ESD 2

Estrutura de Dados

Árvores AVL

Prof. Fernando Sambinelli

INSTITUTO FEDERAL
São Paulo

Introducão

- A estrutura de árvore binária AVL foi apresentada por Adelson-Velskii e Landis em 1962

- **Motivação:** definir uma estrutura de dados que tivesse uma melhor performance nas operações de pesquisa

- Uma árvore binária de busca pode ter diferentes formas dependendo a ordem de inserção de seus elementos
    - *O que pode levar a uma anomalia e prejudicar fortemente as operações de pesquisa*

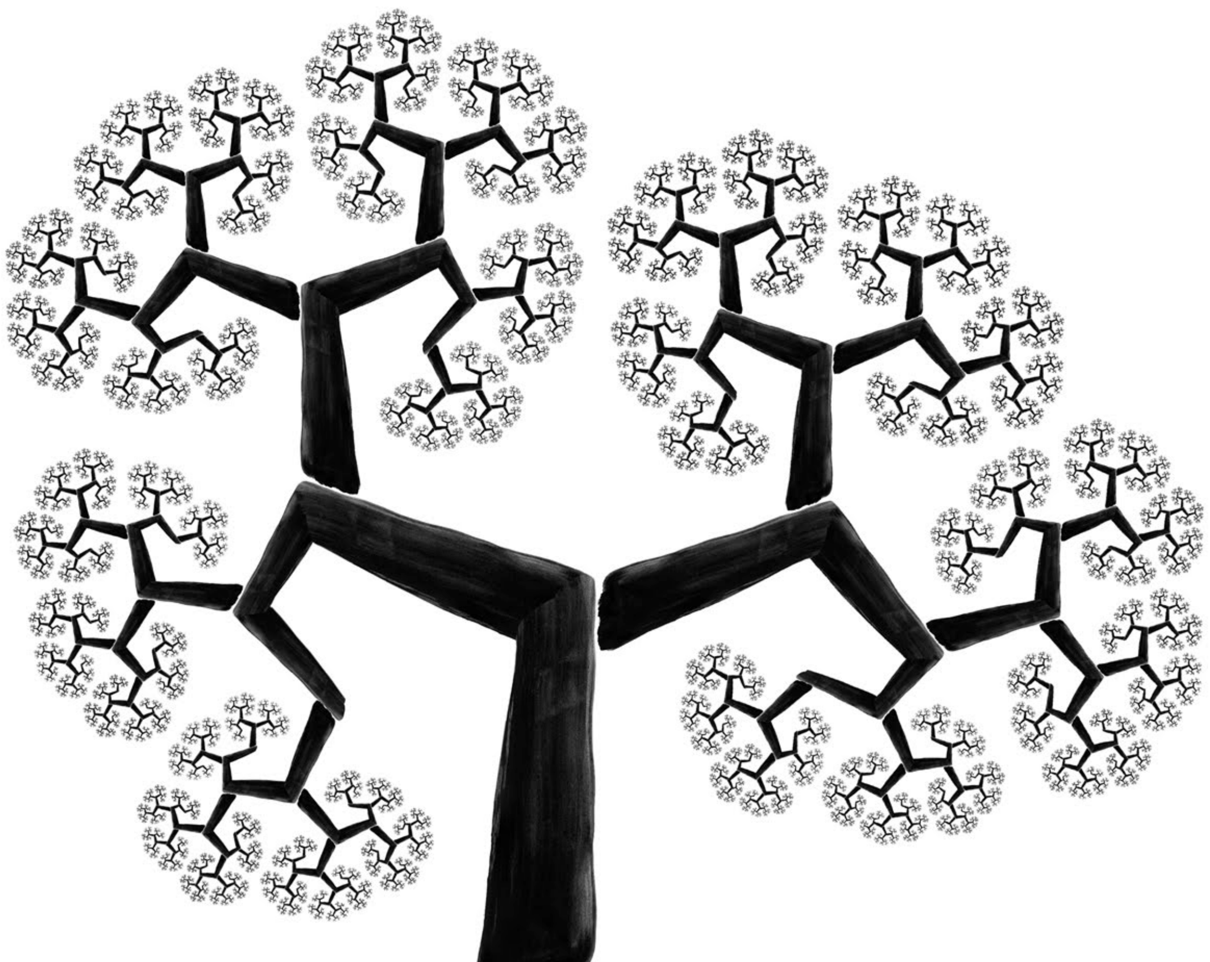
INSTITUTO FEDERAL
São Paulo


Pesquisador Adelson-Velsky (1922-2014) - Universidade Estadual de Moscou

Introdução - Exemplo de ABB

Ordem de Inserção:

B, C, D, G, L, O, P

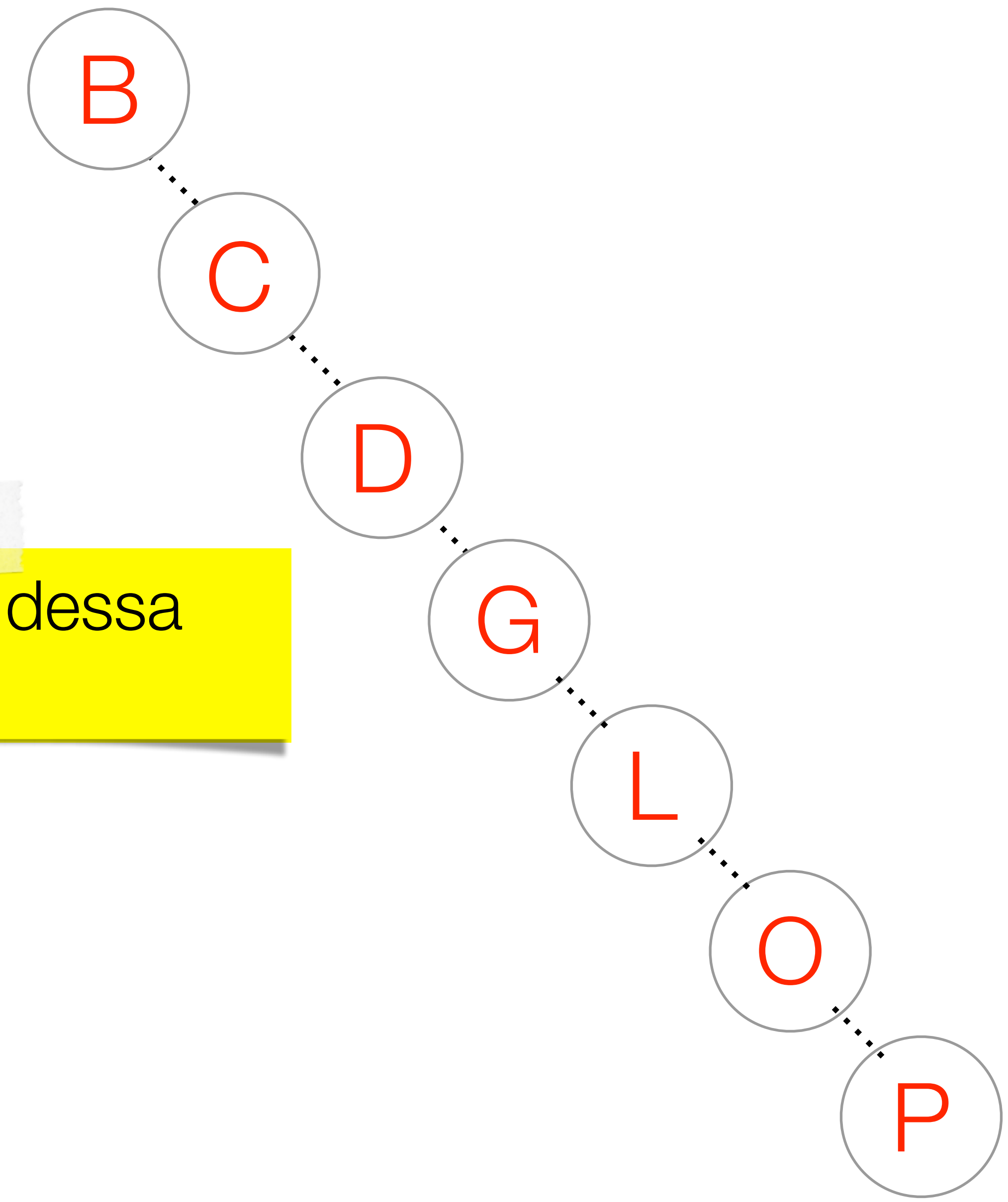


Introdução - Exemplo de ABB

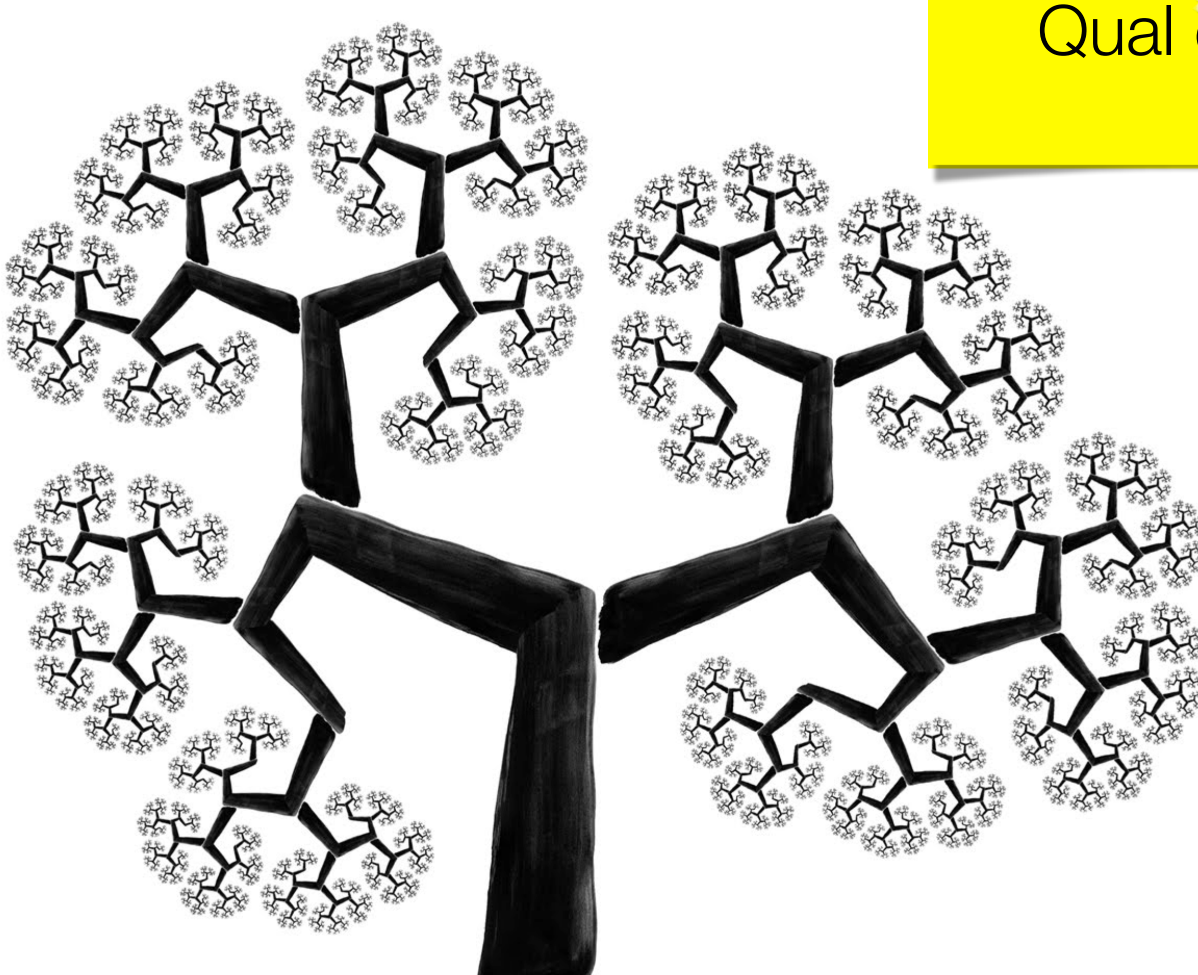
ESD 2
Estrutura de Dados

Ordem de Inserção:

B, C, D, G, L, O, P

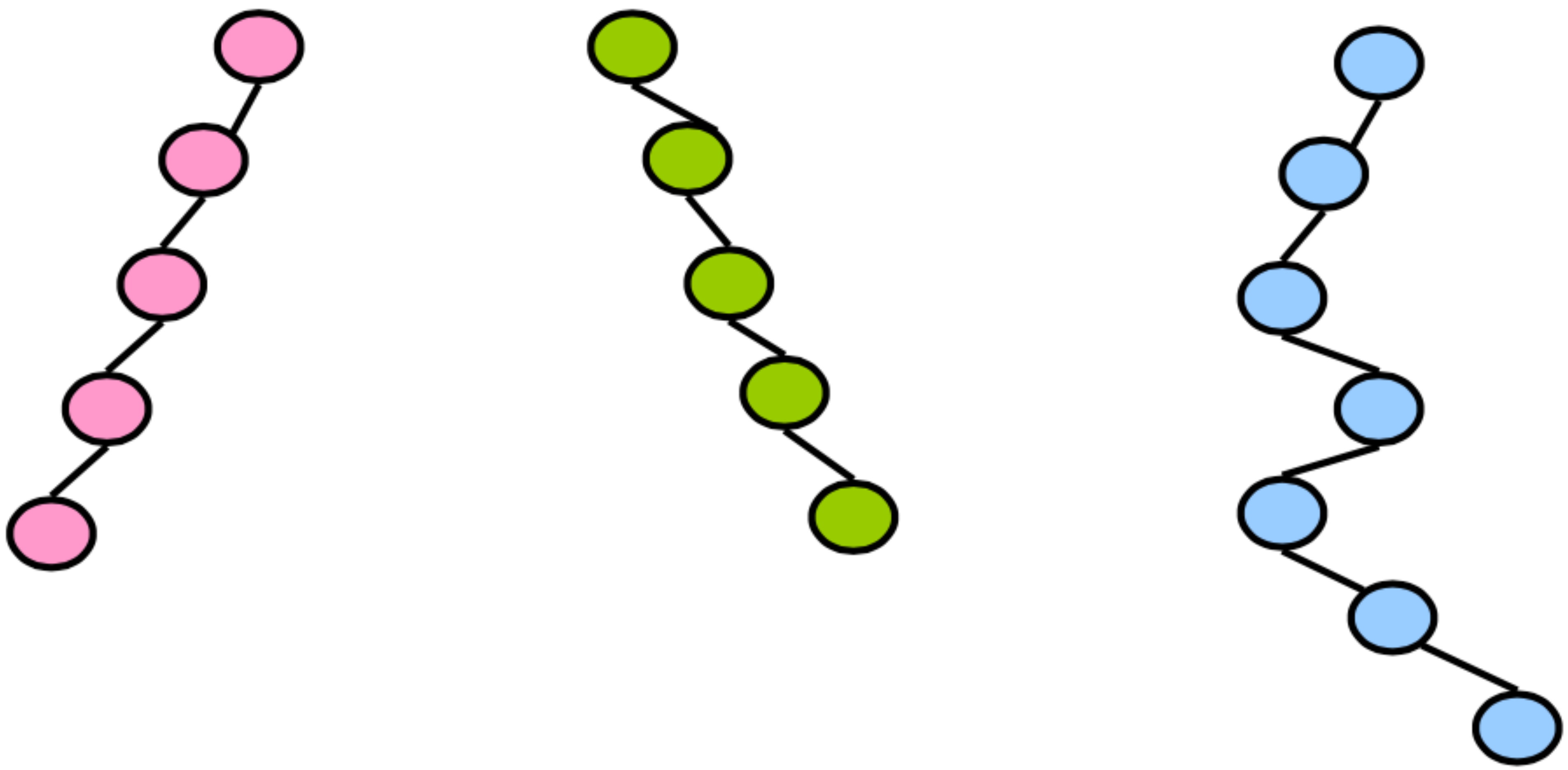


Qual o problema dessa estrutura?



INSTITUTO FEDERAL
São Paulo

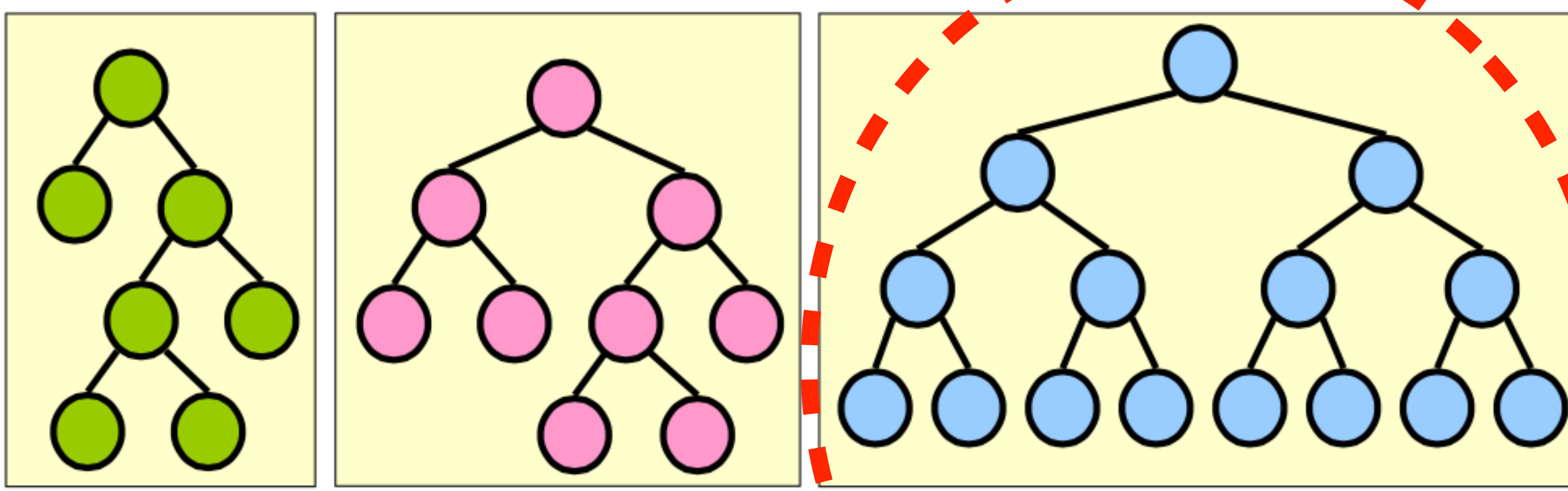
Árvore Zigue-Zague



"Árvore Zigue-Zague é toda árvore binária de busca que possui altura máxima, e para isso, todos os nós têm somente um filho"

No quesito "melhor estrutura para busca em uma ABB", esse é o mundo ideal (ótimo)!

"Qual estrutura de ABB tem altura mínima?"



Estritamente Binária
0 ou 2 filhos

Binária Completa
Sub-árvores vazias no último ou penúltimo nível

Binária Cheia
Sub-árvores vazias somente no último nível

Árvores Balanceadas

ESD2 Estrutura de Dados

- São estruturas de dados que buscam manter o custo do acesso às informações o menor possível

- Nas árvores balanceadas existe uma distribuição equilibrada entre os nós da árvore, ou seja, existe uma diferença “mínima" entre todas as folhas e a raiz

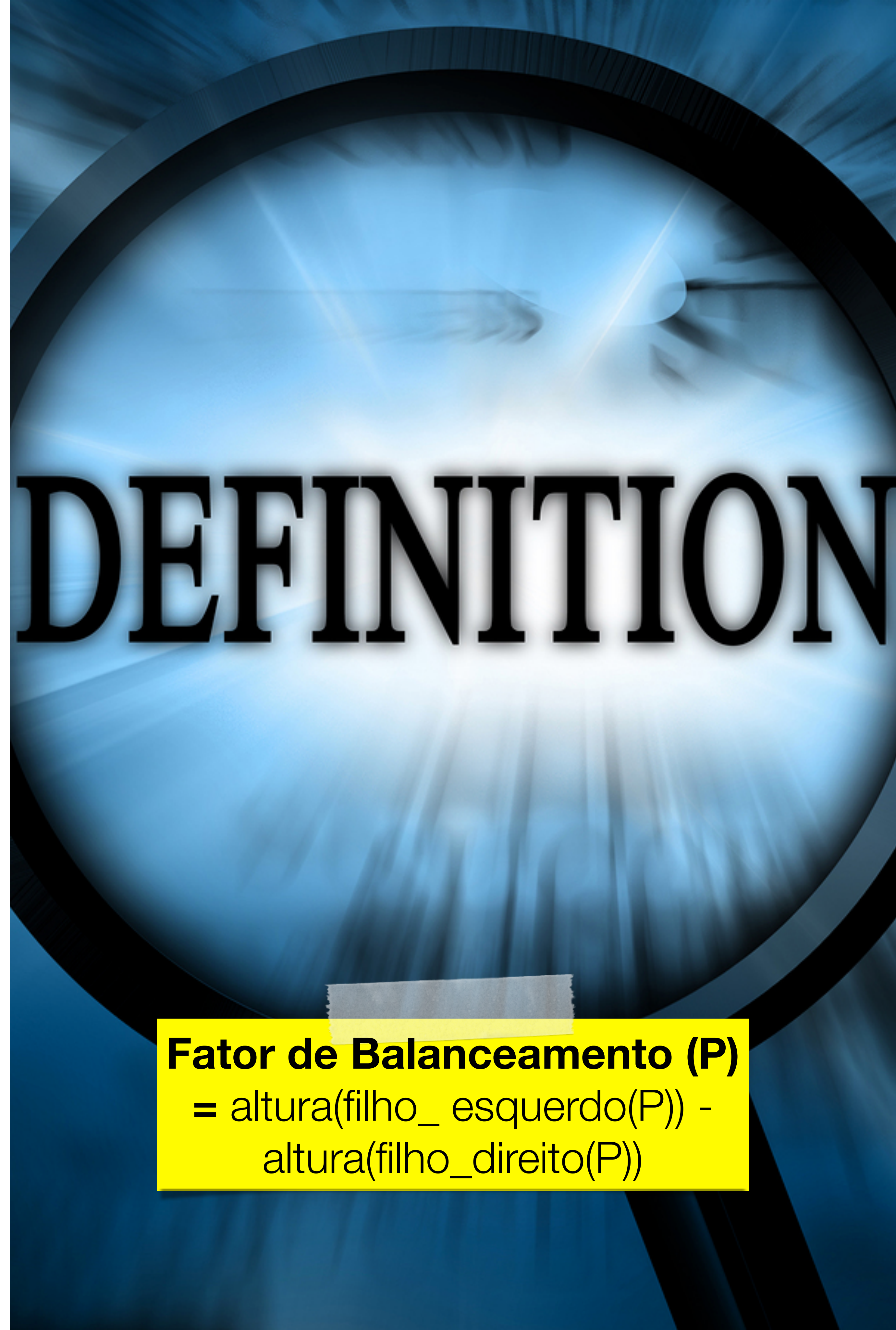
- Exemplo: uma estrutura que possui 15 elementos e tem altura 14 pode ser classificada como uma árvore zigue-zague e tem um alto custo de acesso (não é balanceada)

INSTITUTO FEDERAL
São Paulo

Árvore AVL

- Uma árvore é dita como AVL quando, para TODO nó de uma árvore binária de busca (ABB), a diferença de alturas entre as sub-árvores direita e esquerda é no **máximo 1**

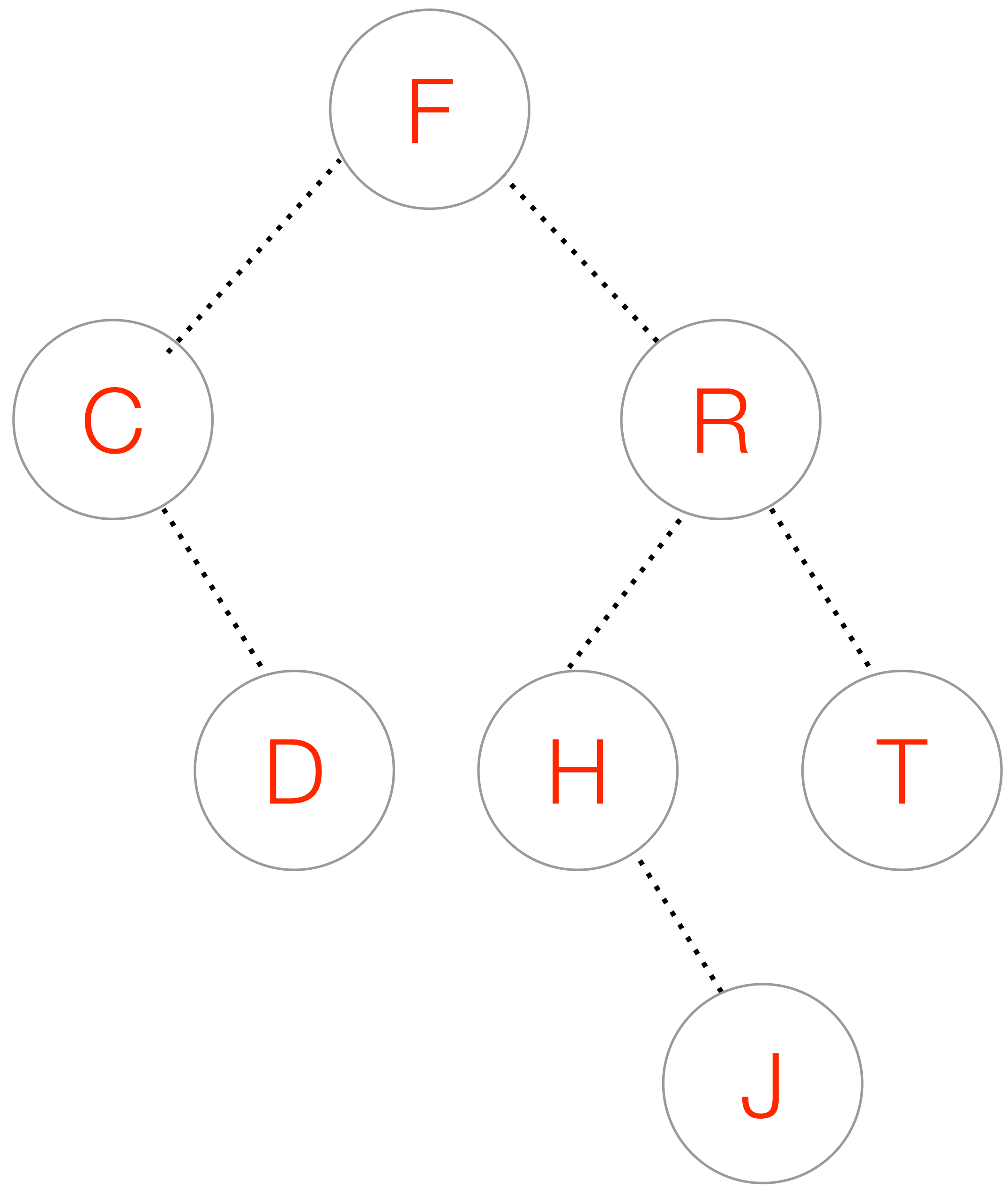
- Essa diferença de altura entre as sub-árvores é chamada **Fator de Balanceamento** (ou Fator de Equilíbrio)



Fator de Balanceamento (P) = altura(filho_ esquerdo(P)) - altura(filho_direito(P))

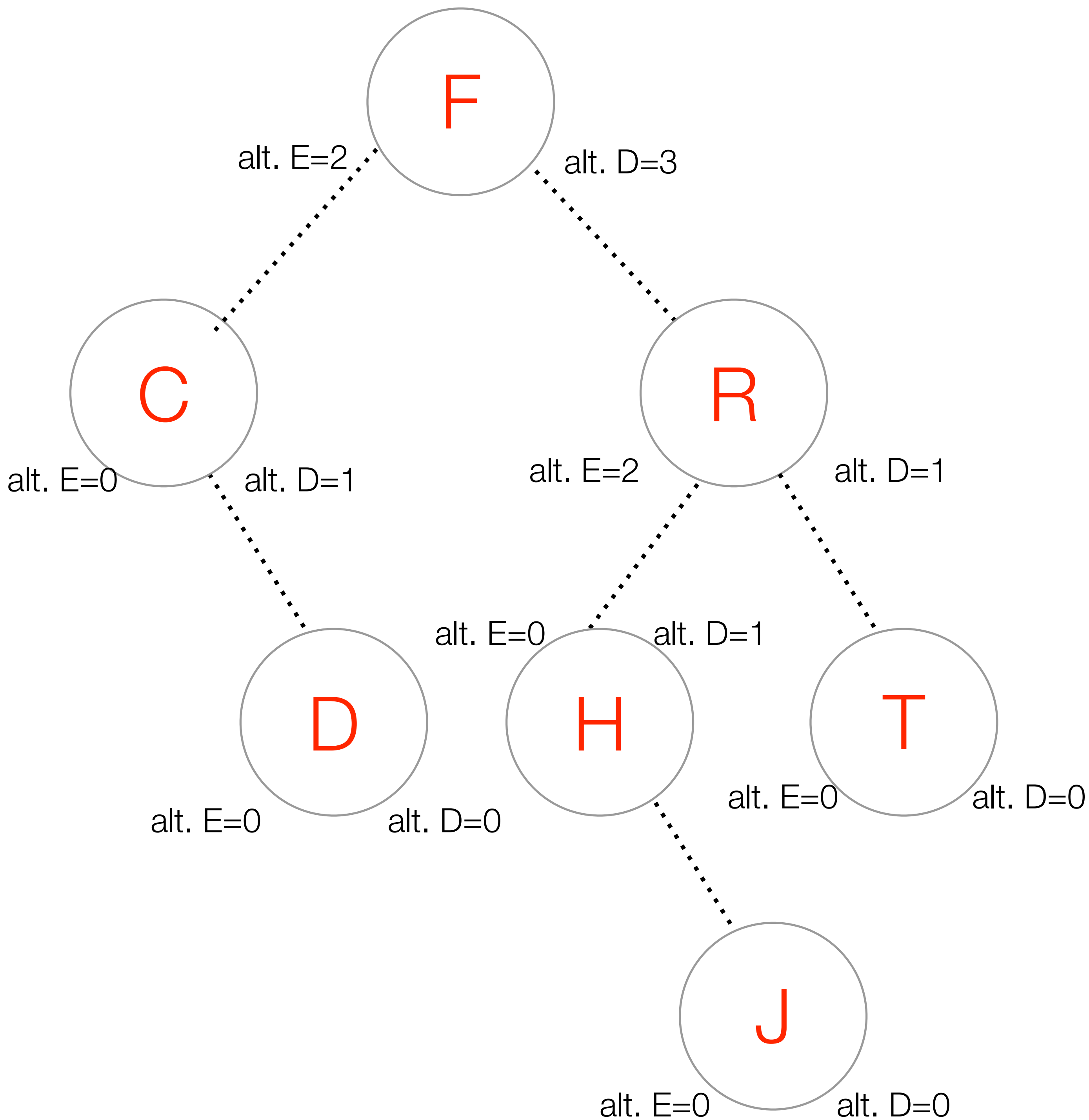
INSTITUTO FEDERAL
São Paulo

Exemplo de uma árvore **AVL**



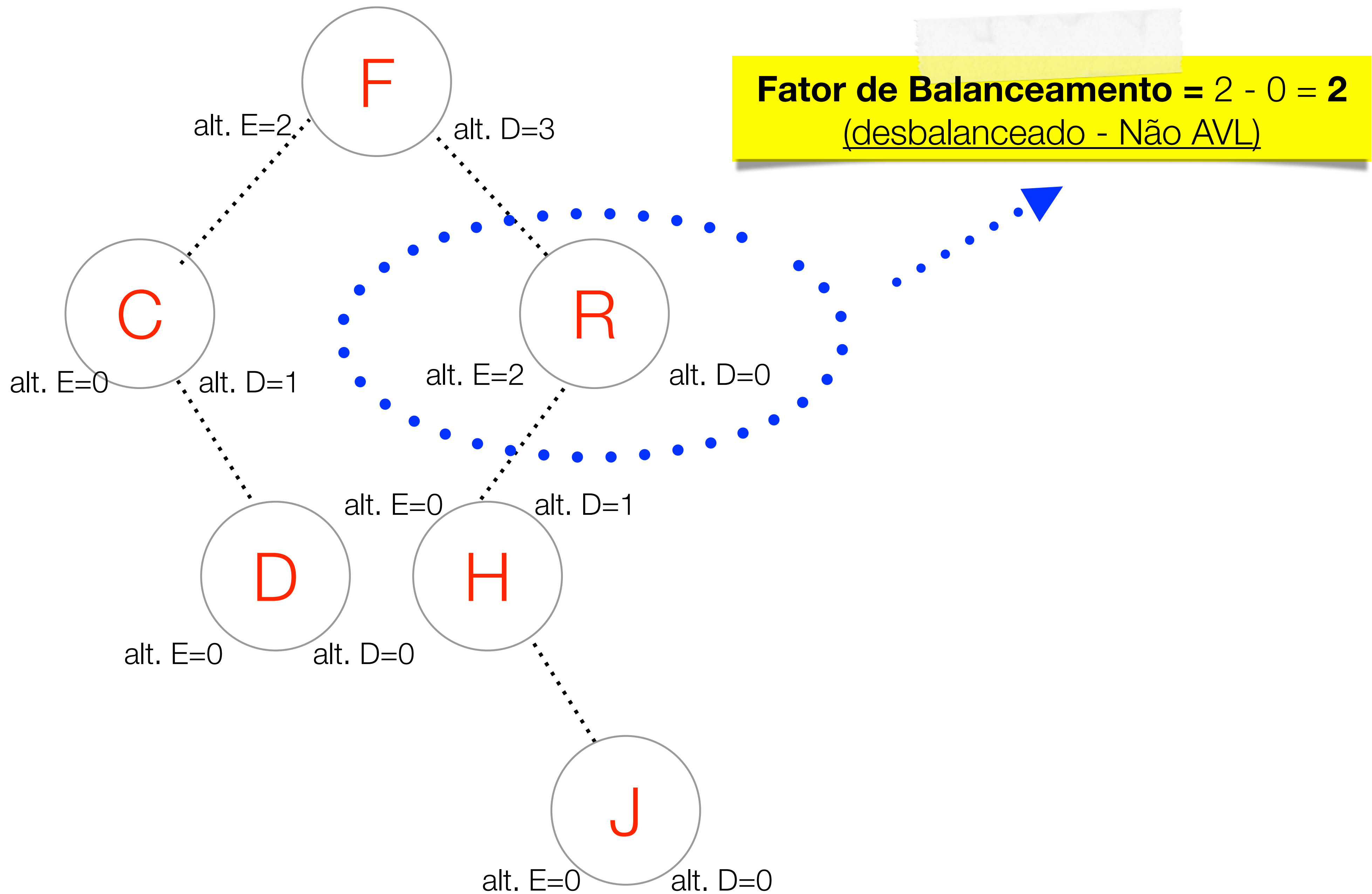
ESD 2
Estrutura de Dados

Exemplo de uma árvore **AVL**



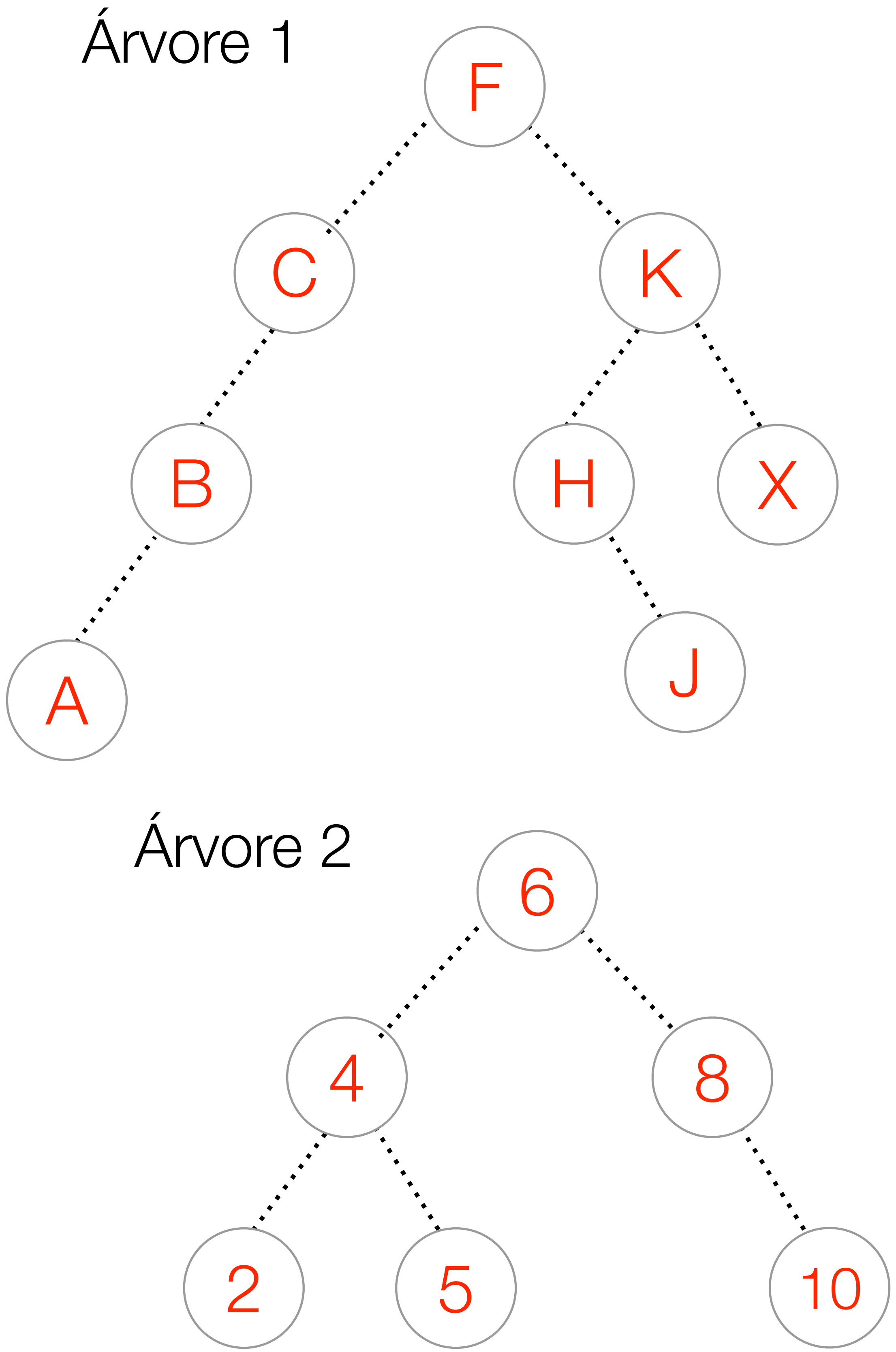
INSTITUTO FEDERAL
São Paulo

Exemplo de uma árvore **não AVL**



Atividade Prática

- Avalie as duas árvores ao lado e calcule o fator de balanceamento para cada nó.
- Identifique o nó que está desbalanceado e seu fator de balanceamento.



INSTITUTO FEDERAL
São Paulo

"O desafio da árvore AVL é mantê-la balanceada a medida que os nós são inseridos na árvore"

Implementação de árvores AVL - Estrutura

ESD 2
Estrutura de Dados

- Conteúdo (valor)
- Referência para o nó Pai
- Referência para o Filho Direito
- Referência para o Filho Esquerdo
- Fator de Balanceamento (FB)

Cada nó de uma árvore AVL deve ter FB igual a 0, 1 ou -1

INSTITUTO FEDERAL
São Paulo

Implementação de árvores AVL - Estrutura

ESD 2
Estrutura de Dados

```java
package avl;

public class No {

    private int valor;
    private No direito;
    private No esquerdo;
    private int balanceamento;
    private No pai;

    public No(int valor, No direito, No esquerdo) {
        this.valor = valor;
        this.direito = direito;
        this.esquerdo = esquerdo;
        this.balanceamento = 0;
        this.pai = null;
    }

```

INSTITUTO FEDERAL
São Paulo

Busca em árvore AVL

- A função de busca em uma árvore AVL é exatamente igual à árvore binária de busca (ABB), isso porque, toda árvore AVL é uma árvore binária de busca

INSTITUTO FEDERAL
São Paulo

Inserção em árvore AVL

Cada nó inserido na árvore AVL seu FB é iniciado em 0 (zero).

Os FB dos ancestrais do nó recém-inserido precisam ser atualizados!

1. INSERIR UM ELEMENTO DA MESMA FORMA QUE EM UMA ÁRVORE BINÁRIA DE BUSCA

2. VERIFICAR SE A ÁRVORE RESULTANTE, APÓS A INSERÇÃO, É OU NÃO UMA AVL

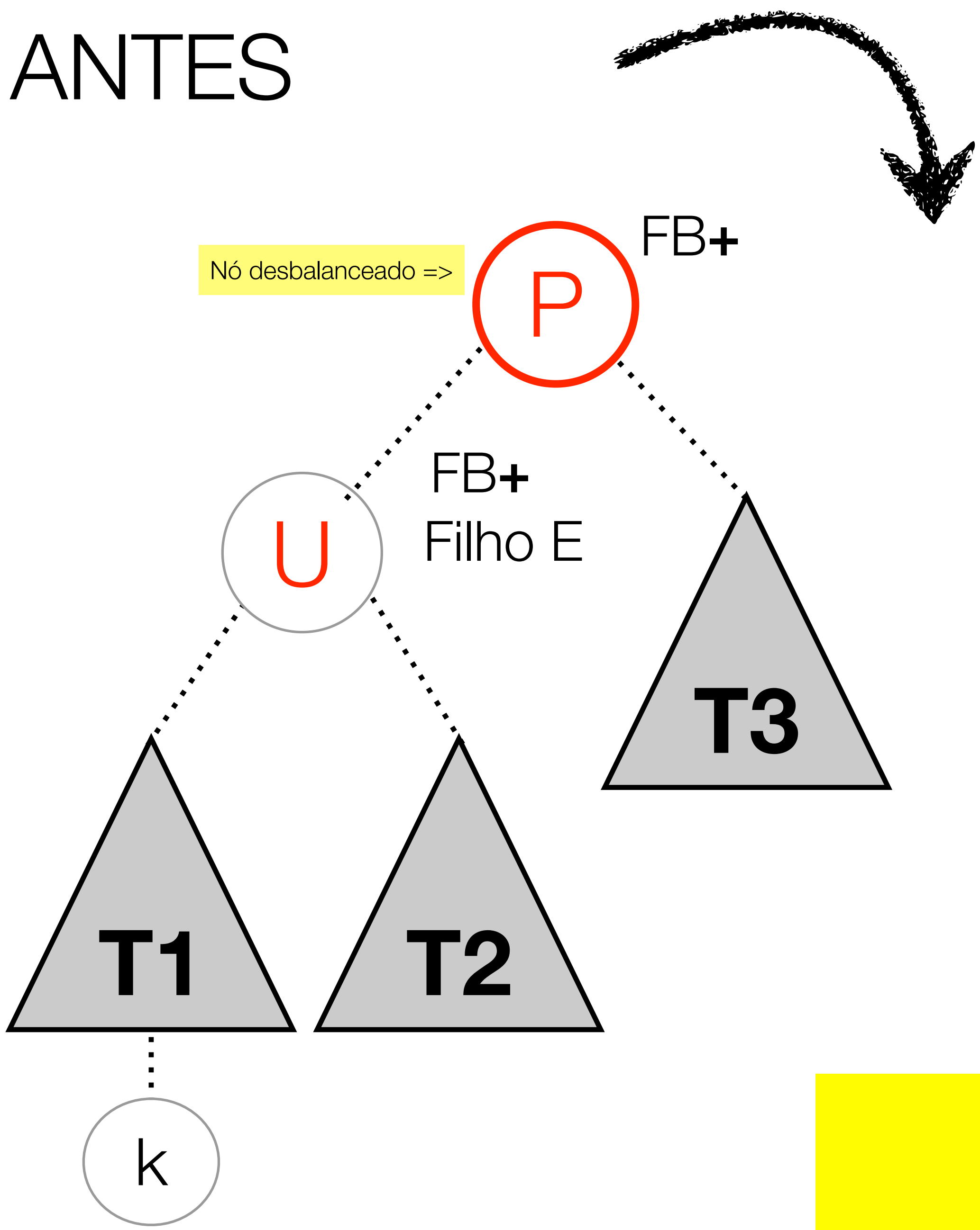
3. SE NÃO RESULTAR EM AVL, EXECUTAR AS ROTAÇÕES NECESSÁRIAS PARA REBALANCEAR A ÁRVORE

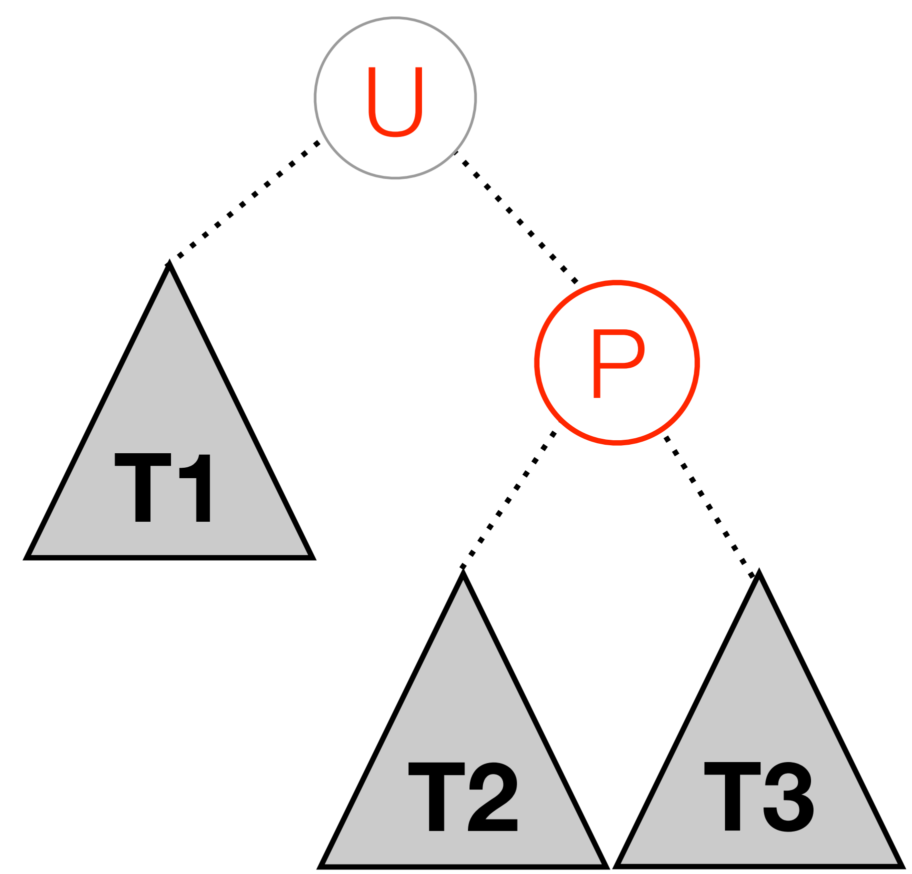
Balanceamento - Rotação Simples Direita

ESD 2
Estrutura de Dados

ANTES

DEPOIS





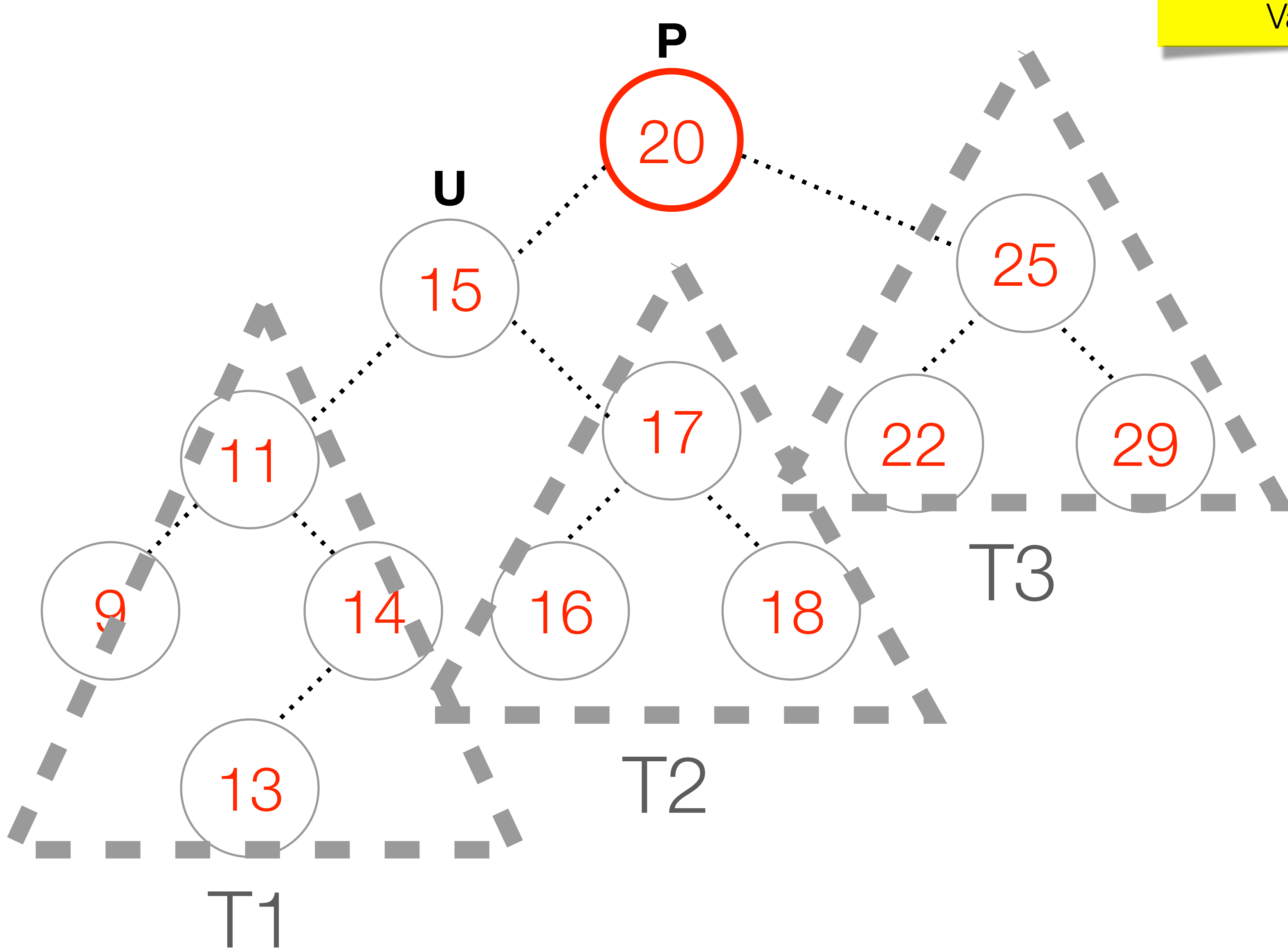
U.pai = P.pai
P.pai = U
P.esq = U.dir
U.dir = P

INSTITUTO FEDERAL
São Paulo

Balanceamento - Rotação Simples Direita

ESD 2 Estrutura de Dados

Vamos inserir o elemento **“13”**



INSTITUTO FEDERAL São Paulo

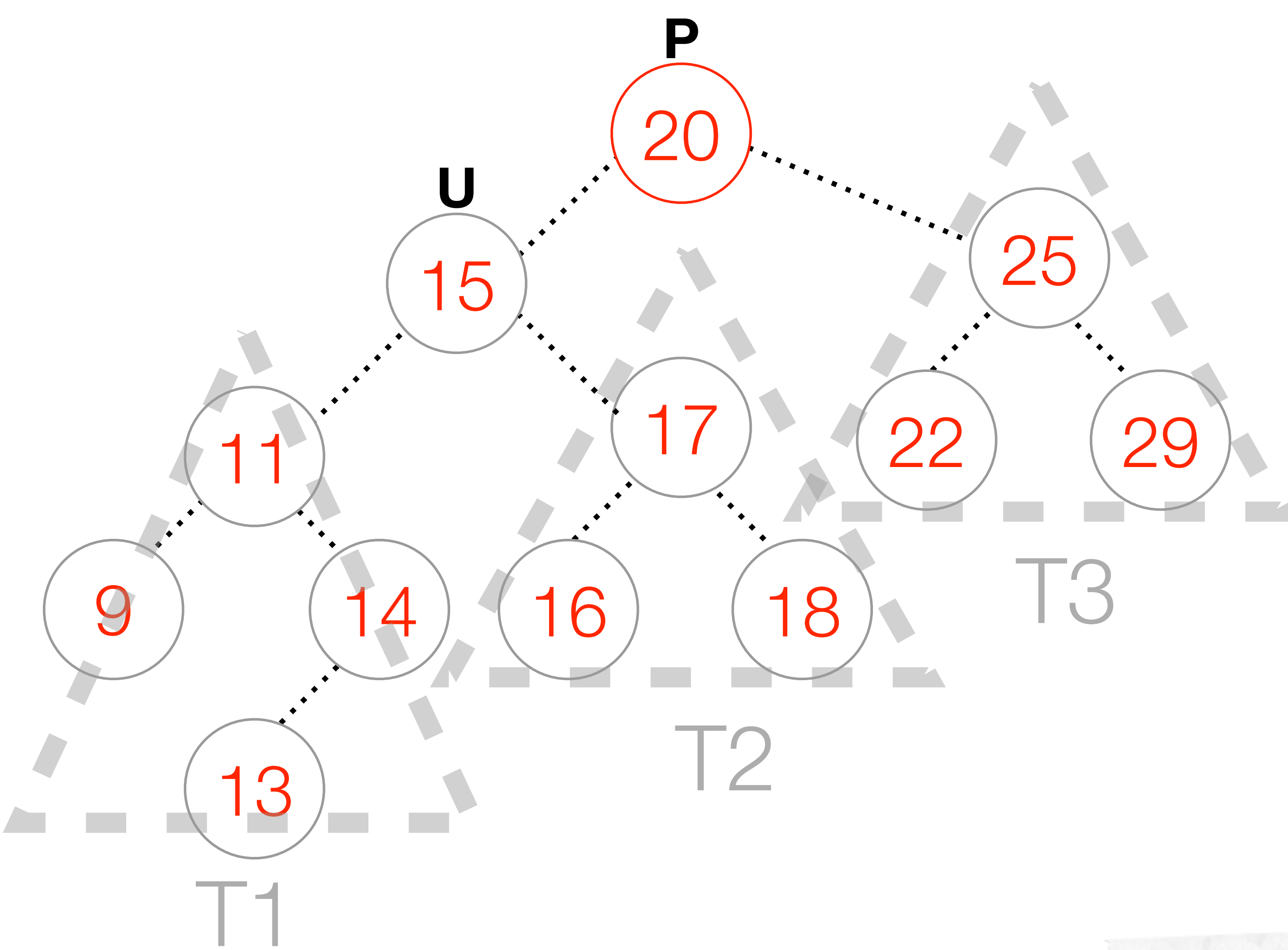
Balanceamento - Rotação Simples Direita

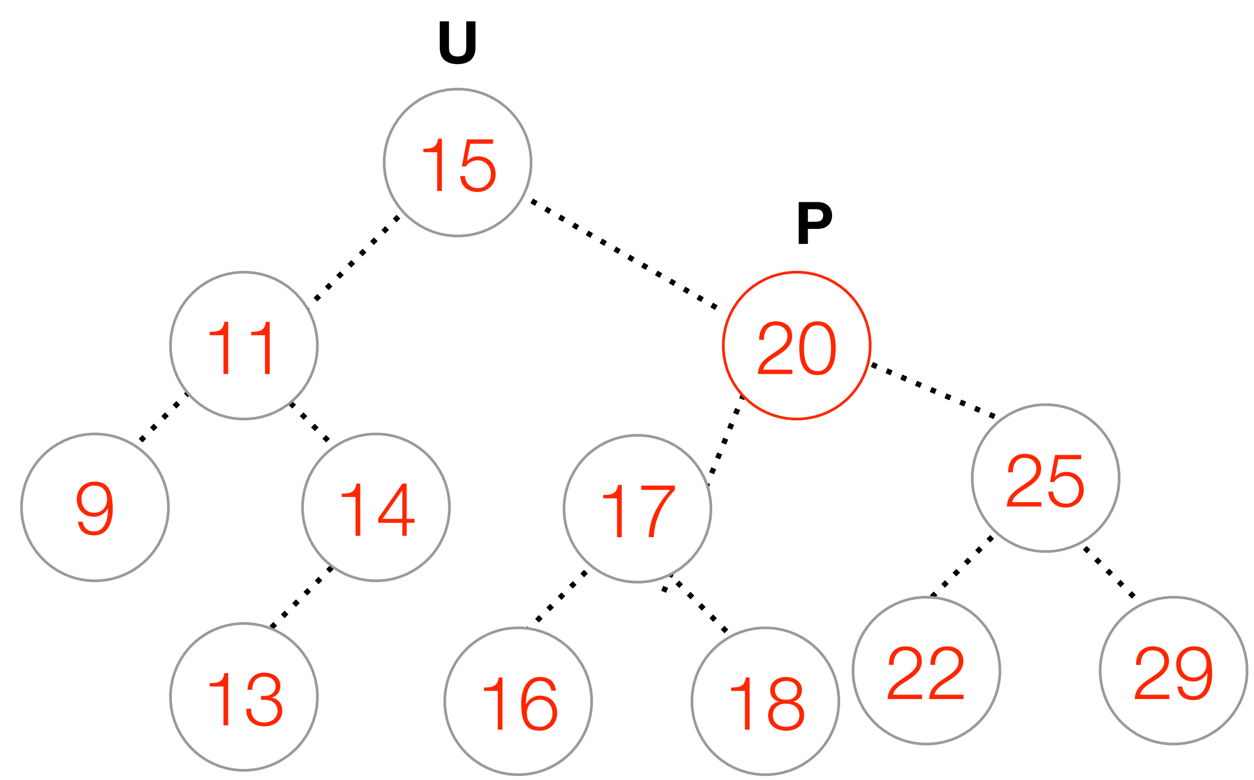
ESD2 Estrutura de Dados

ANTES

RSD (20,15) =>

DEPOIS





U.pai = P.pai
P.pai = U
P.esq = U.dir
U.dir = P

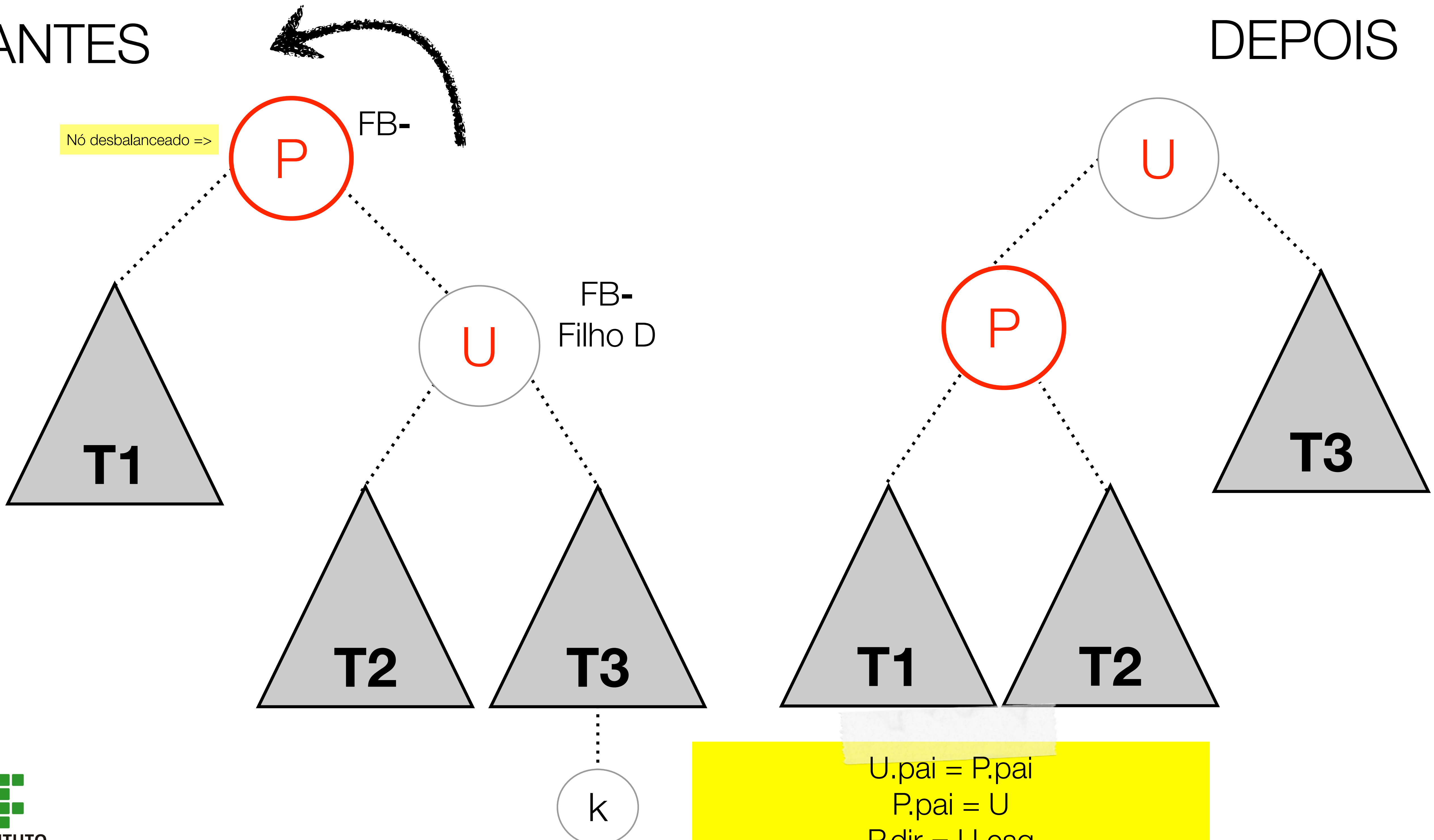
INSTITUTO FEDERAL São Paulo

Balanceamento - Rotação Simples Esquerda

ESD2 Estrutura de Dados

ANTES

DEPOIS



U.pai = P.pai
P.pai = U
P.dir = U.esq
U.esq = P

INSTITUTO FEDERAL São Paulo

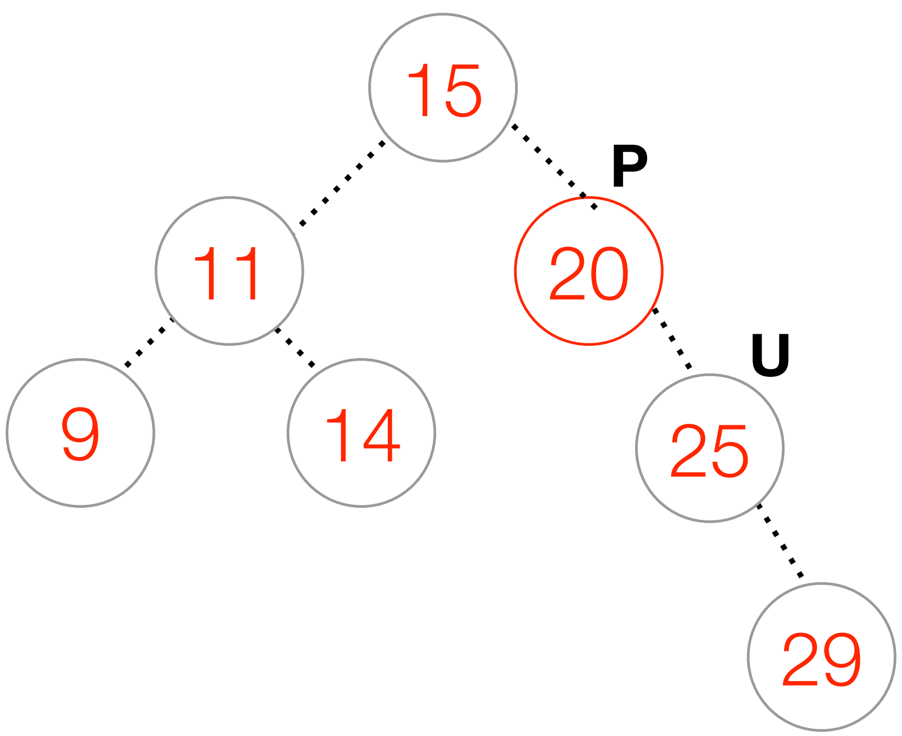
Balanceamento - Rotação Simples Esquerda

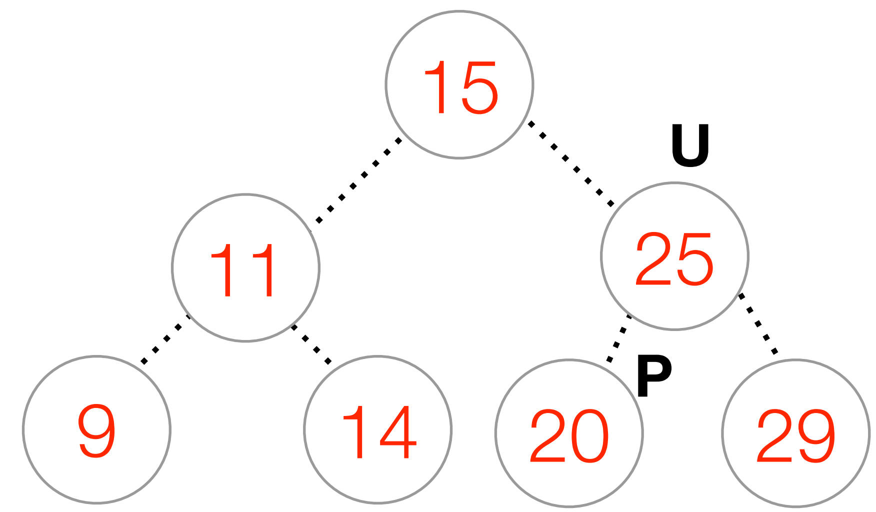
ESD2 Estrutura de Dados

ANTES

RSE (20,25) =>

DEPOIS





U.pai = P.pai
P.pai = U
P.dir = U.esq
U.esq = P

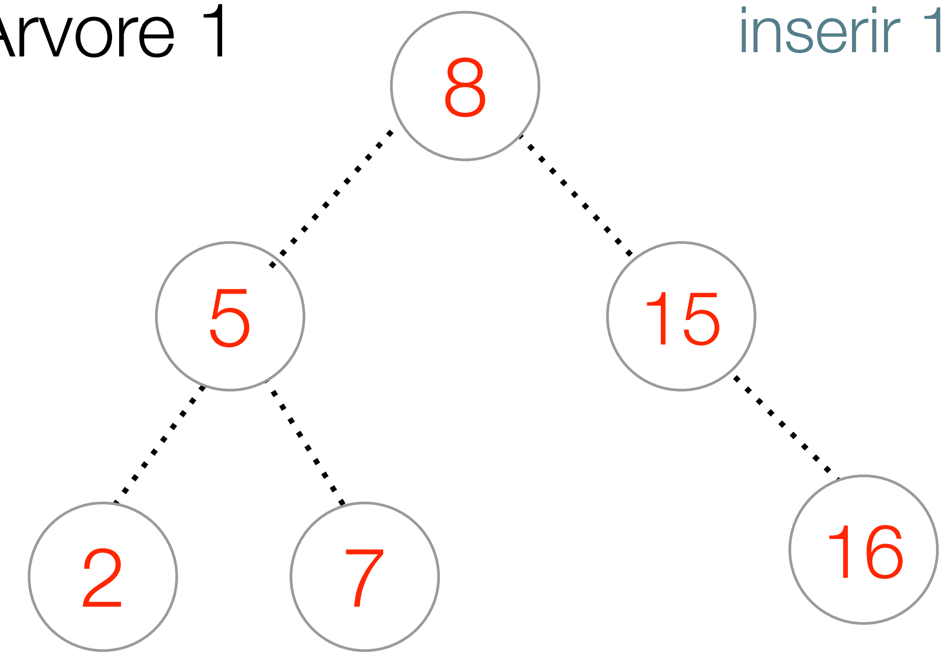
INSTITUTO FEDERAL
São Paulo

Atividade Prática

- Façam a inserção e balanceamento AVL na árvores ao lado.
- Desenhe a árvore AVL final para cada uma das árvores

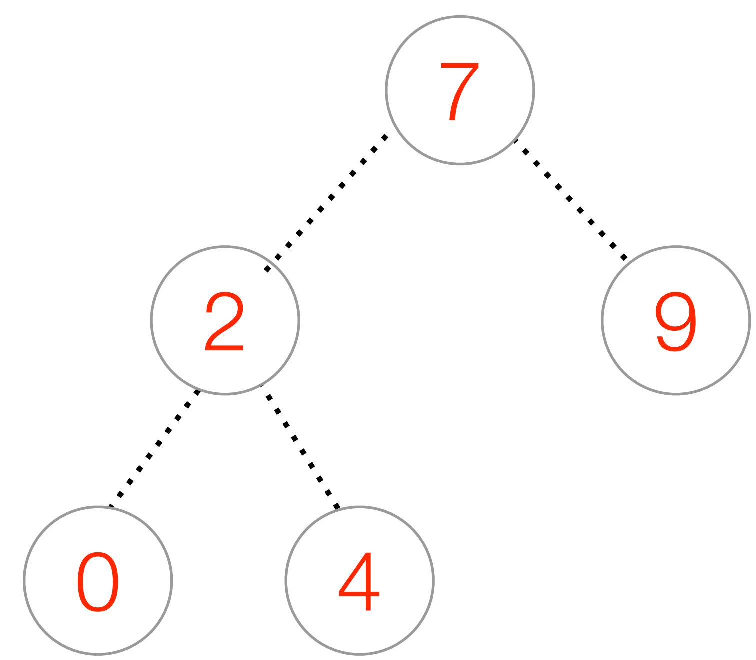
Árvore 1

inserir 17



Árvore 2

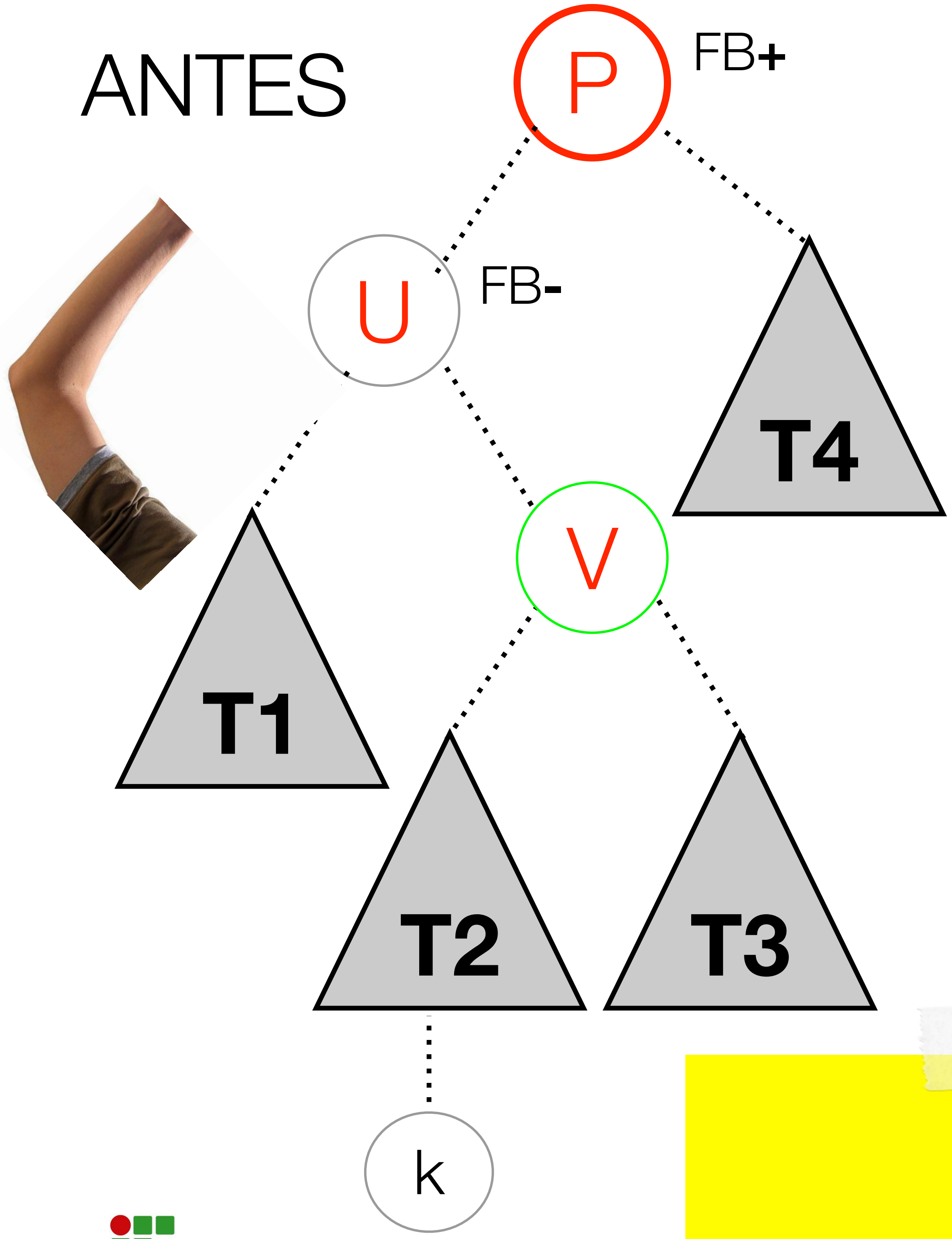
inserir -1



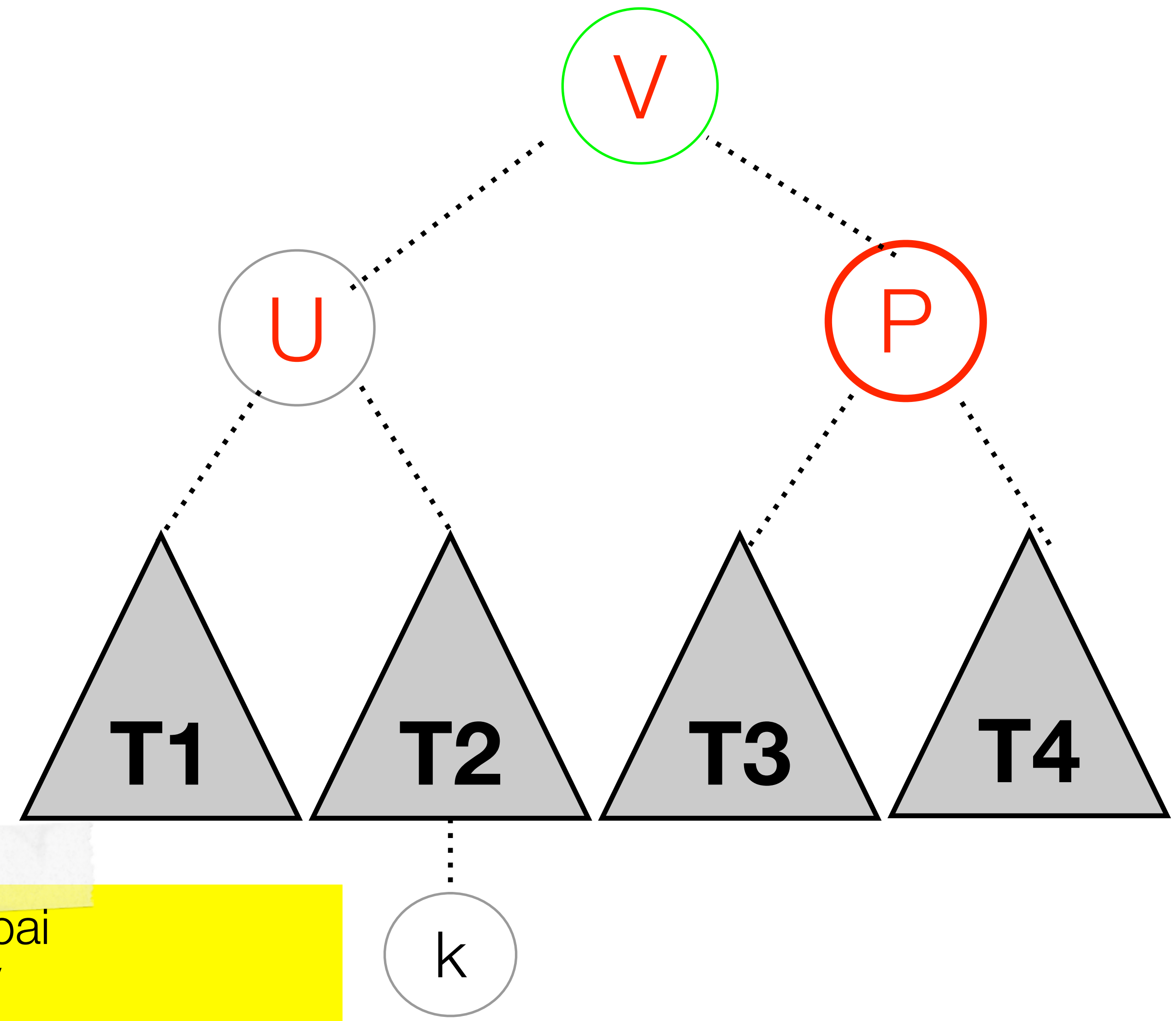
INSTITUTO FEDERAL
São Paulo

Balanceamento - Rotação Dupla Direita

ANTES



DEPOIS

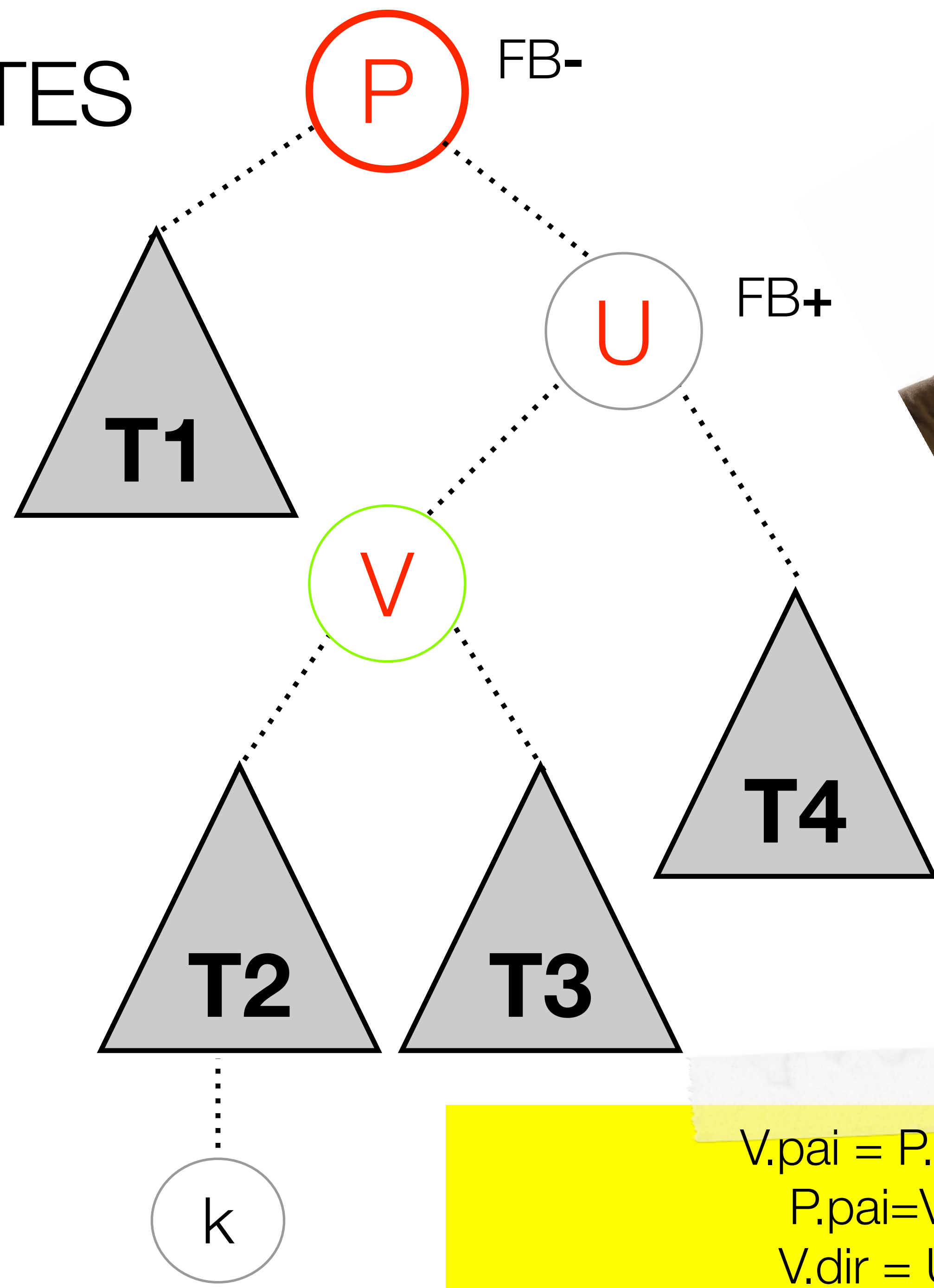


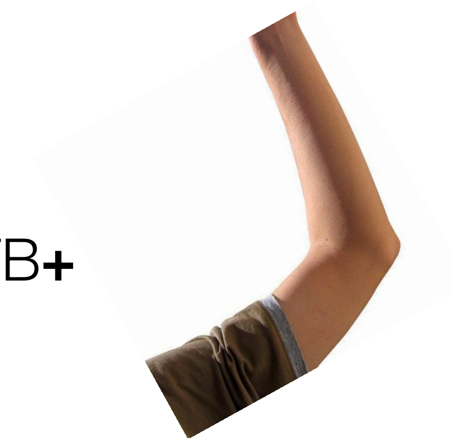
V.pai = P.pai
P.pai=V
V.dir = P
V.esq = U
U.dir = V.esq
P.esq = V.dir

Balanceamento - Rotação Dupla Esquerda

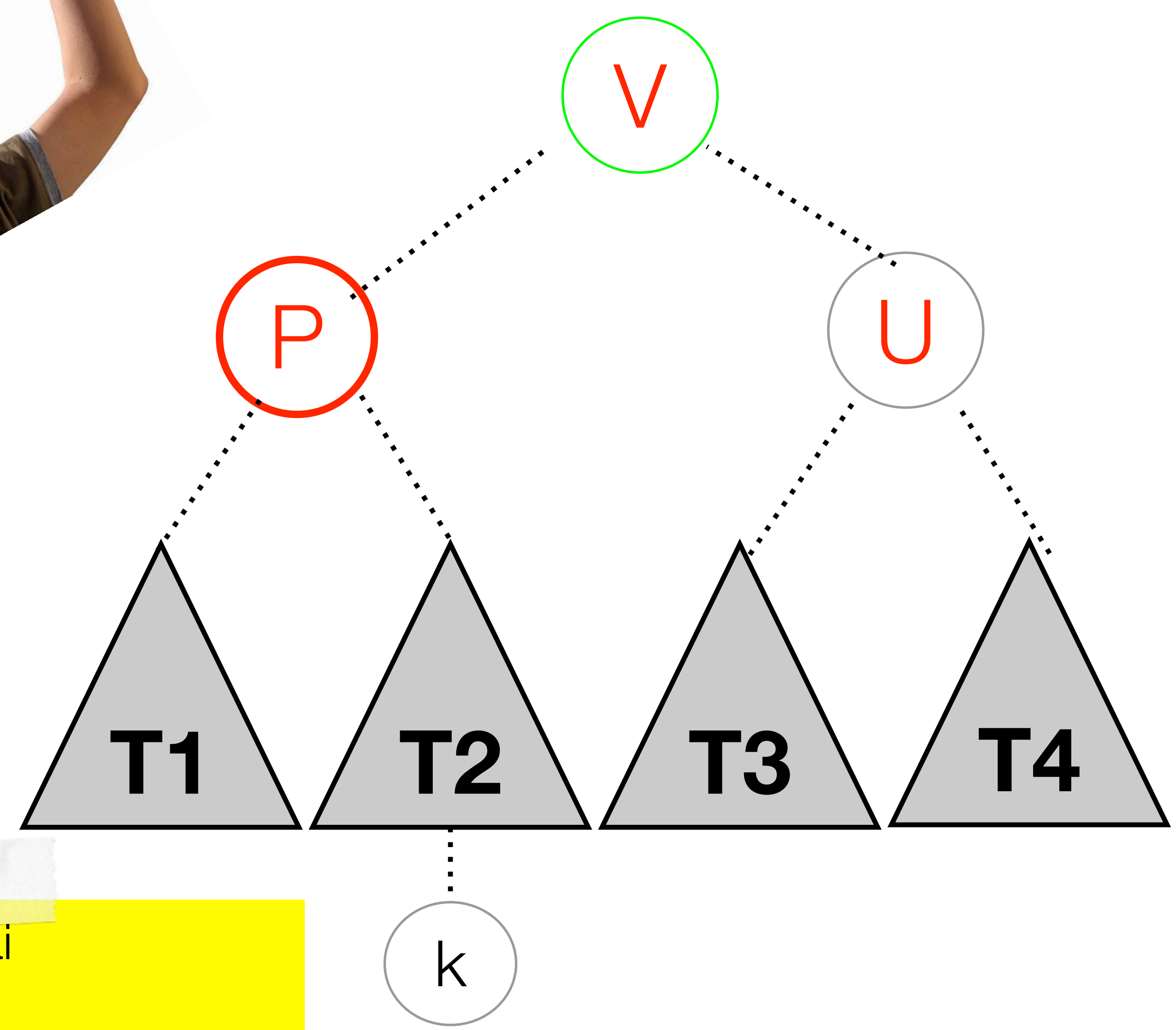
ESD2
Estrutura de Dados

ANTES





DEPOIS



V.pai = P.pai
P.pai=V
V.dir = U
V.esq = P
P.dir = V.esq
U.esq = V.dir

INSTITUTO FEDERAL
São Paulo

Resumo de Algoritmo de Inserção em AVL

ESD 2 Estrutura de Dados

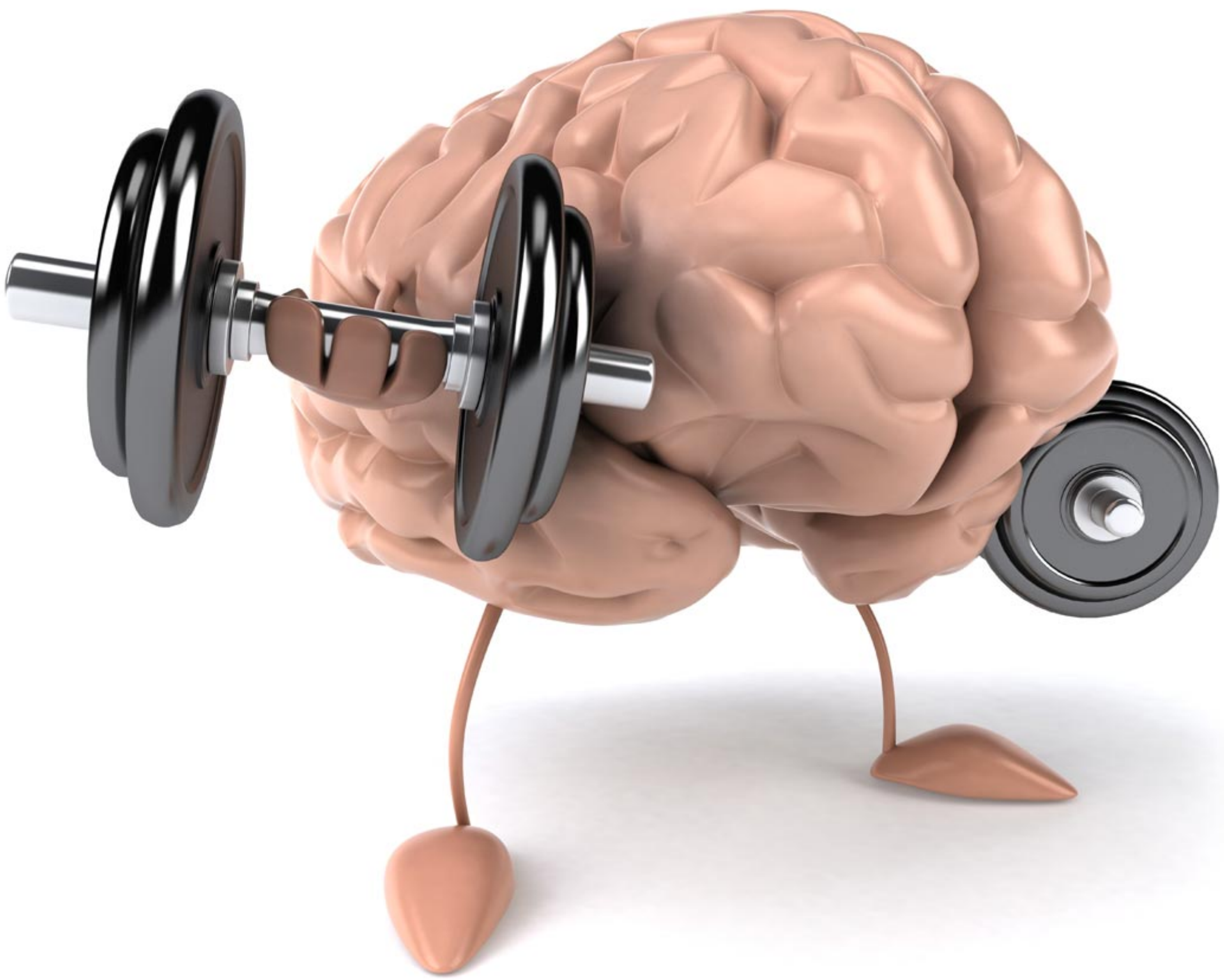
Rotação	P	U
RSD	FB+	FB+
RSE	FB-	FB-
RDD	FB+	FB-
RDE	FB-	FB+

INSTITUTO FEDERAL São Paulo

Exercitando…

ESD 2
Estrutura de Dados

- Vamos inserir na árvore AVL a seguinte sequência:
  - **Ex1:** 15, 27, 49, 10, 8, 67, 59, 9, 13, 20 e 14.
  - **Ex2:** 18, 2, 4, 7, 9, 11, 15, 3, 8, 12, 13, 20, 25, 35, 50



INSTITUTO FEDERAL
São Paulo

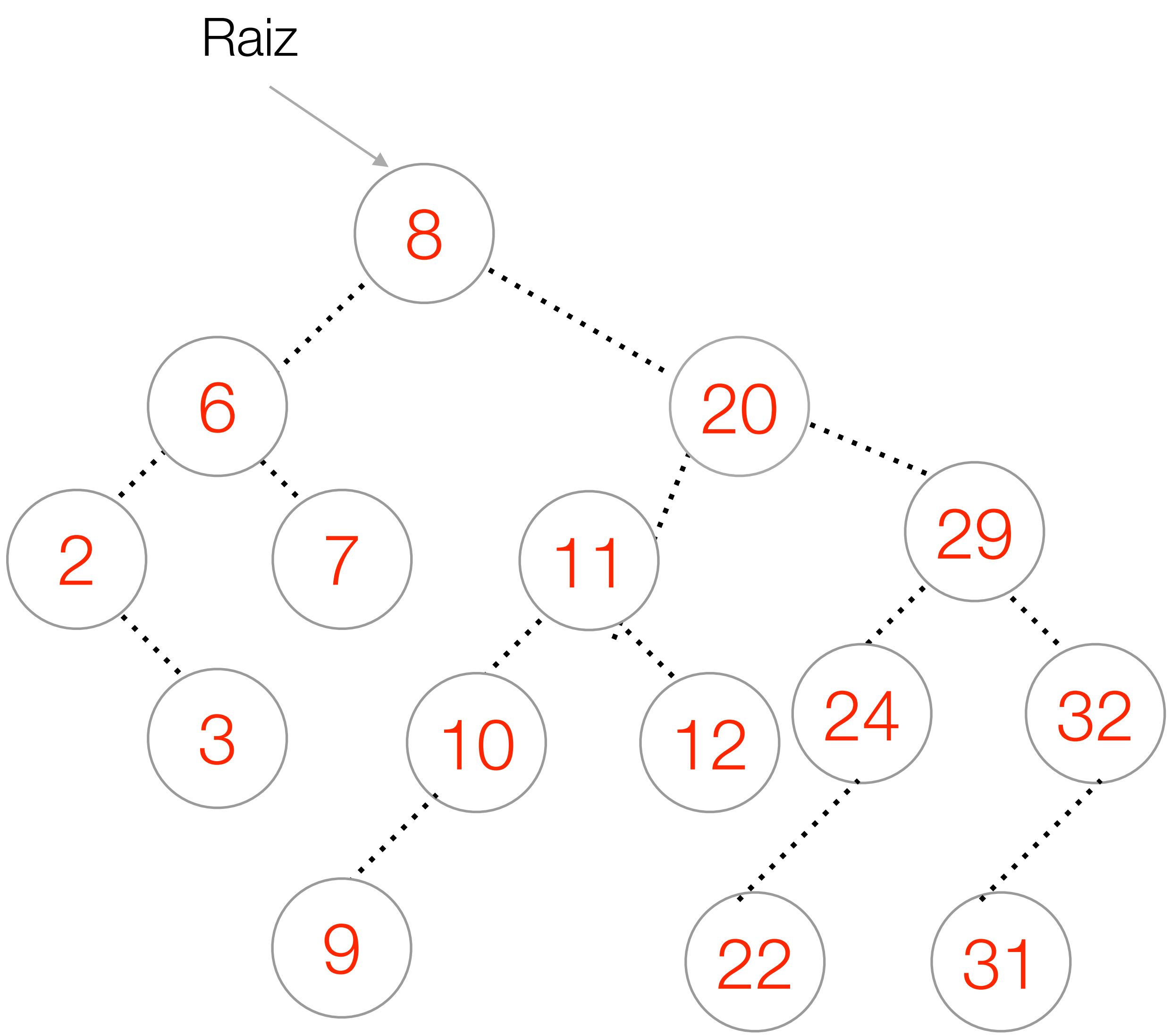
Remoção em árvore AVL

1. REMOVER UM ELEMENTO DA MESMA FORMA QUE EM UMA ÁRVORE BINÁRIA DE BUSCA

2. ATUALIZAR o FATOR DE BALANCEAMENTO DE SEUS ANCESTRAIS E VERIFICAR SE ESTÃO TODOS BALANCEADOS (É AVL?)

3. SE NÃO RESULTAR EM AVL, EXECUTAR AS <u>ROTAÇÕES</u> NECESSÁRIAS PARA REBALANCEAR A ÁRVORE

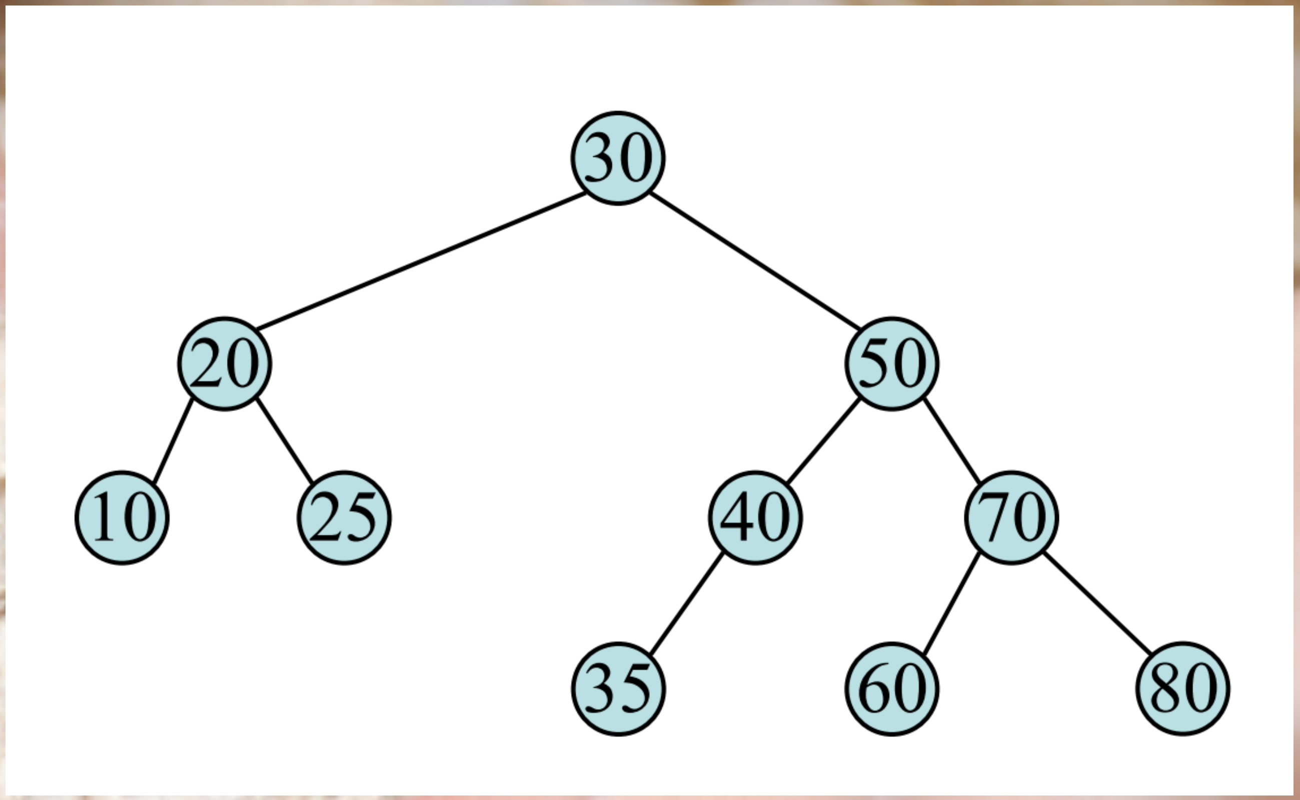
Exemplo: remoção em árvore AVL



- Vamos remover da árvore AVL na seguinte sequência:
    - 22, 24, 12, 7, 20 e 8

Atividade Prática

- Vamos realizar a remoção na árvore AVL (ao lado) na seguinte sequência:
    - 40,25,50,10,35,30,20,70 e 60.
- Identifique a árvore resultante após cada exclusão dos elementos



INSTITUTO FEDERAL
São Paulo

Resumo de Algoritmo de Remoção

- Se após a remoção a árvore estiver balanceada, não é necessário realizar mais nada

- Caso contrário, devemos balanceá-la aplicando operações de rotação sobre o ancestral mais novo desbalanceado, assim como na inserção

ESD2 Estrutura de Dados

Simulador AVL

https://www.cs.usfca.edu/~galles/visualization/AVLtree.html

INSTITUTO FEDERAL
São Paulo

ESD2

Estrutura de Dados

Prof. Fernando Sambinelli

sambinelli@ifsp.edu.br

INSTITUTO FEDERAL
São Paulo