UTPL
La Universidad Católica de Loja

Modalidad Abierta y a Distancia

Sistemas de Conocimiento de Geometría Analítica y Su Didactica

Guía didáctica

UTPL

Departamento de Ciencias de la Educación

Sección departamental de Pedagogía de las Ciencias Experimentales

Sistemas de Conocimiento de Geometría Analítica y Su Didactica

Guía didáctica

Autor:

Armijos Ordoñez Jorge Washington

EDUC_3153

Sistemas de Conocimiento de Geometría Analítica y Su Didactica
Guía didáctica

Armijos Ordoñez Jorge Washington

Universidad Técnica Particular de Loja
4.0, CC BY-NY-SA

Diagramación y diseño digital:

Ediloja Cía. Ltda.
Telefax: 593-7-2611418.
San Cayetano Alto s/n.
www.ediloja.com.ec
edilojainfo@ediloja.com.ec
Loja-Ecuador

ISBN digital - 978-9942-39-070-7

La versión digital ha sido acreditada bajo la licencia Creative Commons 4.0, CC BY-NY-SA: Reconocimiento-No comercial-Compartir igual; la cual permite: copiar, distribuir y comunicar públicamente la obra, mientras se reconozca la autoría original, no se utilice con fines comerciales y se permiten obras derivadas, siempre que mantenga la misma licencia al ser divulgada. https://creativecommons.org/licenses/by-nc-sa/4.0/deed.es

10 marzo, 2021

Índice

1. Datos de información

1.1. Presentación-Orientaciones de la asignatura

1.2. Competencias genéricas de la UTPL

- Vivencia de los valores universales del Humanismo de Cristo.
- Comunicación oral y escrita.
- Orientación a la innovación y a la investigación.
- Pensamiento crítico y reflexivo.
- Trabajo en equipo.
- Compromiso e implicación social.
- Comportamiento ético.
- Organización y planificación del tiempo.

1.3. Competencias específicas de la carrera

1. Integra conocimientos pedagógicos, didácticos y curriculares a través del uso de herramientas tecnológicas pertinentes que permitan interdisciplinariamente la actualización de modelos y metodologías de aprendizaje e incorporación de saberes en matemáticas y física, basados en el desarrollo del pensamiento crítico, reflexivo, creativo, experiencial y pertinentes en relación con el desarrollo de la persona y su contexto.

2. Implementa la comunicación dialógica como estrategia para la formación de la persona orientada a la consolidación de capacidades para la convivencia armónica en la sociedad, la participación ciudadana, el reconocimiento de la interculturalidad y la diversidad, y la creación de ambientes educativos inclusivos en el ámbito de las matemáticas y la física, a partir de la generación, organización y aplicación crítica y creativa del conocimiento abierto e integrado en relación a las características y requerimientos de desarrollo de los contextos.

3. Organiza modelos curriculares y la gestión del aprendizaje relacionados con las matemáticas y la física, centrados en la experiencia de la persona que aprende, en interacción con los contextos institucionales, comunitarios y familiares, orientados al diseño de procesos de enseñanza- aprendizaje y evaluación que integren la práctica de investigación acción hacia producción e innovación, la interculturalidad, la inclusión, la democracia, la flexibilidad metodológica para el aprendizaje personalizado, las interacciones virtuales, presenciales y las tutoriales.

4. Potencia la formación integral de la persona desde los principios del humanismo de Cristo y del Buen Vivir, basado en el desarrollo de su proyecto de vida y profesional que amplíen perspectivas, visiones y horizontes de futuro en los contextos.

1.4. Problemática que aborda la asignatura en el marco del proyecto

Cuando estamos en la parte final del desarrollo del currículo de la carrera Pedagogía de la matemática y la física, es necesario estudiar la correspondencia entre el álgebra y la geometría que permitan abordar dos problemas fundamentales: construir la curva definida por una ecuación y hallar la ecuación de un lugar geométrico, apoyados en la tecnología como el Software Matemático Interactivo GeoGebra, por esta razón, es necesario abordar la problemática de la escasa capacitación y/o formación en temas pedagógicos y didácticos, así como el dominio disciplinar, limitando la interacción en el proceso de enseñanza y aprendizaje.

1.5. Proyecto integrador de saberes

Diseño y construcción de escenarios, contextos y ambientes de aprendizaje para la enseñanza de las matemáticas y la física en el Bachillerato.

2. Metodología de aprendizaje

Apreciado estudiante, para iniciar con el desarrollo de la asignatura de Sistemas de conocimiento de Geometría analítica y su didáctica es necesario que tenga en cuenta las siguientes orientaciones generales para el estudio:

Planificación en el estudio y materiales educativos:

Planificación en el estudio:

- Organice sus actividades laborales y familiares para que disponga de un espacio y tiempo diario al estudio de esta asignatura.
- La asignatura de Sistemas de conocimiento de Geometría analítica y su didáctica tiene una duración de 192 horas distribuidas en 16 semanas, 8 semanas en cada bimestre y comprende en total 4 unidades de trabajo.
- Podría dedicar la primera semana para familiarizarse con el entorno virtual de aprendizaje y dos o tres semanas para desarrollar cada unidad. Por lo tanto, conviene distribuir el tiempo que puede llevarle leer, comprender cada tema y desarrollar las actividades recomendadas en cada unidad.
- Se sugiere una dedicación de por lo menos dos horas diarias de trabajo a fin de cumplir a satisfacción con todas las actividades propuestas. La distribución del tiempo que le sugerimos podría ayudarle a organizar mejor las tareas de

estudio; pero, es usted quien tiene el control sobre cuándo, cuánto y cómo aprender.

- Revise el plan docente ahí encontrará una panorámica total de lo que usted va a desarrollar durante el primer y segundo bimestre.
- No olvide revisar el Entorno Virtual de Aprendizaje (EVA) constantemente, porque cada semana el docente-tutor a través de anuncios académicos le asesorará, con la finalidad de orientar y facilitar su aprendizaje.

Los materiales educativos con los que se cuenta para esta asignatura son:

- Guía Didáctica presenta con claridad los procedimientos que debe seguir para el desarrollo de sus actividades, la misma se convertirá en mediadora de su aprendizaje, por ello, es indispensable revisarla de forma integral.
- Texto Básico, contiene los contenidos a estudiar de cada una las cuatro unidades ejemplos, ejercicios resueltos y ejercicios propuestos.
- Conexión a Internet, para revisar y/o descargar los materiales (artículos, videos, etc.) que profundizan el estudio de las temáticas que se abordan.
- Plan docente que contiene las actividades de aprendizaje recomendadas a lo largo del documento, para la comprensión de los fundamentos teóricos.
- Productos acreditables que debe organizarlos según lo solicitado, esto le permitirá consolidar su portafolio docente y sistematizar adecuadamente su práctica educativa.

- Fuentes informativas confiables, de bases de datos responsables, con fines teóricos fundamentados; además, recurra a los recursos educativos abiertos (REA) que su tutor sugiera en el EVA.
- Disponga de un cuaderno para anotaciones, lápiz, borrador, resaltador, es importante obtener el material necesario antes de empezar el trabajo para evitar distracciones innecesarias.

Para estudiar:

- Recurra a la lectura comprensiva, para obtener mayor provecho del estudio sugerido en esta asignatura.
- Plantee preguntas para organizar búsquedas, no lea solamente con el fin de memorizar, una buena manera es formulándose preguntas y aproximando respuestas.
- Revise detenidamente los temas y subtemas propuestos en la guía didáctica, estos conocimientos son esenciales.
- Desarrolle satisfactoriamente las preguntas y ejercicios propuestos en las actividades de aprendizajes recomendadas.
- Identifique en cada unidad las actividades que se solicitan y desarrolle de forma sistemática.
- Comparta sus construcciones con su tutor y compañeros, es muy importante ya que permite asegurarnos de la validez y pertinencia de las actividades que vamos desarrollando.

Metodología para el desarrollo de las actividades de aprendizaje

La metodología para el estudio y aprendizaje se sustenta en la indagación, centrada en la comprensión conceptual, situada en contextos locales y globales, así como la enseñanza se concentra en el trabajo en equipo y la colaboración eficaz, es diferenciada para satisfacer las necesidades de todos los alumnos y está guiada por la evaluación, que seguirán los estudiantes para alcanzar aprendizajes significativos en la profesionalización, también se sustenta en el aprendizaje basado en problemas ABP, donde el protagonista del aprendizaje es el propio estudiante, que asume con responsabilidad su formación profesional, siendo él, la parte más activa en el proceso. Prieto (2006) defendiendo el enfoque del aprendizaje activo señala que "el aprendizaje basado en problemas representa una estrategia eficaz y flexible que, a partir de lo que hacen los estudiantes, pueden mejorar la calidad de su aprendizaje universitario en aspectos muy diversos" (p. 9) así, en un contexto real de su profesión, promueve el pensamiento crítico y la toma de decisiones.

Poner en práctica esta metodología no supone sólo el ejercicio de indagación por parte de los estudiantes, sino convertirlo en datos e información útil, las grandes ventajas observadas con el uso de esta metodología son:

- El desarrollo del pensamiento crítico y competencias creativas.
- La mejora de las habilidades de resolución de problemas.
- El aumento de la motivación del alumno.
- La mejor capacidad de transferir conocimientos a nuevas situaciones.
- Trabajo en equipo.
- Habilidades de comunicación.
- Desarrollo de actitudes y valores: precisión, revisión, tolerancia "(Colplex, 2019, p.1)

Formas de comunicación e interacción:

- Comuníquese por correo o telefónicamente con su tutor para resolver cualquier inquietud en el desarrollo de sus actividades para el aprendizaje, revise el horario de tutoría que consta en el EVA.

- Participe de las actividades sincrónicas y asíncronas planificadas por cada bimestre, e interactúe permanentemente con su docente-tutor y/o compañeros/as, a fin de enriquecer sus experiencias de aprendizaje.
- Sistematice la información obtenida de cada una de las actividades de aprendizaje propuestas en cada bimestre las mismas que conllevan al desarrollo de la tarea académica.

Si usted cumple con las recomendaciones aquí planteadas con seguridad tendrá muchos éxitos en el desarrollo de esta asignatura.

¡Bienvenidos!

3. Orientaciones didácticas por resultados de aprendizaje

Primer bimestre

Resultado de aprendizaje 1	Aplica las leyes y teoremas de la circunferencia y parábola para construir sus ecuaciones y resolver problemas de aplicación.

Contenidos, recursos y actividades de aprendizaje

Bienvenidos al curso de Sistemas de conocimiento de geometría analítica y su didáctica. Damos inicio profundizando nuestros conocimientos sobre sistemas de coordenadas, segmento de recta, line recta y sus ecuaciones, circunferencia sus ecuaciones, gráficas y elementos.

Para lograr el resultado de aprendizaje dispone de recursos de aprendizaje como la guía didáctica, texto básico, recursos educativos abiertos, actividades recomendadas, refuerzos, actividades de aprendizaje evaluadas, autoevaluaciones y la tutoría del docente que será la guía principal para alcanzar el primer resultado de aprendizaje.

Semana 1

Unidad 1. Sistemas de coordenadas y segmento rectilíneo

En esta unidad encontrará una síntesis de los fundamentos teóricos, demostración de las principales ecuaciones, gráficos explicativos y ejemplos resueltos, sobre los sistemas de coordenadas, segmento, la línea recta y sus ecuaciones.

Además, están explícitos los recursos de aprendizaje, actividades recomendadas, refuerzos, actividad de aprendizaje evaluada, autoevaluación, que será la guía principal para alcanzar el primer resultado de aprendizaje.

Iniciemos el estudio de la geometría analítica, como una actividad de experiencia recordando y analizando que, desde el antiguo Egipto, cuando el río Nilo inundaba los campos de cultivo, se establecieron límites utilizando la geometría.

"La casi perfecta cuadratura y orientación norte-sur de la gran pirámide de Guiza, construida hacia el 2570 a. C., confirma que los egipcios dominaban la agrimensura" (Heras, 2014, p.1) utilizando como referencia sistemas compuestos, por dos ejes perpendiculares. Así, encontramos imágenes que evidencian la utilización de la geometría como se muestra en la siguiente figura:

Figura 1.

Agrimensor delimitando parcelas. Tumba de Menna. Valle de los Nobles. Tebas

Fuente: Historia de la Humanidad. Tomo 4. Antiguo Egipto. Ana María Vázquez. Arlanza Ediciones, 2.000

Como actividad de reflexión analicemos que, a partir del legado del matemático René Descartes (1596-1650), se estudia el concepto de sistemas de coordenadas:

1.1. ¿Qué es el sistema de referencia?

Es el conjunto de ejes, puntos o planos que concurren en el origen y a partir de los cuales se determinan las coordenadas de cualquier punto, también conocido como sistema de coordenadas.

1.2. ¿A qué llamamos sistema de coordenadas?

Al conjunto de valores numéricos que permiten definir la posición de cualquier punto en un espacio geométrico respecto de un punto designado como origen. Así encontramos tres sistemas de coordenadas en tres, dos y una, dos y tres dimensiones.

El estudio de los sistemas de coordenadas es un fragmento del objeto de la geometría analítica, permite expresar y resolver problemas geométricos de manera "numérica". Entre los principales sistemas de coordenadas tenemos: geográficas, cartesianas, también conocidas como rectangulares, y polares.

Una vez que hemos diferenciado los conceptos de sistemas de referencia y sistemas de coordenadas, analicemos cada uno de los principales sistemas de coordenadas:

1.3. ¿A qué llamamos sistema de coordenadas geográficas?

Son un conjunto de líneas imaginarias que nos permiten ubicar con exactitud un lugar en la superficie de la Tierra (Carpinteyro, 2016, p. 4).

El sistema de coordenadas geográficas es un sistema de coordenadas esféricas mediante el cual un punto se localiza con dos valores angulares: la latitud y la longitud.

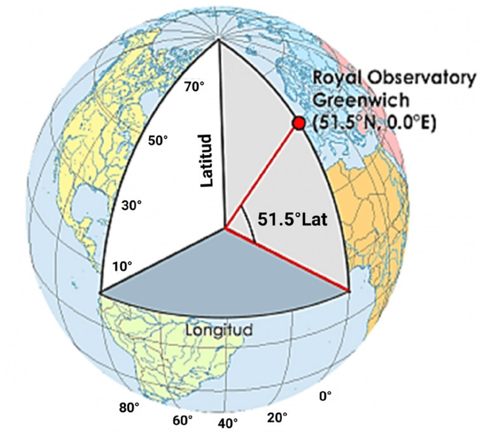
¿Qué es la latitud? Es el ángulo entre la línea que une el centro de la esfera con un punto de su superficie y el plano ecuatorial. (AplicTop, 2020)

Los paralelos. Son las líneas formadas por puntos de la misma latitud y forman círculos concéntricos paralelos al Ecuador.

La latitud es de 0° en el Ecuador, que divide el globo en los hemisferios norte y sur.

Puede enunciarse describiendo si el punto se sitúa al norte o al sur, por ejemplo 24° 21′ 11″ N, o bien utilizando un signo, en cuyo caso los puntos al Sur del Ecuador tienen signo negativo (edeca.una.ec. 2020), como se muestra en la siguiente figura:

Figura 2.
Latitud del Royal Observatory en Greenwich, Inglaterra.



Fuente: Latitud de 51.5°, es la posición del Royal Observatory en Greenwich, Inglaterra. (Gabri, 2018)

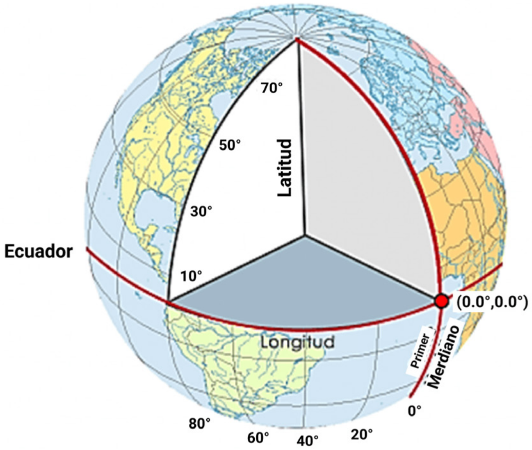
¿Qué es la longitud? Es el ángulo formado entre dos de los planos que contienen a la línea de los Polos. (AplicTop, 2020)

Los meridianos. Son las líneas formadas por puntos de igual longitud y convergen en los polos.

El meridiano de referencia internacional es aquel que pasa por el observatorio de Greenwich, en el Reino Unido, y divide el globo terráqueo en dos hemisferios: el este y el oeste.

La longitud puede formularse especificando si el punto se sitúa al este o al oeste, por ejemplo 32°, 12′ 43″ E; o bien utilizando un signo, en cuyo caso los puntos al este del meridiano de referencia tienen signo negativo (edeca.una.ec. 2020). Para una mayor comprensión analicemos la siguiente figura.

Figura 3.
Longitud, línea imaginaria Ecuador.

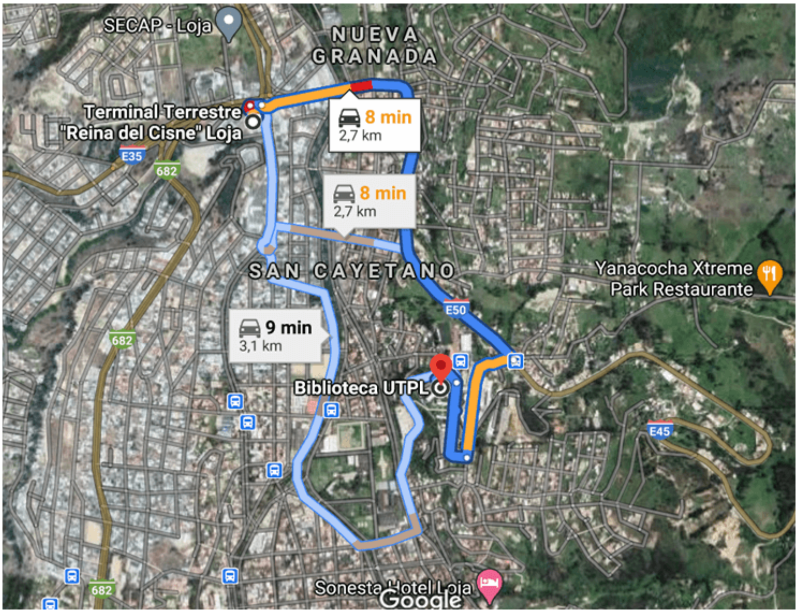


Fuente: La línea de 0° de longitud es el punto de partida de referencia. Desde el meridiano de Greenwich, podemos encontrar posiciones al este y al oeste. (Gabri, 2018)

Como actividad de experiencia podemos comprobar que, al llegar a un lugar desconocido de la ciudad, y dirigirnos a una dirección determinada, necesitamos de un punto de referencia que nos permita desplazarnos con precisión. Esto puede ser con la ayuda de un mapa, un Sistema de Posicionamiento Global (GPS) o la aplicación de Google Maps en su teléfono celular, como se muestra en la siguiente figura:

Figura 4.

Cómo llegar a la UTPL desde el terminal terrestre Reina del Cisne.



Fuente: Google Maps "es una herramienta de búsqueda de ubicaciones que permite geolocalizar un punto concreto, calcular rutas, encontrar los lugares de interés más cercanos o ver la apariencia de un lugar a pie de calle a través de Google Street View." (Artimetrics. s/f. p.1)

Uso de las tecnologías de la información y la comunicación (TIC)

El uso de las tecnologías de la información y la comunicación (TIC) han cambiado la forma como se relacionan las personas. El hecho educativo, como relación de enseñanza-aprendizaje, no escapa a esta realidad.

Si bien el acceso a internet en las instituciones educativas no es universal, al menos los estudiantes interactúan constantemente con ordenadores (portátiles y de escritorio) y dispositivos móviles (teléfonos inteligentes y tablets) conectados a la red de redes.

Esto supone para el profesor o profesora, en especial para el área de matemática, la ventaja de utilizar internet como recurso didáctico por dos razones:

Primero, permite acceder a mucha información actualizada y clasificada, de la más variada temática, sin contar con soportes físicos como las bibliotecas. Esta información nos permite, ampliar los contenidos abordados en las clases.

Segundo, permite crear soportes virtuales (documentos, videos, audios, esquemas, líneas del tiempo, etc.) para presentar a los estudiantes la información recogida y clasificada.

A la hora de utilizar internet como fuente de ampliación de contenidos, debemos presentar la actividad de la forma más clara y resumida.

Para usar los enlaces a internet de esta forma, se recomienda:

1. Hacer búsquedas de sitios web de acuerdo al tema que se quiere ampliar.

2. Verificar la idoneidad pedagógica y el rigor científico del contenido de los sitios encontrados.

3. Usar un acortador de URL (acortador de enlaces) para proporcionar a los estudiantes enlaces cortos que puedan copiar en su cuaderno sin inconveniente.

4. Sugerir el seguimiento de los enlaces junto a actividades que le permitan aprehender mejor la información. (Ministerio de educación, 2016. p, 28)

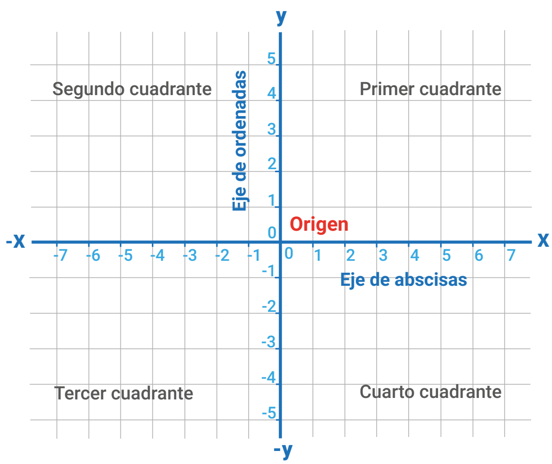
1.4. ¿A qué llamamos sistema de coordenadas rectangulares?

Cuadrantes. Son las fracciones del plano en cuatro partes divididos mediante dos rectas perpendiculares entre sí (horizontal y vertical). Dichas rectas se cortan en un punto que recibe el nombre de origen de coordenadas.

Las rectas se dividen en segmentos de igual longitud y a cada marca del segmento se le asigna un número entero. En la recta horizontal (llamada "eje de abscisas" o "eje de las x"), al punto de corte con la otra recta se le asigna el 0 y hacia la derecha él **1,2,3**...; y hacia la izquierda el **-1,-2,-3**...; y así, sucesivamente, en ambas direcciones.

De forma similar se procede con la recta vertical (llamada "eje de ordenadas" o "eje de las y"), al punto de corte se le asigna el 0 y hacia arriba él 1,2,3...; y hacia abajo el -1,-2,-3... de este modo cada punto del plano se localiza mediante pares ordenados (x,y), denominadas coordenadas. Para comprender de mejor manera analice la siguiente figura:

Figura 5.
Plano cartesiano



Índice
Primer bimestre
Segundo bimestre
Solucionario
Referencias bibliográficas

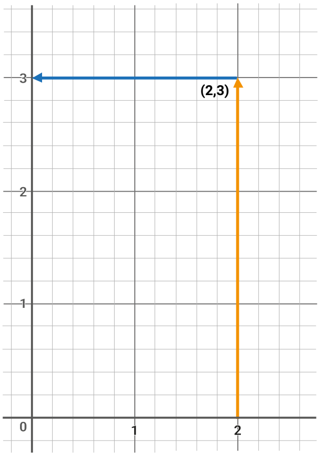
Como actividad de aplicación desarrollemos el siguiente ejemplo:

Ejemplo 1.

Ubiquemos en el plano cartesiano el punto (2,3)

Analicemos la siguiente figura:

Figura 6.
Ubicación de un punto en el plano cartesiano.



El punto de coordenadas (2,3) se localiza situándonos en el punto marcado con el 2 en el eje de las "**x**"; una vez aquí, subimos verticalmente de forma paralela al eje de las "**y**", hasta el lugar marcado en este eje con el 3, ese es el punto buscado.

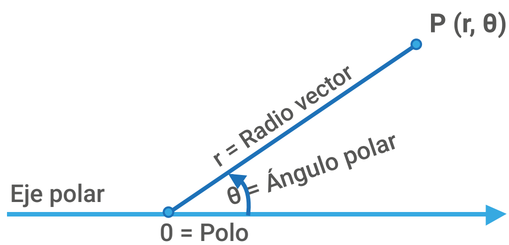
> **Utilización de la calculadora gráfica**
>
> Es importante resaltar en el campo de la didáctica el uso de la tecnología, en este caso para ubicar puntos en el plano cartesiano debemos desarrollar en los estudiantes el manejo de la calculadora gráfica como Geogebra, Symbolab, Mathway, Desmos, entre otras.

1.5. ¿A qué llamamos sistema de coordenadas polares?

A una recta en el plano geométrico que llamaremos eje polar y un punto fijo en esta recta que llamaremos polo. Fijamos la dirección positiva del eje polar a la derecha del polo. Para cada punto P del plano consideremos el segmento $\overline{\mathbf{OP}}$ que une el polo O con el punto P y el ángulo θ que hace este segmento $\overline{\mathbf{OP}}$ con la parte positiva del eje polar.

La longitud de $\overline{\mathbf{OP}}$ es el radio vector, que se denota por r y θ es el ángulo polar o vectorial, como se muestra en la siguiente figura.

Figura 7.
Sistema de coordenadas polares.



Los valores de r y θ se llaman las coordenadas polares del punto P y se expresan por P(r, θ).

El ángulo polar θ se mide siempre a partir de la parte positiva del eje polar y es positivo si la medida se efectúa en el sentido contrario al movimiento de las agujas de un reloj y negativo si se hace en el sentido de las agujas de un reloj. El ángulo polar se puede dar en cualquier medida angular pero lo más frecuente es usar grados sexagesimales o radianes

El radio vector se mide a partir del polo y es positivo cuando se mide sobre la línea terminal ($\overline{\mathbf{OP}}$) del ángulo polar y negativo si se mide sobre la prolongación de esta línea a través del polo.

Índice
Primer bimestre
Segundo bimestre
Solucionario
Referencias bibliográficas

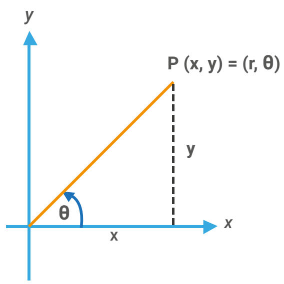
1.6. ¿Cómo transformamos los sistemas de coordenadas?

Frecuentemente es necesario transformar la ecuación cartesiana de un lugar geométrico en la respectiva ecuación polar y viceversa.

Las ecuaciones para realizar transformaciones se determinan fácilmente si consideramos un sistema cartesiano rectangular y un sistema polar de manera que el origen y el eje de abscisas del primero coincidan con el polo y el eje polar del segundo, respectivamente.

Figura 8.

Un punto en el sistema cartesiano y polar.



Para un punto P, cualquiera, que tenga coordenadas cartesianas *(x,y)* y coordenadas polares *(r, θ)*, se establecen las ecuaciones:

$$x = r \cos \theta$$

$$y = r \operatorname{sen} \theta$$

que permiten conseguir las coordenadas cartesianas de un punto conocidas sus coordenadas polares.

Elevando al cuadrado ambas ecuaciones y luego sumándolas se obtiene:

$$x^2 + y^2 = r^2$$
$$r = \sqrt{x^2+y^2}$$

Índice
Primer bimestre
Segundo bimestre
Solucionario
Referencias bibliográficas

Dividiendo en cada miembro, las dos primeras ecuaciones:

$$tan\ \theta = \frac{y}{x}, \quad x \neq 0,$$

$$\theta = arc\ tg\left(\frac{y}{x}\right), \quad con\ x \neq 0,$$

Las ecuaciones

$$r = \pm\sqrt{x^2 + y^2},\ y$$

$$\theta = arc\, tg\left(\frac{y}{x}\right),$$

permiten conocer las coordenadas polares de un punto conocidas sus coordenadas cartesianas.

Finalmente, obtenemos estas ecuaciones:

$$sen\ \theta = \pm\frac{y}{\sqrt{x^{2+}y^2}}$$

$$\cos\theta = \pm\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}$$

Que facilitan futuras transformaciones.

Revise los ejemplos

Como actividad de aplicación desarrollemos los siguientes ejemplos:

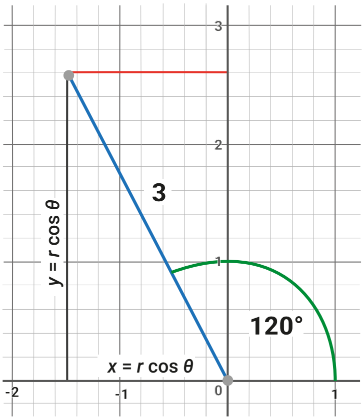
Ejemplo 2.

Hallar las coordenadas rectangulares del punto P, cuyas coordenadas polares son (3, 120º).

Analicemos la figura que se muestra a continuación.

Figura 9.

Un punto en coordenadas polares (3, 120º).



Utilizamos la ecuación:

$$x = r \cos \theta$$

Sustituimos valores y realizamos operaciones

$$x = 3 \cos \cos 120º$$

$$x = 3\left(-\frac{1}{2}\right)$$

$$x = -\frac{3}{2}$$

Este valor es la ordenada.

Utilizamos la ecuación:

$$y = r \cos \theta$$

Sustituimos valores y realizamos operaciones

$$y = 3 \operatorname{sen} 120º$$

$$y = 3\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$$

$$y = \frac{3\sqrt{3}}{2}$$

Tenemos las coordenadas rectangulares del punto:

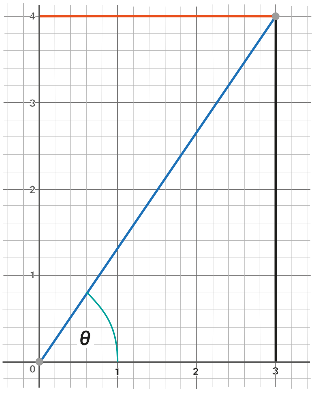
$$P\left(-\frac{3}{2}, \frac{3\sqrt{3}}{2}\right)$$

Ejemplo 3.

Determinemos las coordenadas polares del punto P, cuyas coordenadas rectangulares son (3,4).

Analicemos la figura que se muestra a continuación.

Figura 10.
Coordenadas polares del punto P(3,4).



Utilizamos la ecuación:

$$\theta = arc\ tg\left(\frac{y}{x}\right)$$

Índice
Primer bimestre
Segundo bimestre
Solucionario
Referencias bibliográficas

Sustituimos valores y realizamos operaciones

$$\theta = arc\ tg\left(\frac{4}{3}\right)$$

$$\theta = 53.13^o$$

Utilizamos la ecuación:

$$r = \pm\sqrt{x^2 + y^2}$$

Sustituimos valores y realizamos operaciones

$$r = \pm\sqrt{3^2 + 4^2}$$

$$r = \pm 5$$

Tenemos las coordenadas polares del punto

$$P\ (r, \theta)$$

$$P\ (5{,}53.13^o$$

Hemos concluido la primera semana de actividades para afianzar sus conocimientos tenemos los siguientes recursos de aprendizaje:

Recursos de aprendizaje

Para profundizar sus conocimientos sobre la temática abordada le invito a que:

Lea comprensivamente las páginas 1-12 del texto Básico, Carpinteyro E. (2016). Geometría Analítica.

Habilite el hipervínculo y mire atentamente el video de:

Acervo-Televisión Educativa. (2018). Las coordenadas geográficas

Retroalimentación

En este video encontramos información didáctica sobre representaciones de espacios geográficos, coordenadas geográficas como una red imaginaria de líneas 180 paralelos, separados 111 kilómetros entre sí, 360 meridianos, los paralelos determinan la latitud y los meridianos la longitud.

Habilite el hipervínculo y mire atentamente el video de:

Math2me (2016). Convertir coordenadas rectangulares a polares.

Retroalimentación

En este video se muestra el proceso matemático para convertir un punto de coordenadas rectangulares en coordenadas polares.

Actividad de aprendizaje recomendada

Desarrolle las actividades propuestas en el texto básico:

- Coordenadas geográficas páginas 5-7
- Coordenadas cartesianas páginas 8-9

Lo está haciendo muy bien.

¡Siga adelante!

Con esta información, más la adquirida de la lectura del texto básico, investigación, y la resolución de los ejercicios propuestos, está en condiciones de continuar con el análisis del siguiente tema: ¿A qué llamamos segmento rectilíneo?

Recuerde que a través del chat de tutoría y consulta puede aclarar sus dudas e inquietudes con su docente.

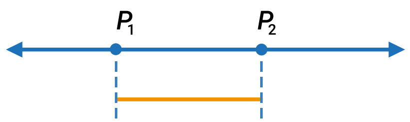
Índice
Primer bimestre
Segundo bimestre
Solucionario
Referencias bibliográficas

Semana 2

1.7. ¿A qué llamamos segmento de recta?

Es la parte de una línea recta comprendida entre dos de sus puntos, como se muestra en la siguiente figura.

Figura 11.
Segmento de recta.



1.7.1. ¿Cómo se determina la distancia entre dos puntos?

La distancia entre dos puntos es el valor absoluto de la longitud del segmento rectilíneo que une esos dos puntos. En un sistema coordenado lineal, la longitud del segmento dirigido que une dos puntos dados se obtiene, en magnitud y signo restando la coordenada del origen de la coordenada del extremo". (Lehmann, 2012, p. 5)

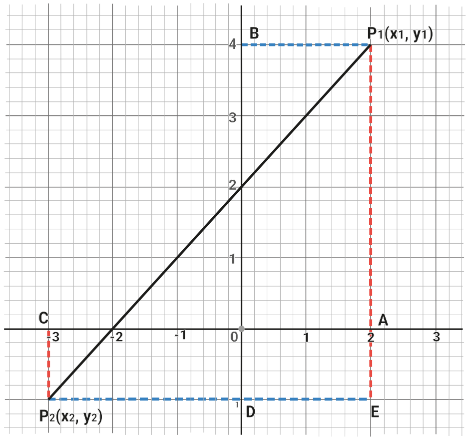
Si representamos la distancia por *d*, podemos escribir:

$$d = \left| \overline{P_1 P_2} \right|$$

Sean $P_1(x_1,y_1)$ y $P_2(x_2,y_2)$ dos puntos dados cualesquiera, determinemos la distancia d entre P_1 y P_1, siendo $d = \left|\overline{P_1P_2}\right|$.

Por P_1 y P_2 tracemos las perpendiculares $\overline{P_1A}$ y $\overline{P_2D}$ a ambos ejes coordenados y sea E su punto de intersección, como se indica en la siguiente figura.

Figura 12.
Distancia entre dos puntos.



Consideremos el triángulo rectángulo ΔP_1EP_2 donde d es la hipotenusa.

$$d^2 = \overline{P_1P_2^2}$$

Por el teorema de Pitágoras, tenemos:

$$d^2 = \overline{P_2E^2} + \overline{EP_1^2}$$

Las coordenadas de los pies de las perpendiculares a los ejes coordenados son

$A_1(x_1,0)$, $B(0,y_1)$, $C(x_2,0)$, $D(0,y_2)$

Observando la gráfica tenemos,

$$\overline{P_2E} = \overline{CA}$$

$$\overline{CA} = x^1 - x^2$$

$$\overline{EP_1} = \overline{DB}$$

$$\overline{DB} = y_1 - y_2$$

Sustituyendo tenemos:

$$d^2 = (x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2$$

$$d = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2}$$

Es la ecuación para determinar la distancia entre dos puntos.

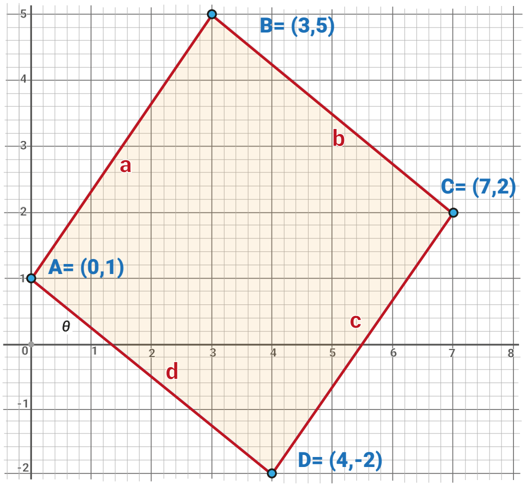
> En el aprendizaje y enseñanza de la matemática es fundamental establecer vínculos con el estudio de fenómenos naturales y sociales. Es, pues, nuestra responsabilidad plantear modelos matemáticos que más se ajusten a la realidad. De ahí surge la importancia de graficar los puntos en el plano cartesiano ya que permiten interpretar situaciones del mundo real.

Ejemplo 4

Demostremos que los puntos (0,1), (3,5), (7,2), (4,-2) son los vértices de un cuadrado.

Utilizando Geogebra graficamos los puntos dados y trazamos los segmentos que forman el cuadrado, como se muestra en la siguiente figura.

Figura 13.
Vértices de un cuadrado.



Sabemos que todo cuadrado tiene cuatro lados iguales, entonces determinamos las distancias entre los puntos dados:

$$\overline{AB} = \overline{BC} = \overline{CD} = \overline{DA}$$

$$\sqrt{(x_1-x_2)^2+(y_1-y_2)^2} = \sqrt{(x_1-x_2)^2+(y_1-y_2)^2} = \sqrt{(x_1-x_2)^2+(y_1-y_2)^2} = \sqrt{(x_1-x_2)^2+(y_1-y_2)^2}$$

$$\sqrt{3-0)^2+(5+1)^2} = \sqrt{(7-3)^2+(2-5)^2} = \sqrt{(4-7)^2+(-2-2)^2} = \sqrt{(0-4)^2+(1+2)^2}$$

$$5=5=5=5 \qquad L..Q.Q.D$$

Al verificar que las distancias entre los puntos dados son iguales, concluimos, que los puntos (0,1), (3,5), (7,2), (4, -2) sí son los vértices de un cuadrado.

Una vez que hemos comprendido cómo determinar la distancia entre dos puntos, que es la longitud de un segmento, analicemos la división de un segmento:

1.8. ¿Cómo se divide un segmento en una razón dada?

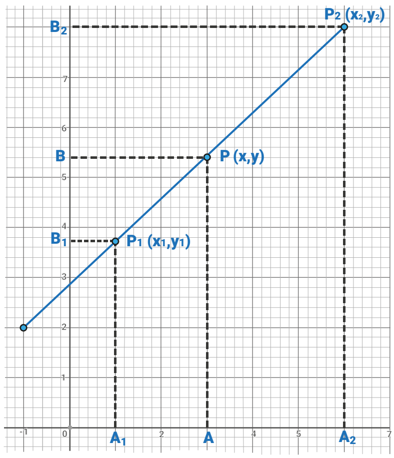
Si $P_1(x_1,y_1)$ y $P_2(x_2,y_2)$ son los extremos de un segmento P_1P_2, las coordenadas (x,y) de un punto P, que divide a este segmento en la razón dada:

$$r = \frac{\overline{P_1P}}{\overline{PP_2}}$$

Analicemos la siguiente figura.

Figura 14.

Coordenadas de un punto que dividen al segmento en la razón dada.



Por los puntos P_1, P, P_2, dibujamos perpendiculares a los ejes coordenados, las tres rectas paralelas P_1A_1, PA y P_2A_2 formando segmentos proporcionales sobre las dos transversales P_1P_2 y A_1A_2. Por tanto, podemos escribir:

Índice
Primer bimestre
Segundo bimestre
Solucionario
Referencias bibliográficas

$$\frac{\overline{P_1P}}{\overline{PP_2}} = \frac{\overline{A_1A}}{\overline{AA_2}}$$

Las coordenadas de los pies de las perpendiculares al eje *x* son A_1 x_1,0), A(x,0), A_2 (x_2,0), la distancia entre:

$$\overline{A_1A} = x - x_1$$

$$\overline{AA_2} = x_2 - x$$

Sustituyendo estos valores, en la razón dada, tenemos:

$$r = \frac{\overline{P_1P}}{\overline{PP_2}}$$

$$r = \frac{x - x_1}{x_{2-x}}$$

Despejando x:

$$x = \frac{x_1 + rx_2}{1 + r} \quad r \neq -1$$

Por un procedimiento similar obtenemos la ordenada.

$$r = \frac{\overline{P_1P}}{\overline{PP_2}}$$

$$r = \frac{y - y_1}{y_2 - y}$$

Despejando y:

$$y = \frac{y_1 + ry_2}{1 + r} \quad r \neq -1$$

Quedando las ecuaciones:

$$x = \frac{x_1 + rx_2}{1+r} \; r \neq 1$$

$$y = \frac{y_1 + ry_2}{1+r} \; r \neq -1$$

> En el aprendizaje y enseñanza de las matemáticas, concretamente en el segmento de recta, es de vital importancia vincular la teoría con la práctica. Por ello le invito a resolver el siguiente ejemplo, aplicando los conocimientos teóricos sobre la división de un segmento.

Ejemplo 5

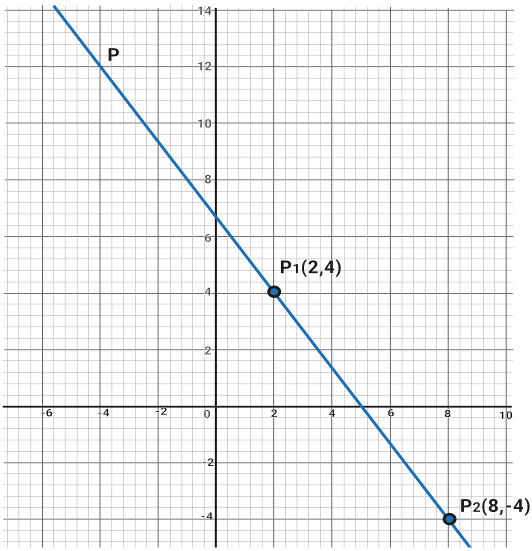
Hallar el punto P(x,y) que divide a este segmento en dos partes, siendo los puntos extremos $P_1(2,4)$ y $P_1(8, -8)$ tales que:

$$\frac{\overline{P_2P}}{\overline{PP_1}} = -2$$

Utilizando Geogebra graficamos los puntos dados y trazamos el segmento, como se muestra en la siguiente figura:

Figura 15.

Puntos extremos de un segmento.



Determinemos la abscisa y ordenada:

$$\frac{\overline{P_1P}}{\overline{PP_2}} = r \qquad \frac{\overline{P_2P}}{\overline{PP_1}} = r$$

$$\frac{x - x_2}{x_1 - x} = r \qquad \frac{y - y_2}{y_1 - y} = r$$

$$\frac{x - 8}{2 - x} = -2 \qquad \frac{y + 4}{4 - y} = -2$$

$$x - 8 = -2(2 - x) \qquad y + 4 = -2(4 - y)$$

$$x = -4 \qquad y = 12$$

El punto que divide al segmento es:

P(x,y)

P(-4, 12)

Índice
Primer bimestre
Segundo bimestre
Solucionario
Referencias bibliográficas

1.8.1. ¿Cómo se divide un segmento en el punto medio?

El punto medio de un segmento dirigido cuyos puntos extremos son (x_1, y_1) y (x_2, y_2) y la razón es 1, se determinan con las ecuaciones:

$$x = \frac{x_1 + x_2}{2}$$

$$y = \frac{y_1 + y_2}{2}$$

> Para alcanzar un aprendizaje significativo en matemáticas debemos vincular la teoría con la práctica. Por ello le invito a resolver el siguiente ejemplo aplicando los conocimientos teóricos sobre la división de un segmento en el punto medio.

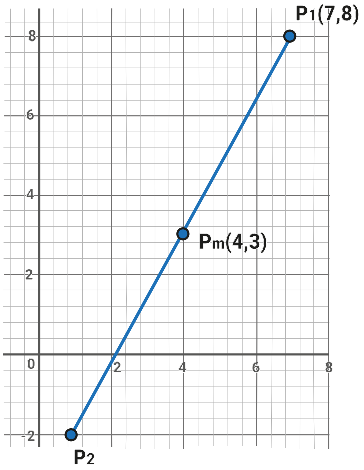
Ejemplo 6

Hallar el otro extremo de un segmento, si un extremo es el punto (7,8) su punto medio es (4,3).

Utilizando Geogebra graficamos los puntos dados y trazamos el segmento, como se muestra en la figura siguiente:

Índice
Primer bimestre
Segundo bimestre
Solucionario
Referencias bibliográficas

Figura 16.
Puntos extremos de un segmento.



Determinemos la abscisa y la ordenada

$$x = \frac{x_1 + x_2}{2}, \qquad y = \frac{y_1 + y_2}{2}$$

$$4 = \frac{7 + x_2}{2}, \qquad 3 = \frac{8 + y_2}{2}$$

$$8 = 7 + x_2, \qquad 6 = 8 + y_2$$

$$x_2 = 1, \qquad y_2 = -2$$

El punto extremo del segmento es:

$$P_2(x_2, y_2)$$

$$P_2(1, -2)$$

> Hemos concluido la segunda semana de actividades. Para consolidar sus conocimientos tenemos los siguientes recursos de aprendizaje:

Índice
Primer bimestre
Segundo bimestre
Solucionario
Referencias bibliográficas

Recursos de aprendizaje

Para afianzar sus conocimientos:

Lea comprensivamente las páginas 24-41, del texto básico, Carpinteyro E. (2016). *Geometría analítica*.

Habilite los hipervínculos y mire atentamente los videos de:

Matemáticas profe Alex. (2016). Distancia entre dos puntos

Retroalimentación

En este video encontramos la explicación de una de las formas de determinar la distancia entre dos puntos en el plano cartesiano. En este caso usando la fórmula cuando conocemos las coordenadas de los dos puntos.

AprendEasy con Yovana. (2020). División de un Segmento en una razón dada.

Retroalimentación

En este video se explica la división de un segmento en una razón dada utilizando las ecuaciones y el procedimiento matemático paso a paso.

Actividad de aprendizaje recomendada

Desarrolle las actividades propuestas en el texto básico:

- Distancia entre dos puntos, páginas 24-25.
- División del segmento en una razón dada página 27.

Lo está haciendo muy bien.

¡Siga adelante!

Índice

Primer bimestre

Segundo bimestre

Solucionario

Referencias bibliográficas

> Recuerde que a través del chat de tutoría y consulta puede aclarar sus dudas e inquietudes con su docente.

Semana 3

La recta y sus ecuaciones

Apreciado/a estudiante:

Si vinculamos la teoría con la práctica lograremos alcanzar un aprendizaje significativo que nos permitirá resolver problemas del entorno natural y social. Por ello le invito a resolver los siguientes ejemplos, aplicando los conocimientos teóricos sobre la línea recta.

Ejemplo 7

Hallar la ecuación de la línea recta que pasa por el punto A(1,3) y pendiente 2.

Los valores de la coordenada del punto A y la pendiente, sustituimos en la ecuación, y determinamos la ecuación de la línea recta:

$$y - y_1 = m(x - x_1)$$

$$y - 3 = 2(x - 1)$$

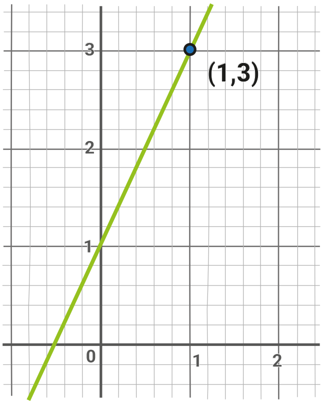
$$y - 3 = 2x - 2$$

$$y = 2x + 1$$

Para verificar, graficamos la ecuación, como podemos observar en la siguiente figura:

Figura 17.

Recta que pasa por el punto A(1, 3).



Ejemplo 8

Hallar la ecuación de la línea recta que pasa por los dos puntos *A(4, 2) y B(-5, 7)* Las coordenadas de los puntos sustituimos en la ecuación:

$$y - y_1 = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x}(x - x_1)$$

$$y - 2 = \frac{7 - 2}{-5 - 4}(x - 4)$$

$$y - 2 = -\frac{5}{9}(x - 4)$$

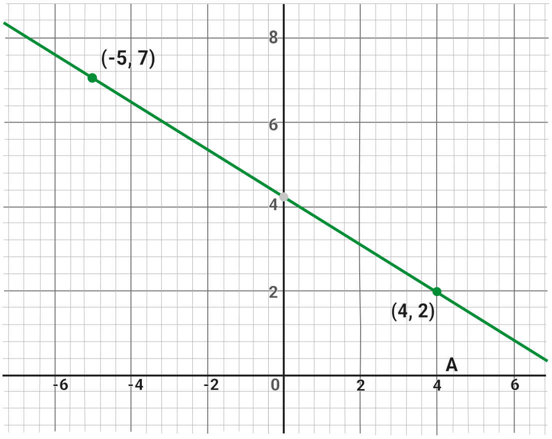
$$9y - 18 = -5x + 200$$

$$5x + 9y - 38 = 0$$

Para comprobar graficamos la ecuación que pasa por los dos puntos dados, como se muestra en la siguiente figura:

Figura 18.

Recta que pasa por los dos puntos A(4, 2) y B(-, 7)



Ejemplo 9

Hallar la ecuación en la forma simétrica de una recta de pendiente -2 y que pasa por el punto *A(-1, 4).*

La pendiente y las coordenadas del punto las sustituimos en la ecuación:

$$y - y_1 = m(x - x_1)$$

$$y - 4 = -2(x+1)$$

$$y - 4 = -2x - 2$$

$$2x + y = 2$$

Igualando $y = 0$ despejamos x

$$y = -2x + 2$$

$$0 = -2x + 2$$

$$x = 1$$

Igualando *x= 0* despejamos *y*

$$y = -2x + 2$$

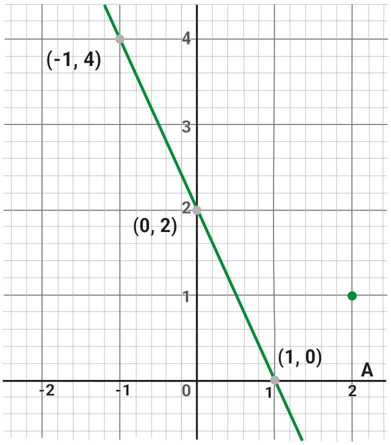
$$y = -2(0) + 2$$

$$y = 2$$

Pasa por los puntos $P_1(1,0)$ y $P_2(0,2)$

Para comprobar graficamos y observamos las intersecciones de la gráfica con los ejes, como se muestra en la siguiente figura.

Figura 19.
Recta de pendiente -2 pasa por el punto A(-1, 4).



Para determinar la ecuación de la forma asimétrica sustituimos y determinamos la ecuación:

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1$$

$$\frac{x}{1} + \frac{y}{2} = \frac{2}{2}$$

$$\frac{x}{1} + \frac{y}{2} = 1$$

Recursos de aprendizaje

Para afianzar sus conocimientos:

Lea comprensivamente las páginas 62-92 del texto básico, Carpinteyro E. (2016). *Geometría analítica.*

Habilite los hipervínculos y mire atentamente los videos de:

Matemáticas profe Alex. (2016). Ecua7ción de la recta conociendo dos puntos

Retroalimentación

En este video encontramos la explicación de la forma de encontrar la ecuación de una recta que pasa por dos puntos.

Matemáticas profe Alex. (2016). Pasar de la ecuación General (Fundamental) a la Canónica (Simétrica)

Retroalimentación

En este video se explica cómo pasar una ecuación de la forma general a la forma simétrica y viceversa paso a paso.

Actividad de aprendizaje recomendada

Desarrolle las actividades propuestas en el texto básico:

- Ecuación general, página 78.
- Ecuación simétrica, página 83.
- Ecuación normal, página 88.

Estimado estudiante:

Lo felicito por el desarrollo de las actividades de aprendizaje recomendadas y espero que haya obtenido aprendizajes significativos que le permitan ejercer con responsabilidad y creatividad su práctica profesional.

Desarrolle la autoevaluación 1

Autoevaluación 1

Unidad 1. Sistemas de coordenadas y segmento rectilíneo

1. Las coordenadas cartesianas se denominan

   a. Radio vector y ángulo polar.
   b. Latitud y longitud.
   c. Abscisas y ordenadas.

2. Un punto P en coordenadas polares se representa por

   a. *P(r, θ).*
   b. *P(x,y).*
   c. *P(a,b).*

3. Si $P_1(x_1, x_2)$ y $P_2(x_2y_2)$ son los extremos de un segmento, la distancia del segmento se calcula con la ecuación

   a. $r = \frac{\overline{P_1P}}{\overline{PP_2}}$
   b. $d = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2}$
   c. $m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$

4. Si $P_1(x_1, x_2)$ y $P_2(x_2y_2)$ son los extremos de un segmento P_1P_2, las coordenadas (x,y) de un punto P, que divide a este segmento, la razón dada esta determinada por la ecuación:

a. $\overline{P_1P_2} = y_2 - y_1$

b. $m = \dfrac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$

c. $r = \dfrac{\overline{P_1P}}{\overline{PP_2}}$

5. Conocido el ángulo, la pendiente se determina con la ecuación:

a. m = tan θ
b. m = sen θ
c. m = cos θ

6. ¿Cuál es la ecuación de la recta que pasa por el punto $P_1(x_1, y_1)$ y tiene la pendiente m ?

a. $m = (y - y_1)(x - x_1)$
b. $y - y_1\ m(x - x_1)$
c. $y - y_1\ mx(x - x_1)$

7. Si una recta cuya pendiente es y la ordenada en el origen es , tiene por ecuación

a. x = mx +b
b. y = mx + 0
c. y = mx + b

8. ¿Cuál es la ecuación simétrica de la recta?

a. $\dfrac{x}{a} + \dfrac{y}{b} = 1$
b. y = mx + b
c. x cos θ + y sen θ - p = 0

9. ¿Cuál es la ecuación general de la recta?

   a. $x \cos \theta + y \text{ sen } \theta - p = 0$
   b. $AX + By + C = 0$
   c. $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1$

Ir al solucionario

Índice

Primer bimestre

Segundo bimestre

Solucionario

Referencias bibliográficas

Índice
Primer bimestre
Segundo bimestre
Solucionario
Referencias bibliográficas

Lo está haciendo muy bien.

¡Siga adelante!

> Recuerde que a través del chat de tutoría y consulta puede aclarar sus dudas e inquietudes con su docente.

Semana 4

Unidad 2. La circunferencia y sus ecuaciones

En esta unidad encontrará un sumario de los fundamentos teóricos, demostración de las principales ecuaciones, gráficos explicativos y ejemplos resueltos, sobre la circunferencia y sus ecuaciones.

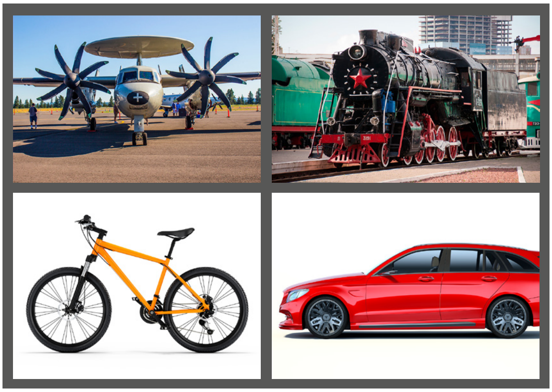
La circunferencia en la vida diaria

La circunferencia es un elemento geométrico de considerable importancia que desde la antigüedad está presente a diario en todas partes. Gracias a ella se pueden elaborar productos como molinos, relojes, generadores eólicos, drones, entre otros, como podemos ver en las siguientes imágenes.

Figura 20.

También podemos decir que, gracias a esta, tenemos mucha más seguridad a la hora de transportarnos en bicicleta, automóviles, aviones, trenes, etc., ya que sabemos que en ella han trabajado personas que conocen muy bien a la circunferencia y aprovechan al máximo todo lo que ésta puede entregar, como podemos observar en las siguientes imágenes.

Figura 21.



Podemos observar en los árboles, que con el pasar de los años, aumentan el grosor de su tronco y al cortar se aprecian “anillos” y con el diámetro de cada anillo, se puede determinar la edad que tiene dicho árbol.

Índice
Primer bimestre
Segundo bimestre
Solucionario
Referencias bibliográficas

Figura 22.

Fuene: Quora Inc. (2020)

Debemos prestar atención al sentido etimológico de la palabra circunferencia para definirla, que en latín significa "llevar alrededor de". Se puede confundir con el círculo, que es la superficie interna de la circunferencia, mientras ésta es su perímetro.

2.1. ¿A qué llamamos circunferencia?

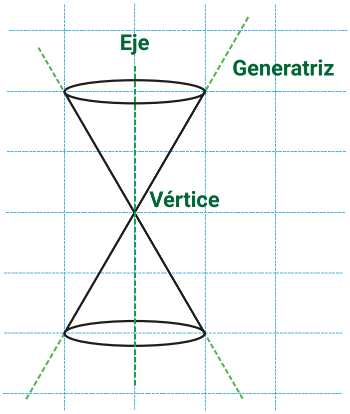
La circunferencia es el lugar geométrico de un punto que se mueve en un plano de tal manera que se conserva siempre a una distancia constante de un punto fijo de ese plano. El punto fijo se llama centro de la circunferencia, y la distancia constante se llama radio. (Lehmann, 2012, p. 99)

También encontramos que la circunferencia es una sección cónica.

Si giramos una recta g alrededor de un eje e, con el que tienen un punto en común V, obtenemos una superficie cónica de revolución, como podemos observar en la siguiente figura:

Índice
Primer bimestre
Segundo bimestre
Solucionario
Referencias bibliográficas

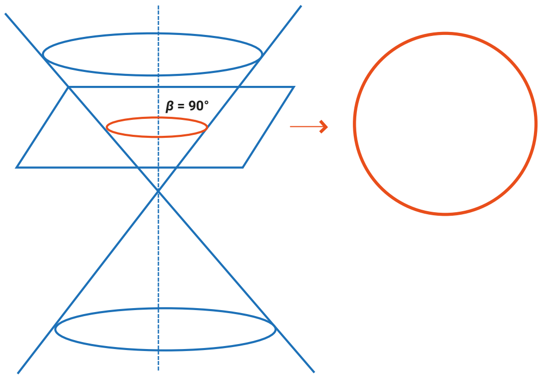
Figura 23.
Superficie cónica de revolución.



La intersección de una superficie cónica de revolución con un plano determina una familia de curvas que varían en función de la inclinación del plano con respecto al eje.

Si el plano es perpendicular a dicho eje, es decir, el ángulo es de 90°, produce una circunferencia. Cómo podemos observar en el video de Willington Profe (2014). Secciones cónicas. Hipérbola, Parábola, Elipse, Circunferencia. Así como en la siguiente figura.

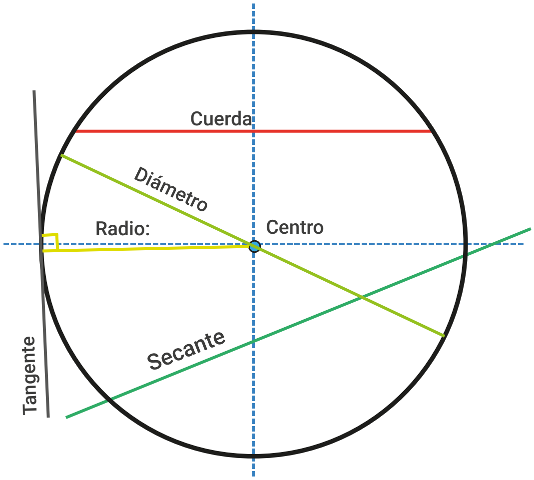
Figura 24.
Sección cónica la circunferencia.



2.2. ¿Cuáles son los elementos de la circunferencia?

A los elementos de la circunferencia los podemos ubicar en la siguiente figura:

Figura 25.
Elementos de la circunferencia.



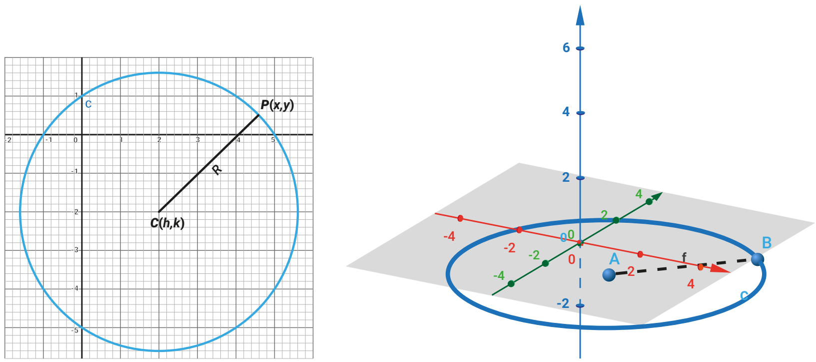
- **Centro:** está a la misma distancia de todos los puntos pertenecientes a la circunferencia.
- **Radio:** segmento de recta que une el centro con cualquier punto perteneciente a la circunferencia.
- **Cuerda**: segmento de recta que une dos puntos cualesquiera de una circunferencia.
- **Diámetro**: mayor cuerda que une dos puntos de una circunferencia. Hay infinitos diámetros y todos pasan por el centro de la circunferencia.
- **Recta secante**: corta dos puntos cualesquiera de una circunferencia.
- **Recta tangente**: toca a la circunferencia en un solo punto y es perpendicular a un radio.

Una vez que recordamos los elementos de la circunferencia es necesario que determinemos las ecuaciones que nos permitirán construir las ecuaciones en un plano cartesiano.

2.3. ¿Cuál es la ecuación de la circunferencia en forma ordinaria?

Para determinar la ecuación ordinaria de la circunferencia analicemos la circunferencia en la siguiente figura.

Figura 26.
Circunferencia de radio $\overline{CP}$



Vemos que el centro es el punto *C(h,k)* y llega al punto *P(x,y)* cuyo radio es la constante *R:*

Sabemos que:

$$\left|\overline{CP}\right| = R$$

$$R = \sqrt{(x-h)^2 + (y-k)^2}$$

$$R^2 = \left(\sqrt{(x-h)^2 + (y-k)^2}\right)^2$$

$$R^2 = (x-h)^2 + (y-k)^2$$

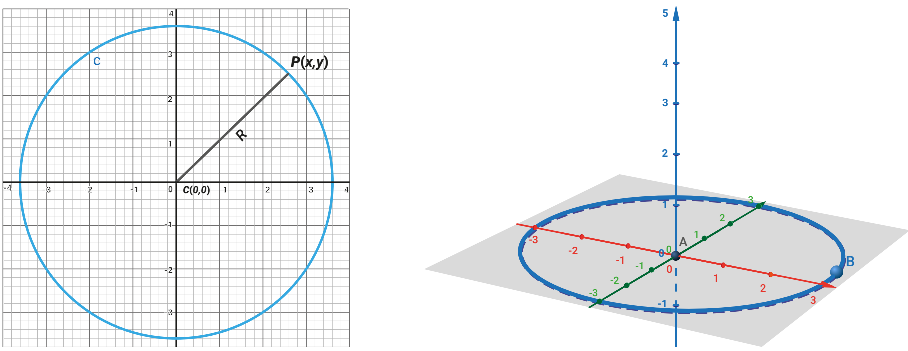
Esta es la ecuación de la circunferencia en forma ordinaria:

$$(x-h)^2+(y-k)^2=R^2$$

2.3.1. ¿Cuál es la ecuación de la circunferencia, forma ordinaria, con centro en el origen?

Si una circunferencia tiene su centro en el origen *C(0,0)* y radio *R*, como se observa en la siguiente figura.

Figura 27.
Circunferencia de centro en el origen y radio R.



al sustituir la coordenada del origen en la ecuación de la circunferencia en forma ordinaria, tenemos:

$$R^2 = (x - h)^2 + (y - k)^2$$

$$R^2 = (x - 0)^2 + (y - 0)^2$$

La ecuación:

$$R^2 = x^2 + y^2$$

2.4. ¿Cuál es la ecuación de la circunferencia en forma general?

Para determinar la ecuación de la circunferencia en forma general, desarrollamos la ecuación ordinaria.

$$R^2 = (x - h)^2 + (y - k)^2$$

$$R^2 = (x2 - 2xh + h^2) + (y^2 - {}^2yk + k^2)$$

$$x^2 - 2xh + h^2 + y^2 - 2yk + k^2 = R^2$$

$$x^2 + y^2 - 2xh - 2yk + h^2 + k^2 - R^2 = 0$$

La cual puede escribirse en la forma:

$$x^2 + y^2 + Dx + Ey + F = 0$$

En donde:

$$Dx = - 2h$$

$$Ey = - 2k$$

$$F = h^2 + k^2 - R^2$$

Se deduce, por lo tanto, que la ecuación de una circunferencia cualquiera puede escribirse en la forma general.

2.4.1. ¿Cómo se determinan los elementos de la circunferencia?

Para contestar esta pregunta, pasaremos de la forma general a la forma ordinaria empleando el método de completar cuadrados.

$$x^2 + y^2 + Dx + Ey + F = 0$$

$$(x^2 + Dx) + (y^2 + Ey) = - F$$

$$\left(x^2+Dx+\frac{D^2}{4}\right)+\left(y^2+Ey+\frac{E^2}{4}\right)=-F+\frac{D^2}{4}+\frac{E^2}{4}$$

$$\left(x+\frac{D}{2}\right)^2+\left(y+\frac{E}{2}\right)^2=\frac{D^2+E^2-4F}{4}$$

Entonces las coordenadas del centro son:

$$C\left(\frac{-D}{2},\frac{-E}{2}\right)$$

La ecuación del radio:

$$R^2=\frac{D^2+E^2-4F}{4}$$

$$\sqrt{R^2}=\sqrt{\frac{D^2+E^2-4F}{4}}$$

$$R=\frac{1}{2}\sqrt{D^2+E^2-4F}$$

Estimados estudiantes:

Si bien es cierto que el desarrollo del conocimiento matemático se debe, en gran parte, a la resolución de los problemas que matemáticos y otros científicos se han planteado a lo largo de la historia, no es sino has`ta los trabajos de George Polya, en 1945, cuando esta actividad comienza a considerarse importante en la educación matemática.

Preocupado por el fracaso de la mayoría de sus estudiantes y con la idea inicial de establecer un método que pudiera servirles para aprender matemáticas, Polya (1945) propuso un método que puede ser interpretado como una propuesta de enseñanza, o bien, de aprendizaje que consta de cuatro pasos: comprender el problema, concebir un plan, ejecutar el plan y examinar la solución obtenida.

Índice
Primer bimestre
Segundo bimestre
Solucionario
Referencias bibliográficas

Revise los ejemplos:

Ejemplo 10

Determine la ecuación de la circunferencia de centro *C(-3, -5)* y radio 7, como podemos observar en la siguiente figura.

Los valores de C*(-3, -5) y R = 7*

Sustituimos en la ecuación, y obtenemos:

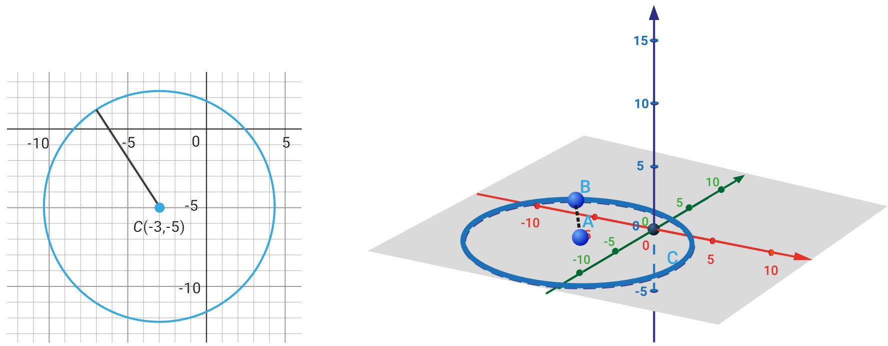
$$R^2 = (x - h)^2 + (y - k)^2$$

$$7^2 = (x - (-3))^2 + (8 - (-5))^2$$

$$(x + 3)^2 + (y + 5)^2 = 49$$

Para comprobar graficamos la ecuación y vemos que cumple con los elementos dados, como se muestra en la siguiente figura.

Figura 28.
Circunferencia de centro C(-3, -5) y radio 7.



Índice

Primer bimestre

Segundo bimestre

Solucionario

Referencias bibliográficas

Ejemplo 11

Reducir la ecuación $2x^2 + 2y^2 - 10x + 6y - 185 = 0$ a la forma ordinaria de la ecuación de la circunferencia. Si la ecuación representa una circunferencia, hállense su centro y su radio.

Dividimos la ecuación para 2

$$2x^2 + 2y^2 - 10x + 6y - 15 = 0 \ (\div 2)$$

$$x^2 + y^2 - 5x + 3y - \frac{15}{2} = 0$$

$$x^2 + y^2 - 5x + 3y = \frac{15}{2}$$

$$(x^2 - 5x) + (y^2 + 3y) = \frac{15}{2}$$

Completamos los cuadrados, sumando el cuadrado de la mitad del coeficiente de *x* y el cuadrado de la mitad del coeficiente de *y*, en ambos miembros. Esto nos da:

$$\left(x^2 - 5x + \frac{25}{4}\right) + \left(y^2 + 3y + \frac{9}{4}\right) = \frac{15}{2} + + \frac{25}{4} + \frac{9}{4}$$

$$\left(x^2 - 5x + \frac{25}{4}\right) + \left(y^2 + 3y + \frac{9}{4}\right) = \frac{15}{2} + + \frac{25}{4} + \frac{9}{4}$$

Realizando operaciones, obtenemos:

$$\left(x - \frac{5}{2}\right)^2 + \left(y + \frac{3}{2}\right)^2 = 16$$

Ecuación que representa una circunferencia. Cuyo centro es:

$$C(h,k)$$

$$c\left(-\frac{5}{2},\frac{3}{2}\right)$$

De radio:

$$R^2 = 16$$

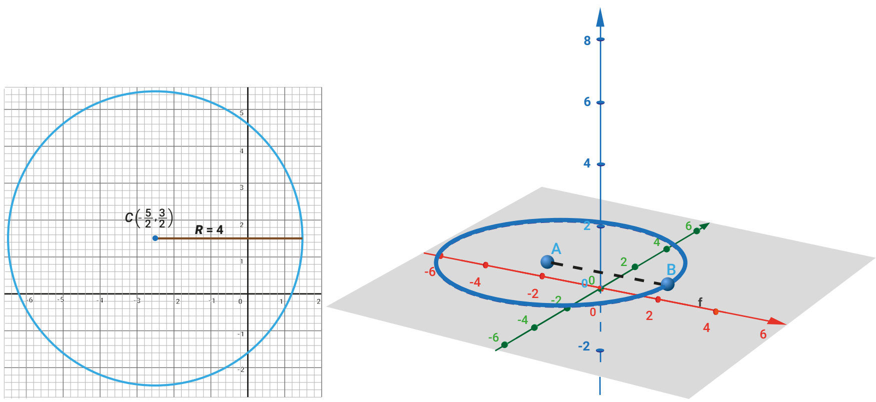
$$\sqrt{R^2} = \sqrt{16}$$

$$R = 4$$

Para comprobar graficamos y verificamos que el centro de la circunferencia es el punto $c\left(-\frac{5}{2},\frac{3}{2}\right)$ y su radio es 4, como se muestra en la siguiente figura:

Figura 29.

Circunferencia de centro $c\left(-\frac{5}{2},\frac{3}{2}\right)$ *y su radio 4.*



Recursos de aprendizaje

Para afianzar sus conocimientos:

Lea comprensivamente las páginas 126-138 del texto básico, Carpinteyro E. (2016). *Geometría analítica.*

Habilite los hipervínculos y mire atentamente los videos de:

Matemáticas profe Alex. (2016). Ecuación canónica de la circunferencia.

Retroalimentación

En este video encontramos la explicación de las características de la ecuación canónica de la circunferencia y como encontrar el centro y el radio cuando conocemos la ecuación canónica, dentro del curso de ecuación de la circunferencia.

Matemáticas profe Alex. (2016). Hallar la ecuación general de la circunferencia conociendo el centro y el radio.

Retroalimentación

En este video se explica paso a paso cómo encontrar la ecuación general de la circunferencia cuando conocemos el centro y el radio.

Actividades de aprendizaje recomendadas

Desarrolle los ejercicios propuestos en el texto complementario. Lehmann C. (2012)

- Ecuación canónica de la circunferencia, grupo 15, páginas 102-103.
- Ecuación general de la circunferencia, grupo 16, páginas 108-110.

Lo está haciendo muy bien.

¡Siga adelante!

> Recuerde que a través del chat de tutoría y consulta puede aclarar sus dudas e inquietudes con su docente.

Semana 5

2.5. ¿Cuál es la circunferencia sujeta a tres condiciones?

Según Lehmann (2012), en la ecuación ordinaria de la circunferencia hay tres constantes arbitrarias independientes, *h,k y r* al igual que en la ecuación general, *D, E y F.* Como la ecuación de toda circunferencia puede escribirse en cualquiera de las dos formas, la ecuación de cualquier circunferencia particular puede obtenerse determinando los valores de tres constantes. Esto requiere tres ecuaciones independientes, que pueden obtenerse a partir de tres condiciones independientes. Por tanto, analíticamente, la ecuación de una circunferencia se determina completamente por tres condiciones independientes. Esto requiere tres ecuaciones independientes, que pueden obtenerse a partir de tres condiciones independientes. Por tanto, analíticamente, la ecuación de una circunferencia se determina completamente por tres condiciones independientes. (p. 106)

Índice
Primer bimestre
Segundo bimestre
Solucionario
Referencias bibliográficas

Ejemplo 12

Determinar la ecuación, centro y radio de la circunferencia que pasa por los tres puntos dados ((0,0), (3,6), (7,0).

Como los tres puntos dados están sobre la circunferencia, sus coordenadas deben satisfacer la ecuación $x^2 + y^2 + Dx + Ey + F = 0$.

De acuerdo con esto, tenemos las tres ecuaciones siguientes que corresponden a los puntos dados:

$$\left\{\begin{array}{l}(0,0)9^2+0^2+D(0)+E(0)+F=0\\(3,6)3^2+6^2+D(3)+E(6)+F=0\\(7,0)7^2+0^2+D(7)+E(0)+F=0\end{array}\right\}$$

$$\left\{\begin{array}{lc}(0,0) & F=0\\(3,6) & 9+36+3D+6E+F=\ 0\\(7,0) & 49+7D+F=0\end{array}\right\}$$

$$\left\{\begin{array}{c}F=0\\3D+6E+F=-45\\7D+F=-49\end{array}\right\}$$

Resolviendo el sistema de tres ecuaciones tenemos:

$$F = 0$$

$$7D + F = -49$$

$$7D + 0 = -49$$

$$D = -7$$

$$3D + 6E + F = -45$$

$$3(-7) + 6R + 0 = -45$$

$$6E = -24$$

$$E = -4$$

Sustituyendo estos valores en la ecuación general tenemos:

$$x^2 + y^2 + Dx + Ey + F = 0$$

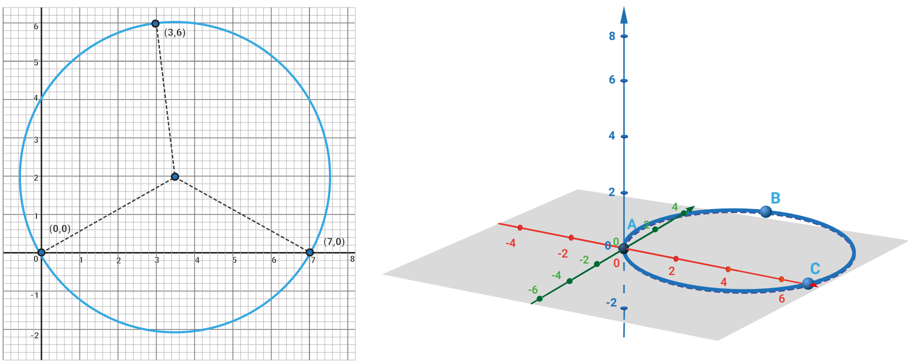
$$x^2 + y^2 + (-7)x + (-4)y + 0 = 0$$

$$x^2 + y^2 - 7x - 4y = 0$$

Que es la ecuación solicitada.

Para comprobar graficamos y observamos la circunferencia que pasa por los tres puntos dados, como se muestra en la siguiente figura.

Figura 30.
Circunferencia que pasa por los tres puntos (0,0), (3,6), y (7,0)



Para encontrar el centro y el radio convertimos la ecuación de forma general a la forma ordinaria:

$$x2 + y2 - 7x - 4y = 0$$

$$(x2 - 7x + \ ) + (y2 - 4y + \ ) = 0$$

$$\left(x^2 - 7x + \frac{49}{4}\right) + (y^2 - 4y + 4) = \frac{49}{4} + 4$$

$$\left(x-\frac{7}{2}\right)^2+(y-4)^2=\frac{65}{4}$$

$$c\left(\frac{7}{2},2\right)$$

De radio:

$$R^2=\frac{65}{4}$$

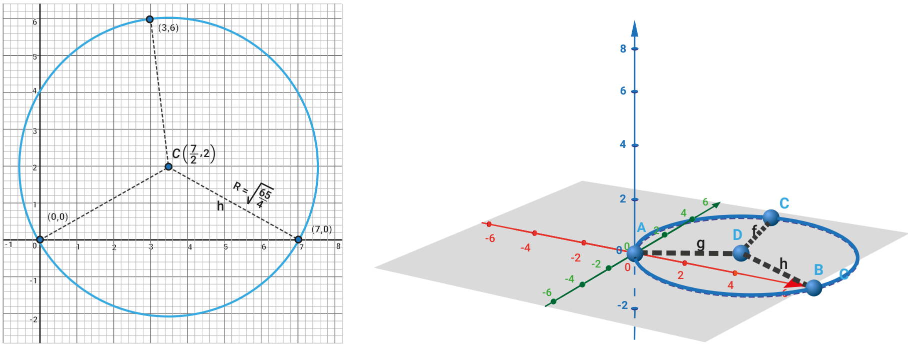
$$\sqrt{R^2}=\sqrt{\frac{65}{4}}$$

$$R=\sqrt{\frac{65}{4}}$$

Para comprobar graficamos y verificamos que su centro es $C\left(\frac{7}{2},2\right)$ y el radio $R=\sqrt{\frac{65}{4}}$. como se muestra en la siguiente figura.

Figura 31.

Circunferencia de centro $C\left(\frac{7}{2},2\right)$ *y radio* $R=\sqrt{\frac{65}{4}}$.



Recursos de aprendizaje

Para afianzar sus conocimientos:

Lea comprensivamente las páginas 135-138 del texto básico, Carpinteyro E. (2016). *Geometría analítica.*

Habilite el hipervínculo y mire atentamente el video de:

Metzeri. (2017). Circunferencia determinada por tres condiciones.

Retroalimentación

En este video encontramos la explicación de cómo encontrar la ecuación de una circunferencia determinada por tres condiciones.

Actividad de aprendizaje recomendada

Desarrolle los ejercicios propuestos en el texto complementario. Lehmann C. (2012)

- Ecuación canónica de la circunferencia, grupo 15, páginas 102-103.
- Ecuación general de la circunferencia, grupo 16, páginas 108-110.

Estimados estudiantes:

Los felicito por el cumplimiento de las actividades de aprendizaje recomendadas espero que hayan obtenido buenos resultados.

Lo está haciendo muy bien.

¡Siga adelante!

> Recuerde que a través del chat de tutoría y consulta puede aclarar sus dudas e inquietudes con su docente.

Semana 6

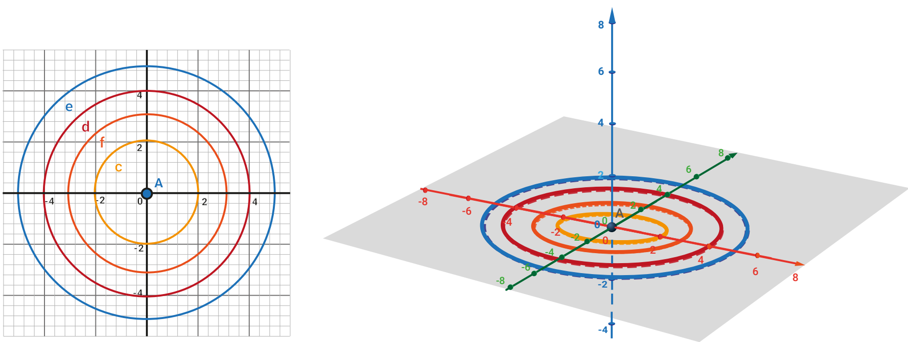
2.6. ¿A qué llamamos familias de circunferencias?

Son aquellas circunferencias que cumplen uno, dos o tres parámetros, pudiendo obtener la ecuación de cualquier circunferencia de la familia, asignando un valor específico a cada parámetro según el caso.

Caso 1.

La ecuación $R^2 = x^2 + y^2$ contiene un parámetro $R > 0$ y representa una familia de circunferencias concéntricas que es el origen de coordenadas c(0,0) y con todos los radios posibles, como se muestra en la siguiente figura.

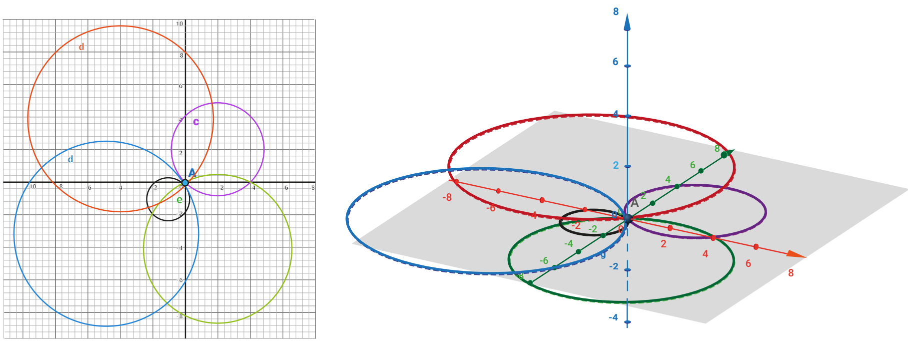
Figura 32.
Familias de circunferencias con centro en el origen.



Caso 2.

La ecuación $x^2 + y^2 + Dx + Ey + F = 0$ contiene dos parámetros D y E que pueden tomar cualquier valor real y representan una familia formada por todas las circunferencias que pasan por el origen de coordenadas (con todos los radios posibles), como observarmos en la siguiente figura.

Figura 33.
Familias de circunferencias que pasan por el origen de coordenadas (con todos los radios posibles).



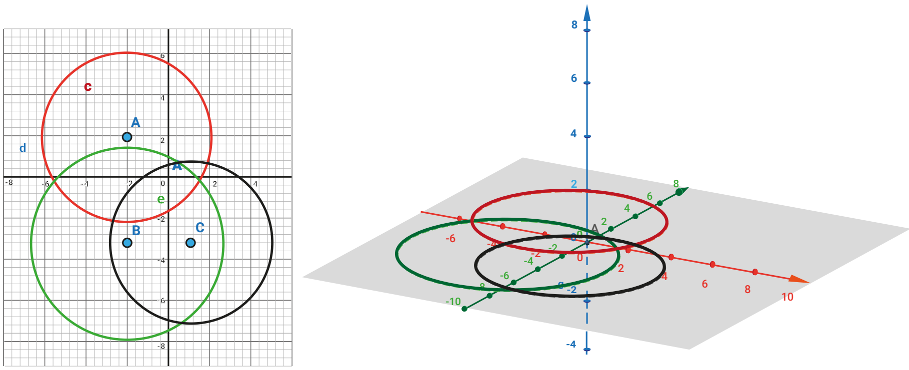
Caso 3.

La ecuación de la forma general $x^2 + y^2 + Dx + Ey + F = 0$ contiene tres parámetros *D, E y F* que representan la familia formada por todas las circunferencias del plano x, y en donde *D, E y F,* pueden tomar cualquier valor real o sea *D, E y F* $\in$ *R,* como se muestra en la siguiente figura.

Índice
Primer bimestre
Segundo bimestre
Solucionario
Referencias bibliográficas

Figura 34.

Familias de circunferencias que tienen tres parámetros.

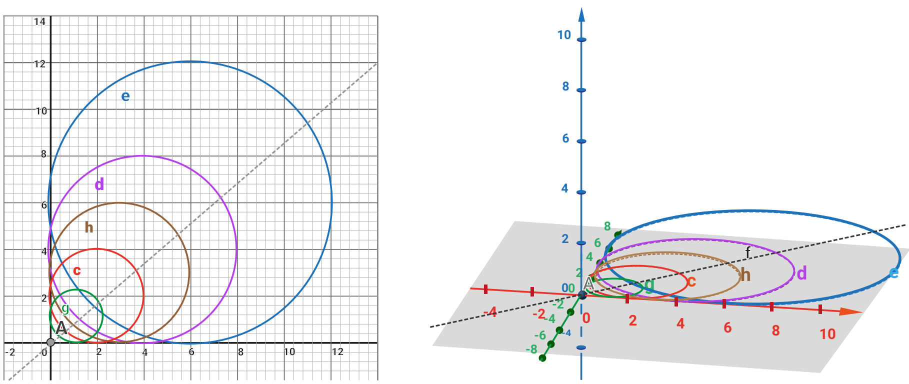


Caso 4.

La ecuación $R^2 = (x\text{-}h)^2 + (y\text{-}k)^2$ contiene un parámetro $R > 0$ y representa una familia de circunferencias tangentes a los ejes coordenados y que tiene su centro C(h,k) sobre la recta y = x a este tipo de circunferencias se les llama coaxiales ya que todos sus centros colineales, como se muestra en la siguiente figura.

Figura 35.

Familias de circunferencias que tienen un parámetro $R > 0$



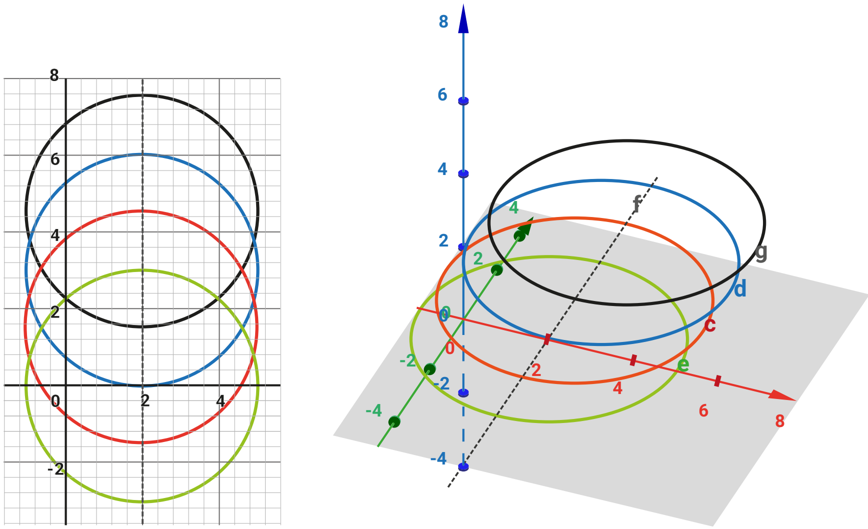
Índice
Primer bimestre
Segundo bimestre
Solucionario
Referencias bibliográficas

Índice
Primer bimestre
Segundo bimestre
Solucionario
Referencias bibliográficas

Caso 5.

La ecuación $9 = (x - 2)^2 + (y - k)^2$ contiene un parámetro $k \in R$ y representa una familia de circunferencias cuyos centros se localizan en la recta $x = 2$ y todas de radio $R = 1$ como se muestra en la siguiente figura.

Figura 36.
Familias de circunferencias que contiene un parámetro $k \in R$



Para alcanzar un aprendizaje significativo en matemáticas debemos vincular la teoría con la práctica, por ello, le invito a resolver el siguiente ejercicio aplicando los conocimientos teóricos sobre la circunferencia.

Revise el ejemplo:

Ejemplo 13

Escribir la ecuación de la familia de circunferencias concéntricas cuyo centro común es el punto (-3, 5)

$$x^2 + y^2 + Dx + Ey + F = 0$$

Construimos la ecuación de una familia de circunferencias

$x^2 + y^2 + D_1x + E_1y + F_1 + k(x^2 + y^2 + D_2x + E_2y + F_2) = 0$

Factorizamos

$x^2(1+k) + y^2(1+k) + x(D_1+D_2) + y\,(E_1 + kE_2) +F_1 + kF_2 = 0$

Dividimos para (1+k)

$$x^2 + y^2 + x\frac{(D_1 + kD_2)}{1+k} + y\frac{(E_1 + kE_2)}{1+k} + \frac{F_1 + kF_2}{1+k} = 0$$

El centro

$$C\left(\frac{-D}{2}, \frac{-E}{2}\right)$$

$$C\left(\frac{-\frac{(D_1 + kD_2)}{1+k}}{2}, \frac{-\frac{(E_1 + kE_2)}{1+k}}{2}\right) = (-3{,}5)$$

$$\frac{-\frac{(D_1 + kD_2)}{1+k}}{2} = -3$$

$$D_1 + kD_2 = 6 + 6k$$

$$D_1 = 6 + 6k - kD_2$$

$$\frac{+\frac{(E_1 + kE_2)}{1+k}}{2} = -5$$

$$E_1 + kE_2 = -10 - 10k6 + 6k$$

$$E_1 = -10 - 10k - kE_2$$

Sustituimos en

$$x^2 + y^2 + x\frac{(6+6k)}{1+k} + y\frac{(-10)(1+k)}{1+k} + \frac{F_1 + kF_2}{1+k} = 0$$

Simplificamos

$$x^2 + y^2 + 6x - 10y + \frac{F_1 + kF_2}{1+k} = 0$$

Asignamos cualquier valor a las constantes

$$k = 4$$

$$F_1 = 6$$

$$F_2 = 11$$

$$x^2 + y^2 + 6x - 10y + \frac{6 + 4(11)}{1+4} = 0$$

$$x^2 + y^2 + 6x - 10y + 10 = 0$$

Esta es la ecuación buscada.

Ahora buscamos el centro:

$$C\left(\frac{-D}{2}, \frac{-E}{2}\right)$$

$$C\left(\frac{-6}{2}, \frac{10}{2}\right)$$

$$C(-3{,}5)$$

El radio:

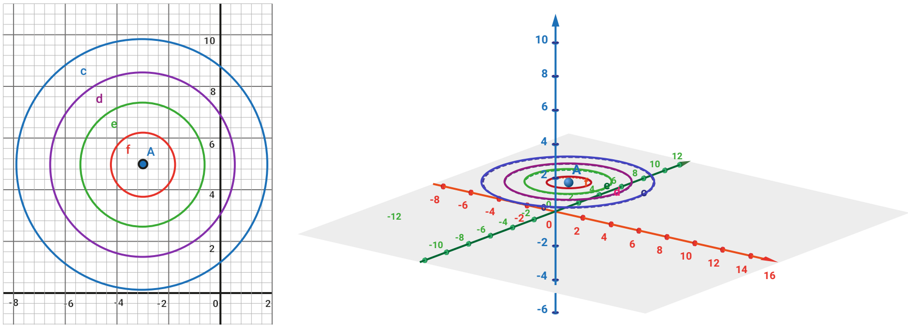
$$R = \frac{1}{2}\sqrt{D^2 + E^2 - 4F}$$

$$R = \frac{1}{2}\sqrt{(6)^2 + (10)^2 - 4(10)}$$

$$R = \frac{1}{2}\sqrt{96}$$

Para comprobar graficamos la familia de circunferencias como se muestra en la siguiente figura.

Figura 37.
Familia de circunferencias concéntricas cuyo centro común es el punto (-3, 5)



Recursos de aprendizaje

Para afianzar sus conocimientos:

Lea comprensivamente las páginas 110-114 del texto complementario. Lehmann C. (2012). *Geometría analítica.*

Habilite el hipervínculo y mire atentamente el video de:

Ingeniat. (2011). Familia de Circunferencias.

Retroalimentación

En este video encontramos la explicación sobre los elementos de la circunferencia, las ecuaciones y como obtener las ecuaciones de una familia de circunferencias suficiente con tener las coordenadas del centro y el radio.

Actividad de aprendizaje recomendada

Desarrolle los ejercicios propuestos en el texto complementario. Lehmann C. (2012)0

- Familia de la circunferencia, grupo 17, páginas 118-119.

Desarrolle la autoevaluación 2

Índice
Primer bimestre
Segundo bimestre
Solucionario
Referencias bibliográficas

Autoevaluación 2

Unidad 2. La circunferencia y sus ecuaciones

1. El lugar geométrico de un punto que se mueve en un plano de tal manera que se conserva siempre a una distancia constante de un punto fijo de ese plano es la

   a. Parábola.
   b. Elipse.
   c. Circunferencia.

2. El segmento de recta que une el centro con cualquier punto perteneciente a la circunferencia se denomina

   a. Radio.
   b. Cuerda.
   c. Diámetro.

3. La ecuación de la circunferencia en forma ordinaria es

   a. $(x-y)^2 + (h-k)^2 = R^2$
   b. $(x-h)^2 + (y-k)^2 = R^2$
   c. $R^2 = x^2 + y^2$

4. La ecuación de la circunferencia forma ordinaria con centro en el origen es

   a. $R^2 = x^2 + y^2$
   b. $(x-h)^2 + (y-k)^2 = R^2$
   c. $x^2 + y^2 + Dx +Ey + F = 0$

5. La ecuación de la circunferencia en forma general es

a. $R^2 = x^2 + y^2$
b. $(x\text{-}y)^2 + (h\text{-}k)^2 = R^2$
c. $x^2 + y^2 + Dx + Ey + F = 0$

6. Las coordenadas del centro de una circunferencia son

a. $c\left(\frac{-D}{2}, \frac{-E}{2}\right)$
b. c(x,y)
c. $c\left(\frac{D}{2}, \frac{E}{2}\right)$

7. La ecuación del radio de una circunferencia es

a. $R = \frac{1}{2}\sqrt{D^2 - E^2 - 4F}$
b. $R = \frac{1}{2}\sqrt{D^2 - E^2 - 4F}$
c. $(x\text{-}y)^2 + (h\text{-}k)^2 = R^2$

8. Las tres constantes arbitrarias independientes en la ecuación ordinaria de la circunferencia son:

a. h,k,r
b. x,y,z
c. D,E,F

9. Las tres constantes arbitrarias independientes en la ecuación general de la circunferencia son:v

a. X,Y y Z
b. D,E y F
c. H,K y R

10. La ecuación $R^2 = x^2 + y^2$ contiene un parámetro $R > 0$ centro en el origen de $c(0,0)$ y con todos los radios posibles, representa una familia de circunferencias

a. Que pasan por el origen.
b. Concéntricas.
c. Que tienen un parámetro R>0.

Ir al solucionario

Índice
Primer bimestre
Segundo bimestre
Solucionario
Referencias bibliográficas

Lo está haciendo muy bien.

¡Siga adelante!

> Recuerde que a través del chat de tutoría y consulta puede aclarar sus dudas e inquietudes con su docente.

Semana 7

En la presente semana aplicaremos las ecuaciones de la recta y la circunferencia en el modelado de problemas reales y estableceremos el compendio de las ecuaciones de la recta y la circunferencia.

2.7. ¿Cómo modelar problemas de la realidad aplicando las ecuaciones de la recta y la circunferencia?

Ejemplo 14

Un fabricante de zapatos vende en el mercado 50 000 pares, a un precio de $ 320 cada uno, y 38 000 pares, a un precio de $ 280. Determina la ecuación de la oferta suponiendo que el precio (p) y la cantidad de pares ofertada (q) están relacionados linealmente. (Carpinteyro, 2016, p.86.)

Figura 38.
Zapatos

Datos:

$$P_1(50\,000{,}320)$$

$$P_2(38\,000{,}280)$$

$$y - y_1 = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}(x - x_1)$$

$$y - 320 = \frac{280 - 320}{38\,000 - 50\,000}(x - 50\,000)$$

$$y - 320 = \frac{1}{300}(x - 50\,000)$$

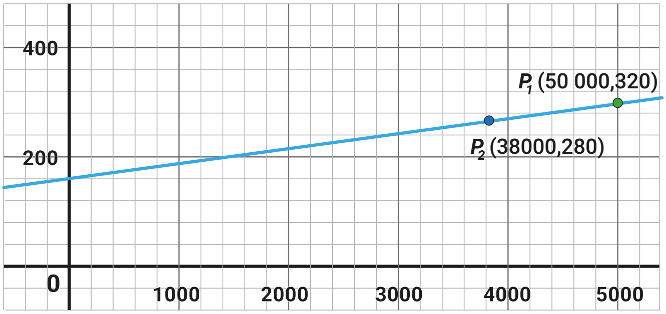
$$y = \frac{x}{300} - \frac{50\,000}{300} + 320$$

$$y = \frac{x + 46\,000}{300}$$

Comprobemos observando la gráfica de la ecuación en la siguiente figura.

Figura 39.

Recta de modelado de la oferta en función del precio y la cantidad de pares de zapatos.



Ejemplo 15

Obtener la ecuación que representa la forma de un arco semicircular si su base mide 9 m. Considera el origen del sistema de referencia un extremo de la base del arco. (Carpinteyro, 2016, p.238)

Figura 40.

Índice
Primer bimestre
Segundo bimestre
Solucionario
Referencias bibliográficas

Datos

$$\Phi = 9\ m$$

$$R = 4.\ 5$$

$$x^2 + y^2 = R^2$$

$$x^2 + y^2 = (4.5)^2$$

$$x^2 + y^2 = (4.5)^2$$

El sistema de referencia debe estar en un extremo de la base del arco.

$$(x - 4.5)^2 + y^2 = (4.5)^2$$

Ecuación que representa la forma de un arco semicircular

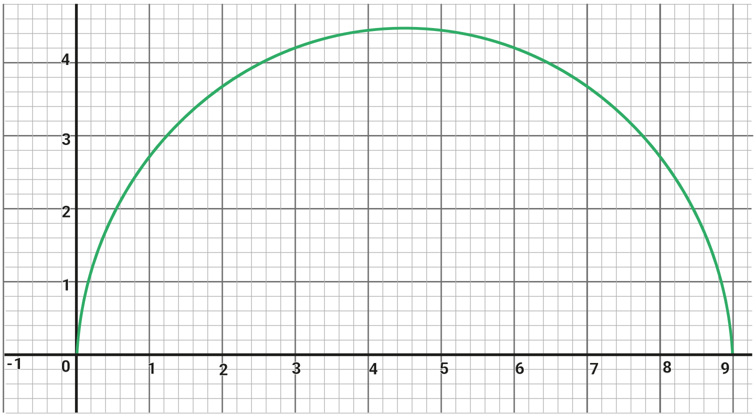
$$y = \sqrt{(4.5)^2 - (x - 4.5)^2}$$

Comprobemos observando la gráfica de la ecuación en la siguiente figura.

Índice
Primer bimestre
Segundo bimestre
Solucionario
Referencias bibliográficas

Figura 41.

Forma de un arco semicircular, si su base mide 9 m, desplazado a la izquierda.



2.8. Compendio de ecuaciones de la recta y la circunferencia

Coordenadas cartesianas *(x,y)*

$$x = r \cos \theta$$

$$y = sen \ \theta$$

Coordenadas polares (r, θ),

$r = \pm\sqrt{x^2 + y^2}$, y

$\theta = arc\ tg\left(\frac{y}{x}\right),$

$$sen\ \theta = \pm\frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}}$$

$$cos\ \theta = \pm\frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}}$$

Distancia entre dos puntos:

$$d = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2}$$

División de un segmento en una razón dada:

$$x = \frac{x_1 + rx_2}{1 + r} \quad r \neq 1$$

$$y = \frac{y_1 + ry_2}{1 + r} \quad r \neq -1$$

División de un segmento en el punto medio:

$$x = \frac{x_1 + x_2}{2}$$

$$y = \frac{y_1 + y_2}{2}$$

La pendiente *m:*

$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x}$$

De la recta:

$$y - y_1 = m(x - x_1)$$

Recta paralela al eje *Y*:

$$x = k$$

Recta con pendiente *m* y la ordenada en el origen es (0,b)

$$y = mx + b$$

Recta que pasa por dos puntos dados $P_1(x_1,y_1)$ y $P_2(x_2,y_2)$

$$y - y_1 = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x}(x - x_1)$$

Ecuación simétrica de la recta:

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1$$

Ecuación general de la recta:

$$Ax + By + C = 0$$

Ecuación normal de la recta:

$$x \cos \theta + \text{sen}\ \theta - p = 0$$

La circunferencia

Ecuación de la circunferencia en forma ordinaria:

$$(x-h)^2 + (y-k)^2 = R^2$$

Ecuación de la circunferencia forma ordinaria, con centro en el origen:

$$R^2 = x^2 + y^2$$

Ecuación de la circunferencia en forma general:

$$x^2 + y^2\ Dx + Ey + F = 0$$

Índice
Primer bimestre
Segundo bimestre
Solucionario
Referencias bibliográficas

En donde:

$$Dx = -2h$$

$$Ey = -2k$$

$$F = h^2 + k^2 - R^2$$

Elementos de la circunferencia

Centro:

$$C\left(\frac{-D}{2}, \frac{-E}{2}\right)$$

Radio:

$$R = \frac{1}{2}\sqrt{D^2 + E^2 - 4F}$$

Revise sus notas de las actividades recomendadas, calificadas, autoevaluaciones y estudie todos los contenidos del primer bimestre. Prepárese para desarrollar la evaluación presencial.

Actividad de aprendizaje recomendada

Desarrolle los ejercicios propuestos en el texto complementario. Lehmann C. (2012)

- Familia de la circunferencia, grupo 17, páginas 118-119.

Lo está haciendo muy bien.

¡Siga adelante!

Recuerde que a través del chat de tutoría y consulta puede aclarar sus dudas e inquietudes con su docente.

Semana 8

Actividades finales del bimestre

Actividad 1. Revise su diario de notas, actividades desarrolladas, recomendadas y calificadas, autoevaluaciones y estudie todos los contenidos del primer bimestre y prepárese para participar de la evaluación presencial.

La evaluación presencial comprende los conocimientos adquiridos en la primera unidad sobre sistemas de coordenadas, geográficas, rectangulares y polares; segmento de recta, distancia entre dos puntos, división de un segmento en una razón dada; la línea recta y sus ecuaciones y la circunferencia y sus ecuaciones.

Índice
Primer bimestre
Segundo bimestre
Solucionario
Referencias bibliográficas

Segundo bimestre

Resultado de aprendizaje 2

Aplica las leyes y teoremas de la parábola, la elipse y la hipérbola para construir sus ecuaciones y resolver problemas de aplicación.

Contenidos, recursos y actividades de aprendizaje

Estimados estudiantes

Bienvenidos al segundo bimestre de la asignatura Sistemas de conocimiento de geometría analítica y su didáctica. Damos inicio profundizando nuestros conocimientos sobre la parábola, elipse y la hipérbola para modelar y resolver problemas del entorno.

Con estos conocimientos, la comprensión de la pedagogía y aplicación de la didáctica estaremos en condiciones de desarrollar un proceso de enseñanza que genere aprendizajes significativos en nuestros estudiantes, quienes podrán resolver situaciones de la vida real aplicando geometría analítica.

Para lograr el segundo resultado de aprendizaje dispone de recursos de aprendizaje como la guía didáctica, texto básico, recursos educativos abiertos, actividades recomendadas, refuerzos, actividades de aprendizaje evaluadas, autoevaluaciones y la tutoría del docente que será la guía principal para alcanzar el primer resultado de aprendizaje.

Semana 9

Unidad 3. La parábola y sus ecuaciones

En esta unidad encontrará un compendio de los fundamentos teóricos, demostración de las principales ecuaciones, gráficos explicativos y ejemplos resueltos, sobre la parábola y sus ecuaciones.

La parábola en la vida diaria

Las aplicaciones de la parábola en la vida cotidiana son múltiples. Desde el uso que le dan las antenas satelitales y radiotelescopios para concentrar las señales, hasta el uso que le dan los faros de los automóviles al enviar haces de luz paralelos, como se muestra en las siguientes imágenes.

Figura 42.

La parábola es una cónica que aparece en diferentes fenómenos como el movimiento de una pelota impulsada por un jugador de baloncesto, o de fútbol, o como la caída de agua de una fuente, como se muestra en las siguientes imágenes.

Figura 43.

La parábola tiene especial importancia en diversas áreas de la física, resistencia de materiales o mecánica, como se muestra en las siguientes imágenes.

Índice
Primer bimestre
Segundo bimestre
Solucionario
Referencias bibliográficas

Figura 44.

Los puentes colgantes se construyen con cables que adoptan la forma parabólica, donde la carga está distribuida de manera uniforme y el equilibrio se obtiene con numerosos cables tirantes.

Como ejemplos de la vida real se encuentran el puente de San Francisco (Estados Unidos) o el puente de la Barqueta (Sevilla), que utilizan estructuras parabólicas para dar mayor estabilidad al puente, como se muestra en la siguiente imagen.

Figura 45.

Hay muchas personas que, en ocasiones, sostienen que los estudios y análisis matemáticos son innecesarios en la vida diaria, pues a simple vista no se ven útiles. Pero la verdad es que son múltiples las ocasiones en que se aplican dichos estudios (Lifeder. 2021)

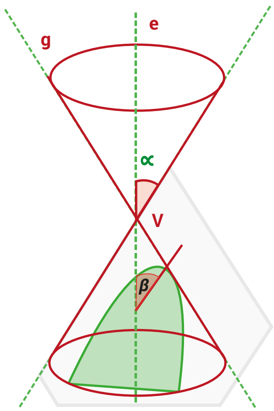
3.1. ¿A qué llamamos parábola?

Una parábola es el lugar geométrico de un punto que se mueve en un plano de tal manera que su distancia de una recta fija, situada en el plano, es siempre igual a su distancia de un punto fijo del plano y que no pertenece a la recta. (SlidePlayer, 2021)

También encontramos que la parábola es una sección cónica.

Si el ángulo entre el plano y el eje es igual que el ángulo ente el eje y una generatriz entonces se produce una parábola. Cómo podemos observar en el video de Willington Profe (2014). Secciones cónicas. Hipérbola, Parábola, Elipse, Circunferencia. Así como en la siguiente figura.

Figura 46.
Sección cónica la parábola.

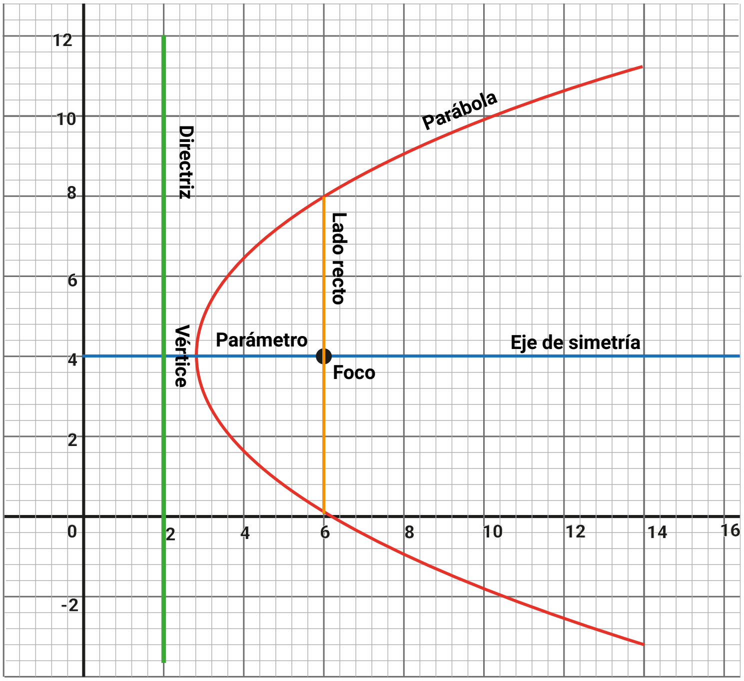


$\propto = \beta$

3.2. ¿Cuáles son los elementos de la parábola?

Los elementos de la parábola son: foco, directriz, eje de simetría, vértice, lado recto y parámetro, como lo podemos ubicar en la siguiente figura.

Figura 47.
Elementos de la parábola

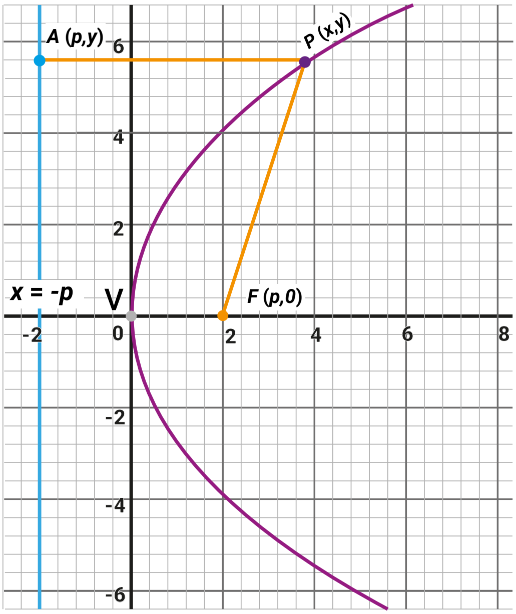


3.3. ¿Cuál es la ecuación de la parábola con vértice en el origen y eje de simetría *X*?

Analicemos la parábola cuyo vértice está en el origen y el eje de simetría coincide con el eje *X*, como se muestra en la siguiente figura.

Figura 48.

Parábola de vértice en el origen y eje de simetría en el eje X



- Las coordenadas del foco están sobre el eje *X*; *F(p,0).*
- Coordenadas del vértice son *V(0,0)*
- La directriz l es *x = - p*.
- Sea *P(x,y)* un punto cualquiera de la parábola.
- Lado recto es igual $|4p|$
- Si *P>0* la parábola tiene su foco a la derecha del vértice y sus ramas se abren a la derecha.
- Si *P<0* la parábola tiene su foco a la izquierda del vértice y sus ramas se abren a la izquierda.

Por *P* trazamos el segmento $\overline{PA}$ perpendicular a *l* .

Por definición de parábola, el punto *P* debe satisfacer la condición geométrica:

$$\overline{FP} = \overline{PA}$$

$$\overline{FP} = \sqrt{(x-p)^2 + y^2}$$

Tenemos que:

$$\overline{PA} = |x+p|$$

Igualando tenemos:

$$\overline{PA} = |x+p|$$

$$\sqrt{(x-p)^2 + y^2} = |x+p|$$

Elevamos al cuadrado ambos miembros:

$$\left(\sqrt{(x-p)^2 + y^2}\right)^2 = |x+p|^2$$

$$x^2 - 2px + p^2 + y^2 = x^2 + 2px + p^2$$

Simplificamos y nos queda la ecuación de la parábola:

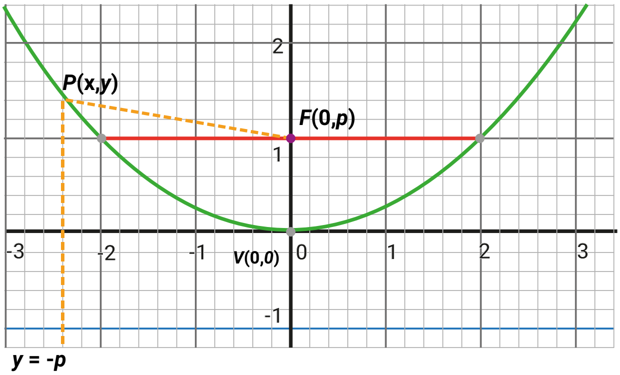
$$y^2 = 4px$$

3.4. ¿Cuál es la ecuación de la parábola con vértice en el origen y eje de simetría *Y*?

Analicemos la parábola con vértice en el origen y eje focal coincide con el eje *Y* que se muestra a continuación en la siguiente figura.

Figura 49.

Parábola de vértice en el origen y eje de simetría en el eje Y



- Las coordenadas del foco están sobre el eje *Y* ; *F(0,p)*.
- Coordenadas del vértice son *V(0,0)*
- La directriz *l* es *y = -p*.
- Sea *P(x.y)* un punto cualquiera de la parábola.
- Lado recto es igual $|4p|$
- Si *p>0* la parábola tiene su foco arriba del vértice y sus ramas se abren hacia arriba.
- Si *p<0* la parábola tiene su foco abajo del vértice y sus ramas se abren hacia abajo.

Por *P* trazamos el segmento $\overline{PA}$ perpendicular *l* a .

Por definición de parábola, el punto *P* debe satisfacer la condición geométrica:

$$\overline{FP} = \overline{PA}$$

$$\overline{PA} = \sqrt{x^2 + (y-p)^2}$$

Tenemos que:

$$\overline{PA} = |y + p|$$

Igualando tenemos:

$$\overline{PA} = |y + p|$$

$$\sqrt{x^2 + (y - p)^2} = |y + p|$$

Elevamos al cuadrado ambos miembros:

$$\left(\sqrt{x^2 + (y - p)^2}\right)^2 = |y + p|^2$$

$$x^2 + y^2 - 2py + p^2 = y^2 + 2py + p^2$$

Simplificamos y nos queda la ecuación de la parábola:

$$x^2 = 4py$$

A estas ecuaciones también se las conoce como primeras ecuaciones ordinarias de la parábola (Lehmann. 2012, p. 152).

> Para alcanzar un aprendizaje significativo en matemáticas debemos vincular la teoría con la práctica, por ello, le invito a resolver los siguientes ejercicios aplicando los conocimientos teóricos sobre la parábola.

Revise los ejemplos:

Ejemplo 16

Hallar la ecuación de la parábola de vértice en el origen y foco el punto (3,0).

Tenemos que:

$$p = 3$$

El eje coincide en el eje *x*

La parábola se abre a la derecha:

$$y^2 = 4px$$

$$y^2 = 4(3)x$$

$$y^2 = 12x$$

Ecuación de la directriz:

$$x = -p$$

$$x = -3$$

Longitud del lado recto:

$$lr = 4p$$

$$lr = 4(3)$$

$$lr = 12$$

Discusión de la ecuación

Simetría:

Cuando $x = 0$

$$y2 = 12x$$

$$y2 = 12(0)$$

$$y = 0$$

Cuando y = 0

$$y^2 = 12x$$

$$0 = 12x$$

$$x = 0$$

Hay simetría al eje *x*

Asíntotas:

$$y^2 = x$$

$$\sqrt{y^2} = \sqrt{12x}$$

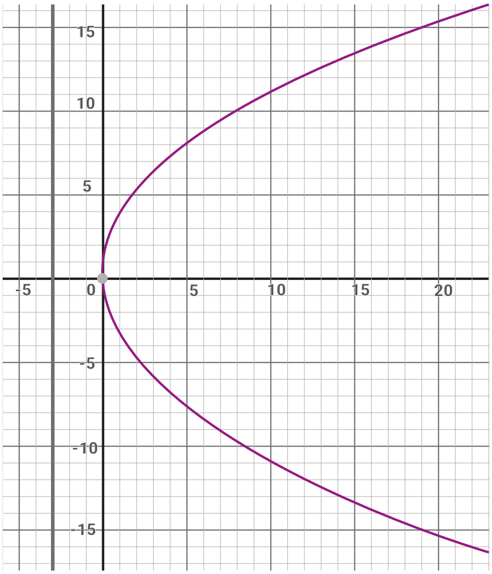
$$y = \pm 2\sqrt{3x}$$

No hay asíntotas.

Para comprobar graficamos la ecuación, como podemos observar en la siguiente figura.

Figura 50.

Parábola de vértice en el origen y foco el punto (3.0).



Ejemplo 17

Hallar la ecuación de la parábola de vértice en el origen y foco el punto (0,-3)

Tenemos que:

$$p = -3$$

El eje coincide en el eje *y*

La parábola se abre hacia abajo

$$x^2 = 4px$$

$$x^2 = 4(-3)y$$

$$x^2 = -12y$$

Ecuación de la directriz:

$$y = -p$$

$$y = -(-3)$$

$$y = 3$$

Longitud del lado recto:

$$lr = 4p$$

$$lr = 4(3)$$

$$lr = 12$$

Discusión de la ecuación

Simetría:

Cuando $y = 0$

$$x^2 = 12y$$

$$x^2 = 12(0)$$

$$x = 0$$

Cuando $x = 0$

$$x^2 = 12y$$

$$0 = 12y$$

$$y = 0$$

Hay simetría al eje *y*

Asíntotas

$$x^2 = -12y$$

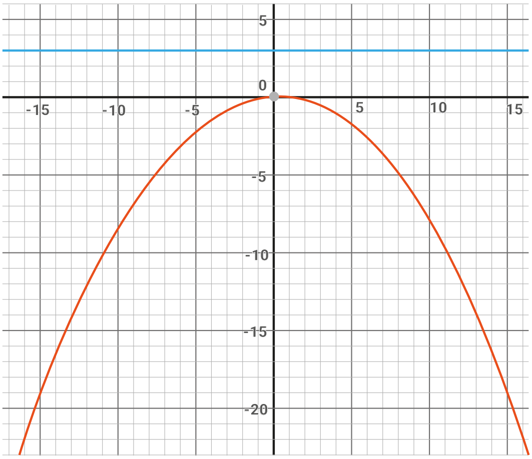
$$\sqrt{x^2} = \sqrt{-12y}$$

$$x = \pm 2\sqrt{-3y}$$

No hay asíntotas.

Para comprobar graficamos la ecuación, como se muestra en la siguiente figura.

Figura 51.
Parábola de vértice en el origen y foco el punto (0,-3).



> **Recursos de aprendizaje**
>
> Para afianzar sus conocimientos:
>
> Lea comprensivamente las páginas 132-152 del texto básico, Carpinteyro E. (2016). *Geometría analítica.*

Habilite los hipervínculos y mire atentamente los videos de:

Matemáticas profe Alex. (2017). Ecuación de la parábola. Gráfica y ecuación. conociendo vértice y foco

Retroalimentación

En este video encontramos la explicación paso a paso de la forma de graficar la parábola y encontrar la ecuación cuando conocemos las coordenadas de vértice y el foco.

Actividades de aprendizaje recomendadas

Desarrolle las actividades propuestas en el texto básico:

- Cómo formar una parábola, página 139.
- Ecuación de la parábola, página 142-144.
- Ecuación de la parábola, grupo 23, páginas 153-154. Texto complementario. Lehmann C. (2012)

Lo está haciendo muy bien.

¡Siga adelante!

Recuerde que a través del chat de tutoría y consulta puede aclarar sus dudas e inquietudes con su docente.

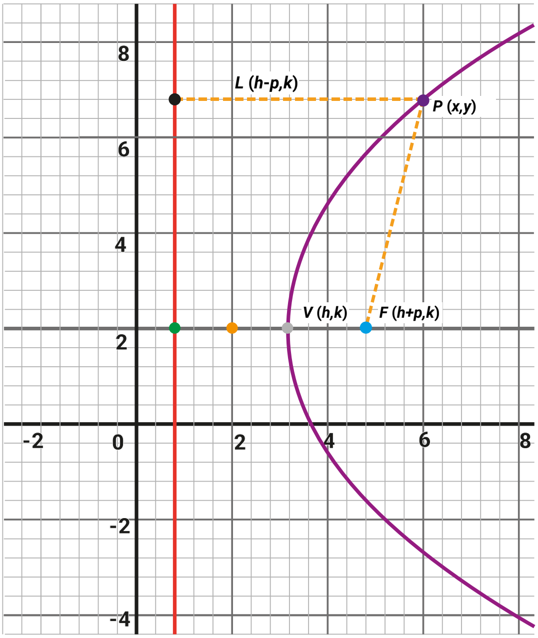
Semana 10

Frecuentemente necesitaremos obtener la ecuación de una parábola cuyo vértice no esté en el origen y cuyo eje sea paralelo, y no necesariamente coincidente, a uno de los ejes coordenados.

3.5. ¿Cuál es la ecuación de una parábola de vértice (h, k) y eje focal de simetría paralelo al eje *X* ?

En la parábola de vértice *(h, k)* y eje de simetría paralelo al eje *X*, que se muestra en la figura 49, tiene los siguientes elementos:

Figura 52.
Parábola de vértice (h, k) y eje focal paralelo al eje X.



Índice
Primer bimestre
Segundo bimestre
Solucionario
Referencias bibliográficas

- Coordenadas del foco *F(h+p,k)* .
- Coordenadas del vértice son *V(h,k)*
- Directriz x = h - p.
- Sea P(x, y)
- Lado recto = $|4p|$
- Eje de simetría y = k
- Si *p>0* las ramas de la parábola se abren a la derecha.
- Si *p<0* las ramas de la parábola se abren a la izquierda.

Determinemos las distancias de los segmentos $\overline{PL}$ con $\overline{PF}$

$$\overline{PL} = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_2 - y_1)^2}$$

$$\overline{PL} = \sqrt{(h - p - x)^2 + (y - y)^2}$$

$$\overline{PL} = \sqrt{(h - p - x)^2}$$

$$\overline{PL} = h - p - x$$

$$\overline{PF} = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$$

$$\overline{PF} = \sqrt{(h + p - x)^2 + (k - y)^2}$$

Igualamos las distancias de los segmentos $\overline{PL}$ con $\overline{FF}$

$$\overline{PL} = \overline{FF}$$

$$(h - p - x)^2 = \sqrt{(h + p - x)^2 + (k - y)^2}^2$$

$$h^2 + p^2 - x^2 - 2hp - 2hx - 2px = (h + p - x)^2 + (k - y)^2$$

$$\cancel{h^2} + \cancel{p^2} + \cancel{x^2} - \cancel{2hp} - 2hx + 2px = \cancel{h^2} + \cancel{p^2} + \cancel{x^2} + \cancel{2hp} - 2hx - 2px + k^2 + 2ky + y^2$$

$$k^2 + 2ky + y^2 = 4hx - 4ph$$

$$(y - k)^2 = 4p(x - h)$$

Es la ecuación buscada con eje focal paralelo al eje *Y*. (Ministerio de Educación, 2016, p. 177)

> Para alcanzar un aprendizaje significativo en matemáticas debemos vincular la teoría con la práctica, por ello, le invito a resolver los siguientes ejercicios aplicando los conocimientos teóricos sobre la parábola de vértice (h, k) y eje focal paralelo al eje x.

Ejemplo 18

Hallar la ecuación de la parábola de vértice y foco los puntos (3.3) y (3,1) respectivamente.

Determinamos el valor de *p*.

$$p = |\overline{FV}|$$
$$p = |3-1$$
$$p = 2|$$

Pero, como el foco F está abajo del vértice V, la parábola se abre hacia abajo y p es negativo. Por tanto,

$$p = -2$$

Sustituimos

$$(x-h)^2 = 4p(y-k)$$

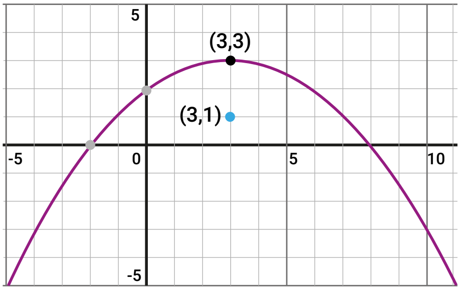
$$(x-3)^2 = 4(-2)(y-3)$$

$$(x-3)^2 = 8(y-3)$$

Para comprobar graficamos la ecuación, como se muestra en la siguiente figura.

Índice
Primer bimestre
Segundo bimestre
Solucionario
Referencias bibliográficas

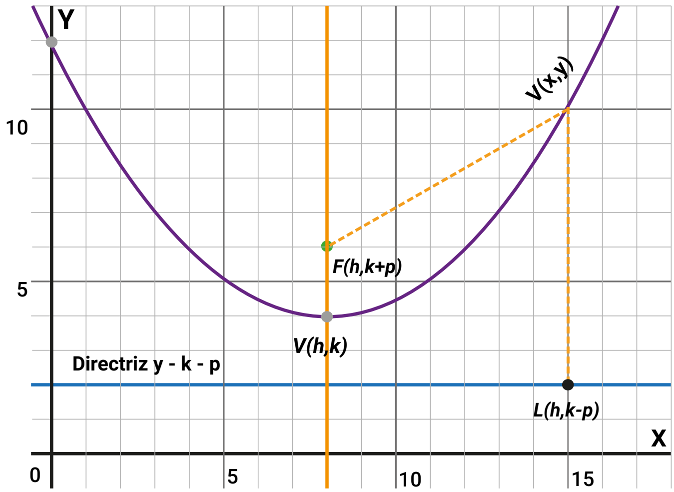
Figura 53.
Parábola de vértice y foco los puntos (3,3) y (3,1)



3.5.1. ¿Cuál es la ecuación de una parábola de vértice *(h, k)* y eje de simetría paralelo al eje *Y*?

En la parábola de vértice (h, k) y eje de simetría paralelo al eje *Y* , que se muestra en la siguiente figura tiene los siguientes elementos:

Figura 54.
Parábola de vértice (h, k) y eje focal paralelo al eje Y.



- Coordenadas del foco *F(h,k+p).*
- Coordenadas del vértice son *V(h,k)*
- Directriz *y = k-p.*

- Sea P(x,y)
- Lado recto = $|4p|$
- Eje de simetría x = h
- Si *p>0* las ramas de la parábola se abren hacia arriba.
- Si *p<0* las ramas de la parábola se abren hacia abajo.

Determinemos las distancias de los segmentos $\overline{PL}$ con $\overline{PF}$

$$\overline{PL} = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$$

$$\overline{PL} = \sqrt{(x - x)^2 + (k - p - y)^2}$$

$$\overline{PL} = \sqrt{(k - p - y)^2}$$

$$\overline{PL} = k - p - y$$

$$\overline{PF} = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$$

$$\overline{PF} = \sqrt{(h - x)^2 + (k + p + y)^2}$$

Igualamos las distancias de los segmentos $\overline{PL}$ con $\overline{PF}$

$$\overline{PL} = \overline{PF}$$

$$(k - p - y)^2 = (h - x)^2 + (k + p + y)^{2^2}$$

$$k^2 + p^2 - y^2 - 2hp - 2hy - 2py = (h - x)^2 + (k + p - x)^2$$

$$\cancel{k^2} + \cancel{p^2} + \cancel{y^2} - \cancel{2kp} - 2kx + 2px = h^2 + 2hx + x^2 + \cancel{k^2} + \cancel{p^2} + \cancel{y^2} + \cancel{2kp} - 2ky - 2py$$

$$x^2 - 2hx + h^2 = 4py - 4kp$$

$$(x - h)^2 = 4p\,(y - k)$$

Es la ecuación de la parábola buscada. (Ministerio de Educación, 2016, p. 180)

> Para alcanzar un aprendizaje significativo en matemáticas debemos vincular la teoría con la práctica, por ello, le invito a resolver los siguientes ejercicios aplicando los conocimientos teóricos sobre la parábola de vértice (h, k) y eje focal paralelo al eje Y.

Ejemplo 19

Determinemos la ecuación de la parábola de Vértice (-3,-2) y ecuación de la directriz es y - 3 = 0

La ecuación de la directriz es y = k-p

$$y-3 = 0$$

$$y = 3$$

$$k = -2$$

Encontramos el valor de p

$$y = k-p$$

$$3 = -2-p$$

$$p = -5$$

Sustituimos en la ecuación

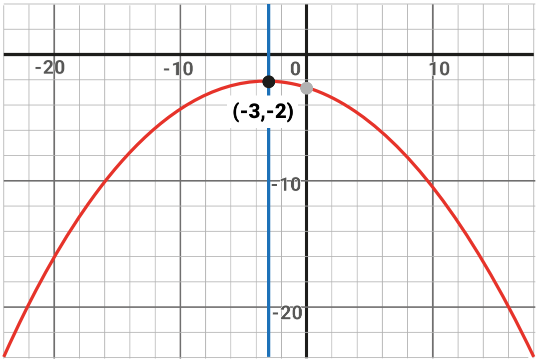
$$(x-h)^2 = 4p(y-k)$$

$$(x+3)^2 = 4(-5)(y+2)$$

$$(x+3)^2 = -20(y+2)$$

Figura 55.

Parábola de vértice (-3,-2) y ecuación de la directriz es y-3 = 0



Recursos de aprendizaje

Para afianzar sus conocimientos:

Lea comprensivamente las páginas 132-152 del texto básico, Carpinteyro E. (2016). *Geometría analítica.*

Habilite los hipervínculos y mire atentamente los videos de:

Matematicabasica. (2018). Aplicaciones de la Parábola

Retroalimentación

En este video encontramos la explicación fácil de cómo entender la parábola resumiendo los diferentes tipos de representación de sus ecuaciones, viendo diferentes áreas en la vida real donde se encuentran y resolviendo un problema.

Actividades de aprendizaje recomendadas

Desarrolle las actividades propuestas en el texto básico:

- Cómo formar una parábola, página 139.
- Ecuación de la parábola, página 142-144.
- Ecuación de la parábola, grupo 24, páginas 159-160. Texto complementario Lehmann C. (2012).

Estimado estudiante:

Lo felicito por el desarrollo de las actividades de aprendizaje recomendadas y espero que haya obtenido aprendizajes significativos que le permitan ejercer con responsabilidad y creatividad su práctica profesional.

Lo está haciendo muy bien.

¡Siga adelante!

> Recuerde que a través del chat de tutoría y consulta puede aclarar sus dudas e inquietudes con su docente.

Semana 11

Unidad 4. La elipse, la hipérbola y sus ecuaciones

En esta unidad encontrará un compendio de los fundamentos teóricos, demostración de las principales ecuaciones, gráficos explicativos y ejemplos resueltos, sobre la elipse, la hipérbola y sus ecuaciones.

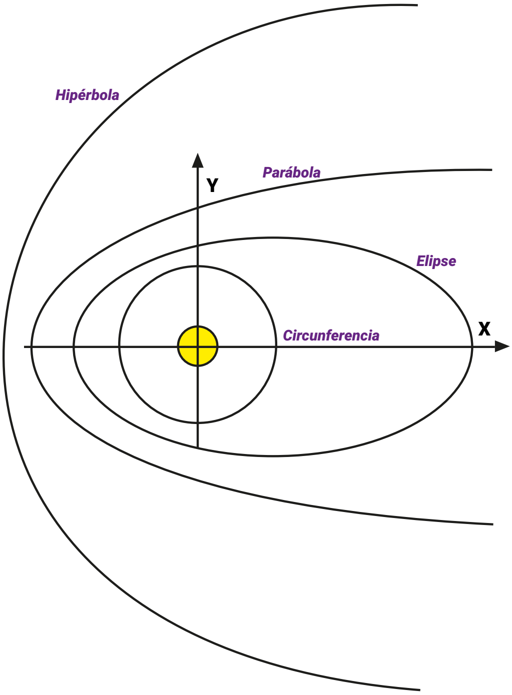
Además, están presentes los recursos de aprendizaje, actividades recomendadas, refuerzos, actividad de aprendizaje evaluada, autoevaluación, que será la guía principal para alcanzar el segundo resultado de aprendizaje.

La elipse en la vida diaria

En el sistema solar los planetas del se mueven alrededor del sol recorriendo orbitas elípticas, viajando en el mismo sentido, pero se mueven a distintas velocidades, de manera que barren áreas iguales en tiempos iguales; por este motivo los planetas más alejados del sol se mueven más lentamente Houspain (s/f).

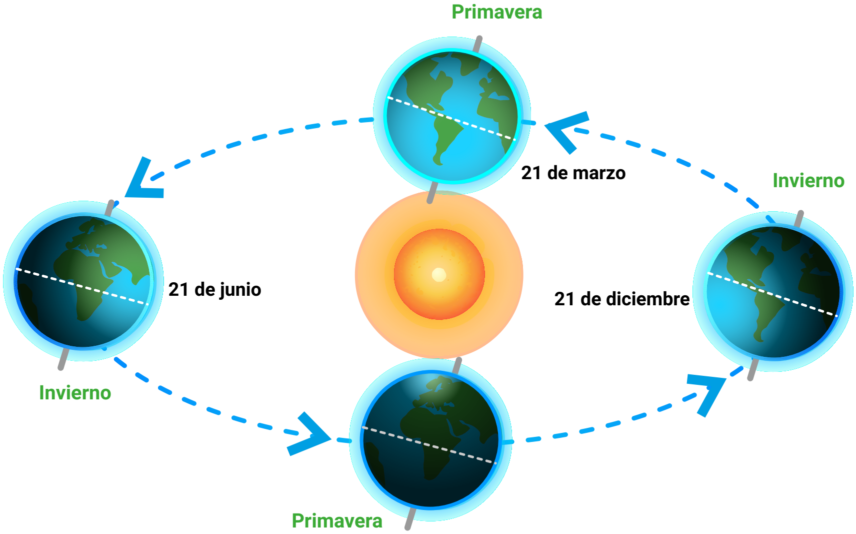
Las trayectorias de los cuerpos celestes son curvas que pertenecen a la familia de las cónicas, es decir, elipses, parábolas e hipérbolas.

Figura 56.



El movimiento elíptico que describe una trayectoria en forma de elipse, es decir, de un círculo achatado en dos de sus extremos, debido a la presencia de campos de fuerzas centrales, como son por ejemplo el campo potencial armónico y el potencial gravitatorio newtoniano, cada uno con una formulación teórica y matemática específica como se muestra en la siguiente figura. Ejemplos (2019)

Figura 57.
Movimiento elíptico.



Fuente: enlace web

4.1. ¿A qué llamamos elipse?

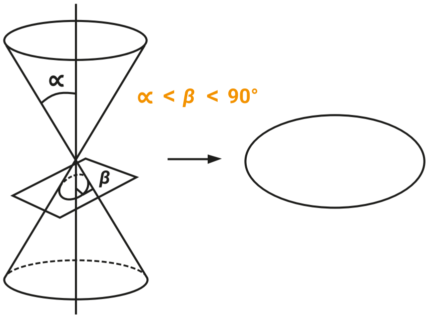
Llamamos elipse al lugar geométrico de los puntos de un plano tales que la suma de sus distancias a los puntos fijos denominados focos (F_1 y F_2) no cambia.

También encontramos que la elipse es una sección cónica.

Si el ángulo entre el plano y el eje es mayor que el ángulo ente el eje y una generatriz, entonces se produce una elipse. Como podemos observar en el video de Willington Profe (2014). Secciones cónicas. Hipérbola, Parábola, Elipse, Circunferencia. Así como en la siguiente figura.

Figura 58.

Sección cónica la elipse.

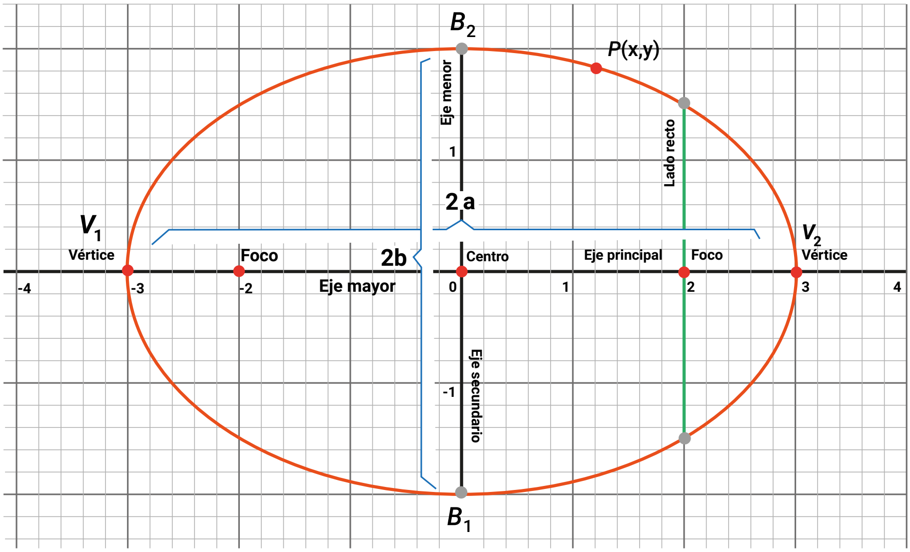


4.1.1. ¿Cuáles son los elementos de la elipse?

En la siguiente figura identifiquemos los elementos de la elipse:

Figura 59.

Elementos de la elipse



- **Centro**: Es el punto de intersección de los ejes que une a los focos.

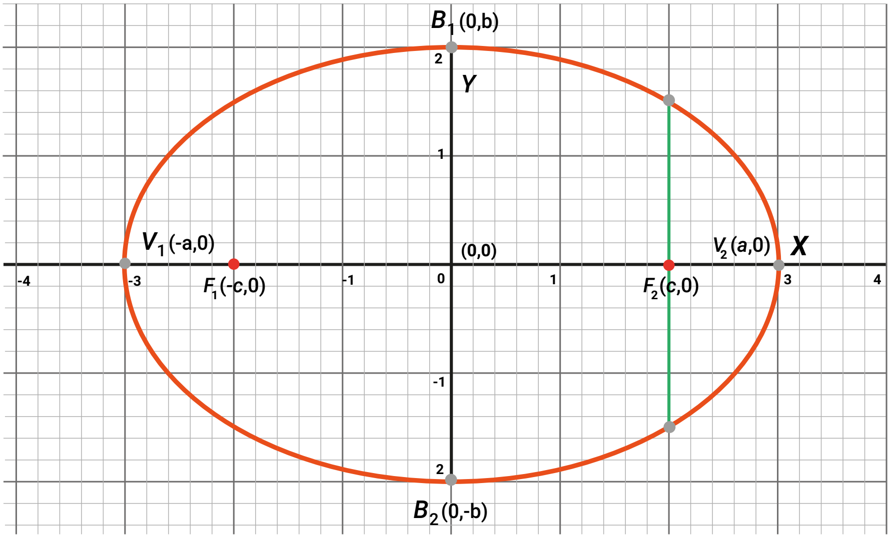
- **Vértices:** Son los puntos de intersección de la elipse con los ejes; entonces se considera V_1 y V_2 a los puntos que cortan al eje focal y B_1 y B_2 a aquellos que intersecan al eje secundario.
- **Focos**: Son los puntos fijos F_1 y F_2 que generalmente se encuentran sobre el eje mayor.
- **Eje focal:** Es la recta que pasa por los focos también se conoce como eje principal o de simetría.
- **Eje secundario**: Es la recta perpendicular al eje focal.
- **Eje mayor**: Es el segmento más largo de la elipse que une los puntos fijos V_1 y V_2 de longitud 2a.
- **Eje menor**: Es el segmento más pequeño de la elipse que une los puntos B_1 y B_2 de longitud 2b.
- **Lado recto**: Es el segmento de recta paralela al eje menor que pasa por uno de los focos y une dos puntos cualesquiera de la elipse.

4.2. ¿Cuál es la ecuación canónica de la elipse con centro (0,0) y eje focal *X*?

Consideremos la elipse con centro en el origen y eje de simetría *x*, como se muestra en la siguiente figura.

Figura 60.

Ecuación canónica de la elipse con centro (0,0) y eje focal X.



- Centro C(0,0)
- Vértices V_1 *(-a,0)*; V_2 *(a,0)*
- Cortes con los ejes B_1 *(0,b)*; B_2 *(0,-b)*
- Focos F_1 *(-c,0)*; F_2 *(c,0)*
- Eje focal *X*
- Eje normal *Y*
- Longitud eje mayor 2a
- Longitud eje menor 2b
- Lado recto $LR = \frac{2b^2}{a}$
- La excentricidad debe ser siempre menor que 1 y mayor que 0.
- Además, c debe ser menor que a
- La ecuación que la representa es $e = \frac{c}{a}$

$$e = \frac{\sqrt{a^2 - b^2}}{a}$$

Si *c* es igual a 0, los focos coincidirán con el centro y representará una circunferencia.

Las distancias entre *a, b y c* se relacionan mediante la ecuación:

$$a^2 = b^2 + c^2$$

De ella despejamos la variable que necesitemos para encontrar su valor, siempre y cuando tengamos tan solo una incógnita desconocida.

Para obtener la ecuación de la elipse partimos de:

$$\overline{PF_1} + \overline{PF_2} = 2a$$

Para ello determinamos la distancia de un punto cualquiera P(x,y) a los Focos F_1 *(-c,0)*; F_2 *(c,0)*

$$\overline{PF_1} = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$$

$$\overline{PF_1} = \sqrt{(x + c)^2 + (y - 0)^2}$$

$$\overline{PF_1} = \sqrt{(x + c)^2 + y^2}$$

$$\overline{PF_2} = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$$

$$\overline{PF_2} = \sqrt{(x - c)^2 + (y - 0)^2}$$

$$\overline{PF_2} = \sqrt{(x - c)^2 + y^2}$$

Sumamos las distancias e igualamos a 2a

$$\overline{PF_1} + \overline{PF_2} = 2a$$

$$\sqrt{(x+c)^2+y^2} + \sqrt{(x-c)^2+y^2} = 2a$$

$$\sqrt{(x-c)^2+y^2} = 2a - \sqrt{(x+c)^2+y^2}$$

$$\left(\sqrt{(x-c)^2+y^2}\right)^2 = \left(2a - \sqrt{(x+c)^2+y^2}\right)^2$$

$$(x-c)^2+y^2 = 4a^2 - 4a\sqrt{(x+c)^2+y^2} + (x+c)^2+y^2$$

Desarrollamos el binomio en ambos lados y reducimos términos semejantes

$$x^2+2xc+c^2+y^2 = 4a^2 - 4a\sqrt{(x+c)^2+y^2} + x^2-2xc+c^2+y^2$$

$$4xc - 4a^2 = -4a\sqrt{(x+c)^2+y^2}$$

Extraemos el factor común y simplificamos

$$-4(xc-a^2) = -4a\sqrt{(x+c)^2+y^2}$$

$$(xc-a^2) = a\sqrt{(x+c)^2+y^2}$$

Eliminamos la raíz cuadrada, resolvemos el binomio y multiplicamos

$$(xc-a^2)^2 = \left(a\sqrt{(x+c)^2+y^2}\right)^2$$

$$a^4 - 2a^2xc + x^2c^2 = a^2(x^2-2xc+c^2+y^2)$$

$$a^4 - 2a^2xc + x^2c^2 = a^2x^2 - 2a^2xc + a^2c^2 + a^2y^2$$

Índice
Primer bimestre
Segundo bimestre
Solucionario
Referencias bibliográficas

Reducimos términos semejantes, agrupamos los términos por variables que tengan *x* e *Y* a un solo lado de la ecuación, luego factorizamos

$$a^4 - a^2c^2 = a^2x^2 - x^2c^2 + a^2y^2$$

$$a^4(a^2-c^2) = x^2(a^2-c^2) + a^2y^2$$

Tenemos que la distancia del punto $B_1(0,b)$ a cada foco es *a*.

Por lo tanto, aplicamos el teorema de Pitágoras y despejamos a^2.

$$a^2 = b^2 + c^2$$

$$b^2 = a^2 - c^2$$

Sustituimos todos $(a^2 - c^2)$ que tengamos en la ecuación anterior por b^2

$$a^2 b^2 = x^2 b^2 + a^2y^2$$

$$x^2 b^2 + a^2y^2 = a^2 b^2$$

Finalmente dividimos toda la ecuación para $a^2 b^2$ y simplificamos

$$\frac{x^2b^2}{a^2b^2} + \frac{a^2y^2}{a^2b^2} = \frac{a^2b^2}{a^2b^2}$$

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

Es la ecuación canónica de la elipse con el eje focal *X*.

Recuerde que "a" siempre será el mayor valor en la ecuación de una elipse. (Ministerio de Educación, 2016, p. 170)

Índice
Primer bimestre
Segundo bimestre
Solucionario
Referencias bibliográficas

Para alcanzar un aprendizaje significativo en matemáticas debemos vincular la teoría con la práctica, por ello, le invito a resolver los siguientes ejercicios aplicando los conocimientos teóricos sobre la elipse con centro *(0,0)* y eje focal *X*.

Revise el ejemplo

Ejemplo 20

Hallemos la ecuación de la elipse de centro en el origen cuyos vértices son los puntos $V_1(-7,0)$ y $V_2(7,0)$ y sus focos $F_1(-5,0)$ y $F_2(5,0)$

Según los vértices $V_1(-7,0)$ y $V_2(7,0)$ entonces $a = 7$

Según los focos $F_1(-5,0)$ y $F_2(5,0)$ y entonces $c = 5$

Determinemos el valor de *b*, utilizando el teorema de Pitágoras

$$b^2 = a^2 - c^2$$

$$b = \sqrt{a^2 - c^2}$$

$$b = \sqrt{7^2 - 5^2}$$

$$b = \sqrt{24}$$

Los valores sustituimos en la ecuación

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

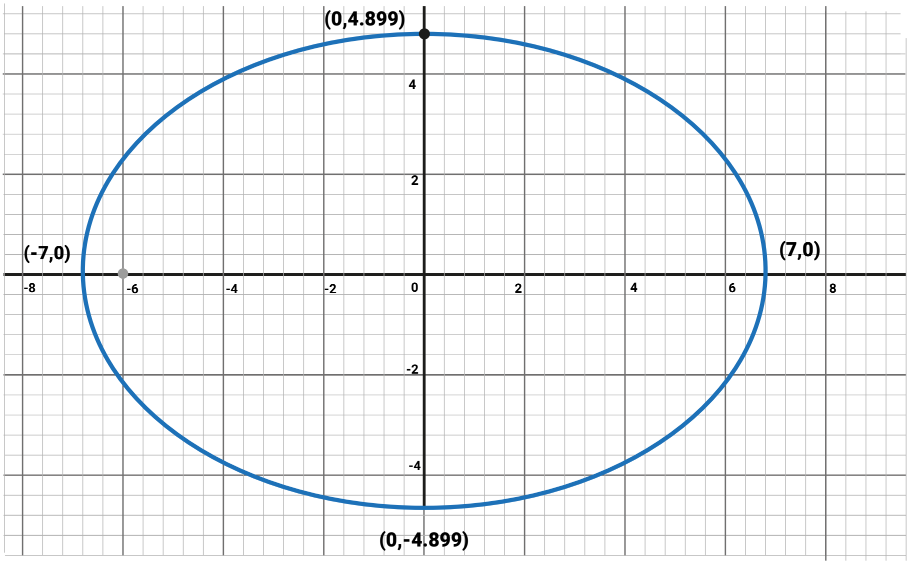
$$\frac{x^2}{7^2} + \frac{y^2}{(\sqrt{24})^2} = 1$$

$$\frac{x^2}{49} + \frac{y^2}{24} = 1$$

Para comprobar grafiquemos la ecuación, como podemos observar en la siguiente figura.

Figura 61.

Elipse de centro en el origen cuyos vértices son los puntos $V_1(-7,0)$ y $V_2(7,0)$ sus focos $F_1(-5,0)$ y $F_2(5,0)$

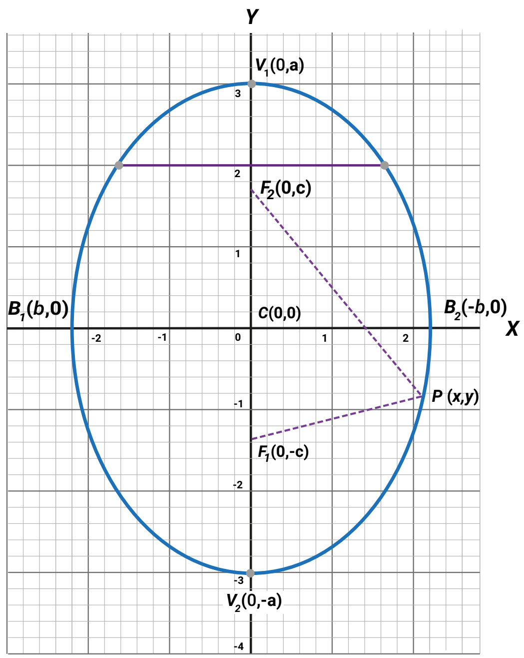


4.3. ¿Cuál es la ecuación canónica de la elipse con centro (0,0) y eje focal *Y*?

Consideremos la elipse con centro en el origen y eje de simetría *Y*, como se muestra en la siguiente figura:

Figura 62.

Elipse con centro (0,0)y eje focal Y.



- Centro (0,0)
- Vértices $V_1(0,a)$; $V_2(0,-a)$
- Cortes con los ejes $B_1(b,0)$; $B_2(-b,-0)$
- Focos $F_1(0,-c)$; $F_2(0,c)$
- Eje focal *Y*
- Eje normal *X*
- Longitud eje mayor 2a
- Longitud eje menor 2b
- Lado recto $LR = \frac{2b^2}{a}$
- La excentricidad es

$$e = \frac{c}{a}$$

$$e = \frac{\sqrt{a^2 - b^2}}{a}$$

Las distancias entre a, b y c se relacionan mediante la ecuación:

$$a^2 = b^2 + c^2$$

Para obtener la ecuación de la elipse partimos de:

$$\overline{PF_1} + \overline{PF_2} = 2a$$

Para ello determinamos la distancia de un punto cualquiera P(x,y) a los focos $F_1(0,-c)$; $F_2(0,c)$

$$\overline{PF_1} = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$$

$$\overline{PF_1} = \sqrt{(x - 0)^2 + (y - c)^2}$$

$$\overline{PF_1} = \sqrt{x^2 + (y - c)^2}$$

$$\overline{PF_2} = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)}^2$$

$$\overline{PF_2} = \sqrt{(x - 0)^2 + (y + c)^2}$$

$$\overline{PF_2} = \sqrt{x^2 + (y + c)^2}$$

Sumamos las distancias e igualamos a 2a

$$\overline{PF_1} + \overline{PF_2} = 2a$$

$$\sqrt{x^2 + (y - c)^2} + \sqrt{x^2 + (y + c)^2} = 2a$$

$$\sqrt{x^2 + (y + c)^2} = 2a - \sqrt{x^2 + (y - c)^2}$$

$$\left(\sqrt{x^2 + (y + c)^2}\right)^2 = \left(2a - \sqrt{x^2 + (y - c)^2}\right)^2$$

$$x^2 + (y + c)^2 = 4a^2 - 4a\sqrt{x^2 + (y - c)^2} + x^2 + (y - c)^2$$

Resolvemos el binomio en ambos lados y reducimos términos semejantes

$$x^2 + (y + c)^2 = 4a^2 - 4a\sqrt{x^2 + (y - c)^2} + x^2 + (y - c)^2$$

$$\cancel{x^2} + \cancel{y^2} + 2yc + \cancel{c^2} = 4a^2 - 4a\sqrt{x^2 + (y - c)^2} + \cancel{x^2} + \cancel{y^2} - 2yc + \cancel{c^2}$$

$$4yc - 4a^2 = 4a\sqrt{x^2 + (y - c)^2}$$

Extraemos el factor común y simplificamos

$$-4(yc - a^2) = -4a\sqrt{x^2 + (y - c)^2}$$

$$(yc - a^2) = a\sqrt{x^2 + (y - c)^2}$$

Eliminamos la raíz cuadrada, resolvemos el binomio y multiplicamos

$$(yc - a^2)^2 = \left(a\sqrt{x^2 + (y - c)^2}\right)^2$$

$$y^2c^2 - 2a^2yc + a^4 = a^2(x^2 - y^2 - 2yc + c^2)$$

$$a^4 - 2a^2yc + y^2c^2 = a^2x^2 - a^2y^2 - 2a^2yc + a^2c^2$$

Reducimos términos semejantes, agrupamos los términos por variables que tengan y e y a un solo lado de la ecuación, luego factorizamos

$$a^4 - \cancel{2a^2yc} + y^2c^2 = a^2x^2 + a^2y^2 - \cancel{2a^2yc} + a^2c^2$$

$$a^4 - a^2c^2 = a^2x^2 + a^2y^2 - y^2c^2$$

$$a^2(a^2 - c^2) = y^2(a^2 - c^2) + a^2x^2$$

Tenemos que la distancia del punto $B_1(0,b)$ a cada foco es a.

Por lo tanto, aplicamos el teorema de Pitágoras y despejamos b^2.

$$a^2 = b^2 + c^2$$

$$b^2 = a^2 + c^2$$

Sustituimos todos ($a^2 + c^2$) que tengamos en la ecuación anterior por b^2

$$a^2(a^2-c^2) = y^2(a^2-c^2) + a^2x^2$$

$$a^2b^2 = b^2y^2 + a^2x^2$$

Ordenando

$$a^2x^2 + b^2y^2 = a^2b^2$$

Finalmente, dividimos toda la ecuación para $a^2 b^2$ y simplificamos

$$\frac{a^2x^2}{a^2b^2} + \frac{b^2y^2}{a^2b^2} = \frac{a^2b^2}{a^2b^2}$$

$$\frac{x^2}{b^2} + \frac{y^2}{a^2} = 1$$

Es la ecuación canónica de la elipse con eje focal *Y*. (Ministerio de Educación, 2016, p. 172)

Para alcanzar un aprendizaje significativo en matemáticas debemos vincular la teoría con la práctica, por ello, le invito a resolver los siguientes ejercicios aplicando los conocimientos teóricos sobre la elipse con centro (0,0) y eje focal *Y*.

Ejemplo 21

Determinemos la ecuación de la elipse de centro en el origen cuyos vértices son los puntos $V_1(0,3)$; $V_2(0,-3)$ y sus focos $F_1(0,2)$; $F_2(0,-2)$

Según los vértices $V_1(0{,}3)$; $V_2(0{,}-3)$ a = 3

Según los focos $F_1(0{,}2)$; $F_2(0{,}-2)$ $c = 2$

Determinemos el valor de b.

$$b^2 = a^2 - c^2$$

$$b = \sqrt{a^2 - c^2}$$

$$b = \sqrt{3^2 - 2^2}$$

$$b = \sqrt{5}$$

Los valores sustituimos en la ecuación

$$\frac{x^2}{b^2} + \frac{y^2}{a^2} = 1$$

$$\frac{x^2}{(\sqrt{5})^2} + \frac{y^2}{(3)^2} = 1$$

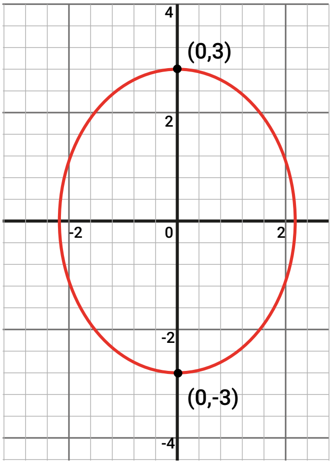
$$\frac{x^2}{5} + \frac{y^2}{9} = 1$$

Para comprobar graficamos la ecuación y comprobamos que cumple con los elementos dados como se muestra en la siguiente figura.

Índice
Primer bimestre
Segundo bimestre
Solucionario
Referencias bibliográficas

Figura 63.

Elipse de centro en el origen cuyos vértices son los puntos $V_1(0,3)$; $V_2(0,-3)$ y sus focos $F_1(0,2)$; $F_2(0,-2)$



Recursos de aprendizaje

Para afianzar sus conocimientos:

Lea comprensivamente las páginas 152-162 del texto básico, Carpinteyro E. (2016). *Geometría analítica.*

Habilite el hipervínculo y mire atentamente el video de:

Matemáticas profe Alex. (2018). Ecuación canónica de la Elipse

Retroalimentación

En este video encontramos la explicación de las características de la ecuación canónica u ordinaria de la elipse con centro en el origen (0,0), forma de reconocer cuándo tiene centro en el origen y el valor de *a* y *b*.

Actividades de aprendizaje recomendadas

Desarrolle las actividades propuestas en el texto básico:

- Cómo trazar una elipse, página 152.
- Resuelva los ejercicios propuestos en el texto complementario. Lehmann C. (2012) Ecuación de la parábola, grupo 27, páginas 178-180.

Estimados estudiantes, hemos concluido la tercera unidad, autoevaluemos nuestros conocimientos logrados hasta aquí.

Desarrolle la autoevaluación 3

Índice
Primer bimestre
Segundo bimestre
Solucionario
Referencias bibliográficas

Autoevaluación 3

Unidad 3. La parábola y sus ecuaciones

1. El lugar geométrico de un punto que se mueve en un plano de tal manera que su distancia de una recta fija, situada en el plano, es siempre igual a su distancia de un punto fijo del plano y que no pertenece a la recta se denomina

   a. Hipérbola.
   b. Elipse.
   c. Parábola.

2. Los puentes colgantes que se construyen con cables adoptan la forma

   a. Elíptica.
   b. Parabólica.
   c. Hipérbola.

3. Si en una figura de revolución el ángulo entre el plano y el eje es igual que el ángulo ente el eje y una generatriz entonces se produce una

   a. Circunferencia.
   b. Parábola.
   c. Elipse.

4. En una parábola la recta que pasa por el foco e intersecta perpendicularmente a la directriz se llama

   a. Vértice.
   b. Directriz.
   c. Eje de simetría.

5. La recta cuya distancia a cualquier punto de la parábola es equidistante a la distancia de ese mismo punto al foco, se llama

   a. Lado recto.
   b. Directriz.
   c. Eje de simetría.

6. Si $p>0$ la parábola tiene su foco a la derecha del vértice sus ramas se abren

   a. A la izquierda.
   b. A la derecha.
   c. Hacia arriba.

7. La ecuación de la parábola con vértice en el origen y eje de simetría X es

   a. $y^2 = 4px$
   b. $x^2 = 4py$
   c. $R^2 = x^2 + y^2$

8. La ecuación de la parábola con vértice en el origen y eje de simetría Y es

   a. $x^2 = -2py$
   b. $y^2 = 4px$
   c. $x^2 = 4py$

9. La ecuación de una parábola de vértice (h,k) y eje focal de simetría paralelo al eje X es

   a. $(x-h)^2 = 4p(y-k)$
   b. $(y-k)^2 = 4p(x-h)$
   c. $R^2 = x^2 + y^2$

10. La ecuación de una parábola de vértice (h,k) y eje de simetría paralelo al eje Y es

   a. $(x-y)^2 = 4p(h-k)$
   b. $(y-k)^2 = 4p(x-h)$
   c. $(x-h)^2 = 4p(y-k)$

Ir al solucionario

Índice
Primer bimestre
Segundo bimestre
Solucionario
Referencias bibliográficas

Lo está haciendo muy bien.

¡Siga adelante!

Recuerde que a través del chat de tutoría y consulta puede aclarar sus dudas e inquietudes con su docente.

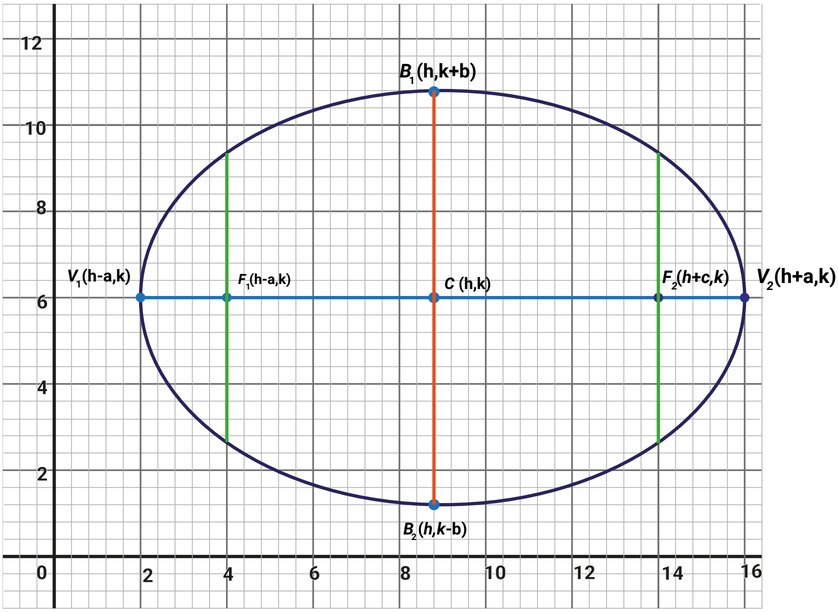
Semana 12

4.3.1. ¿Cuál es la ecuación de la elipse con centro (h,k) y eje de simetría paralelo al eje X ?

Analicemos la gráfica de la elipse que se muestra en la siguiente figura:

Figura 64.

Elipse con centro (0,0) y eje focal X.



- Centro *C(h,k)*
- Vértices $V_1(h\text{-}a,k)$; $V_2(h+a,k)$
- Cortes con los ejes $B_1(h, k + b)$; $B_2(h, k - b)$
- Focos $F_1(h\text{-}c,k)$; $F_2(h+c,k)$
- Eje focal y = k
- Eje normal paralelo a *Y*
- Longitud eje mayor 2a
- Longitud eje menor 2b
- Lado recto $LR = \frac{2b^2}{a}$

La excentricidad es

$$e = \frac{c}{a}$$

Índice
Primer bimestre
Segundo bimestre
Solucionario
Referencias bibliográficas

$$e = \frac{\sqrt{a^2 - b^2}}{a}$$

Las distancias entre a, b y c se relacionan mediante la ecuación:

$$a^2 = b^2 + c^2$$

Para obtener la ecuación de la elipse partimos de:

$$\overline{PF_1} + \overline{PF_2} = 2a$$

Para ello determinamos la distancia de un punto cualquiera P(x,y) a los focos $F_1(h\text{-}c,k)$; $F_2(h\text{+}c,k)$.

$$\overline{PF_1} = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$$

$$\overline{PF_1} = \sqrt{(x - (h - c))^2 + (y - k)^2}$$

$$\overline{PF_2} = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$$

$$\overline{PF_2} = \sqrt{(x - (h + c))^2 + (y - k)^2}$$

Sumamos las distancias e igualamos a 2a

$$\overline{PF_1} + \overline{PF_2} = 2a$$

$$\sqrt{(x - (h - c))^2 + (y - k)^2} + \sqrt{(x - (h + c))^2 + (y - k)^2} = 2a$$

$$\sqrt{(x - (h - c))^2 + (y - k)^2} = 2a - \sqrt{(x - (h + c))^2 + (y - k)^2}$$

$$\left(\sqrt{(x - (h + c))^2 + (y - k)^2}\right)^2 = \left(2a - \sqrt{(x - (h - c))^2 + (y - k)^2}\right)^2$$

$$(x - h + c)^2 + \cancel{(y - k)^2} = 4a^2 - 4a\sqrt{(x - (h + c))^2 + (y - k)^2} + (x - h - c)^2 + \cancel{(y - k)^2}$$

$$(x-h+c)^2+(x-h-c)^2-4a^2=-4a\sqrt{(x-(h+c))^2+(y-k)^2}$$

Aplicamos la suma por la diferencia de sus raíces

$$(x-h+c+x-h-c)(x-h+c-x+h+c)-4a^2=-4a\sqrt{(x-(h+c))^2+(y-k)^2}$$

Reducimos términos semejantes, factorizamos y simplificamos

$$(x-h+\cancel{c}+x-h-\cancel{c})(\cancel{x}-\cancel{h}+c-\cancel{x}+\cancel{h}+c)-4a^2=4a\sqrt{(x-(h+c))^2+(y-k)^2}$$

$$(2x-2h)(2c)-4a^2=4a\sqrt{(x-(h+c))^2+(y-k)^2}$$

$$4c(2x-2h)-4a^2=4a\sqrt{(x-(h+c))^2+(y-k)^2}$$

Eliminamos la raíz cuadrada, resolvemos el binomio y multiplicamos

$$[c(x-h)-a^2]^2=\left[a\sqrt{(x-h-c)^2+(y-k)^2}\right]^2$$

$$c(x-h))^2-2a^2c(x-h)+a^4=a^2[(x-h-c)^2+(y-k)^2]$$

$$c^2(x-h)^2-2a^2c(x-h)+a^4=a^2\left((x-h)-c\right)^2+a^2(y-k)^2$$

$$c^2(x-h)^2-2a^2c(x-h)+a^4=a^2[(x-h)^2-2c(x-h)+c^2]+a^2(y-k)^2$$

$$c^2(x-h)^2-2a^2c(x-h)+a^4=a^2(x-h)^2-2a^2c(x-h)+a^2c^2+a^2(y-k)^2$$

Reducimos términos semejantes y extraemos el factor común

$$c^2(x-h)^2-\cancel{2a^2c(x-h)}+a^4-a^2(x-h)^2+\cancel{2a^2c(x-h)}-a^2c^2+=a^2(y-k)^2$$

$$(x-h)^2(c^2-a^2)+a^2(y-k)^2=a^2(a^2-c^2)$$

Aplicamos el teorema de Pitágoras y despejamos b^2.

$$a^2 = b^2 + c^2$$

$$b^2 = a^2 - c^2$$

Sustituimos todos *(a^2 - c^2)* que tengamos en la ecuación por b^2

$$(x-h)^2(c^2-a^2) + a^2(y-k)^2 = a^2(a^2-c^2)$$

$$(x-h)^2 b^2 + a^2(y-k)^2 = a^2 b^2$$

Finalmente, dividimos toda la ecuación para a^2b^2 y simplificamos

$$\frac{(x-h)^2\cancel{b^2}}{a^2\cancel{b^2}} + \frac{\cancel{a^2}(y-k)^2}{\cancel{a^2}b^2} = \frac{\cancel{a^2}\cancel{b^2}}{\cancel{a^2}\cancel{b^2}}$$

$$\frac{(x-h)^2}{a^2} + \frac{(y-k)^2}{b^2} = 1$$

Es la ecuación canónica de la elipse paralelo al eje *X*. (Ministerio de Educación, 2016, p. 174)

> Para alcanzar un aprendizaje significativo en matemáticas debemos vincular la teoría con la práctica, por ello, le invito a resolver los siguientes ejercicios aplicando los conocimientos teóricos sobre la elipse con centro (h,k) y eje de simetría paralelo al eje *X*.

Revise el ejemplo

Ejemplo 22

Determinemos la ecuación de la elipse con centro (-3, 4) cuyo eje mayor es paralelo al eje horizontal y el valor de la excentricidad es $\frac{2\sqrt{6}}{7}$

Índice
Primer bimestre
Segundo bimestre
Solucionario
Referencias bibliográficas

A partir de la excentricidad determinamos los valores de *a y c*

$$e = \frac{c}{a}$$

$$e = \frac{2\sqrt{6}}{7}$$

$$a = 7$$

$$c = 2\sqrt{6}$$

Calculemos el valor de b

$$b^2 = a^2 - c^2$$
$$b^2 = (7)^2 - (2\sqrt{6})^2$$
$$b = \sqrt{25}$$
$$b = 5$$

Considerando los valores del centro *C(h, k)* identifiquemos los vértices

$$C(h, k)$$

$$C(-3, 4)$$

$$h = -3$$

$$k = 4$$

$$V_1(h - a, k)$$

$$V_1(-3 - 7, 4)$$

$$V_1(-10, 4)$$

$$V_2(h + a, k)$$

$$V_2(-10 + 7{,}4)$$

$$V_2(-3{,}4)$$

Sustituyamos en la ecuación canónica con centro (h, k) y eje de simetría paralelo al eje X.

$$\frac{(x-h)^2}{a^2} + \frac{(y-k)^2}{b^2} = 1$$

$$\frac{(x-(-3))^2}{7^2} + \frac{(y-4)^2}{5^2} = 1$$

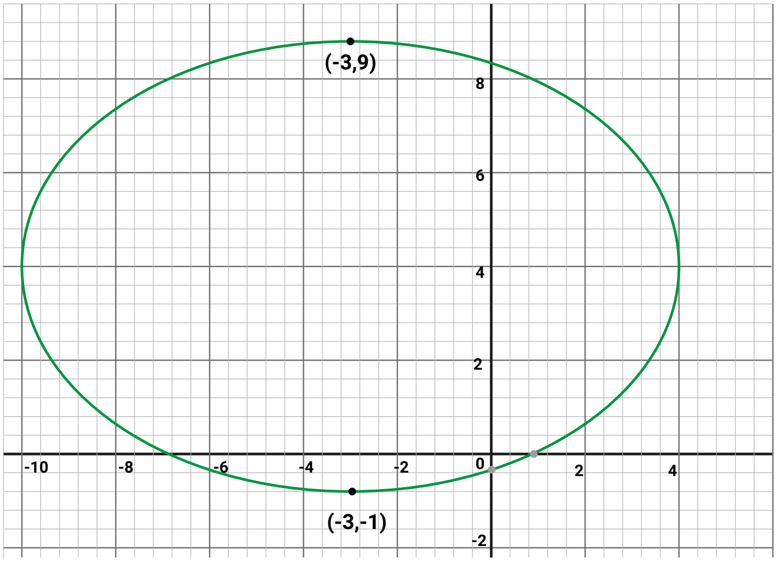
$$\frac{(x+3)^2}{49} + \frac{(y-4)^2}{25} = 1$$

Es la ecuación de la elipse solicitada.

Para comprobar graficamos la ecuación, como se muestra en la siguiente figura.

Figura 65.

Elipse con centro (-3, 4), cuyo eje mayor es paralelo al eje horizontal y el valor de la excentricidad es $\frac{2\sqrt{6}}{7}$.

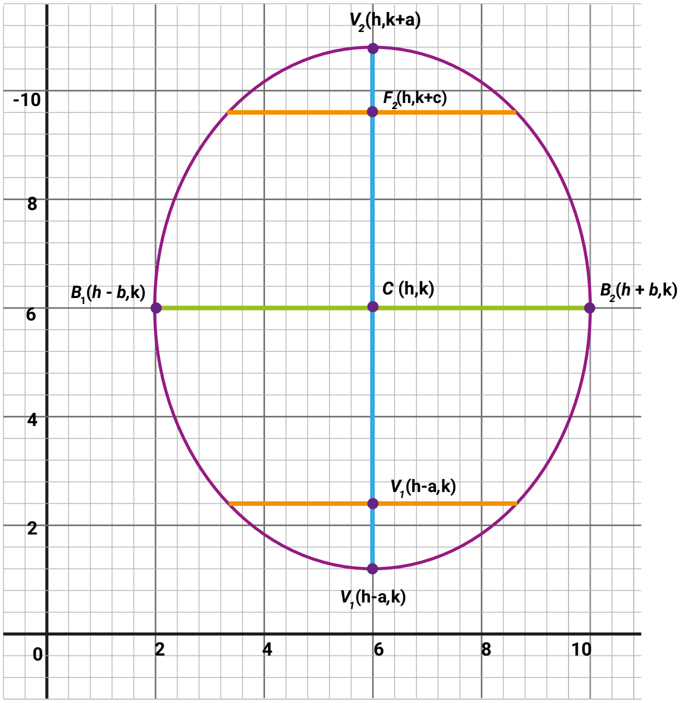


4.3.2. ¿Cuál es la ecuación de la elipse con centro *(h,k)* y eje de simetría paralelo al eje *Y*?

Para determinar la ecuación de la elipse, analicemos la figura que se muestra a continuación:

Figura 66.

Elipse con centro (h, k) y eje de simetría paralelo al eje Y.



Encontramos

- Centro *C(h,k)*
- Vértices $V_1(h\text{-}a,k)$; $V_2(h, k + a)$
- Cortes con los ejes $B_1(h,- b, k)$; $B_2(h + b, k)$
- Focos $F_1(h, k - c)$; $F_2(h, k + c)$
- Eje focal x = h
- Eje normal paralelo a *Y*
- Longitud eje mayor 2a
- Longitud eje menor 2b
- Lado recto: $LR = \frac{2b^2}{a}$
- La excentricidad es: $e = \frac{c}{a}$, $e = \frac{\sqrt{a^2-b^2}}{a}$

Las distancias entre *a, b y c* se relacionan mediante la ecuación:

$$a^2 = b^2 + c^2$$

Determinemos la distancia de un punto cualquiera P(x,y) a los focos $F_1(h, k - c)$; $F_2(h, k + c)$

$$\overline{PF_1} = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$$

$$\overline{PF_1} = \sqrt{(x - h)^2 + (y - (k - c))^2}$$

$$\overline{PF_2} = \sqrt{(x_2 - x_2)^2 + (y_2 - y_1)^2}$$

$$\overline{PF_2} = \sqrt{(x - h)^2 + (y - (k + c))^2}$$

Para obtener la ecuación de la elipse partimos de su definición:

$$\overline{PF_1} + \overline{PF_2} = 2a$$

$$\sqrt{(x-h)^2 + (y-(k-c))^2} + \sqrt{(x-h)^2 + (y-(k+c))^2} = 2a$$

$$\sqrt{(x-h)^2 + (y-k-c)^2} = 2a - \sqrt{(x-h)^2 + (y-k+c)^2}$$

$$\left(\sqrt{(x-h)^2 + (y-k-c)^2}\right)^2 = \left(2a - \sqrt{(x-h)^2 + (y-k+c)^2}\right)^2$$

$$\cancel{(x-h)^2} + (y-k-c)^2 = 4a^2 - 4a\sqrt{(x-h)^2 + (y-k+c)^2} + (y-k+c)^2 + \cancel{(x-h)^2}$$

$$(y-k-c)^2 - (y-k+c)^2 = 4a^2 - 4a\sqrt{(x-h)^2 + (y-k+c)^2}$$

Aplicamos la suma por la diferencia de su sus raíces

$$(y-k-c+y-k+c)(y-k-c-y+k-c) - 4a^2 = -4a\sqrt{(x-h)^2 + (y-k+c)^2}$$

Reducimos términos semejantes, factorizamos y simplificamos

$$\cancel{(y-k-c+y-k+c)}(\cancel{y}-\cancel{k}-c-\cancel{y}+\cancel{k}-c)-4a^2=-4a\sqrt{(x-h)^2+(y-k+c)^2}$$

$$(2y-2k)(-2c)-4a^2=-4a\sqrt{(x-h)^2+(y-k+c)^2}$$

$$4c(y-k)+4a^2=4a\sqrt{(x-h)^2+(y-k+c)^2}$$

Eliminamos la raíz cuadrada, resolvemos el binomio y multiplicamos

$$(c(y-k)+a^2)^2=\left(a\left(\sqrt{(x-h)^2+(y-k+c)^2}\right)\right)^2$$

$$(c(y-k))^2+2a^2c(y-k)+a^4=a^2[(x-h)^2+(y-k+c)^2]$$

$$c^2(y-k)^2+2a^2c(y-k)+a^4=a^2[(x-h)^2+((y-k)+c)^2]$$

$$c^2(y-k)^2+2a^2c(y-k)+a^4=a^2[(x-h)^2-(y-k)^2+2c(y-k)+c^2]$$

$$c^2(y-k)^2+2a^2c(y-k)+a^4=a^2(x-h)^2-a^2(y-k)^2+2a^2c(y-k)+a^2c^2$$

Reducimos términos semejantes y extraemos el factor común

$$c^2(y-k)^2+\cancel{2a^2c(y-k)}+a^4=a^2(x-h)^2-a^2(y-k)^2+\cancel{2a^2c(y-k)}+a^2c^2$$

$$-a^2(y-k)^2+c^2(y-k)^2-a^2(x-h)^2=-a^4+a^2c^2$$

$$a^2(y-k)^2-c^2(y-k)^2+a^2(x-h)^2=a^4-a^2c^2$$

$$(y-k)^2(a^2-c^2)+a^2(x-h)^2=a^2(a^2-c^2)$$

Aplicamos el teorema de Pitágoras y despejamos b^2.

$$a^2=b^2+c^2$$

$$b^2=a^2-c^2$$

Sustituimos todos (a^2 - c^2) que tengamos en la ecuación por b^2

$$(y-k)^2(a^2-c^2)+a^2(x-h)^2=a^2(a^2-c^2)$$

$$(y-k)^2b^2+a^2(x-h)^2=a^2b^2$$

Finalmente, dividimos toda la ecuación para a^2b^2 y simplificamos

$$\frac{\cancel{a^2}(x-h)^2}{\cancel{a^2}b^2}+\frac{(y-k)^2\cancel{b^2}}{a^2\cancel{b^2}}=\frac{\cancel{a^2}\cancel{b^2}}{\cancel{a^2}\cancel{b^2}}$$

$$\frac{(x-h)^2}{b^2}+\frac{(y-k)^2}{a^2}=1$$

Donde a > b > 0

Es la ecuación canónica de la elipse paralelo al eje Y. (Ministerio de Educación, 2016, p. 174)

> Para alcanzar un aprendizaje significativo en matemáticas debemos vincular la teoría con la práctica, por ello, le invito a resolver los siguientes ejercicios aplicando los conocimientos teóricos sobre la elipse con centro (h,k) y eje de simetría paralelo al eje Y.

Revise el Ejemplo

Ejemplo 23

Determinemos la ecuación de la elipse de centro (-2, 2), cuyos vértices son (-2,8) y (-2,-4) además el eje menor es 10.

Sabemos que el eje principal es paralelo al eje la ecuación es:

$$x = 2$$

A partir de los vértices determinemos los valores de *h y k*

Índice
Primer bimestre
Segundo bimestre
Solucionario
Referencias bibliográficas

$$V_1 = (h, k + a)$$

$$(-2,8) = (h, k + a)$$

$$h = -2$$

$$k + a = 8$$

$$V_2 = (h, k + a)$$

$$(-2,8) = (h, k - a)$$

$$h = -2$$

$$k - a = -4$$

Resolvemos el sistema de ecuaciones formado por:

$$k + \cancel{a} = 8$$

$$\underline{k - \cancel{a} = -4}$$

$$2k = 4$$

$$k = 2$$

$$k + a = 8$$

$$2 + a = 8$$

$$a = 6$$

Sabemos que el eje menor es 10

2b = 10

b = 5

Índice
Primer bimestre
Segundo bimestre
Solucionario
Referencias bibliográficas

Sustituyamos los valores encontrados en la ecuación canónica con centro (h, k) y eje de simetría paralelo al eje Y.

$$\frac{(x-h)^2}{b^2}+\frac{(y-k)^2}{a^2}=1$$

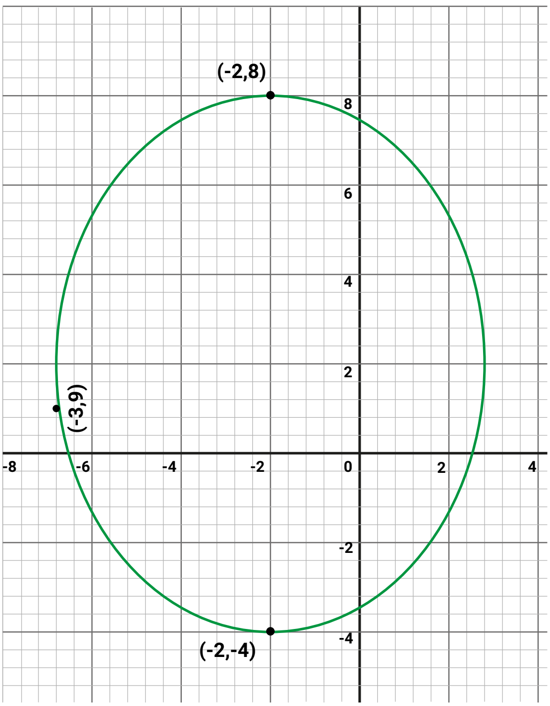
$$\frac{(x-(-2))^2}{5^2}+\frac{(y-2)^2}{6^2}=1$$

$$\frac{(x+2)^2}{25}+\frac{(y-2)^2}{36}=1$$

Verifiquemos graficando la elipse, como se muestra en la siguiente figura.

Figura 67.

Elipse de centro (-2, 2), cuyos vértices son (-2, 8) y (-2, -4), además el eje menor es 10



Como podemos ver si cumple con los elementos dados.

> **Recursos de aprendizaje**
>
> Para afianzar sus conocimientos:
>
> Lea comprensivamente las páginas 152-162 del texto básico, Carpinteyro E. (2016). *Geometría analítica.*
>
> Habilite los hipervínculos y mire atentamente los videos de:
>
> Matemáticas profe Alex. (2016). Gráfica y elementos de la elipse conociendo su ecuación general
>
> **Retroalimentación**
>
> En este video encontramos la explicación de cómo graficar y encontrar los elementos de la elipse cuando se conoce su ecuación general, primero pasándola a la forma canónica para luego encontrar su centro y las medidas de a, b y c, en este caso con una elipse con centro en (0,0).

Actividad de aprendizaje recomendada

Resuelva los ejercicios propuestos en el texto complementario. Lehmann C. (2012)

- Ecuación de la parábola, grupo 28, páginas 184-186.

Lo está haciendo muy bien.

¡Siga adelante!

> Recuerde que a través del chat de tutoría y consulta puede aclarar sus dudas e inquietudes con su docente.

Semana 13

La hipérbola en la vida diaria

La hipérbola, cónica rara, también forma parte de distintas maneras, que ayudan a mejorar la calidad de vida de la sociedad (Matemovilares, 2015). Es bastante común apreciarla en edificios y construcciones arquitectónicas como podemos ver en las siguientes imágenes.

Figura 68.

Torre de Kobe, Japón | Catedral de Brasilia | Chimeneas de centrales nucleares

4.4. ¿A qué llamamos hipérbola?

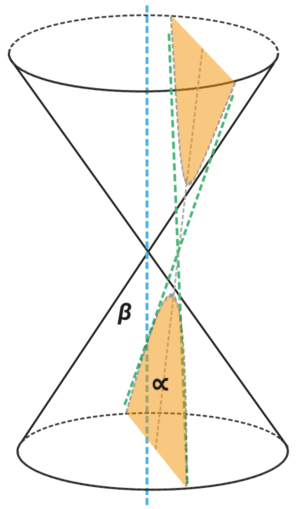
Llamamos hipérbola al lugar geométrico de los puntos de un plano, tales que la suma de las distancias a los puntos fijos denominados F_1 y F_2 no cambia.

También encontramos que la hipérbola es una sección cónica.

Si el ángulo entre el plano y el eje es menor que el ángulo ente el eje y una generatriz entonces se produce una hipérbola. Cómo podemos observar en el video de Willington Profe (2014). Secciones cónicas.

Hipérbola, Parábola, Elipse, Circunferencia. Así como en la siguiente figura.

Figura 69.
Sección cónica de la hipérbola.



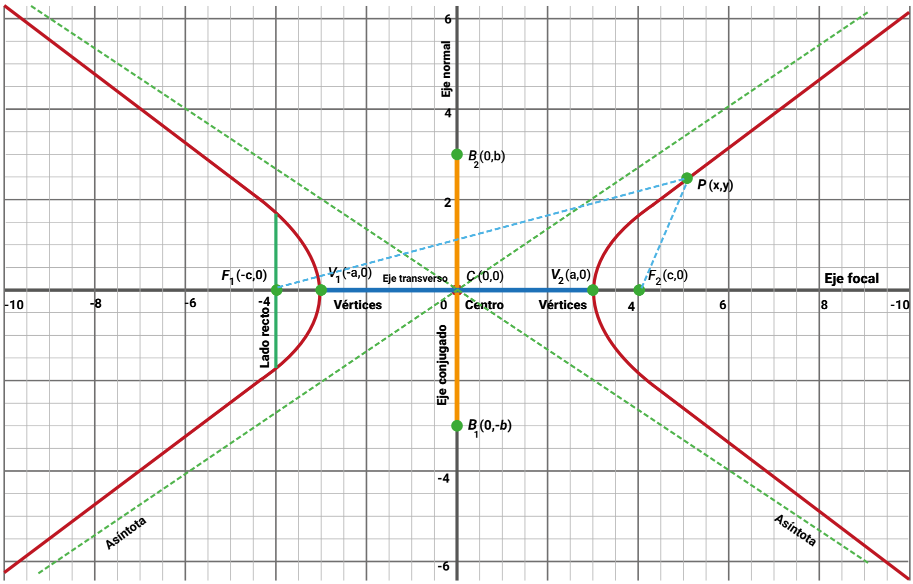
$\propto < \beta$ Se produce una hipérbola

4.4.1. ¿Cuáles son los elementos de una hipérbola?

En la siguiente figura identifiquemos los elementos de la hipérbola:

Índice
Primer bimestre
Segundo bimestre
Solucionario
Referencias bibliográficas

Figura 70.
Elementos de la hipérbola.



- **Centro**: punto de intersección de los ejes o punto medio del eje transverso: *C(0,0).*
- **Vértices**: puntos de intersección de la hipérbola con los ejes: V_1(-a,0) y V_2(a,0)
- **Eje conjugado:** es el segmento cuyos extremos son los puntos que cortan al eje focal B_1(-b,0) y B_2(b,0), su distancia es 2b.
- **Focos:** son los puntos fijos F_1(-c,0) y F_2(c,0), que se encuentran sobre el eje de simetría.
- **Asíntotas:** son dos rectas que se acercan a la hipérbola sin llegar a tocarla, pues se extiende indefinidamente.
- **Eje focal:** conocido como eje de simetría o principal, es la recta que pasa por los focos.
- **Eje normal:** es la recta perpendicular al eje de simetría.
- **Eje transverso:** segmento que une los puntos V_1 y V_2 de la hipérbola, su distancia es 2a.

Índice
Primer bimestre
Segundo bimestre
Solucionario
Referencias bibliográficas

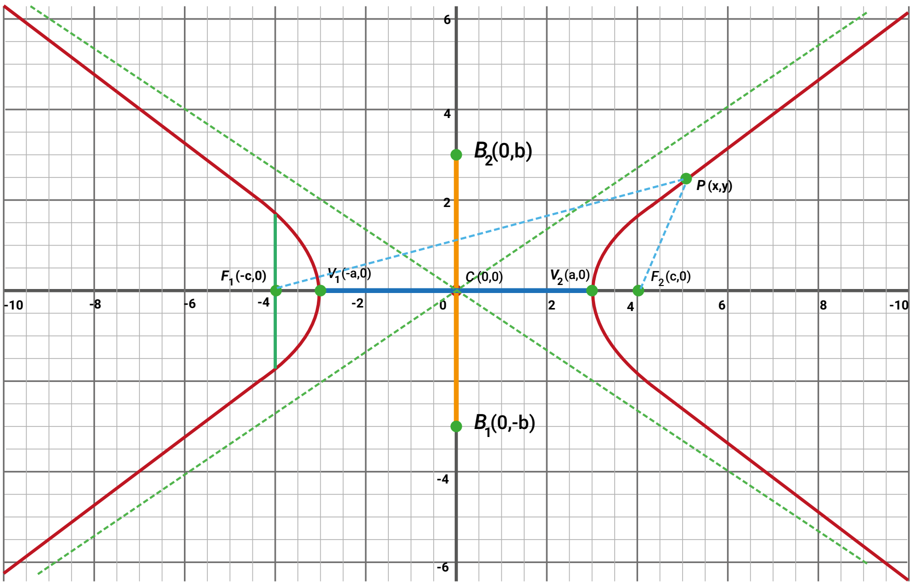
- **Lado recto:** es el segmento de recta que pasa por uno de los focos y une a dos puntos de la hipérbola.

4.4.2. ¿Cuál es la ecuación de la hipérbola con vértice en el origen y eje focal en el eje *X*?

Para determinar la ecuación de la hipérbola con centro C(0,0) y eje de simetría en el eje *X*, analicemos gráfica que se muestra a continuación:

Figura 71.

Hipérbola con centro C(0,0) y eje de simetría en el eje X



En ella encontramos:

- Centro: *C(0,0)*
- Vértices: $V_1(-a,0)$ y $V_2(a,0)$
- Extremos del eje conjugado: $B_1(-b,0)$ y $B_2(b,0)$
- Focos: $F_1(-c,0)$ y $F_2(c,0)$
- Asíntotas: $y = \frac{b}{a}x$; $y = -\frac{b}{a}x$

- Eje focal: *X*
- Eje normal: *Y*
- Longitud del eje conjugado: *2b*
- Longitud del eje transversal: *2a*
- Longitud del lado recto: $LR = \frac{2b^2}{a}$
- Excentricidad: $e = \frac{c}{a} = \frac{\sqrt{a^2+b^2}}{a}$ y esta debe ser >1

Las distancias entre *a, b y c* se relacionan mediante la expresión $c^2 = a^2 + b^2$

Determinemos las distancias entre el punto P(x,y) y los focos $F_1(-c,0)$ y $F_2(c,0)$

$$\overline{PF_1} = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$$

$$\overline{PF_1} = \sqrt{(x + c)^2 + (y - 0)^2}$$

$$\overline{PF_2} = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$$

$$\overline{PF_2} = \sqrt{(x - c)^2 + (y - 0)^2}$$

Por definición de hipérbola tenemos:

$$\overline{PF_1} - \overline{PF_2} = 2a$$

$$\sqrt{(x+c)^2 + (y-0))^2} - \sqrt{(x-c)^2 + (y-0)^2} = 2a$$

$$\sqrt{(x+c)^2 + (y)^2} = 2a + \sqrt{(x-c)^2 + (y-0))^2}$$

$$\left(\sqrt{(x+c)^2 + (y)^2}\right)^2 = \left(2a + \sqrt{(x-c)^2 + (y-0))^2}\right)^2$$

$$(x+c)^2 + y^2 = 4a^2 + 4a\sqrt{(x-c)^2 + y^2} + (x-c)^2 + y^2$$

$$x^2 + 2cx + c^2 + y^2 = 4a^2 + 4a\sqrt{(x-c)^2 + y^2} + x^2 - 2cx + c^2 + y^2$$

$$\cancel{x^2} + 2cx + \cancel{c^2} + \cancel{y^2} = 4a^2 + 4a\sqrt{(x-c)^2 + y^2} + \cancel{x^2} - 2cx + \cancel{c^2} + \cancel{y^2}$$

$$4cx = 4a^2 + 4a\sqrt{(x-c)^2 + y^2}$$

Extraemos el factor común y simplificamos

$$4cx = 4(a^2 + a\sqrt{(x-c)^2 + y^2})$$

$$cx - a^2 = a\sqrt{(x-c)^2 + y^2}$$

Eliminamos la raíz cuadrada, resolvemos el binomio y multiplicamos

$$(cx - a^2)^2 = \left(a\sqrt{(x-c)^2 + y^2}\right)^2$$

$$c^2x^2 - 2a^2cx + a^4 = a^2((x-c)^2 + y^2))$$

$$c^2x^2 - 2a^2cx + a^4 = a^2(x^2 - 2cx + c^2) + y^2$$

$$c^2x^2 - 2a^2cx + a^4 = a^2x^2 - 2a^2cx + a^2c^2 + a^2y^2$$

Eliminamos términos semejantes

$$c^2x^2 - \cancel{2a^2cx} + a^4 = a^2x^2 - \cancel{2a^2cx} + a^2c^2 + a^2y^2$$

Agrupamos los términos que tengan *x* e *y* a un solo lado de la ecuación y factorizamos:

$$c^2x^2 + a^4 = a^2x^2 + a^2c^2 + a^2y^2$$

$$c^2x^2 - a^2x^2 - a^2y^2 = a^2c^2 - a^4$$

$$x^2(c^2 - a^2) - a^2y^2 = a^2(c^2 - a^2)$$

Tenemos la distancia desde el punto $B_1(0,b)$ a cada foco es a.

Ahora despejemos b^2 del teorema de Pitágoras

$$c^2 = a^2 + b^2$$

$$b^2 = c^2 - b^2$$

Sustituimos todos los $(c^2 = a^2)$ por b^2

$$x^2(c^2 - a^2) - a^2y^2 = a^2(c^2 - a^2)$$

$$x^2b^2 - a^2y^2 = a^2b^2$$

Finalmente, dividimos toda la ecuación para a^2b^2

$$\frac{x^2\cancel{b^2}}{a^2\cancel{b^2}} - \frac{\cancel{a^2}y^2}{\cancel{a^2}b^2} = \frac{\cancel{a^2}\cancel{b^2}}{\cancel{a^2}\cancel{b^2}}$$

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$$

Esta es la ecuación canónica de la hipérbola con centro en el origen y eje focal en X . (Ministerio de Educación, 2016, p. 182)

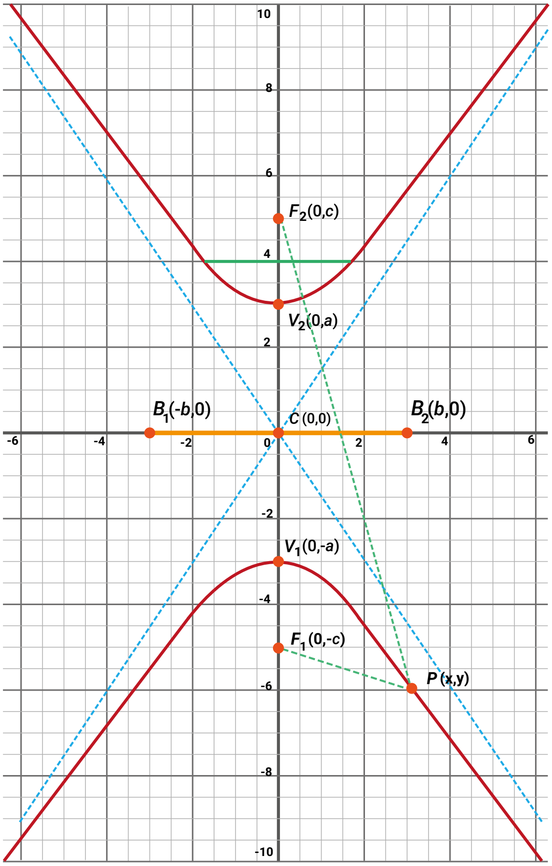
4.4.3. ¿Cuál es la ecuación de la hipérbola con vértice en el origen y eje focal en el eje Y?

Para determinar la ecuación de la hipérbola con centro C(0,0) y eje de simetría en el eje Y, analicemos gráfica que se muestra a continuación:

Índice
Primer bimestre
Segundo bimestre
Solucionario
Referencias bibliográficas

Figura 72.

Hipérbola con centro C(0,0) y eje de simetría en el eje Y.



En ella encontramos:

- Centro: *C(0,0)*
- Vértices: $V_1(0, -a)$ y $V_2(0, a)$
- Extremos del eje conjugado: $B_1(-b,0)$ y $B_2(b,0)$
- Focos: $F_1(0,-c)$ y $F_2(0,c)$
- Asíntotas: $y = \frac{a}{b}x$; $y = -\frac{a}{b}x$
- Eje focal: Y
- Eje normal: X
- Longitud del eje conjugado: 2b

- Longitud del eje transversal: 2a
- Longitud del lado recto: $LR = \frac{2b^2}{a}$
- Excentricidad: $e = \frac{c}{a} = \frac{\sqrt{a^2+b^2}}{a}$ y esta debe ser 0 < c; e > 1
- Las distancias entre a, b y c se relacionan mediante la expresión $c^2 = a^2 + b^2$

Determinemos las distancias entre el punto P(x, y) y los focos $F_1(0,-c)$ y $F_2(0,c)$

$$\overline{PF_1} = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$$

$$\overline{PF_1} = \sqrt{(x - 0)^2 + (y - c)^2}$$

$$\overline{PF_2} = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$$

$$\overline{PF_2} = \sqrt{(x - 0)^2 + (y + c)^2}$$

Por definición de hipérbola tenemos:

$$\underline{PF_1} - \underline{PF_2} = 2a$$

$$\sqrt{(x-0)^2 + (y-c))^2} - \sqrt{(x-0)^2 + (y+c)^2} = 2a$$

$$\sqrt{x^2 + (y+c)^2} = 2a + \sqrt{x^2 + (y-c)^2}$$

$$\left(\sqrt{x^2 + (y+c)^2}\right)^2 = \left(2a + \sqrt{x^2 + (y-c)^2}\right)^2$$

$$x^2 + (y+c)^2 = 4a^2 + 4a\sqrt{x^2 + (y-c)^2} + x^2 + (y-c)^2$$

$$x^2 + y^2 + 2cy + c^2 = 4a^2 + 4a\sqrt{x^2 + (y-c)^2} + x^2 + y^2 - 2cy + c^2$$

$$\cancel{x^2} + \cancel{y^2} + 2cy + \cancel{c^2} = 4a^2 + 4a\sqrt{x^2 + (y-c)^2} + \cancel{x^2} + \cancel{y^2} - 2cy + \cancel{c^2}$$

$$2cy = 4a^2 + 4a\sqrt{x^2 + (y-c)^2} - 2cy$$

$$4cy = 4a^2 + 4a\sqrt{x^2 + (y-c)^2}$$

Extraemos el factor común y simplificamos

$$4cy = 4\left(a^2 + a\sqrt{x^2 + (y-c)^2}\right)$$

$$cy - a^2 = a\sqrt{x^2 + (y-c)^2}$$

Eliminamos la raíz cuadrada, resolvemos el binomio y multiplicamos

$$(cy - a^2)^2 = \left(a\sqrt{x^2 + (y-c)^2}\right)^2$$

$$c^2y^2 - 2a^2cy + a^4 = a^2(x^2 + (y-c)^2)$$

$$c^2y^2 - 2a^2cy + a^4 = a^2(x^2 + y^2 - 2cy + c^2)$$

$$c^2y^2 - 2a^2cy + a^4 = a^2x^2 + a^2y^2 - 2a^2cy + a^2c^2$$

Eliminamos términos semejantes

$$c^2y^2 - \cancel{2a^2cy} + a^4 = a^2x^2 + a^2y^2 - \cancel{2a^2cy} + a^2c^2$$

Agrupamos los términos que tengan *X* e *Y* a un solo lado de la ecuación y factorizamos:

$$c^2y^2 + a^4 = a^2x^2 + a^2y^2 + a^2c^2$$

$$c^2y^2 - a^2y^2 - a^2x^2 = a^2c^2 - a^4$$

$$y^2(c^2 - a^2) - a^2x^2 = a^2(c^2 - a^2)$$

Tenemos la distancia desde el punto $B_1(0,b)$ a cada foco es a.

Ahora despejemos b^2 del teorema de Pitágoras

$$c^2 = a^2 + b^2$$

$$b^2 = c^2 - b^2$$

Sustituimos todos los (c^2 - a^2) por b^2

$$y^2(c^2 - a^2) - a^2x^2 = a^2(c^2 - a^2)$$

$$y^2b^2 - a^2x^2 = a^2b^2$$

Finalmente, dividimos toda la ecuación para a^2b^2

$$\frac{y^2\cancel{b^2}}{a^2\cancel{b^2}} - \frac{\cancel{a^2}x^2}{\cancel{a^2}b^2} = \frac{\cancel{a^2b^2}}{\cancel{a^2b^2}}$$

$$\frac{y^2}{a^2} - \frac{x^2}{b^2} = 1$$

Esta es la ecuación canónica de la hipérbola con centro en el origen y eje focal en Y. (Ministerio de Educación, 2016, p. 183-184)

Recursos de aprendizaje

Para afianzar sus conocimientos:

Lea comprensivamente las páginas 163-172 del texto básico, Carpinteyro E. (2016). *Geometría analítica.*

Habilite los hipervínculos y mire atentamente los videos de:

Matemáticas profe Alex. (2019). Ecuación canónica de la hipérbola, centro en (0,0)

> **Retroalimentación**
>
> En este video encontramos la explicación de la ecuación canónica de la hipérbola con centro en (0,0), explicación de algunas características y cómo reconocerla, además algunas diferencias entre la ecuación canónica u ordinaria y la ecuación general de la hipérbola y la forma de encontrar algunos elementos.

Actividad de aprendizaje recomendada

Resuelva los ejercicios propuestos en el texto complementario. Lehmann C. (2012)

- Ecuación de la parábola, grupo 30, páginas 196-198.

Lo está haciendo muy bien.

¡Siga adelante!

> Recuerde que a través del chat de tutoría y consulta puede aclarar sus dudas e inquietudes con su docente.

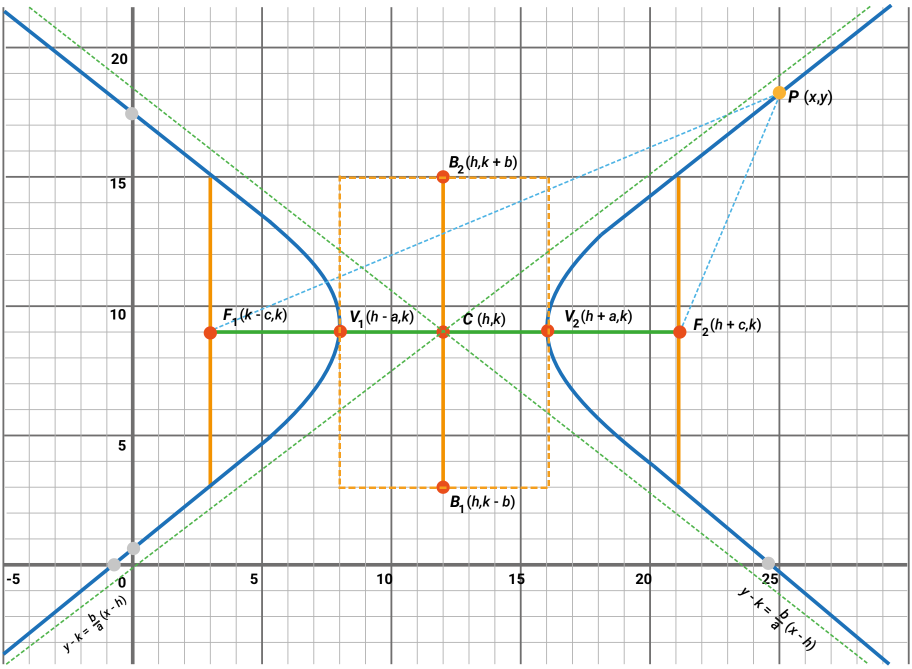
Índice
Primer bimestre
Segundo bimestre
Solucionario
Referencias bibliográficas

Semana 14

4.4.4. ¿Cuál es la ecuación de la hipérbola con centro (h,k) y el eje focal paralelo al eje X?

Para determinar la ecuación de la hipérbola con centro C(h,k) y eje de simetría en el eje X , analicemos figura que se muestra a continuación:

Figura 73.
Hipérbola con centro (h,k) y el eje focal paralelo al eje X



En ella encontramos:

- Centro: *C(h,k)*
- Vértices: $V_1(h, -a,.k)$ y $V_2(h + a,k)$
- Extremos del eje conjugado: $B_1(h,k - b)$ y $B_2(h, k + b)$
- Focos: $F_1(h - c,k)$ y $F_2(h + c,k)$
- Eje focal: *X*
- Eje normal: *Y*
- Longitud del eje conjugado: *2b*
- Longitud del eje transversal: *2a*
- Asíntotas: $y - k = \frac{b}{a}(x - h)$; $y - k = -\frac{b}{a}(x - h)$
- Longitud del lado recto: $LR = \frac{2b^2}{a}$
- Excentricidad: $e = \frac{c}{a} = \frac{\sqrt{a^2+b^2}}{a}$ y esta debe ser e > 1 además c debe ser menor que a
- Las distancias entre a,b y c se relacionan mediante la expresión $c^2 = a^2 + b^2$

La ecuación canónica de la hipérbola con centro C(h,k) en el origen y eje focal en *X*.

$$\frac{(x-h)^2}{a^2} - \frac{(y-k)^2}{b^2} = 1$$

Donde *a,b,c > 0; c > a* (Ministerio de Educación, 2016, p. 185)

Índice

Primer bimestre

Segundo bimestre

Solucionario

Referencias bibliográficas

> Para alcanzar un aprendizaje significativo en matemáticas debemos vincular la teoría con la práctica, por ello, le invito a resolver los siguientes ejercicios aplicando los conocimientos teóricos sobre hipérbola con centro *(h,k)* y el eje focal paralelo al eje *X*.

Ejemplo 24

Determinemos la ecuación de la hipérbola cuyos vértices son (1,4); (5,4) y la longitud del lado recto es 5.

Encontremos los valores de a y b

La longitud del eje transverso es 4

$$2a = 4$$

$$a = \frac{4}{2}$$

$$a = 2$$

$$\overline{LR} = \frac{2b^2}{a}$$

$$5 = \frac{2b^2}{2}$$

$$b = \sqrt{5}$$

El centro *C(h,k)*

$$h = \frac{1+5}{2}, k = \frac{4+4}{2}$$

$$h = 3, k = 4$$

Sustituimos en la ecuación canónica de la hipérbola con centro *C(h,k)* en el origen y eje focal en *X*.

$$\frac{(x-h)^2}{a^2}-\frac{(y-k)^2}{b^2}=1$$

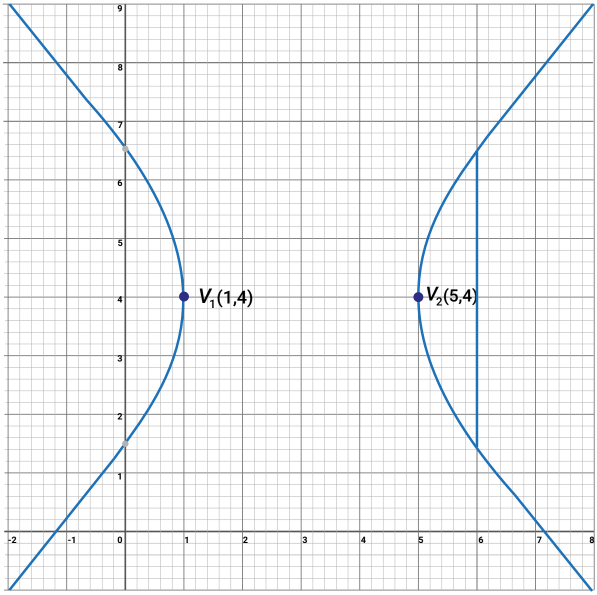
$$\frac{(x-3)^2}{2^2}-\frac{(y-4)^2}{\sqrt{5}^2}=1$$

$$\frac{(x-3)^2}{4}-\frac{(y-4)^2}{5}=1$$

Comprobemos graficando la ecuación, como se muestra en la siguiente figura.

Figura 74.

Hipérbola cuyos vértices son $V_1(1,4)$; $V_2(5.4)$ longitud del lado recto 5.

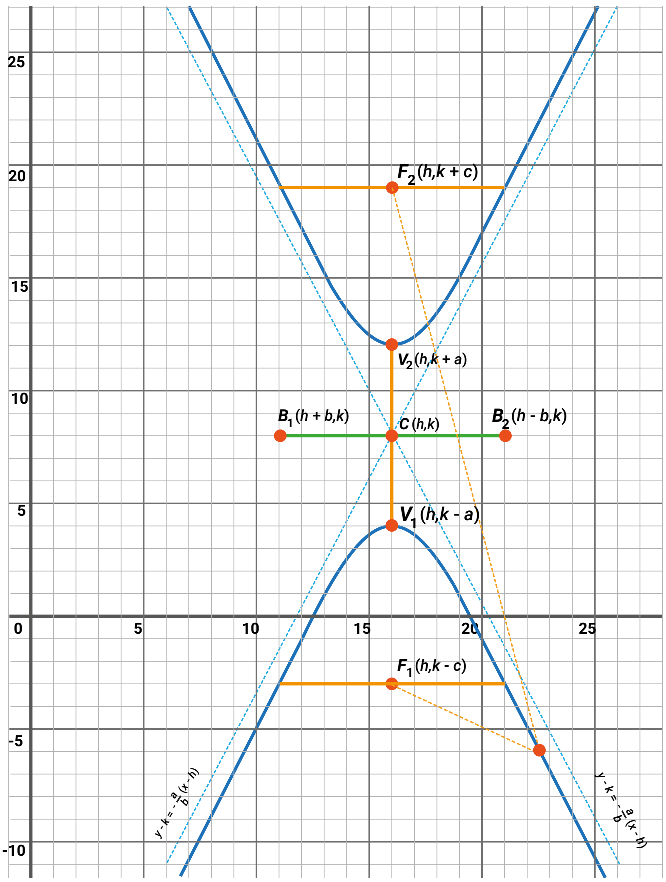


Índice
Primer bimestre
Segundo bimestre
Solucionario
Referencias bibliográficas

4.4.5. ¿Cuál es la ecuación de la hipérbola con centro (h,k) y el eje focal paralelo al eje Y?

Para determinar la ecuación de la hipérbola con centro C(h,k) y eje de simetría en el eje Y, analicemos figura que se muestra a continuación:

Figura 75.
Hipérbola con centro (h,k) y el eje focal paralelo al eje Y.



En ella encontramos:

- Centro: *C(h,k)*
- Vértices: $V_1(h,k - a)$ y $V_2(h,k + a)$
- Extremos del eje conjugado: $B_1(h + b, k)$ y $B_2(h - b,k)$
- Focos: $F_1(h,k - c)$ y $F_2(h,k + c)$
- Eje focal: *Y*
- Eje normal: *X*
- Longitud del eje conjugado: *2b*
- Longitud del eje transversal: *2a*
- Asíntotas: $y - k = \frac{a}{b}(x - h)$; $y - k = -\frac{a}{b}(x - h)$
- Longitud del lado recto: $LR = \frac{2b^2}{a}$
- Excentricidad: $e = \frac{c}{a} = \frac{\sqrt{a^2+b^2}}{a}$ y esta debe ser e > 1 además c debe ser menor que a
- Las distancias entre a,b y c se relacionan mediante la expresión $c^2 = a^2 + b^2$

La ecuación canónica de la hipérbola con centro C(h,k) en el origen y eje focal en *X*.

$$\frac{(y-k)^2}{a^2} - \frac{(x-h)^2}{b^2} = 1$$

Donde a.b.c > 0; c > a (Ministerio de Educación, 2016, p. 185)

> Para alcanzar un aprendizaje significativo en matemáticas debemos vincular la teoría con la práctica, por ello, le invito a resolver los siguientes ejercicios aplicando los conocimientos teóricos sobre hipérbola con centro *(h,k)* y el eje focal paralelo al eje *Y*.

Índice
Primer bimestre
Segundo bimestre
Solucionario
Referencias bibliográficas

Revise el ejemplo

Ejemplo 25

Dada la ecuación de la hipérbola $49(y-3)^2$ $-25(x+4)^2 = 1225$ encuentre el centro, los vértices, los focos y grafique.

Primero, debemos transformar la ecuación a la forma estándar.

Para que el lado derecho de la ecuación sea 1, debemos dividir todo por 1225.

$$\frac{49(y-3)^2}{1225} - \frac{25(x+4)^2}{1225} = \frac{1225}{1225}$$

$$\frac{(y-3)^2}{25} - \frac{(x+4)^2}{49} = 1$$

Ahora, sabemos que la hipérbola será vertical ya que el término *y* está primero

$$a = 5$$

$$b = 7$$

$$c = \sqrt{a^2 + b^2}$$

$$c = \sqrt{5^2 + 7^2}$$

$$c = \sqrt{5^2 + 7^2}$$

$$c = 8.6$$

El entro es *C(-4,3)*

Los vértices

$$V_1(h, k - a)$$

$$V_1(-4, 3 - 5)$$

$$V_1(-4, -2)$$

$$V_2(h, k + a)$$

$$V_2(-4, 3 + 5)$$

$$V_2(-4, 8)$$

Los focos son F_1*(-4,3)*

$$F_1(h, k - c)$$

$$F_1(-4{,}3 - 8.6)$$

$$F_1(-4, -5.6)$$

$$F_2(h, k + c)$$

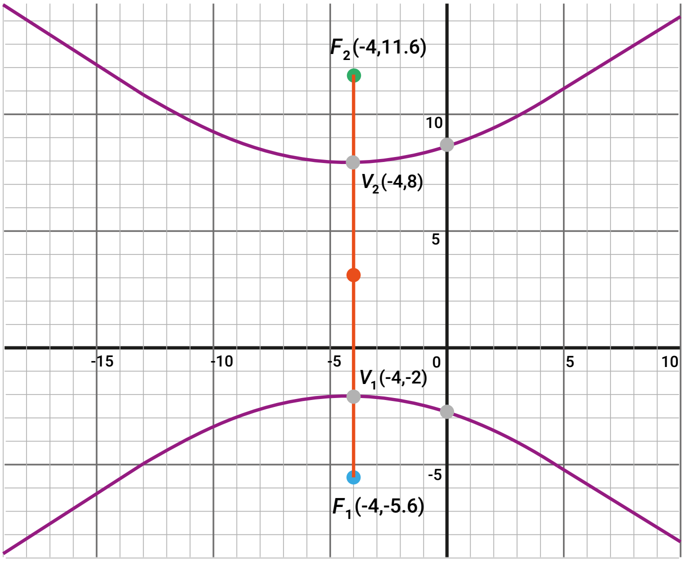
$$F_2(-4{,}3 + 8.6)$$

$$F_2(-4{,}11.6)$$

como se muestra en la siguiente figura.

Figura 76.

Hipérbola $49(y-3)^2 - 25(x+4)^2 = 1225$



Recursos de aprendizaje

Para afianzar sus conocimientos:

Lea comprensivamente las páginas 163-172 del texto básico, Carpinteyro E. (2016). *Geometría analítica.*

Habilite el hipervínculo y mire atentamente el video de:

Math2me. (2019). Ecuación general a ordinaria de una hipérbola fuera del origen.

Retroalimentación:

En este video encontramos la explicación paso a paso de cómo convertir la ecuación general a una ecuación ordinaria de la hipérbola fuera del origen aplicando proceso algebraico.

Actividad de aprendizaje recomendada

Resuelva los ejercicios propuestos en el texto complementario. Lehmann C. (2012)

- Ecuación de la parábola, grupo 31, páginas 202-203.

Estimados estudiantes, hemos concluido la cuarta unidad, autoevalúe sus conocimientos logrados hasta aquí.

Desarrolle la Autoevaluación 4

Índice
Primer bimestre
Segundo bimestre
Solucionario
Referencias bibliográficas

Autoevaluación 4

Unidad 4. La elipse, la hipérbola y sus ecuaciones

1. Al lugar geométrico de los puntos de un plano tales que la suma de sus distancias a los puntos fijos denominados focos no cambia, se llama

   a. Hipérbola..
   b. Parábola.
   c. Elipse.

2. La ecuación canónica de la elipse con centro (0,0) y eje focal X es

   a. $\frac{x^2}{b^2}+\frac{y^2}{a^2}=1$

   b. $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$

   c. $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=0$

3. La ecuación canónica de la elipse con centro (0,0) y eje focal Y es

   a. $\frac{x^2}{b^2}+\frac{y^2}{a^2}=0$

   b. $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$

   c. $\frac{x^2}{b^2}+\frac{y^2}{a^2}=1$

Índice

Primer bimestre

Segundo bimestre

Solucionario

Referencias bibliográficas

4. La ecuación de la elipse con centro b,k y eje de simetría paralelo al eje X es

   a. $\frac{(x-h)^2}{a^2}+\frac{(y-k)^2}{b^2}=0$

   b. $\frac{(x-h)^2}{a^2}+\frac{(y-k)^2}{b^2}=1$

   c. $\frac{(x-h)^2}{b^2}+\frac{(y-k)^2}{a^2}=1$

5. La ecuación de la elipse con centro (h,k) y eje de simetría paralelo al eje Y es

   a. $\frac{(x-h)^2}{b^2}+\frac{(y-k)^2}{a^2}=1$

   b. $\frac{(x-h)^2}{b^2}+\frac{(y-k)^2}{a^2}=0$

   c. $\frac{(x-h)^2}{a^2}+\frac{(y-k)^2}{b^2}=0$

6. El lugar geométrico de los puntos de un plano, tales que la suma de las distancias a los puntos fijos denominados F_1 y F_2 no cambia, se llama

   a. Hipérbola.
   b. Elipse.
   c. Parábola.

7. La ecuación de la hipérbola con vértice en el origen y eje focal en el eje X es

   a. $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$

   b. $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$

   c. $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=0$

8. La ecuación de la hipérbola con vértice en el origen y eje focal en el eje Y es

a. $\frac{y^2}{a^2}+\frac{x^2}{b^2}=0$

b. $\frac{y^2}{a^2}+\frac{x^2}{b^2}=1$

c. $\frac{y^2}{a^2}-\frac{x^2}{b^2}=1$

9. La ecuación de la hipérbola con centro (h,k) y el eje focal paralelo al eje X es

a. $\frac{(x-h)^2}{a^2}-\frac{(y-k)^2}{b^2}=1$

b. $\frac{(x-h)^2}{a^2}+\frac{(y-k)^2}{b^2}=1$

c. $\frac{(x-y)^2}{a^2}-\frac{(h-k)^2}{b^2}=1$

10. La ecuación de la hipérbola con centro (h,k) y el eje focal paralelo al eje Y es

a. $\frac{(y-x)^2}{a^2}+\frac{(k-h)^2}{b^2}=1$

b. $\frac{(y-k)^2}{a^2}-\frac{(x-h)^2}{b^2}=1$

c. $\frac{(y-k)^2}{a^2}+\frac{(x-h)^2}{b^2}=1$

Ir al solucionario

Índice
Primer bimestre
Segundo bimestre
Solucionario
Referencias bibliográficas

Lo está haciendo muy bien.

¡Siga adelante!

Estimados estudiantes:

Los felicito por el cumplimiento de las actividades de aprendizaje recomendadas, espero que hayan obtenido buenos resultados.

Es momento de participar en la segunda actividad de aprendizajes evaluada.

> Recuerde que a través del chat de tutoría y consulta puede aclarar sus dudas e inquietudes con su docente.

Semana 15

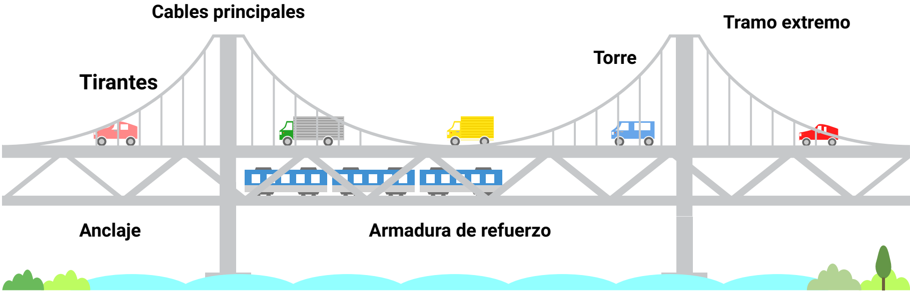
En la presente semana aplicaremos las ecuaciones de la parábola, elipse y la hipérbola en el modelado de problemas reales y estableceremos el compendio de las ecuaciones de la parábola, elipse y la hipérbola.

4.4.6. ¿Cómo modelar problemas de la realidad aplicando las ecuaciones de la parábola, elipse y la hipérbola?

Ejemplo 26

Un cable sostenido por dos postes tiene forma de un arco parabólico, los postes que lo sostienen están separados 40 m y tienen una altura de 10 m. Si el cable toca el piso a la mitad de la distancia entre los postes, calcula la altura del cable a 8 m del centro del arco. (Carpinteyro, 2016, p. 151)

Figura 77.



Datos

$$y = 10\ m$$

$$x = 20\ m$$

$$y = ax^2$$

$$10 = a(20)^2$$

$$a = \frac{10}{400}$$

$$a = \frac{1}{40}$$

$$y = \frac{x^2}{40}$$

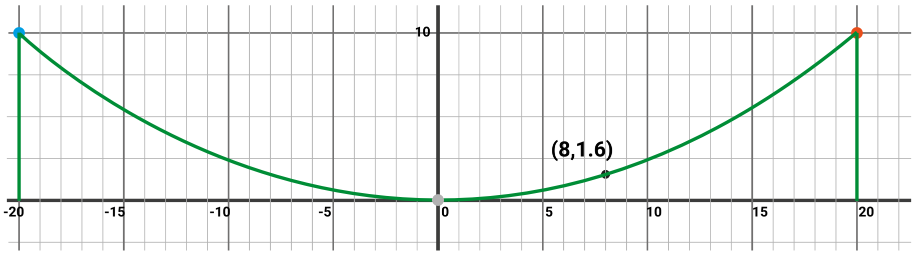
$$y = \frac{(8)^2}{40}$$

$$y = 1.6\ m$$

Como se muestra en la siguiente figura.

Figura 78.

Parábola formada por un cable sostenido por dos postes.

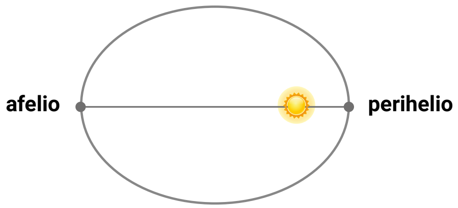


Revise más ejemplos

Ejemplo 27

Los planetas se mueven alrededor del Sol en órbitas elípticas con el Sol en un foco. El punto en la órbita en la cual el planeta está más próximo al Sol se llama perihelio y el punto en el que está más alejado se llama afelio. Estos puntos son los vértices de la órbita. La distancia de la Tierra desde el Sol es 147 000 000 km en el perihelio y 153 000 000 km en el afelio. Encuentre una ecuación apropiada para la órbita de la Tierra. (Coloque el origen en el centro de la órbita con el Sol en el eje x.)

Figura 79.



Datos

$$f_1 = 153000000$$

$$f_2 = 147000000$$

2a = eje mayor

2a = 300000000

$$a = \frac{300\,000\,000}{2}$$

a = 150000000

a - c = 147000000

150000000 - c = 147000000

c = 3000000

$c^2 = a^2 + b^2$

$3000000^2 = 150000000^2 + b^2$

$b^2 = 1500000002 - 300000^2$

$b^2 = 2.2491*1016$

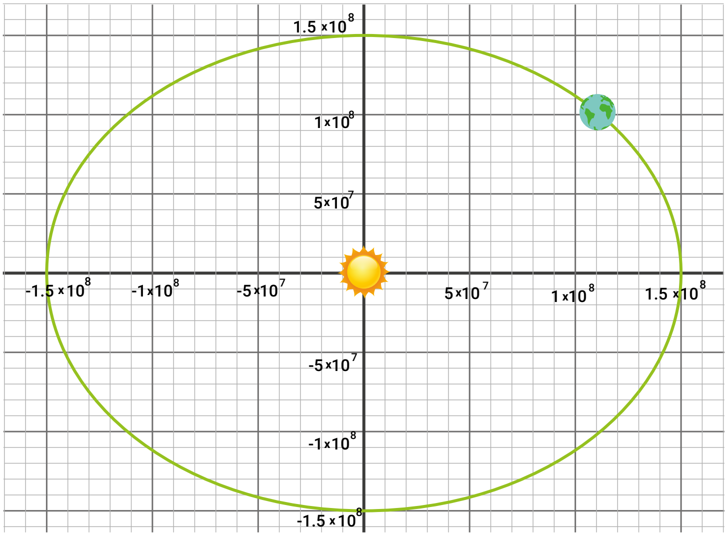
$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

$$\frac{x^2}{2.25x10^{16}} + \frac{y^2}{2.2491\ x10^{16}} = 1$$

Como se muestra en la siguiente figura.

Figura 80.

Elipse formada por el movimiento de la Tierra alrededor del Sol.



Ejemplo 28

En la figura, las estaciones LORAN en A y B están apartadas 500 millas y la nave en P recibe la señal de la estación A 2640 microsegundos (μs) antes de que reciba la señal de B.

a. Si se supone que las señales de radio viajan a 980 pies/μs, encuentre

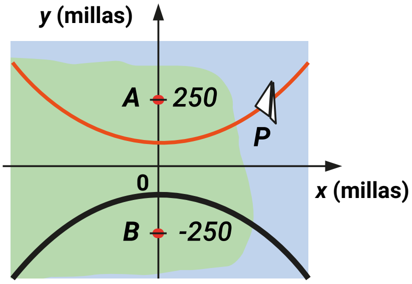
$$d(P,A) - d(P,B)$$

b. Encuentre una ecuación para la rama de la hipérbola indicada en rojo en la figura. (Use millas como unidad de distancia.)

c. Si A está al norte de B y si P está al este de A, ¿qué tanlejos está P de A?

Índice
Primer bimestre
Segundo bimestre
Solucionario
Referencias bibliográficas

Figura 81.



a.

$$d(P,A) - d(P,B) = 2640\mu s$$

$$d(P,A) - d(P,B) = 2640\mu s\left(\frac{980\ pies}{\mu s}\right)\left(\frac{1\ milla}{5280\ pies}\right)$$

$$d(P,A) - d(P,B) = 490\ millas$$

b.

c = 250 millas

2a = 250 millas

a = 245 millas

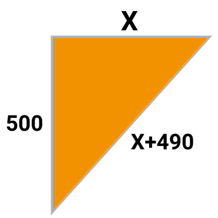
$c^2 = a^2 + b^2$

$250^2 = 245^2 + b2$

b = 49.75

$$\frac{y^2}{245^2} + \frac{x^2}{40.75^2} = 1$$

c.



$$(x+490)^2 = x^2 + 500^2$$

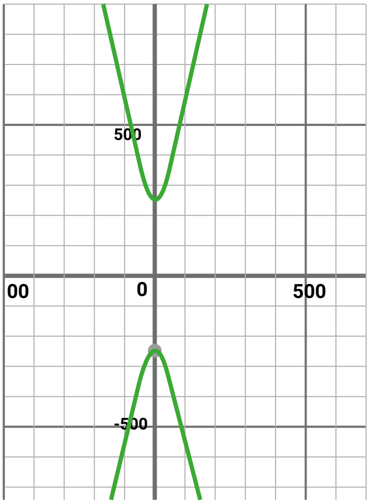
$$x^2 + 980x + 490^2 = x^2 + 500^2$$

$$x = \frac{500^2 - 490^2}{980}$$

$$x = 10.10\ millas$$

como se muestra en la siguiente figura.

Figura 82.
Hipérbola formada por el movimiento de la nave.



4.5. Compendio de ecuaciones

Ecuación de la parábola con vértice en el origen y eje de simetría *X*

$$y^2 = 4px$$

Ecuación de la parábola con vértice en el origen y eje de simetría *Y*

$$x^2 = 4py$$

Ecuación de una parábola de vértice (h, k) y eje focal de simetría paralelo al eje *X*

$$(y - k)^2 = 4p(x - h)$$

Ecuación de una parábola de vértice *(h, k)* y eje de simetría paralelo al eje *Y*

$$(x - h)^2 = 4p(y - k)$$

Índice
Primer bimestre
Segundo bimestre
Solucionario
Referencias bibliográficas

Ecuación canónica de la elipse con centro (0,0) y eje focal *X*

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$$

Ecuación canónica de la elipse con centro (0,0) y eje focal *Y*

$$\frac{x^2}{b^2}+\frac{y^2}{a^2}=1$$

Ecuación de la elipse con centro *(h, k)* y eje de simetría paralelo al eje *X*

$$\frac{(x-h)^2}{a^2}+\frac{(y-k)^2}{b^2}=1$$

Ecuación de la elipse con centro *(h, k)*y eje de simetría paralelo al eje *Y*

$$\frac{(x-h)^2}{b^2}+\frac{(y-k)^2}{a^2}=1$$

Ecuación de la hipérbola con vértice en el origen y eje focal en el eje *X*

$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$$

Ecuación de la hipérbola con vértice en el origen y eje focal en el eje *Y*

$$\frac{y^2}{a^2}-\frac{x^2}{b^2}=1$$

Ecuación de la hipérbola con centro *(h, k)* y el eje focal paralelo al eje *X*

$$\frac{(x-h)^2}{a^2} - \frac{(y-k)^2}{b^2} = 1$$

Ecuación de la hipérbola con centro *(h, k)* y el eje focal paralelo al eje *Y*

$$\frac{(y-k)^2}{a^2} - \frac{(x-h)^2}{b^2} = 1$$

Lo está haciendo muy bien.

¡Siga adelante!

Recuerde que a través del chat de tutoría y consulta puede aclarar sus dudas e inquietudes con su docente.

Semana 16

Actividades finales del bimestre

Actividad 1: Revise su diario de notas, actividades desarrolladas, recomendadas y calificadas, autoevaluaciones y estudie todos los contenidos del segundo bimestre y prepárese para participar de la evaluación presencial.

Índice
Primer bimestre
Segundo bimestre
Solucionario
Referencias bibliográficas

La evaluación presencial comprende los conocimientos adquiridos en la tercera unidad sobre la parábola, sistemas de coordenadas, geográficas, rectangulares y polares; segmento de recta, distancia entre dos puntos, división de un segmento en una razón dada; la línea recta y sus ecuaciones, y la circunferencia y sus ecuaciones.

Actividad 2. Participe de la evaluación presencial.

Figura 83.

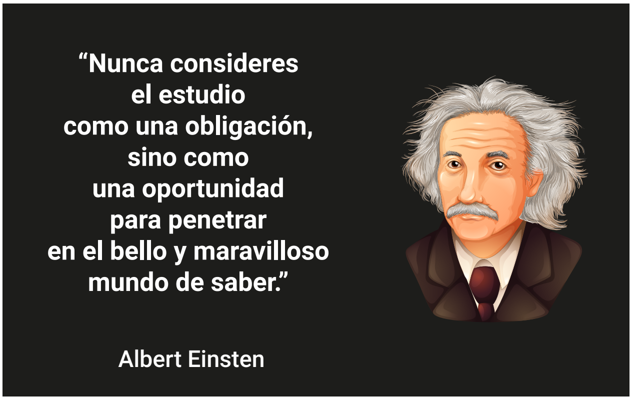


Figura 84.

"Si un niño no puede aprender de la manera en que le enseñamos, quizás debemos enseñarles de la manera en que aprenden".

Rita Dunn

4. Solucionario

Autoevaluación 1	
Pregunta	**Respuesta**
1	c
2	a
3	b
4	c
5	a
6	b
7	c
8	a
9	b
10	a

Ir a la autoevaluación

Índice
Primer bimestre
Segundo bimestre
Solucionario
Referencias bibliográficas

Autoevaluación 2	
Pregunta	**Respuesta**
1	c
2	a
3	b
4	a
5	c
6	a
7	b
8	a
9	b
10	b

Ir a la autoevaluación

Índice
Primer bimestre
Segundo bimestre
Solucionario
Referencias bibliográficas

Autoevaluación 3	
Pregunta	**Respuesta**
1	c
2	b
3	b
4	c
5	b
6	b
7	a
8	c
9	b
10	c

Ir a la autoevaluación

Índice

Primer bimestre

Segundo bimestre

Solucionario

Referencias bibliográficas

Autoevaluación 4	
Pregunta	**Respuesta**
1	c
2	b
3	c
4	b
5	a
6	a
7	b
8	c
9	a
10	b

Ir a la autoevaluación

5. Referencias bibliográficas

Acervo- Televisión educativa. (17 de agosto de 2018). Video. Las coordenadas geográficas. https://www.youtube.com/watch?v=-iAP2CJioZ4

AprendEasy con Yovana. (14 de septiembre de 2020). División de un segmento en una razón dada. https://www.youtube.com/watch?v=lrDY5A34m_I

Carpinteyro, E. (2018). Geometría analítica. Segunda edición. Grupo Editorial Patria, S.A. de C.V. México.

Fundamentos cartográficos y geodésicos. (s/f). Sistemas de coordenadas. http://www.edeca.una.ac.cr/images/AplicTop2020/Semana2/Lectura%20Proyecciones.pdf

Heras, J.L. (2014). Orígenes de la Agrimensura. https://joseluisheras.wordpress.com/2013/11/08/origenes-de-la-agrimensura/

Houspain (s/f). Las trayectorias de los planetas. https://www.houspain.com/corporativo/FeriaHOU/Viajero_gamma/ayuda/ayuda411/ayuda411.html

Ingeniat. (18 de agosto de 2011). Video. Familia de Circunferencias. https://www.youtube.com/watch?v=1atgE5m6HRc&t=133s

Lehmann C. 2012. Geometría Analítica. Editorial Limusa. México. D.F.

Índice

Primer bimestre

Segundo bimestre

Solucionario

Referencias bibliográficas

MateFacil. (12 de noviembre de 2015). Video. Ecuación ordinaria y general de circunferencia con centro y radio dados. https://www.youtube.com/watch?v=JPnNdV3lZH4&t=29s

Matematicabasica. (5 de julio de 2018). Video. Aplicaciones de la Parábola. https://www.youtube.com/watch?app=desktop&v=fVu13zeb3-o

Matemáticas Profe Alex, (19 de agosto de 2016). Video. Conceptos básicos ecuación de la circunferencia. https://www.youtube.com/watch?v=vICf_JIwar4

Matemáticas Profe Alex, (19 de agosto de 2016). Video. Ecuación canónica de la circunferencia. https://www.youtube.com/watch?v=jk9V5OkJlAg

Matemáticas profe Alex. (19 de junio de 2017). Video. Ecuación de la parábola. Gráfica y ecuación conociendo vértice y foco. https://www.youtube.com/watch?app=desktop&v=kOHiFMQgB0E}

Matemáticas profe Alex. (22 de agosto de 2016). Video. Hallar la ecuación general de la circunferencia conociendo el centro y el radio. https://www.youtube.com/watch?v=vQg3OSrR_Mw&t=1s

Matemáticas profe Alex. (24 de junio de 2016). Video. Distancia entre dos puntos. https://www.youtube.com/watch?v=kDzTTOvv5dc

Matemáticas profe Alex. (24 de junio de 2016). Video. Ecuación de la recta conociendo dos puntos. https://www.youtube.com/watch?v=tWjvvpSs8RM

Matemáticas profe Alex. (24 de junio de 2016). Video. Pasar de la ecuación General (Fundamental) a la Canónica (Simétrica) https://www.youtube.com/watch?v=Lg_nTfxFtik

Metzeri. (11 de enero de 2017). Video. Circunferencia determinada por tres condiciones. https://www.youtube.com/watch?v=KdTgvD3nx-w

Ministerio de educación. 2016. Matematica. 3er curso. Guía del docente. Editorial Don Bosco. https://drive.google.com/file/d/0B048WkRgr8JQNFNzZ3AyV1RheWs/view

Quora. (2020). ¿De qué forma se calcula la edad de un árbol? https://es.quora.com/De-qu%C3%A9-forma-se-calcula-la-edad-de-un-%C3%A1rbol

Sarabia. S. (2020). Sistema de coordenadas polares. http://repositorio.pucp.edu.pe/index/bitstream/handle/123456789/28688/introduccion_al_analisis_cap04.pdf?sequence=10&isAllowed=y