UTPL

La Universidad Católica de Loja

Modalidad Abierta y a Distancia

Sistemas de Conocimiento de Funciones Trigonométricas y su Didáctica

Guía didáctica

UTPL

Departamento de Ciencias de la Educación

Sección departamental de Pedagogía de las Ciencias Experimentales

Sistemas de Conocimiento de Funciones Trigonométricas y su Didáctica

Guía didáctica

Autora:

Granda Sivisapa Sonia

EDUC_2147

Asesoría virtual
www.utpl.edu.ec

Sistemas de Conocimiento de Funciones Trigonométricas y su Didáctica
Guía didáctica
Granda Sivisapa Sonia

Universidad Técnica Particular de Loja

Diagramación y diseño digital:
Ediloja Cía. Ltda.
Telefax: 593-7-2611418.
San Cayetano Alto s/n.
www.ediloja.com.ec
edilojainfo@ediloja.com.ec
Loja-Ecuador

ISBN digital - 978-9942-25-815-1

7 de mayo, 2020

Índice

1. Datos de información

1.1. Presentación de la asignatura

1.2. Competencias genéricas de la UTPL

- Vivencia de los valores universales del humanismo de Cristo.
- Pensamiento crítico y reflexivo.
- Compromiso e implicación social.
- Comportamiento ético.
- Orientación a la innovación y a la investigación.
- Comunicación oral y escrita.

Índice
Primer bimestre
Segundo bimestre
Solucionario
Referencias bibliográficas

1.3. Competencias específicas de la carrera

- Integra conocimientos pedagógicos, didácticos y curriculares a través del uso de herramientas tecnológicas pertinentes que permitan interdisciplinariamente la actualización de modelos y metodologías de aprendizaje e incorporación de saberes en matemáticas y física, basados en el desarrollo del pensamiento crítico, reflexivo, creativo, experiencial y pertinentes en relación con el desarrollo de la persona y su contexto.

- Implementa la comunicación dialógica como estrategia para la formación de la persona orientada a la consolidación de capacidades para la convivencia armónica en la sociedad, la participación ciudadana, el reconocimiento de la interculturalidad y la diversidad, y la creación de ambientes educativos inclusivos en el ámbito de las matemáticas y la física, a partir de la generación, organización y aplicación crítica y creativa del conocimiento abierto e integrado en relación a las características y requerimientos de desarrollo de los contextos.

- Organiza modelos curriculares y la gestión del aprendizaje relacionados con las matemáticas y la física, centrados en la experiencia de la persona que aprende, en interacción con los contextos institucionales, comunitarios y familiares, orientados al diseño de procesos de enseñanza- aprendizaje y de evaluación que integren la práctica de investigación acción hacia producción e innovación, la interculturalidad, la inclusión, la democracia, la flexibilidad metodológica para el aprendizaje personalizado, las interacciones virtuales, presenciales y las tutoriales.

- Potencia la formación integral de la persona desde los principios del humanismo de Cristo y del Buen Vivir, basado en el desarrollo de su proyecto de vida y profesional que amplíen perspectivas, visiones y horizontes de futuro en los contextos.

1.4. Problemática que aborda la asignatura

El limitado conocimiento en el campo del modelado con funciones en general y trigonométricas en particular, no facilita la solución de los problemas del entorno natural y social, ocasionando un conocimiento teórico apartado de la realidad del estudiante.

El escaso uso de herramientas tecnológicas no permite practicar la matemática experimentalmente a través de herramientas gratuitas que están al alcance de todos, dificultando el logro de aprendizajes significativos.

A través del análisis y aplicación de la modelización con las funciones trigonométricas se aborda el objeto de estudio y naturaleza de la matemática, lo cual favorece para que esta ciencia se convierta en una herramienta primordial para el estudio de otras ciencias y un pilar para el desarrollo del pensamiento formal del estudiante.

La didáctica aplicada en la enseñanza de los conocimientos de matemática se enfoca al desarrollo de conceptos de manera teórica y textual, sin considerar que el aprendizaje deber ser experimental, partiendo de la manipulación de un material concreto, explorando detalles conceptuales que permiten plantear inquietudes, comunicando los aportes a otros estudiantes y docente, y verbalizando sus conclusiones matemáticas.

2. Metodología de aprendizaje

Con la finalidad de hacer que el estudio de la asignatura Sistemas de Conocimiento de Funciones Trigonométricas y su Didáctica, se convierta en una experiencia de aprendizaje permanente, se diseñan actividades y estrategias fundamentadas en una metodología activa, en donde los estudiantes acceden a los aspectos iniciales de la conceptualización teórica viendo micro videos y accediendo a recursos planteados en el EVA, mientras que el trabajo en contacto con el docente se convierte en un taller de aplicación dando el enfoque experimental en esta segunda parte de tal manera que, se consolidan los aprendizajes de manera experimental, apoyado en videoconferencias semanales que serán grabadas para aquellos estudiantes que no pudieron participar en línea.

Aunque no existe un procedimiento único, lo esencial para el estudio de este curso es la utilización del texto básico y micro videos, apoyados de otros recursos como los cuestionarios interactivos y las infografías; anticipando el estudio de los aspectos teóricos que serán consolidados luego, con la práctica experimental al momento de desarrollar los aportes, principalmente cuantificados, contando con la presencia física del profesor en algunos casos y casi siempre a través de videoconferencias, fomentando el trabajo colaborativo en función de los distintos estilos de aprendizaje y enfocados a lograr resultados de aprendizaje que orientan el desarrollo de las competencias. En cada concepto, se partirá de la manipulación de material concreto para luego llegar a la debida exploración que permite observar situaciones de aprendizaje que posibilitan la comunicación entre compañeros y el profesor, finalizando con la verbalización en los escritos de aportes y conclusiones, todo este procedimiento relacionado con una metodología activa ABP. Para profundizar sobre los fundamentos que orientan esta metodología de aprendizaje, la invitación para acceder a través de metodología activa ABP.

3. Orientaciones didácticas por resultados de aprendizaje

Primer bimestre

Resultado de aprendizaje 1

Determina las funciones trigonométricas a través del método de la circunferencia o del triángulo rectángulo para modelar y resolver problemas cotidianos.

Contenidos, recursos y actividades de aprendizaje

Estimado estudiante, bienvenido al curso de: **Sistemas de conocimiento de Funciones Trigonométricas y su Didáctica.**

A continuación, comparto con usted las orientaciones necesarias para lograr el resultado de aprendizaje planteado en este bimestre, con este propósito para cada semana se dará a conocer los contenidos a estudiar, los recursos, las actividades de aprendizaje recomendadas y las actividades de aprendizaje evaluadas. Es importante que realice TODAS las actividades de aprendizaje propuestas en el plan docente, con la ayuda de su texto base y la presente guía, todo esto lo capacitará para rendir sus evaluaciones de forma satisfactoria.

Semana 1

Unidad 1. Funciones trigonométricas: método de la circunferencia unitaria

Estimada(o) profesional en formación, es momento de continuar sustentando el campo científico de su carrera a través del estudio de las funciones trigonométricas. Esta unidad corresponde a la sección 5.1 de su texto base.

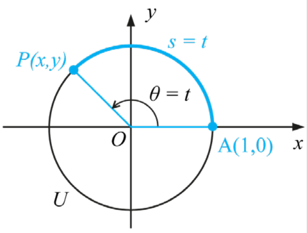
1.1. La circunferencia unitaria

Iniciamos considerando las funciones trigonométricas cuyo dominio están formados por números reales y no por ángulos Para realizar la transición de ángulos a números reales debemos reconocer que a cada número real ***t*** corresponde un ángulo que mide ***t*** radianes. Esta correspondencia se puede representar gráficamente con un círculo de radio 1 y centro en el origen en un sistema de coordenadas rectangulares.

Índice
Primer bimestre
Segundo bimestre
Solucionario
Referencias bibliográficas

Índice
Primer bimestre
Segundo bimestre
Solucionario
Referencias bibliográficas

Figura 1



- La circunferencia es la gráfica de la ecuación $x^2+y^2=1$.
- t es un número real tal que $0<t<2\pi$
- θ el ángulo en posición estándar , de medida t en radianes.
- $P(x,y)$ es el punto de intersección del lado terminal de θ y la circunferencia unitaria U.
- s es la longitud del arco de circunferencia de $A(1,0)$ a $P(x,y)$.
- $s=r\theta$ es la longitud de un arco de circunferencia.
- t puede ser considerada como la medida en radianes del ángulo θ o como la longitud del arco de circunferencia AP en U
- Para hallar los valores de funciones trigonométricas de números reales con una calculadora, usamos el modo de radianes.

Figura 1. Punto terminal y circunferencia unitaria.
Fuente: Swokowski y Cole. (2009)

La figura muestra la representación gráfica del punto terminal y la circunferencia unitaria, se hace una descripción detallada de sus propiedades, las que le serán útiles en el aprendizaje de las funciones trigonométricas de números reales.

1.1.1. Puntos terminales en la circunferencia

El punto ***P (x,y)*** marcado en la Figura 2. se denomina punto terminal determinado por el número real ***t***.

Figura 2

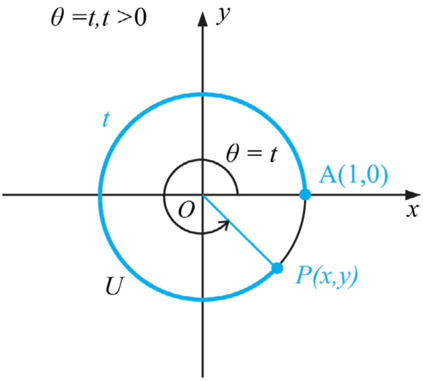


Figura 2. Punto terminal determinado por el número real
Fuente: Swokowski y Cole. (2009).

En la Figura 2. usted observa un número real cualquiera ***t*** no negativo ubicado en la circunferencia unitaria, fundamental para el aprendizaje de las funciones trigonométricas de números reales.

> Considere que el ángulo ***θ*** de medida ***t*** en radianes ha sido generado al girar el segmento de recta ***O A*** alrededor de ***O*** en la dirección contraria al giro de las manecillas de un reloj, entonces ***t*** es la distancia a lo largo de ***U*** que ***A*** viaja antes de llegar a su posición final ***P (x,y)***.

1.1.2. El número de referencia

Le planteo usar la idea del número de referencia para ayudarse a encontrar puntos terminales, ya que ,para encontrar un punto terminal en cualquier cuadrante sólo necesitamos conocer el punto terminal correspondiente en el primer cuadrante.

El número de referencia ***t*** asociado con ***t*** es la distancia más corta a lo largo de la circunferencia unitaria entre el punto terminal determinado por ***t*** y el eje ***x***. Siempre que sea un número real.

Recursos de aprendizaje

Estimado estudiante, para una mejor comprensión de este tema introductorio es necesario que lea su texto base sobre el contenido correspondiente a la circunferencia unitaria, puntos terminales y números de referencia.

Retroalimentación: Al iniciar el estudio de las funciones trigonométrica: método de la circunferencia unitaria, los autores, (Stewart, Redlin y Watson, 2017) explican las propiedades de la circunferencia unitaria, las mismas que usted puede interiorizar en lo expuesto en la Figura 1 y demás definiciones dadas en esta sección de la presente guía**.**

Índice
Primer bimestre
Segundo bimestre
Solucionario
Referencias bibliográficas

Actividades de aprendizaje recomendadas

Para afianzar sus conocimientos introductorios a las funciones trigonométricas le recomiendo desarrollar la siguiente actividad:

1. Complete las siguientes proposiciones:

    a. Sea ***P (x,y)*** el punto terminal en la circunferencia unitaria determinada por ***t***. Entonces **sin *t*** =_____,**cos *t*** = _____ y ***tan tan t*** = _____,

    b. Si ***P (x,y)*** está en la circunferencia unitaria, entonces $x^2 + y^2$ = _____. Así, para toda ***t*** tenemos $\sin^2 t + \cos^2 t$ = _____.

2. Encuentre la coordenada faltante de ***P***, usando el hecho de que ***P*** se encuentra en la circunferencia unitaria en el cuadrante dado.

Coordenadas	Cuadrante
$P\left(-\frac{3}{5},\ \right)$	*III*

3. Encuentre el punto terminal ***P (x,y)*** en la circunferencia unitaria, determinado por el valor de ***t***. ***t*** = ***4π***

Con la solución de esta actividad, usted pudo evidenciar su aprendizaje acerca de la circunferencia unitaria, de haber existido alguna dificultad es necesario que revise una vez más su texto base y así lograr los resultados de aprendizaje esperados.

Recuerde que:
A través del chat de tutoría y consultas puede aclarar sus dudas e inquietudes con su docente.

"Detrás de los sueños siempre hay esfuerzos que la gente no ve."
¡Siga adelante!

Contenidos, recursos y actividades de aprendizaje

Estimado estudiante, en la semana anterior iniciamos con el estudio de las funciones trigonométricas, haciendo hincapié en la circunferencia unitaria, con lo que usted está preparado para estudiar el siguiente tema.

Semana 2

1.2. Funciones trigonométricas de números reales

1.2.1. Las funciones trigonométricas

Haciendo uso de las propiedades de la circunferencia unitaria se procede a definir el valor de una función trigonométrica de un número real ***t*** como el valor del ángulo de ***t*** radianes, siempre que ese valor exista.

Hemos revisado como se asocia cada número real ***t***, a un punto único ***P (x,y)*** en ***U***. Recuerde, a ***P (x,y)*** lo llamamos **punto sobre la circunferencia unitaria *U* que corresponde a *t*.** Las coordenadas ***(x,y)*** de ***P*** se pueden usar para hallar las seis funciones trigonométricas

Índice
Primer bimestre
Segundo bimestre
Solucionario
Referencias bibliográficas

Índice
Primer bimestre
Segundo bimestre
Solucionario
Referencias bibliográficas

de ***t***. Entonces, por la definición de las funciones trigonométricas de números reales junto con la definición de las funciones trigonométricas de cualquier ángulo, vemos que:

Definición de las funciones trigonométricas			
$\cos t$	$\cos\theta = \frac{x}{r} = \frac{x}{1} = x$	$\csc t$	$\csc\theta \quad \frac{1}{y} \quad (y \neq 0)$
$\operatorname{sen} t$	$\operatorname{sen}\theta = \frac{y}{r} = \frac{y}{1} = y$	$\sec t$	$\sec\theta = \frac{1}{x} \quad (x \neq 0)$
$\tan t$	$\tan t \quad = \frac{y}{x} \quad (x \neq 0)$	$\cot t$	$\cot\theta = \frac{x}{y} \quad (y \neq 0)$

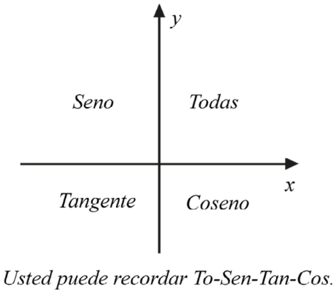
Figura 3. Definición de las Funciones Trigonométricas.
Fuente: Stewart, Redlin y Watson, (2017), p.409
Elaboración: Granda S., (2020)

En esta tabla usted puede apreciar las razones que determinan las funciones trigonométricas en el círculo unitario, también conocidas con el nombre de **funciones circulares,** estas razones le ayudarán a determinar el valor de cualquier función trigonométrica de un número ***t***.

1.2.2. Valores de las funciones trigonométricas

Los valores de las funciones trigonométricas para cualquier número real t podrán ser calculados si previamente se determinan sus signos, los que dependen del cuadrante en el que se encuentre el punto terminal de ***t***. Estos signos se explican seguidamente.

Tomando en cuenta el **nemónico** de su texto guía usted podrá recordar los signos de las funciones trigonométricas de acuerdo a la siguiente figura:



Funciones	CUADRANTES			
	I	*II*	*III*	*IV*
	To	Sen	Tan	Cos
sen	+	+	−	−
cos	+	−	−	+
tan	+	−	+	−
cot.	+	−	+	−
sec	+	−	−	+
csc	+	+	−	−

Figura 4. Signos de las Funciones Trigonométricas
Fuente: Stewart, Redlin y Watson, (2017), p.412
Elaboración: Granda S., (2020)

Esta figura expresa cómo varían los signos de las funciones trigonométricas alrededor de la circunferencia unitaria, en sentido contrario a las manecillas del reloj, en cada cuadrante, entender los signos le ayudará a usted querido estudiante, a determinar el signo correcto de una función trigonométrica en cualquier posición de la circunferencia unitaria.

A continuación procedo a explicarle los pasos para determinar los valores de las funciones trigonométricas de cualquier número real por medio de algunos ejemplos, le recomiendo analizar e interiorizar cada uno de ellos.

EJEMPLO MODELO

Enunciado: Encuentre el valor exacto de la función trigonométrica en el número real dado. $\frac{7\pi}{6}$

i. **Encontrar el número de referencia.** Determine el número de referencia asociado con ***t*_** asociado con ***t***.

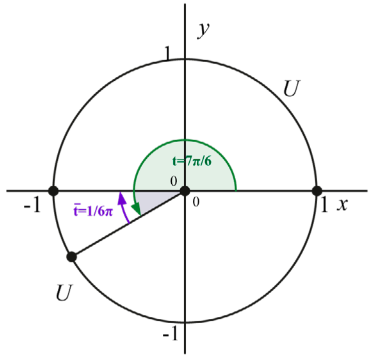
PROCESO DE RESOLUCIÓN	$\bar{t} = \frac{1}{6}\pi$
	El número de referencia para $t\,\frac{7\pi}{6}$ es $t = \frac{1}{6}\pi$ Cálculos: $\bar{t} = \frac{7\pi}{6} - \pi = \frac{7\pi - 6\pi}{6} = \frac{1}{6}\pi$

Figura 5. Proceso de Resolución.
Elaboración: Granda S., (2020)

En la figura 5 usted querido estudiante puede observar el proceso para encontrar el número de referencia como solución del problema dado, es conveniente que analice los elementos de la gráfica solución.

ii. **Encontrar el signo.** Determine el signo de la función trigonométrica de ***t*** indicando el cuadrante en el que se encuentra el punto terminal.

Como usted puede observar en la gráfica del ejemplo, el punto terminal de $t = \frac{7\pi}{6}$ está en el tercer cuadrante por lo que $sen(\frac{7\pi}{6})$ es negativo.

Índice
Primer bimestre
Segundo bimestre
Solucionario
Referencias bibliográficas

iii. **Encontrar el valor.** El valor de la función trigonométrica de ***t***. Es igual, excepto posiblemente por el signo, que el valor de la función trigonométrica de $\bar{t}$.

Ya que $\boldsymbol{sen}\left(\frac{7\pi}{6}\right) = -\frac{\pi}{6} = -\frac{1}{2}$

Podemos concluir que: $\boldsymbol{sin}\ \frac{7\pi}{6} = -\frac{1}{2}$

1.2.3. Identidades Fundamentales

Una identidad trigonométrica es una ecuación o fórmula donde intervienen funciones trigonométricas, que es válida para todos los ángulos o números reales para los cuales están definidos ambos lados de la igualdad.

Identidades fundamentales		
Identidades recíprocas	$\csc t$	$\frac{1}{\text{sen}\, t}$
	$\sec t$	$\frac{1}{\cos t}$
	$\cot t$	$\frac{1}{\tan t}$
	$\tan t$	$\frac{\text{sen}\, t}{\cos t}$
	$\cot t$	$\frac{\cos t}{\text{sen}\, t}$
Identidades de Pitágoras	$sen^2t \quad cos^2t = 1$	
	$tan^2t \quad 1 = sec^2t$	
	$1 + cot^2t + 1 = csc^2t$	

Figura 6. Identidades Fundamentales.
Fuente: Stewart, Redlin y Watson, (2017), p.415
Elaboración: Granda S., (2020)

En la figura 6 usted puede apreciar las identidades recíprocas y pitagóricas necesarias para determinar funciones trigonométricas de números reales a partir de una función dada.

RECURSOS DE APRENDIZAJE

Para comprender eficientemente las funciones trigonométricas de números reales, y que usted pueda desarrollar de forma pertinente el foro académico calificado de esta semana, recomiendo:

- Habilitar el hipervínculo y mirar atentamente el video titulado "Trigonometría. Relación entre ángulos".
- Estimado estudiante, para afianzar los conocimientos de la presente semana, es necesario que usted lea su texto básico sobre el contenido correspondiente a las funciones trigonométricas de números reales, valores e identidades fundamentales.

Retroalimentación: En este video se expone la forma cómo se calcula razones trigonométricas sin utilizar calculadora, empleando la circunferencia unitaria. Así mismo, en el texto básico usted puede acceder a los fundamentos teóricos sobre las funciones trigonométricas de números reales necesarios para la resolución de todos los ejercicios propuestos al final de la unidad.

Índice

Primer bimestre

Segundo bimestre

Solucionario

Referencias bibliográficas

Actividades de aprendizaje recomendadas

Compruebe lo aprendido resolviendo la siguiente actividad, recomiendo que adicionalmente conteste las interrogantes que se encuentran en el texto básico, no olvide ampliar su conocimiento investigando.

1. Encuentre el valor exacto de la función trigonométrica en el número real dado. $tan\,\frac{7\pi}{6}$

2. Encuentre el valor (si está definido) de cada una de las seis funciones trigonométricas en el número real dado. Use sus respuestas para completar la tabla.

$$t = 0, t = \pi, t = \frac{\pi}{2}, t = \frac{3\pi}{2}$$

t	*sen t*	*cos t*	*tan t*	*csc t*	*sec t*	*cot t*
0	0	1		**indefinido**		
$\frac{\pi}{2}$						
π			0			**indefinido**
$\frac{3\pi}{2}$						

3. Escriba la primera expresión en términos de la segunda,si el punto terminal determinado por está en el cuadrante dado.

   t*, cos cos *t*; *cuadrante II

4. Encuentre los valores de las funciones trigonométricas de t a partir de la información dada.

   $sen\ t = -\frac{4}{5}$, el punto terminal de ***t*** está en el cuadrante ***IV***.

Con el desarrollo de esta actividad, usted pudo evidenciar su aprendizaje acerca de las funciones trigonométricas de números reales, de haber existido alguna dificultad es necesario que usted revise una vez más su texto base y así lograr los resultados de aprendizaje esperados.

Recuerde que:
A través del chat de tutoría y consultas puede aclarar sus dudas e inquietudes con su docente.

Solo tendrás éxito si crees que puedes tenerlo"
¡Siga adelante!

Semana 3

1.3. Gráficas Trigonométricas

Para entender el comportamiento de una función podemos utilizar su gráfica, éstas son útiles porque pueden tomar información complicada y desplegarla de una manera fácil de leer. Por esta razón, en esta unidad usted aprenderá a trazar las gráficas de las funciones seno, coseno, tangente, cotangente, secante, cosecante y ciertas transformaciones de las mismas.

1.3.1. Gráficas de las funciones seno y coseno

Para que empiece a trazar las gráficas de las funciones seno y coseno debe tomar en cuenta los siguientes aspectos:

- Teorema en valores de función repetidos para ***sen y cos***. Si ***n*** es cualquier entero, entonces:

  - **(*t* + 2*πn*) = *t***
  - **cos cos (*t* + 2 *πn*) = cos cos *t***

- Definición de función periódica: Una función ***f*** es **periódica** si existe un número real positivo ***k***, tal que:

  - ***f* (*t* + *k*) = *f* (*t*)** para toda t en el dominio de
  - El número real positivo mínimo, si existe, es el **periodo** de

- El periodo de las funciones seno y coseno es **2π**.
- El dominio de la función seno y coseno son todos los reales.
- El rango de la función seno y coseno está en el intervalo **[-1,1]**
- Si usamos el hecho de que las funciones seno y coseno son periódicas con periodo ***2π*** se obtendrá graficas completas al continuar la misma configuración a la izquierda y a la derecha en cada intervalo subsiguiente de longitud ***2π.***
- La gráfica de la función seno es simétrica con respecto al origen.
- La grafica de la función coseno es simétrica con respecto al eje ***y***
- La función seno es una función impar.
- La función coseno es una función par.
- Como deseamos trazar estas gráficas en un plano ***xy***, sustituimos la variable ***t*** por y consideramos las ecuaciones:

  - ***y = sen x***
  - ***y = cos x***

- Podemos considerar ***x*** como la medida de cualquier ángulo en radianes, pero, en cálculo, ***x*** suele ser considerada como número real. Éstos son puntos de vista equivalentes, porque el seno (o coseno) de un ángulo de ***x*** radianes es el mismo que el seno (o coseno) del número real ***x***.
- La variable y denota el valor de la función que corresponde a ***x***.

Índice
Primer bimestre
Segundo bimestre
Solucionario
Referencias bibliográficas

- Para graficar las funciones seno y coseno debe elaborar una tabla que contenga una lista de coordenadas de varios puntos, en las gráficas de ***y* = *x*** y ***y* = *cos cos x*** para **$0 \le x \le 2\pi$.**

1.3.2. Graficas de trasformaciones de las funciones seno y coseno

Una vez que hemos aprendido a graficar las funciones seno y coseno, en esta sección consideraremos las gráficas de las ecuaciones:

- ***y* = *k* (*x* - *b*)**
- ***y* = *k* (*x* - *b*) (*k* > 0)**

Para números reales ***a* , *b* , *k* ,** amplitud **| *a* |**, periodo $\frac{2\pi}{k}$ y desplazamiento horizontal ***b***.

La idea es graficar estas funciones, las que son transformaciones de las funciones seno y coseno a partir de sus tablas de valores, para no localizar demasiados puntos. Las gráficas que se obtendrán son muy importantes para la comprensión de las aplicaciones de las funciones trigonométricas, específicamente el movimiento armónico.

Estudiaremos las transformaciones de las funciones seno y coseno considerando dos casos:

a. Caso especial ***c* = 0** y ***b* = 1**, es decir, ***y* = *a sin sin k x*** y ***y* = *a cos cos k x***.

   (*k* > 0), amplitud **| *a* |** y periodo $\frac{2\pi}{k}$

   Podemos hallar las coordenadas y de puntos sobre las gráficas si multiplicamos por las coordenadas y de puntos en las gráficas de :

   y* = *x y ***y* = *cos cos x***.

   <u>Ejemplo ilustrativo :</u> Para graficar ***y* = *x*** multiplicamos por 2 la coordenada y ***y*** de cada punto sobre la gráfica de ***y* = *x*** y obtenemos la siguiente tabla de valores.

Índice
Primer bimestre
Segundo bimestre
Solucionario
Referencias bibliográficas

VALORES DE LA FUNCIÓN ***y = x***

x	0	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{3\pi}{4}$	π	$\frac{5\pi}{4}$	$\frac{3\pi}{2}$	$\frac{7\pi}{4}$	2π
$\operatorname{sen} x$	0	0.71	1	0.71	0	-0.71	-1	-0.71	0
$2 \operatorname{sen} x$	0	1.42	2	1.42	0	-1.42	-2	-1.42	0

Figura 7.   Tabla de valores.
Elaboración: Granda S., (2020)

En esta figura puede observar la tabla de valores que se obtiene al evaluar la función ***y = x***, para esto usted debe emplear su calculadora científica en modo radianes.

Estos valores nos permiten realizar la siguiente gráfica, donde por comparación también observamos la gráfica de ***y = x***.

El procedimiento es el mismo que para estirar verticalmente la gráfica de una función cualquiera.

Gráfica de *y = x*

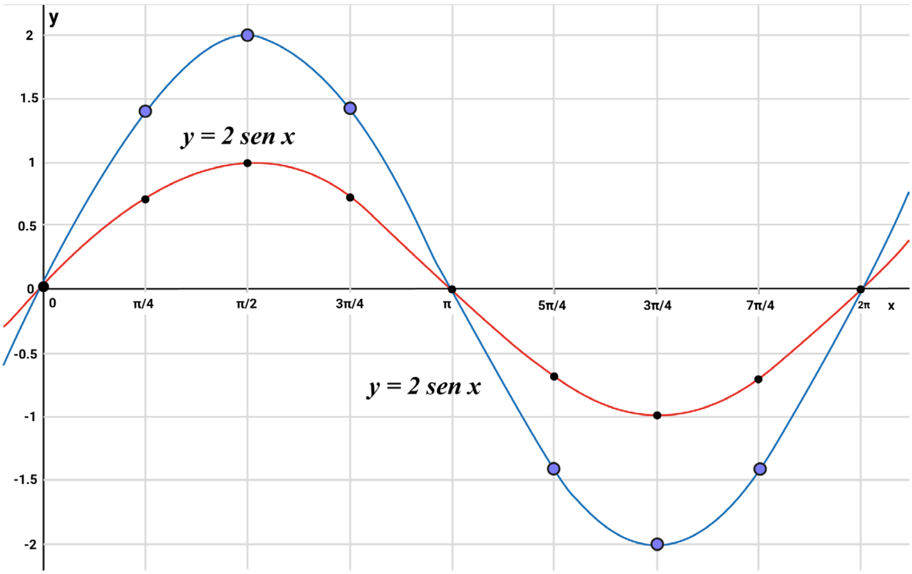


Figura 8.   Gráfica de ***y = x***.
Elaboración: Granda S., (2020)

En esta figura usted puede observar la gráfica de la función dada, donde claramente se observa sus elementos, los explico a continuación:

El número | ***a*** | se denomina **amplitud** y en nuestro ejemplo | ***a*** | = **2**

El periodo $\frac{2\pi}{k} = \frac{2\pi}{1} = 2\pi$

Entonces, hay una onda senoidal de amplitud 2 en el intervalo **[0,2 *π*]**

b. Caso: Curvas seno y coseno desplazadas. ***y*** = ***k*** **(x - *b*)**

y = ***k*** **(*x* - *b*) *k* > 0** amplitud | ***a*** |, periodo $\frac{2\pi}{k}$ y desplazamiento horizontal **b**. Intervalo para trazar la gráfica de un periodo completo $[\, b\, , b\ +\ (\frac{2\pi}{k})\,]$

Ejemplo ilustrativo: Para graficar $y\ =\ -\ 2\,(\,x\ -\ \frac{\pi}{6}\,)$ debemos desplazar la gráfica desde una distancia 2, verticalmente hacia abajo por el signo negativo, esto hace que la función original se refleje, se constituye la amplitud de la gráfica, desplazarla $\frac{\pi}{6}$, en un periodo de , y graficarla en el intervalo $\left[\frac{\pi}{6}, \frac{13\pi}{6}\right]$

Cálculos:

a. **| *a* | = | - 2 | = 2**

b. Periodo $= \frac{2\pi}{k} = \frac{2\pi}{1} = 2\pi$

c. $desface = b = \frac{\pi}{6} \quad a\ la\ derecha$

d. Intervalo para graficar un periodo completo:

$$\left[b\,,\, b + \left(\frac{2\pi}{k}\right)\right] = \left[\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{6} + \left(\frac{2\pi}{1}\right)\right] = \left[\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{6} + 2\pi\right] =$$

$$\left[\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{6} + \frac{\pi + 12\pi}{6}\right] = \left[\frac{\pi}{6}, \frac{13\pi}{6}\right]$$

Gráfica de la función seno y sus transformaciones.

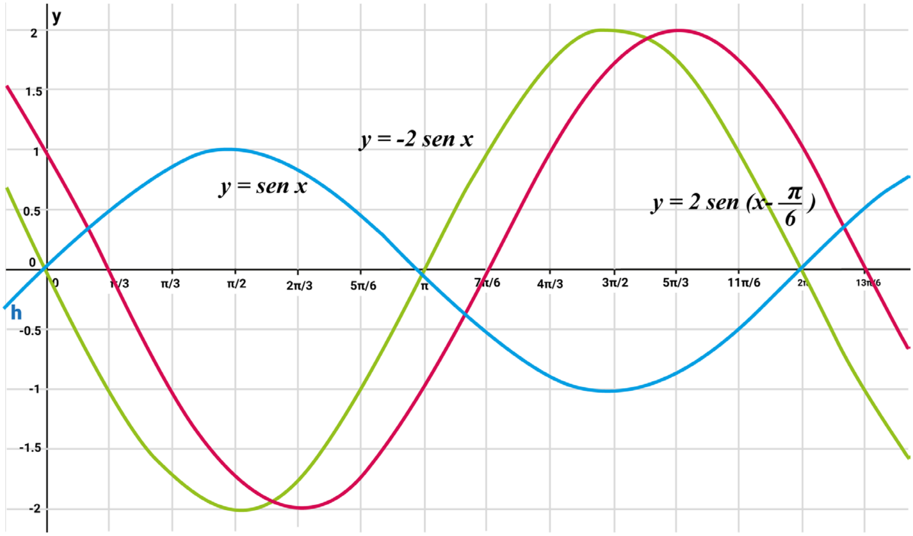


Figura 9. Gráfica de $y = -2(x - \frac{\pi}{6})$
Elaboración: Granda S., (2020)

La figura 9 muestra las transformaciones de la función seno, le recomiendo analizar la gráfica y compararlas entre sí para comprender el desplazamiento horizontal, vertical y desfase.

Valores de la función $y = -2sen(x - \frac{\pi}{6})$

Para una mejor comprensión analice la tabla de datos donde usted puede apreciar las transformaciones de la función

x	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{2\pi}{3}$	$\frac{5\pi}{6}$	π	$\frac{7\pi}{6}$	$\frac{4\pi}{3}$	$\frac{3\pi}{2}$	$\frac{5\pi}{3}$	$\frac{11\pi}{6}$	2π	$\frac{13\pi}{6}$
$y = \sin x$	0	0.5	0.87	1	0.87	0.5	0	-0.5	-0.87	-1	-0.87	-0.5	0	0.5
$y = -2\ sen\, x$	0	-1	-1.73	-2	-1.73	-1	0	1	1.73	2	1.73	1	0	-1
$y = -2\ sen\left(x - \frac{\pi}{6}\right)$	0	0	-1	-1.73	-2	-1.73	-1	0	1	1.73	2	1.73	1	0

Figura 10. Tabla de valores de $y = -2sen\left(x - \frac{\pi}{6}\right)$
Elaboración: Granda S., (2020)

Índice
Primer bimestre
Segundo bimestre
Solucionario
Referencias bibliográficas

En esta figura puede observar la tabla de valores que se obtiene al evaluar la función: $y = -2sen\left(x - \frac{\pi}{6}\right)$, para esto usted debe emplear su calculadora científica en modo radianes.

Continuando con el estudio de las funciones trigonométricas ahora le invito a aprender a trazar la gráfica de las funciones tangente, cotangente, secante y cosecante, y sus transformaciones.

1.3.3. Gráficas de las funciones tangente, cotangente, secante y cosecante

Las gráficas de las funciones muestran muchas de sus propiedades, por esta razón, para empezar a trazarlas debe tomar en cuenta los siguientes aspectos de cada una de ellas:

Resumen de Propiedades de la Función Tangente

1. $f(x) = \tan x$
2. Dominio: Todos los reales excepto los múltiplos impares de $\frac{\pi}{2}$
3. Rango: Todos los reales
4. Simétrica con respecto al origen por lo tanto es una función impar.
5. Asíntotas verticales $x = k.\left(\frac{\pi}{2}\right)$ para todos los impares enteros k
6. La función tangente tiene periodo π
7. La $f(x) = \tan x$ se aproxima al infinito cuando x se aproxima a $\frac{\pi}{2}$ por la izquierda. Se escribe $\tan x \to \infty \; cuando \; x \to \frac{\pi}{2}^{-}$
8. La $f(x) = \tan x$ se aproxima al infinito cuando x se aproxima a $-\frac{\pi}{2}$ por la derecha. Se escribe $\tan x \to -\infty \; cuando \; x \to -\frac{\pi}{2}^{+}$
9. La gráfica de $f(x) = \tan x$ tiene asíntotas verticales $x = \frac{\pi}{2}$ y $x = -\frac{\pi}{2}$

Figura 11. Propiedades de la Función Tangente.
Fuente: Stewart, Redlin y Watson, (2017), p.432.
Elaboración: Granda S., (2020)

En esta figura se muestra cada una de las propiedades de la función tangente, estas propiedades son fundamentales para que usted señor estudiante comprenda el comportamiento de la gráfica de dicha función y pueda emplearla en la solución de problemas de aplicación de las funciones trigonométricas de números reales.

Función Cotangente

Resumen de Propiedades de la Función Cotangente
1. Dominio de $f(x) = \cot x$ son todos los valores de x a excepción de $x \neq \pi n$ y $n \in \mathbb{Z}$
2. La $f(x) = \cot x$ tiene asíntotas verticales $x = \pi n$
3. El rango de $f(x) = \cot x$ son los reales $\mathbb{R}$
4. La función cotangente tiene periodo π
5. Simétrica con respecto al origen por lo tanto es una función impar.

Figura 12. Figura 12: Propiedades de la Función Cotangente.
Fuente: Stewart, Redlin y Watson, (2017), p.433.
Elaboración: Granda S., (2020)

En esta figura se muestra cada una de las propiedades de la función cotangente, estas propiedades son fundamentales para que usted señor estudiante comprenda el comportamiento de la gráfica de dicha función y pueda emplearla en la solución de problemas de aplicación de las funciones trigonométricas de números reales.

Función Secante

Resumen de Propiedades de la Función Secante

1. Dominio de $f(x) = \sec x$ son todos los valores de x a acepción de

   $x \neq \frac{\pi}{2} + \pi n$ y $n \in \mathbb{Z}$
2. La $f(x) = \sec x$ tiene asíntotas verticales $x = \frac{\pi}{2} + \pi\, n$
3. El rango de $f(x) = \sec x$ está en el intervalo $(-\infty, -1] \cup [1, \infty)$
4. La función secante tiene periodo 2π
5. Simétrica con respecto al eje y por lo tanto es una función par.

Figura 13. Propiedades de la Función Secante.
Fuente: Stewart, Redlin y Watson, (2017), p.432.
Elaboración: Granda S., (2020)

En esta figura se muestra cada una de las propiedades de la función secante, estas propiedades son fundamentales para que usted señor estudiante comprenda el comportamiento de la gráfica de dicha función y pueda emplearla en la solución de problemas de aplicación de las funciones trigonométricas de números reales.

Función Cosecante

Resumen de Propiedades de la Función Cosecante

1. Dominio de $f(x) = \csc x$ son todos los valores de x a acepción de

   $x \neq \pi\, n$ y $n \in \mathbb{Z}$
2. La $f(x) = \csc x$ tiene asíntotas verticales $x = \pi\, n$
3. El rango de $f\ x = \csc x$ está en el intervalo $(-\infty, -1] \cup [1, \infty)$
4. La función cosecante tiene periodo 2π
5. Simétrica con respecto al origen por lo tanto es una función impar.

Figura 14. Figura 14: Propiedades de la Función Cosecante.
Fuente: Stewart, Redlin y Watson, (2017), p.432.
Elaboración: Granda S., (2020)

Índice
Primer bimestre
Segundo bimestre
Solucionario
Referencias bibliográficas

En esta figura se muestra cada una de las propiedades de la función cosecante, estas propiedades son fundamentales para que comprenda el comportamiento de la gráfica de dicha función y pueda emplearla en la solución de problemas de aplicación de las funciones trigonométricas de números reales.

Finalmente, estos resúmenes le ayudarán a sistematizar los contenidos teóricos de esta unidad, por lo que, le recomiendo estudiarlos minuciosamente para su total comprensión y aplicación en la resolución de problemas de modelado con funciones trigonométricas de números reales.

1.3.4. Gráficas de transformaciones de las funciones tangente y cotangente

Los métodos que usted aprendió para graficar trasformaciones de las funciones seno y coseno se pueden aplicar a las funciones tangente y cotangente, tomando en cuenta algunas diferencias que se dan por la presencia de las asíntotas.

Para graficar las transformaciones de las funciones tangente y cotangente debe tomar en cuenta las siguientes recomendaciones:

- Para algunas gráficas de tangente y cotangente, debe empezar por trazar la parte entre asíntotas sucesivas y luego debe repetir ese patrón a derecha e izquierda.
- La gráfica de $y = a \tan x$ para $a > 0$ se puede obtener al multiplicar a por la coordenada de cada punto en la gráfica $y = \tan x$.
- Si la gráfica de $y = a \tan x$ para $a < 0$,entonces también usamos una reflexión alrededor del eje x.
- Como la función tangente tiene periodo π, es suficiente trazar la rama entre las dos asíntotas verticales sucesivas con: $x = -\frac{\pi}{2}$ y $x = \frac{\pi}{2}$.

- Las funciones ***y* = *a* tan *k x*** y ***y* = *a* cot *k x* (*k* > 0)** tiene un periodo $\frac{\pi}{k}$
- $(-\frac{\pi}{2k}, \frac{\pi}{2k})$ es el intervalo apropiado para trazar la gráfica de un periodo de
- $(0\ ,\ \frac{\pi}{k})$ es el intervalo apropiado para trazar la gráfica de un periodo de

Ejemplo ilustrativo: Trazar la gráfica de la función $y = tan\ 2(x - \frac{\pi}{3})$

SOLUCIÓN:

a. Cálculo del periodo: $\frac{\pi}{k} = \frac{\pi}{2}$

b. Cálculo del intervalo apropiado:
$(-\frac{\pi}{2k}, \frac{\pi}{2k}) = (-\frac{\pi}{2(2)}, \frac{\pi}{2(2)}) = (-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4})$ de ***y* = tan 2 *x***.

c. Cálculo del intervalo apropiado

d. La gráfica está desplazada a la derecha $\frac{\pi}{3}$

e. El intervalo debe ser desplazado $\frac{\pi}{3}$ a la derecha
$(-\frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{3}) = (\frac{\pi}{12}, \frac{7\pi}{12})$

f. Se identifican los puntos extremos del intervalo $x = \frac{\pi}{12}$ y $x = \frac{7\pi}{12}$ y que se constituyen en asíntotas verticales.

g. Se elabora la tabla de valores:

Valores de la Función $y = \tan 2\left(x - \frac{\pi}{3}\right)$

x	$\frac{\pi}{12}$	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{5\pi}{12}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{7\pi}{12}$
$y = tan\,2\,x$	0.58	1.73	indefinido	-1.73	-0.58	0	0.58
$y \quad tan2\left(x-\frac{\pi}{3}\right)$	indefinido	-1.73	-0.58	0	0.58	1.73	indefinido

Figura 15. Tabla de valores de $y = tan\,tan\,2\left(x - \frac{\pi}{3}\right)$
Elaboración: Granda S., (2020)

En esta figura puede observar la tabla de valores que se obtiene al evaluar la función $y = tan\,2\left(x - \frac{\pi}{3}\right)$, para esto usted debe emplear su calculadora científica en modo radianes.

h. Finalmente, trazamos la gráfica de un periodo en la forma de tangente en el intervalo $\left(\frac{\pi}{12}, \frac{7\pi}{12}\right)$ y se puede repetir la parte de la gráfica a la izquierda y a la derecha, tome en cuenta las asíntotas.

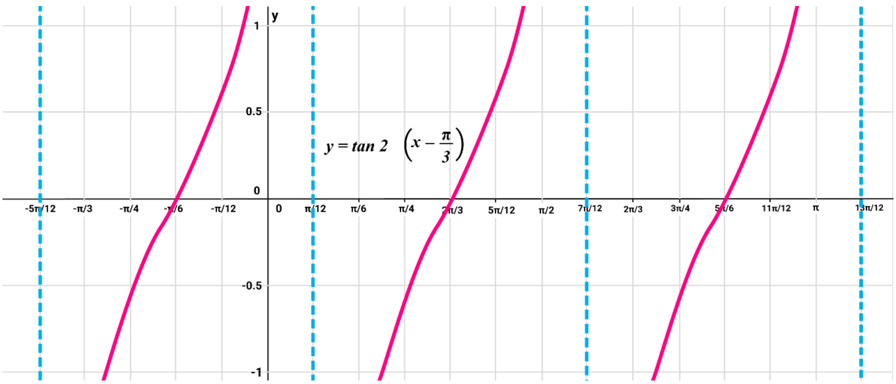


Figura 16. Gráfica de $y = tan\,tan\,2\left(x - \frac{\pi}{3}\right)$
Elaboración: Granda S., (2020)

En esta figura puede apreciar el comportamiento de la función tangente, es muy importante que usted identifique las asíntotas y las características es esta función trigonométrica.

Índice
Primer bimestre
Segundo bimestre
Solucionario
Referencias bibliográficas

En la siguiente gráfica usted puede apreciar las gráficas de las funciones: $y = tan\,2\,x$, $y = tan\,2\left(x - \frac{\pi}{3}\right)$, y el desplazamiento $\frac{\pi}{3}$

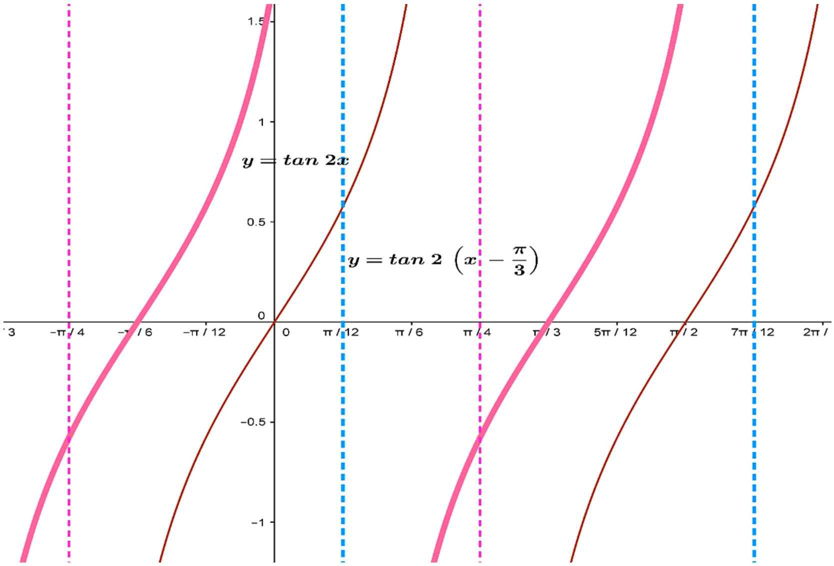


Figura 17. Gráfica de $y = tan\,2\,x$, $y = tan\,2\left(x - \frac{\pi}{3}\right)$
Elaboración: Granda S., (2020)

La figura 17 muestra las transformaciones de la función tangente, le recomiendo analizar la gráfica y compararlas entre sí, para comprender sus variaciones e identificar una a una sus propiedades.

Luego de analizar los procesos desarrollados en estos ejemplos modelo, lo animo a realizar sus propias gráficas, empleando su calculadora de pantalla gráfica y/o geogebra.

1.3.5. Gráficas de transformaciones de las funciones cosecante y secante

Hemos avanzando paso a paso con las gráficas de las funciones trigonométricas, ahora nos corresponde graficar las funciones cosecante y secante: Sabemos que estas funciones son las recíprocas de las funciones seno y coseno, por lo que, los procesos antes revisados son la base para trabajar esta sección.

Tome en cuenta que las funciones ***y = a csc kx*** y ***y = aseckx*** **(** ***k*** **> 0)** tienen periodo $\frac{2\pi}{k}$

El intervalo $\left(0\ ,\frac{2\pi}{k}\right)$ se considera apropiado para trazar la gráfica de un periodo completo.

Las gráficas que contienen funciones secante y cosecante se puede obtener con métodos semejantes a aquellos empleados para tangente o cotangente, o tomando recíprocos de gráficas correspondientes de las funciones coseno y seno por lo que, recomiendo realizar sus propias gráficas, empleando su calculadora de pantalla gráfica y/o geogebra.

RECURSOS DE APRENDIZAJE

Para comprender eficientemente el proceso para elaborar gráficas trigonométricas y que además usted pueda desarrollar de forma pertinente los ejercicios y problemas propuesto en esta unidad, recomiendo:

- Habilitar el hipervínculo y mirar atentamente el video titulado Funciones trigonométricas.
- Estimado estudiante, le recomiendo leer el texto básico correspondiente al contenido de la unidad Gráficas trigonométricas, aquí usted encontrará el fundamento teórico necesario para su aprendizaje.

Retroalimentación: En este video se expone la forma cómo se representa gráficamente las funciones trigonométricas. Así mismo, en el texto básico usted puede acceder a los fundamentos teóricos necesarios para la resolución de todos los ejercicios propuestos al final de la unidad.

Actividades de aprendizaje recomendadas

Compruebe lo aprendido resolviendo la siguiente actividad, recomiendo que adicionalmente conteste las interrogantes que se encuentran en el texto básico, no olvide ampliar su conocimiento investigando.

1. Si una función f es periódica con periodo p, entonces $f(t+p) =$_____ para todo t. Las funciones trigonométricas $y = \operatorname{sen} x$ y $y = \cos x$ son periódicas, con periodo _________ y amplitud _________.

2. Trace una gráfica de cada función en el intervalo $[0, 2\pi]$

3. La función trigonométrica $f(x) = \tan x$ tiene un periodo_______ y asíntota $x =$________.Trace una gráfica de esta función en el intervalo $\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$

4. La función trigonométrica $y = \csc x$ tiene un periodo __________ y asíntotas x =______.Trace la gráfica de esta función, en el intervalo $(-\pi, \pi)$.

Con el desarrollo de esta actividad, usted pudo evidenciar su aprendizaje acerca de las funciones trigonométricas de números reales, de haber existido alguna dificultad es necesario que usted revise una vez más su texto base y así lograr los resultados de aprendizaje esperados.

Recuerde que:
A través del chat de tutoría y consultas puede aclarar sus dudas e inquietudes con su docente.

"Antes que nada, la preparación es la llave del éxito"
Alexander Graham Bell

¡Siga adelante!

Semana 4

1.4. Modelado de Movimiento Armónico

Las funciones trigonométricas son útiles en la investigación de movimiento vibratorio u oscilatorio, por ejemplo, el movimiento de una partícula en una cuerda de guitarra en vibración o un resorte que se ha comprimido o alargado y luego se suelta para oscilar en una y otra dirección. Tomando en cuenta que este tipo de desplazamiento de partículas obedece al movimiento armónico, le invito a estudiar con mucha atención la siguiente sección que le explicará las propiedades, ecuaciones y aplicación de dicho movimiento.

1.4.1. Movimiento Armónico Simple

Un punto que se mueve en una recta coordenada está en movimiento armónico simple si su distancia a desde el origen en el tiempo está dada por:

$$y = a \operatorname{sen} \omega t \text{ o } y = a \cos \omega t$$

Debe tener en cuenta que es el desplazamiento máximo del cuerpo.

periodo $= \frac{2\pi}{w}$ es el tiempo requerido para completar un ciclo y

frecuencia $= \frac{w}{2\pi}$ son el número de ciclos por unidad de tiempo.

<u>EJEMPLO MODELO DE PROBLEMA DE APLICACIÓN</u>

- **Un corcho que sube y baja** Un corcho que flota en un lago sube y baja en movimiento armónico simple. Su desplazamiento por encima del fondo de lago está modelado por:

$$y = 0.2 \cos 20\pi t + 8$$

Índice
Primer bimestre
Segundo bimestre
Solucionario
Referencias bibliográficas

Donde ***y*** se mide en metros y ***t*** en minutos.

a. Encuentre la frecuencia del movimiento del corcho.
b. Trace una gráfica de ***y***
c. Encuentre el desplazamiento máximo del corcho por encima del fondo del lago.

SOLUCIÓN:

De las fórmulas para la frecuencia obtenemos:

a. $\boldsymbol{frecuencia: \frac{w}{2\pi} = \frac{20\pi}{2\pi} = 10\ ciclos\ por\ segundos\ Hz}$

b. Al trazar las gráfica de y podemos ap reciar cómo se ha desplazado 8m a partir del origen Fig.1 y en la Fig.2, empleando un zoom a la gráfica podemos observar con claridad la amplitud del movimiento armónico. La gráfica del desplazamiento del corcho en el tiempo se ilustra a continuación.

GRÁFICA DEL MOVIMIENTO ARMÓNICO DEL LAGO

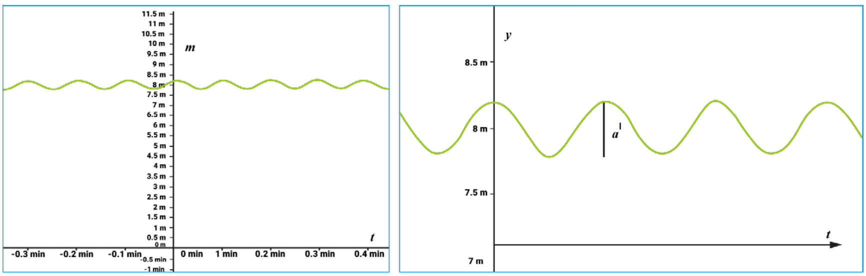


Figura 18. Gráfica Original y Ampliada de Modelado de Movimiento Armónico del Lago
Elaboración: Granda S., (2020)

En esta figura usted puede apreciar la gráfica que genera el movimiento del agua del lago, del problema plateado como ejemplo, aquí se evidencia el modelado del movimiento armónico simple.

c. El desplazamiento máximo del corcho por encima del fondo del lago es |**a**| = **0.4**

1.4.2. Movimiento Armónico Amortiguado

Si tomamos en cuenta que todos los osciladores reales están sometidos a alguna fricción, que generan fuerzas disipativas que realizan un trabajo que es transformado en calor, y es disipado fuera del sistema, salvo que alguna fuerza externa lo mantenga, seremos consientes del amortiguamiento.

Este amortiguamiento da lugar al movimiento armónico amortiguado y es el tema de estudio de esta sección, tomando en cuenta que es una variante del movimiento armónico, donde su amplitud, responderá a la función $\boldsymbol{a(t) = Ke^{-ct}}$, lo que genera una variación que usted puede observar en las gráficas de su texto base (pág. 451,Fig.12)

Si un cuerpo se desplaza y en un tiempo t y la ecuación que describe es: $\boldsymbol{y = ke^{-ct}senwt}$ o $\boldsymbol{y = ke^{-ct}\cos wt\ (c > 0)}$ entonces el cuerpo está en movimiento armónico amortiguado, recuerde que :

$$c = constante\ de\ amortiguamiento, k = amplitudincial,\ periodo = \frac{2\pi}{w}$$

Mediante la resolución de problema de modelado del movimiento armónico amortiguado podrá entender las características y propiedades del mismo, por lo que le invito a revisar y analizar el siguiente problemas de aplicación.

<u>EJEMPLO MODELO DE PROBLEMA DE APLICACIÓN</u>

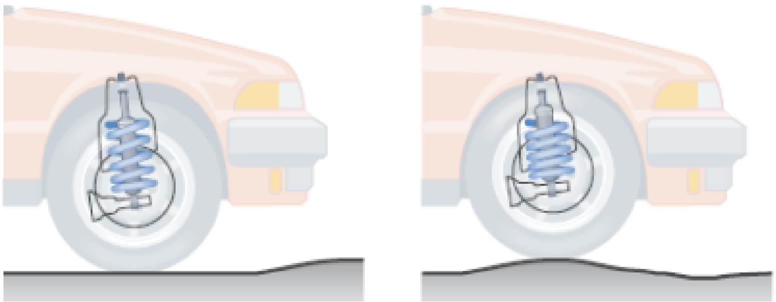
- **Amortiguador de un auto:** Cuando un auto golpea contra un tope del camino, amortiguador del auto se comprime una distancia de 6 pulgadas y luego se expande (vea la figura). El amortiguador vibra en movimiento armónico amortiguado

Índice
Primer bimestre
Segundo bimestre
Solucionario
Referencias bibliográficas

con frecuencia de dos ciclos por segundo. La constante de amortiguamiento para este amortiguador en particular es 2.8.

a. Encuentre una ecuación que describa el desplazamiento del amortiguador a partir de su posición de reposo como función del tiempo. Tome ***t*** = **0** como el instante en que se expande el amortiguador.

b. ¿Cuánto tiempo tarda la amplitud de la vibración en disminuir a 0.5? pulg.?



SOLUCIÓN:

a. Datos: Se procede a tomar los datos del enunciado del problema, luego de leerlo comprensivamente, usted debe identificar los datos y las incógnitas.

a = **6** ***pulg***

frecuencia **= 2*Hz***

constante de amortiguamineto = **2.8**

t = **0**

t = **?** ***a*** = **0.5** ***pulg***

b. De la fórmula de la frecuencia $f = \frac{w}{2t}$ se despeja ***w* = 2** × ***f***
Calculamos ***w* = 2 (2 *π*)** →***w*** **= 4 *π***

c. Tomamos el modelo $y = ke^{-ct}\, senwt \rightarrow y = 6e^{-2.8t}\, sen4\pi t$ ya que según la indicación del problema, el movimiento inicia con cero desplazamiento.

d. Para determinar el tiempo que tarda la amplitud de la vibración en disminuir a 0.5 pulg., tomamos en cuenta que la amplitud está gobernada por el coeficiente ke^{-ct} en las ecuaciones para movimiento armónico amortiguado. Entonces:

$$a\,(\,t\,) = ke^{-ct}$$

Siendo ***a* (*t*)** = **0.5**, entonces

$$a\,(\,t\,) = 0.5 = 6e^{-2.8t}$$

$$0.5 = 6e^{-2.8t}$$

$$\frac{0,5}{6} = e^{-2.8t}$$

$$ln\left(\frac{0,5}{6}\right) = ln\,(\,e^{-2.8t}\,)$$

$$ln\left(\frac{0,5}{6}\right) = -\,2.8\,t\,ln\,(\,e\,)$$

$$ln\left(\frac{0,5}{6}\right) = -\,2.8\,t$$

t* = 0.8874 *s

e. Procedemos a graficar el modelo y obtenemos la vibración del amortiguador a lo largo del tiempo, usted lo puede apreciar en la siguiente figura:

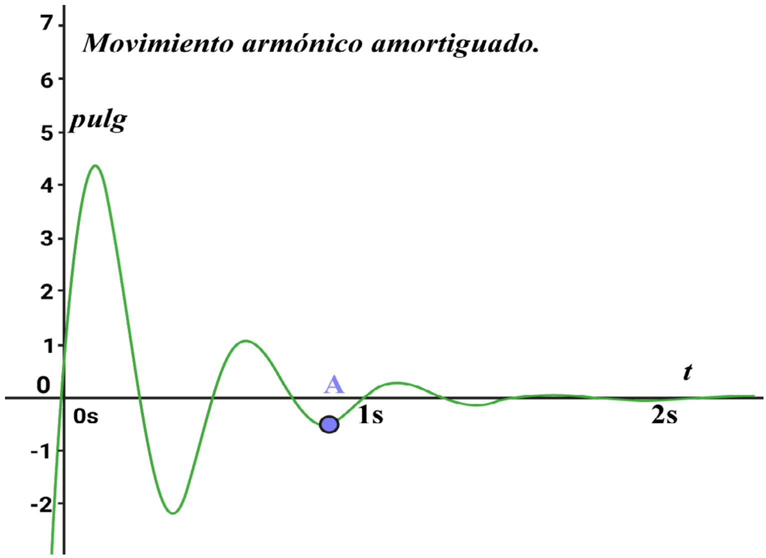


Figura 19. Gráfica de Modelado de Movimiento del Amortiguador
Elaboración: Granda S., (2020)

La figura 19 muestra la gráfica del modelado del movimiento generado por el amortiguador del auto presentado en el problema de aplicación, le recomiendo estimado estudiante el análisis exhaustivo de dicha figura para comprender su comportamiento.

1.4.3. Fase y Diferencia de Fase

Si consideramos dos objetos que se encuentran en movimiento armónico simple y tienen las mismas frecuencias es importante determinar si los objetos están moviendo juntos o como difieren estos movimientos.

En esta sección abordaremos la fase y diferencia de fase que se puede dar en ondas modeladas por las curvas seno. Esta curva seno puede ser expresada en las siguientes formas equivalentes: $y = Asen\,(kt - b)$ la fase es b, $Asenk\left(t - \frac{b}{k}\right)$.El desfase es $\frac{b}{k}$.

Para comprender la diferencia de fase consideremos dos funciones:

y1 = ***Asen*** (***kt - b***) y ***y1 = Asen*** (***kt - c***) , la diferencia de fase entre la primera función y la segunda: ***y1*** y ***y2***, es ***b - c*** Finalmente, usted debe tomar en cuenta que si la diferencia de fase es un múltiplo de **2*π***, las ondas están en fase, caso contrario las ondas están fuera de fase.

Mediante la resolución de problemas de fase y diferencia de fase podrá entender las características y propiedades del mismo, por lo que le invito a revisar y analizar el siguiente ejemplo:

Para la siguiente cuerda, encuentre la amplitud, el periodo, la fase y el desfase.

$$y = 5sen\left(2\,t - \frac{\pi}{2}\right)$$

SOLUCIÓN:

Amplitud ***a*** = **5**

Periodo = $\frac{2\,\pi}{w} = \frac{2\,\pi}{2} = \pi$

Fase = $\frac{\pi}{2}$

Para encontrar el desfase factorizamos:

$$y = 5\,sin\left(2t - \frac{\pi}{2}\right) \rightarrow y = 5\,sin\,2\left(\frac{2t}{2} - \frac{\frac{\pi}{2}}{2}\right) \rightarrow 5\,sen\left(t - \frac{\pi}{4}\right)$$

Desfase = $\frac{\pi}{4}$

Recursos de aprendizaje

Para comprender eficientemente el modelado del movimiento armónico que además usted pueda responder de forma pertinente el cuestionario propuesto en línea para esta semana, recomiendo:

- Habilitar el hipervínculo y emplear la Aplicación de Funciones Trigonométricas.

Índice
Primer bimestre
Segundo bimestre
Solucionario
Referencias bibliográficas

- Estimado estudiante, afiance el contenido teórico de esta semana con la lectura de su texto básico sobre el contenido teórico del modelado de movimiento armónico simple, amortiguado, así como de la fase y diferencia de fase.

Retroalimentación: En estos videos se explica el modelado del movimiento armónico. Así mismo, en el texto básico usted puede acceder a los fundamentos teóricos necesarios para la resolución de todos los ejercicios propuestos al final de la unidad.

Actividades de aprendizaje recomendadas

Compruebe lo aprendido resolviendo la siguiente actividad, recomiendo que adicionalmente conteste las interrogantes que se encuentran en el texto básico, no olvide ampliar su conocimiento investigando.

1. Para un cuerpo en movimiento armónico simple con amplitud ***a*** y periodo $\frac{2\pi}{w}$, encuentre una ecuación que modele el desplazamiento ***y*** al tiempo ***t*** si: ***y*** = **0 *al tiempo t*** = **0 : *y*** =____________________________

2. Para un cuerpo en movimiento armónico amortiguado con amplitud inicial a, periodo $\frac{2\pi}{w}$, y constante de amortiguamiento ***c***, encuentre una ecuación que modele el desplazamiento ***y*** en el tiempo ***t*** si: ***y*** = ***a al tiempo t*** = **0 : *y*** =_________________________

3. Para un objeto en movimiento armónico modelado por: **y** = ***Asen*** (***kt*** - ***b***) la amplitud es_______________, el periodo es_____________ y la fase es ___________________.

Para encontrar el desfase factorizamos ***k***, para obtener : ***y*** =___________________. De esta forma de la ecuación vemos que el desfase es _____________.

4. Los objetos A y B se encuentran en movimiento armónico modelados por $y = 3sen(2t - \pi)$ y $y = 3sen\left(2t - \frac{\pi}{2}\right)$. La fase de A es __________y la fase de B es______________________. La diferencia de fase es _____________________, por lo que los objetos se están moviendo ____________ (en fase/fuera de fase).

Con el desarrollo de esta actividad usted pudo evidenciar su aprendizaje acerca del modelado del movimiento armónico, de haber existido alguna dificultad es necesario que usted revise una vez más su texto base y así lograr los resultados de aprendizaje esperados.

Recuerde que:
A través del chat de tutoría y consultas puede aclarar sus dudas e inquietudes con su docente.

Solo tendrás éxito si crees que puedes tenerlo"
¡Siga adelante!

AUTOEVALUACIÓN DE LA PRIMERA UNIDAD

Estimado estudiante, luego de culminar con el estudio de la unidad de funciones trigonométricas: método de la circunferencia unitaria, es recomendable que usted realice la autoevaluación de lo aprendido, con la finalidad de retroalimentar aquellas inquietudes más importantes.

Autoevaluación 1

Instrucción: Marque la alternativa correcta.

1. Las coordenadas de ***P(x,y)*** que determina $t = \frac{5\pi}{6}$ sobre la circunferencia unitaria son:

   a. $\left(\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{1}{2}\right)$
   b. $\left(\frac{\sqrt{3}}{2}, -\frac{1}{2}\right)$
   c. $\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{1}{2}\right)$

2. El número de referencia para el valor $t = \frac{5\pi}{4}$ es

   a. $\frac{\pi}{4}$
   b. $\frac{\pi}{3}$
   c. $\frac{\pi}{6}$

3. Si el punto ***P (x,y)*** está en la circunferencia unitaria la coordenada faltante de ***P*****(-1,   )**

   a. -1
   b. 1
   c. 0

4. Dado el punto terminal $P\left(-\frac{20}{29},\frac{21}{29}\right)$ determinado por un número real *t* los valores de las funciones ***sin sin t***, ***cos cos t*** y ***tan tan t*** son:

a. $t=\frac{21}{29}$, $\cos\cos t=-\frac{20}{29}$, $\tan\tan t\ =-\frac{21}{20}$

b. $t=-\frac{21}{29}$, $\cos\cos t=+\frac{20}{29}$, $\tan\tan t\ =+\frac{21}{20}$

c. $t=\frac{-21}{29}$, $\cos\cos t\ =-\frac{20}{29}$, $\tan\tan t\ =+\frac{21}{20}$

5. El valor exacto de $\cos\cos\frac{3\pi}{4}$ es

a. $\left(-\frac{\sqrt{2}}{2},\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$

b. $\left(\frac{\sqrt{2}}{2},-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$

c. $\left(\frac{\sqrt{2}}{2},\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$

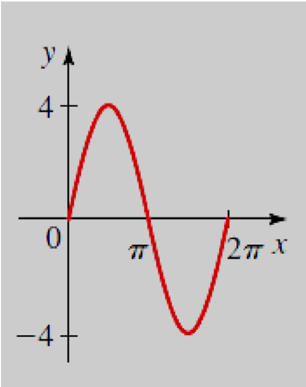
6. La grafica de la función $y=\cos\cos\left(x-\frac{\pi}{2}\right)$ presenta la siguiente amplitud, periodo y desfase.

a. |a| = 1 *período* = 2π $\boldsymbol{b}=\frac{\pi}{2}$ a la derecha

b. |a| = - 1 *período* = π $\boldsymbol{b}=\frac{\pi}{2}$ a la izquierda

c. |a| = 1 *período* = 2π $\boldsymbol{b}=\frac{\pi}{3}$ a la derecha

7. Dada la gráfica de un periodo completo de la curva seno, se puede apreciar que su amplitud, periodo y desfase son:

	a. |a| = 4 *periodo* = 2π b = 0 b. |a| = -4 *periodo* = π b = 0 c. |a| = 4 *periodo* = $\frac{\pi}{2}$ b=0

8. La curva seno $y = -4\, sin\, sin\, 2\left(x + \frac{\pi}{2}\right)$ muestra la siguiente amplitud, periodo y desfase:

   a. |a| = -4 *periodo* = $\frac{\pi}{2}$ y *desfase b* = π a la izquierda.

   b. |a| = 4 *periodo*= π y *desfase b* = $\frac{\pi}{2}$ a la izquierda.

   c. |a| = 4 *periodo* = $\frac{\pi}{3}$ y *desfase b* = $\frac{\pi}{2}$ a la derecha.

9. La función *y* = 23*t* modela el desplazamiento de un cuerpo que se mueve con movimiento armónico simple, su amplitud , periodo y la frecuencia del movimiento son:

   a. |a| = -2 periodo= $\frac{3\pi}{2}$ frecuencia= $\frac{3}{\pi}$

   b. |a| = 2 periodo = — $\frac{2\pi}{3}$ frecuencia = $\frac{1}{2\pi}$

   c. |a| = 2 periodo = $\frac{2\pi}{3}$ frecuencia = $\frac{3}{2\pi}$

10. Se tiene una amplitud inicial k = 2, una constante de amortiguamiento c = 1.5 y frecuencia f = 3, la función que modela un movimiento armónico amortiguado es:

a. $y = -2e^{1.5t}$ *cos cos* 6πt

b. $y = 2e^{-1.5t}$ cos cos 6πt

c. $y = 2e^{1.5t}$ *cos cos* 3πt

Ir al solucionario

Índice
Primer bimestre
Segundo bimestre
Solucionario
Referencias bibliográficas

Semana 5

Unidad 2. Funciones trigonométricas: método del triángulo rectángulo

2.1. Trigonometría de triángulos rectángulos

Con el fin de responder a las diferentes aplicaciones matemáticas que requieren de funciones trigonométricas, ya que relacionan ángulos y distancias, continuamos con el aprendizaje del método del triángulo rectángulo, le invito a poner atención a las definiciones dadas en esta guía, apoyarse en el texto base y finalmente resolver problemas de aplicación.

2.1.1. Medida de un ángulo

Para entender la medida de un ángulo es necesario definirlo, por lo que consideraremos las siguientes definiciones:

Un ángulo en geometría se define como el conjunto de puntos determinado por dos rayas o semirrectas, $\boldsymbol{l_1}$ y $\boldsymbol{l_2}$, que tienen el mismo punto extremo $\boldsymbol{O}$. Si A y B son puntos en $\boldsymbol{l_1}$ y $\boldsymbol{l_2}$, como en la figura 3 , nos referimos al ángulo $\boldsymbol{AOB}$ (denotado $\angle \boldsymbol{AOB}$) Un ángulo puede también ser considerado como dos segmentos de recta finitos con un punto extremo común.

REPRESENTACIÓN GEOMÉTRICA

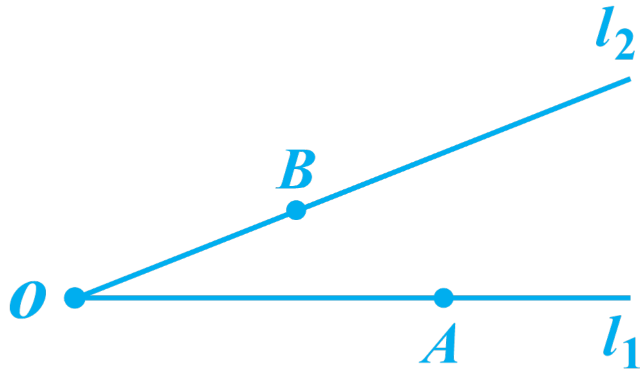


Figura 20. Representación geométrica de ángulo
Fuente: Swokowski y Cole. (2009)
Elaboración: Granda S., (2020)

En esta figura usted puede observar la representación gráfica de un ángulo, se indica cada uno de sus elementos; vértice y lados; esta representación es muy importante al iniciar esta unidad ya que usted aprenderá a aplicar el método del triángulo rectángulo.

Para medir dichos ángulos utilizamos grados y radianes, aquí tiene las definiciones de cada una de estas medidas.

- Un grado es una unidad de medición angular igual a $\frac{1}{180}$ del ángulo que se forma con la línea horizontal. Se representa con el símbolo °.
- Radián. Un ángulo central de un círculo mide 1 radián si interseca un arco cuya longitud mide lo mismo que el radio.

2.1.2. Ángulos en posición estándar

Para hablar de un ángulo en posición estándar debemos introducir un sistema de coordenadas rectangulares, entonces la posición estándar de un ángulo se obtiene al tomar el vértice en el origen y hacer que el lado inicial coincida con el eje x positivo. Si el lado inicial en dirección contraria al giro de las manecillas de un reloj hasta la posición terminal el ángulo se considera positivo. Si el lado inicial se hace girar en dirección de las manecillas, el ángulo es negativo.

2.1.3. Longitud de un arco de circunferencia

Debido a que el ángulo central de 1 radián siempre interseca a un arco cuya longitud equivale a lo que mide el radio, se infiere que el ángulo central π de radianes en un círculo de radio r interseca un arco de longitud πr. Esto nos proporciona una fórmula para medir la longitud de un arco.

Si θ es un ángulo central en un círculo de radio r y si θ se mide en radianes, entonces la longitud s del arco intersecado se obtiene mediante la fórmula:

$$s = r\theta$$

Si θ es un ángulo central, en un círculo de radio r y si θ se mide en grados, entonces la longitud s del arco intersecado se obtiene mediante la fórmula:

$$s = \frac{\pi r \theta}{180}$$

2.1.4. Área de un sector circular

Para determinar el área de un sector circular emplearemos la siguiente fórmula: ,$A = \frac{1}{2} r^2\theta$ siendo θ la medida en radianes de un ángulo central de una circunferencia de radio r.

2.1.5. Movimiento circular

Para contextualizar la definición de movimiento circular, usted debe recordar la definición de la velocidad promedio de un objeto, que no es más que la distancia recorrida dividida entre el tiempo transcurrido. Ahora suponga que un objeto se mueve alrededor de un círculo de radio r a una velocidad constante. Si s es la distancia recorrida en el tiempo t alrededor del círculo, entonces la velocidad lineal v del objeto se define como $v = \frac{s}{t}$.

Mientras este objeto viaja alrededor del círculo, suponga que $\boldsymbol{\theta}$ (medido en radianes) es el ángulo central barrido en el tiempo $\boldsymbol{t}$. Entonces, la velocidad angular $\boldsymbol{w}$(la letra griega omega) de este objeto es el ángulo (medido en radianes) que se barre dividido entre el tiempo transcurrido, es decir $w = \frac{\theta}{t}$:

Finalmente, es necesario que usted conozca la relación entre la velocidad lineal y angular, en el caso específico de un punto que se mueve a lo largo de un círculo de radio $\boldsymbol{r}$ con velocidad angular $\boldsymbol{w}$, entonces su velocidad lineal $\boldsymbol{v}$ está dada por $\boldsymbol{v} = \boldsymbol{rw}$.

Una vez presentadas estas definiciones le invito a observar y analizar el proceso de resolución de los ejercicios y problemas resueltos en su texto base, y en conjunto con la explicación dada a continuación, en la resolución de un problema de aplicación, usted podrá abordar eficientemente la evaluación parcial sobre los conocimientos estudiados en esta unidad.

EJEMPLOS MODELOS DE PROBLEMAS DE APLICACIÓN

Distancia de viaje. Las ruedas de un auto miden 28 pulgadas de diámetro. ¿Qué distancia (en millas) recorrerá el auto si sus ruedas giran, 100000 veces sin patinar?

a. **Datos**

$$d = 28\ pulg$$

$$s = ?$$

$$\theta = 2\pi$$

b. **Cálculos**

$$r = \frac{28\ pulg}{2} = 14\ pulg$$

$$\theta = s / r \rightarrow s = \theta \cdot r \rightarrow s = 2\pi \cdot (14\ pulg) = 28\pi pulg$$

Si la rueda gira 10000 veces sin patinar

→ 28*π* (10000) = 280000*πpulg*

c. Finalmente empleamos una regla de tres para convertir de pulgadas a millas.

1 *milla*	**63360 *pulg***
x	**280000 *π***

$$x_{millas} = \frac{280000\pi}{63360}$$

$$x_{millas} = 13.88 \approx 13.9\, millas$$

Velocidad de una corriente. Para medir la velocidad de una corriente, unos científicos colocan una rueda de paletas en la corriente y observan la rapidez a la que gira la rueda. Si la rueda tiene un radio de 0.20m y gira a 100 rpm, encuentre la velocidad de la corriente en $\frac{m}{s}$.

a. Datos

r = 0.20 *m*

$$w = 2\,\pi \cdot 300 = 600\,\pi\,\frac{rad}{min}$$

v = ?

b. Cálculos

Determinamos la ***v* = *rw* → *v*** = (**0.20 *m***) (600 ***π***)$\frac{rad}{min}$

$$v = 120\frac{m}{min}$$

Realizamos la conversión de unidades

$$120\frac{m}{min} \times \frac{1min}{60\,s} = 2\frac{m}{s}$$

Recursos de aprendizaje

Para comprender eficientemente la trigonometría de triángulos rectángulos y que además usted pueda participar de forma pertinente en el foro académico propuesto para esta semana, recomiendo:

- Habilitar el hipervínculo y mirar atentamente el video titulado Grados sexagesimales y radianes.
- Estimado estudiante, es necesario que expanda el contenido teórico de esta semana con la lectura de su texto básico en lo referente a la medida de un ángulo, ángulos en posición estándar, longitud de un arco de circunferencia, área de un sector circular y movimiento circular.

Retroalimentación: En estos videos se explica el proceso previo para resolver triángulos rectángulos por medio de ejemplos de aplicación de los contenidos de esta unidad. Así mismo, en el texto usted puede acceder a los fundamentos teóricos necesarios para la resolución de todos los ejercicios y problemas propuestos al final de la unidad.

Actividades de aprendizaje recomendadas

a. Elabore un banco de preguntas, tomando en cuenta los ejercicios y problemas propuestos de esta sección.

b. Resuelva el banco de preguntas superando las dificultades por medio de la investigación y la consulta a su docente.

Recuerde que:
A través del chat de tutoría y consultas puede aclarar sus dudas e inquietudes con su docente.

"Lo único imposible es aquello que no intentas"

¡Siga adelante!

Semana 6

Estimado estudiante, en la semana anterior iniciamos el estudio de las funciones trigonométricas, método del triángulo rectángulo, por lo que, usted está preparado para resolver problemas de triángulos rectángulos en situaciones físicas; es momento de ampliar sus conocimientos analizando las funciones trigonométricas de ángulos, siga en su empeño, lo está haciendo muy bien.

2.2. Funciones trigonométricas de ángulos

Tomando en cuenta que usted conoce las relaciones trigonométricas para ángulos agudos, en esta sección ampliaremos estas definiciones de manera que incluyan ángulos que no son agudos, para ello se emplea un sistema de coordenadas rectangulares y se coloca el ángulo en la posición estándar, de modo que su vértice este en el origen y su lado inicial en el lado positivo del eje x. Revisar la Figura 1 y 2 de la página 491 del texto base.

De su revisión usted puede apreciar que si $\boldsymbol{\theta}$ es cualquier ángulo en posición estándar y sea $\boldsymbol{P}\,(\,\boldsymbol{x,y}\,)$las coordenadas de cualquier punto diferente al origen (**0,0**), en el lado terminal de $\boldsymbol{\theta}$.Si $\boldsymbol{r} = \sqrt{\boldsymbol{x^2 + y^2}}$ denota la distancia de (**0,0**) a $\boldsymbol{P}\,(\,\boldsymbol{x,y}\,)$, entonces las seis funciones trigonométricas de \theta se definen como las razones presentadas en la siguiente tabla:

Índice

Primer bimestre

Segundo bimestre

Solucionario

Referencias bibliográficas

Razones trigonométricas

$\textbf{sen}\,\boldsymbol{\theta} = \frac{\boldsymbol{y}}{\boldsymbol{r}}$	$\textbf{cos}\ \boldsymbol{\theta} = \frac{\boldsymbol{y}}{\boldsymbol{r}}$	$\textbf{tan}\,\boldsymbol{\theta} = \frac{\boldsymbol{y}}{\boldsymbol{r}} \quad (\boldsymbol{x} \neq \mathbf{0})$
$\textbf{csc}\,\boldsymbol{\theta} = \frac{\boldsymbol{r}}{\boldsymbol{y}} \quad (\boldsymbol{y} \neq \mathbf{0})$	$\sec\theta = \frac{r}{x} \quad (x \neq 0)$	$\cot\theta = \frac{x}{y} \quad (y \neq 0)$

Figura 21. Razones Trigonométricas
Fuente: Stewart, Redlin y Watson, (2017), p.491
Elaboración: Elaboración: Granda S., (2020)

En esta figura se muestran las razones trigonométricas de un ángulo cualquiera $\boldsymbol{\theta}$, estas razones usted las empleará para resolver funciones trigonométricas por medio del método del triángulo rectángulo.

2.2.1. Evaluación de Funciones Trigonométricas de cualquier ángulo

Una vez que se sabe en qué cuadrante está un ángulo, se determina el signo

de cada función trigonométrica de este ángulo. Utilizar cierto ángulo de referencia puede ayudar a evaluar las funciones trigonométricas de éste.

Sea $\boldsymbol{\theta}$ un ángulo no agudo que está en un cuadrante. El ángulo agudo formado por el lado terminal de $\boldsymbol{\theta}$ y ya sea el lado positivo del eje $\boldsymbol{x}$ o el lado negativo del eje $\boldsymbol{x}$ se llama ángulo de referencia para $\boldsymbol{\theta}$.

Ejemplo: Encuentre el valor exacto de la función trigonométrica **cos 150º**

En la figura podemos observar que $\boldsymbol{cos 150} = \frac{\boldsymbol{-x}}{\boldsymbol{r}}$

Índice

Primer bimestre

Segundo bimestre

Solucionario

Referencias bibliográficas

Pero $\boldsymbol{cos\ 30°} = \frac{\boldsymbol{x}}{\boldsymbol{r}}$

Dado que $\boldsymbol{cos\ 30°} = \frac{\sqrt{3}}{2}$

Por lo que $\boldsymbol{cos 150} = -\frac{\sqrt{3}}{2}$

Gráfica de solución de un ángulo de referencia.

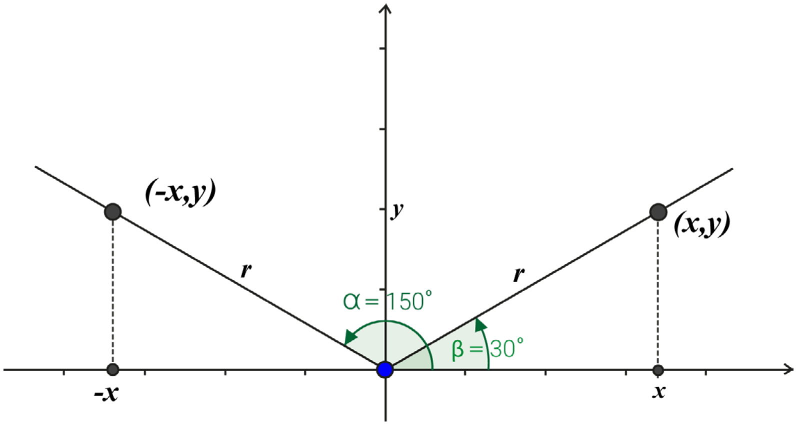


Figura 22. Gráfica de solución de un ángulo de referencia
Elaboración: Elaboración: Granda S., (2020)

En esta figura usted puede apreciar la gráfica que representa el proceso de evaluación de funciones trigonométricas para cualquier ángulo, a partir de esto le invito a interiorizar el contenido explicado en la página 494 de su texto base y acompañarme en la solución del siguiente ejemplo, donde explico paso a paso el proceso a seguir para evaluar las funciones trigonométricas de cualquier ángulo.

Encuentre el valor exacto de la función trigonométrica: *csc*(-630º)

Como usted puede darse cuenta para llegar al ángulo de **-630**, el ángulo medido en posición estándar y en sentido horario ya que es negativo, debe dar un giro de **-360º** y continuar con un giro de **-270º** para llegar al eje +y donde se ubicará el punto ***P*** (***x,y***).

El ángulo **-630º** es coterminal con el ángulo **270** de y el lado terminal de este ángulo está en el primer cuadrante, eje positivo y . Por tanto el ángulo de referencia es : **-10 -90** = **-270**, y el valor de la **csc -630** es positivo.
Tenemos **csc -630º** = **csc -270º** = **- csc 90º** no esta definido.

Gráfica de solución de la evaluación de una función trigonométrica

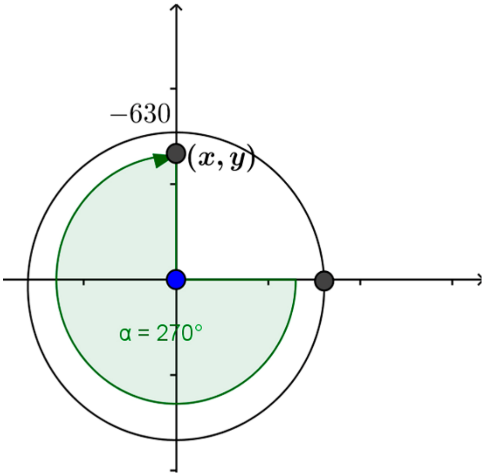


Figura 23. Gráfica de solución de la evaluación de una función trigonométrica
Elaboración: Elaboración: Granda S., (2020)

En esta figura se muestra el ángulo de referencia del ángulo dado en el problema propuesto, su ubicación en la circunferencia unitaria lo que permite determinar el signo de cada función trigonométrica solicitada y así dar solución al problema planteado.

2.2.2. Identidades Trigonométricas

Las identidades trigonométricas son ecuaciones por medio de las cuales las funciones trigonométricas se relacionan entre sí, ahora estudiaremos identidades para cualquier ángulo, siempre que ambos lados de la ecuación estén definidos como procedo a explicar en los siguientes ejemplos :

Ejemplo 1. Escriba la primera función trigonométrica en términos de la segunda ***θ*** para en el cuadrante dado.

$$\boldsymbol{\tan\theta,\ \ \cos\theta;\ \ \theta \text{ en el cuadrante } III}$$

Solución De la identidad pitagórica ***sen²θ*** **+** ***cos²θ*** **= 1**, despejamos ***senθ*** y tenemos que: $\boldsymbol{sen\,\theta} = +\sqrt{\boldsymbol{1-cos^2\theta}}$. Esto lo reemplazamos en la identidad recíproca $tan\ \boldsymbol{\theta} = \frac{\boldsymbol{sin\ \ \theta}}{\boldsymbol{cos\ \ \theta}}$, tomando en cuenta el signo negativo de la función seno ya que está en el tercer cuadrante.

Finalmente se obtiene $\boldsymbol{tan\ \theta} = -\frac{\sqrt{\boldsymbol{1-cos^2\theta}}}{\boldsymbol{cos\ \theta}}$

Ejemplo 2. Encuentre los valores de las funciones trigonométricas de \theta a partir de la información dada.

$$\boldsymbol{cos\theta = \frac{7}{12}, sen\ \theta < 0}$$

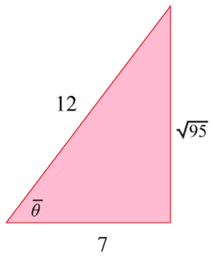
Gráfica y explicación de resolución	
	Trazamos un triángulo donde como usted puede observar el $\cos\theta = \frac{7}{12}$. Tomando en cuenta el hecho de que θ está en el cuarto cuadrante. Obtenemos. $\text{sen}\,\theta = -\frac{\sqrt{95}}{12}$ $\csc\theta = -\frac{12}{\sqrt{95}}$ $\tan\theta = -\frac{\sqrt{95}}{7}$ $\cot\theta = -\frac{7}{\sqrt{95}}$ $\sec\theta = \frac{12}{7}$

Figura 24. Figura 24. Gráfica y explicación de resolución.
Elaboración: Granda S., (2020).

En esta figura se muestra el proceso de resolución de un triángulo rectángulo para hallar el cateto faltante y de acuerdo a su ubicación en el cuarto cuadrante, se obtiene el resto de funciones trigonométricas solicitadas.

2.2.3. Áreas de Triángulos

Para finalizar esta sección y por ende la presente semana, vamos a estudiar una de las aplicaciones de las funciones trigonométricas que comprenden ángulos que no son necesariamente agudos, para esto es necesario que usted tome en cuenta la explicación brindada por el texto guía en la página 497, donde se indica detalladamente cómo se obtiene la ecuación del área de un triángulo.

Una vez que usted ya revisó lo solicitado, concluirá conmigo que la ecuación expresa el área ***A*** de un triángulo con lados de longitudes ***a***, y ***b*** y con un ángulo entre ellos ***θ***, es $\boldsymbol{A = \frac{1}{2}\, absen\, \theta}$

Ejemplo: Encuentre el área del triángulo con la descripción dada.

Un triángulo con lados de longitud 7 y 9 y el ángulo entre ellos de **72º**.

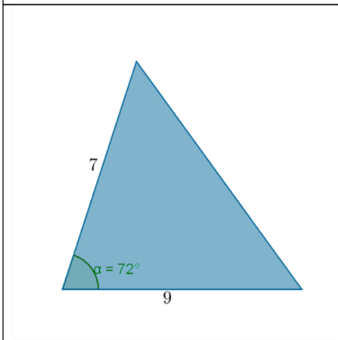
Gráfica y explicación de solución	
	El triángulo tiene lados de longitud de 7 y 9 unidades, con un ángulo entre ellos de 72°. Por tanto $A = \frac{1}{2} ab \operatorname{sen} \theta$ $A = \frac{1}{2}(7)(9) \operatorname{sen} 72°$ $A = \frac{63}{2} \operatorname{sen} 72°$ $A = 29.958280$ $A \approx 30\, u^2$

Figura 25. Figura 25. Gráfica y explicación de resolución.
Elaboración: Granda S., (2020).

En esta figura se muestra la resolución del problema propuesto, se grafica los datos dados y se determina el área del triángulo aplicando la fórmula explicada en este apartado, recuerde su calculadora debe estar en modo DEG.

RECURSOS DE APRENDIZAJE

Para comprender eficientemente la trigonometría de triángulos rectángulos y que además usted pueda responder de forma pertinente al cuestionario en línea, que evalúa los contenidos de la quinta y sexta semana, recomiendo:

- Habilitar el hipervínculo y mirar atentamente el video titulado Razones trigonométricas de un ángulo agudo.
- Estimado profesional en formación, le recomiendo afianzar el contenido teórico de esta semana, lea el texto básico los contenidos de las funciones trigonométricas de ángulos, evaluación de funciones trigonométricas de cualquier ángulo, identidades trigonométricas y áreas de triángulos.

Retroalimentación: En estos videos se explica las relaciones trigonométricas para ángulos agudos y todo tipo de ángulo. Así mismo, en el texto básico usted puede acceder a los fundamentos teóricos necesarios para la resolución de todos los ejercicios y problemas propuestos al final de la unidad.

Actividades de aprendizaje recomendadas

Compruebe lo aprendido resolviendo la siguiente actividad, recomiendo que adicionalmente conteste las interrogantes que se encuentran en el texto básico, no olvide ampliar su conocimiento investigando.

1. Si el ángulo θ está en posición estándar, $P\,(x,y)$ es un punto sobre el lado terminal de θ, y r es la distancia del origen a P, entonces:

   $sen\theta$ =____________ $cos\theta$ =____________ $tan\theta$=____________

Índice
Primer bimestre
Segundo bimestre
Solucionario
Referencias bibliográficas

2. El signo de una función trigonométrica de $\boldsymbol{\theta}$ depende del ________ en el que se encuentre el lado terminal del ángulo $\boldsymbol{\theta}$.

   En el segundo cuadrante, ***sin*** $\boldsymbol{\theta}$ es ___________________(positivo/negativo).

   En el tercer cuadrante, ***cos*** $\boldsymbol{\theta}$ es ______________________(positivo/negativo).

   En el cuarto cuadrante, ***sin*** $\boldsymbol{\theta}$ es ______________________(positivo/negativo).

3. A) si $\boldsymbol{\theta}$ está en posición estándar, entonces el ángulo de referencia $\bar{\theta}$ es el ángulo agudo formado por el lado terminal de y el __________. Así que el ángulo de referencia para $\boldsymbol{\theta}$ = 100º es $\bar{\theta}$ =___________, y para $\boldsymbol{\theta}$ = 190º es $\bar{\theta}$ =___________.

   B) Si $\boldsymbol{\theta}$ es cualquier ángulo, el valor de una función trigonométrica de $\boldsymbol{\theta}$ es igual, excepto posiblemente por el signo, que el valor de la función trigonométrica de $\bar{\theta}$. Por lo que ***sen*****100º** = ***sen*** ___________ y ***sen*****190º** = ***-sen*** ___________.

4. El área ***A*** de un triángulo con lados de longitudes ***a*** y ***b*** y con el ángulo entre ellos $\boldsymbol{\theta}$ está dada por la fórmula ***A*** =___________. Por lo que el área del triángulo con lados de 4 y 7 y el ángulo entre ellos $\boldsymbol{\theta}$ = **30º** es ________.

Con el desarrollo de esta actividad usted pudo evidenciar su aprendizaje acerca de las funciones trigonométricas de ángulos, de haber existido alguna dificultad es necesario que usted revise una vez más su texto base y así lograr los resultados de aprendizaje esperados, despeje las quietudes con su docente.

Índice
Primer bimestre
Segundo bimestre
Solucionario
Referencias bibliográficas

Recuerde que:
A través del chat de tutoría y consultas puede aclarar sus dudas e inquietudes con su docente.

"Nunca desistas de un sueño. Solo trata de ver las señales que te lleven a él"

¡Siga adelante!

Semana 7

2.3. Funciones trigonométricas inversas y triángulos rectángulos

Recuerde que cada función tiene una relación inversa, y que esa relación inversa es una función sólo si la función original es uno a uno. Sabemos que las seis funciones trigonométricas básicas son periódicas, y de forma espectacular, mas no son uno a uno, por lo que, restringiremos su dominio a un intervalo en el cual si lo sean y así poder estudiar su comportamiento inverso.

2.3.1. Funciones Seno inverso, coseno inverso y tangente inversa

Empezamos con la función Seno, tomando en cuenta que debemos restringir su dominio a los ángulos del intervalo $\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]$ como lo indico en la tabla de resumen siguiente, la misma que procedo a sintetizar para su aplicación en la resolución de problemas.

Índice
Primer bimestre
Segundo bimestre
Solucionario
Referencias bibliográficas

Cuadro de resumen de dominios y rangos de las funciones trigonométricas inversas		
Función	**Dominio**	**Rango**
sen^{-1}	$[-1, 1]$	$\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$
cos^{-1}	$[-1, 1]$	$[0, \pi]$
tan^{-1}	$\mathbb{R}$	$\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$

Figura 26. Dominios y rangos de las funciones trigonométricas inversas.
Fuente: Stewart, Redlin y Watson, (2017), p.502
Elaboración: Granda S., (2020)

En esta figura, estimado estudiante, puede observar cómo es posible sistematizar los dominios y rangos de las funciones trigonométricas inversas, esto le ayudará con la solución de los problemas de aplicación de esta semana.

Ahora vamos a practicar lo estudiado, resolviendo algunos ejemplos. Le recomiendo seguir los procesos paso a paso en el texto base y en esta guía didáctica.

EJEMPLOS:

a. Encuentre el valor exacto de $\boldsymbol{sen^{-1}1}$, si está definida. Exprese su respuesta en radianes.

Solución

El ángulo en el intervalo $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ con seno 1 es $\boldsymbol{\frac{\pi}{2}}$

Por lo tanto $\boldsymbol{sen^{-1}1} = \frac{\pi}{2}$

Índice
Primer bimestre
Segundo bimestre
Solucionario
Referencias bibliográficas

b. Use calculadora para encontrar un valor aproximado de $\boldsymbol{cos^{-1}3}$

Solución

Ya que **3 > 1**no está en el dominio de $\boldsymbol{cos^{-1}}$, $\boldsymbol{cos^{-1}3}$ no está definido.

2.3.2. Solución de ángulos en triángulos rectángulos

En esta sección resolveremos triángulos por medio de funciones trigonométricas inversas $\boldsymbol{sen^{-1}}, \boldsymbol{cos^{-1}}, \boldsymbol{tan^{-1}}$ para encontrar la medida del ángulo cuando la razón de las medidas de los lados es desconocido.

Apreciado estudiante, le invito a seguir las explicaciones dadas en la solución de los siguientes problemas de aplicación.

a. Encuentre el ángulo $\boldsymbol{\theta}$ en grados, redondeado a un decimal.

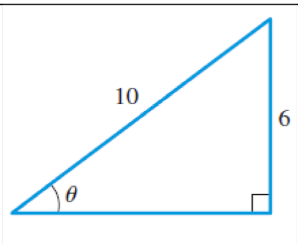
Gráfica y explicación de resolución	
	**Solución** Dado que θ es el ángulo opuesto al lado de longitud 6 y la hipotenusa tiene longitud 10, tenemos $\operatorname{sen}\theta = \frac{6}{10} = \frac{3}{5}$ Ahora podemos usar sen^{-1} para encontrar θ. Recuerde colocar la calculadora en modo ***DEG***. $\theta = sin^{-1}\frac{3}{5}$ $\theta \approx 36.9°$

Figura 27. Gráfica y explicación de resolución.
Elaboración: Granda S., (2020)

En la figura 27 se explica la resolución del problema propuesto, a partir del triángulo dado se procede a determinar el ángulo ***θ*** con los valores de la hipotenusa y cateto dados y la razón trigonométrica adecuada, recuerde su calculadora debe estar en modo **DEG.**

b. Escalera inclinada. Una escalera de 20 pies está apoyada contra un edificio. Si la base de la escalera está a 6 pies de la base del edificio, ¿cuál es el ángulo de elevación de la escalera? ¿A qué altura del edificio llega la escalera?

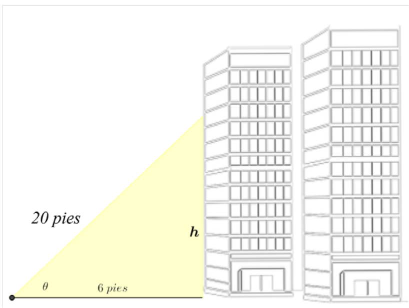
Gráfica y explicación de solución	
	**Solución** Primero trazamos un diagrama. Si θ es el ángulo entre el suelo y el edificio, entonces $\cos\theta = \frac{6\ pies}{20\ pies}$ $\cos\theta = \frac{3}{10}$ Ahora usamos cos^{-1} para encontrar θ $\theta = cos^{1}\left(\frac{3}{10}\right)$ $h = \sqrt{20^2 - 6^2}$ $h = \sqrt{364}$ $h = 19.08\ pies$

Figura 28. Gráfica y explicación de resolución.
Elaboración: Granda S., (2020)

En la figura 28 se explica la resolución del problema propuesto, se ha bosquejado la gráfica de del triángulo a partir de los datos dados, se procede a determinar el ángulo ***θ*** con los valores de la hipotenusa y cateto dados y la razón trigonométrica adecuada, recuerde su calculadora debe estar en modo **DEG**, luego con el teorema de Pitágoras determinamos la altura solicitada.

2.3.3. Evaluación de expresiones que tienen funciones trigonométricas inversas

En esta sección se dará una explicación del proceso para encontrar valores exactos de expresiones como : $\boldsymbol{cos(sen^{-1}\,x)}$, expresiones que le serán necesarias conforme vaya profundizando en el estudio de la matemática moderna, específicamente el cálculo infinitesimal.

Estimado estudiante, acompáñeme en la solución de los siguientes ejemplos, donde podrá apreciar el uso de las funciones trigonométricas inversas, triángulos rectángulos y el teorema de Pitágoras que le servirán para el aprendizaje de los contenidos de esta sección.

<u>Ejemplo de composición de funciones trigonométricas y sus inversas:</u>

Encuentre el valor exacto de la expresión ***cos sen*** $(\ ^{-1}\ \frac{4}{5})$

Gráfica y explicación de resolución

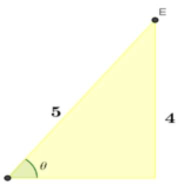
Interpretamos θ como un ángulo y trazamos un triángulo rectángulo con θ como uno de sus ángulos agudos.  	**Solución** Sea θ $sen^{1}\frac{4}{5}$. Por lo que θ es el número en el intervalo $\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]$ cuyo seno es $\frac{4}{5}$. En la gráfica usted puede observar que la hipotenusa es 5 y el cateto opuesto es 4, determinamos el cateto restante con el teorema de Pitágoras. $x - \sqrt{5^2-4^2}$ $x - \sqrt{25-16}$ $x \quad \sqrt{9}$ $x = 3$ De la figura obtene mos $\cos\left(sen^{1}\frac{4}{5}\right) = \cos\theta$ $\cos\theta = \frac{3}{5}$ Entonces $\cos\left(sen^{1}\frac{4}{5}\right) = \frac{3}{5}$

Figura 29. Gráfica y explicación de resolución.
Elaboración: Granda S., (2020)

En la figura 29 se muestra el proceso de resolución de la composición de funciones trigonométricas y sus inversas, es necesario que tome en cuenta estos procesos para resolver los problemas y ejercicios propuestos en la unidad.

RECURSOS DE APRENDIZAJE

Para comprender eficientemente las funciones trigonométricas: método del triángulo rectángulo y que además usted desarrolle los ejercicios y problemas propuesto en la actividad de práctica planteada en esta semana, recomiendo:

- Habilitar el hipervínculo y mirar atentamente el video titulado: Trigonometría. Resolver triángulos. Alturas.

- Es necesario que continúe con su proceso de aprendizaje, para esto le recomiendo que lea en el texto básico el contenido correspondiente a funciones seno inverso, coseno inverso y tangente inversa, solución de ángulos en triángulos rectángulos y evaluación de expresiones que tienen funciones trigonométricas inversas.

Retroalimentación: En este video se explican las funciones trigonométricas inversas y triángulos rectángulos. Así mismo, en el texto básico usted puede acceder a los fundamentos teóricos necesarios para la resolución de todos los ejercicios propuestos al final de la unidad.

Actividades de aprendizaje recomendadas

Compruebe lo aprendido resolviendo la siguiente actividad, recomiendo que adicionalmente conteste las interrogantes que se

Índice
Primer bimestre
Segundo bimestre
Solucionario
Referencias bibliográficas

encuentran en el texto básico, no olvide ampliar su conocimiento ¡investigando!

a. Para que una función tenga inversa debe ser ______________. Para definir la función inversa restringimos el ______________de la función seno al intervalo__________________.

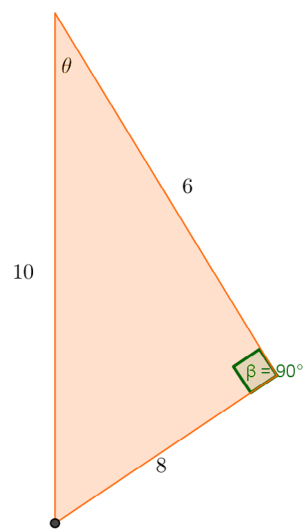
b. Las funciones seno inverso, coseno inverso y tangente inversa tienen los siguientes dominios y rangos.

   1. La función sen^{-1} tiene dominio _________y rango _________

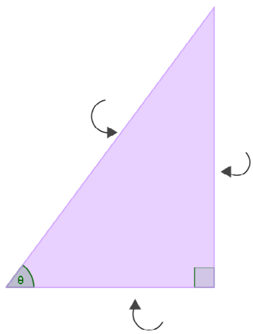
   2. La función cos^{-1} tiene dominio _________y rango _________

   3. La función tan^{-1} tiene dominio _________y rango _________

c. En el triángulo que se muestra podemos encontrar el ángulo como sigue .

a. $\theta = sen^{-1}$_____ b. $\theta = cos^{-1}$ ______ c. $\theta = tan^{-1}$ ______	

d. Para encontrar $\boldsymbol{sen}\left(\boldsymbol{cos}^{-1}\frac{5}{13}\right)$ hacemos que $\theta = \boldsymbol{cos}^{-1}\left(\frac{5}{13}\right)$ y se completa el triángulo rectángulo que se encuentra en la parte superior de la siguiente columna. Se encuentra que $\boldsymbol{sen}\left(\boldsymbol{cos}^{-1}\frac{5}{13}\right) =$

	$\left(\boldsymbol{cos}^{-1}\frac{\mathbf{5}}{\mathbf{13}}\right) =$ ____________

Con el desarrollo de esta actividad, usted pudo evidenciar su aprendizaje acerca de las funciones trigonométricas de ángulos, de haber existido alguna dificultad es necesario que usted revise una vez más su texto base y así lograr los resultados de aprendizaje esperados.

Recuerde que:
A través del chat de tutoría y consultas puede aclarar sus dudas e inquietudes con su docente.

"El único modo de hacer un gran trabajo, es amar lo que haces."

¡Siga adelante!

AUTOEVALUACIÓN SEGUNDA UNIDAD

Estimado estudiante, luego de culminar con el estudio de la segunda unidad Funciones Trigonométricas: Método del Triángulo Rectángulo es recomendable que usted realice la autoevaluación de lo aprendido, con la finalidad de retroalimentar aquellas inquietudes más importantes.

Índice
Primer bimestre
Segundo bimestre
Solucionario
Referencias bibliográficas

Autoevaluación 2

Instrucción: Marque la alternativa correcta.

1. Al convertir el ángulo de 200° en radianes se obtiene:

   a. $\frac{10\pi}{9}$
   b. $\frac{1\pi}{9}$
   c. $\frac{9\pi}{10}$

2. Al convertir el ángulo de $-\frac{3\pi}{2}$ en grados se obtiene:

   a. 270º
   b. -270º
   c. -720º

3. Si calculamos la longitud s del arco circular de radio y r = 9 ángulo central $\theta = \frac{5\pi}{6}$, se obtiene:

   a. $s = \frac{15\pi}{2} m$
   b. $s = \frac{15\pi}{2} m$
   c. $s = \frac{15\pi}{2} m$

4. Al calcular el área del sector circular se toma en cuenta un ángulo central θ = 0.5rad y radio r = 10u y se obtiene:

   a. $2.5u^2$
   b. $2.0u^2$
   c. $1.5u^2$

5. Si calculamos el ángulo de referencia para $\boldsymbol{\theta}$ = -199º obtenemos:

   a. $\underline{\boldsymbol{\theta}}$ = 75º

   b. $\underline{\boldsymbol{\theta}}$ = -75º

   c. $\underline{\boldsymbol{\theta}}$ = 255º

6. Al calcular el valor exacto de $\boldsymbol{sin\,sin}\ \frac{2\pi}{3}$ se obtiene:

   a. $\frac{\sqrt{3}}{2}$

   b. $-\frac{\sqrt{3}}{2}$

   c. $\frac{\sqrt{2}}{3}$

7. Si expresamos la tan tan $\boldsymbol{\theta}$ en términos del cos cos $\boldsymbol{\theta}$, tomando en cuenta que $\boldsymbol{\theta}$ está en el ***III*** se obtiene:

   a. $\pm\frac{\sqrt{1-cos^2\theta}}{coscos\ \theta}$

   b. $-\frac{\sqrt{1-cos^2\theta}}{coscos\ \theta}$

   c. $\frac{\sqrt{1-cos^2\theta}}{coscos\ \theta}$

8. Si conocemos el que el ángulo de 72° está entre dos lados de un triángulo cuyas longitudes son 7 y 9 respectivamente, podemos determinar su área y obtendríamos un valor de:

   a. 30 u^2
   b. 10 u^2
   c. 20 u^2

Índice
Primer bimestre
Segundo bimestre
Solucionario
Referencias bibliográficas

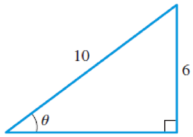
9. El valor exacto de la expresión $sen^{-1}\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$ en radianes se expresa:

a. $\frac{\pi}{4}$

b. $-\frac{\pi}{4}$

c. $\frac{\pi}{2}$

10. Al calcular el valor del ángulo en grados, redondeado a un decimal del



triángulo rectángulo, obtenemos:

a. θ = 36.7º

b. θ = 36.0º

c. θ = 37.0º

Ir al solucionario

Índice
Primer bimestre
Segundo bimestre
Solucionario
Referencias bibliográficas

Índice
Primer bimestre
Segundo bimestre
Solucionario
Referencias bibliográficas

Actividades finales del bimestre

Semana 8

Le recomiendo llevar a cabo las siguientes actividades, como trabajo previo a rendir la evaluación presencial del primer bimestre.

Actividad 1. Recupere las actividades de aprendizaje calificadas desarrolladas durante el primer bimestre.

Actividad 2. Organice un documento que contenga dicha información cuidando la presentación; si lo hizo a mano, puede fotografiar y organizar un documento en PDF.

Actividad 3. Suba el archivo del documento al EVA caso de ser necesario; este documento le servirá de apoyo para preparar su evaluación presencial en esta semana.

Actividad 4. Revise los contenidos del primer bimestre y participe de la evaluación presencial.

Para ello considere:

- Su diario de notas.
- Actividades de aprendizaje recomendadas.
- Actividades de aprendizaje calificadas.
- Actividades de aprendizaje interactivas; y,
- Evaluaciones parciales.

Actividades de aprendizaje recomendadas

Además de las actividades anteriores, para consolidar sus aprendizajes del primer bimestre, y prepararse a la prueba presencial en físico o virtual, sugiero:

- Revise cada uno de los conceptos estudiados en las dos unidades planificadas y desarrolladas en este primer bimestre.
- Realice suficientes ejercicios y problemas de aplicación de los diferentes conceptos, propiedades y leyes, de cada una de las unidades estudiadas, desarrollando los problemas propuestos al final de cada unidad del texto básico.
- Para cada una de las unidades, es valedero que sistematice el conocimiento aprendido, a través de la construcción de un mapa conceptual o algún otro organizador gráfico que estime conveniente.

Recuerde que:
A través del chat de tutoría y consultas puede aclarar sus dudas e inquietudes con su docente.

"Pegúntate si lo que estás haciendo hoy te acerca al lugar en el que quieres estar mañana"

¡Siga adelante!

Segundo bimestre

Resultado de aprendizaje 1

Determina las funciones trigonométricas a través del método de la circunferencia o del triángulo rectángulo para modelar y resolver problemas cotidianos.

Contenidos, recursos y actividades recomendadas

Estimados estudiantes:

Bienvenidos al Segundo Bimestre del curso de Sistemas de conocimiento de Funciones Trigonométricas y su Didáctica, en esta segunda parte del periodo académico, profundizaremos nuestros conocimientos sobre La Ley del Seno y del Coseno y de la Trigonometría Analítica, tanto en su componente teórico como en sus aplicaciones.

Con estos conocimientos, se facilitará la comprensión de la pedagogía y aplicación de la didáctica y estaremos en condiciones de generar aprendizajes significativos en nuestros estudiantes, quienes podrán resolver situaciones de la vida real aplicando la trigonometría.

Semana 9

Índice

Primer bimestre

Segundo bimestre

Solucionario

Referencias bibliográficas

Unidad 3. La Ley del Seno y del Cosenos

Estimado profesional en formación, continuamos estudiando y es momento de aprender la ley de senos, estas son fórmulas que le ayudarán a encontrar lados y ángulos desconocidos en un triángulo. Le permitirán usar la trigonometría en triángulos que no son rectángulos.

3.1. La ley de los senos

La ley de senos le permitirá hallar los otros dos lados y ángulos de un triángulo cuando usted tenga la siguiente información:

- Dos ángulos y un lado.
- Dos lados y un ángulo no incluido entre esos dos lados.

La ley de senos puede enunciarse de forma general de la siguiente manera: **En cualquier triángulo, la razón entre el seno de un ángulo y el lado opuesto a ese ángulo es igual a la razón entre el seno de otro ángulo y el lado opuesto a ese ángulo.**

Apreciado estudiante, le invito a desarrollar la aplicación de la ley de senos en la resolución de los siguientes ejemplos modelo.

EJEMPLOS MODELO

1. **Encontrar un ángulo o un lado** Use la ley de senos para encontrar el lado ***x*** o el ángulo ***θ*** indicados.

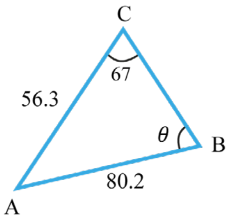
Gráfica y explicación de solución	
 	Para encontrar el ángulo θ usamos la ley de senos. $\frac{\sin\theta}{56.3}=\frac{\sin 67°}{80.20}$ $\sin\theta=\frac{\sin 67°(56.3)}{80.20}$ $\sin\theta=\frac{51.82}{80.20}$ $\theta=sen^{-1}\left(\frac{51.82}{80.20}\right)$ $\theta=40.25$ $\theta\approx 40°$

Figura 30. Gráfica y explicación de resolución.
Elaboración: Granda S., (2020)

En la figura 30. se explica la resolución del problema propuesto, a partir de los datos presentados en el triángulo del problema, recuerde que se procede a determinar el ángulo ***θ*** aplicando la ley de senos y su calculadora debe estar en modo **DEG.**

2. **La Torre Inclinada de Pisa.** El campanario de la catedral de Pisa, Italia, está inclinado 5.6° con respecto a la vertical. Una turista está de pie a 105 m. de su base, con la torre inclinada directamente hacia ella. Ésta mide el ángulo de elevación a lo alto de la torre y ve que es de 29.2°. Encuentre la longitud de la torre al metro más cercano.

Índice
Primer bimestre
Segundo bimestre
Solucionario
Referencias bibliográficas

Gráfica y explicación de resolución

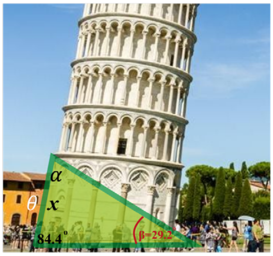
	Sí $\theta = 5.6°$ sabemos que su ángulo complementario mide $84.4°$. Sabiendo que la suma de los ángulos internos de un triángulo es 180°, tenemos $\alpha = 180° - 84.4° - 29.2°$ $\alpha = 66.4°$ Para encontrar la longitud de la torre usamos la ley de senos. $\frac{\sin 66.4}{105} = \frac{\sin 29.2°}{x}$ Despejamos x $x = \left(\frac{\text{sen } 29.2}{\text{sen } 66.4}\right)(105)$ $x = 55.90\ m$

Figura 31. Gráfica y explicación de resolución.
Elaboración: Granda S., (2020)

En la figura 31 se explica la resolución del problema propuesto, a partir de los datos presentados en el triángulo del problema, recuerde que se procede a determinar el ángulo $\boldsymbol{\theta}$ aplicando la ley de senos y su calculadora debe estar en modo **DEG** y consiguiente a esto se determina la longitud de la torre despejando el valor de esta de la aplicación de la ley de senos.

3.1.1. El caso ambiguo

Una vez que usted ha interiorizado la ley de senos en la resolución de triángulos oblicuángulos, analizaremos el caso donde para resolver un triángulo tenemos **LADO- LADO- ÁNGULO**, aquí puede haber dos triángulos, un triángulo o ningún triángulo, por esta razón, este caso se denomina caso ambiguo.

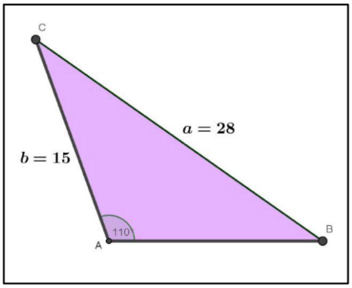
En su texto base, página 510, usted tiene una explicación detallada del contenido de esta sección, específicamente en la **FIGURA 6** , en donde se grafican las posibilidades del caso ambiguo, por lo que es necesario que usted analice e interiorice los procesos de resolución explicados en los ejemplos resueltos del texto, para que me acompañe en la resolución de algunos ejemplos que ilustren las posibilidades del caso ambiguo. ¡Continuemos aprendiendo juntos!

<u>EJEMPLOS MODELO</u>

1. **<u>Caso de una solución</u>**

Use la ley de senos para despejar todos los posibles triángulos que satisfacen las condiciones dadas.

a = 28 b = 15 $\sphericalangle_A = \mathbf{110°}$

<table>
<tr><th colspan="2">Gráfica y explicación de resolución.</th></tr>
<tr>
<td>Primero debe trazar el triángulo con la información dada, es un dibujo tentativo porque aún no se conoce los otros ángulos.


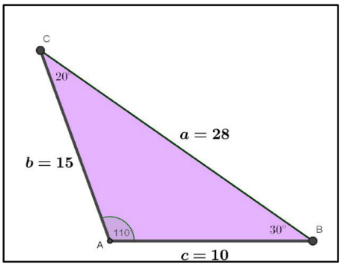

</td>
<td>Empleando la Ley de senos encontramos el ángulo B.
$$\frac{\sin A}{a} = \frac{\operatorname{sen} B}{b}$$
$$\operatorname{sen} B = \frac{(b)\operatorname{sen} A}{a}$$
$$\operatorname{sen} B = \frac{(15)\operatorname{sen} 110}{28}$$
$$\operatorname{sen} B = 0.5034067611$$
$$B = sen^{-1}(0.5034067611)$$
$$B = 30.225°$$
$$B \approx 30°$$
Por la sumatoria de los ángulos internos de un triángulo tenemos:
$$A + B + C = 180°$$
$$C = 180 - A - B$$
$$C = 180 - 110 - 30$$
$$C = 20°$$
Finalmente, hallamos la longitud $\boldsymbol{c}$, empleando la ley de senos.
$$\frac{\operatorname{sen} 20°}{c} = \frac{\sin 110°}{28}$$
$$c = \frac{(28)(\operatorname{sen} 20°)}{\operatorname{sen} 110°}$$
$$c = 10$$</td>
</tr>
</table>

Figura 32. Figura 32. Gráfica y explicación de resolución.
Elaboración: Granda S., (2020)

En la figura 32 se explica la resolución del problema propuesto, a partir de los datos dados en el triángulo del problema, recuerde que se procede a determinar el ángulo $\boldsymbol{\theta}$ aplicando la ley de senos y su calculadora debe estar en modo **DEG** y consiguiente a esto se determinar el cateto faltante despejando el valor de esta de la aplicación de la ley de senos.

2. Caso de dos soluciones

$$\boldsymbol{b = 25} \qquad \boldsymbol{c = 30} \qquad \boldsymbol{\measuredangle_B = 25°}$$

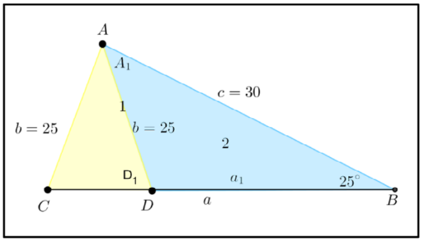
Gráfica y explicación de resolución.	
Primero debe traza r el triángulo con la información dada, es un dibujo tentativo porque aún no se conoce los otros ángulos y lados. En este caso se puede apreciar que el cateto $\boldsymbol{b}$ puede ubicarse en dos posiciones, las que dan origen a los triángulos $\triangle ABC\ o\ \Delta_1$ y $\triangle ADB\ o\ \triangle_2$.  En este gráfico usted puede visualizar las dos soluciones que tiene este problema.	Resolveremos cada triángulo. a. $\triangle ABC\ o\ \Delta_1$ Aplicamos Ley de Senos para determinar la medida del $\measuredangle C$ y $\measuredangle A$ $\frac{\text{sen } 25°}{25} = \frac{\text{sen } C}{30}$ $\sin C = \frac{(30)(\sin 25°)}{25}$ $C = 30.47$ El ángulo A se obtiene $\measuredangle A = 180° - 25° - 30.47°$ $\measuredangle A = 124.53°$ La longitud del lado $\boldsymbol{a}$ se obtiene por medio de la ley de senos. $\frac{\text{sen } 124.53°}{a} = \frac{\text{sen } 25°}{25}$ $a = \frac{(25)(\sin 124.53)}{\sin 25}$ $a = 48.73$ La segunda solución se forma en el triángulo $\Delta ADB\ \Delta\ o\ \Delta_2$, aquí se cumple que $\measuredangle C = \measuredangle D_1 = 30.47°$ ya que se trata de un triángulo isósceles, por lo que el ángulo D se obtiene: $\measuredangle D = 180° - 30.47 = 149.53°$ El ángulo $A_1 = 180° - 25° - 149.53°$ $A_1 = 5.47°$ Para el cateto a_1 empleamos Ley de Senos $\frac{\text{sen } 25°}{25} = \frac{\text{sen } A_1}{a_1}$ $a_1 = \frac{(25)(\text{sen } 5.47°)}{\text{sen } 25}$ $a_1 = 5.64$ Las dos soluciones están dadas.

Figura 33. Gráfica y explicación de resolución.
Elaboración: Granda S., (2020)

En la figura 33 se explica la resolución del problema propuesto, a partir de los datos dados en el triángulo del problema, recuerde que se procede a determinar el ángulo ***θ*** aplicando la ley de senos y su calculadora debe estar en modo **DEG,** en este caso tenemos dos posibles soluciones .

3. <u>Caso sin solución</u>

$$\boldsymbol{a = 20} \qquad \boldsymbol{c = 45} \qquad \measuredangle_B = 125°$$

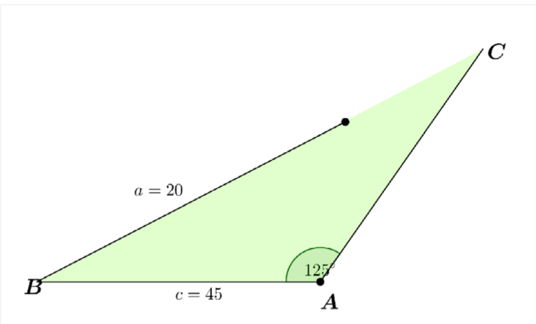
Gráfica y explicación de solución	
Primero debemos trazar el triángulo con la información dada. 	Para determinar el $\measuredangle C$ empleamos la Ley de Senos. $\frac{\sin 125}{20} = \frac{\text{sen}\, C}{45}$ $\text{sen}\, C = \frac{(45)(\text{sen}\, 125°)}{20}$ $\text{sen}\, C = 1.8430$ $C = sin^{-1}(1.8430)$ $C = ERROR$
Puesto que el seno de un ángulo nunca es mayor a 1 concluimos que no hay triángulo que satisfaga las condiciones de este problema.	

Figura 34. Gráfica y explicación de resolución.
Elaboración: Granda S., (2020)

En la figura 34 se explica la resolución del problema propuesto, a partir de los datos dados en el triángulo del problema, recuerde que se procede a determinar el ángulo ***θ*** aplicando la ley de senos y su calculadora debe estar en modo **DEG**, en este caso observamos que no es posible dar una solución.

RECURSOS DE APRENDIZAJE

Para comprender eficientemente las funciones trigonométricas: método del triángulo rectángulo y que además usted desarrolle los ejercicios y problemas propuesto en la actividad de práctica planteada en esta semana, recomiendo:

- Habilitar el hipervínculo y mirar atentamente el video titulado: Trigonometría. Teorema de los senos y teorema del coseno.
- Continuar con su proceso de formación académica , para esto le solicito leer el texto básico y afianzar el contenido teórico sobre la ley de senos y el caso ambiguo.

Retroalimentación: En estos videos se explica la ley de senos y su aplicación en la solución de problemas del entorno. Así mismo, en el texto básico usted puede acceder a los fundamentos teóricos necesarios para la resolución de todos los ejercicios propuestos al final de la unidad.

Actividades de aprendizaje recomendadas

Escoja y resuelva problemas de aplicación del ejercicio 6.5 del apartado aplicaciones, esto le brindará habilidades cognitivas de orden superior como plantear, aplicar y resolver problemas.

Recuerde que:
A través del chat de tutoría y consultas puede aclarar sus dudas e inquietudes con su docente.

"La confianza en sí mismo es el primer secreto del éxito"

¡Siga adelante!

Semana 10

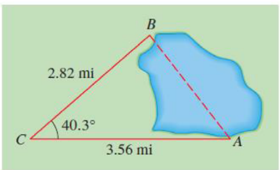
3.2. La ley de los cosenos

Estimado estudiante, continuamos en esta semana con la solución de un triángulo oblicuo cuando usted tenga los siguientes casos: dos lados y el ángulo entre ellos (LAL) y tres lados (LLL), es aquí donde haremos uso de la ley de los cosenos, por lo que debe revisar el desarrollo del siguiente ejemplo modelo, que le servirán de referencia para que usted logre un aprendizaje efectivo del tema.

<u>PROBLEMA MODELO DE APLICACIÓN</u>

Encontrar un lado. Para hallar la distancia de un lado a otro de un pequeño lago un topógrafo ha tomado las mediciones que se ilustran. Encuentre la distancia de un lado a otro del lago usando esta información.

<table>
<tr><th colspan="2">Gráfica y explicación de resolución</th></tr>
<tr><td>



</td><td>

Solución : Encontramos la di stancia $\overline{AB} = c$, usando la ley de cosenos.

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\ \cos C$$
$$c^2 = (2.82mi)^2 + (3.56mi)^2 - 2(2.82mi)(3.56\ mi)\ \cos 40.3°$$
$$c^2 = 5.21mi^2$$
$$c = \sqrt{5.21mi^2}$$
$$c = 2.30\ mi$$

</td></tr>
</table>

Figura 35. Gráfica y explicación de resolución.
Elaboración: Granda S., (2020)

En la figura 35 se explica la resolución del problema propuesto, a partir de los datos dados en el triángulo, recuerde usted que se procede a determinar la distancia solicitada por medio de la ley de cosenos, así mismo para esto su calculadora debe estar en modo DEG.

3.2.1. Navegación: orientación y rumbo

El rumbo representa la dirección y sentido medido a partir de los puntos cardinales norte o sur, el ángulo y la posición este u oeste. Esta definición será usada para resolver el siguiente problema de aplicación.

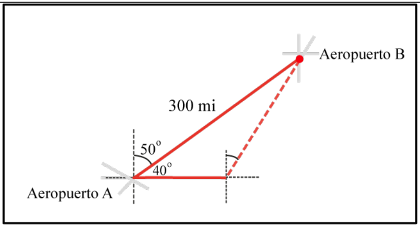
PROBLEMA MODELO DE APLICACIÓN

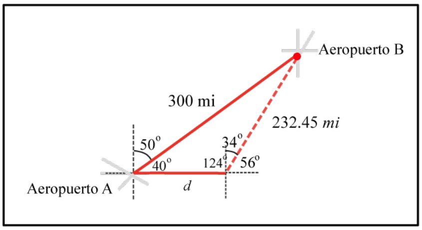
Navegación El aeropuerto B está a 300 millas del aeropuerto A a un rumbo N 50°E (vea la figura). Un piloto que desea volar de A a B se equivoca y vuela en dirección al Este a 200 mi/h durante 30 minutos, cuando se da cuenta de su error.

a. ¿A qué distancia está el piloto de su destino en el momento en que se percata del error?

b. ¿Qué rumbo debe tomar su avión para llegar al aeropuerto B?

Gráfica y explicación de resolución





De lo expuesto en el problema sabemos que:

$$v = 200\frac{mi}{h}$$

$$t = 30\ min = 0.5\ h$$

Con esto se determina la distancia del piloto al Este d.

$$d = 200\frac{mi}{h}(0.5h) = 100\ mi$$

El ángulo entre los catetos de su viaje erróneo es

$\measuredangle A = 90° - 50° = 40°$

Ahora tenemos LAL, por lo que debemos aplicar la Ley de Cosenos.

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos A$$

$$a^2 = (100)^2 + (300)^2 - 2(100)(300)\cos 40°$$

$$a^2 = 54037.33341$$

$$a = 232.45\ mi$$

$$a = 232.45\ mi$$

Para determinar el rumbo que debe tomar el avión para llegar al aeropuerto B empleamos la ley cosenos una vez más.

$$\cos C = \frac{c^2 - a^2 - b^2}{-2ab}$$

$$\cos c = \frac{(300)^2 - (232.45)^2 - (100)^2}{-2(232.45)(100)}$$

$$\cos c = -0.5585501721$$

$$c = cos^{-1}(-0.5585501721)$$

$$c = 123.95$$

$$c \approx 124°$$

Por la definición de rumbo tenem os que

$\measuredangle A = 180° - 124° = 56°$

$$\theta = 90° - 56° = 34°$$

Entonces el rumbo es $N\ 34°\ E$

Figura 36. Gráfica y explicación de resolución.
Elaboración: Granda S., (2020)

En la figura 36 se explica la resolución del problema propuesto, a partir de los datos dados en el triángulo, recuerde estimado estudiante que se procede a determinar la distancia y el rumbo solicitado por medio de la ley de cosenos, para esto su calculadora debe estar en modo DEG.

3.2.2. El área de un triángulo

El área de un triángulo se constituye una aplicación importante de la Ley de cosenos, está área se determina por medio de las longitudes de sus lados como se explica en el siguiente problema de aplicación.

<u>PROBLEMA MODELO DE APLICACIÓN</u>

Valor de un terreno. Un terreno en el centro de Columbia está valuado en $20 el pie cuadrado. ¿Cuál es el valor de un lote triangular con lados de longitudes 112, 148 y 190 pies?

$$\boldsymbol{A = \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)} \rightarrow FÓRMULA\ DE\ HERÓN}$$

$$\boldsymbol{s = \frac{1}{2}(a+b+c) \rightarrow semiperímetro}$$

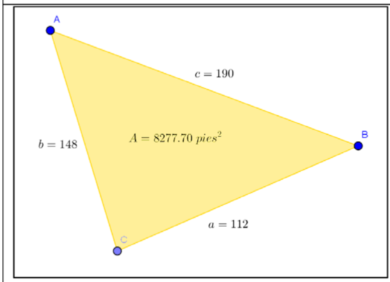
Gráfica y explicación de resolución	
	Solución: El semiperímetro de lote es $s = \frac{112+148+190}{2} = 225$ Para encontrar el A, empleamos la fórmula de Herón. $A = \sqrt{225(225-112)(225-148)(225-190)}$ $A = \sqrt{68520375}$ $A = 8277.70\ pies^2$ Finalmente determinamos el costo del terre no. $costo\ Terreno = A \times \$20$ $costo\ \ Terreno = 8277.70\ \times 20 \approx \$165554$

Figura 37. Gráfica y explicación de resolución.
Elaboración: Granda S., (2020)

En la figura 37. se explica la resolución del problema propuesto, a partir de los datos dados en el triángulo, recuerde que se procede a determinar el área solicitada por medio de la fórmula de Herón.

RECURSOS DE APRENDIZAJE

Para comprender eficientemente la ley de cosenos y que además usted participe del foro académico planteado en esta semana, recomiendo:

- Habilitar el hipervínculo y mirar atentamente el video titulado :Trigonometría. Teorema de los senos y teorema del coseno.

Retroalimentación: En estos videos se explica la ley del coseno y su aplicación en la resolución de problemas de la vida cotidiana. Así mismo, en el texto básico usted puede acceder a los fundamentos teóricos necesarios para la resolución de todos los ejercicios propuestos al final de la unidad.

Actividades de aprendizaje recomendadas

a. Elabore un banco de preguntas tomando en cuenta los ejercicios y problemas propuestos de esta sección.

b. Resuelva el banco de preguntas superando las dificultades por medio de la investigación y la consulta a su docente.

Recuerde que:
A través del chat de tutoría y consultas puede aclarar sus dudas e inquietudes con su docente.

"La confianza en sí mismo es el primer secreto del éxito"

¡Siga adelante!

Índice

Primer bimestre

Segundo bimestre

Solucionario

Referencias bibliográficas

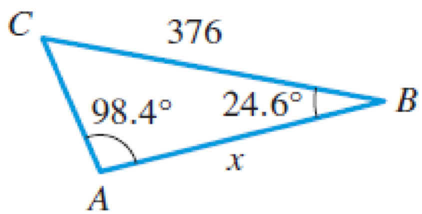
AUTOEVALUACIÓN

Estimado estudiante, luego de culminar con el estudio de la tercera unidad Ley del Seno y del Coseno es recomendable que usted realice la autoevaluación de lo aprendido, con la finalidad de retroalimentar aquellas inquietudes más importantes.

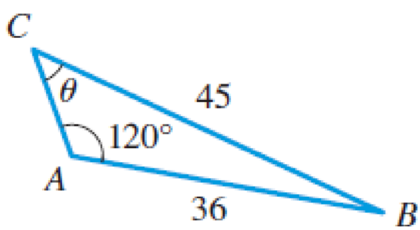
Autoevaluación 3

Instrucción: Marque la alternativa correcta.

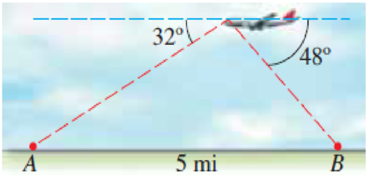
1. Si empleamos la ley de senos para encontrar el lado *x* del triángulo dado, obtenemos:

	a. 318.8 b. 319.0 c. 320.0

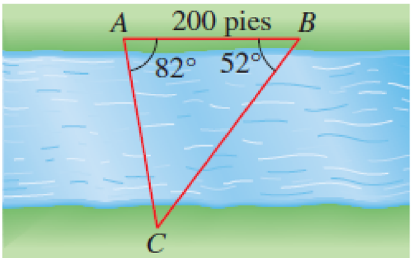
2. Si empleamos la ley de senos para encontrar el ángulo *θ* del triángulo dado, obtenemos:

	a. 45º b. 44º c. 43º

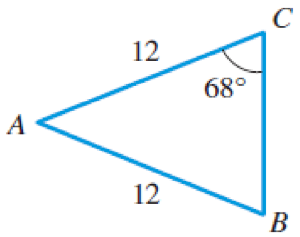
3. Si un piloto está volando sobre una carretera recta. Él determina los ángulos de depresión a dos señales de distancia, colocadas a 5 millas entre sí, y encuentra que son de 32° y 48° como se muestra en la fi gura entonces la distancia entre el avión y el punto A es

 	a. 4.5 mi b. 3.8 mi c. 5.0 mi

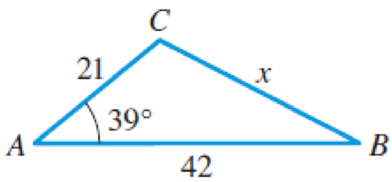
4. Para hallar la distancia de una orilla a la otra de un río, una experta en topografía escoge los puntos A y B, que están a 200 pies entre sí en un lado del río (vea la figura). A continuación, ella escoge un punto de referencia C en el lado opuesto del río y encuentra que **∠BAC ≈ 82° y ∠ABC ≈ 52°**. La aproximación de la distancia de A a C es:

 	a. $\underline{AC} = 219.09\ \boldsymbol{pies}$ b. $\underline{AC} = 210.00\ \boldsymbol{pies}$ c. $\underline{AC} = 218.09\ \boldsymbol{pies}$

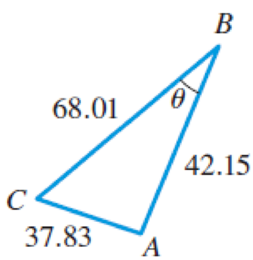
5. Al resolver el triángulo dado aplicando la Ley de Senos el valor del ángulo $\measuredangle \boldsymbol{A}$ y el lado $\underline{\boldsymbol{CB}}$ son:

	a. $\underline{CB} = \mathbf{10}$ **y** $\measuredangle A = \mathbf{45°}$ b. $\underline{CB} = \mathbf{9}$ **y** $\measuredangle A = \mathbf{44°}$ c. $\underline{CB} = \mathbf{8}$ **y** $\measuredangle A = \mathbf{43°}$

6. Si empleamos la ley de cosenos para encontrar el lado *x* del triángulo dado, obtenemos:

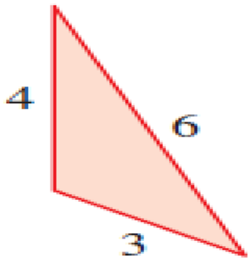
	a. 29 b. 30 c. 28

7. Si empleamos la ley de cosenos para encontrar el ángulo θ del triángulo dado, obtenemos:

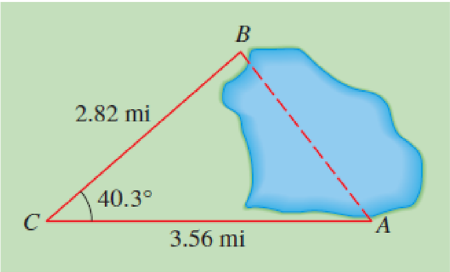
	a. 29.89º b. 31.00º c. 27.99º

Índice
Primer bimestre
Segundo bimestre
Solucionario
Referencias bibliográficas

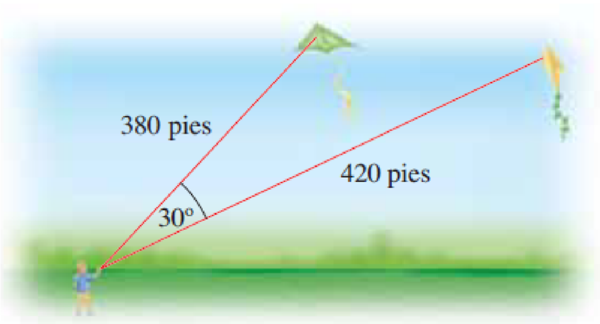
8. Si aplica la **Fórmula de Herón** para determinar el área del triángulo de lados , se obtiene:

	a. 5.33 u² b. 4.33 u² c. 6.33 u²

9. Si para hallar la distancia de un lado a otro de un pequeño lago, un topógrafo ha tomado las mediciones que se ilustran. La distancia de un lado a otro del lago usando esta información es:

	a. 2.35 *mi* b. 2.30 *mi* c. 3.30 *mi*

10. Si un niño está haciendo volar dos cometas al mismo tiempo; tiene 380 pies de cuerda a una de las cometas y 420 pies para la otra y estima que el ángulo entre las dos cuerdas es de 30°. La distancia aproximada entre las cometas es:

	a. 209.63 *pies* b. 211.63 *pies* c. 210.63 *pies*

Ir al solucionario

Índice
Primer bimestre
Segundo bimestre
Solucionario
Referencias bibliográficas

Índice
Primer bimestre
Segundo bimestre
Solucionario
Referencias bibliográficas

Resultado de aprendizaje 2

Aplica los principios e identidades fundamentales de la trigonometría elemental en el estudio de la trigonometría analítica.

Contenidos, recursos y actividades de aprendizaje

Semana 11

Unidad 4. Trigonometría analítica

En la presente unidad, estimado (a) profesional en formación, tendrá como reto estudiar un enfoque mayormente algebraico a las funciones trigonométricas ya tratadas con anterioridad. No solo es importante que usted conozca sus características geométricas y/o gráficas para la resolución de problemas, sino que, además, deberá conocer las propiedades algebraicas que permitan simplificar, y, como consecuencia, demostrar identidades trigonométricas. Descubriremos en conjunto cada estrategia empleada para llegar a este fin.

> ¿Está listo? Pues empecemos, le aseguro será divertido.

4.1. Identidades trigonométricas

A estas alturas usted ya está familiarizado con muchas de las identidades trigonométricas, remitámonos por favor a la tabla resumen de la página 538 del texto base. Puesto que las usaremos más adelante, convendrá tenerlas a la mano, la reproducimos a continuación:

Identidades Trigonométricas Fundamentales

TIPO	
Recíprocas	$\csc x = \frac{1}{\operatorname{sen} x}$ $\quad \sec x = \frac{1}{\cos x}$ $\quad \cot x = \frac{1}{\tan x}$ $\tan x = \frac{\operatorname{sen} x}{\cos x}$ $\quad \cot x = \frac{\cos x}{\operatorname{sen} x}$
Pitagóricas	$\operatorname{sen}^2 x + \cos^2 x = 1$ $\tan^2 x + 1 = \sec^2 x$ $1 + \cot^2 x = \csc^2 x$
Identidades pares e impares	$\operatorname{sen}(-x) = -\operatorname{sen} x$ $\quad \cos(-x) = \cos x$ $\quad \tan(-x) = -\tan x$
Identidades de cofunciones	$\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{2} - u\right) = \cos u$ $\quad \tan\left(\frac{\pi}{2} - u\right) = \cot u$ $\quad \sec\left(\frac{\pi}{2} - u\right) = \csc u$ $\cos\left(\frac{\pi}{2} - u\right) = \operatorname{sen} u$ $\quad \cot\left(\frac{\pi}{2} - u\right) = \tan u$ $\quad \csc\left(\frac{\pi}{2} - u\right) = \sec u$

Figura 38. Identidades Trigonométricas Fundamentales.
Fuente: Stewart, Redlin y Watson, (2017), p.538
Elaboración: Granda S., (2020)

En la figura usted puede observar las identidades trigonométricas fundamentales, las mismas que le servirán para comprender y aplicar la trigonometría analítica ya sea en la simplificación o demostración de identidades.

Índice
Primer bimestre
Segundo bimestre
Solucionario
Referencias bibliográficas

4.1.1. Simplificación de una expresión trigonométrica

Estimado estudiante para comprender el proceso de simplificación de expresiones trigonométricas es necesario que preste vital atención al procedimiento de reescribir la expresión en términos de seno y coseno y la combinación de fracciones utilizando común denominador como estrategias de simplificación.

¿Qué le parece, si nos aventuramos a realizar un ejercicio utilizando estos conceptos? ¡Vamos!

Ejercicio. Escribir la expresión trigonométrica en términos de seno y coseno y luego simplifique.

$\operatorname{sen} u + \cot u \cos u = \operatorname{sen} u + \dfrac{1}{\tan u} \cos u$	*Aplicando Identidad recíproca*
$= \operatorname{sen} u + \left(\dfrac{\cos u}{\operatorname{sen} u}\right) \cos u$	*Aplicando Identidad recíproca*
$= \dfrac{\operatorname{sen}^2 u + \cos^2 u}{\operatorname{sen} u}$	*Aplicando común denominador*
$= \dfrac{1}{\operatorname{sen} u}$	*Aplicando identidad de Pitágoras*
$= \csc u$	*Aplicando Identidad recíproca*

RECURSOS DE APRENDIZAJE

Para comprender eficientemente la trigonometría analítica, específicamente la simplificación de expresiones trigonométricas y que además usted desarrolle los ejercicios y problemas propuestos en la actividad de práctica planteada en esta semana, recomiendo:

- Habilitar el hipervínculo y mirar atentamente el video titulado: Simplificar expresiones trigonométricas.
- Estimado estudiante, continúe con su proceso de formación académica y para esto le recomiendo leer el texto básico en el contenido que corresponde a la simplificación de identidades trigonométricas.

Retroalimentación: En este video se explica la trigonometría analítica específicamente la simplificación de expresiones trigonométricas. Así mismo, en el texto básico usted puede acceder a los fundamentos teóricos necesarios para la resolución de todos los ejercicios propuestos al final de la unidad.

Actividades de aprendizaje recomendadas

a. Elabore un banco de preguntas tomando en cuenta los ejercicios y problemas propuestos de esta sección.

b. Resuelva el banco de preguntas superando las dificultades por medio de la investigación y la consulta a su docente.

Recuerde que:
A través del chat de tutoría y consultas puede aclarar sus dudas e inquietudes con su docente.

"El éxito en la vida no se mide por lo que logras, sino por los obstáculos que superas"

¡Siga adelante!

Semana 12

4.2. Demostración de identidades trigonométricas

Ahora abarcaremos la parte medular del tema. Una vez que se haya familiarizado con la simplificación, podemos demostrar que una ecuación trigonométrica representa una identidad. Para que usted realice una correcta demostración debe:

- Empezar con un lado…
- Usar identidades conocidas…
- Convertir a senos y cosenos…

Adicional a esto, le recomiendo tener claro el uso de operaciones reversibles para las demostraciones, como se lo indico en los siguientes ejemplos para que usted comprenda y afiance su conocimiento. ¡Vamos entonces ¡

Ejercicio. Verifique la identidad (ejercicio propuesto 65 de la página 543 del texto base).

$\frac{1-\cos x}{\operatorname{sen} x}+\frac{\operatorname{sen} x}{1-\cos x}=2\csc x$	*Empezamos por el lado izquierdo*
$LI=\frac{(1+\cos x)^2+\operatorname{sen}^2 x}{\operatorname{sen} x\,(1-\cos x)}$	*Aplicando Denominador común*
$=\frac{1-2\cos x+\cos^2 x+\operatorname{sen}^2 x}{\operatorname{sen} x\,(1-\cos x)}$	*Desarrollando producto notable*
$=\frac{1-2\cos x+1}{\operatorname{sen} x\,(1-\cos x)}$	*Aplicando identidad pitagórica*
$=\frac{2-2\cos x}{\operatorname{sen} x\,(1-\cos x)}=\frac{2(1-\cos x)}{\operatorname{sen} x\,(1-\cos x)}$	*Sumando y factorizando*
$=\frac{2}{\operatorname{sen} x}=2\csc x=LD$	*Simplificando y aplicando recíproca*

Como podrá apreciar, mientras mayor sea el número de ejercicios que realice, las identidades vendrán con mayor facilidad a su mente.

RECURSOS DE APRENDIZAJE

Para comprender eficientemente la trigonometría analítica, específicamente la demostración de identidades trigonométricas y que además usted responda el cuestionario propuesto en línea en esta semana, recomiendo:

- Habilitar el hipervínculo y mirar atentamente el video titulado: Identidades trigonométricas.

Índice
Primer bimestre
Segundo bimestre
Solucionario
Referencias bibliográficas

- Continuar con su proceso de formación académica y para esto le recomiendo leer el texto básico en el contenido que corresponde a la simplificación de identidades trigonométricas.

Retroalimentación: En este video se explica la trigonometría analítica, específicamente la simplificación de expresiones trigonométricas. Así mismo, en el texto básico usted puede acceder a los fundamentos teóricos necesarios para la resolución de todos los ejercicios propuestos al final de la unidad.

Actividades de aprendizaje recomendadas

a. Elabore un banco de preguntas tomando en cuenta los ejercicios y problemas propuestos de esta sección.

b. Resuelva el banco de preguntas superando las dificultades por medio de la investigación y la consulta a su docente.

Recuerde que:
A través del chat de tutoría y consultas puede aclarar sus dudas e inquietudes con su docente.

El éxito depende de la preparación previa, y sin ella seguro que llegue el fracaso"

Confucio

¡Siga adelante!

Contenidos, recursos y actividades de aprendizaje

En la presente semana estimado (a) profesional en formación, abarcamos como temática las fórmulas de adición y sustracción. Reconocerá conforme vamos aprendiendo que estas fórmulas son importantes tanto en cálculo como en física y servirán como complemento a lo anteriormente aprendido.

Índice
Primer bimestre
Segundo bimestre
Solucionario
Referencias bibliográficas

Me complace enormemente su dedicación y esfuerzo que ha dedicado hasta el momento. Le exhorto a seguir con el mismo ánimo estas interesantes temáticas.

Semana 13

4.3. Fórmula de adición y sustracción

4.3.1. Fórmula de adición y sustracción

Estimado estudiante,en la presente semana se expondrá las fórmulas de adición y sustracción para el seno, coseno y tangente, es necesario que usted analice la demostración de cada una de estas fórmulas, expuestas en su texto base y a partir de esto usted descubra las pistas necesarias para resolver los ejercicios de aplicación, correspondientes a esta unidad.

Una vez afianzados en las bases de las fórmulas de adición y sustracción avancemos a realizar juntos el siguiente ejemplo práctico…

Ejercicio. Encuentre el valor exacto de la expresión:

$$sen\,\frac{19\pi}{2}$$

Como $\frac{19\pi}{2}=\frac{4\pi}{3}+\frac{\pi}{4}$, aplicando la fórmula de la adición Seno da

$$sen\,\frac{19\pi}{2}=sen\left(\frac{4\pi}{3}+\frac{\pi}{4}\right)$$

$$=sen\frac{4\pi}{3}\,cos\,\frac{\pi}{4}+cos\,\frac{4\pi}{3}sen\,\frac{\pi}{4}$$

$$=\left(\frac{-\sqrt{3}}{2}\right)\frac{\sqrt{2}}{2}+\left(\frac{-1}{2}\right)\frac{\sqrt{2}}{2}$$

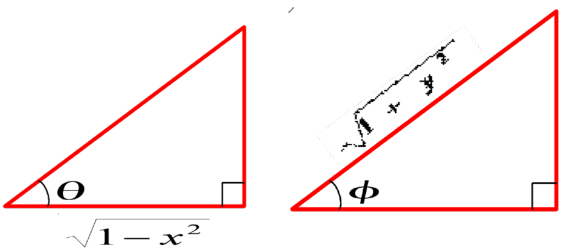
$$=-\frac{\sqrt{6}}{4}-\frac{\sqrt{2}}{4}=\frac{-\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}=\frac{-\sqrt{2}(\sqrt{3}+1)}{4}$$

4.3.2. Evaluación de expresiones que contienen funciones trigonométricas inversas

Apreciado estudiante, en la presente semana estudiaremos el proceso para evaluar las expresiones que contienen funciones trigonométricas inversas. Veamos el siguiente caso:

$$\cos\left(sen^{-1}x - \tan^{-1}y\right)$$

Sea $\theta = sen^{-1}x$ y $\phi = \tan^{-1}y$ y utilizando los siguientes triángulos como estrategia:



De los triángulos tenemos:

$$\cos\theta = \sqrt{1-x^2} \quad \cos\phi = \frac{1}{\sqrt{1+y^2}} \quad sen\,\theta = x \quad sen\,\phi = \frac{y}{\sqrt{1+y^2}}$$

De la fórmula de la sustracción para cosenos se tiene:

$$\cos\left(sen^{-1}x - \tan^{-1}y\right) = \cos(\theta - \phi)$$

$$= \cos\theta\cos\phi + sen\,\theta\, sen\,\phi$$

$$= \sqrt{1-x^2}\,\frac{1}{\sqrt{1+y^2}} + x\frac{y}{\sqrt{1+y^2}}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{1+y^2}}\left(\sqrt{1-x^2} + xy\right)$$

RECURSOS DE APRENDIZAJE

Para comprender eficientemente la trigonometría analítica, específicamente las fórmulas de adición y sustracción y que además usted participe correctamente del foro académico propuesto en esta semana, recomiendo:

- Habilitar el hipervínculo y mirar atentamente el video titulado: Trigonometría. Razones de la suma.

- Continúe con su proceso de formación académica y para esto lea el texto básico en el contenido que corresponde a las fórmulas de adicción y sustracción, evaluación de expresiones que contienen funciones trigonométricas inversas y expresiones de la forma ***Asenx + B cos x***

Retroalimentación: En este video se explica la trigonometría analítica específicamente el uso de las fórmulas de adición y sustracción. Así mismo, en el texto básico usted puede acceder a los fundamentos teóricos necesarios para la resolución de todos los ejercicios propuestos al final de la unidad.

Actividades de aprendizaje recomendadas

a. Elabore un banco de preguntas tomando en cuenta los ejercicios y problemas propuestos de esta sección.

b. Resuelva el banco de preguntas superando las dificultades por medio de la investigación y la consulta a su docente.

Índice
Primer bimestre
Segundo bimestre
Solucionario
Referencias bibliográficas

Recuerde que:
A través del chat de tutoría y consultas puede aclarar sus dudas e inquietudes con su docente.

El éxito depende de la preparación previa, y sin ella seguro que llegue el fracaso"

Confucio

¡Siga adelante!

Semana 14

4.4. Fórmulas de ángulo doble, semiángulo y producto a suma

En esta semana nos referimos a las fórmulas consideradas como fórmulas de ángulos múltiples. Estas fórmulas son consecuencia inmediata de las fórmulas de adición, en su texto base usted las encontrará con sus respectivas demostraciones, así que es necesario hacer una lectura comprensiva de las mismas y de los ejemplos resueltos, para a continuación analizar los problemas que resolveré en la presente guía didáctica, con el fin de que usted siga aprendiendo de esta asignatura de forma exitosa.

4.4.1. Fórmulas de ángulo doble

Fórmula de seno	Fórmula de coseno	Fórmula de tangente
$\mathbf{sen\,2x = 2\,sen\,x\cos x}$	$\cos 2x = cos^2x - sen^2x$	$\tan 2x = \dfrac{2\tan x}{1 - tan^2x}$

Figura 39. Figura 39. Fórmulas de ángulo doble.
Fuente: Stewart, Redlin y Watson, (2017), p.554
Elaboración: Granda S., (2020)

En esta figura usted puede observar las fórmulas del ángulo doble, las mismas que le servirán para comprender y aplicar la trigonometría analítica en la demostración de identidades que contengan ángulos dobles y posteriormente para resolver ecuaciones trigonométricas.

<u>EJEMPLO MODELO</u>

Encuentre ***sin* 2*x*, *cos* 2*x*** y ***tan* 2*x*** a partir de la información dada.

Explicación de resolución.	
$\cos x = \frac{4}{5}, \quad \csc x < 0$	
Para emplear las fórmulas del ángulo doble es necesario determinar el $\operatorname{sen} x$ $\operatorname{sen} x = \pm\sqrt{1 - cos^2 x}$ Tomamos el signo negativo ya que θ está en el IV cuadrante. $\operatorname{sen} x = -\sqrt{1 - \left(\frac{4}{5}\right)^2}$ $\operatorname{sen} x = -\sqrt{1 - \left(\frac{16}{25}\right)}$ $\operatorname{sen} x = -\sqrt{\frac{25-16}{25}}$ $\operatorname{sen} x = -\sqrt{\frac{9}{25}}$ $\operatorname{sen} x = -\frac{3}{5}$ También es necesaria la $\tan x$ $\tan x = \frac{\operatorname{sen} x}{\cos x} = \frac{-\frac{3}{5}}{\frac{4}{5}}$ $\tan x = \frac{-(3)(5)}{(4)(5)}$ $\tan x = -\frac{3}{4}$	Ángulos dobles $\operatorname{sen} 2x = 2 \operatorname{sen} x \cos x$ $\operatorname{sen} 2x = 2\left(-\frac{3}{5}\right)\left(\frac{4}{5}\right)$ $\operatorname{sen} 2x = -\frac{24}{25}$ $\cos 2x = cos^2 x - sen^2 x$ $\cos 2x = \left(\frac{4}{5}\right)^2 - \left(-\frac{3}{5}\right)^2$ $\cos 2x = \frac{16}{25} - \frac{9}{25}$ $\cos 2x = \frac{7}{25}$ $\tan 2x = \frac{2 \tan x}{1 - tan^2 x}$ $\tan 2x = \frac{2\left(-\frac{3}{4}\right)}{1 - \left(-\frac{3}{4}\right)^2}$ $\tan 2x = \frac{-\frac{3}{2}}{1 - \frac{9}{16}}$ $\tan 2x = \frac{-\frac{3}{2}}{\frac{16-9}{16}}$ $\tan 2x = \frac{-\frac{3}{2}}{\frac{7}{16}}$ $\tan 2x = -\frac{(3)(16)}{(2)(7)}$ $\tan 2x = -\frac{24}{7}$

Figura 40. Figura 40. Explicación de Resolución.
Elaboración: Granda S., (2020)

En la figura 40. se explica la resolución del problema propuesto a partir de los datos presentados, recuerde estimado estudiante que se procede a determinar la solución empleando las fórmulas del ángulo doble.

4.4.2. Fórmulas de semiángulo

$\sin\frac{u}{2} = \pm\sqrt{\frac{1-\cos u}{2}}$	$\cos\frac{u}{2} = \pm\sqrt{\frac{1+\cos u}{2}}$	$\tan\frac{u}{2} = \frac{1-\cos u}{\text{sen}\, u} = \frac{\text{sen}\, u}{1+\cos u}$
La opción del signo $+$ *o* $-$ depende del cuadrante en el que se encuentre $u/2$		

Figura 41. Figura 41. Fórmulas de semiángulo.
Fuente: Stewart, Redlin y Watson, (2017), p.556
Elaboración: Granda S., (2020).

En esta figura usted puede observar las fórmulas de semiángulo que le servirán para comprender y aplicar la trigonometría analítica en la demostración de identidades que contengan semiángulo posteriormente para resolver ecuaciones trigonométricas.

EJEMPLO MODELO

Use una fórmula de semiángulo apropiada para encontrar el valor exacto de la expresión ***tan*15º**

Solución: Ya que **15º** es la mitad de **30º** usted debe utilizar la fórmula de semiángulo de la tangente con ***u* = 30º**, debe escoger el signo + ya que **15º** está en el primer cuadrante.

$$tan\,\frac{u}{2} = \frac{1-cos\,u}{sen\,u}$$

$$tan\,\frac{30°}{2} = \frac{1-cos\,30°}{sen\,30°}$$

$$tan\ \frac{30^\circ}{2} = \frac{1-\frac{\sqrt{3}}{2}}{\frac{1}{2}} = \frac{\frac{2-\sqrt{3}}{2}}{\frac{1}{2}} = \frac{(2)(2-\sqrt{3})}{2\times 1} = 2-\sqrt{3}$$

4.4.3. Evaluación de expresiones que contienen funciones trigonométricas inversas

Evaluar una expresión que tiene funciones trigonométricas inversas es una aplicación del uso de las fórmulas de los ángulos múltiples, esto se explica por medio del siguiente ejemplo modelo.

EJEMPLO MODELO

Escriba la expresión $\boldsymbol{sen(2\ tan^{-1}\ x)}$ como una expresión algebraica en $\boldsymbol{x}$.

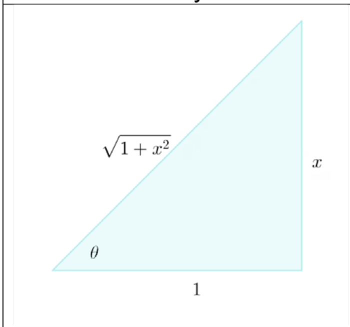
Gráfica y explicación de resolución	
Solución Sea $\theta = tan^{-1}x$ y con esto trazamos el triángulo.	
 Se necesita de las funciones seno y coseno, entonces: $\sin\theta = \frac{x}{\sqrt{x^2+1}}$ $\cos\theta = \frac{1}{\sqrt{x^2+1}}$	$\theta = tan^{-1}x$ Con el teorema de Pitágoras encontramos la hipotenusa. $hipotenusa = \sqrt{1^2+x^2} = \sqrt{x^2+1}$ se requiere encontrar el $\sin 2\theta$, más del triángulo solo puede obtener funciones trigonométricas de θ, por lo que para hallar $\text{sen}\ 2\theta$ empleamos las fórmulas de ángulos dobles. $\text{sen}\ 2\theta = 2\ \text{sen}\ \theta\cos\theta$ $\text{sen}\ 2\theta = 2\left(\frac{x}{\sqrt{x^2+1}}\right)\left(\frac{1}{\sqrt{x^2+1}}\right)$ $\text{sen}\ 2\theta = \frac{2x}{\sqrt{(x^2+1)^2}}$ $\text{sen}\ \theta = \frac{2x}{x^2+1}$

Figura 42. Figura 42. Explicación de Resolución.
Elaboración: Granda S., (2020)

En la figura 42 se explica la resolución del problema propuesto, a partir de los datos dados en el triángulo, recuerde estimado estudiante que se procede a determinar el área solicitada por medio de las fórmulas del semiángulo.

4.4.4. Fórmulas de producto a suma

$\sin u \cos v = \frac{1}{2}[\operatorname{sen}(u+v) + \operatorname{sen}(u-v)]$	$\cos u \operatorname{sen} v = \frac{1}{2}[\operatorname{sen}(u+v) - \operatorname{sen}(u-v)]$
$\cos u \cos v = \frac{1}{2}[\cos(u+v) + \cos(u-v)]$	$\operatorname{sen} u \operatorname{sen} v = \frac{1}{2}[\cos(u-v) + \cos(u+v)]$

Figura 43. Fórmulas de producto a suma.
Fuente: Stewart, Redlin y Watson, (2017), p.559
Elaboración: Granda S., (2020)

En esta figura usted puede observar las fórmulas del producto a suma que le servirán para comprender y aplicar la trigonometría analítica en la demostración de identidades que necesiten de estas fórmulas y posteriormente para resolver ecuaciones trigonométricas.

EJEMPLO MODELO

Escriba el producto como una suma: **cos *x* sin 4*x***

$$u = x \qquad v = 4x$$

$$\cos u \operatorname{sen} v = \frac{1}{2}[\operatorname{sen}(u+v) - \operatorname{sen}(u-v)\ ]$$

$$\cos u \operatorname{sen} v = \frac{1}{2}[\operatorname{sen}(x+4x) - \operatorname{sen}(x-4x)\ ]$$

$$\cos u \operatorname{sen} v = \frac{1}{2}[\operatorname{sen}(5x) - \operatorname{sen}(-3x)\ ]$$

$$\cos u \operatorname{sen} v = \frac{1}{2}[\operatorname{sen}(5x) + \operatorname{sen}(3x)\ ]$$

RECURSOS DE APRENDIZAJE

Para comprender eficientemente la trigonometría analítica, específicamente las fórmulas de ángulo doble, semiángulo y producto a suma y que además usted responda correctamente el cuestionario en línea propuesto en esta semana, recomiendo:

- Habilitar el hipervínculo y mirar atentamente el video titulado: Trigonometría. Razones de la suma.
- Continuar con su proceso de formación académica , para ello le solicito leer el texto básico en los temas que corresponden a las fórmulas de producto a suma.

Retroalimentación: En este video se explica la trigonometría analítica específicamente el uso de las fórmulas de adición y sustracción. Así mismo, en el texto básico usted puede acceder a los fundamentos teóricos necesarios para la resolución de todos los ejercicios propuestos al final de la unidad.

Actividades de aprendizaje recomendadas

a. Elabore un banco de preguntas, tomando en cuenta los ejercicios y problemas propuestos de esta sección.

b. Resuelva el banco de preguntas, superando las dificultades por medio de la investigación y la consulta a su docente.

Recuerde que:
A través del chat de tutoría y consultas puede aclarar sus dudas e inquietudes con su docente.

"Detrás de cada equivocación hay una enseñanza"

¡Siga adelante!

Semana 15

4.5. Ecuaciones trigonométricas básicas

Estimado profesional en formación, estamos por culminar este curso, por ello en esta semana estudiaremos cómo resolver ecuaciones trigonométricas básicas, aquí emplearemos los contenidos abordados en las semanas anteriores sobre trigonometría analítica, vamos a definir a una ecuación trigonométrica y luego resolveremos algunos ejemplos modelo.

4.5.1. Ecuación Trigonométrica

Es una ecuación que contiene expresiones trigonométricas, las identidades con cada número (o ángulo) en el dominio de la variable solución que ya estudiamos son ejemplos de estas ecuaciones.
Si una ecuación trigonométrica no es identidad, con frecuencia hallamos soluciones mediante el uso de técnicas semejantes a las empleadas para ecuaciones algebraicas, es decir una ecuación de la forma ***T*** (***θ***) = ***c***, donde ***T*** es una función trigonométrica y ***c*** es una constante.

EJEMPLO MODELO

1. Resuelva la ecuación $\boldsymbol{sen\,\theta} = \frac{\sqrt{3}}{2}$

Para que usted solucione este tipo de ecuaciones tiene dos posibilidades:

i. Encontrar las soluciones en un periodo.

Como es de su conocimiento el seno tiene un periodo de **2π**, lo que debe hacer es encontrar la solución en cualquier intervalo de longitud 2π.Recuerde los valores de las funciones trigonométricas del ángulo de **30º** y **60º**..

Valores de las funciones trigonométricas			
$\sin 30° = \frac{1}{2}$	$\csc 30° = 2$	$\sin 60° = \frac{\sqrt{3}}{2}$	$\csc 60° = \frac{2\sqrt{3}}{3}$
$\cos 30° = \frac{\sqrt{3}}{2}$	$\sec 30° = \frac{2\sqrt{3}}{3}$	$\cos 60° = \frac{1}{2}$	$\sec 60° = 2$
$\tan 30° = \frac{\sqrt{3}}{3}$	$\cot 30° = \sqrt{3}$	$\tan 60° = \sqrt{3}$	$\cot 60° = \frac{\sqrt{3}}{3}$

Figura 44. Valores de la Funciones Trigonométricas
Fuente: Stewart, Redlin y Watson, (2017), p.404
Elaboración: Granda S., (2020)

En la figura 44 se indican los valores de las funciones trigonométricas ángulos especiales de **30º** y **60º** así como de sus funciones trigonométricas inversas, éstas le serán de gran utilidad al momento de resolver problemas de aplicación de la trigonometría analítica.

Entonces $\boldsymbol{sen\,\theta = \frac{\sqrt{3}}{2} \to \theta = sen^{-1}\frac{\sqrt{3}}{2} \to \theta = 60° = \frac{\pi}{3}}$, tiene que tener presente la circunferencia unitaria $\boldsymbol{sen\,\theta} = \frac{\sqrt{3}}{2}$ donde el en el primer y segundo cuadrante, así usted puede deducir que las soluciones en el intervalo **[0,2π [** son:

ii. Encontrar todas las soluciones.

Como usted sabe la función seno repite sus valores cada 2π unidades, entonces las soluciones de esta ecuación se obtienen sumando múltiplos enteros de 2π a las soluciones encontradas.

$$\boldsymbol{\theta = \frac{\pi}{3} + 2k\pi : \theta = \frac{2\pi}{3} + 2}$$

4.5.2. Solución de ecuaciones trigonométricas por factorización

Si emplea la factorización para resolver una ecuación trigonométrica, estará empleando una de las técnicas más útiles para resolver una ecuación, como lo explicaré en el siguiente ejemplo.

Resuelva la ecuación dada $\mathbf{4\cos^2\theta - 4\cos\theta + 1 = 0}$

Solución: Procede a factorizar el lado izquierdo de la ecuación, ya que se trata de un trinomio cuadrado perfecto.

$$4\cos^2\theta - 4\cos\theta + 1 = 0$$

$$(2\cos\theta - 1)^2 = 0$$

$$\sqrt{(2\cos\theta - 1)^2} = 0$$

$$2\cos\theta - 1 = 0$$

$$\cos\theta = \frac{1}{2}$$

$$\theta = \frac{\pi}{3}$$

Ahora debemos considerar que el coseno tiene un periodo 2π y debe encontrar las soluciones en el intervalo $[\,0,2\pi\,[$ que son $\theta = \frac{\pi}{3}$; $\theta = \frac{2\pi}{3}$, a esto agregarle todas las soluciones posibles tomando en cuenta que el periodo del coseno se repite cada 2π y obtendríamos las soluciones finales. $\theta = \frac{\pi}{3} + 2k\pi$; $\theta = \frac{2\pi}{3} + 2k\pi$.

RECURSOS DE APRENDIZAJE

Para comprender eficientemente los procesos de solución de ecuaciones trigonométricas básicas, como parte de la trigonometría analítica y que usted desarrolle los ejercicios y resuelva los problemas propuestos en la actividad experimental planificada en esta semana, recomiendo:

- Habilitar el hipervínculo y mirar atentamente el video titulado Resolver ecuaciones trigonométricas.

Índice
Primer bimestre
Segundo bimestre
Solucionario
Referencias bibliográficas

- Continuar con su proceso de formación académica, para ello le solicito leer el texto básico en los contenidos correspondientes a las ecuaciones trigonométricas y sus procesos de resolución.

Retroalimentación: En este video se explica el proceso para resolver ecuaciones trigonométricas básicas. Así mismo, en el texto básico usted puede acceder a los fundamentos teóricos necesarios para la resolución de todos los ejercicios propuestos al final de la unidad.

Actividades de aprendizaje recomendadas

a. Elabore un banco de preguntas, tomando en cuenta los ejercicios y problemas propuestos de esta sección.

b. Resuelva el banco de preguntas, superando las dificultades por medio de la investigación y la consulta a su docente.

Recuerde que:
A través del chat de tutoría y consultas puede aclarar sus dudas e inquietudes con su docente.

"Detrás de cada equivocación hay una enseñanza"

¡Siga adelante!

AUTOEVALUACIÓN

Estimado estudiante, luego de culminar con el estudio de la cuarta unidad Trigonometría Analítica es recomendable que usted realice la autoevaluación de lo aprendido, con la finalidad de retroalimentar aquellas inquietudes más importantes.

Índice
Primer bimestre
Segundo bimestre
Solucionario
Referencias bibliográficas

Autoevaluación 4

Instrucción: Marque la alternativa correcta.

1. Si escribe la expresión trigonométrica tan²x - sec² xen términos de seno y coseno y luego la simplifica, usted obtiene:

    a. 1
    b. -1
    c. 0

2. Si escribe la expresión trigonométrica cos² ***θ*** (1 + tan²x) en términos de seno y coseno y luego la simplifica, usted obtiene:

    a. 1
    b. -1
    c. 0

3. Al simplificar la expresión $\frac{1+coscos\ y}{1+secsec\ y}$ se obtiene:

    a. *tan tan y*
    b. *cos cos y*
    c. *y*

4. Si usted verifica la identidad $(1-cos\ cos\ \beta)(1+cos\ cos\ \beta)=\frac{1}{csc^2\beta}$ la demostración correcta es:

    a. $(1-cos\ cos\ \beta)(1+cos\ cos\ \beta)\rightarrow 1-cos^2\beta\rightarrow cos^2\beta\rightarrow\left(\frac{1}{csc\ csc\ \beta}\right)^2\rightarrow\frac{1}{csc^2\theta}$
    b. $(1-cos\ cos\ \beta)(1+cos\ cos\ \beta)\rightarrow 1+cos^2\beta\rightarrow sen^2\beta\rightarrow\left(\frac{1}{csc\ csc\ \beta}\right)^2\rightarrow\frac{1}{csc^2\theta}$
    c. $(1-cos\ cos\ \beta)(1+cos\ cos\ \beta)\rightarrow 1-cos^2\beta\rightarrow sen^2\beta\rightarrow\left(\frac{1}{csc\ csc\ \beta}\right)^2\rightarrow\frac{1}{csc^2\theta}$

5. Si usa las fórmulas para la adición de ángulos el valor exacto del 75º es:

a. $\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$

b. $\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$

c. $\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{2}$

6. Si usa las fórmulas para la adición de ángulos el valor exacto $sin\, sin\, \frac{19\pi}{12}$ del es:

a. $-\frac{(\sqrt{6}+\sqrt{2})}{4}$

b. $\frac{(\sqrt{6}+\sqrt{2})}{4}$

c. $\frac{(\sqrt{6}-\sqrt{2})}{4}$

7. Si usa la fórmula de semiángulo apropiada el valor exacto de la expresión 15º.

a. $\frac{1}{2}\sqrt{2+\sqrt{3}}$

b. $\frac{1}{2}\sqrt{2-\sqrt{3}}$

c. $\frac{1}{3}\sqrt{2-\sqrt{3}}$

8. Si aplica la fórmula de ángulo doble conveniente y considera que el $x = \frac{5}{13}$ $y\ x$ está en el cuadrante *I* el valor del 2*x* es:

a. $sin\, sin\, 2x = \frac{120}{169}$

b. $sin\, sin\, 2x = \frac{102}{169}$

c. $sin\, sin\, 2x = \frac{120}{196}$

9. Si resuelve la ecuación $\boldsymbol{sin\ sin\ \theta} = \frac{\sqrt{3}}{2}$ se obtiene las siguientes soluciones:

   a. $\boldsymbol{\theta = \frac{\pi}{6}\ y \frac{2}{6}\pi}$ y $\boldsymbol{\theta = \frac{\pi}{6} + 2k\pi \quad \theta = \frac{2}{6}\pi + 2k\pi}$
   b. $\boldsymbol{\theta = \frac{\pi}{3}\ y \frac{2}{3}\pi}$ y $\boldsymbol{\theta = \frac{\pi}{3} + 2k\pi,\ \theta = \frac{2}{3}\pi + 2k\pi}$
   c. $\boldsymbol{\theta = \frac{\pi}{3} y \frac{2}{3}\pi}$ y $\boldsymbol{\theta = \frac{\pi}{3} + k\pi,\quad \theta = \frac{2}{3}\pi + 2\pi}$

10. Si resuelve la ecuación trigonométrica tan tan = 2.5 obtiene:

   a. $\theta = 1.91$, $\theta = 1.19 + 2k\pi$
   b. $\theta = 1.91$, $\theta = 1.19 + k\pi$
   c. $\theta = 2.91$, $\theta = 1.19 + k\pi$

Ir al solucionario

Actividades finales del bimestre

Semana 16

Le recomiendo llevar a cabo las siguientes actividades, como trabajo previo a rendir la evaluación presencial del segundo bimestre.

Actividad 1. Recupere las actividades de aprendizaje calificadas desarrolladas durante el segundo bimestre.

Actividad 2. Organice un documento que contenga dicha información cuidando la presentación; si lo hizo a mano, puede fotografiar y organizar un documento en PDF.

Actividad 3. Suba el archivo del documento al EVA caso de ser necesario; este documento le servirá de apoyo para preparar su evaluación presencial en esta semana.

Actividad 4. Revise los contenidos del segundo bimestre y participe de la evaluación presencial.

Para ello considere:

- Su diario de notas.
- Actividades de aprendizaje recomendadas.
- Actividades de aprendizaje calificadas.
- Actividades de aprendizaje interactivas; y,
- Evaluaciones parciales.

Actividades de aprendizaje recomendadas

Además de las actividades anteriores, para consolidar sus aprendizajes del segundo bimestre, y prepararse a la prueba presencial en físico o virtual, sugiero:

- Revise cada uno de los conceptos estudiados en las dos unidades planificadas y desarrolladas en este segundo bimestre.
- Realice suficientes ejercicios y problemas de aplicación de los diferentes conceptos, propiedades y leyes, de cada una de las unidades estudiadas, desarrollando los problemas propuestos al final de cada unidad del texto básico.
- Para cada una de las unidades, es valedero que sistematice el conocimiento aprendido, a través de la construcción de un mapa conceptual o algún otro organizador gráfico que estime conveniente.

Recuerde que:
A través del chat de tutoría y consultas puede aclarar sus dudas e inquietudes con su docente.

"La derrota no es el peor de los fracasos. No intentarlo es el verdadero fracaso"
George Edward Woodber
¡Siga adelante!

4. Solucionario

Autoevaluación 1		
Pregunta	**Respuesta**	**Retroalimentación**
1.	c	$t=\frac{5\pi}{6}$ se encuentra ubicado en el segundo cuadrante y es coterminal con el ángulo $\frac{\pi}{6}$, un ángulo especial por lo que sus coordenadas son $\left(-\frac{\sqrt{3}}{2},\frac{1}{2}\right)$.
2.	a	t se encuentra en el tercer cuadrante por lo que $\frac{5\pi}{4}-\pi=\frac{\pi}{4}$
3.	c	P (x,y) está en el eje negativo de x
4.	a	El punto P está en el segundo cuadrante x=-20/29 , y=21/29 y r=1.
5.	a	El número de referencia $t=\pi/4$ y $t=\frac{3\pi}{4}$ está en el segundo cuadrante por lo que la coordenada en x es negativa.
6.	a	Ya que La amplitud de la función |a|=|1|=1 y el periodo $\frac{2\pi}{1}=2\pi$ y el desplazamiento horizontal $b=\frac{\pi}{2}$ a la derecha.
7.	a	Se observa en la gráfica |a|=4 Periodo=2π b=0
8.	b	La curva tiene |a|=|-4|=4 , periodo $\frac{2\pi}{k}=\frac{2\pi}{2}=\pi$ y desfase a la izquierda $b=\frac{\pi}{2}$.

Autoevaluación 1		
9.	c	La curva tiene |a|=|2|=2 , periodo $\frac{2\pi}{w}=\frac{2\pi}{3}$ y frecuencia $\frac{w}{2\pi}=\frac{3}{2\pi}$
10.	b	La función debe tener la forma $y=ke^{-ct}$ cos cos ωt y ω=2πf=2π(3)=6π, así obtenemos $y=2e^{-1.5t}$ cos cos 6πt

Ir a la autoevaluación

Autoevaluación 2		
Pregunta	**Respuesta**	**Retroalimentación**
1.	a	$200° \times \frac{\pi}{180°} = \frac{10\pi}{9}$
2.	b	Para convertir de grados a radianes procedemos así: $-\frac{3\pi}{2} \times \frac{180°}{\pi} = -270°$
3.	c	$S = r\theta = 9 \times \frac{5\pi}{6} = \frac{15\pi}{2} m$
4.	a	Si $A = \frac{1}{2}r^2\theta = \frac{1}{2}(10)(0.5\, rad)$ entonces A=2.5u²
5.	a	El ángulo dado esta en el tercer cuadrante por lo el ángulo de referencia 180°-105°=75°
6.	a	Este ángulo tiene su lado terminal en el segundo cuadrante , por lo tanto el ángulo de referencia es $\pi - \frac{2\pi}{3} = \frac{3\pi-2\pi}{3} = \frac{\pi}{3}$ entonces el sin sin $\frac{\pi}{3} = \frac{\sqrt{3}}{2}$
7.	c	Empleando las identidades fundamentales y pitagóricas tenemos: $\tan\tan\theta = \frac{\theta}{\cos\cos\theta}$ y sen² θ + cos² θ =1.Despejando $sen\, \theta = \sqrt{1-\cos^2\theta}$ finalmente $\tan\tan\theta = +\frac{\sqrt{1-\cos^2\theta}}{\cos\cos\theta}$
8.	a	El triángulo tiene lados de longitud de 7 y 9 unidades, con un ángulo entre ellos de 72°, por tanto $A = \frac{1}{2}ab\sin\sin\theta$
9.	b	El ángulo en el intervalo $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ con $seno - \frac{\sqrt{2}}{2}$ es $-\frac{\pi}{4}$. Por tanto $sen^{-1}\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = -\frac{\pi}{4}$
10.	a	Empleando las funciones trigonométricas $\sin\sin\theta = \frac{6}{10}$ entonces $\theta = sen^{-1}\left(\frac{6}{10}\right) = 36.7°$

Ir a la autoevaluación

Índice
Primer bimestre
Segundo bimestre
Solucionario
Referencias bibliográficas

Autoevaluación 3		
Pregunta	**Respuesta**	**Retroalimentación**
1.	a	Determinamos el ángulo C C=180°-98.4°-24.6°=57° y aplicamos la ley de senos $\frac{98.4°}{376} = \frac{57}{x} \rightarrow x = \frac{(sinsin\ 57°)(376)}{98.4°} = 318.8$
2.	b	Determinamos el ángulo θ aplicando la ley de senos $\frac{\theta}{36} = \frac{120}{45} \rightarrow \theta = \frac{(sinsin\ 120°)(36)}{45} = \frac{2\sqrt{3}}{5}$ obtenemos $\theta = sen^{-1}\left(\frac{2\sqrt{3}}{5}\right) = 44°$
3.	b	Empleando ley de senos $\frac{48}{x} = \frac{sinsin\ 100}{5mi}$ entonces $x = \frac{48°(5)}{100°} = 3.8\ mi$
4.	a	Empleando ley de senos $\frac{46°}{200} = \frac{sinsin\ 52°}{\underline{AC}}$ entonces $\underline{AC} = \frac{52°(200)}{46°} = 219.092\ mi$
5.	b	Al tratarse de un triángulo isósceles el $\measuredangle B = 68°$ y al emplear la ley de seno
6.	a	Empleando la Ley de Cosenos $x^2 = c^2 + b^2 - 2(c)(b)$ cos cos 39º → $x = \sqrt{42^2 + 21^2 - 2(42)(21)\ cos\ cos\ 39°} = 29$
7.	a	Empleando la Ley de Cosenos $b^2 = a^2 + c^2 - 2ac$ cos cos θ ,θ = $cos^{-1}\left(\frac{b^2-a^2-c^2}{-2ac}\right)$, $\theta = cos^{-1}\left(\frac{(37.83)^2-(68.01)^2-(42.15)^2}{-2(68.01)(42.15)}\right), \theta = 29.89°$
8.	b	Para emplear la Fórmula de Herón debemos determinar el semiperimetro $s = \frac{4+6+3}{2} = \frac{13}{2} = 6.5$ y luego $s = \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}s$ $= \sqrt{6.5(6.5-6)(6.5-4)(6.5-3)} = 5.33$

Autoevaluación 3		
9.	a	. Empleando la Ley de Cosenos $AB^2 = CB^2 + CA^2 - 2(CB)(CA) \cos\cos 40.3°$ → $AB = \sqrt{3.56^2 + 2.82^2 - 2(3.56)(2.82) \cos\cos 40.3°} = 2.30mi$
10.	c	Empleamos la Ley de Cosenos $x = \sqrt{420^2 + 380^2 - 2(420)(380) \cos\cos 30°} = 210.63\ pie$

Ir a la autoevaluación

Índice
Primer bimestre
Segundo bimestre
Solucionario
Referencias bibliográficas

Autoevaluación 4		
Pregunta	**Respuesta**	**Retroalimentación**
1.	b	Empleando las identidades trigonométricas fundamentales $tan^2x - sec^2x = \frac{sen^2x}{cos^2x} - \frac{1}{cos^2x} = \frac{sen^2x - 1}{cos^2x}$ $= \frac{-(1 - sen^2x)}{cos^2x} = \frac{-cos^2x}{cos^2x} = -1$
2.	a	Empleando las identidades trigonométricas fundamentales $cos^2\theta(1 + tan^2x) = cos^2\theta\left(1 + \frac{sen^2\theta}{cos^2\theta}\right)$ $= \left(cos^2\theta + \frac{cos^2\theta sen^2\theta}{cos^2\theta}\right) = cos^2\theta + sen^2\theta = 1$
3.	a	Empleando las identidades trigonométricas fundamentales $\frac{1 + cos\ cos\ y}{1 + sec\ sec\ y} = \frac{1 + cos\ cos\ y}{1 + \frac{1}{cos\ cos\ y}} = \frac{1 + cos\ cos\ y}{\frac{cos\ cos\ y\ + 1}{cos\ cos\ y}}$ $= \frac{(1 + cos\ cos\ y\ )\ cos\ cos\ y}{(1 + cos\ cos\ y\ )} = cos\ cos\ y$
4.	c	Se verifica la identidad.
5.	b	Empleando la fórmula (s+t)=s cos cos t + cos cos s sin sin t (45°+30°) = 45° cos cos 30 + cos cos 45° sin sin 30 (45°+30°) = 45° cos cos 30° + cos cos 45° sin sin 30 $(45° + 30°) = \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right) + \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)\left(\frac{1}{2}\right)$ $(45° + 30°) = \left(\frac{\sqrt{6}}{4}\right) + \left(\frac{\sqrt{2}}{4}\right)$ $(45° + 30°) = \frac{\sqrt{6} + \sqrt{2}}{4}$
6.	a	Empleando la fórmula (s+t) = s cos cos t +cos cos s sin sin t $\left(\frac{5\pi}{4} + \frac{\pi}{3}\right) = \frac{5\pi}{4}\ cos\ cos\ \frac{\pi}{3}\ +cos\ cos\ \frac{5\pi}{4}\ sin\ sin\ \frac{\pi}{3}$ $\left(\frac{5\pi}{4} + \frac{\pi}{3}\right) = \left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)\left(\frac{1}{2}\right) + \left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$ $\left(\frac{5\pi}{4} + \frac{\pi}{3}\right) = -\frac{\sqrt{2}}{4} - \frac{\sqrt{6}}{4}$ $\left(\frac{5\pi}{4} + \frac{\pi}{3}\right) = -\frac{\sqrt{2} + \sqrt{6}}{4}$

Autoevaluación 4		
7.	b	Empleando la fórmula del semiángulo $\frac{u}{2} = \pm\sqrt{\frac{1-coscos\,u}{2}}$ $\frac{30}{2} = \pm\sqrt{\frac{1-cos\,cos\,u}{2}} \rightarrow u = 30° \rightarrow \frac{30}{2} = \pm\sqrt{\frac{1-cos\,cos\,30°}{2}}$ $\frac{30}{2} = +\sqrt{\frac{1-\frac{\sqrt{3}}{2}}{2}} \rightarrow \frac{30}{2} = +\sqrt{\frac{\frac{2-\sqrt{3}}{2}}{\frac{2}{1}}}\ \frac{30}{2} = +\sqrt{\frac{2-\sqrt{3}}{4}}$ $\frac{30}{2} = +\frac{\sqrt{2-\sqrt{3}}}{2}\ \ \frac{30}{2} = +\frac{1}{2}\sqrt{2-\sqrt{3}}$
8.	a	Si el $x = \frac{5}{13}$ y x está en el cuadrante I se determina $x = \sqrt{13^2 - 5^2} = 12$ entonces cos cos $x = \frac{12}{13}$ 2x =2 sin sin x cos cos x → $2x = 2\left(\frac{5}{13}\right)\left(\frac{12}{13}\right) = \frac{120}{169}$
9.	b	Dado que el seno tiene un periodo 2π , primero se encuentra la solución en el intervalo [0,2π[, $\theta = \frac{\sqrt{3}}{2}$ → $\theta = sen^{-1}\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$ → $\theta = \frac{\pi}{3}$ y $\theta = \frac{2}{3}\pi$
10.	b	Encontramos la solución en un periodo $\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$, tan tan θ =2.5 , $\theta = tan^{-1}(2.5) \rightarrow \theta = 1.19$, tomando en cuenta que la tangente tiene periodo π obtenemos todas las soluciones de la ecuación al sumar múltiplos enteros de π así θ=1.19+kπ representa todas las posibles soluciones.

Ir a la autoevaluación

Índice
Primer bimestre
Segundo bimestre
Solucionario
Referencias bibliográficas

5. Referencias bibliográficas

Stewar, J. Redlin, L. y Watson, S. (2012). *Precálculo. Matemáticas para el cálculo*. México, D.F: Cengage Learning Editores, S.A. de C.V.

Demana, F. Waits,B. Foley,G. y Kennedy, D.(2007). *Precálculo. Gráfico, numérico, algebraico*. México, D.F: Pearson Educación de México, S.A. de C.V.

Swokowski,E. y Cole,J. (2009). *Algebra y Trigonometría con Geometría Analítica*. México, D.F: Cengage Learning Editores,S.A. de C.V.

Mas José. (2014). *Aprender Matemáticas.org*. España: Videos de Matemática: Recuperado de http://www.aprendermatematicas.org/1batmateccnn103trigonometria.html