E26

Chapitre 4 : tests d'hypothèse

1- Généralité

1-1- Définition

Un test d'hypothèse est un mécanisme qui permet au vu des données de l'échantillon de rejeter ou non une hypothèse. On distingue 2 classes de test : les tests paramétrique (si le test requiert un modèle paramétrique c-a-d basé sur 1 ou +sieur paramètre de la distribution.) ; les tests non-paramétriques.

+ Les hypothèses

Ils existent deux types d'hypothèses qui sont exclusives. L'hypothèse principale noteé H_0 est l'hypothèse nulle. Elle est celle que l'on désire contrôler et formuler generalement dans le but d'êtres rejeter.
La deuxième hypothèse est celle qui correspond à l'hypothèse de recherche. Elle est appellé La contre hypothèse ou hypothèse alternative noteé H_1

+ Formulation mathématique

Considerons Θ un ensemble non vide. Soit $i \in \{0,1\}$ et $\theta_i \in \Theta_i \subset \Theta$ avec $\Theta_0 \cap \Theta_1 = \phi$.

$$\begin{cases} H_0 : \theta \in \Theta_0 \\ H_1 : \theta \in \Theta_1 \end{cases}$$ on dit qu'on teste H_0 contre H_1.

Pour $i = 0$ si l'hypothèse H_i est definit par $H_i : \theta = \theta_i$ ($\Theta_i = \{\theta_i\}$), l'hypothèse est dite simple sinon elle est dit composite :

Si $H_1 : \theta > \theta_0$ (resp. $\theta < \theta_0$), unilateral droit (resp unilateral gauche).

Si $H_1 : \theta \neq \theta_0$, le test est dit bilateral

+ Les erreurs

Le rejet ou non de l'hypothèse nulle conduit à deux types d'erreurs.

- L'erreur de 1ère espèce ou de type 1 est dite au fait de rejeter à tord l'hypothèse nulle. On associe à cette erreur la probabilité suivante :

$$\alpha = \mathbb{P}(\text{Rejetter } H_0 / H_0 \text{ est vraie})$$

La valeur de α est generalmt fixé à priorie et son choix est lié au risque que l'on accepte de prendre dans la décision ; On l'appelle le seuil de signification ou de significativité.

- L'erreur de 2nd espèce ou de type 2 est celle que l'on commet en acceptant l'hypothèse nulle sachant qu'elle est fausse.

Sa probabilité correspondante est :

$$\beta = \mathbb{P}(\text{choisir } H_0 / H_0 \text{ est fausse})$$

Réalité / Décision	H_0 est vraie	H_0 est fausse
Choisir H_0	$1-\alpha$	β
rejetter H_0	α	$1-\beta$

$1-\beta$ = puissance du test

E27

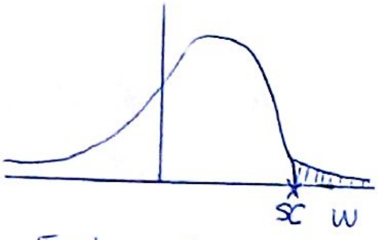
* Statistique de test

(W = région critique) SC : seuil critique

C'est la variable de décision. C'est une statistique dont la loi est ~~connue~~ parfaitement connue sous H_0 et sa réalisation permettra de décider ou non, le rejet de l'hypothèse nulle H_0.

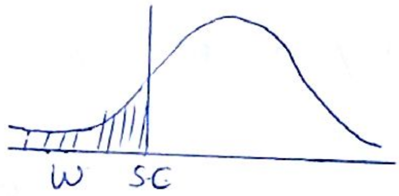
* Région critique et seuil critique
(W) (SC)

La région critique d'un test est l'ensemble des valeurs possibles de la statistique provenant de l'échantillon qui entraîne le rejet de H_0 au seuil de signification α. Le seuil critique est la valeur limite à partir de laquelle on rejette H_0. Il est défini à partir de l'erreur de type 1



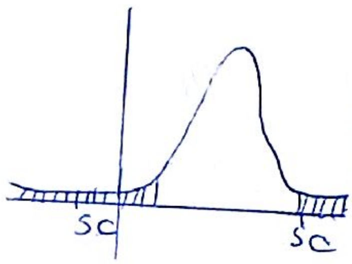
Test-unil. Droite

$W =]sc ; +\infty[$



Test-unilat. gauche

$W =]-\infty, sc[$



T. Bilatérale

$W =]-\infty, sc[\cup]sc ; +\infty[$

Le complémentaire de la région ou zone de rejet est appelé région d'acceptation ou zone de non rejet.

* La P-value

La p-value est le + petit seuil de significativité conduisant au rejet de H_0. Elle est évaluée à partir des observations et de leur propriété distributionnelle sous H_0. Soit S la statistique de test et S_{obs} sa réalisation

TUD : $pV = \mathbb{P}_{H_0}(S > S_{obs})$

TUG : $pV = \mathbb{P}_{H_0}(S < S_{obs})$

TB $pV = \mathbb{P}_{H_0}(|S| > |S_{obs}|)$

* Règle de décision

Il existe 2 manières équivalentes de prendre une décision ; La 1ère est de voir si la réalisation de la statistique de test est dans la zone de rejet W ou pas. Dans ce cas, on a la décision suivante :

si $S_{obs} \in W$, on rejette H_0 sinon elle n'est pas rejeté.

La 2ème manière consiste à comparer la p.value et le seuil de significativité α qui consiste à rejeter l'hypothèse nulle lorsque p-value $< \alpha$.

La + part des logiciels statistiques fournissent la P-value au lieu de la région critique.

Exemple

Un producteur prétend que la masse moyenne de ses sachets de sucre est de 550 g. pour vérifier cette affirmation, 20 sachets de la sa product° ont été pesé et on trouve une moyenne de 545 g.

Sachant que la masse de ses sachets est distribué suivant une loi normale d'écart-type 10 g, Peut-on au risque de 5% envisager des poursuite à l'encontre du fabricant ?

Correction

① Formulation des hypothèses

Il s'agit de vérifier si le producteur est un tricheur au vu de l'échantillon. On obtient un test unilatéral gauche $\mu_0 = 550$, $n = 20$, $\alpha = 5\%$

$$\begin{cases} H_0 : \mu = \mu_0 \text{ (sérieux : on accorde le bénéfice du doute au producteur)} \\ H_1 : \mu < \mu_0 \text{ (n'est pas sérieux} \end{cases}$$

Ex. 28

② Determinat° de la statistique de test.

$\bar{X}$ est le meilleur estimateur de μ.

Comme $X \rightsquigarrow N(\mu, \sigma^2)$, alors

$$Z = \sqrt{n}\,.\,\frac{\bar{X}-\mu_0}{\sigma} \rightsquigarrow N(0,1) \quad \text{(sous } H_0,\ \mu=\mu_0\text{)}$$

③ - Determination de la R.C

rejetter H_0 ie $\bar{X}$ s'éloigne trop de la moyenne μ_0.

Il existe x verifiant :

$$\alpha = \mathbb{P}(\text{Rejet de } H_0 \,/\, H_0 \text{ vraie}).$$

$$= \mathbb{P}(\bar{X} < x \,/\, H_0 \text{ Vraie})$$

$$= \mathbb{P}_{H_0}(\bar{X} < x)$$

$$= \mathbb{P}_{H_0}\left(Z < \sqrt{n}\,.\,\frac{x-\mu_0}{\sigma}\right)$$

$$= \phi\left(\sqrt{n}\,.\,\frac{x-\mu_0}{\sigma}\right).$$

Donc le seuil critique est $sc = \sqrt{n}\,.\,\frac{x-\mu_0}{\sigma}$, et on a :

$$\alpha = \phi(sc) \Rightarrow sc = \phi^{-1}(\alpha)$$

$$W =]-\infty\,;\ \phi^{-1}(\alpha)[\quad \text{or } \phi^{-1}(0{,}05) = -1{,}645$$

$$\Rightarrow W =]-\infty, -1{,}645[$$

④ règle de decision.

Calculons Z_{obs}

$$Z_{obs} = \sqrt{n}\,\frac{\bar{x}-\mu_0}{\sigma} = \sqrt{20}\,.\,\frac{545-550}{10} = -2{,}236$$

$$Z_{obs} = -2{,}236$$

$Z_{obs} \in W \Rightarrow$ Rejet de H_0, Le producteur est un tricheur au seuil de 5%

3) Calcul de la P-value.

$PV = \mathbb{P}_{H_0}(Z < z_{obs})$

$P\text{norm}(-2{,}236) \simeq 0{,}013$

$\Rightarrow PV = 0{,}013 < \alpha \Rightarrow$ Rejet de H_0 ; c'est un tricheur

Remarque :

Un IC correspond à la zone d'acceptation d'un test d'hypothèse.
Si le paramètre θ_0 à tester n'est pas dans l'IC, on rejete H_0. (avec le même α)

~~1-2- Généralités~~

1-2- Qualité d'un test

Définition [Fonction de risque]

On appelle fonction de risque de type 1, la fonction définit par :

$$\alpha : \Theta_0 \longrightarrow [0;1]$$
$$\theta \longrightarrow \alpha(\theta) = \mathbb{P}_{H_0}(W)$$

- La fonction de risque de type 2 :

$$\beta : \Theta_1 \longrightarrow [0;1]$$
$$\theta \longrightarrow \beta(\theta) = \mathbb{P}_{H_1}(\overline{W})$$

- La fonction puissance est donnée par :

$$\pi(\theta) = 1 - \beta(\theta) = \mathbb{P}_{H_1}(W)$$

E29

Définition

Un test est dit :

- Sans biais ssi $1-\beta > \alpha$.
- Convergent ssi $1-\beta \xrightarrow[n\to+\infty]{} 1$

Exercice

Soit $X_1, \dots, X_n$ issues de la $N(\mu, 1)$

Pour tester $H_0 : \mu = 5$ V.S. $H_1 : \mu > 5$

On adopte la région de rejet :

$$W = \{(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n \,/\, \bar{x} > 5 + \frac{1}{n}\}$$

① qu'el est le risque de 1ère espèce de type 1 de ce test (α).

② Donner l'expression de la moyenne empirique observé $\bar{x}$ en fonction de la p-value et de la taille n de l'échantillon

③ Déterminer sa fonction puissance, faire une représentation graphique pour $n = 20$; Déterminer graphiquement la valeur de α pour que le test soit sans biais

Solution

① On est en présence d'un TUD, donc $\alpha = \mathbb{P}_{H_0}(Z > SC)$

or $Z = \sqrt{n} \cdot \frac{\bar{X} - \mu_0}{\sigma} \sim N(0,1)$, sous H_0.

d'après l'énoncé, $\alpha = \mathbb{P}_{H_0}(W)$

$$= \mathbb{P}_{H_0}\left(\bar{X} > 5 + \frac{1}{\sqrt{n}}\right)$$

$$= \mathbb{P}_{H_0}\left(\sqrt{n}(\bar{X} - 5) > 1\right)$$

$$= 1 - \phi(1)$$

$$= 0{,}159$$

d'où $\boxed{\alpha = 15{,}9\,\%}$

② $pv = \mathbb{P}_{H_0}(Z > z_{obs})$

$= 1 - \phi(z_{obs})$

$\Rightarrow \phi(z_{obs}) = 1 - pv$

$\Rightarrow z_{obs} = \phi^{-1}(1-pv)$

$\sqrt{n} \cdot \frac{\bar{x} - \mu_0}{\sigma} = \phi^{-1}(1-pv)$

$\Rightarrow \bar{x} = \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \phi^{-1}(1-pv) + \mu_0$

D'où $\bar{x} = \frac{\phi^{-1}(1-pv)}{\sqrt{n}} + 5$

③ $\pi : \Theta_1 \longrightarrow [0,1]$

$\cancel{\mu} \longrightarrow \cancel{(\quad)}$

$\mu \longrightarrow \pi(\mu)$

$\pi(\mu) = \mathbb{P}_{H_1}(W)$

$= \mathbb{P}_{H_1}\left(\bar{X} > 5 + \frac{1}{\sqrt{n}}\right)$

$= 1 - \mathbb{P}_{H_1}\left(\bar{X} \leq 5 + \frac{1}{\sqrt{n}}\right)$

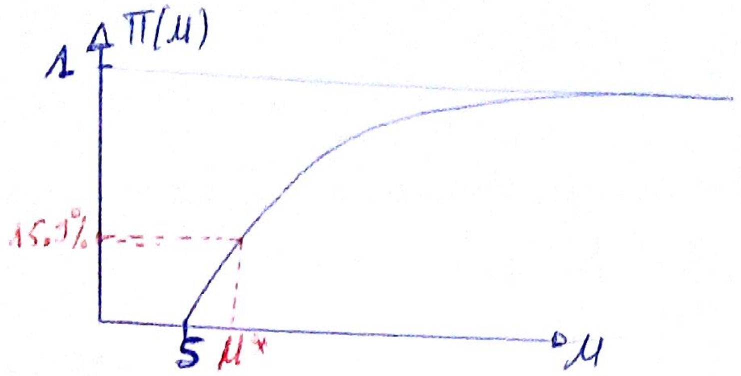
$= 1 - \mathbb{P}_{H_1}\left(\bar{X} - \mu \leq 5 + \frac{1}{\sqrt{n}} - \mu\right)$

$= 1 - \mathbb{P}_{H_1}\left(\sqrt{n}(\bar{X} - \mu) \leq \sqrt{n}(5-\mu) + 1\right)$

or $\frac{\sqrt{n}(\bar{X} - \mu)}{1} \xrightarrow{\mathcal{L}} N(0,1)$ sous H_1

$\pi(\mu) = 1 - \phi(\sqrt{n}(5-\mu)+1)$.

E30



Sous R : $n = 20$.

```
mu = seq(5, 7, 0.2)
Y = 1- pnorm(sqrt(n)*(5-mu)+1.9))
plot(mu, Y, type = "l")
```

Determinat° graphique voir graphe en rouge.
le test est sans biais si $\mu > \mu^*$

Définitions

On dit qu'un test de region critique w est meilleur qu'un test de region critique w' ssi :

$$\begin{cases} \mathbb{P}_{H_0}(w) \leq \mathbb{P}_{H_0}(w') \\ \mathbb{P}_{H_1}(w') \leq \mathbb{P}_{H_1}(w). \end{cases}$$

Definitions

- On dit que le test est de niveau si $\sup\{\alpha(\theta), \theta \in \Theta_0\} = \alpha$: c'est l'erreur de 1ère espèce maximale.
- seuil α, si $\sup\{\alpha(\theta); \theta \in \Theta_0\} \leq \alpha$.

Definit° (UPP)

Soit un test de region critique W. On dit qu'il est uniformement plus puissant dans la classes des tests de niveau α ssi il est meilleur que tous les autres test de niveau α.

$$\forall W \subset \mathbb{R}^n / \sup \{ \mathbb{P}_{H_0}(W), \theta \in \Theta_0 \} = \sup \{ \mathbb{P}_{H_0}(W^*); \theta \in \Theta_0 \} = \alpha$$

$$\mathbb{P}_{H_1}(W) \leq \mathbb{P}_{H_1}(W^*).$$

2) Tests parametrique classique (cf-document)

Exo 33- TD

$\mu_0 = 41,5$; $n = 100$; $\bar{x} = 45$, $S' = 11,25$

$T = \sqrt{n}\, \dfrac{\bar{X} - \mu_0}{S'} \longrightarrow St(n-1)$ Comme $n > 30$ alors :

$$Z = \sqrt{n} \cdot \frac{\bar{X} - \mu_0}{S'} \xrightarrow{\mathcal{L}} N(0;1) \text{ sous } H_0$$

Faut-il

$W \neq 5\%$ - au vu de ce rendement, favoriser la culture de la nouvelle variété ?

$W =] z_{1-\alpha} ; +\infty [$

$\alpha = 5\% \Rightarrow z_{0,95} = 1,645$

$W =] 1,645 ; +\infty [$

$z_{obs} = \sqrt{100} \cdot \dfrac{45 - 41,5}{11,25}$

$z_{obs} = 3,11 \in W$

$\Rightarrow$ rejet de H_0 d'où on favorise la culture de la nouvelle variété.

E31

EX 37. TD P.5 $\quad z_{\alpha/2} = -z_{1-\alpha/2}$

$$\begin{cases} H_0 : p = p_0 \\ H_1 : p \neq p_0 \end{cases}$$

$p_0 = 0{,}25$; $n = 200$; $\hat{p} = \frac{42}{200}$; $\alpha = 10\%$

La statistique est :

$$Z = \sqrt{n} \cdot \frac{\hat{p} - p_0}{\sqrt{p_0(1-p_0)}} \xrightarrow{\mathcal{L}} N(0,1) \text{ sous } H_0.$$

$W =]-\infty ; z_{\alpha/2} [\cup] z_{1-\alpha/2} ; +\infty[$

$W =]-\infty ; -z_{1-\frac{\alpha}{2}} [\cup] z_{1-\frac{\alpha}{2}} ; +\infty[$. avec $\alpha = 10\%$

$W =]-\infty ; -1{,}645 [\cup] 1{,}645 ; +\infty[$

$$z_{obs} = \sqrt{200} \, \frac{0{,}21 - 0{,}25}{\sqrt{0{,}25\,(1-0{,}25)}}$$

$$= -1{,}306$$

On ne rejette pas H_0 donc 25% de ses lecteurs étaient des étudiants

3- Les tests paramétriques asymptotiques

3-1 Test du rapport de vraisemblance

* Pour des hypothèses simples

$$H_0 : \theta = \theta_0 \quad Vs \quad H_1 : \theta = \theta_1$$

On appelle test de Neyman-Pearson, le test de ~~rejet~~ région critique donné par :

$$W = \left\{ \tilde{x} \in \mathbb{R}^n : \frac{L(\tilde{x};\theta_1)}{L(\tilde{x};\theta_0)} > k_\alpha \right\}$$

où k_α est tq :

$$\mathbb{P}_{H_0}\left(\frac{L(\tilde{x};\theta_1)}{L(\tilde{x};\theta_0)} > k_\alpha\right) = \alpha$$

Exemple

Considérons $\{N(\mu,\sigma^2)$; où $\sigma>0$ (connu), $\theta = \mu \in \mathbb{R}\}^{\otimes n}$.

On veut tester $H_0 : \mu = \mu_0$ Vs $H_1 : \mu = \mu_1$

$$L(\tilde{x},\mu) = (2\pi\sigma^2)^{-n/2} \exp\left\{-\frac{1}{2\sigma^2}\sum_{i=1}^{n}(x_i-\mu)^2\right\}$$

$$\frac{L(\tilde{x};\mu_1)}{L(\tilde{x};\mu_0)} = \exp\left\{\frac{1}{2\sigma^2}\left[\Sigma(x_i-\mu_0)^2 - \Sigma(x_i-\mu_1)^2\right]\right\}$$

$$= \exp\left\{\frac{1}{2\sigma^2}\left[\Sigma x_i^2 + n\mu_0^2 - 2\mu_0\Sigma x_i - \Sigma x_i^2 - n\mu_1^2 + 2\mu_1\Sigma x_i\right]\right\}$$

$$= \exp\left\{\frac{1}{2\sigma^2}\left[n(\mu_0^2-\mu_1^2) + 2(\mu_1-\mu_0)\Sigma x_i\right]\right\}$$

$$\frac{L(\tilde{x};\mu_1)}{L(\tilde{x},\mu_0)} > k_\alpha \Rightarrow \log\left[\frac{L(\tilde{x},\mu_1)}{L(\tilde{x},\mu_0)}\right] > \log k_\alpha$$

$\Rightarrow$ 2-

(32) $\Rightarrow 2(\mu_1-\mu_0)\sum x_i > 2\sigma^2 \log k_\alpha - n(\mu_0^2-\mu_1^2)$

$$2(\mu_1-\mu_0)\bar{x} > \frac{2\sigma^2}{n}\log k_\alpha - (\mu_0^2-\mu_1^2)$$

$*$ Si $\mu_1 > \mu_0$

$$\bar{x} > \underbrace{\frac{1}{2(\mu_1-\mu_0)}\left\{\frac{2\sigma^2}{n}\log k_\alpha - (\mu_0^2-\mu_1^2)\right\}}_{C_\alpha}$$

$$W = \{\tilde{x} \in \mathbb{R}^n \,/\, \bar{x} > C_\alpha\}$$

$$\alpha = \mathbb{P}_{H_0}(W) = \mathbb{P}_{H_0}(\bar{X} > C_\alpha)$$

$$= 1 - \mathbb{P}_{H_0}(\bar{X} \leq C_\alpha)$$

$$\Rightarrow \mathbb{P}_{H_0}(\bar{X} \leq C_\alpha) = 1-\alpha$$

$$\mathbb{P}_{H_0}\left(\sqrt{n}\,\frac{\bar{X}-\mu_0}{\sigma} < \sqrt{n}\,.\frac{C_\alpha-\mu_0}{\sigma}\right) = 1-\alpha$$

$$\sqrt{n}\,\frac{C_\alpha-\mu_0}{\sigma} = \phi^{-1}(1-\alpha) = z_{1-\alpha}$$

$$\Rightarrow C_\alpha = \frac{\sigma}{\sqrt{n}} z_{1-\alpha} + \mu_0$$

$$W = \left\{\tilde{x} \in \mathbb{R}^n \,/\, \bar{x} > \frac{\sigma}{\sqrt{n}} z_{1-\alpha} + \mu_0\right\}$$

<u>Application</u>

$n=10$; $\sigma=1$; $\mu_0=1$ et $\mu_1=3$, $\bar{x}=2$, $\alpha=5\%$

$$C_\alpha = \frac{1}{\sqrt{10}} \times 1{,}645 + 1$$

$$= 1{,}52$$

$$\bar{x} = 2 > 1{,}52 = C_\alpha$$

$\Rightarrow$ <u>Conclusion</u> : on rejette H_0

Exos

$X \sim \mathcal{P}(\lambda)$, $\sum x_i = 15$, $n = 6$

$H_0 : \lambda = 2$ VS $H_1 : \lambda = 1$

Déterminons la région critique W du test de Neyman-Pearson

$$L(\tilde{x}, \lambda) = \prod_{i=1}^{n} \frac{\lambda^{x_i}}{x_i!} e^{-\lambda} = e^{-n\lambda} \prod \frac{\lambda^{x_i}}{x_i!}$$

$$\frac{L(\tilde{x}, \lambda_1)}{L(\tilde{x}, \lambda_0)} = e^{x(\lambda_0 - \lambda_1)} \cdot \frac{\prod \lambda_1^{x_i}/x_i!}{\prod \lambda_0^{x_i}/x_i!}$$

$$= e^{x \cdot (\lambda_0 - \lambda_1)} \left(\frac{\lambda_1}{\lambda_0}\right)^{\sum x_i}$$

$$\frac{L(\tilde{x}; \lambda_1)}{L(\tilde{x}, \lambda_0)} > k_\alpha \Rightarrow \log\left[\frac{\log(\tilde{x}, \lambda_1)}{L(\tilde{x}, \lambda_0)}\right] > \log(k_\alpha)$$

$$\Rightarrow n(\lambda_0 - \lambda_1) + \left(\log \frac{\lambda_1}{\lambda_0}\right) \sum x_i > \log k_\alpha$$

$$\Rightarrow (\log \lambda_1 - \log \lambda_0) \sum x_i > \log k_\alpha - n(\lambda_0 - \lambda_1) \quad \text{or } \lambda_0 > \lambda_1$$

$- \cancel{\log 2 \sum x_i >}$

$$\sum x_i < \underbrace{\frac{\log k_\alpha - n(\lambda_0 - \lambda_1)}{\log \lambda_0 - \log \lambda_1}}_{C_\alpha}$$

$x_i \overset{ind}{\sim} \mathcal{P}(\lambda)$

$\sum x_i \sim \mathcal{P}(n\lambda)$

$\sum x_i < C_\alpha$

$$W = \{\tilde{x}, \sum x_i < C_\alpha\}$$

$$\alpha = \mathbb{P}_{H_0}(W) = \mathbb{P}_{H_0}(\sum x_i < C_\alpha)$$

Ex 33

Sous H_0 : $\sum x_i \sim \mathcal{P}(n\lambda_0)$

$\sum x_i \sim \mathcal{P}(12)$

$\alpha = \mathbb{P}(\mathcal{P}(12) < C_\alpha) \Rightarrow C_\alpha = 7$

Sous R : qpois (0,05 ; 12)

$\sum x_i$ n'est pas inferieure à C_α ; on ne rejette pas l'hypothèse nulle.

* Pour les tests Composites

$$\begin{cases} H_0 : \theta \in \Theta_0 \\ H_1 : \theta \in \Theta_1 \end{cases} \quad \text{où} \quad \Theta_0 \cup \Theta_1 = \Theta \text{ et } \Theta_0 \cap \Theta_1 = \Phi$$

On appelle rapport de de vraisemblance généralisé ~~le test dont la region de rejet est de la forme~~ : La fonction définie par :

~~$W = \{ \tilde{x} \in \mathbb{R}^n / \lambda(\tilde{x}) < k_\alpha \}$~~

~~theoreme~~

$$\lambda(\tilde{x}) = \frac{\sup_{\theta \in \Theta_0} L(\tilde{x}, \theta)}{\sup_{\theta \in \Theta} L(\tilde{x}, \theta)}$$

R V G

on appel test de rapport de vraisemblance generalisé, le test dont la region de rejet est de la forme :

$W = \{ \tilde{x} \in \mathbb{R}^n / \lambda(\tilde{x}) < k_\alpha \}$

Théorème

Sous les hypothèses de régularité, la statistique de tests du RVG est $\lambda(\tilde{X})$, et on a sous H_0 :

$$-2\log \lambda(\tilde{X}) \xrightarrow{\mathcal{L}} \chi^2_p \; ; p = \dim \Theta$$

3.2- Test du score

C'est un test qui est basé sur la fonction score.

* Cas unidimensionnel : $\theta \in \mathbb{R}$

$$\begin{cases} H_0 : \theta \in \Theta_0 \\ H_1 : \theta \in \Theta_1 \end{cases} , \Theta_0 = \{\theta_0\}$$

$S(\tilde{X}, \theta) = \sum S(X_i, \theta)$

$Var(S(\tilde{X}, \theta)) = I_n(\theta) = n I(\theta)$

$E(S(\tilde{X}, \theta)) = 0$

$$\frac{S(\tilde{X}, \theta)}{\sqrt{I_n(\theta)}} \rightsquigarrow N(0,1) \quad TCL$$

$$\frac{[S(\tilde{X}; \theta)]^2}{I_n(\theta)} \rightsquigarrow \chi^2_1$$

La statistique du score et sa loi sous H_0 sont données par :

$$K = \frac{[S(\tilde{X}, \theta_0)]^2}{I_n(\theta_0)} \rightsquigarrow \chi^2_1$$

Sa R.C est :

$$W = \{\tilde{x}, k > \chi^2_1(1-\alpha)\}$$

E 34

+ Cas multidimensionnelle

$$\theta = (\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_p) \in \mathbb{R}^p$$

$$K = [S(\tilde{x};\theta_0)]^t [I_n^{-1}(\theta)] [S(\tilde{x};\theta_0)] \longrightarrow \chi^2_p$$

$$W = \{\tilde{x} \in \mathbb{R}^n / k > \chi^2_p(1-\alpha)\}$$

3-3- Test de Wald

La détermination de la statistique du test de wald est fondé sur l'EMVS. Sous les condit° de regularité l'estimateur du MVS est asymptotiques gaussien et efficace.

+ Cas unidemensionnel

soit $\hat{\theta}$, L'EMVS donc $\frac{\hat{\theta}-\theta}{\sqrt{Var(\hat{\theta})}} \xrightarrow{\mathcal{L}} N(0,1)$

or, on a $Var(\hat{\theta}) \simeq \frac{1}{I_n(\theta)}$

$$\theta \in \mathbb{R} \quad \frac{(\hat{\theta}-\theta_0)^2}{1/I_n(\hat{\theta})} \longrightarrow \chi^2_1$$

sous $K = \frac{(\hat{\theta}-\theta_0)^2}{1/I_n(\hat{\theta})} \longrightarrow \chi^2_1$

$$W = \{\tilde{x} \in \mathbb{R}^n / k > \chi^2_1(1-\alpha)$$

E~~xercice d'application~~

Exercice d'applicat°

Considerons un modèle gaussien ~~$\theta = (\mu, \sigma^2)'$~~ $\theta = \begin{pmatrix} \mu \\ \sigma^2 \end{pmatrix}$

① Determiner: la statistique de ~~wald~~ score

② Determiner la statistique de wald.

$$\begin{cases} H_0 : \mu = \mu_0 \quad \text{et } \sigma^2 = \sigma_0^2 \\ H_1 : \mu \neq \mu_0 \quad \text{ou } \sigma^2 \neq \sigma_0 \end{cases}$$