Pós-Graduação em Ciência de Dados

Professora Cecília Pereira de Andrade

e

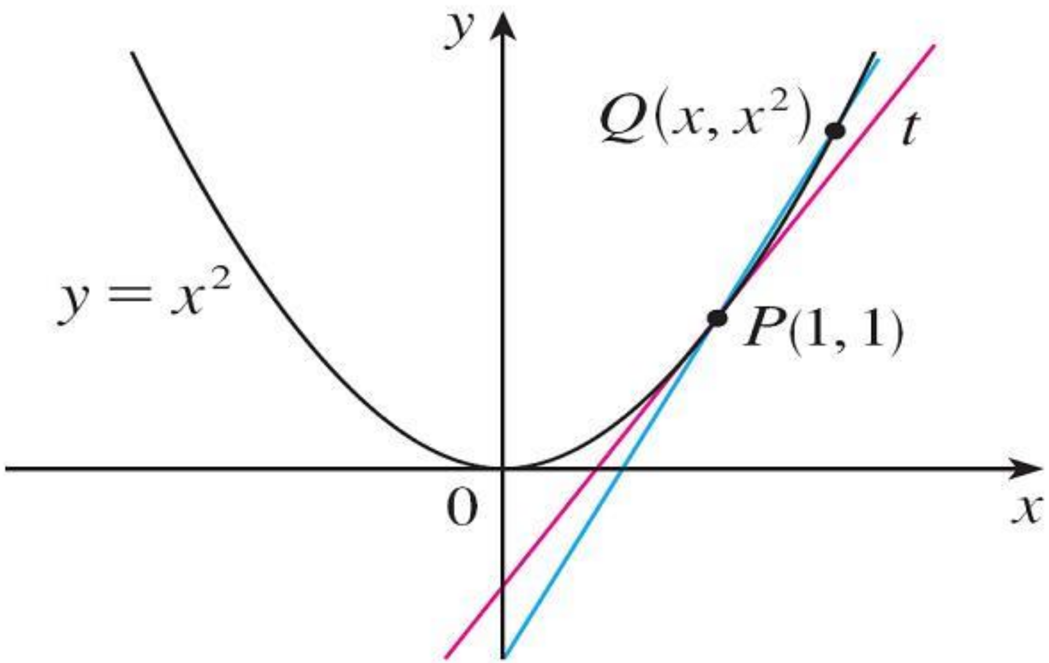
Professor Ricardo Sovat

INSTITUTO FEDERAL DE EDUCAÇÃO, CIÊNCIA E TECNOLOGIA
SÃO PAULO
Campus Campinas

Limites

O problema da tangente

Encontre uma equação da reta tangente à parábola $y = x^2$ no ponto que P (1; 1).



O problema da tangente

- Equação de uma reta :

$$y - y_1 = m(x - x_1)$$

- Coeficiente angular:

$$m = \frac{y - y_1}{x - x_1}$$

O problema da tangente

Escolhemos $x \neq 1$ para que $Q \neq P$. Então

$$m_{PQ} = \frac{x^2 - 1}{x - 1}$$

Por exemplo, para o ponto Q (1,5; 2,25), temos

$$m_{PQ} = \frac{2{,}25 - 1}{1{,}5 - 1} = \frac{1{,}25}{0{,}5} = 2{,}5$$

O problema da tangente

As tabelas a seguir mostram os valores de m_{PQ} para vários valores de x próximos a 1.

x	m_{PQ}
2	3
1,5	2,5
1,1	2,1
1,01	2,01
1,001	2,001

x	m_{PQ}
0	1
0,5	1,5
0,9	1,9
0,99	1,99
0,999	1,999

Quanto mais próximo Q estiver de P, mais próximo x estará de 1 e, e a tabela indica que m_{PQ} estará próximo de 2.

O problema da tangente

- Sugestão: inclinação da reta tangente *t* deve ser

$$m = 2.$$

- Inclinação da reta tangente é o *limite* das retas secantes

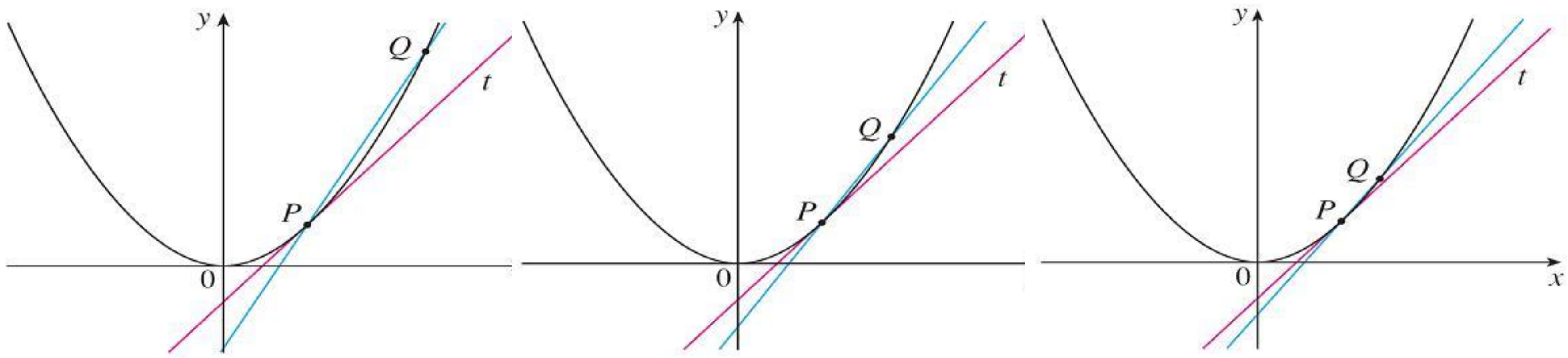
$$\lim_{Q \to P} m_{PQ} = m \quad , \quad \lim_{x \to 1} \frac{x^2 - 1}{x - 1} = 2$$

- Equação de uma reta [$y - y_1 = m(x - x_1)$] para o ponto (1; 1) temos

$$y - 1 = 2(x - 1) \quad \text{ou} \quad y = 2x - 1$$

O problema da tangente

A Figura ilustra o processo de limite que ocorre neste exemplo.



Q se aproxima de *P* pela direita

https://www.geogebra.org/m/su3mawv6

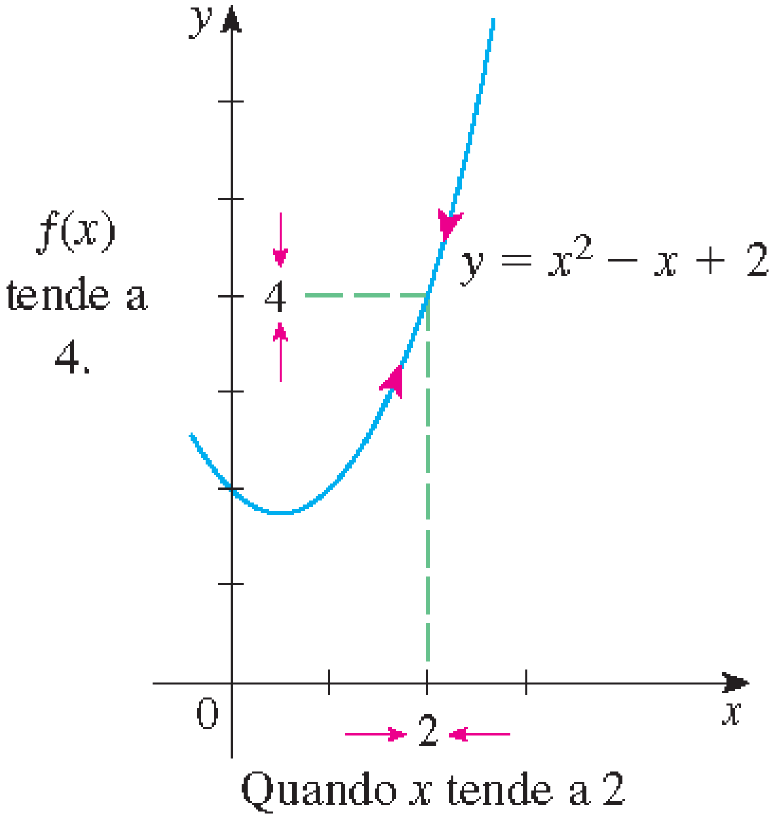
O limite de uma função

Vamos analisar o comportamento da função f definida por $f(x) = x^2 - x + 2$ para valores de x próximos de 2, mas não iguais a 2.

x	$f(x)$	x	$f(x)$
1,0	2,000000	3,0	8,000000
1,5	2,750000	2,5	5,750000
1,8	3,440000	2,2	4,640000
1,9	3,710000	2,1	4,310000
1,95	3,852500	2,05	4,152500
1,99	3,970100	2,01	4,030100
1,995	3,985025	2,005	4,015025
1,999	3,997001	2,001	4,003001

O limite de uma função

Da tabela e do gráfico de *f* abaixo, vemos que quanto mais próximo *x* estiver de 2 (de qualquer lado de 2), mais próximo *f*(*x*) estará de 4.



O limite de uma função

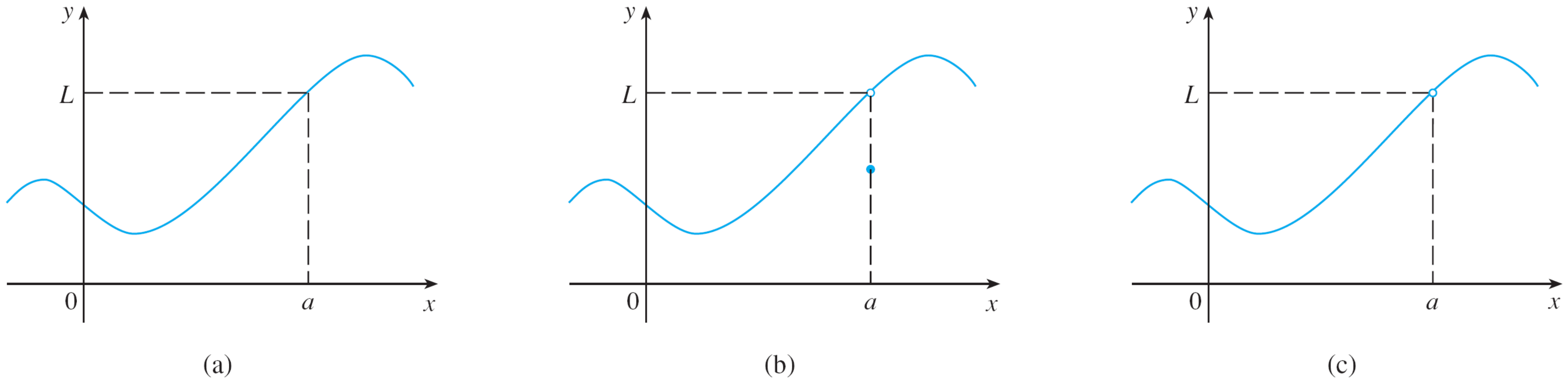
Portanto,

$$\lim_{x \to 2} (x^2 - x + 2) = 4.$$

O limite de uma função

- Notação: $\lim\limits_{(x \to a)} f(x) = L.$

- f(x) não precisa estar definida quando x = a. A única coisa que importa é como f está definida próximo de a.



$\lim\limits_{x \to a} f(x) = L$ nos três casos

Propriedades dos limites

Propriedades dos Limites Supondo que c seja uma constante e os limites

$$\lim_{x \to a} f(x) \qquad \text{e} \qquad \lim_{x \to a} g(x)$$

existam, então

1. $\lim_{x \to a} [f(x) + g(x)] = \lim_{x \to a} f(x) + \lim_{x \to a} g(x)$

2. $\lim_{x \to a} [f(x) - g(x)] = \lim_{x \to a} f(x) - \lim_{x \to a} g(x)$

3. $\lim_{x \to a} [cf(x)] = c \lim_{x \to a} f(x)$

4. $\lim_{x \to a} [f(x)g(x)] = \lim_{x \to a} f(x) \cdot \lim_{x \to a} g(x)$

5. $\lim_{x \to a} \dfrac{f(x)}{g(x)} = \dfrac{\lim_{x \to a} f(x)}{\lim_{x \to a} g(x)}$ se $\lim_{x \to a} g(x) \neq 0$

Propriedades dos limites

6. $\lim_{x \to a} [f(x)]^n = \left[\lim_{x \to a} f(x)\right]^n$ onde n é um inteiro positivo

7. $\lim_{x \to a} c = c$

8. $\lim_{x \to a} x = a$

Propriedade de Substituição Direta Se f for uma função polinomial ou racional e a estiver no domínio de f, então

$$\lim_{x \to a} f(x) = f(a).$$

As funções que possuem a essa propriedade de substituição direta são chamadas de contínuas em a.

Exemplo 1:

Calcular $\lim_{x \to 3}(x^3 - 4x^2 + 7x - 3)$, usando as propriedades.

$$\lim_{x \to 3}(x^3 - 4x^2 + 7x - 3) = (\lim_{x \to 3} x^3) - 4(\lim_{x \to 3} x^2) + 7(\lim_{x \to 3} x) - 3$$

$$= (\lim_{x \to 3} x)^3 - 4(\lim_{x \to 3} x)^2 + 7(\lim_{x \to 3} x) - 3$$

$$= (3)^3 - 4(3)^2 + 7(3) - 3$$

$$= 27 - 36 + 21 - 3$$

$$= 9.$$

Exemplo 1:

Como é uma função polinomial, podemos usar a propriedade da substituição direta:

$$\lim_{x \to 3} (x^3 - 4x^2 + 7x - 3) = (3)^3 - 4(3)^2 + 7(3) - 3$$

$$= 27 - 36 + 21 - 3$$

$$= 9.$$

Exemplo 2:

Calcular $\lim\limits_{x \to 1} \frac{x^2-1}{x-1}$.

Temos que $\dfrac{x^2 - 1}{x - 1} = \dfrac{(x - 1)(x + 1)}{x - 1} = x + 1$.

Logo, $\lim\limits_{x \to 1} \frac{x^2-1}{x-1} = \lim\limits_{x \to 1}(x + 1) = 2$.

Exemplo 3:

Calcular $\lim\limits_{h \to 0} \frac{(3+h)^2 - 9}{h}$.

$$\lim_{h \to 0} \frac{(3+h)^2 - 9}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{9+6h+h^2 - 9}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{6h+h^2}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{h(6+h)}{h}$$

Logo, $\lim\limits_{h \to 0} \frac{(3+h)^2 - 9}{h} = \lim\limits_{h \to 0} (6 + h) = 6.$

Exemplo 4:

Calcular $\lim_{t \to 0} \dfrac{\sqrt{t^2+9}-3}{t^2}$.

$$\lim_{t \to 0} \frac{\sqrt{t^2+9}-3}{t^2} = \lim_{t \to 0} \frac{\sqrt{t^2+9}-3}{t^2} \cdot \frac{\sqrt{t^2+9}+3}{\sqrt{t^2+9}+3} = \lim_{t \to 0} \frac{(t^2+9)-9}{t^2(\sqrt{t^2+9}+3)}$$

$$= \lim_{t \to 0} \frac{t^2}{t^2(\sqrt{t^2+9}+3)} = \lim_{t \to 0} \frac{1}{\sqrt{t^2+9}+3}.$$

Logo, $\lim_{t \to 0} \dfrac{\sqrt{t^2+9}-3}{t^2} = \lim_{t \to 0} \dfrac{1}{\sqrt{t^2+9}+3} = \dfrac{1}{3+3} = \dfrac{1}{6}$.