D1MAT - Lista de Exercícios 07: Determinantes e Sistemas Lineares

June 12, 2021

1. Calcule $\begin{vmatrix} 2 & 2 & 3 & -4 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & -5 & 5 & 1 & 4 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 2 \end{vmatrix}$.

Podemos calcular este determinante aplicando Laplace à primeira coluna da matriz:

$\det = \displaystyle\sum_{i=1}^{5} a_{i1} C_{i1}$, em que a_{i1} é o elemento da linha i e coluna 1 e C_{i1} é seu cofator. Portanto:

$$\begin{vmatrix} 2 & 2 & 3 & -4 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & -5 & 5 & 1 & 4 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 2 \end{vmatrix} = 2 \cdot C_{11} + 0 \cdot C_{21} + 0 \cdot C_{31} + 0 \cdot C_{41} + 0 \cdot C_{51} = 2 \cdot (-1)^{1+1} \cdot \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 4 & 0 & 2 & 1 \\ -5 & 5 & 1 & 4 \\ 1 & 0 & -1 & 2 \end{vmatrix}$$

Por sua vez, o determinante da matrix 4×4 resultante acima pode ser calculado, de forma análoga ao que fizemos, pela soma dos produtos entre os elementos da primeira linha e seus cofatores. Ou seja:

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 4 & 0 & 2 & 1 \\ -5 & 5 & 1 & 4 \\ 1 & 0 & -1 & 2 \end{vmatrix} = 1 \cdot C_{11} + 0 \cdot C_{12} + 0 \cdot C_{13} + 0 \cdot C_{14} = 1 \cdot (-1)^{1+1} \cdot \begin{vmatrix} 0 & 2 & 1 \\ 5 & 1 & 4 \\ 0 & -1 & 2 \end{vmatrix}$$

Mais uma vez, aplicando a regra de Laplace para a primeira coluna da matriz 3×3 acima, temos que:

$$\begin{vmatrix} 0 & 2 & 1 \\ 5 & 1 & 4 \\ 0 & -1 & 2 \end{vmatrix} = 0 \cdot C_{11} + 5 \cdot C_{21} + 0 \cdot C_{31} = 5 \cdot (-1)^{2+1} \cdot \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} = 5 \cdot (-1) \cdot (4 - (-1)) = -25$$

Juntanto tudo temos que:

$$\begin{vmatrix} 2 & 2 & 3 & -4 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & -5 & 5 & 1 & 4 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 2 \end{vmatrix} = 2 \cdot (-1)^2 \cdot 1 \cdot (-1)^2 \cdot (-25) = -50$$

Resposta: -50

2. Se A e B são matrizes de ordem 3, com determinante não nulo e $\det(A \cdot B) = \det(2B^T)$, calcule $\det A$.

Considerando as seguintes propriedades dos determinantes de matrizes:

$$\det(A \cdot B) = \det(A) \cdot \det(B) \tag{1}$$

$$\det(kA) = k^n \det(A), \text{ para } k \in \mathbb{R} \text{ e } A \text{ uma matriz de ordem } n \tag{2}$$

E considerando que, pelo enunciado, a matriz B possui ordem 3, temos que:

$$\det(A \cdot B) = \det(2B^T) \implies \det(A) \cdot \det(B) = 2^3 \det(B^T)$$

Sabendo-se também a propriedade de que, para uma matriz A,

$$\det(A^T) = \det(A) \tag{3}$$

Podemos dizer que:

$$\det(A) \cdot \det(B) = 2^3 \det(B^T) \implies \det(A) \cdot \det(B) = 2^3 \det(B)$$

Como o enunciado afirma que $\det(B) \neq 0$, podemos cancelar seu valor em ambos os lados da equação e, portanto:

$$\det(A) \cdot \det(B) = 2^3 \det(B) \implies \det(A) = 2^3 = 8$$

Resposta: $\det A = 8$

3. Considere o sistema $Ax = B$, em que $A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 2 & k & 6 \\ -1 & 3 & k-3 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 \\ 6 \\ 0 \end{pmatrix}$ e $k \in \mathbb{Z}$. Sendo T a soma de todos os valores de k que tornam o sistema impossível e sendo S a soma de todos os valores de k que tornam o sistema possível e indeterminado, determine o valor de $T - S$.

Seja $D = \det A$. Pela Regra de Cramer, sabemos que o sistema será *possível e determinado* se, e somente se, $D \neq 0$. Dessa forma, estamos então interessados nos casos em que $D = 0$.

$$\begin{aligned} D = \det A = \begin{vmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 2 & k & 6 \\ -1 & 3 & k-3 \end{vmatrix} &= 12 + k(k-3) + 18 + 4(k-3) + 3k - 18 \\ &= 12 + k^2 - 3k + 18 + 4k - 12 + 3k - 18 \\ &= k^2 + 4k \\ &= k(k+4) \end{aligned}$$

Portanto, termos $D = 0$ quando:

$$D = k(k+4) = 0 \implies \begin{cases} k = 0 \\ k + 4 = 0 \implies k = -4 \end{cases}$$

Nosso sistema original pode ser escrito da seguinte forma:

$$\begin{cases} x - 2y + 3z = 1 \\ 2x + ky + 6z = 6 \\ -x + 3y + (k-3)z = 0 \end{cases}$$

i. Levando $k = 0$ ao sistema e escalonando, temos que:

$$\begin{cases} x - 2y + 3z = 1 \\ 2x + 6z = 6 \\ -x + 3y - 3z = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} x - 2y + 3z = 1 \\ 4y = 4 & \longleftarrow (-2) \times (1^a \text{ eq.}) + (2^a \text{ eq.}) \\ y = 1 & \longleftarrow (1^a \text{ eq.}) + (3^a \text{ eq.}) \end{cases}$$

A 2^a e 3^a equações são resolvidas para o valor de $y = 1$, e só nos resta então a 1^a equação:

$$\begin{aligned} x - 2y + 3z &= 1 \\ x - 2(1) + 3z &= 1 \\ x + 3z &= 3 \end{aligned}$$

Fazendo $z = \alpha$ ($\alpha \in \mathbb{R}$), temos que qualquer tupla $(3 - 3\alpha, 1, \alpha)$ é solução do sistema e, portanto, trata-se de um sistema *possível e indeterminado* *ii.* Levando $k = -4$ ao sistema e escalonando:

$$\begin{cases} x - 2y + 3z = 1 \\ 2x - 4y + 6z = 6 \\ -x + 3y - 7z = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} x - 2y + 3z = 1 & \\ 0 = 4 & \longleftarrow (-2) \times (1^a \text{ eq.}) + (2^a \text{ eq.}) \\ y - 4z = 1 & \longleftarrow (1^a \text{ eq.}) + (3^a \text{ eq.}) \end{cases}$$

A segunda equação $0 = 4$ é um absurdo, e portanto o sistema é *impossível*.

Temos então que:

- Para $k = 0 \implies$ Sistema Possível e Indeterminado $\implies S = 0$
- Para $k = -4 \implies$ Sistema Impossível $\implies T = -4$

Portanto,

$$T - S = -4 - 0 = -4$$

Resposta: $T - S = -4$

4. Discuta o sistema linear:
$$\begin{cases} x + my = 4 \\ 3x + \quad y = k \end{cases}$$

Seja S a matriz incompleta do sistema.

$$S = \begin{bmatrix} 1 & m \\ 3 & 1 \end{bmatrix}$$

O determinante de S pode ser calculado por:

$$\det S = \begin{vmatrix} 1 & m \\ 3 & 1 \end{vmatrix} = 1 - 3m$$

Pela Regra de Cramer, se $\det S \neq 0$ o sistema possui solução única, sendo *possível e determinado*.

$$\det S \neq 0 \implies 1 - 3m \neq 0 \implies m \neq \frac{1}{3}$$

Para o caso de $m = \frac{1}{3}$, o sistema pode ser *possível e indeterminado* ou *impossível*. Levando este valor de m ao sistema original e escalonando temos que:

$$\begin{cases} x + \dfrac{1}{3}y = 4 \\ 3x + \quad y = k \end{cases} \iff \begin{cases} x + \dfrac{1}{3}y = \quad 4 \\ \quad 0 = k - 12 \quad \longleftarrow (-3) \times (1^a \text{ eq.}) + (2^a \text{ eq.}) \end{cases}$$

Temos então que o sistema será *possível e indeterminado* quando 2^a equação for satisfeita, ou seja, quando $k = 12$. Caso contrário o sistema será *impossível*.

Resposta: $\begin{cases} m \neq \frac{1}{3} \longrightarrow \text{ Sistema Possível e Determinado} \\ m = \frac{1}{3} \text{ e } k = 12 \longrightarrow \text{ Sistema Possível e Indeterminado} \\ m = \frac{1}{3} \text{ e } k \neq 12 \longrightarrow \text{ Sistema Impossível} \end{cases}$