La Universidad Católica de Loja

Modalidad Abierta y a Distancia

Sistemas de Conocimiento de Funciones Exponenciales y Logarítmicas y su Didáctica

Guía didáctica

Índice
Primer bimestre
Segundo bimestre
Solucionario
Referencias bibliográficas

UTPL

Departamento de Ciencias de la Educación

Sección Departamental Pedagogía de las Ciencias Experimentales

Sistemas de Conocimiento de Funciones Exponenciales y Logarítmicas y su Didáctica

Guía didáctica

Autor:

Sánchez Romero José Edmundo

EDUC_2143

Asesoría virtual
www.utpl.edu.ec

Índice

Primer bimestre

Segundo bimestre

Solucionario

Referencias bibliográficas

Sistemas de Conocimiento de Funciones Exponenciales y Logarítmicas y su Didáctica

Guía didáctica

Sánchez Romero José Edmundo

Universidad Técnica Particular de Loja

Diagramación y diseño digital:

Ediloja Cía. Ltda.
Telefax: 593-7-2611418.
San Cayetano Alto s/n.
www.ediloja.com.ec
edilojainfo@ediloja.com.ec
Loja-Ecuador

ISBN digital - 978-9942-25-811-3

6 de mayo, 2020

Índice

Índice
Primer bimestre
Segundo bimestre
Solucionario
Referencias bibliográficas

1. Datos de información

1.1. Presentación. Orientaciones de la asignatura

1.2. Competencias genéricas de la UTPL

- Vivencia de los valores universales del humanismo de Cristo.
- Pensamiento crítico y reflexivo.
- Compromiso e implicación social.
- Comportamiento ético.
- Orientación a la innovación y a la investigación.
- Comunicación oral y escrita.

1.3. Competencias específicas de la carrera

- Integra conocimientos pedagógicos, didácticos y curriculares a través del uso de herramientas tecnológicas pertinentes que permitan interdisciplinariamente la actualización de modelos y metodologías de aprendizaje e incorporación de saberes en matemáticas y física, basados en el desarrollo del pensamiento crítico, reflexivo, creativo, experiencial y pertinentes en relación con el desarrollo de la persona y su contexto.

- Implementa la comunicación dialógica como estrategia para la formación de la persona orientada a la consolidación de capacidades para la convivencia armónica en la sociedad, la participación ciudadana, el reconocimiento de la interculturalidad y la diversidad, y la creación de ambientes educativos inclusivos en el ámbito de las matemáticas y la física, a partir de la generación, organización y aplicación crítica y creativa del conocimiento abierto e integrado con relación a las características y requerimientos de desarrollo de los contextos.

- Organiza modelos curriculares y la gestión del aprendizaje relacionados con las matemáticas y la física, centrados en la experiencia de la persona que aprende, en interacción con los contextos institucionales, comunitarios y familiares, orientados al diseño de procesos de enseñanza- aprendizaje y de evaluación que integren la práctica de investigación acción hacia producción e innovación, la interculturalidad, la inclusión, la democracia, la flexibilidad metodológica para el aprendizaje personalizado, las interacciones virtuales, presenciales y las tutoriales.

- Potencia la formación integral de la persona desde los principios del humanismo de Cristo y del Buen Vivir, basado en

Índice
Primer bimestre
Segundo bimestre
Solucionario
Referencias bibliográficas

el desarrollo de su proyecto de vida y profesional que amplíen perspectivas, visiones y horizontes de futuro en los contextos.

1.4. Problemática que aborda la asignatura en el marco del proyecto

Un escaso modelado con funciones en general y exponenciales en particular, no facilita la solución de los problemas del entorno natural y social, ocasionando un conocimiento teórico apartado de la realidad del estudiante.

El limitado uso de herramientas tecnológicas no permite practicar la matemática experimentalmente a través de herramientas gratuitas al alcance de todos, lo cual dificulta el logro de aprendizajes significativos.

A través del análisis y aplicación de la modelización con las funciones exponenciales se aborda el objeto de estudio y naturaleza de la matemática, lo cual favorece para que la matemática se convierta en una herramienta sustancia para el estudio de otras ciencias y un pilar para el desarrollo del pensamiento formal del estudiante.

La didáctica aplicada en la enseñanza de los conocimientos de matemática se enfoca al desarrollo de conceptos de manera teórica y textual, sin considerar que el aprendizaje deber ser experimental, partiendo de la manipulación de un material concreto, explorando detalles conceptuales que permiten plantear inquietudes, comunicando los aportes a otros estudiantes y docente, y verbalizando sus conclusiones matemáticas.

2. Metodología de aprendizaje

Con la finalidad de hacer que el estudio de la asignatura Sistemas de conocimiento de funciones exponenciales y logarítmicas y su didáctica, se convierta en una experiencia de aprendizaje permanente, se diseñan actividades y estrategias fundamentadas en una metodología activa, en donde los estudiantes acceden a los aspectos iniciales de la conceptualización teórica viendo micro videos y accediendo a recursos planteados en el EVA, mientras que el trabajo en contacto con el docente se convierte en un taller de aplicación dando el enfoque experimental en esta segunda parte de tal manera que, se consolidan los aprendizajes de manera experimental, apoyado en videoconferencias semanales que serán grabadas para aquellos estudiantes que no pudieron participar en línea.

Aunque no existe un procedimiento único, lo esencial para el estudio de este curso es la utilización del texto básico y micro videos, apoyados de otros recursos como los cuestionarios interactivos y las infografías; anticipando el estudio de los aspectos teóricos que serán consolidados luego, con la práctica experimental al momento de desarrollar los aportes, principalmente cuantificados, contando con la presencia física del profesor en algunos casos y casi siempre a través de videoconferencias, fomentando el trabajo colaborativo en función de los distintos estilos de aprendizaje y enfocados a lograr resultados de aprendizaje que orientan el desarrollo de las competencias. En cada concepto, se partirá de la **manipulación de material concreto** para luego llegar a la debida **exploración**

Índice
Primer bimestre
Segundo bimestre
Solucionario
Referencias bibliográficas

que permite observar situaciones de aprendizaje que posibilitan la **comunicación** entre compañeros y el profesor, finalizando con la **verbalización** en los escritos de aportes y conclusiones, todo este procedimiento relacionado con una metodología activa ABP. Para profundizar sobre los fundamentos que orientan esta metodología de aprendizaje, la invitación para acceder a través de metodología activa ABP

3. Orientaciones didácticas por resultados de aprendizaje

Primer bimestre

Resultado de aprendizaje 1

Utiliza los principios de las funciones exponenciales, la función exponencial natural, funciones logarítmicas y las leyes de los logaritmos para modelar problemas del entorno natural y social.

Contenidos, recursos y actividades de aprendizaje

Estimado estudiante, bienvenido al curso de: Sistemas de conocimiento de Funciones exponenciales y logarítmicas y su didáctica.

Antes de iniciar nuestro estudio vale señalar que, en el ciclo anterior iniciamos con el aprendizaje de las funciones, uno de los conceptos más importantes en la matemática, en donde se analizaron los tipos de funciones polinomiales y también las funciones racionales;

Índice
Primer bimestre
Segundo bimestre
Solucionario
Referencias bibliográficas

ahora, en el presente curso, siguiendo este camino de aprendizaje e investigación permanente, llegamos a las funciones exponenciales y logarítmicas, que se complementan a los temas anteriores y sirven de base para estudiar en el siguiente curso, las funciones trigonométricas.

Principio didáctico: Las funciones se estudian en este orden:

- Primero: Funciones polinomiales y racionales;
- Luego: Funciones exponenciales y logarítmicas;
- Finalmente: Funciones trigonométricas.

Las funciones exponenciales y logarítmicas permiten el modelado de situaciones de la vida real, tales como: el crecimiento de bacterias, interés compuesto, absorción de luz, carga de una batería, presión atmosférica, enfriamiento de un motor, circuitos eléctricos, desintegración radiactiva, población de una ciudad, tiempo de fallecimiento, escalas ph, intensidad de terremotos, entre otras.

¡Bienvenido, ánimo y adelante!

Semana 1

Índice
Primer bimestre
Segundo bimestre
Solucionario
Referencias bibliográficas

Unidad 1. Funciones exponenciales

- *Definición de función exponencial*
- *Gráficas de funciones exponenciales*
- *Interés compuesto*

Estimado estudiante, cuando nos adentramos en el mundo fascinante del estudio de los números, las formas y sus aplicaciones, la didáctica nos recomienda que, primero se interioricen el o los conceptos matemáticos. En nuestro caso, para llegar a ello, es conveniente conocer primero, el significado de las funciones exponenciales, así como también su nomenclatura y simbología básica.

Principio didáctico: Para modelar y resolver problemas de matemáticas, es necesario revisar primero los conceptos involucrados, partiendo del estudio de las definiciones y las leyes o principios que se cumplen.

1.1. ¿Cuál es la definición de función exponencial?

Al referirnos a un tema nuevo, surgen interrogantes como: ¿Qué es?, ¿Qué significa?, ¿Cómo se estudia?, ¿Existen reglas?, ¿Cuáles son los principales tipos?, ¿Existen modelos a seguir?, ¿Cuáles son sus creadores?. En este caso, al introducirnos en las funciones exponenciales, no es la excepción, por esta razón, para iniciar su estudio, invito para que, habilite el hipervínculo e ingrese a las funciones exponenciales UTPL.

Retroalimentación: Con la observación del video, seguro que algunas inquietudes se aclararon, espero esto sirva de motivación para iniciar el curso, sabiendo de antemano a qué se refiere, cómo se estudian, para qué sirven y cuál es su principal creador en la historia de la matemática.

Iniciemos entonces. Para definir la función exponencial conviene recordar el significado de potencia con exponente variable, es decir aquella que toma la forma $\mathbf{a}^x$, en donde la base **a** es mayor que cero y el exponente **x** puede tomar cualquier valor.

Aquí vale preguntar: ¿La potencia $\mathbf{a}^x$ podrá ser cero o tomar valores negativos?.

Si el exponente ***x*** toma valores positivos, el valor de la potencia es positivo; si ***x*** toma valores negativos, el valor de la potencia es muy pequeño, sigue siendo positivo, cercano a cero en algunos casos, pero nunca negativo.

Por ejemplo, el valor de 2^4 es 16, el valor de 2^3 es 8, el valor de 2^2 es 4, lo cual se observa con más claridad en la siguiente tabla:

Tabla 1. Potencias de base 2

x	2^x
4	$2^4 = 16$
3	$2^3 = 8$
2	$2^2 = 4$
1	$2^1 = 2$
0	$2^0 = 1$
-1	$2^{-1} = = 0{,}5$
-2	$2^{-2} = = 0{,}25$
-3	$2^{-3} = = 0{,}125$
-4	$2^{-4} = = 0{,}0625$
-5	$2^{-5} = = 0{,}03125$

Como **a > 0**, conforme se observa en este ejemplo y en otros casos similares, el valor de la potencia $\mathbf{a}^x$ aunque se acerque a cero, nunca será cero, y tampoco tendrá valores menores a cero o negativos.

Con estos antecedentes, si se relaciona el valor que toma ***x*** y el valor de la potencia $\boldsymbol{a}^x$, aparece el concepto de función exponencial.

En este concepto se consideran dos variables, la independiente ***x*** que es un exponente de la potencia $\boldsymbol{a}^x$ y la variable dependiente ***f(x)***. Con esta caracterización aparece la definición de función exponencial:

> La función exponencial es aquella que tiene la forma $\boldsymbol{f(x) = a^x}$, en donde ***a*** es un número real positivo y $\boldsymbol{a \neq 1}$.

Estudiemos algunos ejemplos ilustrativos con la finalidad de interiorizar la definición de función exponencial, sin olvidar que $a > 0$ y $a \neq 1$.

¿Por qué ***a*** debe ser diferente de **1**?

Correcto, debe ser diferente de la unidad porque toda potencia de base 1 siempre será 1, lo que origina una simple función constante $f(x) = 1$.

Ejemplo ilustrativo. Evaluemos la función $f(x) = 2^x$.

Para evaluar la función, basta reemplazar el valor de la variable independiente ***x***, calculando el valor de la variable dependiente ***f(x)***, representada muchas veces, simplemente por ***y***.

Si $f(x) = 2^x$ entonces:

$f(3) = 2^3 = 8$

$f(5) = 2^5 = 32$

Índice
Primer bimestre
Segundo bimestre
Solucionario
Referencias bibliográficas

$$f(-\frac{1}{2}) = 2^{-\frac{1}{2}} = (\frac{1}{2})^{\frac{1}{2}} = \sqrt{\frac{1}{2}}$$

En los dos primeros casos se observa que la variable dependiente **f(x)** toma valores bastante altos y en el tercer caso, cuando el exponente es negativo, el valor de **f(x)** es muy pequeño.

De este análisis se desprenden dos aspectos importantes: el valor de la variable independiente ***x*** puede ser negativo, cero o positivo, mientras que la variable dependiente ***f(x)*** toma valores únicamente positivos, esta característica de la función exponencial se observa con claridad cuando se construyen las gráficas.

¿Cómo se construyen las gráficas de funciones exponenciales?

Cuando se estudian las funciones exponenciales, resulta muy práctico analizar sus características partiendo de sus gráficas.

Principio didáctico: En los primeros años de escolaridad es conveniente que, los niños construyan gráficas de funciones obteniendo algunos puntos a través de la construcción de una tabla de valores. Al inicio de un curso de bachillerato también es necesario que, los estudiantes practiquen la obtención de los puntos, dando valores a ***x*** y obteniendo los respectivo ***f (x)*** o ***y***. En este curso, luego de haber adquirido práctica en el proceso de graficar funciones, simplemente se utilizarán calculadoras con pantalla gráfica, páginas de internet, software y otros que facilitan estos procesos.

En nuestro caso, la elaboración de la gráfica de una función exponencial puede simplificarse también gracias a la utilización de distintos softwares de uso libre, caso Geogebra, Desmos, entre otros.

Ejemplo ilustrativo 1. Grafiquemos las funciones: $f(x) = 2^x$ y $f(x) = (1/2)^x$.

Índice
Primer bimestre
Segundo bimestre
Solucionario
Referencias bibliográficas

Las dos funciones serán representadas gráficamente en un mismo sistema de coordenadas cartesianas o rectangulares.

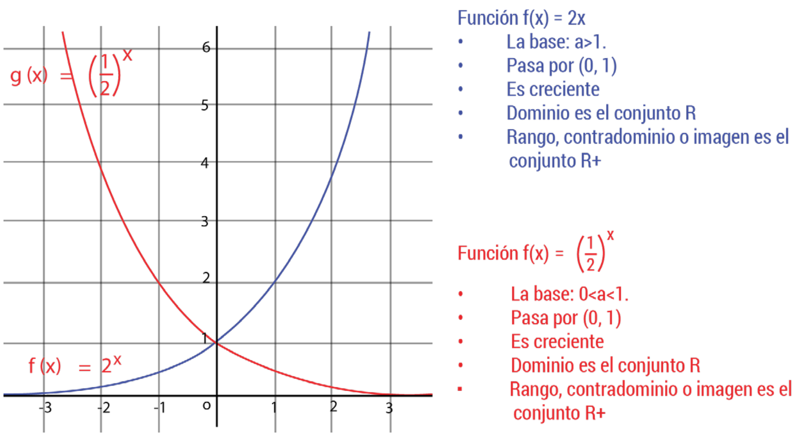


Imagen 1. Gráficas de las funciones $f(x) = 2^x$ y $f(x) = (1/2)^x$.

Si observamos las gráficas de las dos funciones, podemos identificar algunas características:

1. El valor que toma la variable independiente x, pueden ser positivo o negativo.

2. Los valores correspondientes a la variable dependiente **f(x)** siempre son positivos.

3. En cualquiera de los casos, cuando la abscisa es x = 0, la ordenada, variable dependiente o simplemente función **f(x)** es 1.

4. Las dos curvas pasan y se interceptan en el punto de coordenadas (0, 1).

5. El eje horizontal X resulta una asíntota para las dos gráficas.

6. El dominio de las dos funciones es el conjunto de los números reales, x puede tomar cualquier valor y las gráficas se extienden indefinidamente a la izquierda o a la derecha.

7. El rango, contradominio o imagen es el conjunto de los números reales positivos, **f(x)** solo toma valores mayores que cero.

8. Si la base es $0 < a < 1$, entonces la gráfica es decreciente en todo su dominio.

9. Si la base es $a > 1$, entonces la gráfica es creciente en todo su dominio.

Recursos de aprendizaje

Para comprender de mejor manera estos temas introductorios a las funciones exponenciales:

- Lea el texto básico páginas 329 a 331.

Retroalimentación: Al iniciar el estudio de las funciones exponenciales y logarítmicas, los autores (Stewart, Redlin y Watson, 2017), proponen razones valederas para el modelaje de problemas relacionados con el entorno natural y social utilizando estos conceptos lo cual, servirá de motivación e ilustración para interiorizar la definición del primer concepto: función exponencial.

Actividades de aprendizaje recomendadas

Para profundizar los conocimientos introductorios a las funciones exponenciales, sugiero:

- Desarrolle el ejercicio 9 de la página 336 del texto básico, en donde se propone evaluar la función con algunos valores indicados, redondeando los resultados a tres decimales.

> **Recuerde que:** A través del chat de tutoría y consultas puede aclarar sus dudas e inquietudes con su docente.

Lo estás haciendo muy bien

¡Sigue adelante!

Semana 2

Estimado estudiante,

En la semana anterior iniciamos con el estudio de las funciones exponenciales, ahora, luego de haber estudiado su definición, estamos preparados para graficar dichas funciones.

1.2. Gráficas de funciones exponenciales

Para graficar las funciones exponenciales, similar a lo estudiado en bachillerato y en el curso anterior con las funciones polinomiales y racionales, se utiliza un sistema de coordenadas rectangulares o plano cartesiano.

Entonces, iniciemos el estudio de las gráficas, a partir de una tabla de valores; luego, se utilizará algún graficador como el Geogebra clásico en línea.

Ejemplo ilustrativo 1. Grafiquemos la función exponencial **$f(x)= 2^x$.** Para este proceso es conveniente asignar a la variable independiente x algunos valores positivos y otros negativos.

Si **$f(x) = 2^x$** entonces:

Tabla 2. Tabla de valores función **$f(x) = 2^x$**

Puntos	x	2^x	Punto
A	3	$2^3 = 8$	(3, 8)
B	2	$2^2 = 4$	(2, 4)
C	1	$2^1 = 2$	(1, 2)
D	0	$2^0 = 1$	(0, 1)
E	-0,5 = -1/2	$2^{-1/2} = (1/2)^{1/2} = \sqrt{1/2} = 0{,}42$	(-0,5; 0,42)
F	-1	$2^{-1} = 1/2 = 0{,}5$	(-1; 0,5)
G	-2	$2^{-2} = 1/4 = 0{,}25$	(-2; 0,25)
H	-3	$2^{-3} = 1/8 = 0{,}125$	(-3, 0,13)

Con la tabla de valores, representamos los puntos encontrados en un sistema de coordenadas y construimos la gráfica respectiva:

Índice
Primer bimestre
Segundo bimestre
Solucionario
Referencias bibliográficas

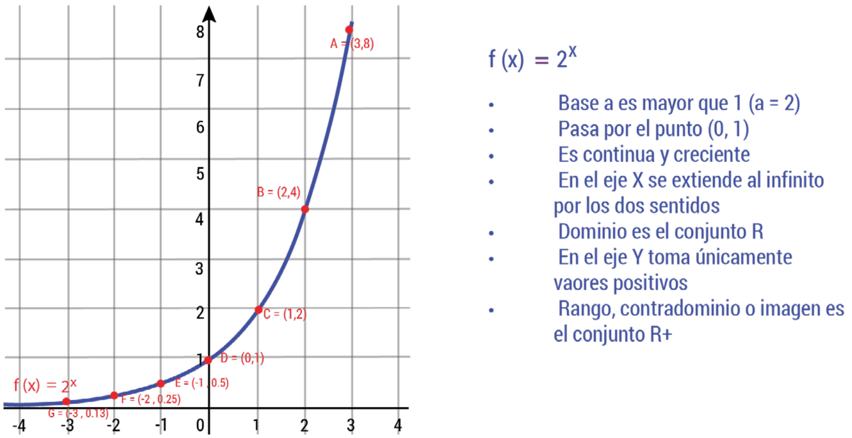


Imagen 2. Gráfica de la función **f(x) = 2ˣ** y sus características

En este ejemplo ilustrativo observamos que, la gráfica, al igual que en todas las funciones exponenciales, el eje de las X se constituye en una asíntota de la función, por consiguiente, la función no toma cero ni valores negativos en el eje de las X.

Principio didáctico: En este curso, luego de haber adquirido práctica en el proceso de graficar funciones exponenciales, simplemente se utilizarán calculadoras con pantalla gráfica, páginas de internet, programas informáticos y otros que facilitan estos procesos. En este caso utilizamos Geogebra.

Para ampliar los procesos de graficar las funciones exponenciales invito a ilustrarse con el caso de la función **f(x)** = **2ˣ** y la función **f(x) = 3ˣ + 1**, observando la Clase 1. La función Exponencial y su gráfico.

Retroalimentación: Con la observación del video, seguro que algunas inquietudes se aclararon; en este caso vale puntualizar que cuando en la función se adiciona o resta algún valor, como el caso de **f (x) = 3 x + 1**, en donde se suma la función o variable dependiente **f (x)** se incrementa en una unidad, el gráfico sufre el cambio respectivo, en este caso, los valores de **f (x)** son aumentados en una unidad de tal manera que, el rango son los valores comprendidos en (1, ∞).

Ejemplo ilustrativo 2. Grafiquemos la función $\mathbf{f(x) = 2^x + 2}$ a partir de la gráfica de la función $\mathbf{f(x) = 2^x}$.

Para la gráfica de esta función, partimos de la función $\mathbf{f(x) = 2^x}$ graficada anteriormente y pintada de rojo en la siguiente ilustración, en donde se suman dos unidades a cada ordenada para obtener la gráfica de $\mathbf{f(x) = 2^x + 2}$. Por ejemplo, en la función $\mathbf{f(x) = 2^x}$ cuando la abscisa es x = 1, la ordenada es $\mathbf{f(x) = 2}$, mientras que en la función $\mathbf{f(x) = 2^x + 2}$ cuando la abscisa es $\mathbf{x = 1}$, la ordenada es $\mathbf{f(x) = 4}$.

Función $f(x) = 2^x + 2$ a partir de la gráfica de la función $f(x) = 2^x$

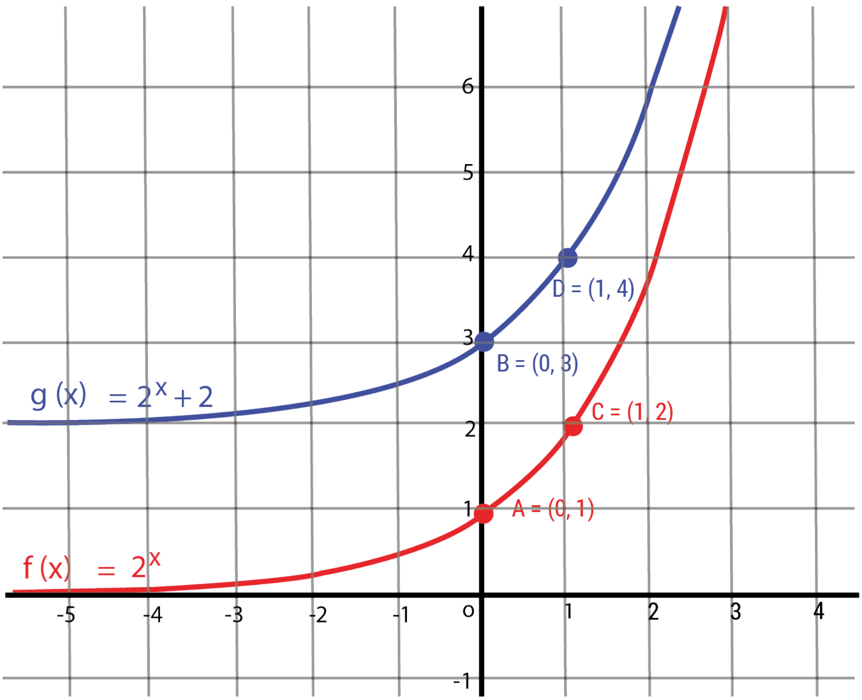


Imagen 3. Función $\mathbf{f(x) = 2^x + 2}$ a partir de la gráfica de $\mathbf{f(x) = 2^x}$.

Ejemplo ilustrativo 3. En una pequeña isla fueron introducidos 400 ratones. Sabiendo que la población de ratones se duplica cada año.

a. Halle una función *N* que modele el número de ratones después de t años.
b. Calcule la población de ratones después de 8 años.

Análisis y datos:

- La población inicial de ratones es 400.
- La población se duplica cada año, es decir la potencia es de base 2.
- La función tiene la forma $\mathbf{f(x) = 400.\ 2^t}$

Solución:

a. La función *N* que modela el número de ratones después de t años es: $\mathbf{N(t) = 400.2^t}$
b. La población de ratones después de 8 años es: $\boldsymbol{N(8) = 400.2^8 =}$ **102400 ratones**

Recursos de aprendizaje

Para comprender de mejor manera estos temas de las funciones exponenciales que, posibiliten el desarrollo pertinente del foro académico calificado en esta semana, sugiero:

- Habilite el hipervínculo e ingrese a la ilustración del Crecimiento exponencial de bacterias UTPL.
- Lea el texto básico páginas 331 a 334.

Retroalimentación: En este video se expone la forma cómo se puede aplicar la modelación de funciones exponenciales y su aplicación para la resolución de problemas de crecimiento de bacterias. Así mismo, en el texto básico usted puede acceder a los fundamentos teóricos necesarios para la resolución de todos los ejercicios propuestos al final de la unidad.

Actividades de aprendizaje recomendadas

Para profundizar y consolidar sus conocimientos, sugiero:

- Desarrolle el ejercicio 10 del texto básico pág. 336, en donde se propone evaluar la función con algunos valores indicados, redondeando los resultados a tres decimales.
- Resuelva el ejercicio 41 del texto básico pág. 337, en donde se pide contrastar las gráficas de dos funciones exponenciales, describiendo las características en un solo sistema de coordenadas.

> **Recuerde que:** A través del chat de tutoría y consultas puede aclarar sus dudas e inquietudes con su docente.

Lo estás haciendo muy bien

¡Sigue adelante!

Semana 3

1.3. Interés compuesto

Estimado estudiante, en la semana anterior ampliamos el estudio del concepto de función exponencial, la definición formal y las formas

Índice
Primer bimestre
Segundo bimestre
Solucionario
Referencias bibliográficas

de realizar las gráficas; ahora, nos toca estudiar la primera gran aplicación de este concepto, la cual está relacionada con los campos del comercio, las finanzas y la economía.

La fórmula o modelo matemático del interés compuesto se la deduce fácilmente, su deducción aparece didácticamente explicada en el texto básico pág. 334.

El interés se calcula con: $A(t) = P\left(1 + \frac{r}{n}\right)^{nt}$, en donde:

A(t) = cantidad o capital después de t años
P = capital inicial o cantidad principal
r = tasa de interés por año
n = número de veces que el interés se capitaliza por año
t = número de años

Existen muchos problemas de aplicación de este modelo matemático o fórmula, a manera de ilustración, invito a estudiar los siguientes ejemplos.

Ejemplo ilustrativo 1.

Se invierten 4000 dólares a una tasa de interés de 4% anual, capitalizado anual y trimestralmente, calculemos el valor logrado luego de dos años, para los dos casos.

Análisis y datos

- La incógnita es el capital que se obtiene luego de dos años, es decir A(2).
- El capital invertido inicialmente es P = 4000 dólares.
- La tasa de interés de 4% anual, es decir 0,04.
- El tiempo que transcurre es dos años t = 2.
- La fórmula es: $A(t) = P\left(1 + \frac{r}{n}\right)^{nt}$.
- Si la capitalización se da anualmente, es decir cada año, el valor de n es igual a 1: n = 1.

- Si la capitalización se da trimestralmente, es decir cuatro veces al año, el valor de n es igual a 4: n = 4.

Solución:

a. Cuando la capitalización es anual, una vez al año, la frecuencia es n = 1; entonces, el valor que se logra con la inversión en estas condiciones luego de dos años, es:

$$A\left(2\right) = P\left(1+\frac{r}{n}\right)^{n.2} = 4000\left(1+\frac{0{,}04}{1}\right)^{1.2} = 4000$$
$$A\left(2\right) = 4326,4 \text{ dólares}$$

b. Cuando la capitalización es trimestral, cuatro veces al año, la frecuencia es n = 4; el valor que se logra con la inversión en estas condiciones, es:

$$A\left(2\right) = P\left(1+\frac{r}{n}\right)^{n.2} = 4000\left(1+\frac{0{,}04}{4}\right)^{4.2} = 4000$$
$$A\left(2\right) = 4331,4 \text{ dólares}$$

Ejemplo ilustrativo 2. Se invierte cierta cantidad de dinero por tres años, con una tasa de interés compuesto del 9% capitalizado semestralmente, obteniendo 8000 dólares. ¿Cuál es la cantidad invertida?.

Análisis y datos:

- El capital o cantidad invertida inicialmente no se conoce y lo representamos con P.
- La tasa de interés ***r*** es 9% anual, es decir 0,09.
- El tiempo que transcurre es dos años t = 3.
- El dinero que se obtiene con la inversión es A(3) = 8000 dólares.
- La capitalización se da semestralmente, es decir dos veces al año y por lo tanto n = 2.

- La fórmula o modelo matemático es: $A(t) = P\left(1 + \frac{r}{n}\right)^{nt}$.

Solución: Considerando que la incógnita es P, reemplazamos los datos que se ofrecen en el problema: A(3) = 8000 dólares; r = 0,09; t = 3; n = 2, en la fórmula del interés compuesto.

- $A(t) = P\left(1 + \frac{r}{n}\right)^{n.t}$
- $A(3) = P\left(1 + \frac{r}{n}\right)^{n.3}$
- $8000 = P\left(1 + \frac{0{,}09}{2}\right)^{2.3}$
- $8000 = P(1,045)^6$
- $P(1,045)^6 = 8000$
- $P = \frac{8000}{1{,}302260125}$
- $P = 6143,166$ dólares

Recursos de aprendizaje

Para comprender de mejor manera estos temas introductorios a las funciones exponenciales que posibilite el desarrollo del foro académico calificado en esta semana, sugiero:

- Habilite el hipervínculo e ingrese a interés compuesto aplicando función exponencial
- Lea el texto básico páginas 334 y 335.

Retroalimentación: En este video se expone la forma cómo se puede aplicar la modelación de funciones exponenciales y su aplicación para la resolución de problemas sobre el interés compuesto, en donde descubrimos que a partir de un capital invertido en cierto tiempo y con un interés capitalizado con cierta frecuencia, se puede obtener una cantidad de dinero que ha crecido exponencialmente, siendo esta una de las más grandes aplicaciones de la función exponencial.

Índice
Primer bimestre
Segundo bimestre
Solucionario
Referencias bibliográficas

Actividades de aprendizaje recomendadas

Para profundizar sus conocimientos y experticia en estos conocimientos, sugiero:

- Desarrolle el problema 57 del texto básico pág. 336, en donde se propone calcular el valor de la inversión después de cierto tiempo y con diferentes capitalizaciones.

Recuerde que:

A través del chat de tutoría y consultas puede aclarar sus dudas e inquietudes con su docente.

Lo estás haciendo muy bien

¡Sigue adelante!

AUTOEVALUACIÓN

Estimado estudiante, luego de culminar con el estudio de la unidad de **Las funciones exponenciales**, es recomendable que usted realice la autoevaluación de lo aprendido, con la finalidad de retroalimentar aquellas inquietudes más importantes.

Instrucción: Marque la alternativa correcta, en caso que no acierte, usted debe seguir intentando previa la respectiva retroalimentación interactiva.

Índice

Primer bimestre

Segundo bimestre

Solucionario

Referencias bibliográficas

Autoevaluación 1

1. El dominio de la función exponencial $f(x)=2^{x}$, es el conjunto de los números.

   a. Reales.
   b. Reales positivos.
   c. Reales negativos.

2. El rango de la función exponencial $f(x)=2^{x}$, es el conjunto de los números.

   a. Reales positivos.
   b. Reales positivos y el cero.
   c. No tiene.

3. Si en la función exponencial el valor de la base “a” fuese 1, se observa que.

   a. No es una función.
   b. Es una función constante.
   c. Es una función cuadrática.

4. Cuando en la función dada, la base “a” es $0 < a < 1$, la función es $f(x)=a^{x}$.

   a. Creciente.
   b. Decreciente.
   c. Constante.

5. El rango de la función $f(x)=2^{x}$, es el conjunto de los números.

   a. Reales positivos.
   b. Reales negativos.
   c. Reales.

6. Para obtener la gráfica de $h(x)=2^{x}-1$, empezamos con la gráfica de $f(x)=2^{x}$, y la desplazamos.

   a. Una unidad hacia arriba.
   b. Una unidad hacia abajo.
   c. Una unidad a la derecha.

7. Cierta raza de ratones fue introducida en una pequeña isla con una población inicial de 500 ratones. Los científicos estiman que la población de ratones se duplica cada año. La población de ratones después de 4 años es.

   a. 1000 ratones.
   b. 4000 ratones.
   c. 8000 ratones.

8. Se invierten 1000 dólares a una tasa de interés de 12% al año. Encuentre la cantidad que se obtiene después de 3 años si el interés se capitaliza anualmente.

   a. 1404,93 dólares.
   b. 1418,52 dólares.
   c. 1425,76 dólares.

9. Si se invierten 500 dólares a una tasa de interés de 8 % anual, capitalizado trimestralmente, el valor que se obtiene después de 2 años es.

   a. 585,83 dólares.
   b. 490,85 dólares.
   c. 556,25 dólares.

10. Se invierta cierta cantidad de dinero a una tasa de interés de 6% anual, capitalizados cada cuatro meses, obteniendo luego de 3 años 717,06 dólares. El capital inicial es.

   a. 800 dólares.
   b. 600 dólares.
   c. 580 dólares.

Ir al solucionario

Índice
Primer bimestre
Segundo bimestre
Solucionario
Referencias bibliográficas

Índice
Primer bimestre
Segundo bimestre
Solucionario
Referencias bibliográficas

Semana 4

Unidad 2. La función exponencial natural

- *El número **e***
- *La función exponencial natural*
- *Interés capitalizado continuamente*

Estimado estudiante, en la semana anterior se concluyó el estudio de la primera unidad: Funciones exponenciales; ahora, en esta segunda unidad, estudiaremos la función exponencial natural, cuya aplicación principal se observa con el interés capitalizado continuamente. Antes de llegar a este tema, debemos estudiar uno de los números más importantes, la constante *"e"*.

2.1. El número e

Recordemos que las constantes-números maacute;s importantes en matemáticas, básicamente son tres: *i* que es ;$\sqrt{-1}$; π que aproximadamente es 3,14 y resulta de dividir la longitud de cualquier circunferencia para su radio; pero ¿qué significa la constante *e*?, ¿para qué se utiliza este número?, ¿en dónde se utiliza con mayor frecuencia?. Para entender sobre la importancia de su estudio y dar respuesta a estas interrogantes, invito para que habilite el hipervínculo y descubra ¿Qué es el número e?.

Retroalimentación: Seguramente que ahora conocemos más sobre este fabuloso número, sobre el valor del número **e,** de dónde se obtiene su valor, cuál es su fórmula para calcular y en dónde se lo aplica con mayor frecuencia.

Para ampliar y fundamentar la definición del número **e**, el mismo que es un número irracional porque no se lo puede expresar como un cociente entre dos números enteros y que, tiene mucha utilidad cuando se estudia Cálculo, es conveniente que lea y estudie su definición y la forma de calcularlo en la pág. 338 del texto básico.

2.2. La función exponencial natural

En la unidad anterior se estudió la función exponencial, cuyo número base puede ser cualquier número positivo. Si ahora, a esa base le colocamos la constante **e**, estamos frente a la función exponencial natural.

> La función exponencial natural es aquella que tiene la forma $f(x) = e^x$, en donde la base es el número e = 2,71828...

Debido a que el número **e** aproximadamente es 2,71828 la gráfica de la función exponencial natural $f(x)=e^x$ estará comprendida entre las gráficas de las funciones exponenciales $f(x)=2^x$ y $f(x)=3^x$. Comprobemos esta particularidad en la siguiente gráfica.

Índice
Primer bimestre
Segundo bimestre
Solucionario
Referencias bibliográficas

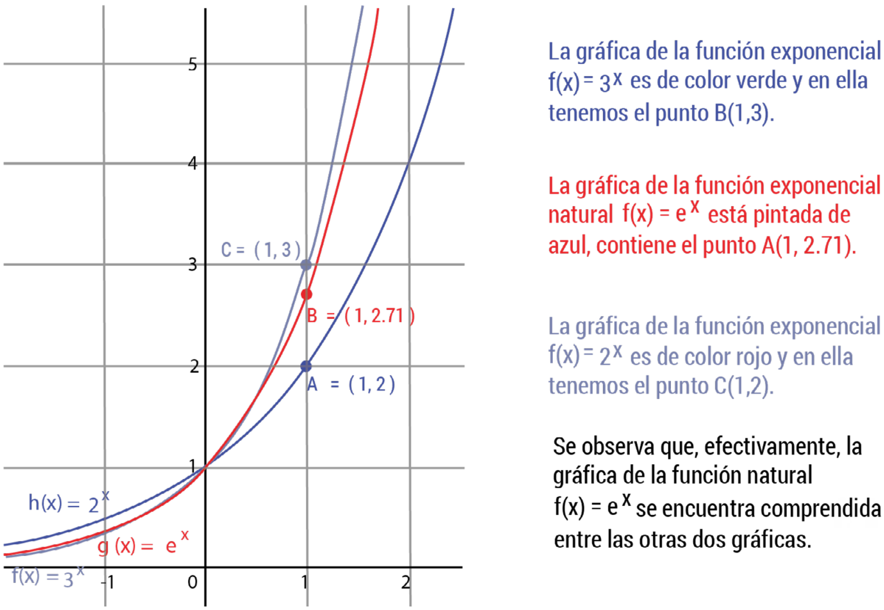


Imagen 4. Comparación de la función exponencial

Algunas transformaciones interesantes se realizan con este tipo de funciones, por ejemplo, cuando se compara la función exponencial natural **f(x) = e**^{x} con la función **f(x) = e-**^{x} Las dos son simétricas respecto al eje Y. Para profundizar y ampliar su estudio, recomiendo que revise las pág. 339 y 340 del texto básico.

2.3. Interés capitalizado continuamente

En la unidad anterior se observó que, el interés que se acumula en una inversión aumenta conforme se incrementa el número de periodos de capitalización, por ejemplo, se paga más interés en una capitalización trimestral n = 4 que en una anual n = 1. La fórmula empleada en este caso, fue: $A\,(t) = P(1 + \frac{r}{n})^{nt}$.

Además, considerando que el ***número e*** se obtiene a través de $(1+1/n)^n$ y su valor se aproxima a su máximo valor cuando ***n*** aumenta continuamente, se deduce que:

> El interés capitalizado continuamente se calcula mediante la fórmula **A (t)=P e** ^{rt} siendo P el capital inicial, ***r*** la tasa de interés por año y ***t*** el número de años.

Ejemplo ilustrativo 1. Se invierten 2000 dólares a una tasa de interés de 4% anual, capitalizado continuamente, calculemos el valor logrado luego de dos años.

Análisis y datos:

- La incógnita es el valor que se obtiene luego de dos años, es decir A(2).
- El capital invertido inicialmente es P = 2000 dólares.
- La tasa de interés es 4% anual, es decir r = 0,04.
- El tiempo que transcurre es dos años t = 2.
- La fórmula es: **A (t)=P e** ^{rt}

Solución: Cuando la capitalización es continua, utilizamos la fórmula en donde la base de la función exponencial es el número ***e***, entonces:

- $A\,(t) = P\,e^{\,rt}$
- $A\,(2) = 2000\,e^{0{,}04(2)}$
- $A\,(2) = 2000\,e^{0{,}08}$
- $A\,(2) = 2166,57$ **dólares**

Recursos de aprendizaje

Para comprender de mejor manera estos temas introductorios a las funciones exponenciales naturales, de tal manera que usted se prepare convenientemente para desarrollar el cuestionario propuesto en línea como parte de la evaluación parcial, calificado con 1 punto promedio, sugiero:

- Habilite el hipervínculo e ingrese a interés capitalizado continuamente UTPL.
- Lea el texto básico páginas 338, 339 y 340.

Retroalimentación: En el video se explica cómo se aplica la fórmula del interés continuo, cuando se invierte cierta cantidad a una tasa de interés capitalizado continuamente. Puntualizando que, aunque el interés fuese capitalizado diariamente, nunca llegaría a ser a la magnitud de lo que se logra con una capitalización continua. Adicionalmente, en el texto básico, se proponen algunos ejemplos desarrollados y muy válidos para ilustrar la forma cómo se calcula el interés capitalizado continuamente.

Actividades de aprendizaje recomendadas

Para profundizar y consolidar sus conocimientos acerca de la función exponencial natural, sugiero:

- Desarrolle el problema 34 del texto básico pág. 343, en donde se propone calcular el valor de la inversión después de cierto tiempo y con una capitalización continua.

> **Recuerde que:** A través del chat de tutoría y consultas puede aclarar sus dudas e inquietudes con su docente.

Lo estás haciendo muy bien

¡Sigue adelante!

AUTOEVALUACIÓN

Estimado estudiante, luego de culminar con el estudio de la unidad **Función exponencial natural**, es recomendable que usted realice la autoevaluación de lo aprendido en esta corta unidad para luego, retroalimentar aquellas inquietudes más importantes.

Instrucción: Marque la alternativa correcta, en caso que no acierte, usted debe seguir intentando previa la respectiva retroalimentación interactiva.

Autoevaluación 2

1. En una función exponencial natural la base es el número.

    a. √(-1).
    b. π.
    c. e.

2. El número se define como el valor al que $(1 + 1/n)^n$ se aproxima cuando **n.**

    a. Se hace pequeño.
    b. Se hace grande.
    c. Toma el valor cero.

3. Sobre la naturaleza del número e, este.

    a. Se puede representar como el cociente de dos números enteros.
    b. Se puede escribir como el cociente entre dos números irracionales.
    c. No se puede representar como el cociente de dos números enteros.

4. La función $f(x)=e^x$ se llama función exponencial natural y el número **e** es.

    a. Un número racional.
    b. Un número irracional.
    c. Una constante entera.

5. En la fórmula $A(t)=Pe^{rt}$ para interés capitalizado continuamente la letra P representa el capital invertido, *t* es el número de años y *r* es la.

   a. Tasa de interés por año.
   b. Cantidad lograda por los intereses.
   c. Razón entre el tiempo y los intereses.

6. En la función $f(x)=2+e^{x}$ el rango es el conjunto.

   a. Reales positivos.
   b. $(2, \infty)$.
   c. Reales.

7. En la función $h(x)=e^{x-2}$ el rango es el conjunto de los números.

   a. Reales negativos.
   b. $(-\infty, 2)$.
   c. Reales positivos.

8. Si se invierten 2000 dólares a una tasa de interés de 4% al año, capitalizado continuamente, el valor de la inversión después de 3 años es.

   a. 2255 dólares.
   b. 2728 dólares.
   c. 2240,9 dólares.

9. Si se invierten 2000 dólares a una tasa de interés de 4% al año, capitalizado trimestralmente, el valor de la inversión después de 3 años es.

   a. 2253,65 dólares.
   b. 2260,75 dólares.
   c. 2240,9 dólares.

Índice
Primer bimestre
Segundo bimestre
Solucionario
Referencias bibliográficas

10. En condiciones similares, el interés capitalizado continuamente respecto de uno capitalizado diariamente, es.

    a. superior.
    b. inferior.
    c. igual.

Ir al solucionario

Índice
Primer bimestre
Segundo bimestre
Solucionario
Referencias bibliográficas

Semana 5

Unidad 3. Funciones logarítmicas

- Funciones logarítmicas
- Gráficas de funciones logarítmicas
- Logaritmos comunes
- Logaritmos naturales

Estimado estudiante, la semana pasada se concluyó con el estudio de las funciones exponenciales y sus aplicaciones; ahora, estudiaremos la función inversa de la función exponencial, llamada función logarítmica, la cual nos permite modelar y resolver algunos problemas de la vida real, relacionados con el crecimiento de bacterias, decrecimiento poblacional, interés compuesto, desintegración de la radiación entre otras. Pero ¿el logaritmo es una nueva operación matemática?, ¿cómo se producen sus aplicaciones?, ¿Quieres saberlo?. Te invito a que salgas de tus dudas observando un video con algunos datos muy interesantes en la dirección Aplicación de los logaritmos

Retroalimentación: Seguramente ahora tiene más claro cómo surge la función logaritmo, si es una función inversa de alguna otra y

Índice
Primer bimestre
Segundo bimestre
Solucionario
Referencias bibliográficas

principalmente, para qué se estudian los logaritmos y dónde pueden ser aplicados. ¡Fabuloso, verdad!

3.1. Definición y propiedades de las funciones logarítmicas

Partamos de la potenciación: $a^n = b$

En la potenciación, se calcula la potencia (b) multiplicando la base (a) por sí mismo, las veces que indica el exponente (n); en la radicación, se calcula la raíz-base (a) partiendo del radicando-potencia (b) y el exponente-índice (n); y, en los logaritmos, se calcula el exponente (n) si se tiene una base (a) y considerando la potencia (b). Estas relaciones, se pueden observar con claridad en la siguiente imagen:

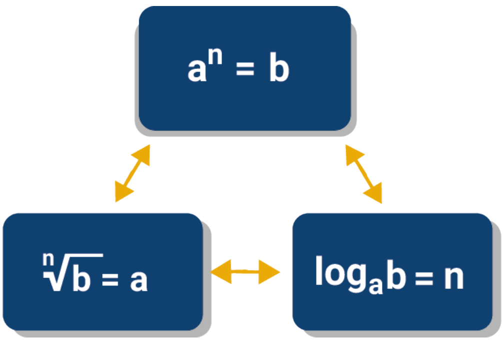


Imagen 5. Potenciación, radiación y logaritmación

A partir de esta relación se puede entender que una expresión exponencial puede convertirse en una expresión logarítmica y viceversa, lo cual se ilustra en la siguiente imagen:

$$a^n = b \longleftrightarrow \log_a b = n$$

Imagen 6. Relación entre potenciación y logaritmación

Ejemplos ilustrativos:

$3^4 = 81$ es equivalente a $\log_3 81 = 4$

$4^3 = 64$ es equivalente a $\log_4 64 = 3$

$2^5 = 32$ es equivalente a $\log_2 32 = 5$

$10^2 = 100$ es equivalente a $\log_{10} 100 = 2$

$\log_{10} 1000 = 3$ es equivalente a $10^3 = 1000$

$\log_4 16 = 2$ es equivalente a $4^2 = 16$

La función exponencial es una función inyectiva o uno a uno, lo cual se comprueba cuando una recta horizontal corta en un solo punto a su gráfica, y, por tanto, tiene una función inversa; a esta función se la conoce con el nombre de función logarítmica.

> La función logarítmica con base ***a*** diferente de 1 y denotada por $\mathbf{\log_a}$, se define como aquella que cumple la equivalencia: $\log_a x=y$ __$4^y=x$.

Entonces, cuando se quiere hallar el $\mathbf{\log_a x}$ se debe calcular el exponente ***y*** al cual se debe elevar la base ***a*** para obtener ***x***.

Ejemplos ilustrativos:

El $\log_3 9 = 2$ porque $3^2 = 9$

El $\log_5 125 = 3$ porque $5^3 = 125$

El $\log_3 234 = 5$ porque $3^5 = 243$

El $\log_6 36 = 2$ porque $6^2 = 36$

El $\log_{10} 0{,}01 = -2$ porque $10^{-2} = 0{,}01$

El $\log_2 0{,}125 = -3$ porque $2^{-3} = 0{,}125$

Las propiedades que se cumplen en los logaritmos son muy valiosas para la ejercitación y resolución de problemas, se recomienda tenerlas presente siempre que se utiliza el concepto de logaritmo. Las más importantes son:

PROPIEDADES

1. $\mathbf{\log_a 1=0}$ porque todo número elevado a cero es igual a uno.
2. $\mathbf{\log_a a=1}$ porque todo número elevado a la unidad es igual al mismo número.
3. $\mathbf{\log_a a^x = x}$ porque **a**, elevado a ***x***, es igual $\mathbf{a}^x$
4. $\mathbf{a^{\log_a x}} = x$ porque **a** $\boldsymbol{\log_a x}$, elevado a es igual a **x**

Ejemplos ilustrativos:

El $\boldsymbol{\log_4 1} = \mathbf{0}$ porque $\mathbf{4}^0 = \mathbf{1}$

El $\boldsymbol{\log_5 5} = \mathbf{1}$ porque $\mathbf{5}^1 = \mathbf{5}$

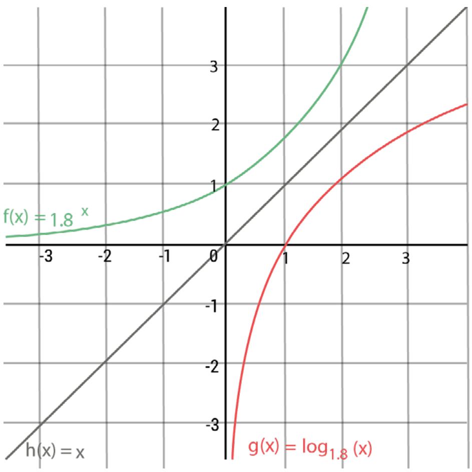
El $\boldsymbol{\log_3 3^5} = \mathbf{5}$ porque $\boldsymbol{3}^5 = \mathbf{3}^5$

El $\boldsymbol{2^{log28}} = \mathbf{8}$ porque $\mathbf{2}^3 = \mathbf{8}$

Para profundizar y acceder a otras ilustraciones sobre la definición y las propiedades de las funciones exponenciales, invito para que lea las pág. 344 y 345 del texto básico.

3.2. Gráficas de funciones logarítmicas

Puntualizando que, si la función exponencial ***f*** tiene por dominio el conjunto P y rango el conjunto Q, entonces la función inversa f^{-1}, es decir la función logarítmica, tiene por dominio el conjunto Q y por rango el conjunto P. Esta relación entre las dos funciones inversas, se puede apreciar en las siguientes gráficas.



La gráfica de la función exponencial $f(x) = 1.8^x$ es la de color verde, su asíntota es el eje X, el dominio es el conjunto de los números reales y el rango es el conjunto de los números reales positivos.

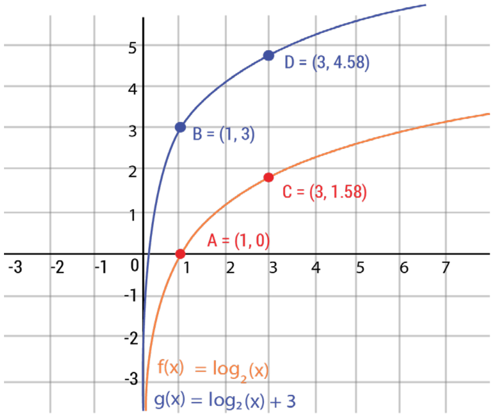
La gráfica de la función logarítmica $g(x) = \log_{1.8}(x)$ es de color rojo, su asíntota es el eje Y, el dominio es el conjunto de los números reales positivos y el rango es el conjunto de los número reales. Está definida únicamente para valores x>0.

Imagen 7. Función exponencial y su inversa

Estimado estudiante, sugiero que para todos los ejercicios y problemas en donde se debe trazar la gráfica de la función exponencial, se maneje el software de uso libre Geogebra, el cual puede utilizarse en línea o puede descargarse gratuitamente.

Ejemplo ilustrativo. Tracemos en un mismo sistema cartesiano las gráficas de la función $\mathbf{f(x)= log_2 (x)}$ y de la función $\mathbf{g(x) = log_2 (x) +3}$, analizando el respectivo desplazamiento.

Índice
Primer bimestre
Segundo bimestre
Solucionario
Referencias bibliográficas



En este ejercicio se comprueba que las funciones logarítmicas tienen por asíntota un eje vertical, en este caso al eje de las Y. Las dos están definidas para $x > 0$.

La gráfica de la función $f(x) = \log_2(x)$ pasa por el punto (1, 0) y sus ordenadas son tres unidad menos (-3) respecto a las ordenadas de la otra función.

La gráfica de la función $g(x) = \log_2(x) + 3$ pasa por el punto (1, 3) y sus ordenadas son tres unidades más (+3) respecto a las ordenadas de la otra gráfica.

Imagen 8. Desplazamiento de gráficas logarítmicas.

3.3. Logaritmos comunes

Estimado estudiante, los logaritmos más conocidos son los de base 10 o logaritmos decimales, a los cuales se los conoce simplemente como logaritmos comunes. Para su escritura, se puede omitir escribir la base 10.

> Se denomina logaritmo común a todo logaritmo de base 10, el cual se denota escribiendo simplemente: **log x**. Entonces $\mathbf{\log_{10}(x) = \log x}$

Ejemplos ilustrativos. Observemos algunos ejemplos de logaritmos comunes, en donde la base es 10.

$\log 10 = 1$, porque la base 10 elevado a 1 es igual a 10

$\log 100 = 2$, porque $10^2 = 100$

$\log 1000 = 3$, porque $10^3 = 1000$

$\log 10000 = 4$, porque $10^4 = 10000$

$\log 0{,}01 = -2$, porque $10^{-2} = {}^{1}/_{100} = 0{,}01$

3.4. Logaritmos naturales

Otro tipo de logaritmos muy utilizados por su gran aplicación en la modelización de problemas del entorno son los logaritmos naturales, los cuales se caracterizan porque su base es el ***número e***.

> Se denomina logaritmo natural a todo logaritmo de base **e**, el cual se denota escribiendo simplemente**:** **ln x** . Entonces: $\mathbf{\log_e (x) = \ln x}$

Es importante considerar que, la función logaritmo natural **f(x)=ln x** que se puede escribir simplemente como **y= ln x** , es la inversa de la función exponencial $\mathbf{y=e^x}$. Las propiedades de los logaritmos naturales son casos particulares de las propiedades de los logaritmos en general.

Recursos de aprendizaje

Para comprender mejor los temas de las funciones logarítmicas, especialmente para identificar las propiedades de los logaritmos naturales, y desarrollar con pertinencia la actividad calificada de esta semana sobre 1,5 puntos, en donde se solicita explicar mediante dos ejemplos la diferencia entre los logaritmos comunes y los logaritmos naturales, sugiero participar del siguiente recurso de aprendizaje:

- Lea el texto básico las páginas desde la 344 hasta la 351.

Retroalimentación: Seguramente usted ha logrado analizar la relación entre la función exponencial y la función logarítmica, explicando sus coincidencias y diferencias; luego se explica cómo se calculan los

Índice
Primer bimestre
Segundo bimestre
Solucionario
Referencias bibliográficas

logaritmos comunes o decimales, los mismos que tiene base ***10***, mientras que los logaritmos naturales o neperianos se caracterizan por tener de base el número **e**.

Actividades de aprendizaje recomendadas

Para profundizar y consolidar sus conocimientos acerca de la función exponencial natural, sugiero:

- Trace en un mismo sistema de coordenadas cartesianas las gráficas de las funciones logaritmo común y logaritmo natural.

> **Recuerde que:** A través del chat de tutoría y consultas puede aclarar sus dudas e inquietudes con su docente.

Lo estás haciendo muy bien

¡Sigue adelante!

Semana 6

Estimado estudiante, la semana pasada se inició con el estudio de las funciones logarítmicas; ahora, reforzaremos su estudio ampliando la ejercitación y sistematizando los conceptos fundamentales para la modelización y posterior resolución de problemas.

Primero, recordemos la definición de función logarítmica en donde la única condición es que la base $a \neq 1$. Aquí, cabe puntualizar que, la función logarítmica es la inversa de la función exponencial.

Índice
Primer bimestre
Segundo bimestre
Solucionario
Referencias bibliográficas

> **Definición:** La función logarítmica con base ***a*** diferente de 1 y denotada por **log**$_a$, se define como aquella que cumple la equivalencia: **log**$_a$ **x=y __ a**^{y}**=x**

Principio didáctico: En la práctica, cuando se quiere hallar el **log**$_x$x se debe calcular el exponente ***y*** al cual se debe elevar la base ***a*** para obtener ***x***.

Ejemplos ilustrativos:

El $\log_2 16 = 4$ porque $2^4 = 16$

El $\log_5 625 = 4$ porque $5^4 = 625$

El $\log_3 729 = 6$ porque $3^6 = 729$

El $\log_4 256 = 4$ porque $4^4 = 256$

El $\log_7 7 = 1$ porque $7^1 = 7$

El $\log_8 64 = 2$ porque $8^2 = 64$

El $\log_9 729 = 3$ porque $9^3 = 729$

El $\log_{10} 10000 = 4$ porque $10^4 = 10000$

El $\log_2 0{,}125 = -3$ porque $2^{-3} = 0{,}125$

El $\log_3 0{,}111 = -2$ porque $3^{-2} = 0{,}111…$

El $\log_4 0{,}0624 = -2$ porque $4^{-2} = 0{,}0625$

El $\log_5 0{,}04 = -2$ porque $5^{-2} = 0{,}04$

Las propiedades que se cumplen en los logaritmos son muy valiosas para la ejercitación y resolución de problemas, porque a través de ellas se puede determinar directamente el resultado. Las cuatro más importantes son:

PROPIEDADES

1. **$\log_a$**$1=0$ porque todo número elevado a cero es igual a uno.
2. **$\log_a$**$a=1$ porque todo número elevado a la unidad es igual al mismo número.
3. **$\log_a$** $a^x=x$ porque ***a***, elevado a ***x***, es igual a^x
4. $a^{\log ax}=x$ porque ***a*** **$\log_a$**x, elevado a es igual a **x**

Propiedad del logaritmo de 1: $\log_a$ $1=0$ Esta propiedad indica que, cualquiera sea la base, el logaritmo de 1 siempre es cero.

El ***$\log_4$***$1= 0$ porque **$4^0 = 1$**
El ***$\log_{20}$***$1= 0$ porque **$20^0 = 1$**

Propiedad de la coincidencia: $\log_a$ $a=1$ Esta propiedad manifiesta que, si la base coincide con el número, el resultado siempre es uno.

El ***$\log_5$***$5 = 1$ porque **$5^1 = 5$**
El ***$\log_3$***$3= 1$ porque **$3^1 = 3$**

Propiedad de la potencia: $\log_a$ $a^x=x$ Esta propiedad señala que, si el número es una potencia con la misma base, el resultado siempre es el exponente.

El ***$\log_4$*****4^2** $= 8$ porque **$4^2 = 4^2$**
El ***$\log_{10}$*****10^3** $= 8$porque **$10^3 = 10^3$**

Propiedad de la base: $a^{\log ax} = x$ Esta propiedad manifiesta que, si la base se eleva a un exponente logarítmico con la misma base, el resultado es ***x***.

El ***$2^{\log 28}$*** $=$ **8** porque **2^3** $=$ **8**
El ***$3^{\log 39}$*** $=$ **9** porque **3^2**$=$ **9**
El ***$10^{\log 100.01}$***$=$**0,01** porque **10^{-2}** $=$ **0,01**

Índice
Primer bimestre
Segundo bimestre
Solucionario
Referencias bibliográficas

Índice
Primer bimestre
Segundo bimestre
Solucionario
Referencias bibliográficas

Para trazar la gráfica de una función logarítmica nos apoyamos en Geogebra o en otro software libre puntualizando que, la función logarítmica y la función exponencial son funciones inversas. Además, es importante que usted se ejercite lo suficiente sobre el desplazamiento gráfico de las funciones logarítmicas.

Ejemplo ilustrativo. Grafiquemos en el mismo sistema de coordenadas rectangulares o cartesianas las funciones: $\mathbf{f(x)=log_2(x)}$ y $\mathbf{g\ (x) = log_2(x) +2}$ y . Realizando un análisis sobre el desplazamiento.

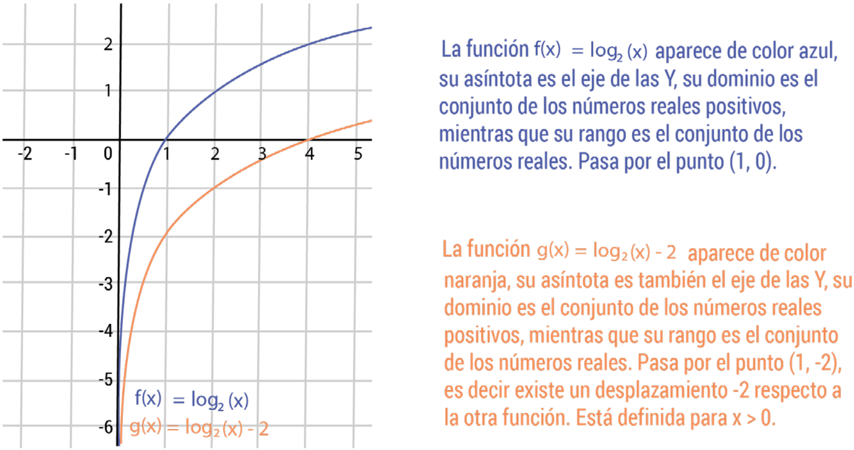


Imagen 9. Desplazamiento de la función a $\mathbf{f(x)=log_2(x)}$ **a** $\mathbf{g\ (x) = log_2(x) +2}$

Los logaritmos comunes son logaritmos de base 10, pero se escriben omitiendo la base. Mientras que los logaritmos naturales son logaritmos que tiene de base el número ***e***.

> Logaritmo común: $\boldsymbol{log}\ \mathbf{x=log_{10}\ x}$
>
> Logaritmo natural: $\boldsymbol{lnx}$ $\mathbf{=log_e\ x}$

Ejemplos ilustrativos. $\boldsymbol{log}\ \mathbf{100 = 2;}\ \boldsymbol{log}\ \mathbf{10 = 1; ln\ e = 1;}\ \boldsymbol{ln}\ \mathbf{e^2 = 2}$

Las propiedades de los logaritmos naturales son casos específicos respecto de las propiedades de los logaritmos, las mismas fueron estudiadas en la semana anterior. Algunas funciones logarítmicas son desplazadas en el eje X, por lo tanto, conviene analizar su dominio.

Ejemplo ilustrativo. Encontremos el dominio de la función **$f(x) = \ln(9-x^2)$** comprobando con su respectiva gráfica.

Primero, recordemos que toda función logarítmica está definida para $x > 0$; entonces, el dominio de la función f, será el conjunto de números reales que cumpla:

- $9 - x2 > 0$, factorizamos
- $(3 - x)(3 + x) > 0$, de donde
- $3 - x > 0 \wedge 3 + x > 0$, es decir
- $x - 3 < 0 \wedge x > -3$
- $x < 3 \wedge x > -3$.

Los valores de x que cumplen con las dos desigualdades es $-3 < x < 3$, por lo que el dominio está dado por: $(-3, 3)$. Lo cual se verifica al analizar la gráfica de la derecha.

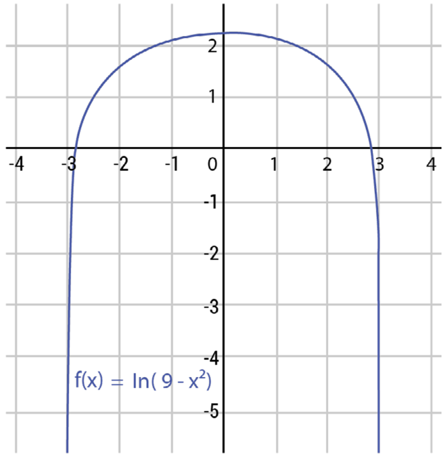


Imagen 10. Gráfica de la función f(x) =**$\ln(9-x^2)$**

Principio didáctico: es muy importante considerar que toda función logarítmica está definida para valores de $x > 0$ y por consiguiente, la función logaritmo natural también está definida para $x > 0$.

Recursos de aprendizaje

Para comprender de mejor manera los temas de las funciones logarítmicas, identificando las propiedades de los logaritmos, incluyendo las funciones naturales, y desarrollar con pertinencia la actividad calificada de esta semana que se trata de participar del cuestionario en línea correspondiente a la segunda evaluación parcial, sugiero realice lo siguiente:

- Habilite el hipervínculo e ingrese a Definición de logaritmo
- Lea el texto básico las páginas desde 344 hasta la 351.

Retroalimentación: En el video se hace una síntesis de los contenidos estudiados en la unidad de las funciones logarítmicas, considerando las definiciones y propiedades más importantes. Además, en el texto básico, usted puede estudiar aquellos aspectos que considere de mayor trascendencia como son los desplazamientos de las gráficas de las funciones logarítmicas, de esta manera usted estará preparado para desarrollar el cuestionario previstos en esta semana.

Actividades de aprendizaje recomendadas

Para profundizar y consolidar sus conocimientos acerca de la función exponencial natural, sugiero:

- Resuelva los ejercicios que a su criterio le parezcan interesantes y suficientes para lograr experticia, los cuales aparecen propuestos en el texto básico, desde la pág. 351 hasta la pág. 354.

> **Recuerde que:**
>
> A través del chat de tutoría y consultas puede aclarar sus dudas e inquietudes con su docente.

Lo estás haciendo muy bien

¡Sigue adelante!

Índice
Primer bimestre
Segundo bimestre
Solucionario
Referencias bibliográficas

Autoevaluación

Estimado estudiante, luego de culminar con el estudio de las **Funciones logarítmicas** y sus aplicaciones, es recomendable que usted realice la autoevaluación de lo aprendido en esta unidad, para luego retroalimentar con ayuda de su tutor, aquellas inquietudes más importantes.

Instrucción: Marque la alternativa correcta, en caso que no acierte, usted debe seguir intentando previa la respectiva retroalimentación interactiva.

Índice
Primer bimestre
Segundo bimestre
Solucionario
Referencias bibliográficas

Autoevaluación 3

1. La función logarítmica es una función inversa de.

   a. La potenciación.
   b. La función exponencial.
   c. Los números reales.

2. La función logarítmica con base ***a***, denotada por $\mathbf{log}_a$ está definida por.

   a. $\mathbf{log}_b x = y$ __ $a^y = x$.
   b. $\mathbf{log}_x a = y$ __ $a^y = x$.
   c. $\mathbf{log}_a x = y$ __ $a^y = x$.

3. El $\mathbf{log}_3 243 = 5$ porque.

   a. $5^3 = 243$.
   b. $3^5 = 243$.
   c. $3^4 = 81$.

4. El logaritmo con base 4 de 256: $\log_4 256$, es.

   a. 16.
   b. 4.
   c. 8.

5. El dominio de la función $f(x)= \log_4 x$ es el conjunto de los números.

   a. Irracionales positivos.
   b. Reales positivos.
   c. Reales.

Índice

Primer bimestre

Segundo bimestre

Solucionario

Referencias bibliográficas

6. La gráfica de la función $f(x)= \log_4 x +4$ se ha desplazado cuatro unidades con respecto de la función.

   a. $f(x)= \log_4 x$.
   b. $f(x)= \log_1 x$.
   c. $f(x)= \log_3 x$.

7. El dominio de la función $f(x)= \log_{10}(x-4)$ es el conjunto.

   a. {x / x e números reales}.
   b. $\{x / x > 4\}$.
   c. $(-\infty, 4)$.

8. Si $2^6 = 64$, entonces.

   a. $\log_2 64=6$.
   b. $\log_4 64=3$.
   c. $\log_3 64=6$.

9. El dominio de la función $f(x)= \ln(4-x^2)$ es.

   a. $(-2, 2)$.
   b. $(2, +\infty)$.
   c. $(2, -2)$.

10. El dominio de la función $f(x)= \ln(16-x^2)$ es.

   a. $(-\infty, 4)$.
   b. $(-2, 2)$.
   c. $(-4, 4)$.

Ir al solucionario

Semana 7

Unidad 4. Leyes de los logaritmos

- *Leyes de los logaritmos*
- *Desarrollo y combinación de expresiones logarítmicas*
- *Fórmula de cambio de base*

Estimado estudiante, la semana pasada se concluyó con el estudio de las funciones logarítmicas; ahora, estudiaremos las propiedades de los logaritmos, que brindan la posibilidad de estudiar muchas aplicaciones, posteriormente en el segundo bimestre. Pero ¿de dónde se obtienen las propiedades de los logaritmos?, ¿tiene relación con otras propiedades?, ¿Quiénes fueron sus inventores?, ¿para qué se deben estudiar las leyes de los logaritmos?. Le invito a que salga de sus inquietudes con el estudio responsable de los siguientes temas.

4.1. Leyes de los logaritmos

Considerando que los logaritmos manejan conceptos de potenciación y, por consiguiente, son exponentes que elevado a un número base nos da otro número propuesto, las leyes de la potenciación o de los exponentes dan lugar a las leyes de los logaritmos.

LEYES DE LOS LOGARITMOS

Ley 1. Logaritmo del producto: $\mathbf{log_a(A.B) = log_aA + log_aB}$.

El logaritmo del producto de dos factores es igual a la suma de los logaritmos de dichos factores.

Ley 2. Logaritmo del cociente: $\mathbf{log_a(A/B) = log_aA - log_aB}$.

El logaritmo del cociente es igual a la diferencia entre el logaritmo del numerador y el logaritmo del denominador.

Ley 3. Logaritmo de una potencia: $\mathbf{log(A^c) = C.log_aA}$.

El logaritmo de una potencia es igual al exponente multiplicado por el logaritmo de la base.

La demostración de estas leyes, se fundamentan en las leyes de la potenciación y aparecen explicadas en la página 355 del texto básico.

Con la aplicación de estas leyes muchos procedimientos pueden ser simplificados o desarrolladas de acuerdo a nuestra conveniencia.

Ejemplos ilustrativos. Evaluemos las siguientes expresiones, aplicando las leyes de los logaritmos y sin usar calculadora.

1. $\log_2 8 + \log_2 4 = \log_2 (8.4)$ Ley 1. aplicando logaritmo de un producto

   $= \log_2 (32)$ multiplicando 8 por 4
   $= \mathbf{5}$ porque $\mathbf{5}^2 = \mathbf{32}$

2. $\log_3 108 - \log_3 4 = \log_3 (108/4)$ Ley 2. aplicando logaritmo de un cociente

   $= \log_3 27$ dividiendo 108 para 4
   $= 3$ porque $3^3 = 27$

3. $3 \log_8 4 = \log_8 43$ Ley 3. aplicando logaritmo de una potencia

   $= \log_8 64$ elevando 4 a la tercera potencia
   $= 2$ porque $82 = 64$

4.2. Desarrollo y combinación de expresiones logarítmicas

También podemos desarrollar ejercicios combinando las expresiones logarítmicas, para esto se aplican las leyes de los logaritmos y otras propiedades de las distintas operaciones matemáticas.

Ejemplos ilustrativos. Usemos las leyes para desarrollar las expresiones.

1. $\log_3(8x^2) = \log_3 8 + \log_3 x^2$ aplicando Ley 1

   $= \log_3 8 + 2\log_3 x$ aplicando Ley 3

2. $\log_2(3x^4 y^{2/3}) = \log_2 3 + \log_2 x^4 + \log_2 y^{2/3}$ aplicando Ley 1

   $= \log_2 3 + 4\log_2 x + 2/3\log_2 y$ aplicando Ley 3

3. $\log_3((ab)^5 / \sqrt[3]{2c} = \log_3 (ab)^5 - \log_3 \sqrt[3]{2c}$ aplicando Ley 1

   $= 5 \log_3 ab - \log_3 (2c)^{1/3}$ aplicando Ley 2
   $= 5(\log_3 ab) - 1/3\log_3(2c)$ aplicando Ley 3
   $= 5(\log_3 a + \log_3 b) - 1/3(\log_3 2 + \log_3 c)$ aplicando Ley 1
   $= 5 \log_3 ab + 5\log_3 b - 1/3\log_3 2 - 1/3\log_3 c$ Ley distributiva

Algunas veces es necesario escribir sumas y diferencias de logaritmos como un solo logaritmo.

Ejemplos ilustrativos. Usemos las leyes de los logaritmos para combinar cada expresión y reducir a un logaritmo lo más simplificado posible.

1. $6 \log_2 x + \log_2 x^3 = (3.2) \log_2 x + \log_2 x^3$ Factorizando el 6

   $= 2 \log_2 x^3 + \log_2 x^3$ Ley 3, permite obtener términos semejantes
   $= 3 \log_2 x^3$ Reducimos los dos términos semejantes a uno solo

2. $\log(4+x) + \log(4+x)^3 - \log(4+x)^2 =$

   $= \log(4+x) + 3 \log(4+x) – 2 \log(4+x)$ Ley 3, para obtener términos semejantes
   $= 2 \log(4+x)$ Reducimos los tres términos semejantes

3. $2 \log x + 4 \log(x-1) = \log x^2 + \log(x-1)^4$ Ley 3

   $= \log(x^2.(x-1)^4)$ Ley 1

4. $3 \log x + \log(y-1) - 2/3 \log z =$

   $= \log x^3 + \log(y-1) - \log z^{2/3}$ Ley 3
   $= \log(x^3.(y-1)) - \log z^{2/3}$ Ley 1
   $= \log(x^3.(y-1)) / z^{2/3})$ Ley 2
   $= \log(x^3.(y-1)) / \sqrt[3]{z^2})$ Exponentes y radicales

Principio didáctico: La suma de logaritmos se puede escribir como el logaritmo de un producto según Ley 1, pero el logaritmo de una suma no es igual a la suma de logaritmos, por ejemplo: **log (a.b) = *log* a + *log* b,** pero ***log*(a + b) ≠ *log* a + *log* b**. Similar, la diferencia de logaritmos se puede escribir como el logaritmo de un cociente Ley 3, pero el logaritmo de una diferencia no es igual al cociente de logaritmos, por ejemplo: **log (a/b) = log a - log b,** pero **log(a - b) ≠ log a - log b**

4.3. Cambio de base de los logaritmos

Para pasar de un logaritmo en una base a un logaritmo en otra base, se utiliza una fórmula muy sencilla:

> Fórmula de cambio de base: $\boldsymbol{\log_b x = \log_a x / \log_a b}$

Ejemplos ilustrativos: Apliquemos la fórmula del cambio de base.

1. Pasemos el logaritmo $\boldsymbol{\log_5 16}$ al logaritmo en una base binaria (2).

La fórmula del cambio de base es: $\log_b x = \dfrac{\log_a x}{\log_a b}$

$$\log_5 16 = \frac{\log_2 16}{\log_2 5} = \frac{4}{\log_2 5}$$

2. Expresemos el logaritmo $\boldsymbol{\log_{10} 4}$ al logaritmo en una base binaria (2).

La fórmula del cambio de base es: $\log_b x = \dfrac{\log_a x}{\log_a b}$

$$\log_{10} 4 = \frac{\log_2 4}{\log_2 10} = \frac{2}{\log_2 10}$$

3. Transformemos el logaritmo ***log 8*** al logaritmo en una base binaria (2).

La fórmula del cambio de base es: $\log_b x = \dfrac{\log_a x}{\log_a b}$

$$\log 8 = \frac{\log_2 8}{\log_2 10} = \frac{\log_2 8}{\log_2 (2.5)} = \frac{3}{\log_2 2{+}\log_2 5} = \frac{3}{1{+}\log_2 5}$$

Índice

Primer bimestre

Segundo bimestre

Solucionario

Referencias bibliográficas

4. Pasemos el logaritmo ***ln 64*** al logaritmo en una base binaria (2).

La fórmula del cambio de base es: $\log_b x = \frac{\log_a x}{\log_a b}$

$$\ln 64 = \frac{\log_2 64}{\log_2 10} = \frac{6}{\log_2 (2.5)} = \frac{6}{\log_2 2 + \log_2 5} = \frac{6}{1 + \log_2 5}$$

5. Usemos la fórmula del cambio de base con **a = 10 y b = 5**, para hallar con cuatro decimales el valor correspondiente al $\boldsymbol{log_5 15}$.

La fórmula del cambio de base es: $\log_b x = \frac{\log_a x}{\log_a b}$

$$\log_5 15 = \frac{\log_{10} 15}{\log_{10} 5} = \frac{1{,}1761}{0{,}6990} = 1,6825$$

Recursos de aprendizaje

Para comprender de mejor manera los temas de las funciones logarítmicas, especialmente para identificar las propiedades de los logaritmos naturales, y desarrollar con pertinencia la actividad calificada de esta semana, en donde se solicita explicar mediante dos ejemplos la diferencia entre los logaritmos comunes y los logaritmos naturales, sugiero participar de los siguientes recursos de aprendizaje:

- Habilite el hipervínculo e ingrese al video Logaritmos definición y propiedades.
- Lea el texto básico las páginas desde la 354 hasta 358.

Retroalimentación: En el texto básico, luego de proponer las leyes de los logaritmos, se desarrollan ejercicios de aplicación de los mismos. Ofreciendo una suficiente variedad de ejercicios de aplicación; también se ofrecen aquellos casos en donde se aprovechan las leyes para desarrollar y combinar expresiones logarítmicas; y, finalmente se explica el cambio de base de los logaritmos, lo que permite encontrar su valor a través de las calculadoras.

Índice
Primer bimestre
Segundo bimestre
Solucionario
Referencias bibliográficas

Actividades de aprendizaje recomendadas

Para profundizar y consolidar sus conocimientos acerca de la función exponencial natural, sugiero:

- Realice suficientes ejercicios y problemas de aplicación de las leyes de los logaritmos, los cuales los encuentra propuestos en el texto básico.

> **Recuerde que:** A través del chat de tutoría y consultas puede aclarar sus dudas e inquietudes con su docente.

Lo estás haciendo muy bien

¡Sigue adelante!

Autoevaluación

Estimado estudiante, luego de culminar con el estudio de las **Leyes de logaritmos**, es recomendable que usted realice la autoevaluación de lo aprendido en la unidad, para luego retroalimentar con ayuda de su tutor, aquellas inquietudes más importantes que le causaron dificultad.

Instrucción: Marque la alternativa correcta, en caso que no acierte, usted debe seguir intentando previa la respectiva retroalimentación interactiva.

Índice
Primer bimestre
Segundo bimestre
Solucionario
Referencias bibliográficas

Autoevaluación 4

1. El logaritmo de un producto es igual a la.

    a. División de cada uno de los logaritmos parciales.
    b. Suma los logaritmos de los factores.
    c. Al producto de los dos logaritmos parciales.

2. El logaritmo del cociente es igual a la.

    a. Suma entre el logaritmo del numerador y el logaritmo del denominador.
    b. Al producto del logaritmo dela base por el logaritmo del exponente.
    c. Diferencia entre el logaritmo del numerador y el logaritmo del denominador.

3. La expresión $\log_3 8 + \log_3 x^2$, aplicando la ley del producto, es equivalente a.

    a. $2 + x^{2/3}$.
    b. $\log_3(8.x^2)$.
    c. $8x^2$.

4. El logaritmo $\log_2 10$ aplicando la ley del producto, es.

    a. $1 + \log_2 8$.
    b. $1 + \log_2 5$.
    c. log20.

5. El desarrollo de $\log(x^3y^2)$ es.

    a. 2 log x + 3 log y.
    b. $x^3 + y^2$.
    c. 3 log x + 2 log y.

6. El desarrollo de $\log_2(ab^5/ \sqrt[3]{2c})$ es $\log_2 a + 5\log_2 b - 1/3 \log_2 2 - 1/3\log_2 c$.

a. $\log_2 ab^5 - \log_3 \sqrt[3]{2c}$.
b. $5 \log_2 ab - 1/3\log_2 2 + 1/3\log_2 c$.
c. $\log_2 a + 5\log_2 b - 1/3\log_2 2 - 1/3\log_2 c$.

7. $\log x^2 + \log y^2$.

a. $\log (x^2 + y^2)$.
b. $\log (xy)^2$
c. $\log (2x + 2y)$.

8. $\log_{10} 4$ representado en base binaria es.

a. $2/ \log_2 10$.
b. $4/ \log_2 10$.
c. $1/ \log_4 10$.

9. El valor del $\log_5 16$ transformando a logaritmos de base 10, con 5 decimales, es.

a. 1,43068.
b. 0,69897.
c. 0,00005.

10. El desarrollo de la expresión $\log \sqrt[4]{x^2 + 3y^2}$, es.

a. $3/4 \log x^2 y^2$.
b. $\log 1/4x^2 + \log 3/4y$.
c. $1/4\log(x^2 + 3 y^2)$.

Ir al solucionario

Actividades finales del bimestre

Semana 8

Actividad 1. Recupere las actividades de aprendizaje calificadas desarrolladas durante el primer bimestre y que no fueron entregadas.

Actividad 2. Organice un documento que contenga dicha información cuidando la presentación; si lo hizo a mano, puede fotografiar y organizar un documento en PDF.

Actividad 3. Suba el archivo del documento al EVA caso de ser necesario; este documento le servirá de apoyo para preparar su evaluación presencial en esta semana.

Actividad 4. Revise los contenidos del primer bimestre y participe de la evaluación presencial.

Para ello considere:

- Su diario de notas.
- Actividades de aprendizaje recomendadas.
- Actividades de aprendizaje calificadas.
- Actividades de aprendizaje interactivas; y,
- Evaluaciones parciales.

Actividades de aprendizaje recomendadas

Además de las actividades anteriores, para consolidar los aprendizajes del primer bimestre, y prepararse a la prueba presencial en físico o virtual, sugiero:

- Revise cada uno de los conceptos estudiados en las cuatro unidades planificadas y desarrolladas en este primer bimestre.
- Realice suficientes ejercicios y problemas de aplicación de los diferentes conceptos, propiedades y leyes, de cada una de las unidades estudiadas, desarrollando los problemas propuestos al final de cada unidad del texto básico.
- Para cada una de las unidades, es valedero que sistematice el conocimiento aprendido, a través de la construcción de un mapa conceptual o algún otro organizador gráfico que estime conveniente.

> **Recuerde que:** A través del chat de tutoría y consultas puede aclarar sus dudas e inquietudes con su docente.

Lo estás haciendo muy bien

¡Sigue adelante!

Segundo bimestre

Resultado de aprendizaje 2

Emplea los principios y algoritmos de las ecuaciones exponenciales y logarítmicas, y las escalas logarítmicas para el modelado y resolución de problemas del entorno natural y social.

Contenidos, recursos y actividades de aprendizaje

Estimados estudiantes:

Bienvenidos al Segundo Bimestre del curso de **Sistemas de conocimiento de Funciones exponenciales y logarítmicas y su didáctica**, en esta segunda parte del periodo académico ordinario, profundizaremos los conocimientos sobre ecuaciones exponenciales, ecuaciones logarítmicas, y el interés compuesto modelado con funciones exponenciales para resolver problemas del entorno.

Con estos conocimientos, se facilitará la comprensión de la pedagogía y aplicación de la didáctica y estaremos en condiciones de generar aprendizajes significativos en nuestros estudiantes, cuando en el futuro actuemos como docentes, estudiantes que podrán resolver situaciones de la vida real aplicando la modelización.

Semana 9

Unidad 5. Ecuaciones exponenciales y logarítmicas

- *Ecuaciones exponenciales*
- *Ecuaciones logarítmicas*
- *Interés compuesto*

Estimados estudiantes, iniciaremos definiendo lo que significa una ecuación exponencial, para esto vale recordar que se denomina ecuación a toda igualdad en donde existe una variable desconocida, la cual generalmente se la conoce como incógnita.

5.1. ¿A qué llamamos ecuación exponencial?

Una ecuación exponencial es aquella en la cual, la variable aparece en el exponente. Algunas ecuaciones exponenciales se pueden resolver usando el hecho de que las funciones exponenciales son uno a uno, esto significa que

$$a^x = a^y$$

$$\Rightarrow x = y$$

(Stewart, Redlin y Watson, 2017, p. 360)

Para resolver una ecuación exponencial debemos tener en cuenta las propiedades de las potencias:

1. $a^0 = 1$
2. $a^1 = a$
3. $a^{-n} = \frac{1}{a^n}$
4. $a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m}$
5. $a^m . a^n = a^{m+n}$
6. $\frac{a^m}{a^n} = a^{m-n}$
7. $(a^m)^n = a^{m.n}$
8. $\frac{a^n}{b^n} = \left(\frac{a}{b}\right)^n$

Para comprender de mejor manera estudiemos el siguiente ejemplo, en el cual se analiza la igualdad de dos potencias y aprovechando que las funciones exponenciales son uno a uno, se igualan los exponentes.

Ejemplo ilustrativo 1. Resolvamos la ecuación **2^x =16**.

$$2^x = 16 \text{ Ecuación dada}$$
$$2^x = 2^4 \text{ Sabemos que 16 = 24}$$
$$x = 4 \text{ Propiedad uno a uno}$$

La ecuación por la que empezamos es un ejemplo básico de una igualdad entre una expresión exponencial y un número entero que puede escribirse como una potencia con la misma base que la exponencial. Teniendo en cuenta que, dos potencias con la misma base son iguales, si y solamente si, sus exponentes son iguales.

Índice

Primer bimestre

Segundo bimestre

Solucionario

Referencias bibliográficas

5.1.1. ¿Cómo se resuelve una ecuación exponencial?

Para resolver una ecuación exponencial básica, igualamos las dos potencias con la misma base, concluyendo que los exponentes de potencias con bases iguales serán iguales, en donde la incógnita será uno de los exponentes.

Pero, si el número entero que forma parte de un miembro de dicha igualdad, no se puede expresar como una potencia con la misma base, aplicamos logaritmos a los dos lados de la ecuación y la respectiva propiedad que permitirá despejar la variable del exponente. Este proceso se explica en el siguiente tema.

5.2. ¿Cuál es la guía para resolver ecuaciones exponenciales?

1. Despeje la expresión exponencial en un lado de la ecuación.
2. Tome el logaritmo de cada lado y después use las leyes de logaritmos para "bajar el exponente".
3. Despeje la variable (Stewart, Redlin, y Watson, 2017, p. 361).

Resolvamos los siguientes ejemplos aplicando la guía propuesta en el texto básico.

Ejemplo ilustrativo 2. Resolvamos la ecuación exponencial $10^{2x-3} = \frac{1}{10}$

$10^{2x-3} = \frac{1}{10}$ Ecuación dada

$10^{2x-2} = 10^{-1}$ Escribimos en forma exponencial

$2x - 2 = -1$ En potencias iguales, los exponentes son iguales

$2x - 2 + 2 = -1 + 2$ Sumamos 2 a cada lado

$\frac{2x}{1} = \frac{1}{2}$ Dividimos para 2

$x = \frac{1}{2}$ **Solución**

Ejemplo ilustrativo 3. Otro caso en donde el exponente es una expresión algebraica: **2 $^{2x-1}$ = 4**

$$2^{2x-1} = 4 \text{ Ecuación dada}$$
$$2^{2x-1} = 2^2 \text{ Escribimos en forma exponencial}$$
$$2x - 1 = 2 \text{ Igualamos los exponentes}$$
$$2x - 1 + 1 = 2 + 1 \text{ Sumamos 1 a cada lado}$$
$$\frac{2x}{2} = \frac{3}{2} \text{ Dividimos para 2}$$
$$x = \frac{3}{2} \textbf{ Solución}$$

Recursos de aprendizaje

Para comprender de mejor manera las ecuaciones exponenciales le invito a que:

- Lea el texto básico páginas 360-3632.
- Habilite el hipervínculo y mire atentamente el video sobre la resolución de ecuaciones exponenciales en Ecuaciones exponenciales.

Retroalimentación

En este video encontramos la definición de ecuación exponencial, se explica la solución de ecuaciones básicas y cuadráticas, aplicando las propiedades de las potencias, y también utiliza el cambio de variable; los ejercicios son variados y suficientes para su ilustración. Mientras que, en el texto básico usted encontrará la fundamentación teórica básica para su aprendizaje y comprensión de conceptos sobre la resolución de las ecuaciones exponenciales.

Índice
Primer bimestre
Segundo bimestre
Solucionario
Referencias bibliográficas

Actividades de aprendizaje recomendadas

Para profundizar sus conocimientos:

- Encuentre la solución de las ecuaciones exponenciales del 3 al 10, página 368 del texto básico.

> **Recuerde que:**
>
> A través del chat de tutoría y consultas puede aclarar sus dudas e inquietudes con su docente.

Lo estás haciendo muy bien

¡Sigue adelante!

Semana 10

5.3. Resolución de ecuaciones exponenciales

5.3.1. ¿Cómo se resuelve una ecuación exponencial de manera algebraica?

Para comprender con mayor claridad la resolución de ecuaciones exponenciales aplicando el método algebraico, resolvamos los siguientes ejercicios:

Ejemplo ilustrativo 4. Resolvamos la ecuación en donde se logra una igualdad de potencias de la misma base: $\mathbf{2^{x+2} = 16}$.

$$2^{x+2} = 16 \text{ Ecuación dada}$$
$$2^{x+2} = 2^4 \text{ Escribimos en forma exponencial}$$
$$x + 2 = 4 \text{ Simplificamos las bases iguales}$$
$$x + 2 - 2 = 4 - 2 \text{ Restamos 2 a cada lado}$$
$$x = 2 \textbf{ Solución}$$

Ejemplo ilustrativo 5. En esta ecuación hacemos un reemplazamiento.

$$3^{2x-2} + 3^{x-1} = 12 \text{ Ecuación dada}$$
$$\frac{(3^x)^2}{3^2} + \frac{3^x}{3} = 12 \text{ Se pasa a forma exponencial aplicando propiedades}$$
$$t = 3^x \text{ Aplicamos el cambio de variable}$$
$$t^2 = (3^x)^2$$
$$\frac{t^2}{3^2} + \frac{t}{3} = 12$$
$$t^2 + 3t - 108 = 0 \text{ Resolvemos aplicando la fórmula general}$$
$$a = 1$$
$$b = 3$$
$$c = -108$$
$$t = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$
$$t = \frac{-3 \pm \sqrt{3^2 - 4(1)(-108)}}{2(1)}$$
$$t = \frac{-3 \pm 21}{2}$$
$$t_1 = \frac{-3+21}{2}$$
$$t_1 = 9$$
$$t_2 = \frac{-3-21}{2}$$
$$t_2 = -12$$

Hacemos el cambio de variable

$t_1 = 3^x$
$9 = 3^x$

$3^2 = 3^x$ Escribimos en forma exponencial
$x = 2$ **Solución**
$t_2 = 3^x$
$-12 = 3^x$ No es solución porque es negativa y la potencia de 3 es positiva

Ejemplo ilustrativo 6. En esta ecuación también se ilustra el reemplazamiento de variables,

$2^{2x} + 4^{x-1} + 44 = 2^{2x+2}$ Ecuación dada
$2^{2x} + 4^x\left(4^{-1}\right) + 44 = 2^{2x}\left(2^2\right)$ Escribimos en forma exponencial
$2^{2x} + \frac{2^{2x}}{4} + 44 = 2^{2x}(4)$
$t = 2^x$ Aplicamos el cambio de variable
$t^2 = 2^{2x}$
$t^2 + \frac{t^2}{4} + 44 = 4t^2$
$t^2 + \frac{t^2}{4} - 4t^2 = -44$ Factor común
$t^2\left(1 + \frac{1}{4} - 4\right) = -44$ Sumamos
$t^2\left(-\frac{11}{4}\right) = -44$
$t^2 = 16$
$t_1 = 4$
$t_2 = -4$

Índice
Primer bimestre
Segundo bimestre
Solucionario
Referencias bibliográficas

$t = 2^x$ Aplicamos el cambio de variable
$2^2 = 2^x$
$x = 2$ Solución

$t_2 = -4$ No es solución por ser negativa
Verificamos si la solución satisface la ecuación
$2^{2x} + 4^{x-1} + 44 = 2^{2x+2}$
$2^{2(2)} + 4^{2-1} + 44 = 2^{2(2)+2}$
$64 = 64$

Ejemplo ilustrativo 7. Resolvamos la ecuación$4e^x - \frac{5}{e^x} + e^x = 0$.

$4e^x - \frac{5}{e^x} + e^x = 0$ Ecuación dada
$4e^x\,(e^x) - \frac{5}{e^x}(e^x) + e^x\,(e^x) = 0\,(e^x)$ Multiplicamos por e^x
$4e^2x - 5 + e^{2x} = 0$ Sumamos términos semejantes
$5e^{2x} - 5 = 0$
$5e^{2x} - 5 + 5 = 0 + 5$ Sumamos 5 en ambos lados
$5e^{2x} = 5$
$\frac{5e^{2x}}{5} = \frac{5}{5}$ Dividimos para 5 en ambos lados
$e^{2x} = 1$
$e^{2x} = e^0$ Sustituimos $e^0 = 1$
$2x = 0$ Despejamos x
$x = 0$ Solución

Verificamos si la solución satisface la ecuación

$4e^x - \frac{5}{e^x} + e^x = 0$
$4e^0 - \frac{5}{e^0} + e^0 = 0$
$4(1) - \frac{5}{1} + 1 = 0$
$4 - 5 + 1 = 0$
$0 = 0$

Índice

Primer bimestre

Segundo bimestre

Solucionario

Referencias bibliográficas

5.3.2. ¿Cómo se resuelve una ecuación exponencial gráficamente?

Para resolver ecuaciones exponenciales de manera gráfica, primero se representa gráficamente la ecuación, se identifica la intersección de la gráfica con el eje x, siendo estos puntos las soluciones, resolvamos los siguientes ejercicios:

Ejemplo ilustrativo 8. Resolvamos gráficamente la ecuación: $3^x = 27$

Primero, graficamos la ecuación

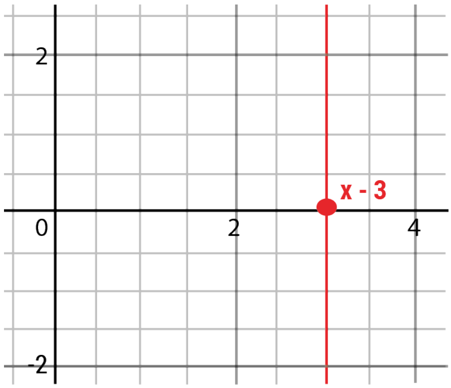


Imagen 11. Gráfica de la ecuación $\mathbf{3^x= 27}$

La gráfica de la ecuación es una recta que corta al eje X en (3, 0)

La solución de la ecuación es x=3

Ejemplo ilustrativo 9. Resolvamos gráficamente la ecuación: $\mathbf{7^{x-1} = 49^{x-1}}$

Primero graficamos la ecuación dada:

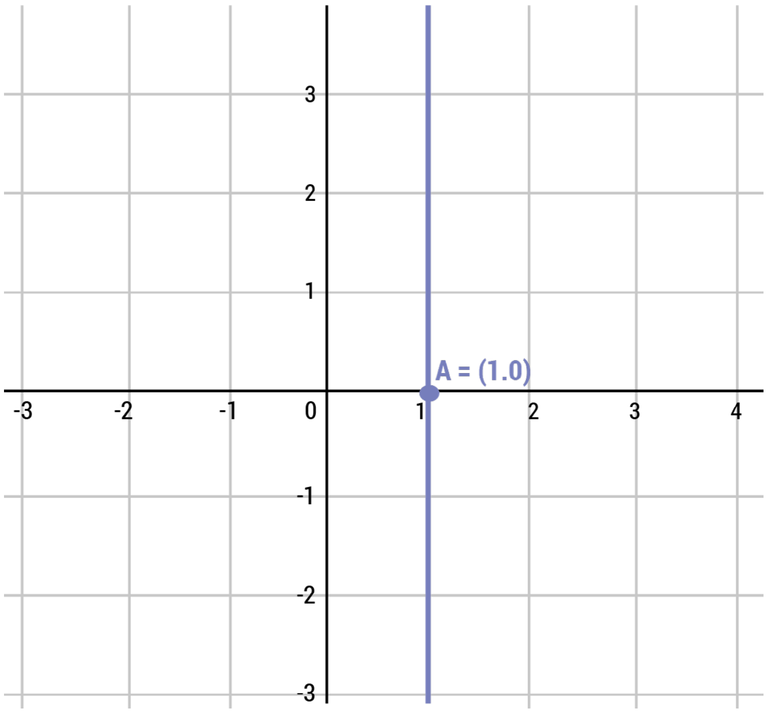


Imagen 12. Gráfica de la ecuación $\mathbf{7^{x-1} = 49^{x-1}}$

La gráfica es una recta que corta al eje X en el punto (1,0)

La solución de la ecuación es x = 1.

Índice
Primer bimestre
Segundo bimestre
Solucionario
Referencias bibliográficas

Ejemplo ilustrativo10. Grafiquemos la ecuación $\mathbf{8e^{2x} = 28}$ y determinemos la solución.

Primero graficamos la ecuación:

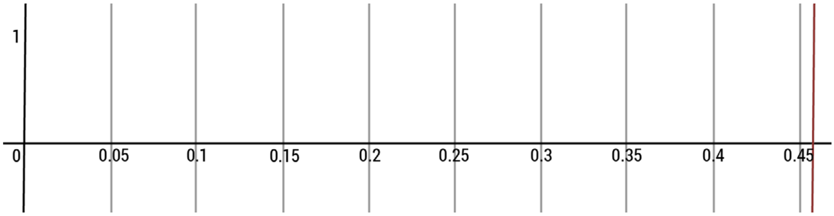


Imagen 13. Gráfica de la ecuación $\mathbf{8e^{2x} = 28}$

La gráfica es una recta que corta al eje X aproximadamente en el punto (0,458; 0).

La solución de la ecuación es aproximadamente x =0,458

Ejemplo ilustrativo 11. Resolvamos el sistema de ecuaciones

Graficamos las dos ecuaciones en un mismo sistema de coordenadas:

$$\begin{cases} y = e^{4-2x} \\ y = 4 \end{cases}$$

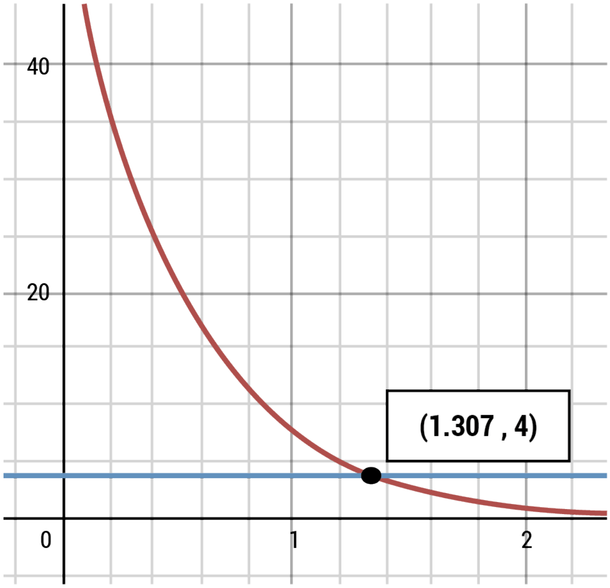


Imagen 14. Gráfica de la ecuación y=e^(4-2x) y y=4

Las gráficas de las ecuaciones se cortan en el punto (1,307; 4).

La solución del sistema de ecuaciones es el punto (1,307; 4)

Principio didáctico: Los procesos desarrollados en esta guía o en el texto básico no son para memorizar, son otra manera de resolver ecuaciones exponenciales y logarítmicas, usted tiene la libertad de desarrollar el método que sea más eficaz, con esto espero que desarrollen la capacidad de razonar y encontrar con autonomía el método más eficiente. En la actualidad, contamos con calculadoras con pantalla gráfica, páginas de internet como symbolab y programas informáticos como Excel entre otros, que nos facilitan la solución de ecuaciones.

Recursos de aprendizaje

Para comprender de mejor manera cómo resolver ecuaciones con logaritmos, le invito a que:

- Lea el texto básico páginas 363-367.
- Habilite el hipervínculo y mire atentamente el video de la profesora Susi en Ecuaciones Exponenciales utilizando Cambio de Variable.

Retroalimentación

Las Ecuaciones Exponenciales son aquellas cuya incógnita se encuentra en el exponente de una o varias potencias. Para resolverlas tenemos que intentar igualar dos potencias que tengan la misma base. Si conseguimos la misma base, hallar el valor de la incógnita es tan sencillo como igualar los exponentes para hallar su valor.

Si no conseguimos la misma base, realizaremos un cambio de variable que nos ayudará a simplificar nuestra ecuación para poder resolverla de una manera más sencilla. En este vídeo aprenderás el proceso para realizar las Ecuaciones Exponenciales con varios ejemplos de diferente dificultad cada uno. Para realizar estas ecuaciones es necesario emplear muy bien las propiedades de las potencias.

Actividades de aprendizaje recomendadas

Para profundizar sus conocimientos:

- Encuentre la solución de las ecuaciones exponenciales del 11 al 76 los impares. Pág. 368 del texto básico.

Índice
Primer bimestre
Segundo bimestre
Solucionario
Referencias bibliográficas

Recuerde que: A través del chat de tutoría y consultas puede aclarar sus dudas e inquietudes con su docente.

Lo estás haciendo muy bien

¡Sigue adelante!

Semana 11

5.4. Ecuaciones logarítmicas

5.4.1. ¿A qué llamamos ecuación logarítmica?

Las ecuaciones logarítmicas son aquellas ecuaciones en las que la incógnita o variable aparece afectada por un logaritmo.

$$\log_a x = \log_a y \;\Rightarrow\; x = y$$

Al momento de resolver este tipo de ecuaciones, conviene tener presente la definición de logaritmo: $x = \log_a b \;\Rightarrow a^x = b$,, con lo cual se puede expresar como una igualdad de potencias.

Además, para resolver ecuaciones logarítmicas, es conveniente tener en cuenta las propiedades de los logaritmos:

1. $\log_a 1 = 0$
2. $\log_a a = 1$
3. $\log_a a^n = n \log_a a$
4. $\log_a (x.y) = \log_a x + \log_a y$
5. $\log_a \frac{x}{y} = \log_a x - \log_a y$
6. $\log_a (x^n) = n \log_a x$
7. $\log_a \sqrt[n]{x} = \frac{1}{n} \log_a x$

Con la finalidad de interiorizar y lograr experticia en la aplicación de las propiedades de logaritmos, es conveniente desarrollar algunos ejercicios.

Ejemplo ilustrativo 11. Determinemos la solución de la ecuación $\mathbf{2^{2x-2} = 20}$

$2^{2x-2} = 20$ Ecuación dada
$\log 2^{2x-2} = \log 20$ Aplicamos logaritmos
$(2x-2)\log 2 = \log 20$ Propiedad 3 de logaritmos
$(2x-2) = \frac{\log 20}{\log 2}$ Despejamos x
$x = \frac{4{,}32+2}{2}$
$x = 3,16$ **Solución**

Utilizando la calculadora encontramos la aproximación decimal de la ecuación **x = 3.16**

Ejemplo ilustrativo 12. Encontremos la solución de la ecuación $\mathbf{300(1{,}025)^{12t} = 1000}$

Índice
Primer bimestre
Segundo bimestre
Solucionario
Referencias bibliográficas

$$300(1,025)^{12t} = 1000 \text{ Ecuación dada}$$
$$\frac{300(1,025)^{12t}}{300} = \frac{1000}{300} \text{ Dividimos para 300 en ambos lados}$$
$$(1,025)^{12t} = \frac{10}{3}$$
$$\log{(1,025)}^{12t} = \log\frac{10}{3} \text{ Aplicamos logaritmos}$$
$$12t.\log 1,025 = \log\frac{10}{3} \text{ Aplicamos la propiedad 3 de logaritmos}$$
$$12t = \frac{\log\frac{10}{3}}{\log 1,025}$$
$$t = \frac{\frac{\log\frac{10}{3}}{\log 1,025}}{12}$$
$$t = 4,06 \textbf{ Solución}$$

Utilizando la calculadora encontramos la aproximación decimal de la ecuación **x = 4,06**

5.4.2. ¿Cómo se resuelve una ecuación logarítmica algebraicamente?

Para comprender este proceso resolvamos el siguiente ejercicio:

Ejemplo ilustrativo 13. Encontremos la solución de la ecuación

$$\log x + \log(x-1) = \log(4x)$$

$$\log x + \log(x-1) = \log(4x) \text{ Ecuación dada}$$
$$x(x-1) = 4x \text{ Aplicamos la propiedad 4 de logaritmos}$$
$$x^2 - x - 4x = 4x - 4x \text{ Restamos } 4x \text{ a los dos lados}$$
$$x^2 - 5x = 0$$
$$x(x-5) = 0 \text{ Extraemos el factor común}$$
$$x = 0 \text{ Solución 1}$$
$$x - 5 = 0$$
$$x - 5 + 5 = 0 + 5$$
$$x = 5 \text{ Solución 2}$$

Las posibles soluciones de la ecuación son **x = 0 y x = 5**

Índice
Primer bimestre
Segundo bimestre
Solucionario
Referencias bibliográficas

Verificamos las soluciones en la ecuación original.

0 no es solución de la ecuación porque ***log0*** no está definido, debido a que x necesariamente tiene que ser mayor que 0, por cuanto, no hay logaritmo de 0 sea cualquiera que sea su base

$$\log x + \log(x-1) = \log(4x)$$
$$\log 5 + \log(5-1) = \log(4)\,(5)$$
$$\log 5 + \log 4 = \log 20$$
$$\log 20 = \log 20$$
$$20 = 20$$

La solución de la ecuación es **x = 5**

5.4.3. ¿Cómo se resuelve una ecuación logarítmica gráficamente?

Para comprender este proceso resolvamos los siguientes ejercicios:

Ejemplo ilustrativo 15. Encontremos la solución de la ecuación ***log (x+6) - log (2x - 1) = 0***

$\log(x+6) - \log(2x-1) = 0$ Ecuación dada

$y = \log(x+6) - \log\,(2x-1)$ Expresamos en la forma

$$y = mx + c$$

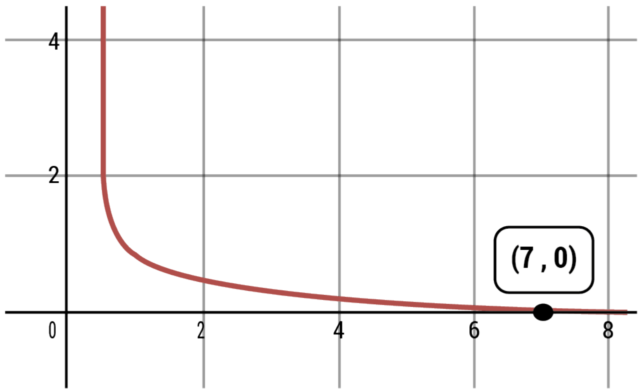


Imagen 15. Grafica de la ecuación **log(x+6)-\log (2x-1)=0**

La gráfica de la ecuación corta al eje X en el punto (7, 0), por lo tanto, la solución de la ecuación es **x=7.**

Ejemplo ilustrativo 16. Resolvamos gráficamente la ecuación **2 log x - log 4x = -2**

$2\log x - \log 4x = -2$ Ecuación dada
$y = 2\log x - \log 4x + 2$ Expresamos en la forma
$y = mx + c$

Graficamos la ecuación:

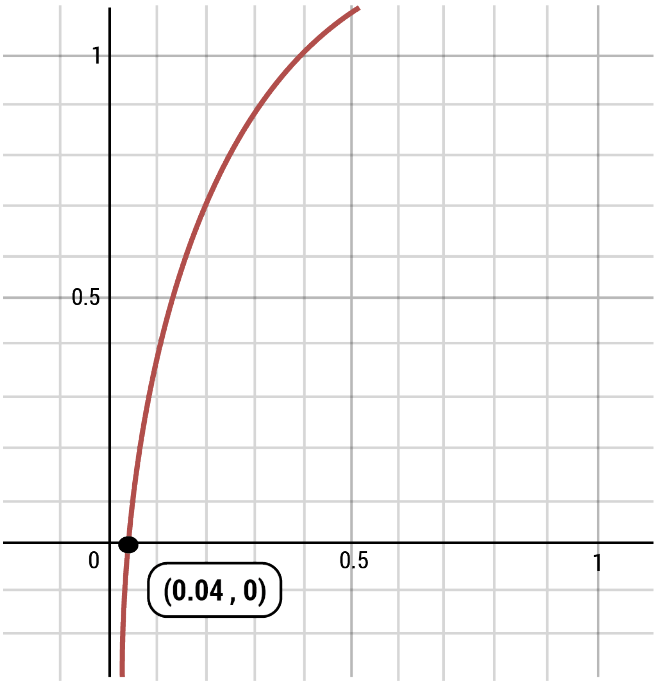


Imagen 16. Gráfica de la ecuación **2 log x - log 4x = -2**

La gráfica de la ecuación corta al eje X en el punto (0,04; 0), por lo tanto, la solución de la ecuación es **x= 0,04**

Principio didáctico: Al resolver ecuaciones exponenciales y logarítmicas, usted tiene la libertad de desarrollar el método que sea más eficaz, y se espera que luego desarrollen en sus alumnos la capacidad de razonar y encontrar el método más eficiente. En la actualidad, contamos con calculadoras con pantalla gráfica, páginas de internet como symbolab y programas informáticos como Excel entre otros, que nos facilitan la solución de ecuaciones.

Recursos de aprendizaje

Para comprender de mejor manera como resolver ecuaciones con logaritmos le invito a que:

- Lea el texto básico páginas 365-367.

Índice
Primer bimestre
Segundo bimestre
Solucionario
Referencias bibliográficas

- Habilite el hipervínculo y mire atentamente el video sobre la aplicación de las ecuaciones logarítmicas en Ecuaciones logarítmicas.

Retroalimentación

En este video se define la función logarítmica y explica con claridad los procesos de resolución de ecuaciones logarítmicas. Además, en el texto básico, disponemos de la teoría suficiente y necesaria para fundamentar el proceso de resolución de la pág. 364 además, se cuenta con suficientes ejercicios ilustrados de la resolución a partir de una gráfica, culminando con algunas aplicaciones muy interesantes.

Actividades de aprendizaje recomendadas

Para profundizar sus conocimientos:

- Encuentre la solución de las ecuaciones exponenciales del 11 al 76 los impares. Pág. 368 del texto básico.

> **Recuerde que:**
>
> A través del chat de tutoría y consultas puede aclarar sus dudas e inquietudes con su docente.

Lo estás haciendo muy bien

¡Sigue adelante!

Semana 12

5.5. Aplicación de las ecuaciones logarítmicas al interés compuesto

5.5.1. Aplicación de ecuaciones logarítmicas

La utilidad de aplicar ecuaciones logaritmos son algunas, principalmente cuando sirven de apoyo en la resolución de las ecuaciones exponenciales, así como también cuando se requiere modelar algunas relaciones entre la intensidad luminosa y la transparencia de los cuerpos.

Ejemplo ilustrativo 17. Encontremos la intensidad de la luz a una profundidad de 6 metros en un lago cuya intensidad luminosa fuera del mismo es **I_0=15 Lumens (lm)** y una constante **k = 0.03**

Aplicamos la Ley de Beer-Lambert

$$x = -\frac{1}{k}\ln\left(\frac{I}{I_0}\right)$$

$$-kx = \ln\left(\frac{I}{I_0}\right)$$

$$\frac{I}{I_0} = e^{-kx}$$

$$I = I_0 \,.\, e^{-kx}$$

$$I = 15\; lm.\, e^{(-0.03)(6m)}$$

$$I = 12,53\; lm$$

La intensidad de la luz a una profundidad de 6 metros en dicho lago es de aproximadamente 12,53 lm.

Ejemplo ilustrativo18. Un lago se contaminó con dicloro difenil tricloroetano DDT. La acción natural de las bacterias hace que el nivel de DDT disminuya en un 10 % en 7 años. No es posible volver a tener peces en el lago hasta que el nivel de DDT sea menor que un 50% del nivel actual. ¿Cuándo volverá el lago a ser habitable? Asumamos un comportamiento exponencial de la concentración de DDT.

Datos

t = 7 años
k = ?

La constante de velocidad de descomposición a partir de los datos:

$$Q\left(t\right) = Q_0 e^{-kt}$$
$$Q(7) = 0.9Q_0$$
$$0.9Q_0 = Q_0 e^{-7k}$$
$$0.9 = e^{-7k}$$
$$\ln 0.9 = -7k$$
$$-0.1054 = -7k$$
$$k = 0.01505$$

Ahora calculamos para cuando la concentración de DDT sea un 50 % de la actual:

$$
\begin{aligned}
&Q(t) = Q_0 e^{-kt} \\
&Q(50) = 0.5Q_0 \\
&0.5Q_0 = Q_0 e^{-0.01505t} \\
&0.5 = e^{-0.01505t} \\
&\ln 0.5 = -0.01505t \\
&-0.693 = -0.01505t \\
&k = 46
\end{aligned}
$$

El lago volverá a ser habitable cuando pasen aproximadamente 46 años.

5.5.2. Aplicación de ecuaciones logarítmicas en el cálculo del interés compuesto

Recordemos las ecuaciones exponenciales para calcular el interés compuesto:

$A = P(1 + r)$ Interés simple para un año

$A_{(t)} = P\left(1 + \frac{r}{n}\right)^{nt}$ Interés capitalizado n veces por año

$A_{(t)} = Pe^{rt}$ Interés capitalizado continuamente

Donde

$A =$ Capital final

$P =$ Capital inicial

$r =$ Tasa de interés

$n =$ Periodo de ahorro (Stewart, Redlin, y Watson, 2017, p. 366)

A = Capital final

P = Capital inicial

r = Tasa de interés

n = Periodo de ahorro (Stewart, Redlin, y Watson, 2017, p. 366)

Ejemplo ilustrativo 19. ¿Cuánto dinero tendré en 6 meses si deposito en una entidad financiera la cantidad de $ 100 000 a un 7% efectivo anual?.

$$
\begin{aligned}
&A_{(t)} = \$\,100\,000 \\
&P = ? \\
&r = 7\,\% \\
&n = 1 \\
&t = 6 \text{ meses} = \frac{6}{12} = 0,5 \text{ años} \\
&A_{(t)} = P\left(1 + \frac{r}{n}\right)^{n} \\
&A_{(t)} = 100000\left(1 + \frac{0.07}{1}\right)^{\frac{6}{12}} \\
&A_{(t)} = 103440,8
\end{aligned}
$$

El capital final que obtendrá es $ 103 440,8

Ejemplo ilustrativo 20. ¿Cuánto dinero debe depositarse en el banco si se desea acumular un monto de en un plazo de 3 años; la tasa de interés es de 8% convertible mensualmente?.

$A_{(t)}$ =$ 500 000
$P = ?$
$r = 8$ % mensual
$n = 1$
$t = 3$ años $= 36$ meses
$$A_{(t)} = P\left(1 + \frac{r}{n}\right)^{nt}$$
$$500000 = P\left(1 + \frac{0{,}08}{12}\right)^{36}$$
$$P = \frac{500000}{1{,}2702}$$
$$P = 393638.8$$

El capital inicial que debe depositar en el banco es $ 393 638,8

Ejemplo ilustrativo 21. ¿En qué tiempo un capital de $ 200 000 a una tasa del 2% trimestral ascenderá a $ 500 000?.

$A_{(t)}$ = $ 500 000
P = $ 200 000
$r = 2$ % trimestral
$n = 1$
$t = ?$

$$A_{(t)} = P\left(1 + \frac{r}{n}\right)^{nt}$$
$$\frac{A}{P} = \left(1 + \frac{r}{n}\right)^{nt}$$
$$\log\left(\frac{A}{P}\right) = nt\ \log\left(1 + \frac{r}{n}\right)$$
$$t = \frac{\log\left(\frac{A}{P}\right)}{n\ \log\left(1+\frac{r}{n}\right)}$$
$$t = \frac{\log\left(\frac{500000}{200000}\right)}{(1)\log\left(1+\frac{0.02}{1}\right)}$$
$$t = 46,27$$

El tiempo que se demora en obtener $ 500,000 es de 46,27 trimestres; aproximadamente 12 años

Ejemplo ilustrativo 22. ¿A qué tasa de interés un capital quintuplica su valor en 10 años?

$$A_{(t)} = 5x$$
$$P = x$$
$$r = ?$$
$$n = 1$$
$$t = 10 \text{ años}$$

$$5x = x\left(1 + \tfrac{r}{1}\right)^{10(1)}$$
$$5 = (1 + r)^{10}$$
$$\sqrt[10]{5} = \sqrt[10]{(1 + r)^{10}}$$
$$\sqrt[10]{5} = 1 + r$$
$$r = \sqrt[10]{5} - 1$$
$$r = 0.17$$
$$r = 17\,\%$$

El interés es del 17%

El interés es del 17%

Recursos de aprendizaje

Para comprender de mejor manera la aplicación de ecuaciones logarítmicas en el cálculo del interés compuesto le invito a que:

- Lea el texto básico páginas 363 a 366.
- Habilite el hipervínculo y mire atentamente el video del ProfeWilmer que aparece en Interés compuesto | calcular el tiempo de una inversión usando logaritmos.

Retroalimentación

En este video se aprecia de manera didáctica el proceso de resolución de problemas de interés compuesto aplicando las propiedades de los logaritmos. En el texto básico se encuentran algunos ejemplos ilustrados de la aplicación de los logaritmos en operaciones de interés compuesto. Así mismo, se proponen una variedad de problemas para que usted se prepare para las evaluaciones.

Actividad de aprendizaje recomendada

Para profundizar sus conocimientos y preparase adecuadamente para la evaluación parcial, sugiero:

- Encuentre la solución de las ecuaciones exponenciales y logarítmicas de las páginas 368 y 369 los números impares, del 11 al 87.
- Resuelva los problemas de aplicación de las ecuaciones exponenciales y logarítmicas, los números impares del 89 al 105 que se proponen en las Pág. 369 y 370 del texto básico.

> **Recuerde que:**
>
> A través del chat de tutoría y consultas puede aclarar sus dudas e inquietudes con su docente.

Lo estás haciendo muy bien

¡Sigue adelante!

Autoevaluación

Estimado estudiante, luego de culminar con el estudio de las **Ecuaciones exponenciales y logarítmicas**, es recomendable que usted realice la autoevaluación de lo aprendido en la unidad, para luego retroalimentar con ayuda de su tutor, aquellas inquietudes más importantes que le causaron dificultad.

Instrucción: Marque la alternativa correcta, en caso que no acierte, usted debe seguir intentando previa la respectiva retroalimentación interactiva.

Índice
Primer bimestre
Segundo bimestre
Solucionario
Referencias bibliográficas

Autoevaluación 5

1. La solución de la ecuación $5^{x-1} = 125$, es:

   a. $x = 2$.
   b. $x = 3$.
   c. $x = 4$.

2. La solución de la ecuación $10^{2x2-3} = 10^{9-x2}$ es:

   a. $x_1=-2yx_2=2$.
   b. $x_1=-3yx_2=3$.
   c. $x_1=-4yx_2=4$.

3. La solución de la ecuación $10\ (1{,}375)^{10t}$ es:

   a. $x = 0{,}7$.
   b. $x = 0{,}6$.
   c. $x = 0{,}5$.

4. La solución de la ecuación $1+ e^{4x+1}$ es:

   a. $x=0{,}286110$.
   b. $x = 0{,}386110$.
   c. $x = 0{,}486110$.

5. La solución de la ecuación $e^{2x} - ex - 6 = 0$ es:

   a. $x = 1{,}099$.
   b. $x = 2{,}\ 099$.
   c. $x = 3{,}099$.

6. La solución de la ecuación $\log_5 x + \log_5 (x+1) = \log_5 20$ es:

   a. 4.
   b. 3.
   c. 2.

7. La solución de la ecuación $\log_3 (2-x) = 3$ es:

   a. -15.
   b. -25.
   c. 35.

8. La solución de la ecuación $\log x = x^2 - 2$ es.

   a. 1,805.
   b. 2,209.
   c. 1,472.

9. La solución de la desigualdad $3 \leq \log_2 x \leq 4$ es:

   a. $8 \leq x \leq 16$.
   b. $-8 \leq x \leq 16$.
   c. $8 \leq x \leq -16$.

10. La solución de la ecuación $(\log x)^3 = 3 \log x$, es:

   a. $x = 10^{\sqrt{2}}$.
   b. $x = 10^{\sqrt{3}}$.
   c. $x = 10^{\sqrt{4}}$.

Ir al solucionario

Semana 13

Unidad 6. Modelado con funciones exponenciales

- *Crecimiento exponencial (tiempo de duplicación)*
- *Crecimiento exponencial (tasa de crecimiento)*
- *Desintegración radiactiva*
- *Ley de Newton de enfriamiento*

6.1. Crecimiento exponencial y el tiempo de duplicación.

Recurso

Para iniciar esta unidad vamos a desarrollar un proyecto sencillo de crecimiento exponencial.

Materiales

250 gramos de harina de trigo
25 gramos de levadura
3 cucharaditas de sal
2 cucharaditas de azúcar
50 ml de aceite
1 taza de agua

Imagen 17. Cómo crece una población de levaduras.
Fuente: Didactalia. (2020).

Procedimiento

En un recipiente mezcle los ingredientes y bata hasta obtener una masa homogénea anote la hora y la primera medición de la altura de la masa, luego registre las mediciones de la altura cada 5 minutos durante una hora.

Con estos datos elabore la gráfica y determine la función exponencial.
Comparta los resultados con sus compañeros y docente.

Crecimiento poblacional

Si el tamaño inicial de una población es **n0** y el tiempo de duplicación es entonces el tamaño de la población en el tiempo **t** es

$$n(t) = n_0 t^{\frac{t}{a}}$$

Índice
Primer bimestre
Segundo bimestre
Solucionario
Referencias bibliográficas

Donde y se miden en las mismas unidades de tiempo (minutos, horas, días, años, etc.)

Para comprender este proceso resolvamos los siguientes ejercicios:

Ejemplo ilustrativo 23. La población de un virus se multiplica por 10 cada hora partiendo de 5 individuos. ¿En cuánto tiempo se alcanzarán los 100 000 individuos?.

$$n(t) = n_0 t^{\frac{t}{a}}$$
$$100000 = 5(10)^t$$
$$20000 = 10^t$$
$$\log 20000 = t \ \log 10$$
$$t = \frac{\log 20000}{\log 10}$$
$$t = 4,3 \text{ horas}$$

El tiempo que se demorará en alcanzar 100 000 individuos es de 4 horas y 18 minutos.

Ejemplo ilustrativo 24. Cada hora se elimina un 30% de la cantidad de alcohol en la sangre. Partiendo de 2g/. ¿Cuánto tardará en descender la cantidad de alcohol de 0,2 g/L?.

Cantidad eliminada 1 hora = Cantidad inicial x (30/100)
Cantidad tras 1 hora = Cantidad inicial x (70/100)

$$r = \frac{70}{100}$$
$$r = 0.7$$

$$n(t) = n_0 t^{\frac{t}{a}}$$
$$0,3 = 2(0.7)^t$$
$$0.15 = (0.7)^t$$
$$\log 0.15 = t\ \log 0.7$$
$$t = \frac{\log 0.15}{\log 0.7}$$
$$t = 5,32 \text{ horas}$$

El tiempo que se demorará en eliminarse el alcohol es de 5 horas y 19 minutos.

6.2. Crecimiento exponencial y tasa de crecimiento relativa

Ejemplo ilustrativo 25. Un pueblo tiene 1000 habitantes y su población crece anualmente un 5% ¿Cuántos habitantes habrá al cabo de 10 años?.

$$P(t) = P_0(1+i)^{\frac{t}{a}}$$
$$P(t) = 1000(1+0.05)^{10}$$
$$P(t) = 1628,89 \text{ habitantes}$$

La población en 10 años será aproximadamente de 1 629 habitantes.

6.3. Desintegración radioactiva

Las sustancias radiactivas se desintegran al emitir radiación espontáneamente. La rapidez de desintegración es proporcional a la masa de la sustancia. Esto es similar al crecimiento poblacional excepto que la masa decrece. Los físicos expresan la rapidez de desintegración en términos de vida media (Stewart, Redlin, y Watson, 2017, p. 375).

Ejemplo ilustrativo 26. Se tiene una muestra inicial de **2,0x10**^{15} núcleos de polonio-210 con un período de semidesintegración de 138 días.

a. ¿Cuánto vale la constante radiactiva del polonio?
b. ¿Cuál será su actividad inicial?
c. ¿Cuál será actividad a la cabo de 1000 días?

$$N_0 = 2\,x\,10^{15}\ \text{núcleos}$$

$$T_{\frac{1}{2}} = 138\ \text{días}$$

a.

$$\lambda = \frac{\ln 2}{T_{\frac{1}{2}}}$$

$$\lambda = \frac{\ln 2}{138}$$

$$\lambda = 5\,x\,10^{-3}\ \text{días}^{-1}$$

Índice

Primer bimestre

Segundo bimestre

Solucionario

Referencias bibliográficas

b.

$$T_{\frac{1}{2}} = 138 \; dias \; \frac{24 \; horas}{1 \; dia} \cdot \frac{3600 \; seg}{1 \; hora}$$

$$T_{\frac{1}{2}} = 11923,200 \; seg$$

$$\lambda = \frac{\ln 2}{T_{\frac{1}{2}}}$$

$$\lambda = \frac{\ln 2}{11923{,}200 \; seg}$$

$$\lambda = 5,81 \; x \; 10^{-8} s^{-1}$$

$$A_0 = \lambda \, N_0$$

$$A_0 = 5,81 \; x \; 10^{-8} s^{-1} (2 \; x \; 10^{15} \text{ r}$$

$$A_0 = 1,16 \; x \; 10^{8} \text{ núcleos/seg}$$

c.

$$A = A_0 e^{\lambda T}$$

$$A = 1,16 \; x \; 10^{8} \; \frac{nucleos}{seg} e^{(5 \; x \; 10^{-8})} dias^{-1} \; (1000 \; dia$$

$$A = 7,81 \; x \; 10^{5} \text{ núcleos/seg}$$

$$A = 7,81 \; x \; 10^{5} \; Bq$$

6.4. Ley de Newton enfriamiento

La ley de Newton de enfriamiento asegura que, la rapidez a la que un cuerpo se enfría es proporcional a la diferencia de temperatura entre el cuerpo y su entorno, siempre que la diferencia de temperatura no sea demasiado grande. Mediante cálculo el siguiente modelo puede ser deducido a partir de esta ley.

Si es la diferencia inicial de temperatura entre un cuerpo y su entorno tiene temperatura entonces la temperatura del cuerpo en el tiempo está modelada por la función

$$T\,(t) = T_1 + D_0 e^{-kt}$$

donde k es una constante positiva que depende del tipo de cuerpo.

Ejemplo ilustrativo 27. Una taza de té tiene una temperatura de 150 °F y se coloca en una habitación que tiene una temperatura de 50 °F. Después de 15 minutos la temperatura del té es 100 °F.

a. Encuentre una función que modele la temperatura del té en el tiempo t.
b. Encuentre la temperatura del té después de 20 minutos.
c. ¿Cuándo se habrá enfriado el té a 60 °F?
d. Haga una gráfica de la función de temperatura.

a. La temperatura de la habitación Th =50 °F es y la diferencia inicial de la temperatura es

D0 = 150 - 50
D0 = 100 °F

Por la Ley de Newton de enfriamiento, la temperatura después de t minutos está modelada con la función

T (t) = 50 + 100e -kt

Ahora encontremos la constante **k** de la taza de té, a partir del hecho de que cuando **t = 15** minutos la temperatura **T(15) = 100 °F**, entonces

$$T(t) = 50 + 100e^{-kt}$$
$$100 = 50 + 100e^{-kt}$$
$$50 = 100e^{-15k}$$
$$100^{-15k} = 50$$
$$e^{-15k} = \frac{1}{2}$$
$$-15k = \ln\frac{1}{2}$$
$$k = -\frac{1}{15}\left(\ln\frac{1}{2}\right)$$
$$k = 0.046$$

Sustituimos el valor de k

T (t) = 50 + 100e -kt
T(t) = 50 + 100e -0-046t

b. Utilizamos la función que encontramos en el literal a) con un tiempo t = 20

$$T(t) = 50 + 100e^{-0.046t}$$
$$T(20) = 50 + 100e^{-0.046(20)}$$
$$T(20) = 89.85\ \text{°F}$$

c. Utilizamos la función que encontramos en el literal a) con un tiempo T (t) = 60 **°F** y despejamos t

Índice
Primer bimestre
Segundo bimestre
Solucionario
Referencias bibliográficas

$$T(t) = 50 + 100e^{-kt}$$
$$60 = 50 + 100e^{-0.046t}$$
$$10 = 100e^{-0.046t}$$
$$\frac{1}{10} = e^{-0.046t}$$
$$e^{-0.046t} = \ln\frac{1}{10}$$
$$-0.046.t = \ln\frac{1}{10}$$
$$t = 50\,min$$

El té se habrá enfriado después de 50 minutos

d. La gráfica

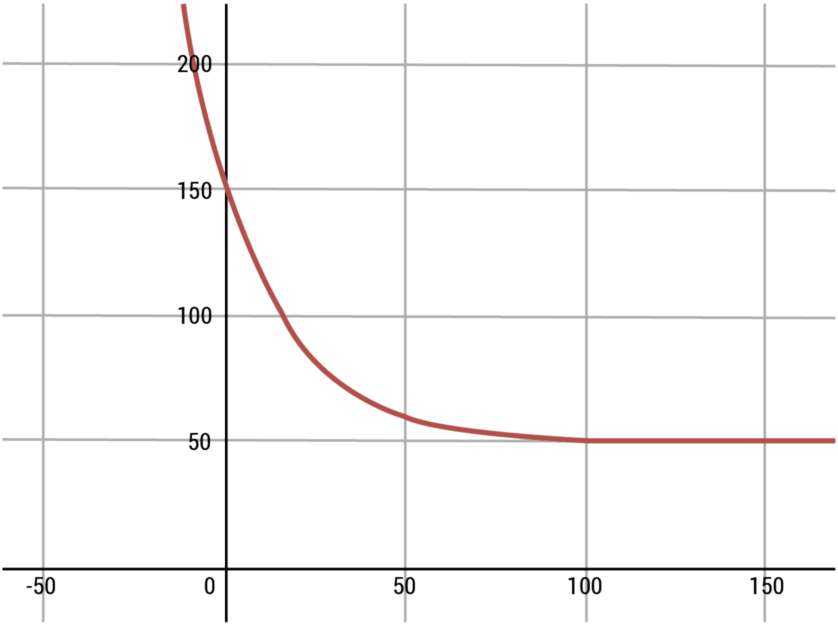


Imagen 18. Gráfica de la función **T(t) = 50 + 100e** $^{-kt}$:

Recursos de aprendizaje

Para comprender de mejor manera la modelación con ecuaciones exponenciales le invito a que:

- Lea el texto básico páginas 370-374.
- Habilite el hipervínculo y mire atentamente el video sobre el modelado y la resolución de problemas, en Resolución de problemas con funciones exponenciales.

Retroalimentación

En el video podemos observar cómo se resuelven problemas aplicando funciones exponenciales. En el texto básico, se cuenta con algunas explicaciones y muchos problemas resueltos.

Actividades de aprendizaje recomendadas

Para profundizar sus conocimientos:

- Resuelva y explique los problemas del impares del 1 al 28, página 379-381 del texto básico.

> **Recuerde que:**
>
> A través del chat de tutoría y consultas puede aclarar sus dudas e inquietudes con su docente.

Lo estás haciendo muy bien

¡Sigue adelante!

Índice
Primer bimestre
Segundo bimestre
Solucionario
Referencias bibliográficas

Semana 14

Sistematización del crecimiento exponencial y el tiempo de duplicación.

Con la finalidad de prepararnos para la evaluación parcial de esta semana, se recomienda sistematizar lo estudiado en la unidad de Modelado con funciones.

Primero, recordando que: Si el tamaño inicial de una población es $\mathbf{n_0}$ y el tiempo de duplicación es entonces el tamaño de la población en el tiempo ***t*** es

$$n(t) = n_0 t^{\frac{t}{a}}$$

Donde **a y t** se miden en las mismas unidades de tiempo (minutos, horas, días, años, etc.)

Para comprender este proceso resolvamos los ejercicios suficientes para aclarar y alcanzar experticia en la interpretación del modelado.

6.5. Sistematización del crecimiento exponencial y tasa de crecimiento relativa

En cuanto al crecimiento exponencial y la tasa de crecimiento relativa se recomienda que usted considere que una población que experimenta un crecimiento exponencial aumenta de acuerdo con el modelo:

$$n(t) = n_0 e^{rt}$$

Al respecto, se debe considerara que la fórmula para el crecimiento poblacional es la misma que para el interés capitalizado continuamente. Sobre este concepto, se recomienda desarrollar suficientes ejercicios para su estudio.

6.6. Sistematización de la desintegración radioactiva

Las sustancias radiactivas se desintegran al emitir radiación espontáneamente. La rapidez de desintegración es proporcional a la masa de la sustancia. Esto es similar al crecimiento poblacional excepto que la masa decrece. Los físicos expresan la rapidez de desintegración en términos de vida media (Stewart, Redlin, y Watson, 2017, p. 375). En general para una sustancia radioactiva con masa **mo** y vida media **h** , la cantidad restante en el tiempo **t** está modelado por

$$m(t) = m_0 2^{-\frac{t}{h}}.$$

Sobre estos conceptos conviene puntualizar que, para expresar este modelo en la forma $\mathbf{m\ (t) = m_0 e^{rt}}$, necesitamos encontrar la tasa relativa de desintegración **r** .

6.7. Sistematización de Ley de Newton de enfriamiento

La ley de Newton de enfriamiento dice que la rapidez a la que un cuerpo se enfría es proporcional a la diferencia de temperatura entre el cuerpo y su entorno, siempre que la diferencia de temperatura no sea demasiado grande. Mediante cálculo el siguiente modelo puede ser deducido a partir de esta ley.

Si $\mathbf{D_0}$ es la diferencia inicial de temperatura entre un cuerpo y su entorno tiene temperatura $\mathbf{T_0}$ entonces la temperatura del cuerpo en el tiempo **t** está modelada por la función

$$T(t) = T_1 + D_0 e^{-kt}$$

donde **k** es una constante positiva que depende del tipo de cuerpo.

Recursos de aprendizaje

Para comprender de mejor manera la modelación con ecuaciones exponenciales le invito a que:

- Lea el texto básico y realice una síntesis de las páginas 370-374.
- Habilite el hipervínculo y mire atentamente el video sobre el modelado aplicando funciones exponenciales y logarítmicas, ingresando Aplicaciones de la función exponencial y logarítmica.

Retroalimentación

En el video podemos observar cómo se resuelven problemas aplicando funciones exponenciales y logarítmicas, ilustraciones válidas para su aprendizaje, mientras que, en el texto básico, se proponen suficientes problemas desarrollados y otros planteados para su estudio.

Actividades de aprendizaje recomendadas

Para profundizar sus conocimientos:

- Resuelva y explique los problemas pares del 1 al 28, página 379-381 del texto básico.

Recuerde que:

A través del chat de tutoría y consultas puede aclarar sus dudas e inquietudes con su docente.

Lo estás haciendo muy bien

¡Sigue adelante!

Autoevaluación

Estimado estudiante, luego de culminar con el estudio de las **Modelado con funciones exponenciales**, es recomendable que usted realice la autoevaluación de lo aprendido en la unidad, para luego retroalimentar con ayuda de su tutor, aquellas inquietudes más importantes que le causaron dificultad.

Instrucción: Marque la alternativa correcta, en caso que no acierte, usted debe seguir intentando previa la respectiva retroalimentación interactiva.

Autoevaluación 6

1. Cierto cultivo de bacterias *Streptococcus A* inicialmente tiene 10 bacterias y se observa que se duplica cada 1.5 horas. Encuentre un modelo exponencial n (t) - n0 2 t/a para el numero de bacterias en el cultivo después de t horas; Estime el número de bacterias después de 35 horas; **¿Después de cuantas horas llegara a 10 000 el número de bacterias?.**

   a. El modelo es n(t) = 10 [2(1/3.5h)], el número de bacterias después de 35 horas es 1,056x109.
   b. El modelo es n(t) = 10 [2(1/2h)], el número de bacterias después de 35 horas es 10.56x107.
   c. El modelo es n(t) = 2 [10(1/1.5h)], el número de bacterias después de 35 horas es 10.56x106.

2. Población de aves. Cierta especie de aves fue introducida en un condado hace 25 años. Los biólogos observan que la población se duplica cada 10 años, y ahora la población es de 13000. ¿Cuál fue el amaño inicial de la población de aves?; Estime la población de aves dentro de 5 años después del día de hoy.

   a. El amaño inicial de la población de aves es 3 298, dentro de 5 años después del día de hoy es 17 384 aves.
   b. El amaño inicial de la población de aves es 2 298 , dentro de 5 años después del día de hoy es 18 384 aves.
   c. El amaño inicial de la población de aves es 4 298, dentro de 5 años después del día de hoy es de 19 384 aves

3. Cultivo de bacterias. Se observa que cierto cultivo de bacterias tiene una tasa y crecimiento relativa de 12% por hora, pero en presencia de un antibiótico la tasa de crecimiento relativa se reduce a 5% por hora. El numero inicial en el cultivo es 22. Encuentre la población proyectada después de 24 horas para las siguientes condiciones: No hay antibiótico presente; Está presente un antibiótico en el cultivo.

   a. La población proyectada en 24 horas sin antibiótico es de 134 bactrias con antibiótico 51 bacterias.
   b. La población proyectada en 24 horas sin antibiótico es de 234 bacterias con antibiótico 61 bacterias.
   c. La población proyectada en 24 horas sin antibiótico es de 334 bacterias con antibiótico 71 bacterias.

4. Población de ranas. Se introdujeron algunas ranas mugieras en un pequeño estanque. La gráfica muestra la población de estas ranas para los siguientes pocos años. Suponga que la población crece exponencialmente. ¿Cuál era la población inicial de ranas mugidoras?; Encuentre una función que modele la población de estas ranas t años desde que las ranas fueron puestas en el estanque; **¿Cuál es la población proyectada de ranas mugidoras después de 15 años?**; Estime cuánto tiempo le tomara a la población llegar a 75000.

   a. La población inicial de ranas mugidoras era 100, la función que modele la población es n(t) = 1000* e t/2.466, la población proyectada de ranas mugidoras después de 15 años es 43789 y el tiempo le tomara a la población llegar a 75 000 ranas es 16.32 años.

   b. La población inicial de ranas mugidoras era 200, la función que modele la población es n(t) = 1000* e t/2.466, la población proyectada de ranas mugidoras después de 15 años es 43789 y el tiempo le tomara a la población llegar a 75 000 ranas es 16.32 años.

   c. La población inicial de ranas mugidoras era 300, la función que modele la población es n(t) = 1000* e t/2.466, la población proyectada de ranas mugidoras después de 15 años es 43789 y el tiempo le tomara a la población llegar a 75 000 ranas es 16.32 años.

5. Población mundial. La población mundial era de 7.1 miles de millones en 2013, y la tasa de crecimiento observada relativa era de 1.1% al año. ¿En qué año se habrá duplicado la población?; ¿En qué año se habrá triplicado la población?.

   a. Se habrá duplicado la población en el año 2056 y se habrá triplicado la población en el 2111.
   b. Se habrá duplicado la población en el año 2066 y se habrá triplicado la población en el 2112.
   c. Se habrá duplicado la población en el año 2076 y se habrá triplicado la población en el 2113.

6. Radio radiactivo. El radio 221 tiene una vida media de 30s. Cuanto tiempo tomara que el 95% de la muestra se desintegre? 2 minutos 9.66 segundos.

   a. Se tomará un tiempo de 2 minutos 9.66 segundos.
   b. Se tomará un tiempo de 3 minutos 9.66 segundos.
   c. Se tomará un tiempo de 4 minutos 9.66 segundos.

7. Determinación de antigüedad por carbono 14. Se estima que la tela para el entierro de una momia egipcia contiene 59% del carbono 14 que contenía originalmente. ¿Cuánto tiempo hace que la momia fue enterrada? (La vida media del carbono 14 es de 5 730 años).

   a. La momia fue enterrada hace 3361,75 años.
   b. La momia fue enterrada hace 4361,75 años.
   c. La momia fue enterrada hace 5361,75 años.

8. Ebullición de agua. Una tetera llena de agua se pone a hervir en un cuarto con una temperatura de 20ºC. Después de 15 minutos la temperatura del agua ha descendido de 100ºC a 75ºC. Encuentre la temperatura después de otros 10 minutos. Ilustre mediante una gráfica la función de la temperatura.

   a. La temperatura después de otros 10 minutos es 420C.
   b. La temperatura después de otros 10 minutos es 520C.
   c. La temperatura después de otros 10 minutos es 620C.

9. Concentración de iones en vino. Las lecturas de pH para vinos varían de 2.8 a 3.8. Encuentre la variación correspondiente de concentraciones de iones de hidrógeno.

   a. La variación correspondiente de concentraciones de iones de hidrogeno es 1.422 * 10-3 M.
   b. La variación correspondiente de concentraciones de iones de hidrogeno es 2.422 * 10-3 M.
   c. La variación correspondiente de concentraciones de iones de hidrogeno es 3.422 * 10-3 M.

10. pH de la saliva. El pH de la saliva esta normalmente en el rango de 6.4 a 7.0. Sin embrago, cuando una persona está enferma, su saliva se vuelve más ácida. Cuando Marco se enferma prueba el pH de su saliva y descubre que es 5.5. ¿Cuál es la concentración de iones de hidrogeno de su saliva?; La concentración de iones de hidrógeno en la saliva de Marco. Aumentará o disminuirá conforme mejora; Después de que se recupera Marco prueba el pH de su saliva y es 6.5. ¿Era la saliva más acida o menos acida cuando estaba enfermo?.

a. La concentración de iones de hidrogeno de su saliva es 2.16 * 1C -6M, la concentración de iones de hidrógeno en la saliva de Marco, conforme mejora disminuye y es menos ácida.

b. La concentración de iones de hidrogeno de su saliva es 3.16 * 10 -6M, la concentración de iones de hidrógeno en la saliva de Marco, conforme mejora disminuye y es menos ácida.

c. La concentración de iones de hidrogeno de su saliva es 4.16 * 1C0-6M, la concentración de iones de hidrógeno en la saliva de Marco, conforme mejora disminuye y es menos ácida.

Ir al solucionario

Índice
Primer bimestre
Segundo bimestre
Solucionario
Referencias bibliográficas

Índice
Primer bimestre
Segundo bimestre
Solucionario
Referencias bibliográficas

Semana 15

Unidad 7. Escalas Logarítmicas

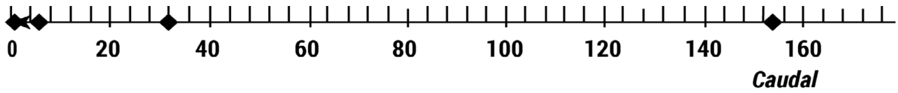
- *La escala pH*
- *La escala Ritcher*
- *La escala de decibeles*

Cuando una cantidad física varía con un margen muy grande, a veces es conveniente tomar su logaritmo para tener un conjunto de números más manejable. Lo esencial es considerar que, en una escala logarítmica, los números se representan con sus logaritmos.

Ejemplo ilustrativo 28. Supongamos que en un eje queremos representar los caudales de varios cauces y disponemos de los datos que aparecen a continuación, ya ordenados de menor a mayor, desde un arroyo con 16 litros/s hasta un gran río con 154 m^2/s.

Caudal (m^3/s)
0.016
0.07
0.28
1.25
6.1
32
154

Si representamos estos datos en una escala aritmética (un papel cuadriculado normal) quedará algo tan poco expresivo como esto:

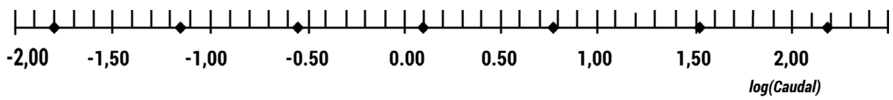


Los cuatro primeros están amontonados encima del 0, de modo que no sería válido si queremos que aparezcan todos los valores.

Probamos otra estrategia: calculamos los logaritmos de los caudales, y los representamos de nuevo en un papel milimetrado corriente.

El resultado será el siguiente:

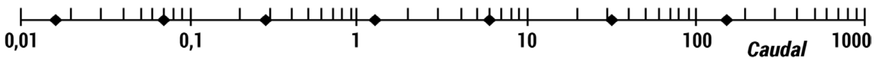
Caudal (m3/s)	Log Caudal (m3/s)
0.016	-1,8
0.07	-1,15
0.28	-0,55
1.25	0,10
6.1	0,79
32	1,51
154	2,19



Ahora los puntos aparecen bien diferenciados, pero, además de la molestia de tener que calcular los logaritmos, el observador no capta los valores:

¿cómo podemos adivinar que el punto situado en 1,50 en realidad se refiere a un caudal de 32 m^3/s?

La solución es representar los puntos en una escala logarítmica: no es preciso calcular nada, nosotros situamos en la escala los valores de los caudales, pero lo que determina su posición son los logaritmos de los caudales:



Observamos que, efectivamente, la situación relativa de los puntos en las dos últimas escalas que hemos dibujado es idéntica.

Por tanto, representar puntos en una escala logarítmica es equivalente a representar los logaritmos de esos valores en una escala milimetrada normal (Sánchez F. s.f. pág. 1.).

7.1 La escala pH

La escala de pH mide el grado de acidez de un objeto. Los objetos que no son muy ácidos se llaman básicos.

La escala tiene valores que van del cero (el valor más ácido) al 14 (el más básico). Tal como se puede observar en la escala de pH, el agua pura tiene un valor de pH igual a 7.

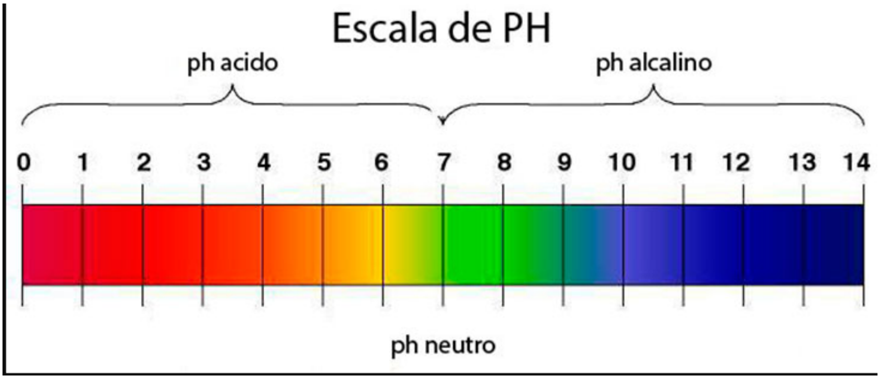


Imagen Escala ph.
Fuente: Experimentos científicos.es

$$Ph = - \log [H^+]$$

Donde $[H^+]$ es la concentración de iones de hidrógeno medida en moles por litro (M)
Con el pH, podemos manejar grandes cifras, de manera sencilla.

Ejemplo ilustrativo 29. Se da la concentración de un ion de hidrógeno de una muestra de cada sustancia. Calcule el pH de la sustancia.

a) Jugo de limón: $[H^+] = 5.0\, x\, 10^{-3} M$

$Ph = -\log[H^+]$

$Ph = -\log\left[5.0\, x\, 10^{-3} M\right]$

$Ph = 2,3$

Dado que es menor a 7 el jugo de limón es ácido.

b) Jugo de tomate: $[H^+] = 2.2\, x\, 10^{-4} M$

$Ph = -\log[H^+]$

$Ph = -\log\left[3.2\, x\, 10^{-4} M\right]$

$Ph = 3,49$

Dado que es menor a 7 el jugo de tomate es ácido.

7.1. La escala de Richter

En 1935 el geólogo estadounidense Charles Richter (1990-1984) definió la magnitud de un terremoto como

$$M = \log \frac{I}{S}$$

Donde **I** es la intensidad del terremoto, medido por la amplitud de la lectura de un sismógrafo tomada a 100 km del epicentro del mismo y **S** es la intensidad de terremoto estándar (cuya amplitud es 1 micrón **= 10-4 cm**)

Ejemplo ilustrativo 30. El terremoto de Japón de 2011 tuvo una magnitud de 9.1 en la escala de Richter ¿Cuántas veces más intenso fue este terremoto que el terremoto de San Francisco en 1906?.

Índice
Primer bimestre
Segundo bimestre
Solucionario
Referencias bibliográficas

$$M = \log \frac{I}{S} = 9.1$$
$$9.1 = \log x + \log 8.3$$
$$\log x = 9.1 - \log 8.3$$
$$\log x = 8,18$$
$$\log x = 8,18$$
$x = 0,9$ veces más intenso

Recursos de aprendizaje

Para comprender de mejor manera las escalas logarítmicas le invito a que:

- Lea el texto básico páginas 381-387.
- Habilite los hipervínculos y mire atentamente los videos de: KhanAcademicEspañol. (s.f). Escala logarítmica

Retroalimentación

Este video nos facilita la compresión de lo que significa una escala logarítmica, mientras que en el texto básico aparecen muchos ejercicios resueltos para facilitar la comprensión de los conceptos y se proponen algunos problemas para que usted puede ejercitarse en la resolución, previo a las evaluaciones parciales y se fin del periodo académico ordinario.

Índice
Primer bimestre
Segundo bimestre
Solucionario
Referencias bibliográficas

Actividades de aprendizaje recomendadas

Para profundizar sus conocimientos:

- Resuelva y explique los problemas del 89 al 108, página 390 del texto básico.

> **Recuerde que:**
>
> A través del chat de tutoría y consultas puede aclarar sus dudas e inquietudes con su docente.

Lo estás haciendo muy bien

¡Sigue adelante!

Autoevaluación

Estimado estudiante, luego de culminar con el estudio de las **Escalas logarítmicas**, es recomendable que usted realice la autoevaluación de lo aprendido en la unidad, para luego retroalimentar con ayuda de su tutor, aquellas inquietudes más importantes que le causaron dificultad.

Instrucción: Marque la alternativa correcta, en caso que no acierte, usted debe seguir intentando previa la respectiva retroalimentación interactiva.

Autoevaluación 7

1. ( ) En una escala logarítmica, los números, se representan con sus logaritmos.
2. ( ) La escala pH mide la acidez de una solución.
3. ( ) La escala de Richter mide la intensidad de la luz.
4. ( ) La escala de decibeles mide la intensidad del sonido.
5. ( ) La sensibilidad que presenta el oído humano a las variaciones de intensidad sonora sigue una escala aproximadamente logarítmica, no lineal.
6. ( ) El modelo de la escala pH es pH = -log $[H^+]$.
7. ( ) El modelo de la escala Richter es M = log 1/s.
8. ( ) El modelo de la escala de decibeles es B = 10.log 1/ I0.
9. ( ) Una **escala** logarítmica arbitraria que asigna un número para cuantificar la energía liberada en un terremoto, denominada así en honor del sismólogo estadounidense Charles **Richter.**
10. ( ) La sensación sonora en decibelios correspondiente a una onda de intensidad 10^{-10} W×m^{-2} (Intensidad umbral 10^{-12} W×m^{-2}) es 20 db.

Ir al solucionario

Índice
Primer bimestre
Segundo bimestre
Solucionario
Referencias bibliográficas

Actividades finales del bimestre

Semana 16

Actividad 1. Recupere las actividades de aprendizaje calificadas desarrolladas durante el primer bimestre y que no fueron entregadas.

Actividad 2. Organice un documento que contenga dicha información cuidando la presentación; si lo hizo a mano, puede fotografiar y organizar un documento en PDF.

Actividad 3. Suba el archivo del documento al EVA caso de ser necesario; este documento le servirá de apoyo para preparar su evaluación presencial en esta semana.

Actividad 4. Revise los contenidos del primer bimestre y participe de la evaluación presencial.

Para ello considere:

- Su diario de notas.
- Actividades de aprendizaje recomendadas.
- Actividades de aprendizaje calificadas.
- Actividades de aprendizaje interactivas; y,
- Evaluaciones parciales.

4. Solucionario

Autoevaluación 1	
Pregunta	**Respuesta**
1	a
2	a
3	b
4	b
5	b
6	b
7	c
8	a
9	a
10	b

Ir a la autoevaluación

Autoevaluación 2	
Pregunta	Respuesta
1	c
2	b
3	c
4	b
5	a
6	b
7	c
8	a
9	c
10	a

Ir a la autoevaluación

Índice
Primer bimestre
Segundo bimestre
Solucionario
Referencias bibliográficas

Autoevaluación 3	
Pregunta	**Respuesta**
1	b
2	c
3	b
4	b
5	b
6	c
7	b
8	a
9	a
10	c

Ir a la autoevaluación

Índice
Primer bimestre
Segundo bimestre
Solucionario
Referencias bibliográficas

Autoevaluación 4	
Pregunta	**Respuesta**
1	b
2	c
3	b
4	b
5	c
6	c
7	b
8	a
9	a
10	c

Ir a la autoevaluación

Índice
Primer bimestre
Segundo bimestre
Solucionario
Referencias bibliográficas

Autoevaluación 5	
Pregunta	**Respuesta**
1	c
2	a
3	c
4	c
5	a
6	a
7	b
8	c
9	a
10	b

Ir a la autoevaluación

Autoevaluación 6	
Pregunta	**Respuesta**
1	a
2	b
3	c
4	a
5	c
6	a
7	b
8	c
9	a
10	b

Ir a la autoevaluación

Autoevaluación 7	
Pregunta	**Respuesta**
1	V
2	V
3	F
4	V
5	V
6	V
7	V
8	V
9	V
10	V

Ir a la autoevaluación

5. Referencias bibliográficas

Grisales, A. (2019). *Estadística descriptiva y probabilidad con aplicaciones en Excel y SPSS*. Bogota: Ecoe Ediciones

Lind, D., Marchal, W. y Wathen, S. (2015). *Estadística aplicada a los negocios y la Economía*. México: McGraw-Hill

Universitat de Valencia- Proyecto CEACES (s.f.) Números índices. Recuperado de https://www.uv.es/ceaces/numindices/clasifica.htm

UPM (2008). Aprendizaje basado en problemas. Recuperado de https://innovacioneducativa.upm.es/guias/Aprendizaje_basado_en_problemas.pdf

Salazar, C. y Del Castillo, S. (2018). *Fundamentos básicos de estadística*. Recuperado de http://www.dspace.uce.edu.ec/bitstream/25000/13720/3/Fundamentos%20B%C3%A1sicos%20de%20Estad%C3%ADstica-Libro.pdf

Webster, A. (2000). *Estadística aplicada a los negocios y la economía*. México: McGraw-Hill

Didactalia. (2012). ¿Cómo crece una población de levaduras? https://didactalia.net/comunidad/materialeducativo/recurso/como-crece-una-poblacion-de-levaduras/29e57d41-7113-4e92-bbb2-80394e864e68

IESCampus. (13 de mayo de 2013). Ecuaciones exponenciales. https://www.youtube.com/watch?v=oYrMgN4Of3M

KhanAcademicEspañol. (s. f). Escala logarítmica. https://www.youtube.com/watch?v=DBz5dsoZmw

Luque, F. (s.f.). Experimentos científicos. https://www.experimentoscientificos.es/ph/escala-del-ph/

Profe en c@sa. (s. f.). Resolución de problemas con funciones exponenciales. https://www.youtube.com/watch?v=dJf5Gw6M59g&t=10s

Profesor10demates. (28 de octubre de 2018). Ecuaciones logarítmicas TRUCOS ejercicios resueltos de exámenes. https://www.youtube.com/watch?v=bFh1YU_GfiQ

ProfeWilmer. (10 de octubre de 2017). ProfeWilmer. Interés compuesto | calcular el tiempo de una inversión usando logaritmos. https://www.youtube.com/watch?v=deBwNE8ilEA

Sánchez F. (s. f.). ¿Qué es una escala logarítmica? http://hidrologia.usal.es/Complementos/papeles_log/fundamento_log.pdf

Stewart J., Redlin L. y Watson S. (2017). Precálculo. Matemáticas para el cálculo. Séptima edición. Cengage Learning. México. D.F.

Susi Profe (s. f.). Ecuaciones Exponenciales utilizando Cambio de Variable. https://www.youtube.com/watch?v=JhENx5M2Cq4