 6)$ etc.

Expressando-se y em função de x, obtemos $y = 1 - x$ e, deste modo, todo par ordenado da forma $(x, 1 - x)$, em que $x \in \mathbb{R}$, é solução do sistema e escrevemos: $S = \{(x, 1 - x); x \in \mathbb{R}\}$.

Nesse caso, dizemos que o **sistema é possível e indeterminado (S.P.I.)**.

Geometricamente, as funções do 1º grau dadas por $y = -x + 1$ e $y = \dfrac{-2x+2}{2} = \dfrac{2(-x+1)}{2} = -x + 1$ têm por gráficos retas coincidentes e, portanto, possuem como interseção todos os pontos de r. Como r tem infinitos pontos, o sistema admite infinitas soluções.

Figura: *Sistema Possível e Indeterminado*



Fonte: elaborado pelo autor

Teorema de Cramer

Consideremos um sistema linear em que o número de equações é igual ao número de incógnitas (isto é, $m = n$). Nessas condições, A é matriz quadrada; seja $D = \mathbf{det}\ (A)$.

Teorema: Seja S um sistema linear com número de equações igual ao de incógnitas. Se $D = \mathbf{det}\ S \neq 0$, então o sistema será possível e terá solução única $(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n)$, tal que

$$\alpha_i = \frac{D_i}{D},\ \forall i \in \{1{,}2, \ldots ,n\}$$

em que D_i é o determinante da matriz obtida de S, substituindo-se a i-ésima coluna pela coluna dos termos independentes das equações do sistema.

Se $D \neq 0$, o sistema é possível e determinado; se $D = 0$, o sistema ou possui infinitas soluções ou não tem solução.

EXEMPLO:

Seja o sistema $\left\{\begin{array}{ccccccc} x & + & y & + & z & = & 6 \\ x & - & y & - & z & = & -4 \\ 2x & - & y & + & z & = & 1 \end{array}\right.$. Temos

$$D = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & -1 \\ 2 & -1 & 1 \end{vmatrix} = -4 \neq 0.$$

Logo, o sistema tem solução única. Determinemos essa solução:

$D_1 = \begin{vmatrix} 6 & 1 & 1 \\ -4 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \end{vmatrix} = -4,\ D_2 = \begin{vmatrix} 1 & 6 & 1 \\ 1 & -4 & -1 \\ 2 & 1 & 1 \end{vmatrix} = -12,\ D_3 =$
$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 6 \\ 1 & -1 & -4 \\ 2 & -1 & 1 \end{vmatrix} = -8.$

Logo, $x = \dfrac{D_1}{D} = \dfrac{-4}{-4} = 1; y == \dfrac{D_2}{D} = \dfrac{-12}{-4} = 3; z == \dfrac{D_3}{D} = \dfrac{-8}{-4} = 2.$

Portanto, a solução única do sistema é (1,2,3).

SISTEMAS EQUIVALENTES

Dois sistemas S e S' são equivalentes quando possuem o mesmo conjunto solução($S \sim S'$). Por meio de operações matemáticas triviais, pode-se transformar um sistema complicado S em um sistema mais simples S'.

Sistemas equivalentes

Dois sistemas S e S' são equivalentes quando possuem o mesmo conjunto solução($S \sim S'$). Por meio de operações matemáticas triviais, pode-se transformar um sistema complicado S em um sistema mais simples S'.

Propriedades:

1− Trocando as posições de duas equações de S, tem-se $S \sim S'$.

Exemplo: Trocar a 1ª equação com a 3ª.

$$S = \left\{ \begin{array}{rcrcrcrl} 3x & + & y & - & z & = & 1 & (I) \\ 4x & - & 2y & + & 3z & = & 0 & (II) \\ -x & + & 3y & + & 2z & = & 3 & (III) \end{array} \right. \Rightarrow S =$$

$$\left\{ \begin{array}{rcrcrcrl} -x & + & 3y & + & 2z & = & 3 & (III) \\ 4x & - & 2y & + & 3z & = & 0 & (II) \\ 3x & + & y & - & z & = & 1 & (I) \end{array} \right.$$

$$\text{ou} \left[\begin{array}{ccc|c} 3 & 1 & -1 & 1 \\ 4 & -2 & 3 & 0 \\ -1 & 3 & 2 & 3 \end{array} \right] \sim \left[\begin{array}{ccc|c} -1 & 3 & 2 & 3 \\ 4 & -2 & 3 & 0 \\ 3 & 1 & -1 & 1 \end{array} \right].$$

2− Multiplicando-se uma ou mais equações de S, por um número real não nulo, tem-se $S \sim S'$.

Exemplo: Multiplicar a 2ª equação por 3.

$$S = \left\{ \begin{array}{rcrcrl} 3x & + & y & = & 1 & (I) \\ 4x & - & 5y & = & 3 & (II) \end{array} \right. \Rightarrow S =$$
$$\left\{ \begin{array}{rcrcrl} 3x & + & y & = & 1 & (I) \\ 12x & - & 15y & = & 9 & (II) \end{array} \right.$$

ou $\left[\begin{array}{cc|c} 3 & 1 & 1 \\ 4 & -5 & 3 \end{array} \right] \sim \left[\begin{array}{cc|c} 3 & 1 & 1 \\ 12 & -15 & 9 \end{array} \right].$

Sistemas equivalentes

3$-$ Adicionando a uma das equações de S, outra equação desse sistema, multiplicada por $k, k \in \mathbb{R}$, tem-se $S \sim S'$.

Exemplo: Adicionar a 1ª equação com o produto da 2ª por -2.

$$S = \left\{ \begin{array}{rcrcrc} -x & + & 2y & = & 1 & (I) \\ 2x & - & 5y & = & -3 & (II) \end{array} \right. \Rightarrow S = \left\{ \begin{array}{rcrcrc} -5x & + & 12y & = & 7 & (I) + (II).(-2) \\ 2x & - & 5y & = & -3 & (II) \end{array} \right.$$

$$\text{ou} \left[\begin{array}{rr|r} -1 & 2 & 1 \\ 2 & -5 & -3 \end{array} \right] \sim \left[\begin{array}{rr|r} -5 & 12 & 7 \\ 2 & -5 & -3 \end{array} \right].$$

Escalonamento de sistemas (ou matrizes)

Seja S o sistema linear, da seguinte forma:

$$S = \left\{ \begin{array}{ccccccccc} a_{11}x_1 & + & a_{12}x_2 & + & \dots & + & a_{1n}x_n & = & b_1 \\ a_{21}x_1 & + & a_{22}x_2 & + & \dots & + & a_{2n}x_n & = & b_2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1}x_1 & + & a_{m2}x_2 & + & \dots & + & a_{mn}x_n & = & b_m \end{array} \right. ,$$

onde existe, pelo menos, um coeficiente não nulo em cada equação. Se o número de coeficientes nulos, antes do primeiro coeficiente não nulo, aumenta de equação para equação, então o sistema está *escalonado* ou na *forma escada*.

Procedimentos para escalonar um sistema ou matriz

1. Colocar como 1ª equação uma das que tenha o coeficiente da 1ª incógnita diferente de zero.

Procedimentos para escalonar um sistema ou matriz

1. Colocar como 1ª equação uma das que tenha o coeficiente da 1ª incógnita diferente de zero.

2. Anular todos os coeficientes da 1ª incógnita nas demais equações, utilizando as propriedades de sistemas equivalentes.

Procedimentos para escalonar um sistema ou matriz

1. Colocar como 1ª equação uma das que tenha o coeficiente da 1ª incógnita diferente de zero.

2. Anular todos os coeficientes da 1ª incógnita nas demais equações, utilizando as propriedades de sistemas equivalentes.

3. Anular todos os coeficientes da 2ª incógnita nas equações a partir da 3ª.

Procedimentos para escalonar um sistema ou matriz

1. Colocar como 1ª equação uma das que tenha o coeficiente da 1ª incógnita diferente de zero.

2. Anular todos os coeficientes da 1ª incógnita nas demais equações, utilizando as propriedades de sistemas equivalentes.

3. Anular todos os coeficientes da 2ª incógnita nas equações a partir da 3ª.

4. Repetir esse processo com as demais incógnitas, até que o sistema se torne escalonado.

Exemplo:

$$S = \left\{ \begin{array}{rcrcr} 3x & + & y & = & 1 \\ -x & + & 5y & = & 2 \end{array} \right. \text{ ou } \left[\begin{array}{rrcr} 3 & 1 & | & 1 \\ -1 & 5 & | & 2 \end{array} \right].$$

Trocar de posição a 1ª e a 2ª equações, ou $L_1 \longleftrightarrow L_2$.

$$S = \left\{ \begin{array}{rcrcr} -x & + & 5y & = & 2 \\ 3x & + & y & = & 1 \end{array} \right. \text{ ou } \left[\begin{array}{rrcr} -1 & 5 & | & 2 \\ 3 & 1 & | & 1 \end{array} \right].$$

Substituir a 2ª equação, pela soma do produto da 1ª equação por 3 com a 2ª equação, ou $L_2 \longrightarrow L_2 + 3L_1$.

$$S = \left\{ \begin{array}{rcrcr} -x & + & 5y & = & 2 \\ & & 16y & = & 7 \end{array} \right. \text{ ou } \left[\begin{array}{rrcr} -1 & 5 & | & 2 \\ 0 & 16 & | & 7 \end{array} \right].$$

Agora que o sistema está escalonado, podemos resolvê-lo:

$16y = 7 \Rightarrow y = \dfrac{7}{16}$.

Substituindo y na 1ª equação: $-x + 5.\frac{7}{16} = 2 \Rightarrow x = \dfrac{3}{16}$ e $S = \left(\dfrac{3}{16}, \dfrac{7}{16} \right)$.

Discussão dos sistema linear

$$S = \left\{ \begin{array}{rcrcl} x & - & y & = & 2 \\ 2x & + & ay & = & b \end{array} \right.$$

Se $\mathbf{det}\, S = \left| \begin{array}{ccc} x & - & y \\ 2x & + & ay \end{array} \right| \neq 0$, pelo Teorema de Cramer o sistema tem solução única e portanto é possível e determinado.

Se $\mathbf{det}\, S = 0$, o sistema poderá ser indeterminado ou impossível.

Logo, $\mathbf{det}\, S = \left| \begin{array}{ccc} x & - & y \\ 2x & + & ay \end{array} \right| = a + 2$.

Se $\mathbf{det}\, S = a + 2 = 0$ então $a = -2$ e portanto, voltando ao sistema original, temos:

$$S = \left\{ \begin{array}{rcrcl} x & - & y & = & 2 \\ 2x & - & 2y & = & b \end{array} \right. \sim \left\{ \begin{array}{rcrcl} x & - & y & = & 2 \\ 0x & + & 0y & = & b-4 \end{array} \right.$$

Daí, se $b - 4 = 0 \Rightarrow b = 4$ então o sistema é possível e indeterminado. Se $b - 4 \neq 0 \Rightarrow b \neq 4$ então sistema é impossível.

Portanto, para $a \neq -2$, o sistema é possível e determinado.

Se $a = -2$ e $b = 4$ então o sistema é possível e indeterminado.

E se $a = -2$ e $b \neq 4$ o sistema é impossível.

Dúvidas???