D1MAT - Lista de Exercícios 04: Vetores

Diego Machado de Assis

May 22, 2021

1. Dados os vetores $\vec{u} = (3, -1)$ e $\vec{v} = (-1, 2)$, determinar o vetor $\vec{w}$ tal que $4(\vec{u}-\vec{v})+\frac{1}{3}\vec{w} = 2\vec{u}-\vec{w}$.

Utilizando as *propriedades de vetores*, podemos reescrever a equação da seguinte forma:

$$\begin{aligned}
4(\vec{u} - \vec{v}) + \frac{1}{3}\vec{w} &= 2\vec{u} - \vec{w} \\
4\vec{u} - 4\vec{v} + \frac{1}{3}\vec{w} &= 2\vec{u} - \vec{w} \\
\frac{1}{3}\vec{w} + \vec{w} &= 2\vec{u} - 4\vec{u} + 4\vec{v} \\
\frac{4}{3}\vec{w} &= -2\vec{u} + 4\vec{v} \\
\vec{w} &= \frac{3}{4}\left(-2\vec{u} + 4\vec{v}\right) \\
\vec{w} &= -\frac{3}{2}\vec{u} + 3\vec{v}
\end{aligned}$$

Sendo:

$$\begin{gathered}
-\frac{3}{2}\vec{u} = -\frac{3}{2}(3, -1) = \left(-\frac{9}{2}, \frac{3}{2}\right) \\
3\vec{v} = 3(-1, 2) = (-3, 6)
\end{gathered}$$

Temos que:

$$\begin{aligned}
&\vec{w} = -\frac{3}{2}\vec{u} + 3\vec{v} = \left(-\frac{9}{2}, \frac{3}{2}\right) + (-3, 6) \\
&\vec{w} = \left(-\frac{15}{2}, \frac{15}{2}\right)
\end{aligned}$$

2. Encontrar os números a_1 e a_2 tais que $\vec{w} = a_1\vec{v_1} + a_2\vec{v_2}$, sendo $\vec{v_1} = (1, -2, 1)$, $\vec{v_2} = (2, 0, -4)$ e $\vec{w} = (-4, -4, 14)$.

$$\begin{gathered} \vec{w} = a_1\vec{v_1} + a_2\vec{v_2} \\ (-4, -4, 14) = a_1(1, -2, 1) + a_2(2, 0, -4) \end{gathered}$$

$$\begin{cases} -4 = a_1.1 + a_2.2 \\ -4 = a_1.(-2) + a_2.0 \\ 14 = a_1.1 + a_2.(-4) \end{cases}$$

Pelas equações acima, temos:

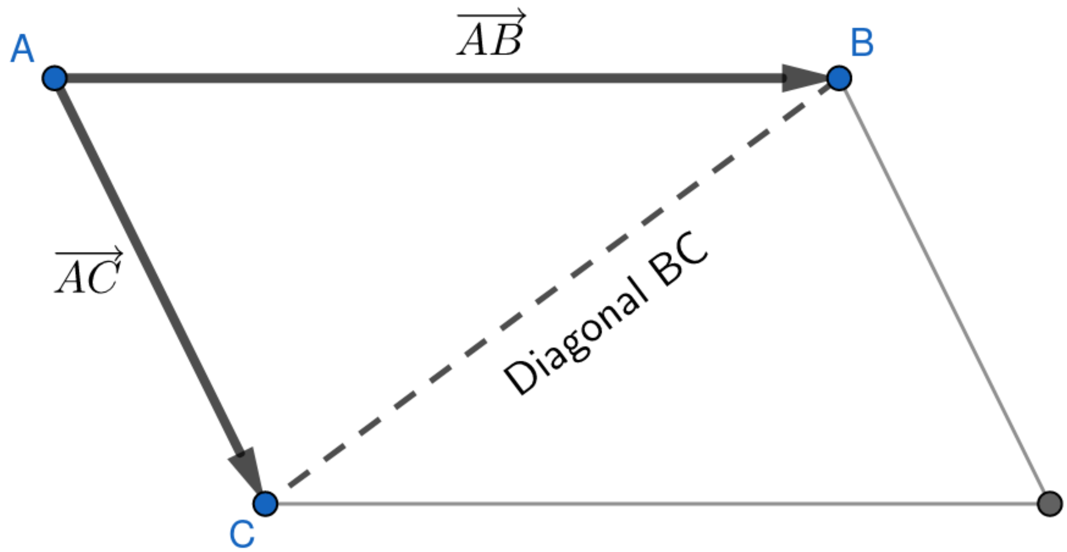
$$\begin{gathered} -2a_1 = -4 \implies a_1 = 2 \\ 2a_2 + 2 = -4 \implies a_2 = -3 \end{gathered}$$

Portanto: $\vec{w} = 2\vec{v_1} + (-3)\vec{v_2}$

3. Calcular a área do paralelogramo que tem um vértice no ponto $A(3, 2, 1)$ e uma diagonal de extremidades $B(1, 1, -1)$ e $C(0, 1, 2)$.

Se B e C são vértices do paralelogramo conectados por uma de suas diagonais e A é um terceiro vértice do mesmo (veja figura a seguir), podemos dizer que a área do paralelogramo (A_p) é equivalente ao módulo do produto vetorial entre os vetores $\overrightarrow{AB}$ e $\overrightarrow{AC}$.

$$A_p = |\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}|$$



Primeiro calculamos os vetores $\overrightarrow{AB}$ e $\overrightarrow{AC}$:

$$\begin{aligned}
\overrightarrow{AB} &= (1-3)\vec{i} + (1-2)\vec{j} + (-1-1)\vec{k} = -2\vec{i} + -1\vec{j} + -2\vec{k} \\
\overrightarrow{AC} &= (0-3)\vec{i} + (1-2)\vec{j} + (2-1)\vec{k} = -3\vec{i} + -1\vec{j} + 1\vec{k}
\end{aligned}$$

O produto vetorial destes vetores será:

$$\begin{aligned}
\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC} &= \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ -2 & -1 & -2 \\ -3 & -1 & 1 \end{vmatrix} \\
&= (-1-2)\vec{i} + (6+2)\vec{j} + (2-3)\vec{k} \\
&= -3\vec{i} + 8\vec{j} + -1\vec{k}
\end{aligned}$$

Por fim, obtemos a área do paralelogramo calculando o módulo do vetor $\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC} = (-3, 8, -1)$:

$$A_p = |\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}| = \sqrt{(-3)^2 + (8)^2 + (-1)^2} = \sqrt{74}$$

Portanto, a área do paralelogramo é $\sqrt{74}$.

4. Os vetores $\vec{a} = (2, -1, 3)$, $\vec{b} = (2, -1, 4)$ e $\vec{c} = (m+1, m, -1)$ determinam um paralelepípedo de volume 42. Calcule m.

Dado que o volume (V) do paralelepípedo determinado pelos vetores $\vec{a}$, $\vec{b}$ e $\vec{c}$ é igual ao módulo de seu produto misto, ou seja:

$$V = |\vec{a}.(\vec{b} \times \vec{c})|$$

Podemos calcular:

$$\begin{aligned}
\vec{a}.(\vec{b} \times \vec{c}) &= \begin{vmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 2 & -1 & 4 \\ m+1 & m & -1 \end{vmatrix} \\
&= -4(m+1) + 2 + 6m - 2 + 3(m+1) - 8m \\
&= -3m - 1
\end{aligned}$$

Temos então que:

$$|-3m-1| = 42 \implies \begin{cases} -3m - 1 = 42 & \implies m = -\frac{43}{3} \\ \text{ou} \\ -3m - 1 = -42 & \implies m = \frac{41}{3} \end{cases}$$

Portanto, $m = \left\{ -\dfrac{43}{3}, \dfrac{41}{3} \right\}$