Pauta Prueba

Técnicas Estocásticas, Estadísticas y de Simulación
2er. Semestre
prof. J. Barrera

19 Noviembre, 2020

Instrucciones: La Prueba 2 se puede entregar en parejas o individual. Se entrega un informe y un video. El informe que entregue debe incluir claramente los nombres del (de los) integrante(s), el video debe durar no más de 10 minutos explicando los resultados solicitados (ver las preguntas). Cada integrante debe grabar al menos una pregunta. No se acepta incluir integrantes después de entregada la evaluación. Solo se corregirá lo entregado vía webcursos (y excepcionalmente vía email), no se aceptan links en el informe que lleven a respuestas en algún repositorio.

Recuerde que debe respetar el código de honor y entregar trabajo de su equipo. En particular no olvide que debe:

- Dejar explícito cuando se hace una cita textual, usando comillas o letra itálica.
- Hacer referencia a las fuentes de información utilizadas. (libros, reportes, páginas web, Github, etc.).
- De acuerdo a la INAPI [1]. "Son protegibles por derecho de autor además de las obras artísticas y literarias, el software y bases de datos originales, entre otros"[2]. Por lo que si bien puede usar parte de un código o programa que encontró su obligación es citar la fuente.

Ante cualquier sospechas de infracciones al código de honor los antecedentes serán entregados a las autoridades pertinentes de la UAI de acuerdo al procedimiento descrito en el reglamento de la universidad.

[1] INAPI:Instituto Nacional de Propiedad Industrial

[2] https://www.inapi.cl/propiedad-intelectual-e-industrial/para-informarse/principales-derechos-de-propiedad-intelectual

Pregunta (30 ptos.) (Método de Metropolis-Hasting)

Considere una cola tipo M/M/s/K de acuerdo a la notación de Kendall. Se tiene que s es el número de servidores y K es el número de personas que pueden estar en el sistema (en atención + espera). A continuación esta es la distribución estacionaria del número de personas en el sistema, es decir p_n es la probabilidad que hayan n personas en el sistemas

$$p_n = \begin{cases} \frac{(\lambda/\mu)^n}{n!} C_0 & n = 0, \ldots, s-1 \\ \\ \frac{(\lambda/\mu)^s}{s!} \rho_0^{n-s} C_0 & n = s, \ldots, K \end{cases}$$

Donde λ es la tasa de llegada, μ la tasa de atención y $\rho_0 = \frac{\lambda}{s\mu}$ y C_0 es la constante de renormalización.

a) Considere $\vec{p} = (p_0, p_1, p_2, p_3, p_4)$ en el caso $s = 2$, $K = 4$, $\lambda = 10$ clientes/hr y $\mu = 4$. Sea

$$Q = \begin{bmatrix} 0{,}3 & 0{,}6 & 0{,}1 & 0 & 0 \\ 0{,}1 & 0{,}5 & 0{,}4 & 0 & 0 \\ 0{,}1 & 0{,}1 & 0{,}6 & 0{,}2 & 0 \\ 0 & 0{,}1 & 0{,}2 & 0{,}1 & 0{,}6 \\ 0 & 0 & 0{,}1 & 0{,}6 & 0{,}3 \end{bmatrix}.$$

1. (6 ptos.) Calcule la matriz de transición P que corresponde al algoritmo de Metropolis -Hasting que utiliza la matriz Q.

Solución Reemplazando los valores $s = 2$, $K = 4$, $\lambda = 10$ clientes/hr y $\mu = 4$ se obtiene:

$$p_n = \begin{cases} \frac{(10/4)^n}{n!} C_0 & n = 0, 1 \\ \\ \frac{(10/4)^2}{2!} (10/8)^{n-2} C_0 & n = 2, 3, 4 \end{cases}$$

Lo que equivale a $\vec{p} = C_0(1 \;\; 2{,}5 \;\; 3{,}125 \;\; 3{,}9 \; 4{,}88)$, como $\sum_n p_n = 1$ necesariamente $C_0 = 15, 42$, por lo que

$$\vec{p} = (0{,}065 \;\; 0{,}162 \;\; 0{,}203 \;\; 0{,}253 \; 0{,}317).$$

No olvidar que Metropolis-Hasting se aplica para evitar el cálculo de C_0, por lo que no se utilizará para construir P. Según la fórmula para obteber P se tiene para $i \neq j$:

$$P_{i,j} = Q_{i,j} \min \left\{ 1, \frac{b_j Q_{j,i}}{b_i Q_{i,j}} \right\}$$

y

$$P_ij = 1 - \sum_{j=1, j \neq i}^{n} P_{ij}$$

Donde $b = (1 \;\; 2{,}5 \;\; 3{,}125 \;\; 3{,}9 \; 4{,}88)$, luego para la primera fila se tiene si $j \neq 1$

$$P_{1,j} = Q_{1,j} \min \left\{ 1, \frac{b_j Q_{j,1}}{1 Q_{1,j}} \right\}$$

de donde la primera fila de P se tiene

$$\begin{aligned}
P_{1,\cdot} &= (P_{11}\ \ 0{,}6\,\text{mín}\{1, \tfrac{2{,}5\cdot 0{,}1}{1\cdot 0{,}6}\}\ \ 0{,}1\,\text{mín}\{1, \tfrac{3{,}125\cdot 0{,}1}{1\cdot 0{,}1}\}\ \ 0\ \ 0) \\
&= (P_{11}\ \ 0{,}6\cdot 0{,}42\ \ 0{,}1\ \ 0\ \ 0) \\
&= (1-0{,}35\ \ 0{,}25\ \ 0{,}1\ \ 0\ \ 0) \\
&= (0{,}65\ \ 0{,}25\ \ 0{,}1\ \ 0\ \ 0).
\end{aligned}$$

Para la siguiente fila se tiene

$$P_{2,j} = Q_{2,j}\,\text{mín}\left\{1, \frac{b_j Q_{j,2}}{2{,}5 Q_{2,j}}\right\}$$

$$\begin{aligned}
P_{2,\cdot} &= (0{,}1\,\text{mín}\{1, \tfrac{1\cdot 0{,}6}{2{,}5\cdot 0{,}1}\}\ P_{22}\ \ 0{,}4\,\text{mín}\{1, \tfrac{3{,}125\cdot 0{,}1}{2{,}5\cdot 0{,}4}\}\ \ 0\ \ 0) \\
&= (0{,}1\ P_{22}\ \ 0{,}125\ \ 0\ \ 0) \\
&= (0{,}1\ 0{,}775\ \ 0{,}125\ \ 0\ \ 0)
\end{aligned}$$

De donde se obtiene

$$P = \begin{bmatrix}
0{,}650 & 0{,}250 & 0{,}1000000 & 0{,}0000000 & 0{,}0000000 \\
0{,}100 & 0{,}775 & 0{,}1250000 & 0{,}0000000 & 0{,}0000000 \\
0{,}032 & 0{,}100 & 0{,}6680000 & 0{,}2000000 & 0{,}0000000 \\
0{,}000 & 0{,}000 & 0{,}1602564 & 0{,}2397436 & 0{,}6000000 \\
0{,}000 & 0{,}000 & 0{,}0000000 & 0{,}4795082 & 0{,}5204918
\end{bmatrix}$$

2. (6 ptos.) Compruebe que p es la distribución estacionaria de la cadena de Markov P.

   Solución Como la matriz de transición P es irreducible y aperiodica, basta comprobar que $\vec{p}P = \vec{p}$ o bien $b = bP$

$$\begin{aligned}
\vec{p}P &= (0{,}065\ \ 0{,}162\ \ 0{,}203\ \ 0{,}253\ 0{,}317)P \\
&= (0{,}06491399\ \ 0{,}162285\ \ 0{,}2028562\ \ 0{,}2531646\ 0{,}3167803)
\end{aligned}$$

   Hay un error de $4x10^{-3}$ que consideraremos de redondeo. Por lo que se cumple que $\vec{p}$ es la distribución estacionaria de la cadena de Markov asociada a P.

b) Para esta parte considere los siguientes datos según rut del integrante más joven del equipo.

- dígito verificador 1 o 2 resuelva con $\lambda = 12$ clientes /hr, $s = 11$, $K = 38$ y $\rho_0 = 0{,}5$
- dígito verificador 3 o 4 resuelva con $\lambda = 12$ clientes /hr, $s = 15$, $K = 35$ y $\rho_0 = 0{,}95$
- dígito verificador 5 o 6 resuelva con $\lambda = 12$ clientes /hr, $s = 13$, $K = 37$ y $\rho_0 = 1{,}2$
- dígito verificador 7 u 8 resuelva con $\lambda = 12$ clientes /hr, $s = 14$, $K = 35$ y $\rho_0 = 1{,}5$

- dígito verificador 9, 0 o k resuelva con $\lambda = 12$ clientes /hr, $s = 10$, $K = 32$ y $\rho_0 = 0{,}7$

En la oficina de patentes de la municipalidad llegan clientes a tasa λ y hay s funcionarios pueden haber hasta K personas en el edificio de los cuales 20 están en el interior (ya sea en un funcionario o haciendo la cola para ser atendido). El resto $(K - 20)$ espera en el estacionamiento. Utilice el algoritmo de Metropolis-Hasting para simular la distribución estacionaria, para esto proponga una matriz Q :

1. (6 ptos.) Simule para $i = 1, \ldots, 5000$, para cada i obtenga L_i el número de personas en el sistema en la iteración i.

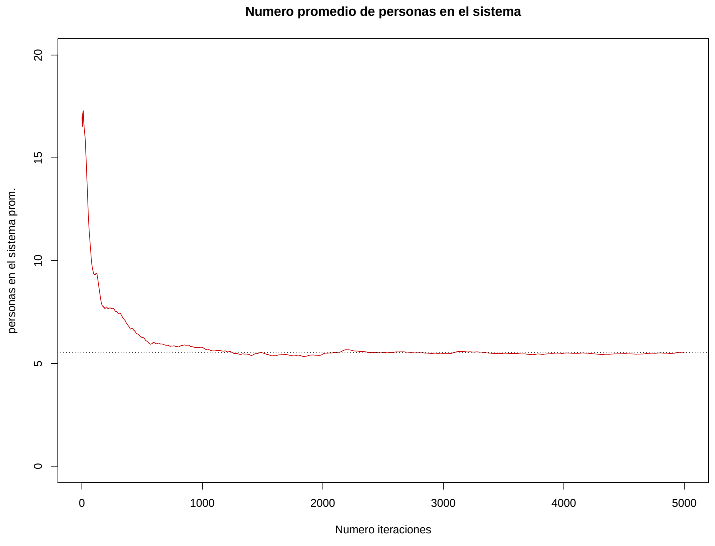
   Solución
   Debe modificarse el archivo de la ayudantía con el ejemplo del método M-H adecuando los parámetros μ, λ, s y K. También, al modificar K se deben ajustar los tamaños de las matrices utilizadas por el algoritmo.

2. (6 ptos.) Calcule numéricamente las constantes $E(L)$ y $\bar{L}(i)$ es decir el promedio de los valores $L_1, \ldots, L_i$ grafique $(\bar{L}(i), i)$ y agregue $E(L)$ como una linea horizontal. Aproximadamente ¿a partir de qué iteración se puede considerar que obtenemos simulaciones de p_n? (**entregar en video explicando el código y la interpretación del gráfico**)

   Solución
   El valor $E(L)$ se obtiene a partir de la distribución estacionaría, con la fórmula del valor esperado $\sum_{i=0}^{K} np_n$.
   Luego se obtiene $\bar{L}(i)$ para $i = 1, \ldots 5000$ el cual se puede ver en el siguiente gráfico. También se observa que a partir de la iteración $i = 1000$, el número promedio de personas en el sistema representa el numero esperado de personas en el sistema.

3. (6 ptos.) Usando sus simulaciones estime la la probabilidad que no haya nadie esperando en el estacionamiento. (**entregar en video explicando como se obtiene a partir de las simulaciones**)

Fecha de entrega 30/11/2020 hasta la medianoche por webcursos.



Numero promedio de personas en el sistema
personas en el sistema prom.
Numero iteraciones
0
5
10
15
20
0
1000
2000
3000
4000
5000