



UTPL
La Universidad Católica de Loja

Modalidad Abierta y a Distancia



Fundamentos de Geometría

Guía didáctica

Índice

Primer
bimestre

Segundo
bimestre

Solucionario

Referencias
bibliográficas



Departamento de Química y Ciencias Exactas

Sección Físico Química y Matemáticas

Fundamentos de Geometría

Guía didáctica

Autor:

Gonzalo Fernando Morales Larreategui



MATE _ 1998

Asesoría virtual
www.utpl.edu.ec

Índice

Primer bimestre

Segundo bimestre

Solucionario

Referencias bibliográficas

Índice

Primer bimestre

Segundo bimestre

Solucionario

Referencias bibliográficas

Fundamentos de Geometría

Guía didáctica

Gonzalo Fernando Morales Larreategui

Universidad Técnica Particular de Loja



Diagramación y diseño digital:

Ediloja Cía. Ltda.

Telefax: 593-7-2611418.

San Cayetano Alto s/n.

www.ediloja.com.ec

edilojainfo@ediloja.com.ec

Loja-Ecuador

ISBN digital - 978-9942-25-867-0



La versión digital ha sido acreditada bajo la licencia Creative Commons 4.0, CC BY-NY-SA: Reconocimiento-No comercial-Compartir igual; la cual permite: copiar, distribuir y comunicar públicamente la obra, mientras se reconozca la autoría original, no se utilice con fines comerciales y se permiten obras derivadas, siempre que mantenga la misma licencia al ser divulgada. <https://creativecommons.org/licenses/by-nc-sa/4.0/deed.es>

29 de septiembre, 2020

Índice

Primer
bimestre

Segundo
bimestre

Solucionario

Referencias
bibliográficas

Índice

1. Datos de información.....	8
1.1. Presentación de la asignatura.....	8
1.2. Competencias genéricas de la UTPL.....	8
1.3. Competencias específicas de la carrera.....	9
1.4. Problemática que aborda la asignatura en el marco del proyecto.....	9
1.5. Proyecto integrador de saberes	9
2. Metodología de aprendizaje.....	10
3. Orientaciones didácticas por resultados de aprendizaje.....	11
Primer bimestre	11
Resultado de aprendizaje 1 y 2	11
Contenidos, recursos y actividades de aprendizaje.....	11
Semana 1	11
Unidad 1. Fundamentos	12
1.1. Conceptos básicos.....	12
1.2. Ángulos: definición, medida y clasificación	12
Actividad de aprendizaje recomendada.....	13
Semana 2	17
1.3. Rectas	17
1.4. Teoremas sobre ángulos y rectas	17
Actividades de aprendizaje recomendadas	18
Autoevaluación unidad 1	20
Resultado de aprendizaje 3	23

Índice	
Primer bimestre	
Segundo bimestre	
Solucionario	
Referencias bibliográficas	
Semana 3	23
Unidad 2. Triángulos	23
2.1. Definición y clasificación	23
2.2. Congruencia de triángulos	23
Actividad de aprendizaje recomendada.....	24
Semana 4	29
2.3. Razones y proporciones	29
2.4. Semejanza de triángulos	29
Actividad de aprendizaje recomendada.....	29
Autoevaluación unidad 2	35
Resultado de aprendizaje 4	39
Semana 5	39
Unidad 3. Cuadriláteros, polígonos, circunferencia y círculo	39
3.1. Definición y clasificación de los cuadriláteros	39
3.2. Propiedades.....	39
3.3. Definición y clasificación de los polígonos	40
3.4. Propiedades.....	40
Actividad de aprendizaje recomendada.....	40
Semana 6	50
3.5. Elementos de la circunferencia y el círculo.....	50
3.6. Ángulos.....	50
3.7. Tangentes	50
Actividad de aprendizaje recomendada.....	51
Autoevaluación unidad 3	57
Actividades finales del bimestre.....	60
Resultado de aprendizaje 5	60
Semana 7	60
Semana 8	61

Segundo bimestre	62
Resultado de aprendizaje 6	62
Contenidos, recursos y actividades de aprendizaje.....	62
 Semana 9	62
Unidad 4. Figuras y cuerpos geométricos	62
4.1. Perímetro y superficie de una figura bidimensional.....	62
4.2. Ángulos sólidos.....	63
4.3. Poliedros y poliedros regulares.....	63
Actividad de aprendizaje recomendada.....	63
 Semana 10	67
4.4. Prismas.....	67
4.5. Pirámides.....	67
4.6. Cilindro y cono.....	67
4.7. Esfera.....	67
4.8. Figuras esféricas y cuerpos esféricos	68
Actividad de aprendizaje recomendada.....	68
Autoevaluación unidad 4	75
Resultado de aprendizaje 7	78
 Semana 11	78
Unidad 5. Trigonometría	78
5.1. Definiciones.....	78
5.2. Funciones trigonométricas de ángulos notables.....	78
5.3. Representación gráfica de las funciones trigonométricas	79
Actividad de aprendizaje recomendada.....	79
 Semana 12	84
5.4. Identidades trigonométricas	84
5.5. Ecuaciones trigonométricas.....	84
Actividad de aprendizaje recomendada.....	84

Índice

Primer
bimestreSegundo
bimestre

Solucionario

Referencias
bibliográficas

Semana 13	91
5.6. Resolución de triángulos rectángulos	91
Actividades de aprendizaje recomendadas.....	91
Semana 14	95
5.7. Resolución de triángulos oblicuángulos	95
Actividad de aprendizaje recomendada.....	95
Autoevaluación unidad 5	101
Resultado de aprendizaje 8	104
Semana 15	104
Resultado de aprendizaje 9	105
Semana 16	105
4. Solucionario	106
5. Referencias Bibliográficas	111

Índice

Primer
bimestre

Segundo
bimestre

Solucionario

Referencias
bibliográficas

Índice

Primer bimestre

Segundo bimestre

Solucionario

Referencias bibliográficas



1. Datos de información

1.1. Presentación de la asignatura



1.2. Competencias genéricas de la UTPL

- Comunicación oral y escrita.
- Pensamiento crítico y reflexivo.
- Trabajo en equipo.
- Comportamiento ético.
- Organización y planificación del tiempo.

Índice

Primer
bimestre

Segundo
bimestre

Solucionario

Referencias
bibliográficas

1.3. Competencias específicas de la carrera

Resolver problemas derivados de las actividades de gestión y operación en organizaciones, a fin de proponer soluciones en el ámbito de la optimización de procesos logísticos, tanto en la distribución como en los de conectividad e infraestructura vial, contribuyendo así al fortalecimiento y mejora del servicio en el país.

1.4. Problemática que aborda la asignatura en el marco del proyecto

Utilizar software para simular el comportamiento de la realidad a partir de los modelos geométricos, utilizando los fundamentos teóricos obtenidos en la carrera.

1.5. Proyecto integrador de saberes

Identificación de la realidad del uso de la geometría en el entorno del estudio.

Índice

Primer
bimestre

Segundo
bimestre

Solucionario

Referencias
bibliográficas



2. Metodología de aprendizaje

Para este curso utilizaremos un modelo pedagógico basado en competencias que orientan todo el diseño curricular, donde el estudiante es el protagonista del proceso educativo, que está mediado por el docente, recursos didácticos y las nuevas tecnologías. Todo este conjunto está permanentemente retroalimentado por la evaluación e investigación que proporciona la información para el mejoramiento continuo de los procesos y de la calidad del servicio educativo que se entrega.

Índice

Primer bimestre

Segundo bimestre

Solucionario

Referencias bibliográficas



3. Orientaciones didácticas por resultados de aprendizaje



Primer bimestre

Resultado de aprendizaje 1 y 2

Capacidad para analizar, interpretar y aplicar los conceptos básicos de la geometría.

Contenidos, recursos y actividades de aprendizaje



Semana 1

Índice

Primer
bimestre

Segundo
bimestre

Solucionario

Referencias
bibliográficas



Unidad 1. Fundamentos

1.1. Conceptos básicos

Revisaremos los conceptos de geometría, punto, línea, recta, semirrecta, segmento, curva, arco, figura geométrica, cuerpo sólido, proposición, demostración, axioma, postulado, teorema, corolario y lema.

1.2. Ángulos: definición, medida y clasificación

Definiremos lo que es un ángulo, cómo se mide, el sistema sexagesimal, sistema cíclico o circular, conversión entre estos sistemas, operaciones con ángulos, clasificación, tipos de ángulos: llanos, convexo, cóncavo, perigonal, recto, complementarios, suplementarios y conjugados



Actividad de aprendizaje recomendada

Lectura comprensiva del texto básico (pp. 4 a 20), análisis e interpretación de los conceptos básicos de geometría y de lo relativo a ángulos.

Lectura de anuncio #1 en el EVA Canvas.

Visualización de recurso educativo subido al EVA Canvas.

Este video se refiere a [la relevancia de Euclides como padre de la geometría](#) y servirá para ubicar a esta disciplina en un contexto histórico y humano.

Participación en el chat de tutorías de la semana 1 o revisión de la grabación del mismo.

Envío de consultas, reclamos o sugerencias a través de mensajería.

Revisión de problemas resueltos

Aparte de los que constan en el texto, podrá revisar la resolución de los siguientes problemas:

Convierte el ángulo de $98^{\circ} 22' 45''$ a grados (con decimales).

$$98^{\circ}22'45'' = 98^{\circ} + 22' \times \frac{1^{\circ}}{60'} + 45'' \times \frac{1^{\circ}}{3600''} = 98,379^{\circ}$$

Convierte el ángulo de $44,01^{\circ}$ a grados, minutos y segundos.

$$44,01^{\circ} = 44^{\circ} + 0,01^{\circ} \times \frac{60'}{1^{\circ}} = 44^{\circ} + 0,6' = 44^{\circ} + 0,6' \times \frac{60''}{1'} = 44^{\circ} + 36'' = 44^{\circ}0'36''$$

Transforme a radianes el siguiente ángulo de $420^\circ 0' 45''$

$$420^\circ + 45'' \times \frac{1^\circ}{3600''} = 420',0125^\circ \times \frac{\pi \text{rad}}{180^\circ} = 7,33 \text{rad}$$

Convierte a grados sexagesimales los siguientes ángulos:

a. $\pi/12$ radianes

$$\frac{\pi}{12} \text{rad} \times \frac{180^\circ}{\pi \text{rad}} = 15^\circ$$

b. $1,1201$ radianes

$$1,1201 \text{rad} \times \frac{180^\circ}{\pi \text{rad}} = 64,177^\circ$$

Desarrolle las siguientes operaciones:

a. $36^\circ 42' 28''$

$$+ 10^\circ 23' 40''$$

$$2^\circ 13' 25''$$

$$48^\circ 78' 93''$$

$$49^\circ 19' 33''$$

b. 90°

$$- 14^\circ 15' 38''$$

$$89^\circ 59' 60''$$

$$- 14^\circ 15' 38''$$

$$75^\circ 44' 22''$$

c. $36^\circ 42' 28''$

$$\times 9$$

$$225^\circ 117' 378'' = 225^\circ 123' 18'' = 227^\circ 3' 18''$$

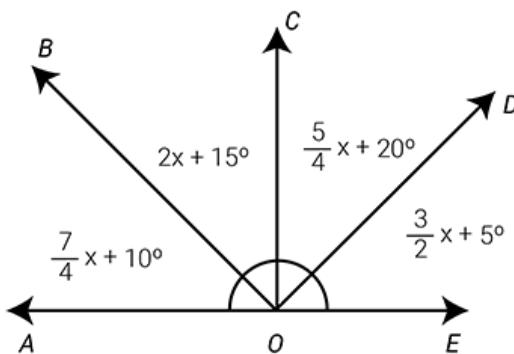
d. $185^\circ 34' 12''$ dividido para 9

$$\begin{array}{r}
 185^\circ \quad 34' \quad 12'' \\
 5^\circ = \underline{\underline{300'}} \\
 334' \\
 1' = \underline{\underline{60''}} \\
 72'' \\
 0'' \\
 \hline
 & | 9 \\
 & 20^\circ 37' 8'' \\
 \end{array}$$

El suplemento de un ángulo es 8 veces el ángulo, ¿cuánto vale este?

$$\alpha + 8\alpha = 180^\circ \quad 9\alpha = 180^\circ \quad \alpha = 20^\circ$$

Determine el valor del ángulo que se muestra en la figura:



$$\frac{7}{4}x + 10^\circ + 2x + 15^\circ + \frac{5}{4}x + 20^\circ + \frac{3}{2}x + 5^\circ = 180^\circ$$

$$\frac{7x + 8x + 5x + 6x}{4} = 180^\circ - 10^\circ - 15^\circ - 20^\circ - 5^\circ$$

$$\frac{26x}{4} = 130^\circ$$

$$x = (4)130^\circ / 26 = 20^\circ$$

[Índice](#)[Primer bimestre](#)[Segundo bimestre](#)[Solucionario](#)[Referencias bibliográficas](#)

Los ángulos serían:

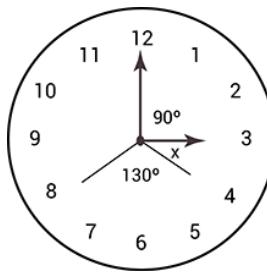
$$\angle AOB = \frac{7}{4}x + 10^\circ = \frac{7}{4}(20^\circ) + 10^\circ = 35^\circ + 10^\circ = 45^\circ$$

$$\angle BOC = 2x + 15^\circ = 2(20^\circ) + 15^\circ = 40^\circ + 15^\circ = 55^\circ$$

$$\angle COD = \frac{5}{4}x + 20^\circ = \frac{5}{4}(20^\circ) + 20^\circ = 25^\circ + 20^\circ = 45^\circ$$

$$\angle DOE = \frac{3}{2}x + 5^\circ = \frac{3}{2}(20^\circ) + 5^\circ = 30^\circ + 5^\circ = 35^\circ$$

¿A qué hora, entre las 3 y las 4, las manecillas del reloj forman un ángulo de 130° ?



La velocidad angular del horero es $\omega_h = 360^\circ/12h = 30^\circ/h$

La velocidad angular del minutero es $\omega_m = 360^\circ/1h = 360^\circ/h$

Para que se cumplan las condiciones del problema, el horero recorre un ángulo x ; en el mismo tiempo, el minutero recorre un ángulo $90^\circ + x + 130^\circ = 220^\circ + x$

Como $\omega = \theta/t$ $t = \theta/\omega$ y como los tiempos son iguales,

$$x/(30^\circ/h) = (220^\circ + x)/360^\circ/h$$

multiplicando la igualdad por $360^\circ/h$

$$12x = 220^\circ + x$$

$$11x = 220^\circ$$

$$x = 220^\circ/11$$

$$x = 20^\circ$$

Índice

Primer bimestre

Segundo bimestre

Solucionario

Referencias bibliográficas

reemplazando para obtener el tiempo

$$t = x/\omega h = 20^\circ/30^\circ/h = 2/3h = 2/3(60\text{min}) = 40 \text{ minutos}$$

A las 3 horas y 40 minutos, el ángulo entre el horero y el minutero será de 130° .

Resolución de problemas propuestos

Revise qué problemas planteados en la tarea pueden resolverse con el contenido estudiado hasta este momento; intente resolverlos y, si tiene alguna dificultad, plantéeselo al docente para que lo oriente.



Semana 2

1.3. Rectas

Condiciones de paralelismo (3 teoremas) y perpendicularidad (2 teoremas) en rectas.

1.4. Teoremas sobre ángulos y rectas

Ángulos opuestos por el vértice, ángulos contiguos, ángulos adyacentes, rectas paralelas cortadas por una secante (alternos internos, alternos externos, correspondientes, colaterales internos, colaterales externos).



Actividades de aprendizaje recomendadas

Lectura comprensiva del texto básico (pp. 22 a 27), análisis e interpretación de las condiciones de paralelismo, perpendicularidad y los teoremas sobre ángulos y rectas.

Lectura de anuncio #2 en el EVA Canvas.

Visualización de recursos educativos subidos al EVA Canvas:

Estos recursos explican [los términos y clasificaciones en geometría](#) y [el Teorema de Tales](#), respectivamente.

Participación en el chat tutorías de la semana 2 o revisión de la grabación del mismo.

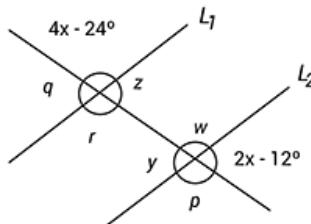
Envío de consultas, reclamos o sugerencias a través de mensajería.

Revisión de problemas resueltos

Aparte de los ejercicios resueltos en el texto, podría revisar la resolución del siguiente ejercicio:

Calcule el valor de cada uno de los ángulos que se indican en la figura:

$$\text{Si } L_1 \parallel L_2$$



Índice

Primer bimestre

Segundo bimestre

Solucionario

Referencias bibliográficas

$$\begin{aligned}q &= z \text{ (opuestos por el vértice)} \\z &= y \text{ (alternos internos)} \\y &= 2x - 12^\circ \text{ (opuestos por el vértice)} \\q &= z = y = 2x - 12^\circ \\p &= w \text{ (opuestos por el vértice)} \\w &= r \text{ (alternos internos)} \\r &= 4x - 24^\circ \text{ (opuestos por el vértice)} \\p &= w = r = 4x - 24^\circ \\w + z &= 180^\circ \text{ (por ser L1 y L2 paralelas)} \\4x - 24^\circ + 2x - 12^\circ &= 180^\circ \\6x &= 180^\circ + 36^\circ = 216^\circ \\X &= 216^\circ / 6 = 36^\circ \\q &= z = y = 2x - 12^\circ = 2(36^\circ) - 12^\circ = 60^\circ \\p &= w = r = 4x - 24^\circ = 4(36^\circ) - 24^\circ = 120^\circ\end{aligned}$$

Resolución de problemas propuestos

Revise qué problemas planteados en la tarea pueden resolverse con el contenido estudiado hasta este momento; intente resolverlos y, si tiene alguna dificultad, plantéeselo al docente para que lo oriente.



Autoevaluación unidad 1

Preguntas dicotómicas

Instrucción: En el paréntesis que aparece junto a cada enunciado señale si es verdadero o falso.

1. () Los ángulos de 50° y 40° son complementarios.
2. () Todos los puntos de una recta tienen la misma dirección.

Preguntas de opción múltiple:

Instrucción: Señale el literal de la alternativa que corresponda a cada enunciado.

3. $40^\circ 30' 38''$ sumado con $15^\circ 36' 32''$ dan como resultado:
 - a. $55^\circ 6' 10''$
 - b. $55^\circ 66' 70''$
 - c. $55^\circ 7' 10''$
 - d. $56^\circ 7' 10''$
4. Uno de los siguientes enunciados no es una proposición:
 - a. $x + 3 = 10$
 - b. Está anocheciendo
 - c. $2 + 2 = 5$
 - d. ¡Cuidado!

Índice

Primer bimestre

Segundo bimestre

Solucionario

Referencias bibliográficas

5. Si por un punto exterior a una recta se traza una perpendicular y varias oblicuas, se verifica:
 - a. Que el segmento perpendicular es igual a los oblicuos
 - b. Que el segmento perpendicular es menor a los oblicuos
 - c. Que el segmento perpendicular a veces es mayor y a veces es menor que los oblicuos
 - d. Que el segmento perpendicular es mayor a los oblicuos
6. Todos los puntos de una recta comprendidos entre dos llamados extremos forman:
 - a. Una semirrecta
 - b. Un arco
 - c. Un segmento
 - d. Un vector
7. $40,5^\circ$ equivale a:
 - a. $40^\circ 50'$
 - b. $40^\circ 5'$
 - c. $40^\circ 55'$
 - d. $40^\circ 30'$
8. $40^\circ 15'$ equivale a:
 - a. $40,15^\circ$
 - b. $40,25^\circ$
 - c. $40,35^\circ$
 - d. $40,45^\circ$

Índice

Primer
bimestre

Segundo
bimestre

Solucionario

Referencias
bibliográficas

9. A las 3 en punto, el ángulo entre las manecillas de un reloj es de:
- 30°
 - 60°
 - 90°
 - 180°
10. Si una recta es perpendicular a otra, también lo será a todas las:
- Oblicuas a aquella
 - Paralelas a aquella
 - Perpendiculares a aquella

Es recomendable que revise la causa de todos sus errores antes de seguir adelante; así construirá bases sólidas para fundamentar los conocimientos posteriores. En caso de no poder explicar dichos errores, es recomendable que lo consulte con el docente.

[Ir al solucionario](#)

Índice

Primer bimestre

Segundo bimestre

Solucionario

Referencias bibliográficas

Resultado de aprendizaje 3

Capacidad para analizar, interpretar y aplicar los conceptos relacionados con la congruencia y semejanza de triángulos.



Semana 3



Unidad 2. Triángulos

2.1. Definición y clasificación

Definimos lo que es un triángulo y los clasificamos de acuerdo con sus lados y a su mayor ángulo.

2.2. Congruencia de triángulos

Conceptualizamos la congruencia de triángulos y analizamos las condiciones que deben cumplirse para que se dé dicha congruencia. Asimismo, extræmos conclusiones de dicha congruencia.



Actividad de aprendizaje recomendada

Lectura comprensiva del texto básico (pp. 30 a 44), análisis e interpretación de la definición, clasificación y congruencia de triángulos.

Lectura de anuncio #3 en el EVA Canvas.

Visualización de recurso educativo subido al EVA Canvas.

Al utilizar este recurso, podrá [modificar la forma y dimensiones de un triángulo](#) y comprobará que en todos los casos la suma de sus ángulos es de 180° .

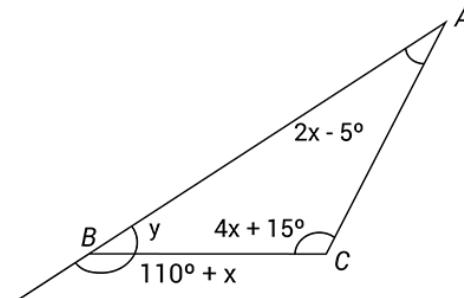
Participación en el chat de tutorías de la semana 3 o revisión de la grabación del mismo.

Envío de consultas, reclamos o sugerencias a través de mensajería.

Revisión de problemas resueltos

Aparte de los ejercicios resueltos en el texto, podría revisar la resolución de los siguientes ejercicios.

Determine el valor de los ángulos interiores del triángulo ABC:



[Índice](#)[Primer bimestre](#)[Segundo bimestre](#)[Solucionario](#)[Referencias bibliográficas](#)

Resolución

$110^\circ + x = 4x + 15^\circ + 2x - 5^\circ$ (el ángulo exterior a B es igual a la suma de los otros 2 ángulos interiores)

$$5x = 100^\circ \quad x = 20^\circ$$

$$(110^\circ + x) + y = 180^\circ \quad y = 180^\circ - 130^\circ = 50^\circ$$

Con lo que los ángulos serían:

$$A = 2x - 5^\circ = 2(20^\circ) - 5^\circ = 35^\circ$$

$$B = y = 50^\circ$$

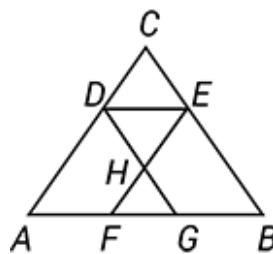
$$C = 4x + 15^\circ = 4(20^\circ) + 15^\circ = 95^\circ$$

Comprobamos:

$$35^\circ + 50^\circ + 95^\circ = 180^\circ$$

En la figura, el $\angle CDH = \angle CEH$, $\overline{FH} = \overline{GH}$, $\overline{DH} = \overline{EH}$, $\overline{AC} = \overline{BC}$ y $\overline{DC} = \overline{EC}$

Demuestre que el $\triangle ADG$ es congruente con el $\triangle BEF$.



Resolución

H)

$$\angle CDH = \angle CEH$$

$$\overline{FH} = \overline{GH}$$

$$\overline{DH} = \overline{EH}$$

$$\overline{AC} = \overline{BC}$$

$$\overline{DC} = \overline{EC}$$

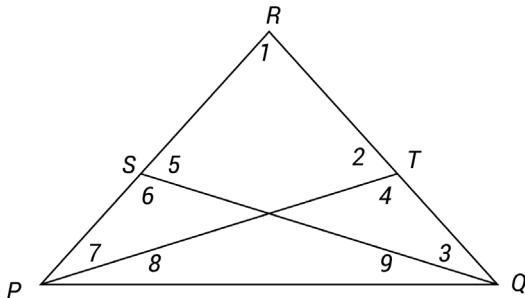
T)

$$\Delta ADG = \Delta BEF$$

Demostración

1. $\angle ADG + \angle GDC = \angle CEF + \angle FEB$ (ambas parejas suman 180°)
2. $\angle CDG = \angle CEF$ (hipótesis)
3. $\angle ADG = \angle FEB$ (restando 1-2)
4. $\overline{AC} = \overline{BC}$ (hipótesis)
5. $\overline{DC} = \overline{EC}$ (hipótesis)
6. $\overline{AD} = \overline{BE}$ (restando 4-5)
7. $\overline{DH} = \overline{EH}$ (hipótesis)
8. $\overline{GH} = \overline{FH}$ (hipótesis)
9. $\overline{DG} = \overline{EF}$ (Sumando 7 y 8)
10. $\Delta ADG = \Delta BEF$ (lal, 6, 3, 9)

Dado el siguiente triángulo:



- En el ΔPQR , y $\angle 7 = \angle 3$, demuestre que $\overline{RS} = \overline{RT}$
- En el ΔPQR , $\angle RPQ = \angle RQP$ y $\angle 6 = \angle 4$, demuestre que $\overline{PS} = \overline{QT}$

[Índice](#)[Primer bimestre](#)[Segundo bimestre](#)[Solucionario](#)[Referencias bibliográficas](#)

Resolución

a. H) $\overline{PR} = \overline{QR}$

$<7 = <3$

T) $\overline{RS} = \overline{RT}$

D) ΔPRT y ΔQRS

<1

común a los 2 triángulos

$<7 = <3$

(hipótesis)

$\overline{QR} = \overline{PR}$

(hipótesis)

$\Delta PRT \sim \Delta QRS$

(ala)

$\overline{RS} = \overline{RT}$

(partes homólogas)

l d d q

b. H) $<RPQ = <RQP$

$<6 = <4$

T) $\overline{PS} = \overline{QT}$

D) ΔPSQ y ΔQTP

\overline{PQ}

común a los 2 triángulos

$<RPQ = <RQP$

(hipótesis)

$<6 = <4$

(hipótesis)

$\Delta PSQ \sim \Delta QTP$

(ala)

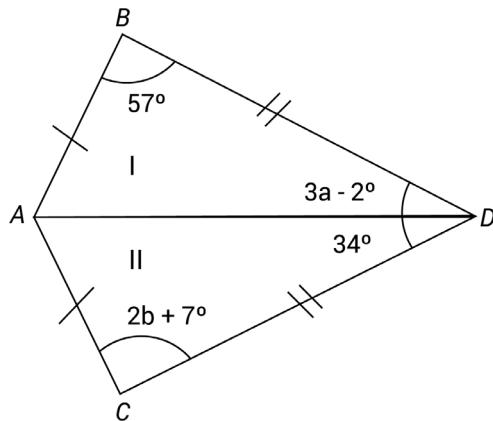
$\overline{PS} = \overline{QT}$

(partes homólogas)

l q q d

[Índice](#)[Primer bimestre](#)[Segundo bimestre](#)[Solucionario](#)[Referencias bibliográficas](#)

En la figura, los triángulos I y II son congruentes. Determine el valor de las incógnitas.



Resolución

$$3a - 2^\circ = 34^\circ \quad 3a = 36^\circ \quad a = 12^\circ$$

$$2b + 7^\circ = 57^\circ \quad 2b = 50^\circ \quad b = 25^\circ$$

Resolución de problemas propuestos

Revise qué problemas planteados en la tarea pueden resolverse con el contenido estudiado hasta este momento; intente resolverlos y, si tiene alguna dificultad, plantéeselo al docente para que lo oriente.



Semana 4

2.3. Razones y proporciones

Analizamos los conceptos de razón y proporción, sus propiedades y aplicaciones.

2.4. Semejanza de triángulos

Conceptualizamos la semejanza de triángulos y analizamos las condiciones que deben cumplirse para que dicha semejanza se dé. Asimismo, extráemos conclusiones de dicha semejanza; en especial, demostramos y aplicamos el Teorema de Pitágoras.



Actividad de aprendizaje recomendada

Lectura comprensiva del texto básico (pp. 44 a 60), análisis e interpretación de la semejanza de triángulos, demostración y aplicación del Teorema de Pitágoras.

Lectura de anuncio #4 en el EVA Canvas.

Visualización de recurso educativo subido al EVA Canvas.

En este recurso se resuelve un problema de semejanza de triángulos usando GeoGebra.

[Índice](#)[Primer bimestre](#)[Segundo bimestre](#)[Solucionario](#)[Referencias bibliográficas](#)

Participación en el chat de tutorías de la semana 4 o revisión de la grabación del mismo.

Envío de consultas, reclamos o sugerencias a través de mensajería.

Revisión de problemas resueltos

A parte de los ejercicios resueltos en el texto, podría revisar la resolución de los siguientes ejercicios:

Precise el valor de x en la siguiente proporción: $2x : (x + 7) = 3:5$

$$\frac{2x}{x + 7} = \frac{3}{5}$$

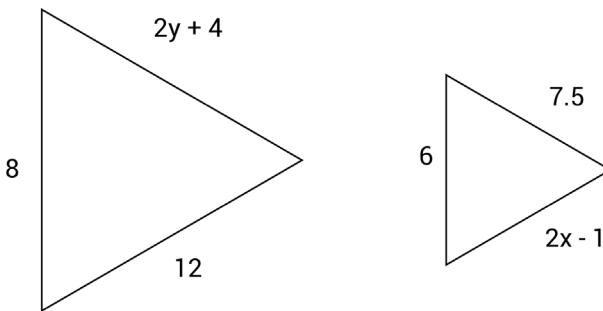
Multiplicando en cruz, tenemos:

$$10x = 3x + 21$$

$$7x = 21$$

$$x = 21/7 = 3$$

Se dan dos triángulos semejantes y las medidas de algunos de sus lados. Halle las medidas de los lados restantes y el valor de las incógnitas.



Como los lados homólogos son proporcionales, tenemos:

$$\frac{12}{2x - 1} = \frac{2y + 4}{7.5} = \frac{8}{6}$$

De donde

$$\frac{2y + 4}{7.5} = \frac{8}{6}$$

Multiplicando en cruz

$$12y + 24 = 60$$

$$12y = 36$$

$$y = 3, \text{ por lo que el lado } 2y + 4 = 6 + 4 = 10$$

Asimismo,

$$\frac{12}{2x - 1} = \frac{8}{6}$$

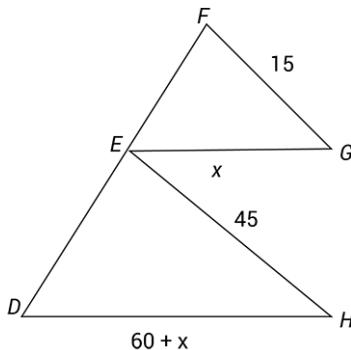
Multiplicando en cruz,

$$16x - 8 = 72$$

$$16x = 80$$

$$X = 80/16 = 5, \text{ por lo que el lado } 2x - 1 = 9$$

Si \overline{EG} es paralelo a \overline{DH} , calcula el valor de x en la siguiente figura:



Resolución

Como los dos triángulos son semejantes

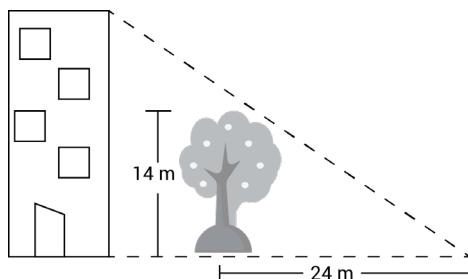
$$\frac{60 + x}{x} = \frac{45}{15}$$

Multiplicando en cruz

$$900 + 15x = 45x \quad 900 = 30x \quad x = 30$$

Un árbol de 14m de altura, próximo a una torre, proyecta una sombra de 24m. Determine:

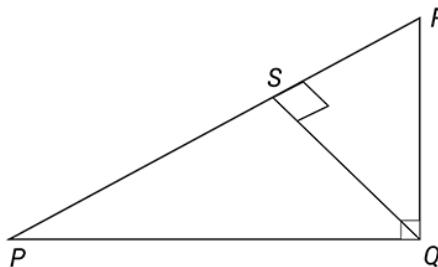
- La altura de la torre, si su sombra a la misma hora es de 48m.
- La sombra que da la torre, si su altura es de 70m.



Por triángulos semejantes sabemos que, llamando h a la altura y s a la sombra, $h/s = 14m/24m$.

- Si $s = 48$ $h = 14s/24 = (14 \times 48m)/24 = 28m$.
- Si $h = 70$ $s = 24h/14 = (24 \times 70m)/14 = 120m$.

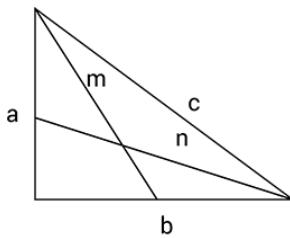
En el triángulo rectángulo PQR, con Q el ángulo recto y como altura trazada hacia la hipotenusa:



- Determine \overline{QS} si $\overline{EG} = 12$ y $\overline{SR} = 5$.
- Halle \overline{QR} si $\overline{PR} = 25$ y $\overline{RS} = 13$
- Halle si $\overline{QR} = 6$, $\overline{PQ} = 2\sqrt{15}$ y $\overline{RS} = 4$
- Halle \overline{PQ} si $\overline{PS} = 21$ y $\overline{RS} = 15$
- Determine \overline{PQ} si $\overline{RS} = 6$, $\overline{RQ} = 10$ y $\overline{QS} = 8$
- Determine \overline{QS} si $\overline{PQ} = 13$ y $\overline{QR} = 7$

Resolución

- $\overline{QS} = \sqrt{\overline{PS} \cdot \overline{SR}} = \sqrt{12 \times 5} = \sqrt{60} = 7,75$
- $\overline{QR} = \sqrt{\overline{PR} \cdot \overline{SR}} = \sqrt{25 \times 13} = \sqrt{325} = 18,03$
- $\overline{QR} = \sqrt{\overline{PR} \cdot \overline{RS}} = \sqrt{(6 + 4) \cdot 4} = \sqrt{40} = 6,32$
- $\overline{PQ} = \sqrt{\overline{PR} \cdot \overline{PS}} = \sqrt{(21 + 15) \cdot 21} = \sqrt{756} = 27,50$
- $\overline{SQ}^2 = \overline{PS} \cdot \overline{SR} \rightarrow \overline{PS} = \frac{\overline{SQ}^2}{\overline{SR}} = \frac{8^2}{6} = \frac{32}{6} = \frac{32}{3} \rightarrow \overline{PQ} = \sqrt{\overline{PS} \cdot \overline{PR}} = \sqrt{\frac{32}{3} \cdot (\frac{32}{3} + 6)} = \sqrt{\frac{1600}{9}} = \frac{40}{3}$
- $\overline{PR} = \sqrt{\overline{PQ}^2 + \overline{QR}^2} = \sqrt{13^2 + 7^2} = \sqrt{218}$
- $\overline{PS} = \frac{\overline{PQ}^2}{\overline{PR}} = \frac{13^2}{\sqrt{218}} = \frac{169}{\sqrt{218}}$
- $$\begin{aligned} \overline{PS} + \overline{SR} &= \overline{PR} \rightarrow \overline{SR} = \overline{PR} - \overline{PS} = \sqrt{218} - \frac{169}{\sqrt{218}} = \sqrt{218} - \frac{169\sqrt{218}}{218} = \sqrt{218} \left(1 - \frac{169}{218}\right) = \\ &\sqrt{218} \left(\frac{49}{218}\right) \end{aligned}$$
- $$\overline{QS}^2 = \overline{PS} \cdot \overline{SR} = \frac{169}{\sqrt{218}} \cdot \sqrt{218} \left(\frac{49}{218}\right) = \frac{169 \times 49}{218} = \frac{8281}{218} = 37,99 \rightarrow \overline{QS} = 6,16$$

[Índice](#)[Primer bimestre](#)[Segundo bimestre](#)[Solucionario](#)[Referencias bibliográficas](#)

Aplicamos el Teorema de Pitágoras a los triángulos rectángulos cuya hipotenusa es la mediana:

$$m^2 = a^2 + (b/2)^2 \quad m^2 = a^2 + b^2/4$$

$$n^2 = (a/2)^2 + b^2 \quad n^2 = a^2/4 + b^2$$

Si sumamos las dos ecuaciones, tenemos:

$$m^2 + n^2 = 5/4(a^2 + b^2) \text{ como } a^2 + b^2 = c^2 \quad c^2 = 4/5(m^2 + n^2) \quad 2\sqrt{\frac{m^2+n^2}{5}}$$

Si a $a^2 + b^2 = 4/5m^2 + 4/5n^2$ le restamos $a^2 + b^2/4 = m^2$ obtenemos

$$3/4b^2 = -1/5m^2 + 4/5n^2 \quad b^2 = 4(4n^2 - m^2)/15, \text{ por lo tanto } b = 2\sqrt{\frac{4n^2 - m^2}{15}}$$

Análogamente, si a $a^2 + b^2 = 4/5m^2 + 4/5n^2$ le restamos $a^2/4 + b^2 = n^2$ obtenemos $3/4a^2 = 4/5m^2 - 1/5n^2 \quad b^2 = 4(4m^2 - n^2)/15$, por lo tanto

$$a = 2\sqrt{\frac{4m^2 - n^2}{15}}$$

Resolución de problemas propuestos

Revise qué problemas planteados en la tarea pueden resolverse con el contenido estudiado hasta este momento; intente resolverlos y, si tiene alguna dificultad, plantéeselo al docente para que lo oriente.



Autoevaluación unidad 2

Preguntas de opción múltiple

Señale el literal de la alternativa que corresponda a cada enunciado.

1. Si dos triángulos tienen sus lados homólogos respectivamente iguales, se dice que son:
 - a. Congruentes
 - b. Semejantes
 - c. Equiláteros

2. Un ángulo de un triángulo mide 40° , el otro mide 60° , ello permite decir que el ángulo exterior al tercer ángulo mide:
 - a. 20°
 - b. 80°
 - c. 100°
 - d. 180°

3. Si los ángulos de un triángulo son: $A=40^\circ$, $B=60^\circ$ y C , y sus lados opuestos son, respectivamente a , b y c , el lado de mayor longitud será
 - a. a
 - b. b
 - c. c

Índice

Primer bimestre

Segundo bimestre

Solucionario

Referencias bibliográficas

4. Si dos ángulos homólogos son iguales en 2 triángulos, se dice que los triángulos son
 - a. Semejantes
 - b. Congruentes
 - c. Isósceles
 - d. Equiláteros
5. Si un ángulo de un triángulo mide 40° y el otro mide 60° , el tercer ángulo medirá:
 - a. 20°
 - b. 80°
 - c. 100°
 - d. 180°
6. Para aplicar el criterio lado-ángulo-lado para congruencia entre dos triángulos, el ángulo homólogo debe estar:
 - a. Entre los lados homólogos
 - b. Adyacente a uno solo de los lados homólogos
 - c. En cualquier ubicación
7. Si los lados de un triángulo miden: $a=2$, $b=3$ y $c=4$, y sus ángulos opuestos son A, B y C, respectivamente, el mayor ángulo será:
 - a. A
 - b. B
 - c. C

Preguntas de correspondencia

8. Empareje las rectas y puntos notables del triángulo con su definición:

1. () Línea perpendicular que une un lado y el vértice opuesto
 2. () Línea que une el punto medio de un lado y el vértice opuesto
 3. () Perpendicular que se levanta desde el punto medio de un segmento
 4. () Línea que divide un ángulo en dos partes iguales
 5. () Punto donde se cortan todas las alturas de un triángulo
 6. () Punto donde se cortan todas las medianas de un triángulo, centro de gravedad
 7. () Punto donde se cortan todas las mediatrices de un triángulo, centro del círculo circunscrito al triángulo.
 8. () Punto donde se cortan todas las bisectrices de un triángulo, centro del círculo inscrito en el triángulo
-
- a. Mediatriz
 - b. Incentro
 - c. Circuncentro
 - d. Altura
 - e. Mediana

Índice

Primer bimestre

Segundo bimestre

Solucionario

Referencias bibliográficas

- f. Ortocentro
g. Baricentro
h. Bisectriz
9. Empareje el tipo de triángulo según el mayor de sus ángulos con su definición:
1. () Obtusángulo
 2. () Rectángulo
 3. () Acutángulo
- a. El mayor de sus ángulos mide 90°
 - b. El mayor de sus ángulos mide más de 90°
 - c. El mayor de sus ángulos mide menos de 90°
10. Empareje cada tipo de triángulo según sus lados con su definición

1. () 3 lados iguales
 2. () 2 lados iguales
 3. () 1 lado igual
 4. () Todos los lados desiguales
- a. Equilátero
 - b. Isósceles
 - c. Escaleno
 - d. No existe

Es recomendable que revise la causa de todos sus errores antes de seguir adelante; así, construirá bases sólidas para fundamentar los conocimientos posteriores. En caso de no poder explicar dichos errores, es recomendable que lo consulte con el docente.

[Ir al solucionario](#)

Índice

Primer bimestre

Segundo bimestre

Solucionario

Referencias bibliográficas

Resultado de aprendizaje 4

Capacidad para analizar, interpretar y aplicar los conceptos de cuadriláteros, polígonos, circunferencia y círculo.



Semana 5



Unidad 3. Cuadriláteros, polígonos, circunferencia y círculo

3.1. Definición y clasificación de los cuadriláteros

Precisamos y aclaramos las definiciones de los cuadriláteros.

3.2. Propiedades

Demostramos las propiedades de los cuadriláteros.

3.3. Definición y clasificación de los polígonos

Precisamos y aclaramos las definiciones de conceptos relativos a los polígonos.

3.4. Propiedades

Demostramos las propiedades de los polígonos.



Actividad de aprendizaje recomendada

Lectura comprensiva del texto básico (pp. 62 a 79), análisis, interpretación y aplicación de las definiciones, clasificación y propiedades de los cuadriláteros en particular y los polígonos en general.

Lectura de anuncio #5 en el EVA Canvas.

Visualización de recurso educativo subido al EVA Canvas.

En este recurso, usando el programa GeoGebra nos permite [construir un polígono regular](#) variando el número de lados (hasta 30) y la longitud de los mismos (hasta 5 cm).

Participación en el chat de tutorías de la semana 5 o revisión de la grabación del mismo.

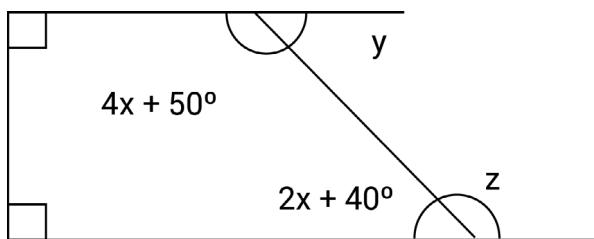
Envío de consultas, reclamos o sugerencias a través de mensajería.

[Índice](#)[Primer bimestre](#)[Segundo bimestre](#)[Solucionario](#)[Referencias bibliográficas](#)

Revisión de problemas resueltos

A parte de los ejercicios resueltos en el texto, podría revisar la resolución de los siguientes ejercicios.

Halle el valor de x y la medida de los ángulos y y z :



Resolución

$$4x + 50^\circ + 2x + 40^\circ = 180^\circ$$

$$6x + 90^\circ = 180^\circ$$

$$6x = 180^\circ - 90^\circ$$

$$6x = 90^\circ$$

$$X = 15^\circ$$

$Y = 2x + 40^\circ$ (alternos internos)

$$Y = 2(15^\circ) + 40^\circ = 70^\circ$$

$Z = 4x + 50^\circ$ (alternos internos)

$$Z = 4(15^\circ) + 50^\circ = 110^\circ$$

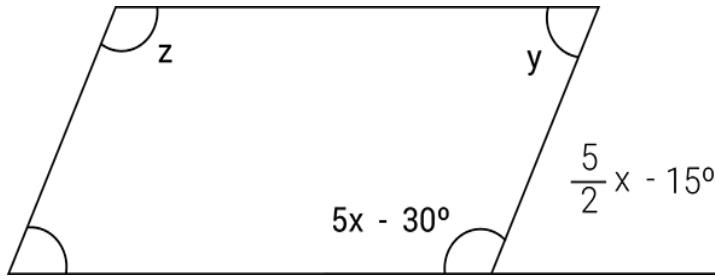
Comprobación

$$Y + z = 180^\circ$$

$$70^\circ + 110^\circ = 180^\circ$$

$$180^\circ = 180^\circ$$

Determine el valor de x de los ángulos y y z.



Resolución

$$5x - 30^\circ + \frac{5}{2}x - 15^\circ = 180^\circ$$

Multiplicamos la ecuación por 2 para eliminar denominadores:

$$10x - 60^\circ + 5x - 30^\circ = 360^\circ$$

$$15x - 90^\circ = 360^\circ$$

$$15x = 360^\circ + 90^\circ$$

$$15x = 450^\circ$$

$$X = 30^\circ$$

$$Y = \frac{5}{2}x - 15^\circ \text{ (alternos internos)}$$

$$Y = \frac{5}{2}(30^\circ) - 15^\circ = 75^\circ - 15^\circ = 60^\circ$$

$$Z = 5x - 30^\circ \text{ (ángulos opuestos en un paralelogramo)}$$

$$Z = 5(30^\circ) - 30^\circ = 150^\circ - 30^\circ = 120^\circ$$

Comprobación

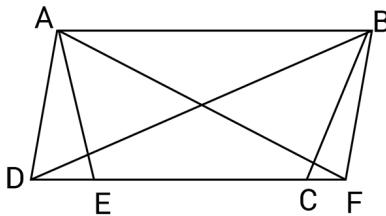
$$Y + z = 180^\circ$$

$$60^\circ + 120^\circ = 180^\circ$$

$$180^\circ = 180^\circ$$

Demuestre que la suma de los cuadrados de las diagonales de un paralelogramo cualquiera, es igual al doble producto de la suma del cuadrado de sus lados adyacentes.

Resolución



Hipótesis

ABCD paralelogramo

Tesis

$$\overline{AC}^2 + \overline{DB}^2 = 2(\overline{AB}^2 + \overline{BC}^2)$$

Demostración

Prolongamos \overline{DC}

Trazamos \overline{AE} y \overline{BF} , alturas

Comparamos los ΔAED y ΔBFC (rectángulos)

1. $\overline{AD} = \overline{BC}$ (lados opuestos de un paralelogramo)
2. $\angle ADE = \angle BCF$ (correspondientes)
3. $\Delta AED \approx \Delta BFC$ (ala)
4. $\overline{DE} = \overline{CF}$ (partes homólogas)

En el $\Delta AEDC$ (rectángulo)

5. $\overline{AC}^2 = \overline{AE}^2 + \overline{EC}^2$ (teorema de Pitágoras)

En el ΔADE (rectángulo)

6. $\overline{AE}^2 = \overline{AD}^2 - \overline{DE}^2$ (teorema de Pitágoras)
7. $\overline{EC} = \overline{DC} - \overline{DE}$ (el todo es igual a la suma de las partes)
8. $\overline{AC}^2 = \overline{AD}^2 - \overline{DE}^2 + (\overline{DC} - \overline{DE})^2$ (6 y 7 en 5)

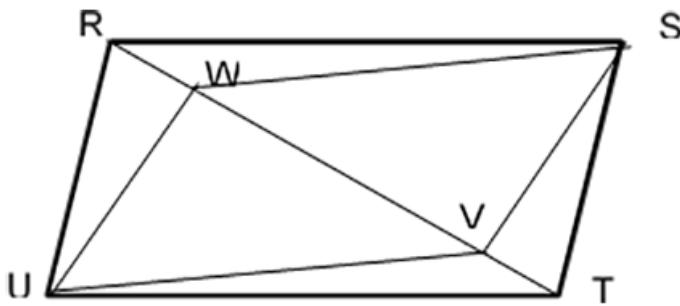
9. $\overline{AC}^2 = \overline{AD}^2 - \overline{DE}^2 + \overline{DC}^2 - 2\overline{DC}.\overline{DE} + \overline{DE}^2$ (desarrollando el binomio)
10. $\overline{AC}^2 = \overline{AD}^2 + \overline{DC}^2 - 2\overline{DC}.\overline{DE}$ (cancelando términos semejantes)
11. $\overline{BD}^2 = \overline{BF}^2 + \overline{DF}^2$ (teorema de Pitágoras)

En el ΔBFC (rectángulo)

12. $\overline{BF}^2 = \overline{BC}^2 - \overline{CF}^2$ (teorema de Pitágoras)
13. $\overline{DF} = \overline{DC} + \overline{CF}$ (el todo es igual a la suma de las partes)
14. $\overline{BD}^2 = \overline{BC}^2 - \overline{CF}^2 + (\overline{DC} + \overline{CF})^2$ (12 y 13 en 11)
15. $\overline{BD}^2 = \overline{BC}^2 - \overline{CF}^2 + \overline{DC}^2 + 2\overline{DC}.\overline{CF} + \overline{CF}^2$ (desarrollando el binomio)
16. $\overline{BD}^2 = \overline{BC}^2 + \overline{DC}^2 + 2\overline{DC}.\overline{CF}$ (cancelando términos semejantes)
17. $\overline{BD}^2 = \overline{BC}^2 + \overline{DC}^2 + 2\overline{DC}.\overline{DE}$ (3 en 16)
18. $\overline{BD}^2 = \overline{AD}^2 + \overline{DC}^2 + 2\overline{DC}.\overline{DE}$ (1 en 11)
19. $\overline{AC}^2 + \overline{BD}^2 = \overline{AD}^2 + \overline{DC}^2 - 2\overline{DC}.\overline{DE} + \overline{AD}^2 + \overline{DC}^2 - 2\overline{DC}.\overline{DE}$ (10+18)
20. $\overline{AC}^2 + \overline{BD}^2 = 2\overline{AD}^2 + 2\overline{DC}^2$ (reduciendo términos semejantes)
21. $\overline{AC}^2 + \overline{DB}^2 = 2(\overline{AB}^2 + \overline{BC}^2)$ (factor común)
lqqd

Sea RSTU un paralelogramo, V y W puntos sobre la diagonal \overline{TR} de modo que \overline{UW} y \overline{SW} son perpendiculares a \overline{TR} . Demuestre que UWSV es un paralelogramo.

Resolución



Hipótesis

RSTU paralelogramo

UW y VS perpendiculares a RT

Tesis

UWSV paralelogramo

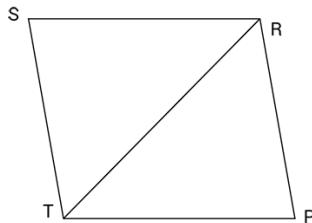
Demostración

ΔRST y ΔTUR

1. $\overline{RS} = \overline{TU}$ (lados opuestos de un paralelogramo)
2. $\overline{ST} = \overline{UR}$ (lados opuestos de un paralelogramo)
3. $\overline{RT} = \overline{RT}$ (común)
4. $\Delta RST \approx \Delta TUR$ (I.I.I.)
5. $\overline{SV} = \overline{UW}$ (alturas, partes homólogas)
6. $\overline{SV} = \overline{UW}$ (5)
7. $\angle UWV = \angle WVS$ (rectos)
8. $\overline{WV} = \overline{WV}$ (lado común)
9. $\Delta WSV \approx \Delta WUV$ (I.I.I.)
10. $\angle SWV = \angle WVU$ (partes homólogas)
11. $SW \parallel UV$ (alternos internos)
12. $\angle UWV = \angle WVS$ (7)
13. $\overline{UW} \parallel \overline{SV}$ (alternos internos)
14. UWSV paralelogramo (11 y 13)
lqqd

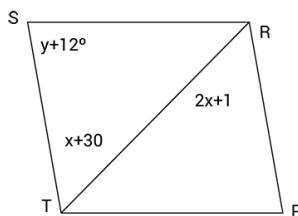
[Índice](#)[Primer bimestre](#)[Segundo bimestre](#)[Solucionario](#)[Referencias bibliográficas](#)

Halle el valor de x y y en el rombo PRST, si $\angle TRP = 2x + 10^\circ$, $\angle RTS = x + 30^\circ$ y $\angle TSR = y + 12^\circ$.



Resolución

Coloquemos el valor de los ángulos en la figura:



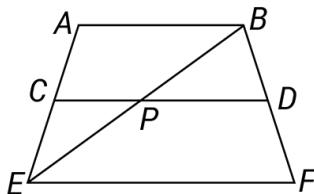
Como se trata de un rombo, los dos triángulos determinados por la diagonal son congruentes e isósceles, por lo que

$$X + 30^\circ = 2X + 10^\circ \quad X = 20^\circ$$

La suma de los ángulos del triángulo RST es:

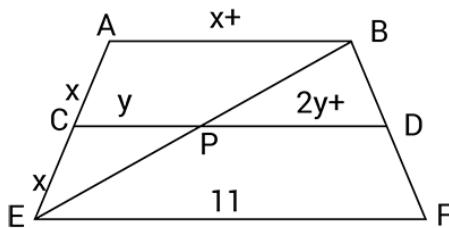
$$2(x + 30^\circ) + y + 12^\circ = 180^\circ \quad 2(20^\circ + 30^\circ) + y + 12^\circ = 180^\circ \quad y = 180^\circ - 112^\circ = 68^\circ$$

En la figura, C y D son puntos medios de \overline{AE} y \overline{BF} . Determine la longitud de \overline{AE} , si $\overline{AB} = x + 1$, $\overline{CP} = y$, $\overline{PD} = 2y + 2$, $\overline{EF} = 11$, $\overline{AC} = \overline{CE} = x$



Resolución

Ponemos los valores sobre la gráfica:



En los triángulos PBD y EBF hacemos la proporción:

$$\frac{2y+2}{11} = \frac{1}{2} \rightarrow 4y+4 = 11 \rightarrow 4y = 7 \rightarrow y = \frac{7}{4}$$

En los triángulos CEP y AEB hacemos la proporción:

$$\frac{y}{x+1} = \frac{1}{2} \rightarrow 2y = x+1 \rightarrow x = 2y-1 = 2\left(\frac{7}{4}\right) - 1 = \frac{5}{2}$$

$$\overline{AE} = 2x = 2\left(\frac{5}{2}\right) = 5$$

¿Cuál es el polígono en el que se pueden trazar en total 104 diagonales?

Resolución

$$D = \frac{n(n-3)}{2}$$

$$104 = \frac{n(n-3)}{2} \rightarrow 208 = n^2 - 3n \rightarrow n^2 - 3n - 208 = 0 \rightarrow (n-16)(n+13) = 0$$

Como n debe ser un valor positivo, la única solución es $n - 16 = 0$ $n = 16$

El polígono es el hexadecágono.

Determine el polígono en el que el número de diagonales en total son los $9/2$ del número de lados.

Resolución

$$D = \frac{9}{2}n \rightarrow \frac{n(n - 3)}{2} = \frac{9}{2}n \rightarrow n^2 - 3n = 9n \rightarrow n^2 - 12n = 0 \rightarrow n(n - 12) = 0 \rightarrow n = 12$$

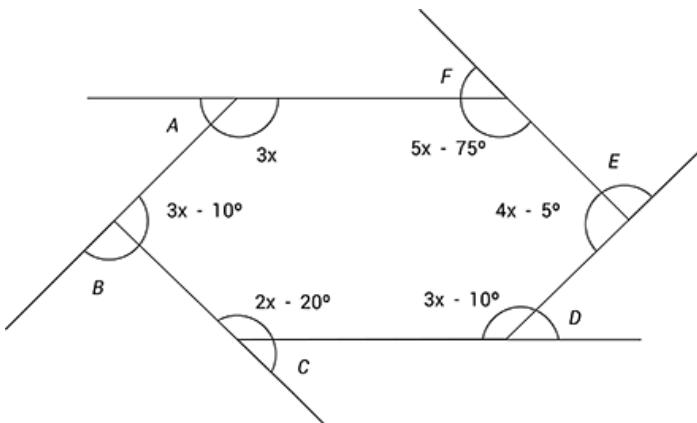
Determine el polígono regular cuyo ángulo interior mide 157.5°

Resolución

El ángulo exterior mide $180^\circ - 157.5^\circ = 22.5^\circ$

La suma de los ángulos exteriores es $360^\circ = n(22.5^\circ)$ $n = 360^\circ / 22.5^\circ = 16$, el polígono tiene 16 lados, es un hexadecágono.

Determine los ángulos exteriores del siguiente polígono:



Resolución

La suma de los ángulos exteriores de un hexágono es $180^\circ(n - 2) = 180^\circ(4) = 720^\circ$

$$\begin{aligned}3x + 5x - 75^\circ + 4x - 5^\circ + 3x - 10^\circ + 2x - 20^\circ + 3x - 10^\circ &= 720^\circ \\20x - 120^\circ &= 720^\circ \quad 20x = 840^\circ \quad x = 42^\circ\end{aligned}$$

Por lo tanto

$$A = 180^\circ - 3x = 180^\circ - 3(42^\circ) = 54^\circ$$

$$B = 180^\circ - (3x - 10^\circ) = 180^\circ - [3(42^\circ) - 10^\circ] = 64^\circ$$

$$C = 180^\circ - (2x - 20^\circ) = 180^\circ - [2(42^\circ) - 20^\circ] = 116^\circ$$

$$D = 180^\circ - (3x - 10^\circ) = 180^\circ - [3(42^\circ) - 10^\circ] = 64^\circ$$

$$E = 180^\circ - (4x - 5^\circ) = 180^\circ - [4(42^\circ) - 5^\circ] = 17^\circ$$

$$F = 180^\circ - (5x - 75^\circ) = 180^\circ - [5(42^\circ) - 75^\circ] = 45^\circ$$

Comprobación

$$A + B + C + D + E + F = 360^\circ$$

$$54^\circ + 64^\circ + 116^\circ + 64^\circ + 17^\circ + 45^\circ = 360^\circ$$

$$360^\circ = 360^\circ$$

Resolución de problemas propuestos

Revise qué problemas planteados en la tarea pueden resolverse con el contenido estudiado hasta este momento; intente resolverlos y, si tiene alguna dificultad, plántéeselo al docente para que lo oriente.



Semana 6

3.5. Elementos de la circunferencia y el círculo

Definimos, analizamos y aplicamos los conceptos relativos a la circunferencia y el círculo.

3.6. Ángulos

Encontramos las relaciones entre los diferentes ángulos que pueden trazarse en relación con un círculo.

3.7. Tangentes

Describimos las relaciones entre rectas y círculos que se cortan en un solo punto.



Actividad de aprendizaje recomendada

Lectura comprensiva del texto básico (pp. 102 a 116), para entender las definiciones y aplicación de los elementos de la circunferencia y el círculo, sus ángulos y las condiciones de tangencia entre círculos y rectas.

Lectura de anuncio #6 en el EVA Canvas.

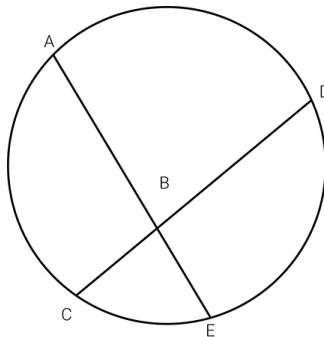
Participación en el chat académico de la semana 6 o revisión de la grabación del mismo.

Envío de consultas, reclamos o sugerencias a través de mensajería.

Revisión de problemas resueltos

Aparte de los ejercicios resueltos en el texto, podría revisar la resolución de los siguientes ejercicios:

En la figura, $\widehat{DE} = 50^\circ$ y $\widehat{AC} = 120^\circ$, halle los valores de $\angle ABC$ y $\angle DBA$.

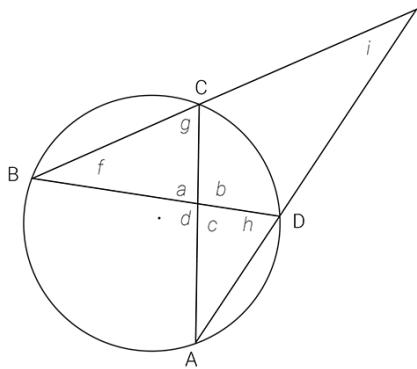


Resolución

$$\angle ABC = \frac{\widehat{AC} + \widehat{DE}}{2} = \frac{120^\circ + 50^\circ}{2} = \frac{170^\circ}{2} = 85^\circ$$

$$\angle DBA + \angle ABC = 180^\circ \rightarrow \angle DBA = 180^\circ - \angle ABC = 180^\circ - 85^\circ = 95^\circ$$

Si $\widehat{AB} = 130^\circ$ y $\widehat{CD} = 50^\circ$, halle $\angle a, \angle b, \angle c, \angle d, \angle e, \angle f, \angle g, \angle h$ y $\angle i$.



Resolución

$$\angle b = \angle d = \frac{\widehat{AB} + \widehat{CD}}{2} = \frac{130^\circ + 50^\circ}{2} = \frac{180^\circ}{2} = 90^\circ$$

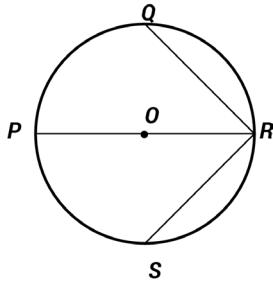
$$\angle a = \angle c = 180^\circ - \angle b = 180^\circ - 90^\circ = 90^\circ$$

$$\angle e = \angle f = \frac{\widehat{CD}}{2} = \frac{50^\circ}{2} = 25^\circ$$

$$\angle g = \angle h = \frac{\widehat{AB}}{2} = \frac{130^\circ}{2} = 65^\circ$$

$$\angle i = \frac{\widehat{AB} - \widehat{CD}}{2} = \frac{130^\circ - 50^\circ}{2} = \frac{80^\circ}{2} = 40^\circ$$

Si \overline{PR} es un diámetro y $\angle PRS = \angle PRQ$, demuestre que $\overline{QR} = \overline{SR}$



Hipótesis

\overline{PR} diámetro

$\angle PRS = \angle PRQ$

Tesis

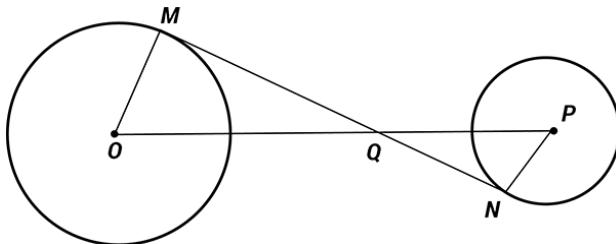
$\overline{QR} = \overline{RS}$

Demostración

1. $\widehat{PS} + \widehat{SR} = 180^\circ$ (\overline{PR} diámetro)
2. $\widehat{PQ} + \widehat{QR} = 180^\circ$ (\overline{PR} diámetro)
3. $\widehat{PS} + \widehat{SR} = \widehat{PQ} + \widehat{QR}$ (2 cosas =s a una 3ra...)
4. $\angle PRS = \angle PRQ$ (Hipótesis)
5. $\widehat{PS} = \widehat{PQ}$ (\angle s iguales arcos =s)
6. $\widehat{SR} = \widehat{QR}$ (3-5)
7. $\underline{SR} = \underline{QR}$ (arcos =s cuerdas =s)

lqqd

Sea \overline{MN} tangente común a las circunferencias con centro en O y P . Si se unen los centros \overline{OP} , interseca la tangente en Q . Demuestre que $\angle MOQ = \angle NPQ$



Resolución

Hipótesis

\overline{MN} tangente a C_o y a C_p

Tesis

$\angle MOQ = \angle NPQ$

Demostración

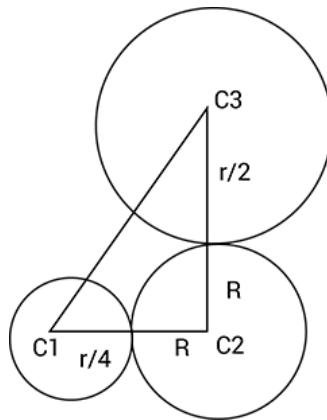
Consideremos los triángulos MOQ y PQN .

1. $\angle OMQ = \angle QNP$ (rectos, \overline{MN} tangente a C_o y a C_p)
 2. $\angle MQO = \angle NQP$ (opuestos por el vértice)
 3. $\Delta MOQ \sim \Delta PQN$ (a.a.)
 4. $\angle MOQ = \angle NPQ$ (partes homólogas)
- Iqqd

Se tienen 3 circunferencias con centros en C_1 , C_2 y C_3 , de manera que C_1C_2 es perpendicular a C_2C_3 . Determine el radio de la circunferencia en C_2 , si el radio de la circunferencia en C_1 y en C_3 son $r/4$ y $r/2$,

respectivamente, y $\overline{C_1C_3} = \frac{\sqrt{61}}{4} r$.

Resolución



Aplicamos el Teorema de Pitágoras:

$$\overline{C_1C_3}^2 = \overline{C_1C_2}^2 + \overline{C_2C_3}^2$$

$$\left(\frac{\sqrt{61}}{4}r\right)^2 = \left(\frac{r}{4} + R\right)^2 + \left(\frac{r}{2} + R\right)^2$$

$$\frac{61r^2}{16} = \frac{r^2}{16} + \frac{rR}{2} + R^2 + \frac{r^2}{4} + rR + R^2$$

$$61r^2 = r^2 + 8rR + 16R^2 + 4r^2 + 16rR + 16R^2$$

$$32R^2 + 24rR - 56r^2 = 0$$

$$4R^2 + 3rR - 7r^2 = 0$$

$$R = \frac{-3r \pm \sqrt{(3r)^2 - 4(4)(-7r^2)}}{2(4)}$$

$$R = \frac{-3r + \sqrt{9r^2 + 112r^2}}{8}$$

Índice

Primer
bimestre

Segundo
bimestre

Solucionario

Referencias
bibliográficas

(No tomamos en cuenta el signo – porque R no puede ser negativo)

$$R = \frac{-3r + \sqrt{121r^2}}{8}$$

$$R = \frac{-3r + 11r}{8}$$

$$R = \frac{8r}{8} = r$$

Resolución de problemas propuestos

Revise qué problemas planteados en la tarea pueden resolverse con el contenido estudiado hasta este momento; intente resolverlos y, si tiene alguna dificultad, plántéeselo al docente para que lo oriente.



Autoevaluación unidad 3

Preguntas dicotómicas

Instrucción

En el paréntesis que aparece junto a cada enunciado señale si es verdadero o falso.

1. () Si en un rombo, uno de los ángulos mide 48° , el ángulo adyacente medirá 42° .
2. () Si en un rectángulo un lado mide 10 y el otro mide 6, la diagonal medirá 8.

Preguntas de opción múltiple

Señale el literal de la alternativa que corresponda a cada enunciado.

3. Aquel cuadrilátero cuyas diagonales son iguales y se bisecan en ángulo recto es el
 - a. Cuadrado
 - b. Paralelogramo
 - c. Rectángulo
 - d. Rombo
4. El segmento que une dos vértices no consecutivos de un polígono se denomina
 - a. Diagonal
 - b. Vértice
 - c. Arista
 - d. Lado

Índice

Primer bimestre

Segundo bimestre

Solucionario

Referencias bibliográficas

5. La suma de los ángulos internos de un cuadrilátero es siempre igual a
- 90°
 - 180°
 - 270°
 - 360°
6. Un pentágono tiene
- 2 diagonales
 - 5 diagonales
 - 10 diagonales
 - 20 diagonales
7. En un trapecio, la base mayor mide 6 y la base menor mide 2, la línea media (paralela media) mide
- 2
 - 4
 - 6
 - 8

Preguntas de correspondencia

8. Enlace cada definición con el cuadrilátero que corresponde
- | | |
|--------|---|
| 1. () | Tiene sus 4 ángulos iguales |
| 2. () | Tiene sus lados iguales |
| 3. () | Tiene sus 4 lados iguales y sus 4 ángulos iguales |
| 4. () | Tiene sus lados paralelos de 2 en 2 |
- Rectángulo
 - Rombo
 - Cuadrado
 - Paralelogramo

Índice

Primer bimestre

Segundo bimestre

Solucionario

Referencias bibliográficas

9. Empareje cada definición con el respectivo concepto:

1. () Conjunto de puntos que equidistan de otro llamado centro
 2. () Todos los puntos cuya distancia a otro, llamado centro, es menor o igual que el radio
 3. () Una parte de la circunferencia
 4. () Una parte del círculo
-
- a. Círculo
 - b. Circunferencia
 - c. Sector circular
 - d. Arco

10. Enlace cada definición de las porciones de un círculo con el concepto correspondiente:

1. () Porción de círculo comprendida entre una semicircunferencia y su diámetro
 2. () Porción de círculo comprendida entre el arco y su cuerda
 3. () Porción de círculo comprendida entre dos radios.
-
- a. Sector circular
 - b. Segmento circular
 - c. Semicírculo

[Ir al solucionario](#)

Es recomendable que revise la causa de todos sus errores antes de seguir adelante; así, construirá bases sólidas para fundamentar los conocimientos posteriores. En caso de no poder explicar dichos errores, es recomendable que lo consulte con el docente.

Índice

Primer
bimestre

Segundo
bimestre

Solucionario

Referencias
bibliográficas



Actividades finales del bimestre

Resultado de aprendizaje 5

Capacidad para: analizar, interpretar y aplicar los conceptos básicos de geometría, congruencia y semejanza de triángulos, cuadriláteros, polígonos, circunferencia y círculo.



Semana 7

Actividad 1. Revisión exhaustiva de contenidos de conceptos fundamentales y desarrollo de ejercicios de las unidades 1, 2, y 3.

Actividad 2. Desarrollar los ejercicios propuestos en la tarea.

Actividad 3. Participar de las tutorías semanales.

Actividad 4. Lectura de anuncio #7 en el Canvas.



Semana 8

Actividad 1. Revisión exhaustiva de contenidos de conceptos fundamentales y desarrollo de ejercicios de las unidades 1, 2, y 3.

Actividad 2. Desarrollar los ejercicios propuestos en la tarea.

Actividad 3. Participar de las tutorías semanales.

Actividad 4. Lectura de anuncio #8 en el Canvas.

Índice

Primer bimestre

Segundo bimestre

Solucionario

Referencias bibliográficas

Índice

Primer bimestre

Segundo bimestre

Solucionario

Referencias bibliográficas



Segundo bimestre

Resultado de aprendizaje 6

Capacidad para analizar, representar e interpretar las figuras y cuerpos geométricos.

Contenidos, recursos y actividades de aprendizaje



Semana 9



Unidad 4. Figuras y cuerpos geométricos

4.1. Perímetro y superficie de una figura bidimensional

Revisaremos los conceptos de perímetro y superficie, aplicados a una figura de dos dimensiones deduciendo diferentes fórmulas aplicables a casos variados como triángulos, cuadriláteros, polígonos, circunferencia y círculo.

4.2. Ángulos sólidos

Definiremos los ángulos diedros, triedros y poliedros y los clasificaremos.

4.3. Poliedros y poliedros regulares

Vamos a definir y clasificar los poliedros, analizar sus propiedades y deducir fórmulas para calcular su superficie y volumen.



Actividad de aprendizaje recomendada

Lectura comprensiva del texto básico (pp. 118 a 140), análisis e interpretación de los conceptos básicos de geometría y lo relativo a ángulos.

Lectura de anuncio #9 en el EVA Canvas.

Visualización de recurso educativo subido al EVA Canvas.

Utilizando este recurso, podrá comparar el [área de dos cuadriláteros](#).

Participación en el chat de tutorías de la semana 9 o revisión de la grabación del mismo.

Envío de consultas, reclamos o sugerencias a través de mensajería.

Revisión de problemas resueltos

Aparte de los ejercicios resueltos en el texto, podría revisar la resolución de los siguientes ejercicios:

Determine el área de un segmento circular si:

- el radio del círculo es 2 cm y el ángulo central es de 90°
- el radio del círculo y la cuerda correspondiente al segmento circular miden 3 cm
- El radio del círculo mide 8 cm y la cuerda correspondiente al segmento mide $8\sqrt{2}$ cm

Resolución

- En un triángulo rectángulo los catetos se pueden considerar como la base y la altura.

$$A = \frac{\pi r^2 n}{360^\circ} - \frac{1}{2} b h = \frac{\pi (2\text{cm})^2 90^\circ}{360^\circ} - \frac{1}{2} (2\text{cm})(2\text{cm}) = \frac{\pi 4\text{cm}^2}{4} - 2\text{cm}^2 = (\pi - 2)\text{cm}^2$$

$$= 1.14\text{cm}^2$$

- Se forma un triángulo equilátero, cuyos ángulos miden 60° y su altura es $h = \frac{\sqrt{3}}{2} l$

$$A = \frac{\pi r^2 n}{360^\circ} - \frac{1}{2} b h = \frac{\pi (3\text{cm})^2 60^\circ}{360^\circ} - \frac{1}{2} (3\text{cm}) \left(\frac{\sqrt{3}}{2} 3\text{cm} \right) = \frac{\pi 9\text{cm}^2}{6} - \frac{9\sqrt{3}}{4} \text{cm}^2$$

$$= \frac{3\pi\text{cm}^2}{2} - \frac{9\sqrt{3}}{4} \text{cm}^2 = \frac{6\pi - 9\sqrt{3}}{4} \text{cm}^2 = 0.815\text{cm}^2$$

- El radio del círculo mide 8 cm y la cuerda correspondiente al segmento mide $8\sqrt{2}$ cm.

Se puede comprobar que se trata de un triángulo rectángulo, ya que se cumple el Teorema de Pitágoras

$$(8\sqrt{2})^2 = 8^2 + 8^2$$

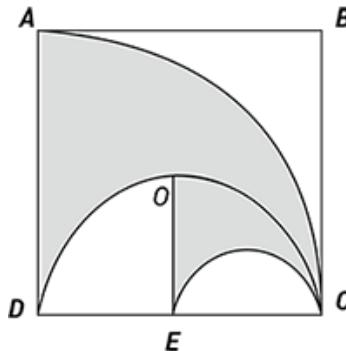
$$64(2) = 64 + 64$$

$$128 = 128$$

El área del segmento circular será

$$A = \frac{\pi r^2 n}{360^\circ} - \frac{1}{2} b h = \frac{\pi (8\text{cm})^2 90^\circ}{360^\circ} - \frac{1}{2} (8\text{cm})(8\text{cm}) = \frac{\pi 64\text{cm}^2}{4} - 32\text{cm}^2 \\ = (16\pi - 32)\text{cm}^2 = 18.27\text{cm}^2$$

Precise el área y el perímetro de la zona sombreada en la siguiente figura, si ABCD es un cuadrado de lado 4cm y E es el punto medio de CD.



Resolución

Calculamos el área,

$$A = \frac{\pi r^2}{4} - \frac{\pi \left(\frac{r}{2}\right)^2}{2} + \frac{\pi \left(\frac{r}{2}\right)^2}{4} - \frac{\pi \left(\frac{r}{4}\right)^2}{2} = \frac{\pi r^2}{4} - \frac{\pi r^2}{8} + \frac{\pi r^2}{16} - \frac{\pi r^2}{32} = \pi r^2 \left(\frac{8 - 4 + 2 - 1}{32} \right) \\ = \frac{5}{32} \pi r^2 = \frac{5}{32} \pi (4\text{cm})^2 = \frac{5}{2} \pi \text{cm}^2 = 7.85\text{cm}^2$$

Calculamos el perímetro,

$$P = r + \frac{2\pi r}{4} + \frac{2\pi \left(\frac{r}{4}\right)}{2} + \frac{r}{2} + \frac{2\pi \left(\frac{r}{2}\right)}{4} = r \left(1 + \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{4} + \frac{1}{2} + \frac{\pi}{4} \right) = r \left(\frac{3}{2} + \pi \right) \\ = (4\text{cm}) \left(\frac{3}{2} + \pi \right) = (6 + 4\pi)\text{cm} = 18.57\text{ cm}$$

[Índice](#)[Primer bimestre](#)[Segundo bimestre](#)[Solucionario](#)[Referencias bibliográficas](#)

Determine el área total de un tetrædro, si su altura es cm y su volumen es $9/4 \sqrt{2} \text{ cm}^3$

Resolución

Como el tetrædro es una pirámide cuya base es un triángulo equilátero

$$V = \frac{1}{3} A_B h = \frac{1}{3} \left(\frac{\sqrt{3}}{4} l^2 \right) \sqrt{6} \text{ cm} = \frac{9}{4} \sqrt{2} \text{ cm}^2$$

Despejando l ,

$$\frac{1}{3} \left(\frac{\sqrt{3}}{4} l^2 \right) \sqrt{6} \text{ cm} = \frac{9}{4} \sqrt{2} \text{ cm}^3 \rightarrow \frac{1}{3} \left(\frac{3\sqrt{2}}{4} l^2 \right) = \frac{9}{4} \sqrt{2} \text{ cm}^2 \rightarrow l^2 = 9 \text{ cm}^2 \rightarrow l = 3 \text{ cm}$$

$$A_T = 4 \left(\frac{\sqrt{3}}{4} l^2 \right) = \sqrt{3} (3 \text{ cm})^2 = 9\sqrt{3} \text{ cm}^2$$

Si el área total de un icosædro es $10\sqrt{3} \text{ cm}^2$, halle su volumen.

$$A_T = 20A_L = 20 \frac{\sqrt{3}}{4} l^2 = 5\sqrt{3}l^2 = 10\sqrt{3} \text{ cm}^2$$

Despejamos el valor de l

$$5\sqrt{3} l^2 = 10\sqrt{3} \text{ cm}^2 \quad l^2 = 2 \text{ cm}^2 \quad l = \sqrt{2} \text{ cm}$$

Calculamos el volumen

$$\begin{aligned} V &= \frac{15 + 5\sqrt{5}}{12} l^3 = \frac{15 + 5\sqrt{5}}{12} l^3 = \frac{15 + 5\sqrt{5}}{12} (\sqrt{2} \text{ cm})^3 = \frac{15 + 5\sqrt{5}}{12} 2\sqrt{2} \text{ cm}^3 \\ &= \frac{15\sqrt{2} + 5\sqrt{10}}{6} \text{ cm}^3 \end{aligned}$$

[Índice](#)[Primer bimestre](#)[Segundo bimestre](#)[Solucionario](#)[Referencias bibliográficas](#)

Resolución de problemas propuestos

Revise qué problemas planteados en la tarea pueden resolverse con el contenido estudiado hasta este momento; intente resolverlos y, si tiene alguna dificultad, plantéeselo al docente para que lo oriente.



Semana 10

4.4. Prismas

Los clasificamos de acuerdo con sus bases y la orientación de sus caras laterales, analizamos sus características y propiedades, y calculamos sus áreas y volúmenes.

4.5. Pirámides

Definimos, clasificamos y analizamos las propiedades y calculamos áreas y volúmenes de estos cuerpos geométricos.

4.6. Cilindro y cono

Definimos, clasificamos y analizamos las propiedades y calculamos áreas y volúmenes de estos cuerpos geométricos.

4.7. Esfera

Definimos, clasificamos y analizamos las propiedades y calculamos áreas y volúmenes de estos cuerpos geométricos.

4.8. Figuras esféricas y cuerpos esféricos

Definimos, clasificamos y analizamos las propiedades y calculamos áreas y volúmenes de estos cuerpos geométricos.



Actividad de aprendizaje recomendada

Lectura comprensiva del texto básico (pp. 140 a 155), análisis e interpretación de las definiciones, clasificación, propiedades y aplicaciones de los conceptos estudiados.

Lectura de anuncio #10 en el EVA Canvas.

Visualización de recurso educativo subido al EVA Canvas.

Este recurso es muy importante, a través de él, vemos como todo prisma triangular puede ser descompuesto en 3 pirámides triangulares de la misma altura, por consiguiente, el [volumen de una pirámide](#) es $1/3$ del volumen del prisma que la contiene.

Participación en el chat de tutorías de la semana 10 o revisión de la grabación del mismo.

Envío de consultas, reclamos o sugerencias a través de mensajería.

Revisión de problemas resueltos

Aparte de los ejercicios resueltos en el texto, podría revisar la resolución de los siguientes ejercicios:

Determine el área lateral de un prisma cuadrangular de 16 cm^3 de volumen, si la altura mide 4cm.

[Índice](#)[Primer bimestre](#)[Segundo bimestre](#)[Solucionario](#)[Referencias bibliográficas](#)

Resolución

$$V = A_B h \rightarrow A_B = \frac{V}{h} = \frac{16\text{cm}^3}{4\text{cm}} = 4\text{cm}^2$$

$$l^2 = 4\text{cm}^2 \rightarrow l = 2\text{cm}$$

$$A_L = 2(2l)h = 2(4\text{cm})4\text{cm} = 32\text{cm}^2$$

Determine el área lateral de un prisma cuyo volumen es 8 cm^3 , si su base es un triángulo rectángulo isósceles con área de 2 cm^2 .

Resolución

Si a es el cateto

$$A_B = \frac{1}{2}a^2 = 2\text{cm}^2 \rightarrow a = 2\text{cm}$$

La hipotenusa medirá:

$$c = \sqrt{(2\text{cm})^2 + (2\text{cm})^2} = \sqrt{8}\text{ cm} = 2\sqrt{2}\text{ cm}$$

El perímetro de la base será:

$$P = 2\text{cm} + 2\text{cm} + 2\sqrt{2}\text{ cm} = 4\text{cm} + 2\sqrt{2}\text{ cm} = 2(2 + \sqrt{2})\text{cm} = 6.38\text{cm}$$

La altura del prisma es:

$$V = A_B h \rightarrow h = \frac{V}{A_B} = \frac{8\text{cm}^3}{2\text{cm}^2} = 4\text{cm}$$

El área lateral será:

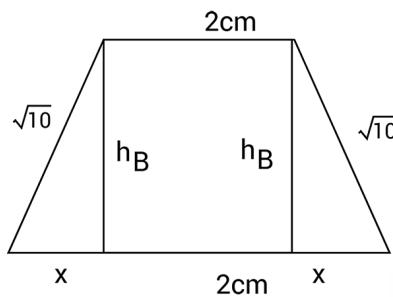
$$A_L = P_B h = 2(2 + \sqrt{2})\text{cm}(4\text{cm}) = 8(2 + \sqrt{2})\text{cm}^2 = 27.31\text{cm}^2$$

[Índice](#)[Primer bimestre](#)[Segundo bimestre](#)[Solucionario](#)[Referencias bibliográficas](#)

Halle el volumen de una pirámide cuya base es un trapecio isósceles de base menor 2 cm, base mayor 4 cm y lados iguales $\sqrt{10}$ cm, si la altura de la pirámide es de 4 cm.

Resolución

Para calcular la altura del trapecio tenemos:



$$B = b + 2x \quad x = (B-b)/2 = (4\text{cm} - 2\text{cm})/2 = 1\text{cm}$$

Para conocer h ,

$$h_B = \sqrt{(\sqrt{10}\text{ cm})^2 - (1\text{cm})^2} = \sqrt{(10\text{cm}^2 - 1\text{cm}^2)} = \sqrt{9\text{cm}^2} = 3\text{cm}$$

$$V = \frac{1}{3} A_B h_p = \frac{1}{3} \frac{(B+b)h_B}{2} h_p = \frac{1}{3} \frac{(4\text{cm} + 2\text{cm})3\text{cm}}{2} 4\text{cm} = 12\text{cm}^3$$

Exprese el área total de un cono circular recto en términos de su volumen si su altura es el doble de su radio.

Resolución

$$V = \frac{1}{3} (\pi r^2) h = \frac{1}{3} (\pi r^2) 2r = \frac{2}{3} \pi r^3 \rightarrow r = \sqrt[3]{\frac{3V}{2\pi}}$$

Calculamos la generatriz:

La altura, la generatriz y el radio forman un triángulo rectángulo:

$$g = \sqrt{h^2 + r^2} = \sqrt{(2r)^2 + r^2} = \sqrt{4r^2 + r^2} = \sqrt{5}r$$

El área lateral del cono será:

$$A_L = \pi r g = \sqrt{5}\pi r^2 = \sqrt{5}\pi \left(\sqrt[3]{\frac{3V}{2\pi}}\right)^2 = \sqrt[3]{\frac{\sqrt{125}\pi^3 9V^2}{4\pi^2}} = \sqrt[6]{\frac{10125\pi^2 V^4}{16}} = 4.291 \sqrt[3]{V^2}$$

El área de la base será:

$$A_B = \pi r^2$$

Con lo que el área total sería:

$$\begin{aligned} A_T &= A_L + A_B = \pi r g + \pi r^2 = \pi r(r + g) = \pi r^2(1 + \sqrt{5}) = \pi \sqrt[3]{\frac{3V}{2\pi}} (1 + \sqrt{5}) \\ &= \pi \sqrt[3]{\frac{3V(1 + \sqrt{5})^2}{2\pi}} = \sqrt[3]{\frac{3\pi^{3/2}V(1 + \sqrt{5})^2}{2\pi}} = \sqrt[3]{\frac{3\pi^{1/2}V(1 + \sqrt{5})^3}{2}} \\ &= \sqrt[3]{\frac{9\pi V^2(1 + \sqrt{5})^3}{4}} = \sqrt[3]{\frac{18\pi V^2(1 + \sqrt{5})^3}{8}} = \frac{1}{2} \sqrt[3]{18\pi V^2(1 + \sqrt{5})^3} \\ &= 6.211 \sqrt[3]{V^2} \end{aligned}$$

Una esfera con un radio de 1 cm se corta mediante dos planos paralelos, uno a cada lado del centro a una distancia de $\frac{1}{2}$ cm y $\frac{1}{3}$ cm, respectivamente. Determine el área de la zona esférica y el volumen de la rebanada esférica.

Resolución

Calcularemos lo solicitado a la esfera, las partes superior e inferior, de acuerdo con los datos solicitados.

[Índice](#)[Primer bimestre](#)[Segundo bimestre](#)[Solucionario](#)[Referencias bibliográficas](#)

Volumen de la esfera:

$$V = \frac{4}{3}\pi r^3 = \frac{4}{3}\pi(1\text{cm})^3 = \frac{4}{3}\pi\text{cm}^3 = 4.19\text{cm}^3$$

Volumen del segmento esférico 1:

$$V_1 = \frac{2}{3}\pi r^2 h - \frac{1}{3}\pi R_1^2(r - h)$$

Hay que aclarar que r es el radio de la esfera, R es la base del cono circular que le quitamos a la zona esférica para formar el segmento esférico y h es la altura del segmento esférico.

$$R^2 = r^2 - (r - h)^2 = r^2 - r^2 + 2rh - h^2 = 2rh - h^2$$

Encontraríamos que:

$$R_1^2 = 2(1\text{cm})\left(\frac{1}{2}\text{cm}\right) - \left(\frac{1}{2}\text{cm}\right)^2 = \frac{3}{4}\text{cm}^2$$

Y

$$\begin{aligned} V_1 &= \frac{2}{3}\pi(1\text{cm})^2\left(\frac{1}{2}\text{cm}\right) - \frac{1}{3}\pi\left(\frac{3}{4}\text{cm}^2\right)(1\text{cm} - \frac{1}{2}\text{cm}) = \pi\left(\frac{1}{3} - \frac{1}{8}\right)\text{cm}^3 = \frac{5}{24}\pi\text{cm}^3 \\ &= 0.65\text{cm}^3 \end{aligned}$$

Análogamente

$$h = 1\text{cm} - \frac{1}{3}\text{cm} = \frac{2}{3}\text{cm}$$

$$R_2^2 = 2(1\text{cm})\left(\frac{2}{3}\text{cm}\right) - \left(\frac{2}{3}\text{cm}\right)^2 = \frac{8}{9}\text{cm}^2$$

Y

$$\begin{aligned} V_2 &= \frac{2}{3}\pi(1\text{cm})^2\left(\frac{2}{3}\text{cm}\right) - \frac{1}{3}\pi\left(\frac{8}{9}\text{cm}^2\right)(1\text{cm} - \frac{2}{3}\text{cm}) = \pi\left(\frac{4}{9} - \frac{8}{81}\right)\text{cm}^3 = \frac{28}{81}\pi\text{cm}^3 \\ &= 1.09\text{cm}^3 \end{aligned}$$

El volumen de la rebanada esférica sería:

$$\begin{aligned} V_R &= V_E - V_1 - V_2 = \frac{4}{3}\pi cm^3 - \frac{5}{24}\pi cm^3 - \frac{28}{81}\pi cm^3 = \frac{864 - 135 - 224}{648}\pi cm^3 \\ &= \frac{505}{648}\pi cm^3 = 2.45cm^3 \end{aligned}$$

En cuanto a las áreas

El área de la zona esférica se obtiene al restar al área de la esfera las áreas de los casquetes

Área de la esfera:

$$A_E = 4\pi r^2 = 4\pi (1cm)^2 = 4\pi cm^2 = 12.57cm^2$$

El área de los casquetes es:

$$A = 2\pi rh$$

$$A_1 = 2\pi rh_1 = 2\pi(1cm) \left(\frac{1}{2}cm\right) = \pi cm^2 = 3.14cm^2$$

$$A_2 = 2\pi rh_2 = 2\pi(1cm) \left(\frac{2}{3}cm\right) = \frac{4}{3}\pi cm^2 = 4.19cm^2$$

$$A_Z = 4\pi cm^2 - \pi cm^2 = \frac{4}{3}\pi cm^2 = 5.24cm^2$$

Dos planos que concurren en un diámetro forman una cuña esférica de volumen $\frac{9}{2}\pi cm^3$. Halle radio, área y volumen de la esfera.

Resolución

El volumen de una cuña se calcula con la fórmula:

$$V = \frac{n\pi r^3}{270^\circ}$$

Índice

Primer bimestre

Segundo bimestre

Solucionario

Referencias bibliográficas

Donde n es el ángulo que forman los lados planos de la cuña.

En nuestro caso

$$\frac{9}{2}\pi = \frac{n\pi r^3}{270^\circ} \rightarrow nr^3 = 1215^\circ cm^3$$

El área de una cuña es:

$$A = \frac{n\pi r^2}{90^\circ}$$

De donde

$$3\pi = \frac{n\pi r^2}{90^\circ} \rightarrow nr^2 = 270^\circ cm^2$$

Dividiendo ambas ecuaciones

$$\frac{nr^3}{nr^2} = r = \frac{1215^\circ cm^3}{270^\circ cm^2} = 4.5cm$$

El área de la esfera sería

$$A = 4\pi r^2 = 4\pi (4.5cm)^2 = 81\pi cm^2 = 254.47cm^2$$

Y su volumen

$$V = \frac{4}{3}\pi r^3 = \frac{4}{3}\pi(4.5cm)^3 = \frac{243}{2}\pi cm^2 = 381.70cm^3$$

Resolución de problemas propuestos

Revise qué problemas planteados en la tarea pueden resolverse con el contenido estudiado hasta este momento; intente resolverlos y, si tiene alguna dificultad, plántéeselo al docente para que lo oriente.



Autoevaluación unidad 4

Preguntas dicotómicas

Instrucción

En el paréntesis que aparece junto a cada enunciado señale si es verdadero o falso

1. () Si en un rectángulo, uno de los lados mide 6 cm y el otro 7 cm, el área medirá 42 cm^2 .
2. () Una de las bases de un trapecio mide 8 cm y la otra mide 4 cm. Si la distancia entre ambas bases es 7 cm, el área del trapecio será 42 cm^2 .
3. () El volumen de un cubo de 7 cm de arista, en cm^3 es 49 cm^3 .

Preguntas de opción múltiple

Señale el literal de la alternativa que corresponda a cada enunciado.

4. Si en un triángulo, los lados miden 4, 6 y 8 cm, el área del triángulo, en cm^2 , será:
 - a. 12 cm^2
 - b. 16 cm^2
 - c. 24 cm^2
 - d. $\sqrt{135} \text{ cm}^2$

Índice

Primer
bimestre

Segundo
bimestre

Solucionario

Referencias
bibliográficas

5. En un polígono regular, el perímetro del mismo es 8 cm, y la apotema de 1 cm. El área del polígono será, en cm^2 , de
- 2 cm^2
 - 4 cm^2
 - 6 cm^2
 - 8 cm^2
6. Si en un cuadrado, el lado mide 2 cm, el área, en cm^2 , será de
- 2 cm^2
 - 4 cm^2
 - 6 cm^2
 - 8 cm^2
7. El área de un sector circular de 120 grados en una circunferencia es
- $\frac{1}{2}$ del área total
 - $\frac{1}{3}$ del área total
 - $\frac{1}{6}$ del área total
 - $\frac{1}{9}$ del área total
8. El volumen de un prisma rectangular recto, cuyas dimensiones son 10 cm, 9 cm y 8 cm es, en cm^3 , de
- 240 cm^3 .
 - 360 cm^3 .
 - 540 cm^3 .
 - 720 cm^3 .
9. El área de un círculo de 8 cm de radio es de
- 50.1 cm^2 .
 - 101.1 cm^2 .
 - 151.1 cm^2 .
 - 201.1 cm^2 .

Índice

Primer bimestre

Segundo bimestre

Solucionario

Referencias bibliográficas

10. El volumen de un tetrædron regular de 6 cm de arista, en cm^3 es de
- a. 25.5 cm^3 .
 - b. 55.5 cm^3 .
 - c. 75.5 cm^3 .
 - d. 95.5 cm^3 .

Preguntas de correspondencia

En el paréntesis que está junto a la columna de la izquierda ponga el literal que le corresponda de los conceptos que se encuentran en la columna de la derecha.

Es recomendable que revise la causa de todos sus errores antes de seguir adelante; así, construirá bases sólidas para fundamentar los conocimientos posteriores. En caso de no poder explicar dichos errores, es recomendable que lo consulte con el docente.

[Ir al solucionario](#)

Índice

Primer bimestre

Segundo bimestre

Solucionario

Referencias bibliográficas

Resultado de aprendizaje 7

Capacidad para analizar, interpretar y aplicar los conceptos y operaciones de la trigonometría.



Semana 11



Unidad 5. Trigonometría

5.1. Definiciones

Nombramos, definimos y analizamos las razones trigonométricas, y definimos las funciones trigonométricas y sus propiedades.

5.2. Funciones trigonométricas de ángulos notables

Deducimos los valores de las funciones trigonométricas para ángulos de 0° , 90° , 180° , 270° y 360° ; lo mismo para ángulos negativos, 30° , 45° , 60° y ángulos relacionados.

5.3. Representación gráfica de las funciones trigonométricas

Representamos una función trigonométrica en función de su amplitud, periodo y desplazamiento de fase.



Actividad de aprendizaje recomendada

Lectura comprensiva del texto básico (pp. 158 a 190), análisis e interpretación de las funciones trigonométricas.

Lectura de anuncio #11 en el EVA Canvas.

Visualización de recurso educativo subido al EVA Canvas.

En este recurso, de forma interactiva, aprenderá a [dibujar las funciones trigonométricas](#) utilizando en línea el programa gratuito GeoGebra.

Participación en el chat de tutorías de la semana 11 o revisión de la grabación del mismo.

Envío de consultas, reclamos o sugerencias a través de mensajería.

Revisión de problemas resueltos

Aparte de los ejercicios resueltos en el texto, podría revisar la resolución de los siguientes ejercicios.

Obtenga el valor de las funciones trigonométricas de $\angle A$ y $\angle B$, sabiendo que $\operatorname{sen} A = \frac{4}{\sqrt{29}}$ y que $\angle B$ es complemento del $\angle A$.

Resolución

$$\cos A = \sqrt{1 - \operatorname{sen}^2 A} = \sqrt{1 - \left(\frac{4}{\sqrt{29}}\right)^2} = \sqrt{1 - \frac{16}{29}} = \sqrt{\frac{29-16}{29}} = \sqrt{\frac{13}{29}}$$

$$\tan A = \frac{\operatorname{sen} A}{\cos A} = \frac{\frac{4}{\sqrt{29}}}{\frac{\sqrt{13}}{\sqrt{29}}} = \frac{4}{\sqrt{13}}$$

$$\cot A = \frac{\sqrt{13}}{4}$$

$$\sec A = \sqrt{\frac{29}{13}}$$

$$\csc A = \frac{\sqrt{29}}{4}$$

$$\operatorname{sen} B = \sqrt{\frac{13}{29}}$$

$$\cos B = \frac{4}{\sqrt{29}}$$

$$\tan B = \frac{\sqrt{13}}{4}$$

$$\cot B = \frac{4}{\sqrt{13}}$$

$$\sec B = \frac{\sqrt{29}}{4}$$

$$\csc B = \sqrt{\frac{29}{13}}$$

Si $\sec \alpha > 0$, $\operatorname{ctg} \alpha < 0$ y $\cos \alpha = 1/2$, calcule las funciones trigonométricas del ángulo α .

Resolución

$\text{Sec}\alpha = r/x$, si $\text{sec}\alpha > 0$ $x > 0$

$\text{Cot}\alpha/y$, si $\text{Cot}\alpha < 0$ $y < 0$

Esto quiere decir que el ángulo está en el cuarto cuadrante (coseno y secante positivas, el resto negativas).

$$\text{Sen}\alpha = -\sqrt{1 - \cos^2\alpha} = -\sqrt{1 - \left(\frac{1}{2}\right)^2} = -\sqrt{1 - \frac{1}{4}} = -\sqrt{\frac{4-1}{4}} = -\sqrt{\frac{3}{4}} = -\frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\text{Tan}\alpha = \frac{\text{Sen}\alpha}{\text{Cos}\alpha} = \frac{-\frac{\sqrt{3}}{2}}{\frac{1}{2}} = -\sqrt{3}$$

$$\text{Cot}\alpha = -\frac{1}{\sqrt{3}}$$

$$\text{Sec}\alpha = \frac{1}{\text{Cos}\alpha} = \frac{1}{\frac{1}{2}} = 2$$

$$\text{Csc}\alpha = \frac{2}{\sqrt{3}}$$

Exprese en función de un ángulo agudo las siguientes funciones:

- a. $\text{Sen } (-160^\circ)$
- b. $\text{Ctg } 1240^\circ$
- c. $\text{Cos } (-2800^\circ)$
- d. $\text{Tan } 5545^\circ$
- e. $\text{Csc } (-98^\circ 32' 12'')$
- f. $\text{Sec } (-230^\circ)$
- g. $\text{Sen } (1315^\circ)$
- h. $\text{Tan } 823^\circ 25' 18''$
- i. $\text{Cos } (-428^\circ 45' 24'')$
- j. $\text{Ctg } 920^\circ$
- k. $\text{Sec } (-230^\circ)$
- l. $\text{Csc } 328^\circ 33' 41''$

Resolución

- a. $\operatorname{Sen}(-160^\circ) = -\operatorname{Sen}(160^\circ) = -\operatorname{Sen}20^\circ$
- b. $\operatorname{Ctg}1240^\circ = \operatorname{ctg}(1240^\circ - 1080^\circ) = \operatorname{ctg}(160^\circ) = -\operatorname{cot}20^\circ$
- c. $\operatorname{Cos}(-2800^\circ) = \operatorname{cos}(-2800^\circ + 2880^\circ) = \operatorname{cos}80^\circ = \operatorname{sen}20^\circ$
- d. $\operatorname{Tan}5545^\circ = \operatorname{Tan}(5545^\circ - 5400^\circ) = \operatorname{Tan}145^\circ = -\operatorname{Tan}45^\circ$
- e. $\operatorname{Csc}(-98^\circ 32'12'') = -\operatorname{Csc}(98^\circ 32'12'') = -\operatorname{Csc}(81^\circ 27'48'') = \operatorname{Sec}(8^\circ 32'12'')$
- f. $\operatorname{Sec}(-230^\circ) = \operatorname{Sec}(-230^\circ + 360^\circ) = \operatorname{Sec}130^\circ = -\operatorname{Sec}(50^\circ) = -\operatorname{Csc}(40^\circ)$
- g. $\operatorname{Sen}(1315^\circ) = \operatorname{Sen}(1315^\circ - 1440^\circ) = \operatorname{Sen}(-125^\circ) = -\operatorname{Sen}125^\circ = -\operatorname{Sen}55^\circ = -\operatorname{Cos}35^\circ$
- h. $\operatorname{Tan}823^\circ 25'18'' = \operatorname{Tan}(823^\circ 25'15'' - 720^\circ) = \operatorname{Tan}100^\circ 25'15'' = -\operatorname{Tan}79^\circ 34'45'' = -\operatorname{Cot}10^\circ 25'15''$
- i. $\operatorname{Cos}(-428^\circ 45'24'') = \operatorname{cos}(-428^\circ 45'24'' + 360^\circ) = \operatorname{cos}(-128^\circ 45'24'') = \operatorname{cos}(128^\circ 45'24'') = -\operatorname{cos}(51^\circ 14'36'') = \operatorname{sen}(38^\circ 45'24'')$
- j. $\operatorname{Ctg}920^\circ = \operatorname{ctg}(920^\circ - 720^\circ) = \operatorname{ctg}(200^\circ) = \operatorname{ctg}20^\circ$
- k. $\operatorname{Sec}(-230^\circ) = \operatorname{sec}(-230^\circ + 360^\circ) = \operatorname{sec}(130^\circ) = -\operatorname{sec}50^\circ = -\operatorname{csc}40^\circ$
- l. $\operatorname{Csc}328^\circ 33'41'' = \operatorname{csc}(328^\circ 33'41'' - 360^\circ) = \operatorname{csc}(-31^\circ 26'19'') = -\operatorname{csc}31^\circ 26'19''$

Utilice ángulos notables para demostrar las siguientes igualdades:

$$\operatorname{csc}60^\circ = -\frac{\operatorname{sen}30^\circ}{\operatorname{sen}150^\circ \cdot \operatorname{sen}300^\circ}$$

[Índice](#)[Primer bimestre](#)[Segundo bimestre](#)[Solucionario](#)[Referencias bibliográficas](#)

Demostración

$$\csc 60^\circ = -\frac{\sin 30^\circ}{\sin 150^\circ \cdot \sin 300^\circ}$$

$$= -\frac{\sin 30^\circ}{\sin 30^\circ \cdot \sin(-60^\circ)}$$

$$= -\frac{\sin 30^\circ}{\sin 30^\circ \cdot (-\sin 60^\circ)}$$

$$= \frac{1}{\sin 60^\circ}$$

$$= \csc 60^\circ$$

Obtenga la amplitud, el periodo y el desplazamiento de fase de la siguiente función:

$$y = \frac{4}{3} \sin\left(-\frac{2}{3}x + \frac{3}{2}\pi\right)$$

Resolución

$$A=4/3$$

$$\omega = -\frac{2}{3} \rightarrow T = \frac{1}{f} = \frac{2\pi}{|\omega|} = \frac{2\pi}{\left|-\frac{2}{3}\right|} = 3\pi$$

$$-\frac{2}{3}\phi + \frac{3}{2}\pi = 0 \rightarrow \frac{2}{3}\phi = \frac{3}{2}\pi \rightarrow \phi = \frac{9}{4}\pi$$

Resolución de problemas propuestos

Revise qué problemas planteados en la tarea pueden resolverse con el contenido estudiado hasta este momento; intente resolverlos y, si tiene alguna dificultad, plantéeselo al docente para que lo oriente.



Semana 12

5.4. Identidades trigonométricas

Demostramos identidades trigonométricas basadas en el Teorema de Pitágoras, en el cociente, suma y diferencia de ángulos, ángulo doble, ángulo mitad, transformaciones de sumas en productos y de productos en sumas; así, como sus propiedades y aplicaciones.

5.5. Ecuaciones trigonométricas

Encontramos el conjunto solución de ecuaciones trigonométricas.



Actividad de aprendizaje recomendada

Lectura comprensiva del texto básico (pp. 192 a 223), sobre la demostración de identidades y la resolución de ecuaciones trigonométricas.

Lectura de anuncio #12 en el EVA Canvas.

Índice

Primer bimestre

Segundo bimestre

Solucionario

Referencias bibliográficas

Participación en el chat de tutorías de la semana 12 o revisión de la grabación del mismo.

Envío de consultas, reclamos o sugerencias a través de mensajería.

Revisión de problemas resueltos

A parte de los ejercicios resueltos en el texto, podría revisar la resolución de los siguientes ejercicios:

Demuestre las siguientes identidades:

$$1 - \operatorname{ctg} x = \sqrt{(\csc^2 x - 2\operatorname{ctg} x)}$$

Resolución

$$\begin{aligned} 1 - \operatorname{ctgx} &= \sqrt{(\csc^2 x - 2\operatorname{ctgx})} \\ &= \sqrt{(\operatorname{ctg}^2 x + 1 - 2\operatorname{ctgx})} \\ &= \sqrt{(\operatorname{ctg}^2 x - 2\operatorname{ctgx} + 1)} \\ &= \sqrt{(\operatorname{ctgx} - 1)^2} \\ &= |\operatorname{ctgx} - 1| \\ &= \pm (\operatorname{ctgx} - 1) \\ &= 1 - \operatorname{ctgx} \text{ (si } \operatorname{ctgx} < 1\text{); } = \operatorname{ctgx} - 1 \text{ (si } \operatorname{ctgx} > 1\text{)}} \end{aligned}$$

Exprese en función del ángulo indicado las siguientes expresiones:

$$\tan\left(\frac{\pi}{2} - x\right)$$

Resolución

$$\tan\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \cot x$$

(Recuerde que la función de un ángulo es igual a la cofunción de su complementario).

Demuestre la siguiente identidad:

$$\tan\left(\frac{\pi}{4} + \delta\right) + \tan\left(\frac{\pi}{4} - \delta\right) \equiv -\frac{2}{\sin^2 \delta - \cos^2 \delta}$$

Demostración

$$\tan\left(\frac{\pi}{4} + \delta\right) + \tan\left(\frac{\pi}{4} - \delta\right) \equiv -\frac{2}{\sin^2 \delta - \cos^2 \delta}$$

$$\frac{\sin\left(\frac{\pi}{4} + \delta\right)}{\cos\left(\frac{\pi}{4} + \delta\right)} + \frac{\sin\left(\frac{\pi}{4} - \delta\right)}{\cos\left(\frac{\pi}{4} - \delta\right)} \equiv$$

$$\frac{\sin\left(\frac{\pi}{4} + \delta\right)}{\cos\left(\frac{\pi}{4} + \delta\right)} + \frac{\sin\left(\frac{\pi}{4} - \delta\right)}{\cos\left(\frac{\pi}{4} - \delta\right)} \equiv$$

$$\frac{\sin\frac{\pi}{4}\cos\delta + \sin\delta\cos\frac{\pi}{4}}{\cos\frac{\pi}{4}\cos\delta - \sin\delta\sin\frac{\pi}{4}} + \frac{\sin\frac{\pi}{4}\cos\delta - \sin\delta\cos\frac{\pi}{4}}{\cos\frac{\pi}{4}\cos\delta + \sin\delta\sin\frac{\pi}{4}} \equiv$$

$$\frac{\frac{\sqrt{2}}{2}\cos\delta + \sin\delta\frac{\sqrt{2}}{2}}{\frac{\sqrt{2}}{2}\cos\delta - \sin\delta\frac{\sqrt{2}}{2}} + \frac{\frac{\sqrt{2}}{2}\cos\delta - \sin\delta\frac{\sqrt{2}}{2}}{\frac{\sqrt{2}}{2}\cos\delta + \sin\delta\frac{\sqrt{2}}{2}} \equiv$$

$$\frac{\cos\delta + \sin\delta}{\cos\delta - \sin\delta} + \frac{\cos\delta - \sin\delta}{\cos\delta + \sin\delta} \equiv$$

$$\frac{(\cos\delta + \sin\delta)^2 + (\cos\delta - \sin\delta)^2}{\cos^2\delta - \sin^2\delta} \equiv$$

$$\frac{\cos^2\delta + 2\sin\delta\cos\delta + \sin^2\delta + \cos^2\delta - 2\sin\delta\cos\delta + \sin^2\delta}{\cos^2\delta - \sin^2\delta} \equiv$$

$$\frac{2\cos^2\delta + 2\sin^2\delta}{\cos^2\delta - \sin^2\delta} \equiv$$

[Índice](#)[Primer bimestre](#)[Segundo bimestre](#)[Solucionario](#)[Referencias bibliográficas](#)

$$\frac{2(\cos^2\delta + \sin^2\delta)}{\cos^2\delta - \sin^2\delta} \equiv$$

$$\frac{2}{\cos^2\delta - \sin^2\delta} \equiv$$

$$-\frac{2}{\sin^2\delta - \cos^2\delta} \equiv -\frac{2}{\sin^2\delta - \cos^2\delta}$$

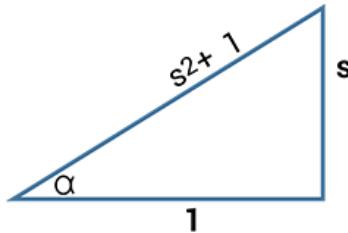
Demuestre la siguiente identidad:

$$\arctan s - \arcsen \frac{t}{\sqrt{t^2 + 1}} \equiv \arctan \frac{s - t}{1 + st}, s > 0 \text{ y } t > 0$$

Demostración

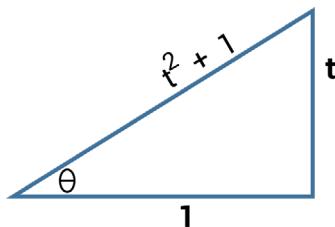
Sea $\alpha = \arctan s$ y $\theta = \arcsen t / \sqrt{t^2 + 1}$

Graficamos α ,



Vemos que $\tan \alpha = s$

Graficamos θ ,



Índice

Primer bimestre

Segundo bimestre

Solucionario

Referencias bibliográficas

Vemos que $\tan\theta=t$

Comenzamos la demostración:

$$\arctan s - \arcsen \frac{t}{\sqrt{t^2+1}} = \alpha - \theta$$

$$= \arctan(\tan(\alpha-\theta))$$

$$= \arctan \left(\frac{\tan\alpha - \tan\theta}{1 + \tan\alpha \tan\theta} \right)$$

$$= \arctan \left(\frac{s-t}{1+st} \right)$$

Demuestre la siguiente identidad:

$$\sen^6 x + \cos^6 x = 1 - \frac{3}{4} \sen^2 2x$$

Demostración

$$\begin{aligned}\sen^6 x + \cos^6 x &= (\sen^2 x + \cos^2 x)(\sen^4 x - \sen^2 x \cos^2 x + \cos^4 x) \\&= (1)(\sen^4 x - \sen^2 x \cos^2 x + \cos^4 x) \\&= \sen^4 x + 2\sen^2 x \cos^2 x + \cos^4 x - 3 \sen^2 x \cos^2 x \\&= (\sen^2 x + \cos^2 x)^2 - 3 \sen^2 x \cos^2 x \\&= 1^2 - 3 \sen^2 x \cos^2 x \\&= 1 - 3/4 (4\sen^2 x \cos^2 x) \\&= 1 - 3/4 (2\sen x \cos x)^2 \\&= 1 - 3/4 (\sen 2x)^2 \\&= 1 - 3/4 (\sen^2 2x)\end{aligned}$$

Convierta los siguientes productos en sumas o diferencias de funciones trigonométricas:

$$\frac{\sen(2\alpha+\beta)}{\sec(2\alpha-\beta)}$$

[Índice](#)[Primer bimestre](#)[Segundo bimestre](#)[Solucionario](#)[Referencias bibliográficas](#)

Resolución

$$\begin{aligned}\frac{\sin(2\alpha + \beta)}{\sec(2\alpha - \beta)} &= \sin(2\alpha + \beta) \cos \cos(2\alpha - \beta) \\ &= \frac{1}{2} [\sin(2\alpha + \beta + 2\alpha - \beta) + \sin(2\alpha + \beta - 2\alpha + \beta)] \\ &= \frac{1}{2} \sin 4\alpha + \frac{1}{2} \sin 2\beta\end{aligned}$$

Demuestre las siguientes igualdades:

$$\sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right) \cdot \sin\left(\frac{3}{2}\pi - x\right) \cdot \cos(\pi - x) = \cos^3 x$$

Demostración

$$\begin{aligned}\sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right) \cdot \sin\left(\frac{3}{2}\pi - x\right) \cdot \cos \cos(\pi - x) &= \\ \cos x \cdot (-\cos x) \cdot (-\cos x) &= \\ \cos^3 x &=\end{aligned}$$

Convierta en producto las siguientes sumas y restas de funciones trigonométricas:

$$\cos\left(\frac{\alpha + \beta}{2}\right) - \cos\left(\frac{\alpha - \beta}{2}\right)$$

Resolución

$$\begin{aligned}\cos\left(\frac{\alpha + \beta}{2}\right) - \cos\left(\frac{\alpha - \beta}{2}\right) &= -2 \sin\left(\frac{\frac{\alpha + \beta}{2} + \frac{\alpha - \beta}{2}}{2}\right) \sin\left(\frac{\frac{\alpha + \beta}{2} - \frac{\alpha - \beta}{2}}{2}\right) \\ &= -2 \sin\left(\frac{\alpha}{2}\right) \sin\left(\frac{\beta}{2}\right)\end{aligned}$$

Demuestre la siguiente igualdad:

$$\frac{1}{4} [\cos(a+b+c) + \cos(a+b-c) + \cos(a-b+c) + \cos(a-b-c)] = \cos a \cos b \cos c$$

Demostración

$$\frac{1}{4} [\cos(a+b+c) + \cos(a+b-c) + \cos(a-b+c) + \cos(a-b-c)] =$$

$$\frac{1}{4} [\cos((a+b)+c) + \cos((a+b)-c) + \cos((a-b)+c) + \cos((a-b)-c)] =$$

$$\frac{1}{4} [2 \cos(a+b) \cos(c) + 2 \cos(a-b) \cos(c)] =$$

$$\frac{1}{2} \cos(c) [\cos(a+b) + \cos(a-b)] =$$

$$\frac{1}{2} \cos(c) [2 \cos(a) \cos(b)] =$$

$$\cos(a) \cos(b) \cos(c) =$$

Resuelva la siguiente ecuación, en la que $0^\circ \leq x \leq 360^\circ$:

$$x + \cos x = \sin^2 x$$

Resolución

$$\cos^2 x + \cos x = \sin^2 x$$

$$\cos^2 x + \cos x = 1 - \cos^2 x$$

$$2\cos^2 x + \cos x - 1 = 0$$

$$\cos x = \frac{-1 \pm \sqrt{1+8}}{4} = \frac{-1 \pm \sqrt{9}}{4} = \frac{-1 \pm 3}{4}$$

$$\cos x = 1/2 \text{ o } \cos x = -1$$

$$\text{Si } \cos x = 1/2 \quad x_1 = 60^\circ \text{ ó } x_2 = 300^\circ$$

$$\text{Si } \cos x = -1 \quad x_3 = 180^\circ$$

Resolución de problemas propuestos

Revise qué problemas planteados en la tarea pueden resolverse con el contenido estudiado hasta este momento; intente resolverlos y, si tiene alguna dificultad, plantéeselo al docente para que lo oriente.



Semana 13

5.6. Resolución de triángulos rectángulos

Si tenemos un ángulo recto, al menos un lado y otro dato de un triángulo rectángulo, podemos encontrar los demás ángulos y lados del triángulo rectángulo.



Actividades de aprendizaje recomendadas

Lectura comprensiva del texto básico (pp. 226 a 233), análisis, interpretación y aplicación de los diversos procedimientos que nos servirán para resolver triángulos rectángulos.

Lectura de anuncio #13 en el EVA Canvas.

Participación en el chat de tutorías de la semana 13 o revisión de la grabación del mismo.

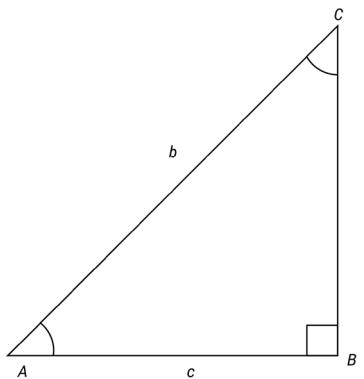
Envío de consultas, reclamos o sugerencias a través de mensajería.

[Índice](#)[Primer bimestre](#)[Segundo bimestre](#)[Solucionario](#)[Referencias bibliográficas](#)

Revisión de problemas resueltos

Aparte de los ejercicios resueltos en el texto, podría revisar la resolución de los siguientes ejercicios:

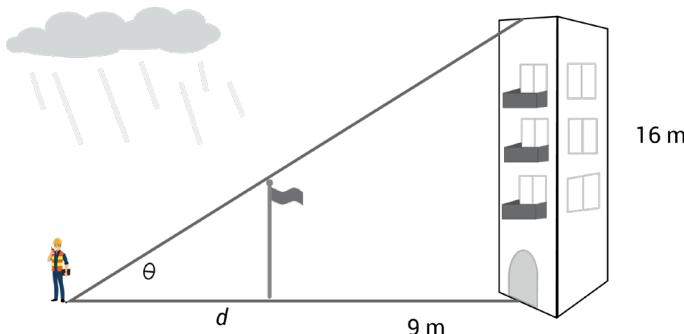
Calcule el valor de los ángulos agudos en el siguiente triángulo rectángulo si $b=3^a$.



Resolución

$$\cos C = \frac{a}{b} = \frac{a}{3a} = \frac{1}{3} \quad C = \cos^{-1}\left(\frac{1}{3}\right) = 70,53^\circ \quad B = 90^\circ - 70,53^\circ = 19,47^\circ$$

De acuerdo con la siguiente gráfica, se desea conocer el ángulo de elevación θ , así como la distancia entre el topógrafo y el asta de la bandera, si se sabe que esta mide la cuarta parte de la altura del edificio que es de 16 m, y que la distancia entre el asta y el edificio es de 9 m.



Resolución

Si llamamos h a la altura del asta de la bandera.

$$h = 16m/4 = 4m$$

$$\tan\theta = \frac{h}{d} = \frac{16m}{9m + d}$$

Multiplicando en cruz

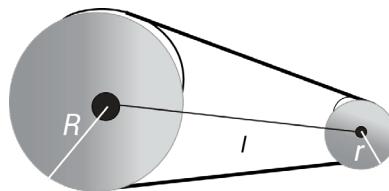
$$\frac{4m}{d} = \frac{16m}{9m + d}$$

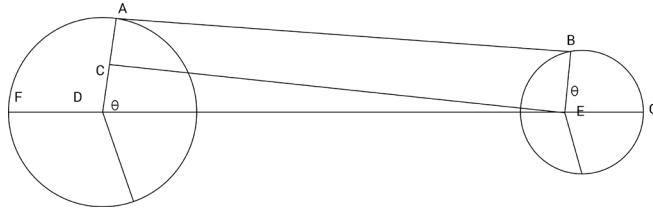
$$36m + 4d = 16d$$

$$12d = 36m \quad d = 3m$$

$$\tan\theta = \frac{4m}{3m} = 4/3 \quad \theta = \tan^{-1}(4/3) = 53.13^\circ$$

Se tienen dos poleas de radios R , r y la distancia entre sus centros es l , ¿cuál es la longitud de la cadena de transmisión?



[Índice](#)[Primer bimestre](#)[Segundo bimestre](#)[Solucionario](#)[Referencias bibliográficas](#)

Trazamos CE paralelo a AB, como AB es perpendicular a AD, CE también lo es, por lo que el triángulo CDE es rectángulo, la hipotenusa DE vale l y el cateto CD: R-r

$$\overline{AB} = \overline{CE} = \sqrt{l^2 - (R - r)^2}$$

El ángulo θ sería:

$$\theta = \cos^{-1}\left(\frac{R - r}{l}\right)$$

Si el ángulo está en radianes, el arco AF sería:

$$\widehat{AF} = (\pi - \theta)R = (\pi - \cos^{-1}\left(\frac{R - r}{l}\right))R$$

El arco BG sería:

$$\widehat{BG} = \theta r = \cos^{-1}\left(\frac{R - r}{l}\right)r$$

La longitud de la cadena sería:

$$L = 2(FA + AB + BG) = 2[\sqrt{l^2 - (R - r)^2} + \left(\pi - \cos^{-1}\left(\frac{R - r}{l}\right)\right)R + \cos^{-1}\left(\frac{R - r}{l}\right)r]$$

Resolución de problemas propuestos

Revise qué problemas planteados en la tarea pueden resolverse con el contenido estudiado hasta este momento; intente resolverlos y, si tiene alguna dificultad, plantéeselo al docente para que lo oriente.



Semana 14

5.7. Resolución de triángulos oblicuángulos

Analizamos las leyes del seno, coseno y tangente y su utilidad para resolver triángulos que no son rectángulos cuando tenemos al menos un lado y dos elementos más de un triángulo.



Actividad de aprendizaje recomendada

Lectura comprensiva del texto básico (pp. 236 a 247), para adquirir recursos que permitan resolver triángulos oblicuángulos.

Lectura de anuncio #14 en el EVA Canvas.

Participación en el chat académico de la semana 14 o revisión de la grabación del mismo.

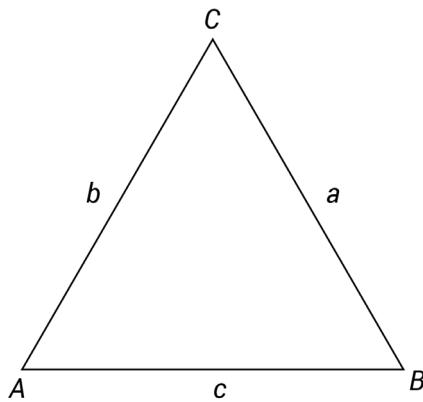
Envío de consultas, reclamos o sugerencias a través de mensajería.

[Índice](#)[Primer bimestre](#)[Segundo bimestre](#)[Solucionario](#)[Referencias bibliográficas](#)

Revisión de problemas resueltos

Aparte de los ejercicios resueltos en el texto, podría revisar la resolución de los siguientes ejercicios:

Resuelva el siguiente triángulo oblicuángulo si $a = 12.6$, $b = 18.7$ y $C = 56^\circ$



Resolución

Aplicando la ley de los cosenos, el lado c sería:

$$c = \sqrt{a^2 + b^2 - 2ab\cos C} = \sqrt{12.6^2 + 18.7^2 - 2(12.6)(18.7) \cos 56^\circ} = 15.65$$

Para el cálculo de los ángulos, utilizamos la ley de los senos:

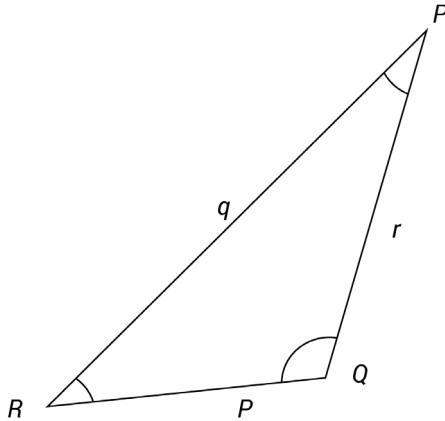
$$A = \operatorname{sen}^{-1} \left(\frac{a \operatorname{sen} C}{c} \right) = \operatorname{sen}^{-1} \left(\frac{12.6 \operatorname{sen} 56^\circ}{15.65} \right) = 41.87^\circ$$

El otro ángulo lo encontramos restando de 180°

$$B = 180^\circ - 56^\circ - 41.87^\circ = 82.13^\circ$$

[Índice](#)[Primer bimestre](#)[Segundo bimestre](#)[Solucionario](#)[Referencias bibliográficas](#)

de la siguiente figura:



- a. Demuestre que dado un lado y 2 ángulos adyacentes, el área del triángulo será:

$$A = \frac{r^2 \operatorname{sen} Q \operatorname{sen} P}{2 \operatorname{sen} (Q+P)} = \frac{q^2 \operatorname{sen} P \operatorname{sen} R}{2 \operatorname{sen} (P+R)} = \frac{p^2 \operatorname{sen} R \operatorname{sen} Q}{2 \operatorname{sen} (R+Q)}$$

- b. Demuestre que el área del triángulo está dado por cualquiera de las siguientes fórmulas:

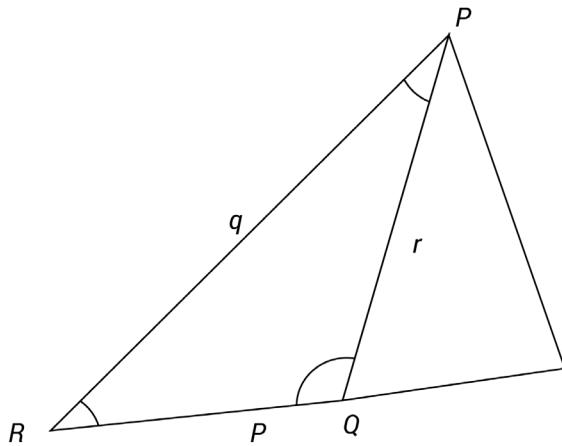
$$A = \frac{1}{2} r^2 \operatorname{sen} P \operatorname{sen} Q \csc R$$

$$A = \frac{2 p q r}{p+q+r} \left[\cos\left(\frac{1}{2} P\right) \cos\left(\frac{1}{2} Q\right) \cos\left(\frac{1}{2} R\right) \right]$$

[Índice](#)[Primer bimestre](#)[Segundo bimestre](#)[Solucionario](#)[Referencias bibliográficas](#)

Resolución

a)



Trazamos la altura del triángulo, a la que vamos a llamar h

$$A = \frac{1}{2}ph = \frac{1}{2}p(q\sin R)$$

Por la ley de los senos, $q = \frac{ps\in Q}{\sin p}$

$$A = \frac{1}{2}p^2 \left(\frac{\sin R \sin Q}{\sin P} \right)$$

Como $\sin P = \sin(180^\circ - P) = \sin(Q + R)$

$$A = \frac{1}{2}p^2 \left(\frac{\sin R \sin Q}{\sin(Q + R)} \right)$$

b)

$$\frac{2pqr}{p+q+r} \left[\left(\frac{1}{2}P \right) \cos \left(\frac{1}{2}Q \right) \left(\frac{1}{2}R \right) \right] = \frac{2pqr}{p+q+r} \left[\sqrt{\frac{1+\cos P}{2}} \sqrt{\frac{1+\cos Q}{2}} \sqrt{\frac{1+\cos R}{2}} \right]$$

Recordemos que $\cos A = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc}$

$$\begin{aligned} &= \frac{2pqr}{p+q+r} \left[\sqrt{\frac{\left(1 + \frac{q^2 + r^2 - p^2}{2qr}\right) \left(1 + \frac{q^2 + p^2 - r^2}{2pq}\right) \left(1 + \frac{p^2 + r^2 - q^2}{2pr}\right)}{8}} \right] \\ &= \frac{2pqr}{p+q+r} \left[\sqrt{\frac{\left(\frac{2qr + q^2 + r^2 - p^2}{2qr}\right) \left(\frac{2pq + q^2 + p^2 - r^2}{2pq}\right) \left(\frac{2pr + p^2 + r^2 - q^2}{2pr}\right)}{8}} \right] \\ &= \frac{2pqr}{p+q+r} \left[\sqrt{\frac{(2qr + q^2 + r^2 - p^2)(2pq + q^2 + p^2 - r^2)(2pr + p^2 + r^2 - q^2)}{64p^2q^2r^2}} \right] \\ &= \frac{1}{4(p+q+r)} \left[\sqrt{(2qr + q^2 + r^2 - p^2)(2pq + q^2 + p^2 - r^2)(2pr + p^2 + r^2 - q^2)} \right] \\ &= \frac{1}{4(p+q+r)} \sqrt{[(q+r)^2 - p^2][(p+q)^2 - r^2][(p+r)^2 - q^2]} \\ &= \frac{1}{4(p+q+r)} \sqrt{(q+r+p)(q+r-p)(p+q+r)(p+q-r)(p+r+q)(p+r-q)} \\ &= \frac{1}{4(p+q+r)} \sqrt{(p+q+r)^3(-p+q+r)(p+q-r)(p-q+r)} \\ &\quad = \frac{1}{4} \sqrt{(p+q+r)(-p+q+r)(p+q-r)(p-q+r)} \\ &\quad = \frac{1}{4} \sqrt{(p+q+r)(p+q+r-2p)(p+q+r-2r)(p+q+r-2q)} \\ &\quad = \frac{1}{4} \sqrt{2s(2s-2p)(2s-2r)(2s-2q)} = \sqrt{s(s-p)(s-r)(s-q)} = A \end{aligned}$$

Índice

Primer
bimestre

Segundo
bimestre

Solucionario

Referencias
bibliográficas

Resolución de problemas propuestos

Revise qué problemas planteados en la tarea pueden resolverse con el contenido estudiado hasta este momento; intente resolverlos y, si tiene alguna dificultad, plantéeselo al docente para que lo oriente.



Autoevaluación unidad 5

Preguntas dicotómicas

Instrucción: En el paréntesis que aparece junto a cada enunciado señale si es verdadero o falso

1. () Expresada en función de un ángulo agudo, la función $\cos 337^\circ = \sin 23^\circ$
2. () $\tan 28^\circ = \cot 62^\circ$
3. () $\cos 45^\circ = \sin 45^\circ$
4. () $\csc 13^\circ = \sin 13^\circ$

Preguntas de opción múltiple

Señale el literal de la alternativa que corresponda a cada enunciado.

5. La amplitud de la función $y=6.6\operatorname{Sen}(3.4x+3.1)$ es:
 - a. 3.1
 - b. 3.4
 - c. 6.5
 - d. 6.6
6. El punto $(2, -3)$ está ubicado en el cuadrante:
 - a. I
 - b. II
 - c. III
 - d. IV

[Índice](#)[Primer bimestre](#)[Segundo bimestre](#)[Solucionario](#)[Referencias bibliográficas](#)

7. $\tan 126^\circ =$
- a. $\tan 54^\circ$
 - b. $\cot 54^\circ$
 - c. $-\tan 54^\circ$
 - d. $-\cot 54^\circ$
8. En un triángulo, el valor de 2 de sus lados son 3u y 5u; el ángulo que forman esos dos lados es de 120° ; la medida del tercer lado es de:
- a. 3 u
 - b. 5 u
 - c. 7 u
 - d. 9 u
9. En un triángulo isósceles, el valor del lado desigual es de 5u; los ángulos adyacentes miden ambos 30° ; el valor de los otros lados es de
- a. $\frac{\sqrt{3}}{5}$
 - b. $\frac{5}{\sqrt{3}}$
 - c. $\frac{\sqrt{2}}{5}$
 - d. $\frac{5}{\sqrt{2}}$

[Índice](#)[Primer bimestre](#)[Segundo bimestre](#)[Solucionario](#)[Referencias bibliográficas](#)

Pregunta de correspondencia

10. Si los catetos de un triángulo rectángulo miden $3u$ y $4u$, los valores de las funciones trigonométricas del ángulo menor θ (opuesto al lado de $3u$) son:

1. () $\sin \theta =$

2. () $\cos \theta =$

3. () $\tan \theta =$

4. () $\cot \theta =$

5. () $\sec \theta =$

6. () $\csc \theta =$

a. $\frac{3}{4}$

b. $\frac{3}{5}$

c. $\frac{4}{5}$

d. $\frac{4}{3}$

e. $\frac{5}{4}$

f. $\frac{5}{3}$

En el paréntesis que está junto a la columna de la izquierda ponga el literal que le corresponda de los conceptos que se encuentran en la columna de la derecha.

Es recomendable que revise la causa de todos sus errores antes de seguir adelante; así, construirá bases sólidas para fundamentar los conocimientos posteriores. En caso de no poder explicar dichos errores, es recomendable que lo consulte con el docente.

[Ir al solucionario](#)

Índice

Primer bimestre

Segundo bimestre

Solucionario

Referencias bibliográficas

Resultado de aprendizaje 8

Capacidad para: analizar, interpretar y aplicar los conceptos relativos a las figuras, cuerpos geométricos y trigonometría.



Semana 15

Actividad 1. Revisión exhaustiva de contenidos de conceptos fundamentales y desarrollo de ejercicios de las unidades 4 y 5.

Actividad 2. Desarrollar los ejercicios propuestos en la tarea.

Actividad 3. Participar de las tutorías semanales.

Actividad 4. Lectura de anuncio #15 en el Canvas.

Índice

Primer bimestre

Segundo bimestre

Solucionario

Referencias bibliográficas

Resultado de aprendizaje 9

Capacidad para: analizar, interpretar y aplicar los conceptos y operaciones de vectores y espacios vectoriales.



Semana 16

Actividad 1. Revisión exhaustiva de contenidos de conceptos fundamentales y desarrollo de ejercicios de las unidades 1, 2, y 3.

Actividad 2. Desarrollar los ejercicios propuestos en la tarea.

Actividad 3. Participar de las tutorías semanales.

Actividad 4. Lectura de anuncio #16 en el Canvas.

Índice

Primer bimestre

Segundo bimestre

Solucionario

Referencias bibliográficas



4. Solucionario

Solucionario autoevaluación 1

Autoevaluación 1	
Pregunta	Respuesta
1.	V
2.	V
3.	d
4.	d
5.	b
6.	c
7.	d
8.	b
9.	c
10.	b

Ir a la
autoevaluación

Índice

Primer bimestre

Segundo bimestre

Solucionario

Referencias bibliográficas

Solucionario autoevaluación 2

Autoevaluación 2	
Pregunta	Respuesta
1.	a
2.	c
3.	c
4.	a
5.	b
6.	a
7.	c
8.	deahfgcb
9.	bac
10.	abdc

Ir a la
autoevaluación

Índice

Primer bimestre

Segundo bimestre

Solucionario

Referencias bibliográficas

Solucionario autoevaluación 3

Autoevaluación 3	
Pregunta	Respuesta
1.	F
2.	F
3.	a
4.	a
5.	d
6.	b
7.	b
8.	abcd
9.	badc
10.	cba

Ir a la
autoevaluación

Índice

Primer bimestre

Segundo bimestre

Solucionario

Referencias bibliográficas

Solucionario autoevaluación 4

Autoevaluación 4	
Pregunta	Respuesta
1.	F
2.	V
3.	F
4.	d
5.	b
6.	b
7.	c
8.	d
9.	d
10.	a

Ir a la
autoevaluación

Índice

Primer bimestre

Segundo bimestre

Solucionario

Referencias bibliográficas

Solucionario autoevaluación 5

Autoevaluación 5	
Pregunta	Respuesta
1.	V
2.	V
3.	V
4.	F
5.	d
6.	d
7.	c
8.	c
9.	b
10.	bcaodef

Ir a la
autoevaluación



5. Referencias Bibliográficas

a. Nombre del texto básico (texto – guía)

Aguilar Márquez, A. (2016). *Geometría, Trigonometría y Geometría Analítica*. 4a. Edición. México: Pearson.

b. Información general del texto

El texto básico ayuda a entender, comprender y visualizar la geometría y la trigonometría como herramientas fundamentales en el estudio de las matemáticas.

c. Nombre la guía didáctica

Morales, G. (2019). *Guía didáctica Fundamentos de Geometría*. Loja, Ecuador: Editorial Universidad Técnica Particular de Loja.

d. Breve descripción general de la guía didáctica

Las Guía didáctica constituye un recurso esencial, que permitirá que el proceso de aprendizaje sea lo más autónomo posible permitiendo tener la información y las estrategias metodológicas que el profesional en formación debe adoptar para abordar los contenidos planificados para el semestre académico.

Índice

Primer
bimestre

Segundo
bimestre

Solucionario

Referencias
bibliográficas

Recursos educativos:

[GeoGebra.org](#)

GeoGebra es un software de matemáticas dinámicas, disponible gratuitamente para usos no comerciales.

[Es.khanacademy.org](#)

Kahn Academy es una organización sin fines de lucro que tiene como misión proporcionar educación gratuita de clase mundial a cualquier persona en cualquier lugar.