Modalidad Abierta y a Distancia

Sistemas de Conocimiento de Funciones Polinomiales y Racionales y su Didáctica

Guía didáctica

Índice

Primer bimestre

Segundo bimestre

Solucionario

Referencias bibliográficas

Departamento de Ciencias de la Educación

Sección departamental de Pedagogía de las Ciencias Experimentales

Sistemas de Conocimiento de Funciones Polinomiales y Racionales y su Didáctica

Guía didáctica

Autor:

Armijos Ordoñez Jorge Washington

EDUC_1131

Asesoría virtual
www.utpl.edu.ec

Sistemas de Conocimiento de Funciones Polinomiales y Racionales y su Didáctica
Guía didáctica
Armijos Ordoñez Jorge Washington

Universidad Técnica Particular de Loja

Diagramación y diseño digital:
Ediloja Cía. Ltda.
Telefax: 593-7-2611418.
San Cayetano Alto s/n.
www.ediloja.com.ec
edilojainfo@ediloja.com.ec
Loja-Ecuador

ISBN digital - 978-9942-25-818-2

11 de mayo, 2020

Índice

Índice
Primer bimestre
Segundo bimestre
Solucionario
Referencias bibliográficas

1. Datos de información

1.1. Presentación-Orientaciones de la asignatura

1.2. Competencias genéricas de la UTPL

- Vivencia de los valores universales del humanismo de Cristo.
- Pensamiento crítico y reflexivo.
- Compromiso e implicación social.
- Comportamiento ético.
- Orientación a la innovación y a la investigación.
- Comunicación oral y escrita.

1.3. Competencias específicas de la carrera

1. Integra conocimientos pedagógicos, didácticos y curriculares a través del uso de herramientas tecnológicas pertinentes que permitan interdisciplinariamente la actualización de modelos y metodologías de aprendizaje e incorporación de saberes en matemáticas y física, basados en el desarrollo del pensamiento crítico, reflexivo, creativo, experiencial y pertinentes en relación con el desarrollo de la persona y su contexto.

2. Implementa la comunicación dialógica como estrategia para la formación de la persona orientada a la consolidación de capacidades para la convivencia armónica en la sociedad, la participación ciudadana, el reconocimiento de la interculturalidad y la diversidad, y la creación de ambientes educativos inclusivos en el ámbito de las matemáticas y la física, a partir de la generación, organización y aplicación crítica y creativa del conocimiento abierto e integrado en relación a las características y requerimientos de desarrollo de los contextos.

3. Organiza modelos curriculares y la gestión del aprendizaje relacionados con las matemáticas y la física, centrados en la experiencia de la persona que aprende, en interacción con los contextos institucionales, comunitarios y familiares, orientados al diseño de procesos de enseñanza- aprendizaje y de evaluación que integren la práctica de investigación acción hacia producción e innovación, la interculturalidad, la inclusión, la democracia, la flexibilidad metodológica para el aprendizaje personalizado, las interacciones virtuales, presenciales y las tutoriales.

4. Potencia la formación integral de la persona desde los principios del humanismo de Cristo y del Buen Vivir, basado en el desarrollo de su proyecto de vida y profesional que amplíen perspectivas, visiones y horizontes de futuro en los contextos.

1.4. Problemática que aborda la asignatura en el marco del proyecto

Escasa capacitación y/o formación en temas pedagógicos y didácticos, así como el dominio disciplinar, limitando una correcta interacción en el proceso de enseñanza y aprendizaje.

1.5. Proyecto integrador de saberes

Diseño y construcción de escenarios, contextos y ambientes de aprendizaje para la enseñanza de las matemáticas y la física en el Bachillerato.

2. Metodología de aprendizaje

Estimado/a profesional en Formación:

Antes de iniciar con el desarrollo de la asignatura de Sistemas de conocimiento de funciones polinomiales y racionales y su didáctica, es necesario que tenga en cuenta las siguientes orientaciones generales para el estudio:

Planificación en el estudio:

- Organice sus actividades laborales y familiares para que disponga de un espacio y tiempo diario al estudio de esta asignatura.

Índice
Primer bimestre
Segundo bimestre
Solucionario
Referencias bibliográficas

- La asignatura de Sistemas de conocimiento de funciones polinomiales y racionales y su didáctica tiene una duración de 192 horas distribuidas en16 semanas, 8 semanas en cada bimestre y comprende en total 4 unidades de trabajo.
- Podría dedicar la primera semana para familiarizarse con el entorno virtual de aprendizaje y dos o tres semanas para desarrollar cada unidad. Por lo tanto, conviene distribuir el tiempo que puede llevarle leer, comprender cada tema y desarrollar las actividades recomendadas en cada unidad.
- Se sugiere una dedicación de por lo menos dos horas diarias de trabajo a fin de cumplir a satisfacción con todas las actividades propuestas. La distribución del tiempo que le sugerimos podría ayudarle a organizar mejor las tareas de estudio; pero, es usted quien tiene el control sobre cuándo, cuánto y cómo aprender.
- Revise la planificación para el trabajo del estudiante, en el plan docente, encontrará una panorámica total de lo que usted va a desarrollar durante el primer y segundo bimestre.
- No olvide revisar el Entorno Virtual de Aprendizaje (EVA) constantemente, porque cada semana el docente-tutor a través de anuncios académicos le asesorará, con la finalidad de orientar y facilitar su aprendizaje.

Los materiales educativos con los que se cuenta para esta asignatura son:

- Guía Didáctica presenta con claridad los procedimientos que debe seguir para el desarrollo de sus actividades, la misma se convertirá en mediadora de su aprendizaje, por ello, es indispensable revisarla de forma integral.

- Texto Básico, contiene los contenidos a estudiar de cada una las cuatro unidades ejemplos, ejercicios resueltos y ejercicios propuestos.
- Conexión a Internet, para revisar y/o descargar los materiales (artículos, videos, etc.) que profundizan el estudio de las temáticas que se abordan.
- Plan docente que contiene las actividades de aprendizaje recomendadas a lo largo del documento, para la comprensión de los fundamentos teóricos.
- Productos acreditables que debe organizarlos según lo solicitado, esto le permitirá consolidar su portafolio docente y sistematizar adecuadamente su práctica educativa.
- Fuentes informativas confiables, de bases de datos responsables, con fines teóricos fundamentados; además, recurra a los recursos educativos abiertos (REA) que su tutor sugiera en el EVA.
- Disponga de un cuaderno para anotaciones, lápiz, borrador, resaltador, es importante obtener el material necesario antes de empezar el trabajo para evitar distracciones innecesarias.

Para estudiar

- Recurra a la lectura comprensiva, para obtener mayor provecho del estudio sugerido en esta asignatura
- Plantee preguntas para organizar búsquedas, no lea solamente con el fin de memorizar, una buena manera es formulándose preguntas y aproximando respuestas.
- Revise detenidamente los temas y subtemas propuestos en la guía didáctica, estos conocimientos son esenciales.

- Desarrolle satisfactoriamente las preguntas y ejercicios propuestos en las actividades de aprendizajes recomendadas.
- Identifique en cada unidad las actividades que se solicitan y desarrolle de forma sistemática.
- Comparta sus experiencias pedagógicas, inquietudes, expectativas recomendaciones a la hora de acercarse a la institución educativa.
- Comparta sus construcciones con su tutor y compañeros, es muy importante ya que permite asegurarnos de la validez y pertinencia de las actividades que vamos desarrollando.

Metodología para el desarrollo de las actividades de aprendizaje

La metodología a utilizarse estará centrada en el aprendizaje, investigación y reflexión que seguirán los estudiantes para llegar a proponer una solución a un problema planteado, esto es el aprendizaje basado en problemas ABP, donde el protagonista del aprendizaje es el propio estudiante, que asume con responsabilidad su formación profesional, siendo él, la parte más activa en el proceso. Prieto (2006) defendiendo el enfoque del aprendizaje activo señala que "el aprendizaje basado en problemas representa una estrategia eficaz y flexible que, a partir de lo que hacen los estudiantes, pueden mejorar la calidad de su aprendizaje universitario en aspectos muy diversos" (p. 9) así, en un contexto real de su profesión, promueve el pensamiento crítico y la toma de decisiones.

"Poner en práctica esta metodología no supone sólo el ejercicio de indagación por parte de los alumnos, sino convertirlo en datos e información útil, las grandes ventajas observadas con el uso de esta metodología son:

- El desarrollo del pensamiento crítico y competencias creativas.
- La mejora de las habilidades de resolución de problemas.
- El aumento de la motivación del alumno

- La mejor capacidad de transferir conocimientos a nuevas situaciones.
- Trabajo en equipo.
- Habilidades de comunicación.
- Desarrollo de actitudes y valores: precisión, revisión, tolerancia… ”(Realinfluencers, 2019, p.1)

Formas de comunicación e interacción.

- Comuníquese por correo o telefónicamente con su tutor para resolver cualquier inquietud en el desarrollo de sus actividades para el aprendizaje, revise el horario de tutoría que consta en el EVA.

- Participe de las actividades sincrónicas y asíncronas planificadas por cada bimestre, e interactúe permanentemente con su docente-tutor y/o compañeros/as, a fin de enriquecer sus experiencias de aprendizaje.

- Sistematice la información obtenida de cada una de las actividades de aprendizaje propuestas en cada bimestre las mismas que conllevan al desarrollo de la tarea académica.

Si usted cumple con las recomendaciones aquí planteadas con seguridad tendrá muchos éxitos en el desarrollo de su Prácticum 3, le alentamos a seguir con el mismo entusiasmo con el que inició su carrera

Índice
Primer bimestre
Segundo bimestre
Solucionario
Referencias bibliográficas

3. Orientaciones didácticas por resultados de aprendizaje

Primer bimestre

Resultado de aprendizaje 1

Determina los principios y leyes de las funciones lineales para modelar y resolver problemas del entorno.

Contenidos, recursos y actividades de aprendizaje

Estimados estudiantes:

Bienvenidos al curso de Sistemas de conocimiento de funciones polinomiales y racionales y su didáctica, damos inicio profundizando nuestros conocimientos sobre funciones, sus gráficas, cómo obtener información a partir de la gráfica, funciones lineales y modelos, transformación de funciones, combinación de funciones, funciones uno a uno y sus inversas.

Con estos conocimientos, la comprensión de la pedagogía y aplicación de la didáctica estaremos en condiciones de generar aprendizajes significativos en nuestros estudiantes, quienes podrán resolver situaciones de la vida real aplicando la modelación.

Semana 1

Unidad 1. Funciones

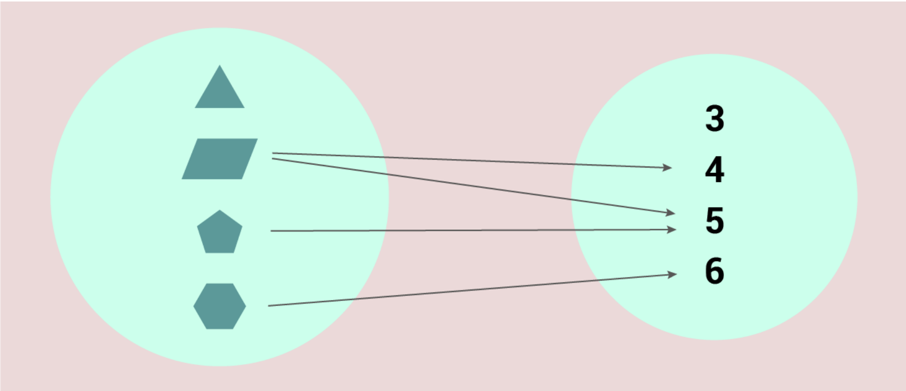
1.1. Funciones a nuestro alrededor

1.1.1. ¿Cómo reconocer funciones a nuestro alrededor?

En matemáticas se dice que una variable es función de otra variable si el valor de la primera depende de la segunda.

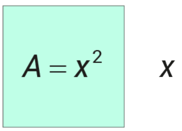
Entonces, cuando en los fenómenos físicos de nuestro entorno, se observa que una cantidad (variable) depende de otra, se habla de una función. Por ejemplo, el costo de una libra de carne depende del tipo de carne, las notas en matemáticas dependen de la modelación adecuada de los problemas propuestos, el número de lados de un polígono están en función del nombre del polígono, entre otros.

Con este análisis, enlacemos con una flecha la variable que depende de otra variable:



De este análisis, se deduce que, existe una regla que relaciona una variable con otra, esta correspondencia debe ser numérica y a cada valor del conjunto de partida le corresponde un único valor del conjunto de llegada.

Verifiquemos estos principios, sabiendo que el área de un cuadrado depende de la longitud de su lado, calculemos el área del cuadrado $A = x^2$ que le corresponde a cada lado (x) y completemos la tabla:



Longitud del lado x (m.)	Área del cuadrado x^2 (m2.)
2	4
3	9
4	16
5	25
6	36

En este proceso encontramos que existe una regla que relaciona estas dos variables, en este caso "x al cuadrado" que nos permite afirmar que el área del cuadrado está en función de la longitud del lado. Y así, podremos encontrar infinidad de funciones a nuestro alrededor.

1.1.2. ¿Cómo se define una función?

Sobre estos conocimientos previos logrados, definamos una función en el contexto de las matemáticas.

1.1.3. ¿Cómo se evalúa una función?

Evaluar una función es encontrar los valores de salida de la función para entradas específicas.

Para comprender de mejor manera analicemos los siguientes ejemplos:

Ejemplo1

Verifiquemos si al evaluar la función $f(x) = x^2 + 6$ para:

- ¿ f(3) se obtiene 13?

$$f(x) = x^2 + 6$$

$$f(x) = 3^2 + 6$$

$$f(x) = 15$$

No, la solución es 15

- ¿Para f (-2) se obtiene -8?

$$f(x) = x^2 + 6$$

$$f(x) = (-2)^2 + 6$$

$$f(x) = 10$$

No, la solución es 10

- Para $f(\sqrt{5})$, se obtiene 11

$$f(x) = x^2 + 6$$

$$f(x) = (\sqrt{5})^2 + 6$$

$$f(x) = 11$$

Es correcto, la solución es 11

Analizando este ejemplo, verificamos que para los valores específicos de entrada: 3, -2 y $\sqrt{5}$ se obtienen valores de salida de 15, 10 y 11 respectivamente.

Recursos de aprendizaje

Para profundizar sus conocimientos lea comprensivamente las páginas 148 y 153 del texto Básico Stewart et al. (2017). Precálculo. Matemáticas para el cálculo.

Es importante que ponga atención en las notas al margen del texto básico.

1.1.4. ¿Cómo se determina el dominio de una función?

Recuerde que el dominio de una función es el conjunto de todas las entradas posibles para la función.

Si las entradas son 3, -2 y $\sqrt{5}$, sabiendo que 3 es un número natural, -2 es un número entero negativo y $\sqrt{5}$ es un número irracional, por lo tanto, inferimos que en las entradas pueden estar todos los números reales, es decir:

El ***dominio*** de la función $\boldsymbol{f(x) = x^2 + 6}$ está conformado por el conjunto de números reales.

El ***rango*** de f son todas las salidas posibles, en el ejemplo que estamos analizando El rango es {y/y es mayor o igual a 6},

Verifiquemos

$$f(x) = x^2 + 6$$

$$y = x^2 + 6$$

Cambiamos la y por x

$$x = y^2 + 6$$

Despejamos y

$$y^2 = x - 6$$

$$y = \sqrt{x - 6}$$

Como podemos ver que tiene solución para todos los valores iguales o mayores a 6, entonces $\boldsymbol{Rango\ de\ f = \{y/y \geq 6\}}$

Ahora analicemos una función que tenga denominador.

Ejemplo 2

Dada la función: $f(x) = \frac{1}{x^2 - x}$

Evaluemos para f(0)

Índice

Primer bimestre

Segundo bimestre

Solucionario

Referencias bibliográficas

$$f(x) = \frac{1}{x^2 - x}$$

$$f(0) = \frac{1}{x(x-1)}$$

$$f(0) = \frac{1}{0(0-1)}$$

$$f(0) = \frac{1}{0}$$

$$f(0) = \ valor\, no\, definido$$

Evaluemos para f(1)

$$f(x) = \frac{1}{x^2 - x}$$

$$f(1) = \frac{1}{x(x-1)}$$

$$f(1) = \frac{1}{1(1-1)}$$

$$f(1) = \frac{1}{1(0)}$$

$$f(1) = \frac{1}{0}$$

$$f(1) = \ valor\, no\, definido$$

Recordemos que una expresión racional no puede tomar en el denominador el valor 0, porque la división por cero no está definida.

Si la función no está definida para 0 y para 1, entonces el dominio de la función es

$$\mathrm{Df} = \{x/x \neq 0, x \neq 1\}$$

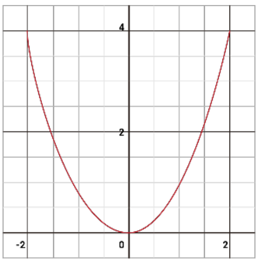
También se puede escribir

$$\mathrm{Df} = (-\infty, 0) \cup (0{,}1) \cup (1, \infty)$$

1.1.5. ¿Cuáles son las formas de representar una función?

Recordemos que existen cuatro formas de representar una función, mediante:

1. Descripción verbal
2. Fórmula explícita
3. Gráfica
4. Tabla de valores

<table>
<tr><th>Descripción verbal</th><th>Fórmula explícita</th><th>Gráfica</th><th>Tabla de valores</th></tr>
<tr><td>El área de un cuadrado es igual al cuadrado de su lado.</td><td>$A = x^2$</td><td></td><td><table><tr><th>x</th><th>A= x^2</th></tr><tr><td>-2</td><td>4</td></tr><tr><td>-1</td><td>1</td></tr><tr><td>0</td><td>0</td></tr><tr><td>1</td><td>1</td></tr><tr><td>2</td><td>4</td></tr></table></td></tr>
</table>

Recursos de aprendizaje

Para profundizar sus conocimientos lea detenidamente el texto básico, páginas 153-155 y resuelva los ejercicios propuestos. Habilite el hipervínculo y mire atentamente el video de matemáticas Profe Alex. (s.f.). Qué es función/Concepto de función 14

Índice
Primer bimestre
Segundo bimestre
Solucionario
Referencias bibliográficas

Retroalimentación

La información que se encuentra en el video permite comprender de manera rápida el concepto de función inicial definiendo qué es una relación, propone un ejemplo que clarifica el concepto de relación, luego explica el concepto de función:" todas las funciones son relaciones, pero hay relaciones que no son funciones", y con ejemplos deja claro el concepto de función

Con esta información más la adquirida de la lectura del texto básico y la resolución de los ejercicios propuestos, está en condiciones de continuar con el análisis del siguiente tema ¿Cómo graficar funciones?

Semana 2

1.2. Gráfica de funciones

Para visualizar una función se requiere su gráfica, la cual, nos proporciona información detallada del comportamiento de la variable dependiente con respecto de la variable independiente, de ahí surge la necesidad de graficar correctamente las funciones.

En la actualidad, contamos con calculadoras gráfica, programas informáticos como Excel, graficadores en línea como FooPlot, Geogebra, Plotter, Desmos y otros, que, nos facilitan la graficación de funciones.

Estimados estudiantes:

Es de vital importancia el uso de la tecnología en el estudio de las matemáticas o cualquier otra área de conocimiento por ello, debe vincular la teoría con la práctica

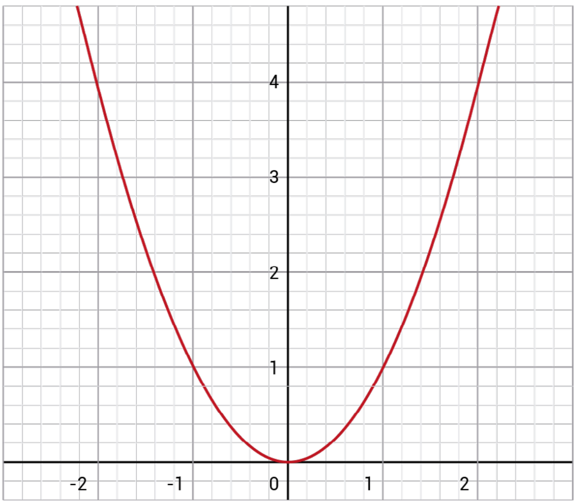
1.2.1. ¿Cómo se traza la gráfica de una función colocando puntos?

Tracemos la gráfica de la función: $f(x) = x^2$. Elaboramos la tabla de datos y obtenemos los pares ordenados que los ubicamos en el plano cartesiano.

Tabla

x	$f(x)$
0	0
± 0,5	0,25
± 1	1
± 2	4
± 3	9

Trace la gráfica



Estimados estudiantes:

Para graficar funciones puede utilizar la calculadora gráfica que más se adapte a su forma de trabajo y que se encuentran en línea puede ser FooPlot, Geogebra, Plotter, Desmos y otros, que nos facilitan la Graficación de funciones.

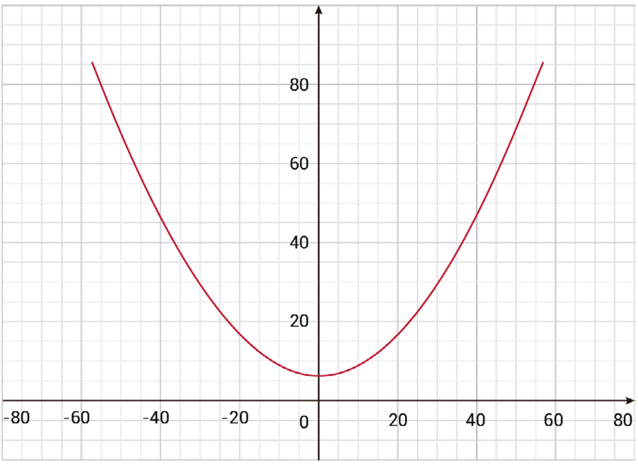
1.2.2. ¿Cómo se trazan las gráficas de funciones con calculadora?

Para comprender de mejor manera el trazado de gráficas de funciones resolvamos el siguiente ejercicio.

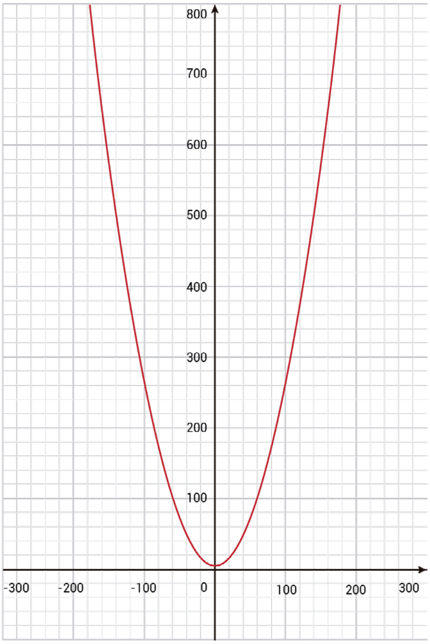
Ejemplo 3

Grafiquemos la función $f(x) = \frac{1}{40}x^2 + 6$. En un rectángulo de vista apropiado utilizaremos cualquier calculadora gráficadora.

$0,025x^2 + 6$



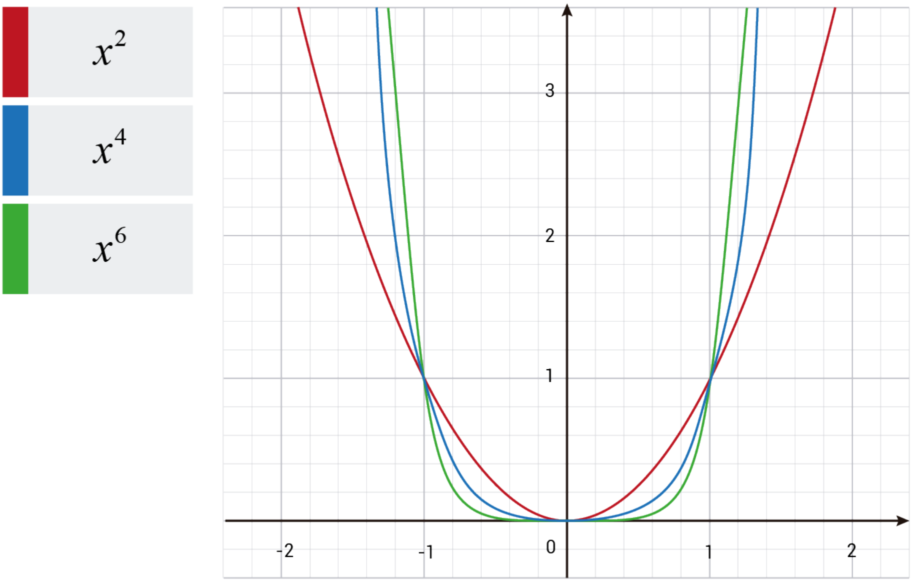
Podemos apreciar la gráfica en el rectángulo de vista de 120 en el eje **x** y 80 en el eje **y**

$0,025x^2+6$	

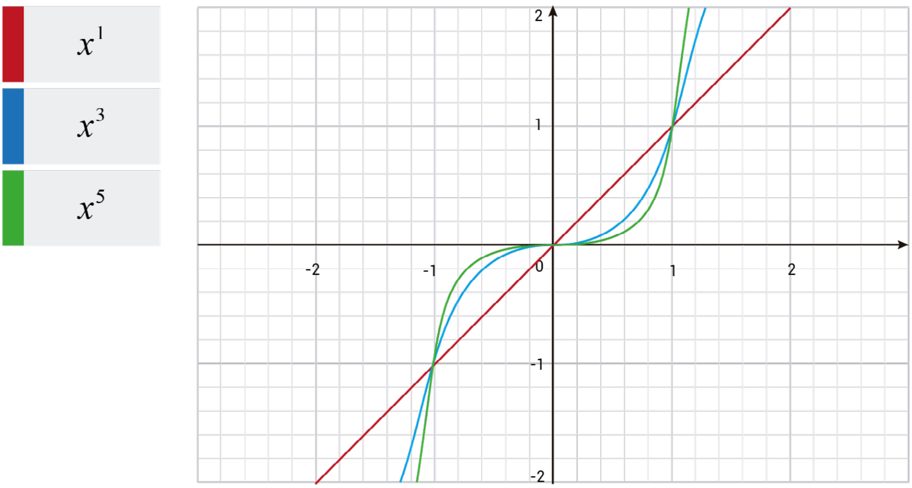
En esta gráfica variamos las dimensiones del rectángulo de vista de 1200 en el eje x y 700 en el eje y y tenemos una vista con mayor información de la gráfica de la función dada, entonces podemos variar el rectángulo de vista de acuerdo a nuestras necesidades. Hemos utilizado dos calculadoras gráficas DESMOS.

Ahora, grafiquemos una familia de funciones de potencia, utilizando una calculadora gráficas.

$f(x) = x^n \; para \; \mathbf{n} \; = \; \mathbf{2, 4 \; y \; 6} \; en \; el \; rectángulo \; de \; vista \; [\mathbf{-2, 2}] \; por \; [\mathbf{0, 3}]$



$f(x) = x^n$ para $\mathbf{n} = \mathbf{1}, \mathbf{3}$ **y** $\mathbf{5}$ en el rectángulo de vista $[-\mathbf{2}, \mathbf{2}]$ por $[-\mathbf{2}, \mathbf{2}]$



Como se observa la diferencia de las gráficas que dependen del exponente se comprueba que:

- si n es par, las gráficas son similares a la función cuadrática y
- si n es impar, las gráficas son similares a la función cúbica.

Apreciados estudiantes

En el estudio de fenómenos naturales y sociales, es nuestra responsabilidad plantear modelos matemáticos que más se ajusten a la realidad.

De ahí surge la importancia de estudiar a profundidad las gráficas de las funciones, porque permiten interpretar situaciones del mundo real, como: intensidad de un sismo, oferta y demanda, valores máximos y mínimos, entre otros

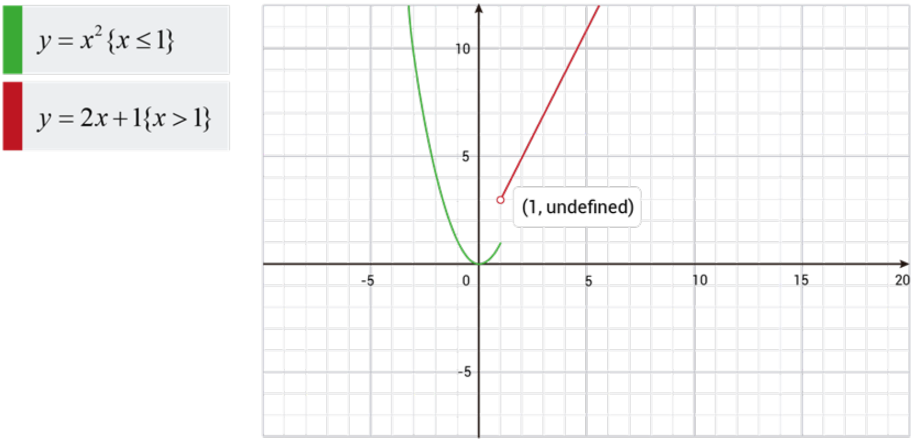
1.2.3. ¿Cómo se traza la gráfica de funciones definidas por tramos?

Para la explicación utilizando la calculadora gráfica, grafiquemos la función definida por tramos, siguiente:

Ejemplo 4

$$f(x) = \begin{cases} x^2, & x \leq 1 \\ 2x + 1, & x > 1 \end{cases}$$

Analicemos la función y la gráfica:



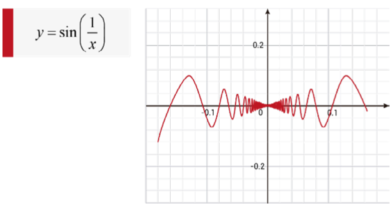
- $x \leq 1$ significa que incluye al 1
- $x > 1$ significa que se excluye al 1

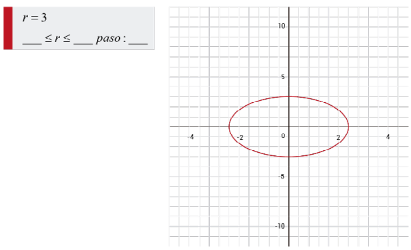
Por esa razón vemos en la gráfica del texto como en la gráfica de la calculadora, el punto (1, 1) está pintado (sólido) incluido, mientras que el punto (1, 3) está abierto, excluido.

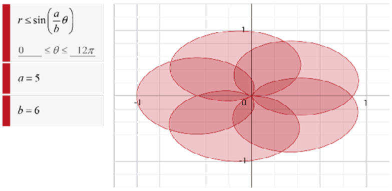
1.2.4. ¿Para qué sirve la prueba de la recta vertical?

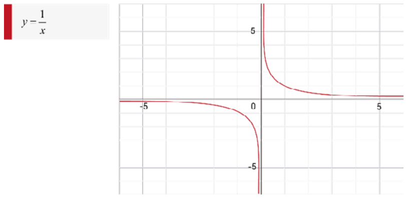
La prueba de la recta vertical se refiere a que, cuando colocamos una recta vertical sobre un gráfico, si la recta corta al gráfico más de una vez, dicho gráfico no corresponde a una función.

Utilicemos la prueba de la recta vertical y verifiquemos si las siguientes gráficas elaboradas son funciones.









Al situar una regla paralela al eje y, desplazando de izquierda a derecha comprobamos que, al mover la regla, la gráfica A se corta en un solo punto, en el gráfico B se corta en dos puntos, en el gráfico C se corta en más de dos puntos y el gráfico D en un punto, por lo que se concluye que las gráficas A y D son funciones.

1.2.5. ¿Qué ecuaciones representan funciones?

Todas las ecuaciones con variables x y y definen una relación, pero no toda ecuación define una función.

Ejemplo 5

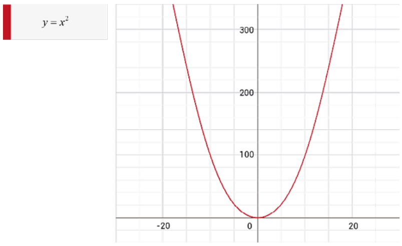
Verifiquemos si las ecuaciones $\boldsymbol{y - x^2 = 0}$, y $\boldsymbol{x^2 + y^2 = 4}$, representan funciones

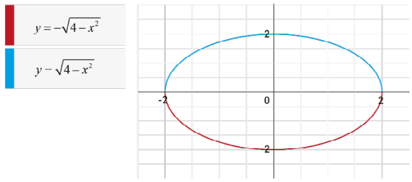
Despejemos y

$$y - x^2 = 0 \qquad\qquad y^2 = 4 - x^2$$

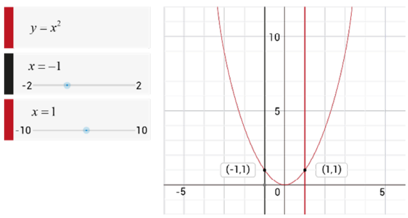
$$y = x^2 \qquad\qquad y = \pm\sqrt{4 - x^2}$$

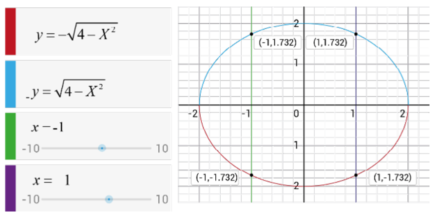
Grafiquemos





Apliquemos la prueba de la recta vertical y comprobemos cuál ecuación representa una función





Se comprueba que la ecuación $y - x^2 = 0$ si es función; mientras que, $x^2 + y^2 = 4$ no es función.

Recursos de aprendizaje

Para desarrollar la destreza de graficar funciones, le invito a que:

- Lea comprensivamente y ejecute las actividades propuestas en las páginas 150-170 del texto básico.
- Habilite el hipervínculo y mire atentamente el video de Asesorías de mate, (2018). ¿Cómo saber si una gráfica es función o no? / Criterio de la línea vertical. 3

Índice
Primer bimestre
Segundo bimestre
Solucionario
Referencias bibliográficas

Índice
Primer bimestre
Segundo bimestre
Solucionario
Referencias bibliográficas

Retroalimentación

La información que se encuentra en el video permite comprender de manera sencilla el criterio de la línea vertical para identificar si la gráfica corresponde a una función o no, “si la línea vertical corta más de una vez la gráfica, entonces no corresponde a una función”

Con esta información más la adquirida de la lectura del texto básico y la resolución de los ejercicios propuestos, está en condiciones de desarrollar la primera actividad de aprendizaje recomendada.

Actividades de aprendizaje recomendadas

Resuelva los ejercicios propuestos del 11-72 páginas 156-157 del texto básico

Estimados estudiantes:

Antes de desarrollar esta actividad, invito a revisar el Método de Cuatro Pasos de Pólya.

> Este método está enfocado a la solución de problemas matemáticos, por ello nos parece importante señalar alguna distinción entre “ejercicio” y “problema”. Para resolver un ejercicio, uno aplica un procedimiento rutinario que lo lleva a la respuesta. Para resolver un problema, uno hace una pausa, reflexiona y hasta puede ser que ejecute pasos originales que no había ensayado antes para dar la respuesta. Esta característica de dar una especie de paso creativo en la solución, no importa que tan pequeño sea, es lo que distingue un problema de un ejercicio. Sin embargo, es prudente aclarar que esta distinción no es absoluta; depende en gran medida del estadio mental de la persona que se enfrenta a ofrecer

una solución: Para un niño pequeño, puede ser un problema encontrar cuánto es 3 + 2. O bien, para niños de los primeros grados de primaria responder a la pregunta ¿Cómo repartes 96 lápices entre 16 niños de modo que a cada uno le toque la misma cantidad? le plantea un problema, mientras que a uno de nosotros esta pregunta solo sugiere un ejercicio rutinario: "dividir ". Hacer ejercicios es muy valioso en el aprendizaje de las matemáticas: nos ayuda a aprender conceptos, propiedades y procedimientos entre otras cosas, los cuales podremos aplicar cuando nos enfrentemos a la tarea de resolver problemas.

Pasos para resolver problemas:

Paso 1: Entender el problema

- ¿Entiendes todo lo que dice?
- ¿Puedes replantear el problema en tus propias palabras?
- ¿Distingues cuáles son los datos?
- ¿Sabes a qué quieres llegar?
- ¿Hay suficiente información?
- ¿Hay información extraña?
- ¿Es este problema similar a algún otro que hayas resuelto antes?

Paso 2: Configurar un plan

¿Puedes usar alguna de las siguientes estrategias? (Una estrategia se define como un artificio ingenioso que conduce a un final).

1. Ensayo y Error (Conjeturar y probar la conjetura).
2. Usar una variable.
3. Buscar un Patrón.
4. Hacer una lista.
5. Resolver un problema similar más simple.
6. Hacer una figura.

7. Hacer un diagrama
8. Usar razonamiento directo.
9. Usar razonamiento indirecto.
10. Usar las propiedades de los Números.
11. Resolver un problema equivalente.
12. Trabajar hacia atrás.
13. Usar casos.
14. Resolver una ecuación.
15. Buscar una fórmula.
16. Usar un modelo.
17. Usar análisis dimensional.
18. Identificar sub-metas.
19. Usar coordenadas.
20. Usar simetría.

Paso 3: Ejecutar el plan

- Implementar la o las estrategias que se escogió hasta solucionar completamente el problema o hasta que la misma acción sugiera tomar un nuevo curso.

- Concede un tiempo razonable para resolver el problema. Si no tiene éxito solicitar una sugerencia o hacer el problema a un lado por un momento (¡puede que “se prenda el foco” cuando menos lo espere!).

- No tenga miedo de volver a empezar. Suele suceder que un comienzo fresco o una nueva estrategia conducen al éxito.

Paso 4: Mirar hacia atrás

- ¿Es la solución correcta? ¿La respuesta satisface lo establecido en el problema?
- ¿Advierte una solución más sencilla?
- ¿Puede ver cómo extender la solución a un caso general?

Índice
Primer bimestre
Segundo bimestre
Solucionario
Referencias bibliográficas

Comúnmente los problemas se enuncian en palabras, ya sea oralmente o en forma escrita. Así, para resolver un problema, uno traslada las palabras a una forma equivalente del problema en la que usa símbolos matemáticos, resuelve esta forma equivalente y luego interpreta la respuesta. (Chacel, 2018, p.1-2)

Estimado estudiante:

En la actualidad, el desarrollo tecnológico, científico y cultural se afianza en el aprendizaje autónomo como una estrategia didáctica y pedagógica que, responde de manera poderosa a las exigencias de formación profesional de adultos, jóvenes y niños.

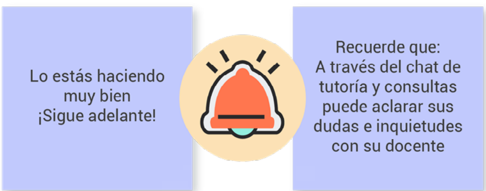
En este contexto, le invito a comprender conceptos, conocer procesos y resolver ejercicios y problemas necesarios hasta el dominio eficaz de sus habilidades, destrezas y competencias, científicas y didácticas para el aprendizaje y enseñanza de la matemática.

Actividad de aprendizaje calificada 1

En su diario de notas resuelva los ejercicios y problemas

Para calificación debe presentar resueltos, los:

1. Problemas del 79 al 92 de las páginas 157-159 del texto básico. (14 problemas)
2. Problemas del 79 al 83 de la página 169 del texto básico. (5 problemas)



Semana 3

Estimados estudiantes

En esta semana revisamos ¿Cómo obtener información a partir de una gráfica?

1.3. Obtener información a partir de la gráfica

La gráfica de una función tiene su importancia por la facilidad de proporcionar información sobre el fenómeno estudiado, podemos observar los valores de entrada que le corresponden, entre otros.

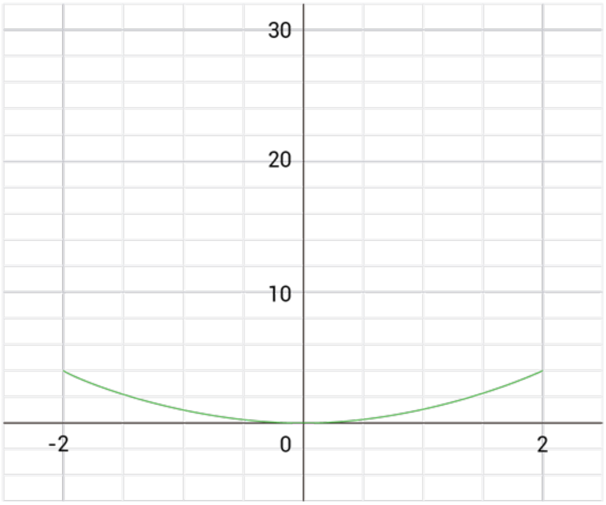
1.3.1. ¿Cómo se determina el dominio y rango de una función?

Recodemos que en el plano cartesiano la distancia que cubre la gráfica en el eje de la x, corresponde al dominio y la altura en el eje de la y que corresponde al rango.

Analicemos un ejemplo en el que tenemos que definir el dominio y rango a partir de su gráfica:

Ejemplo 6

$$y = x^2 \{y \leq 4\}$$



Analizando la gráfica determinamos que el dominio de la función es:

$\boldsymbol{D = \{x \in R / -2 \leq x \leq 2\}}$ y el rango es: $\boldsymbol{R = \{y \in R / 0 \leq y \leq 4\}}$

1.3.2. ¿Cómo se resuelven sistemas de ecuaciones y desigualdades utilizando gráficas?

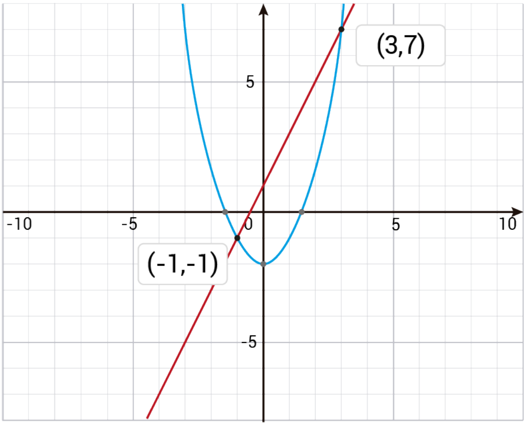
Otra importante aplicación de las gráficas de funciones es la comparación visual de dos o más funciones, lo cual nos permite determinar la solución de sistemas de ecuaciones o desigualdades, considerando que los puntos en que se cruzan las gráficas son los valores donde las funciones son iguales.

Ejemplo 7

Resolvamos, utilizando la calculadora gráfica, el sistema de ecuaciones $\begin{cases} y = 2x + 1 \\ y = x^2 - 2 \end{cases}$

$2x+1$

x^2-2



Las soluciones en este caso son (-1,-1) y (3,7).

Estimados estudiantes:

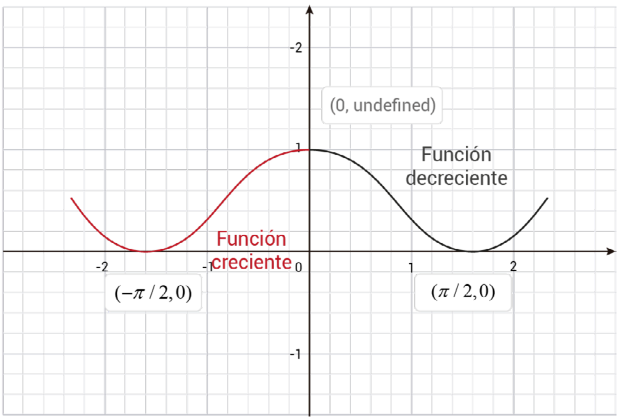
La velocidad con la que podemos resolver un sistema de ecuaciones utilizando las gráficas de las funciones, es mucho mayor.

1.3.3. ¿Cuáles son funciones crecientes y decrecientes?

La gráfica permite visualizar los intervalos dónde es creciente (sube) y decreciente (baja) una función.

$y=(-\cos x)^2\left\{-\frac{3\pi}{4}<x<0\right\}$

$y=(\cos x)^2\left\{0<x<\frac{3\pi}{4}\right\}$



Índice
Primer bimestre
Segundo bimestre
Solucionario
Referencias bibliográficas

1.3.4. ¿Cómo se determinan los valores máximos y mínimos locales de una función?

Conocer los valores máximos y mínimos de una función son de gran utilidad en el estudio de situaciones reales, porque permiten ahorrar tiempo, dinero y materiales, he aquí, otra aplicación de gran importancia de la gráfica de una función.

Recordemos:

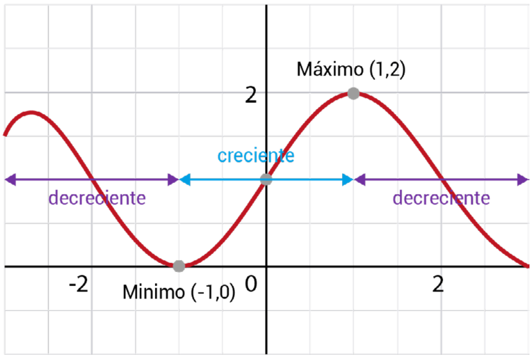
- El valor de una función f(a) es un máximo local de f si $f(a) \geq f(x)$ cuando x es cercana a a.

Esto significa que $f(a) \geq f(x)$ para toda x en algún intervalo abierto que contiene a. En este caso decimos que f tiene un máximo local en x = a.

- El valor de una función f(a)es un mínimo local de f si $f(a) \leq f(x)$ cuando x es cercana a a

Esto significa que $f(a) \leq f(x)$ para toda x en algún intervalo abierto que contiene a. En este caso decimos que f tiene un mínimo local en x = a.

Gráfica de máximos y mínimos



Índice
Primer bimestre
Segundo bimestre
Solucionario
Referencias bibliográficas

Recursos de aprendizaje

Para comprender de mejor manera este apartado le invito a que lea comprensivamente:

- Las páginas 170-177 del texto básico.
- Habilite los hipervínculos y mire atentamente los videos de:
    - Math2me, (2017). Hallar el dominio y rango de una función a partir de su Gráfica 19
    - Matemática Básica, (2017). Sistema de 2 ecuaciones cuadrática y lineal - Matemática Básica.17
    - Sebastián, (2014). Funciones: creciente y decreciente.28
    - Pasos por ingeniería, (2019). Máximos y mínimos relativos o también llamados locales 25

Retroalimentación

La información que se encuentra en estos videos permite comprender de manera sencilla como encontrar el dominio y rango de una función a partir de su gráfica, resolver sistemas de ecuaciones cuadráticas y lineales, determinar los intervalos en los cuales una función es creciente o decreciente, así como, identificar los máximos y mínimos relativos o también llamados locales.

Con esta información más la adquirida de la lectura del texto básico y la resolución de los ejercicios propuestos, está en condiciones de desarrollar la segunda actividad de aprendizaje recomendada.

Actividades de aprendizaje recomendadas

Resuelva los ejercicios propuestos del 7 al 54, páginas 179-180 del texto básico.

Actividades de aprendizaje calificadas 2

En su diario de notas resuelva los ejercicios y problemas.

Para calificación debe presentar resueltos, los:

- Problemas del 55 al 66 de las páginas 180-181 del texto básico. (12 problemas)

Estimados estudiantes:

Los felicito por el cumplimiento de las actividades de aprendizaje recomendadas, espero que hayan obtenido buenos resultados.
Es momento de participar en la primera actividad de aprendizajes evaluada.

Estimados estudiantes:

Hemos concluido la primera unidad. Autoevaluemos nuestros conocimientos logrados hasta aquí.

Desarrolle la autoevaluación 1

Autoevaluación 1

1. Evaluando la función $f(x) = x^2 - 6\ Para\ f(3)$ es

   a. 5
   b. 3
   c. 4

2. Evalúe la función $f(x) = \begin{cases} 5 & \text{si } x \leq 2 \\ 2x - 3 & \text{si } x > 2 \end{cases}$ Para $f(5)$

   a. 5
   b. 7
   c. 12

3. Evalúe la función $f(x) = x^2 + 1 \quad Para\ f(x+2)$

   a. $x^2 + 4x + 5$
   b. $x^2 + 2x + 4$
   c. $x^2 + x + 5$

4. ¿Cuál es el dominio de la función $f(x) = 3x$

   a. $\mathbb{Z}$
   b. $\mathbb{R}$
   c. $\mathbb{N}$

5. ¿Cuál es el dominio de la función $f(x) = 5x^2 + 4$

   a. $\mathbb{Z}$
   b. $\mathbb{R}$
   c. $\mathbb{N}$

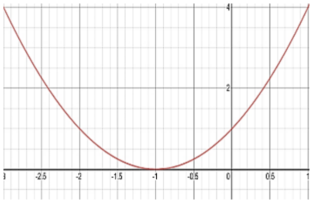
6. Cuál es el dominio de la función $f(x) = \frac{1}{x-3}$

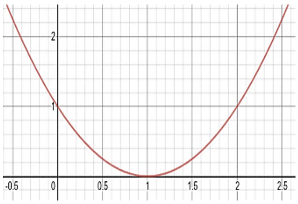
a. Dominio $= \{x/x < 3\}$
b. Dominio $= \{x/x = 3\}$
c. Dominio $= \{x/x \neq 3\}$

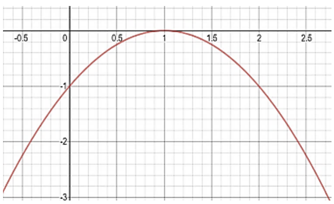
7. Cuál es el dominio de la función $f(x) = \frac{x^4}{x^2+x-6}$

a. Dominio $= \{x/x <$ -3,x $< 2\}$
b. Dominio $=$ x$\{x/x \neq -3, x \neq 2\}$
c. Dominio $= \{x > -3, x < 2\}$

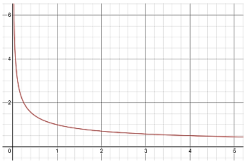
8. ¿Cuál es la gráfica de la función $f(x) = -(x+1)^2$?

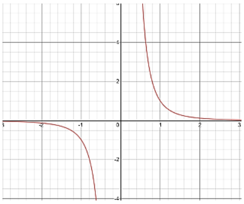
a. 

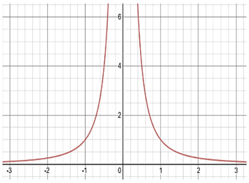
b. 

c. 

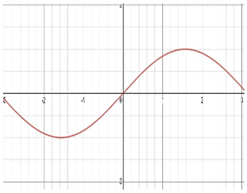
9. ¿Cuál es la gráfica de la función $C(t) = \frac{1}{t^2}$?

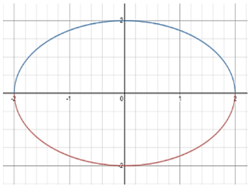
a. 

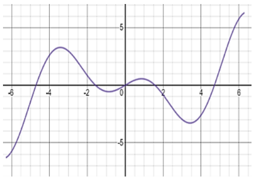
b. 

c. 

10. Aplique la prueba de la recta vertical y determine que gráfica no es función

a. 

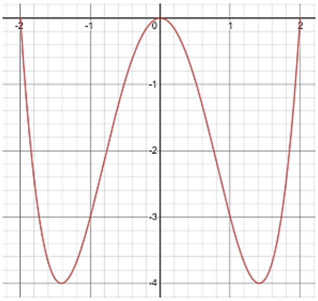
b. 

c. 

11. ¿Cuál de las siguientes ecuaciones no es función?

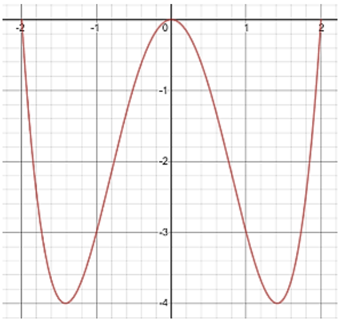
a. $3x - 5y = 7$
b. $2x^2 - 4y^2 = 3$
c. $2xy - 5y^2 = 4$

12. Dada la gráfica de la función f(x) cual es el valor de f(-1)



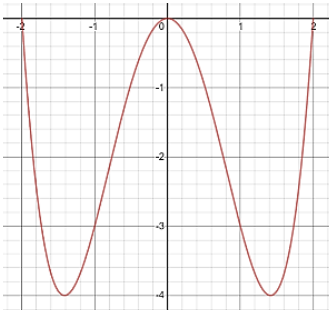
a. 3
b. 2
c. -3

13. Dada la gráfica de la función f(x) ¿cuál es el dominio?



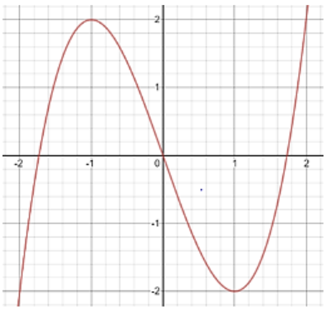
a. $]-\infty, \infty[$
b. $\{-2 < x < 2\}$
c. $\{x/x > 2\}$

14. Dada la gráfica de la función f(x) ¿cuál es el rango?



a. $]-\infty, \infty[$
b. $\{0 < y < -4\}$
c. $\{y/y > 0\}$

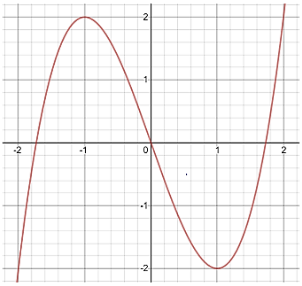
15. Dada la gráfica de la función f(x) ¿cuál es el máximo local?



a. $(1,\ 2)$
b. $(1,\ -2)$
c. $(-1,\ 2)$

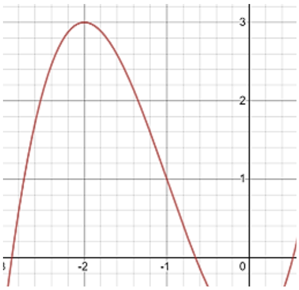
Índice
Primer bimestre
Segundo bimestre
Solucionario
Referencias bibliográficas

16. Dada la gráfica de la función f(x) ¿cuál es el mínimo local?



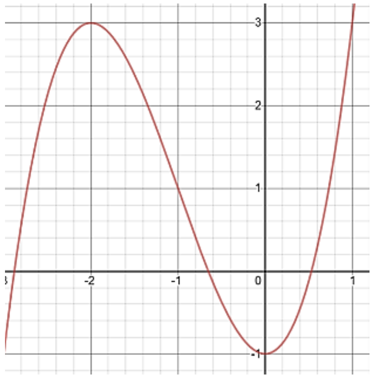
a. (1, 2)
b. (1, -2)
c. (-1, 2)

17. La función f(x) ¿en el intervalo $\{-2 < x < 0\}$ es?



a. Creciente
b. Decreciente
c. Indiferente

18. La función f(x) ¿en el intervalo $\{0 < x < 1\}$ es?



a. Creciente
b. Decreciente
c. Indiferente

19. Dada $f(x) = 2x - 6$ la pendiente es:

a. -6
b. 2/6
c. 2

20. Dada $f(x) = 2x - 6$ la intersección con el eje y es:

a. -6
b. 2/6
c. 2

Ir al solucionario

Lo estás haciendo muy bien ¡Sigue adelante!

Recuerde que:
A través del chat de tutoría y consultas puede aclarar sus dudas e inquietudes con su docente.

Índice
Primer bimestre
Segundo bimestre
Solucionario
Referencias bibliográficas

Semana 4

Estimados estudiantes:

Bienvenidos a la segunda unidad de la asignatura de Sistemas de conocimiento de funciones polinomiales y racionales y su didáctica, profundicemos nuestros conocimientos sobre funciones lineales y modelos.

Unidad 2. Funciones Lineales y Modelos

2.1. Funciones Lineales

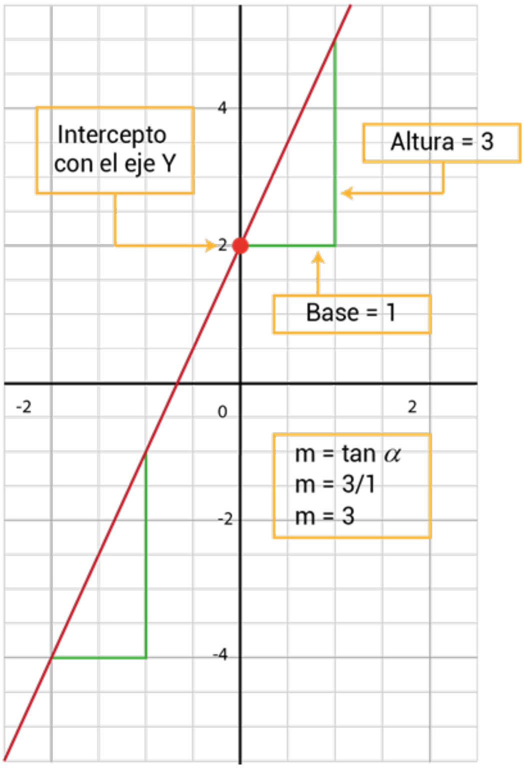
2.1.1. ¿Cuáles son funciones lineales?

Para reconocer las funciones lineales debemos considerar:

- Es un polinomio de primer grado.
- Tiene la forma $f(x) = ax + b$
- La pendiente es a (Que se denota con la letra m)
- Su punto de intersección es y gual a b: (0, b).
- Su gráfica siempre es una recta.
- Su dominio son todos los números reales y el rango también todos los números reales.

Ejemplo 8

Analicemos la función $\boldsymbol{f(x) = 3x + 2}$



Como podemos observar, esta función cumple con la forma $f(x) = ax + b$ donde:

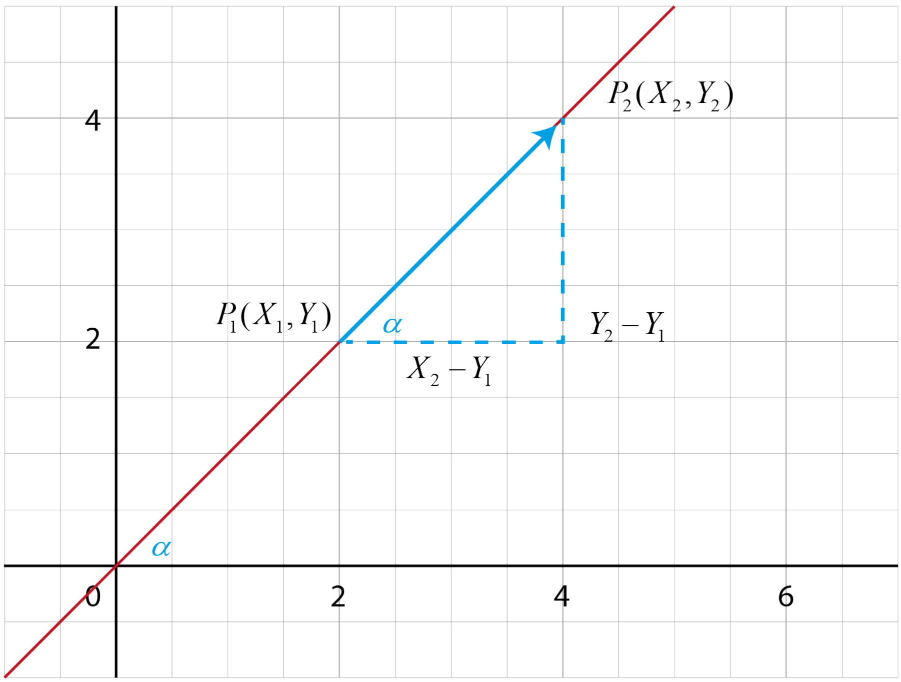
a = 3 = *pendiente*

b = 2 = intersección con el eje y,el punto de intersección es (0, 2)

2.1.2. ¿Cómo se determina la pendiente de una función?

Si tenemos dos puntos pertenecientes a una recta como $P_1(x_1, y_1)$ y $P_2(x_2, y_2)$

Índice
Primer bimestre
Segundo bimestre
Solucionario
Referencias bibliográficas



Recordemos que la pendiente de una recta se denota con la letra m y es igual a la tangente del ángulo, entonces:

$$m = tan\ tan\ \alpha$$

$$m = \frac{cateto\ opuesto}{cateto\ adyacente}$$

$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

Que será la ecuación que nos permitirá calcular la pendiente de cualquier recta siempre y cuando tengamos dos puntos pertenecientes a la recta.

Para una mejor comprensión resolvamos el siguiente ejemplo.

Ejemplo 9

Grafiquemos la función f(x) = 3x + 2y calculemos la pendiente

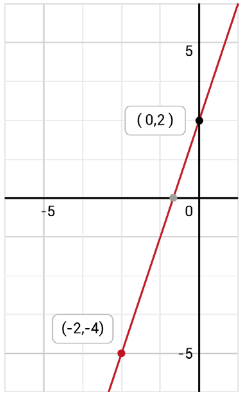
$$m = tan \tan \alpha$$

$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

$$m = \frac{2 - (-4)}{0 - (-2)}$$

$$m = \frac{6}{2}$$

$$m = 3$$



2.1.3. ¿Cómo se construye y se usan modelos lineales?

Cuando se requiere verificar la existencia de la relación lineal para predecir una variable en función de otra, a partir de datos, desarrollamos el proceso de modelización.

Ejemplo 10

Determinemos el modelo para convertir millas en kilómetros si sabemos que una milla equivale a 1.6 km.

Datos:

$$P_1(0, 0)$$

$$P_2(1\ ,\ 1.6)$$

Índice
Primer bimestre
Segundo bimestre
Solucionario
Referencias bibliográficas

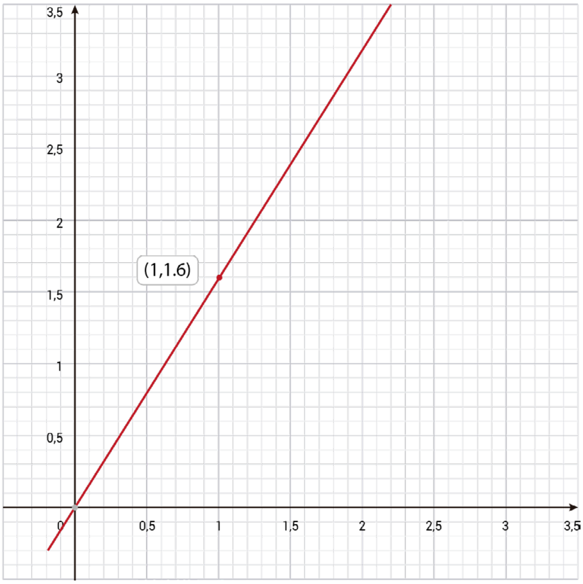
Calculamos la pendiente

$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

$$m = \frac{1.6 - 0}{1 - 0}$$

$$m = 1.6$$

$y = 1.6x$



Construyamos el modelo con un punto y la pendiente m =3, y $P_1(0, 0)$

$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

$$y - y_1 = m(x - x_1)$$

$$y - 0 = 1.6(x - 0)$$

$$y = 1.6\,x$$

Entonces el modelo lineal es f(x) = 1.6x que nos facilita predecir.

Índice
Primer bimestre
Segundo bimestre
Solucionario
Referencias bibliográficas

Ejemplo 11

¿Cuántos kilómetros hay en 10 millas? Observando la gráfica determinamos que a 10 millas le corresponden 16 km. De otra manera, utilizando la función:

$f(x) = 1.6x$
$f(10) = 1.6(10)$
$f(10) = 1.6km$

Recursos de aprendizaje

Para comprender de mejor manera este apartado le invito a que lea y resuelva las actividades propuestas en las páginas 190-195 del texto básico. Habilite los hipervínculos y mire atentamente los videos de:

- Matemáticas Profe Alex, (2018). Gráfica de la función lineal | Ejemplo 1.15
- Khan Academy Español, (2015). Modelos lineales. 11

Retroalimentación

La información que se encuentra en estos videos permite comprender de manera sencilla como encontrar el dominio y rango de una función a partir de su gráfica, resolver sistemas de ecuaciones cuadráticas y lineales, determinar los intervalos en los cuales una función es creciente o decreciente, así como, identificar los máximos y mínimos relativos o también llamados locales.

Con esta información más la adquirida de la lectura del texto básico y la resolución de los ejercicios propuestos, está en condiciones de desarrollar la tercera actividad de aprendizaje recomendada.

Actividades de aprendizaje recomendadas

Resuelva los ejercicios propuestos del 7 al 38, páginas 195 del texto básico.

Actividades de aprendizaje calificada 3

En su diario de notas resuelva los ejercicios y problemas.

Para calificación debe presentar resueltos los:

- Problemas del 37 al 50 de las páginas 196-197 del texto básico. (12 problemas)

Lo estás haciendo muy bien
¡Sigue adelante!

Recuerde que:
A través del chat de tutoría y consultas puede aclarar sus dudas e inquietudes con su docente.

Semana 5

Estimados estudiantes

En esta semana revisamos ¿Cuáles son funciones lineales?, ¿Cómo se determina la pendiente de una función?, ¿Cómo se construye y se usan modelos lineales? ahora analicemos la transformación de funciones

2.2. Transformaciones de funciones

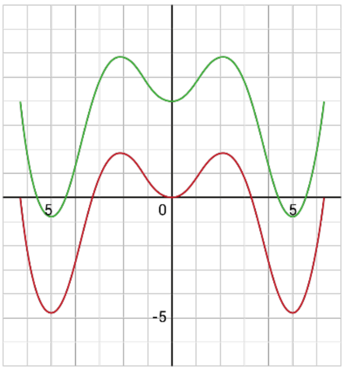
Las transformaciones de las funciones son cambios o alteraciones de una función como desplazamientos, reflexión, estiramiento y reducción.

2.2.1. Desplazamientos

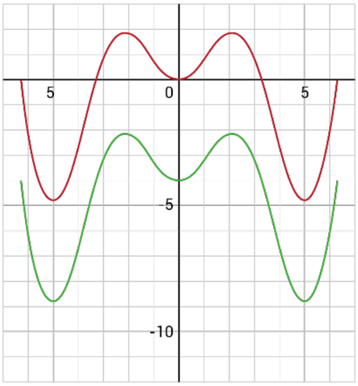
¿Qué es desplazamiento? Es el movimiento de la función hacia arriba, abajo, a la izquierda o derecha.

- Si a la función se suma c, unidades se desplazan hacia arriba; y,
- Si a la función se resta c, unidades se desplazan hacia abajo.

Analicemos los ejemplos:

Función	Desplazamiento hacia arriba	Ejemplo
$\boldsymbol{y = f(x)}$	$y = f(x) + c$	$y = x\sin(x)\,\{-2\pi < x < 2\pi\}$ $y = x\sin(x) + 4\,\{-2\pi < x < 2\pi\}$ 

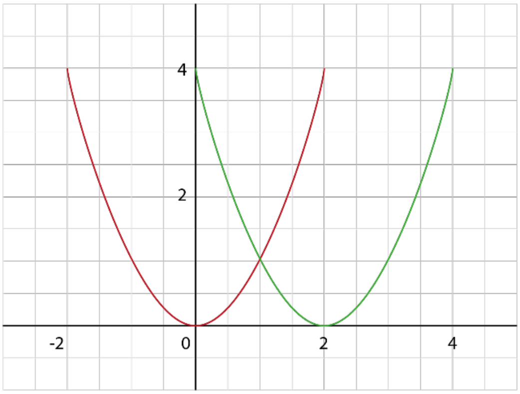
Índice
Primer bimestre
Segundo bimestre
Solucionario
Referencias bibliográficas

Función	Desplazamiento hacia abajo	Ejemplo
$y = f(x)$	$y = f(x) - c$	$y = x\sin(x)\,\{-2\pi < x < 2\pi\}$ $y = x\sin(x) - 4\,\{-2\pi < x < 2\pi\}$ 

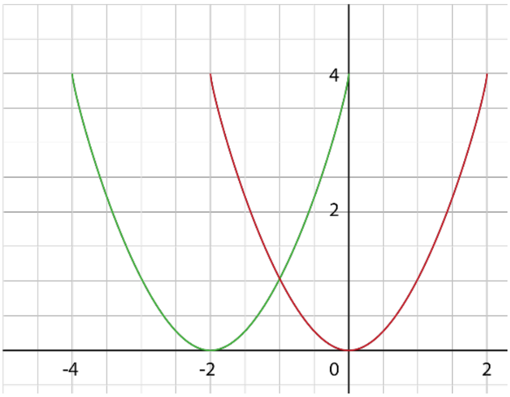
- Si a la variable de la función se resta c, unidades, entonces f(x-c) se desplaza hacia la derecha siempre y cuando c > 1.
- Si a la variable x de la función se suma c, unidades, entonces f(x + c) se desplaza hacia la izquierda siempre y cuando c > 1.

Analicemos los ejemplos:

Desplazamiento Hacia la derecha

Función	Desplazamiento hacia la derecha	Ejemplo
$y = f(x)$	$y = f(x - c)$	$y = x2\{-2 < x < 2\}$ $y = (x - 2)^2\{0 < x < 4\}$ 

Desplazamiento hacia la izquierda

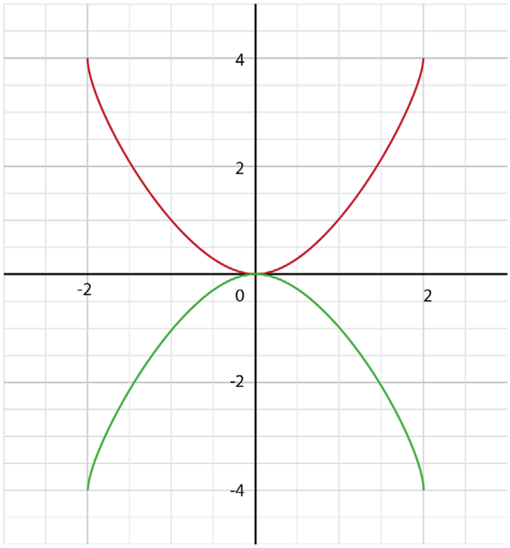
Función	Desplazamiento hacia la izquierda	Ejemplo
$y = f(x)$	$y = f(x + c)$	$y = x2\{-2 < x < 2\}$ $y = (x + 2)^2\{-4 < x < 0\}$ 

Índice
Primer bimestre
Segundo bimestre
Solucionario
Referencias bibliográficas

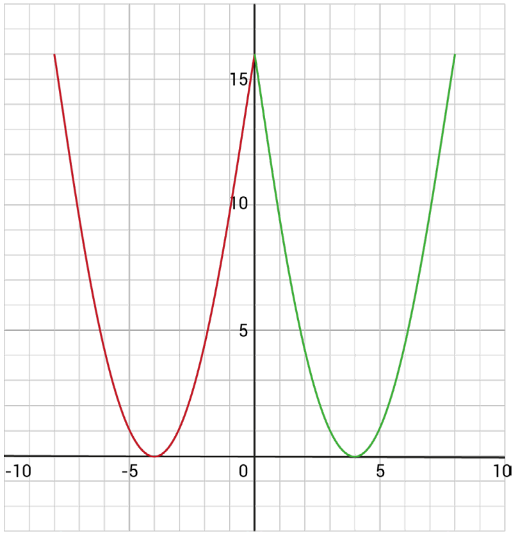
¿Cómo se grafican las funciones que se reflejan?

Analicemos los ejemplos y comprobemos con la calculadora gráfica.

Reflejo vertical

Función	Reflejo vertical	Ejemplo
$y = f(x)$	$y = -f(x)$	$y = x^2\{-2 < x < 2\}$ $y = -x^2\{-2 < x < 2\}$ 

Reflejo horizontal

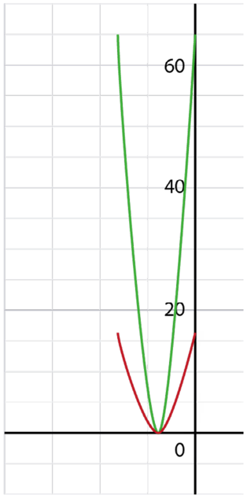
Función	Reflejo horizontal	Ejemplo
$y = f(x)$	$y = f(-x)$	$y = (x+4)^2\{-8 < x < 0\}$ $y = (-x+4)^2\{0 < x < 8\}$ 

2.2.2. Estiramiento y reducciones verticales

¿Cómo se identifica una función que tiene estiramiento vertical?

- Toda función y= f(x) multiplicada por un factor c, y=cf(x) y que c> 1 se obtiene un estiramiento vertical, analicemos el ejemplo.

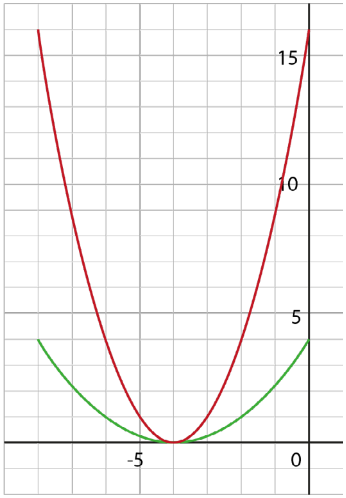
Estiramiento vertical

Función	Estiramiento vertical	Ejemplo
$y = f(x)$	$y = cf(x)$ $c > 1$	$y = (x+4)^2\{-6 < x < -2\}$ $y = 4(x+4)^2\{-6 < x < -2\}$ 

2.2.3. ¿Cómo se identifica una función que tiene reducción vertical?

- Toda función y = f(x)multiplicada por un factor c, y=cf(x) y que 0 < c < 1 se obtiene una reducción vertical, analicemos el ejemplo.

Reducción vertical

Función	Reducción vertical	Ejemplo
$y = f(x)$	$y = cf(x)$ $0 < c < 1$	$y = (x+4)^2\{-8 < x < 0\}$ $y = 0.25(x+4)^2\{-8 < x < 0\}$ 

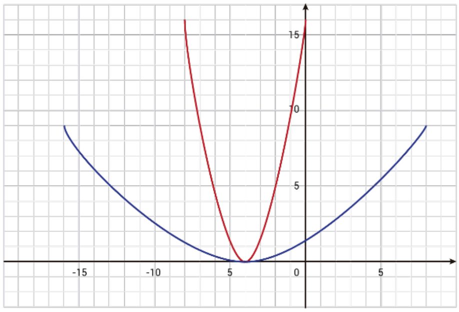
2.2.4. Estiramiento y reducción horizontal

¿Cómo se identifica una función que tiene estiramiento horizontal?

- Toda función y = f(x)multiplicada por un factor $\frac{1}{c}$, $y = \frac{1}{c} f(x)$ y que c > 1 se obtiene un estiramiento horizontal, analicemos el ejemplo.

Estiramiento horizontal

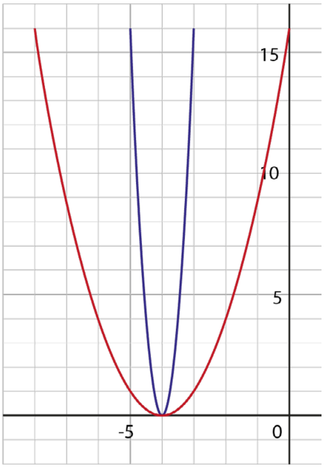
Índice
Primer bimestre
Segundo bimestre
Solucionario
Referencias bibliográficas

Función	Estiramiento horizontal	Ejemplo
$\boldsymbol{y = f(x)}$	$y = f\left(\frac{1}{c}x\right)$ $0 < c < 1$	$y = (x+4)^2\{-8 < x < 0\}$ $y = (0.25\,(x+4))^2\{-16 < x < 8\}$ 

2.2.5. ¿Cómo se identifica una función que tiene reducción horizontal?

- Toda función y = f (x) multiplicada por un factor $\frac{1}{c}$, $\boldsymbol{y = \frac{1}{c} f(x)}$ y que 0 < c < 1 se obtiene una reducción horizontal, analicemos el ejemplo.

Reducción horizontal

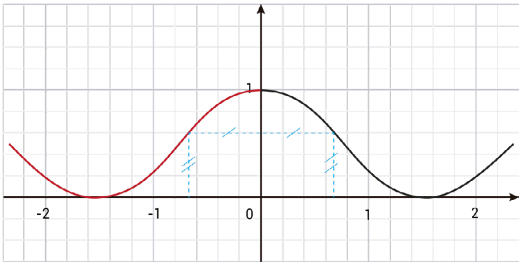
Función	Reducción horizontal	Ejemplo
$y = f(x)$	$y = f\left(\frac{1}{c}x\right)$ $0 < c < 1$	$y = (x+4)^2\{-8 < x < 0\}$ $y = (1/0.25\,(x+4))^2\{-5 < x < 3\}$ 

2.2.6. Funciones pares e impares

¿Cómo se identifica que una función es par?

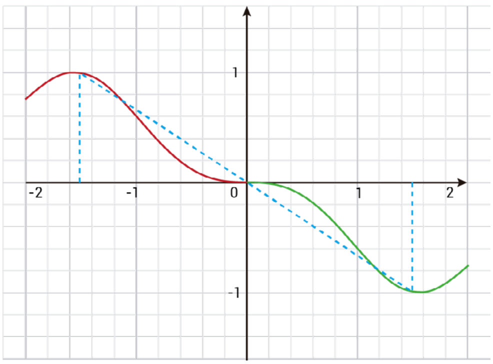
- Una función y = f(x) es par si satisface $f(-x) = f(x)$ f(-x)=f(x), para todo número x en su dominio, analicemos el ejemplo.

Índice
Primer bimestre
Segundo bimestre
Solucionario
Referencias bibliográficas

Función	Función par	Gráfica
$y = f(x)$	$f(-x) = f(x)$	$(-\cos x)^2 = (\cos x)^2$ 

2.2.7. ¿Cómo se identifica que una función es impar?

- Una función y=f(x)es impar si satisface f(-x) = -f(x), para todo número x en su dominio, analicemos el ejemplo.

Función	Función impar	Gráfica
$y = f(x)$	$f(-x) = -f(x)$	$(\sin x)^3 = (-\sin x)^3$ 

Recursos de aprendizaje

Para comprender de mejor manera este apartado le invito a que lea y resuelva las actividades propuestas en las páginas 198-205 del texto básico. Habilite los hipervínculos y mire atentamente los videos de:

- Pi-ensa Matematik, (2017), Transformación de funciones: alargamientos y contracciones verticales.
- Matemáticas profe Alex, (2018). Funciones pares e impares explicación gráfica

Retroalimentación

La información que se encuentra en estos videos permite comprender de manera sencilla la transformación de funciones: alargamientos y contracciones verticales. Así como también las funciones pares e impares explicación gráfica. Con esta información más la adquirida de la lectura del texto básico y la resolución de los ejercicios propuestos, está en condiciones de desarrollar la cuarta actividad de aprendizaje recomendada.

Actividades de aprendizaje recomendadas

Resuelva los ejercicios propuestos del 7 al 90, páginas 206-208 del texto básico.

Estimados estudiantes:

Hasta aquí, hemos revisado transformaciones de funciones y procesos para alcanzar a desarrollar sus competencias, habilidades y destrezas en el dominio de las funciones.

Ahora, le corresponde a usted, sobre la base de su trabajo autónomo, comprender la teoría, conocer procesos para resolver ejercicios y problemas, con lo cual usted tendrá los conocimientos indispensables para enfrentar el proceso de enseñanza-aprendizaje de la matemática. Por ello le invito a desarrollar la cuarta actividad.

Actividades de aprendizaje calificadas 4

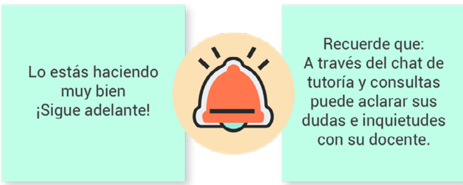
En su diario de notas resuelva los ejercicios y problemas

Para calificación debe presentar resueltos los:

- Problemas del 97 al 99 de la página 209 del texto básico. (3 problemas)

Estimados estudiantes:

Los felicito por el cumplimiento de las actividades de aprendizaje recomendadas, espero que hayan obtenido buenos resultados. Es momento de participar en la segunda actividad de aprendizajes evaluada.



Índice
Primer bimestre
Segundo bimestre
Solucionario
Referencias bibliográficas

Semana 6

2.3. Combinación de funciones

2.3.1. ¿Cómo se encuentra la suma, diferencia, producto y cociente de funciones?

Dos funciones f y g pueden combinarse para formar nuevas funciones:

- f + g
- f - g
- f . g
- $\frac{f}{g}$

Analicemos el álgebra de funciones, sea f y g funciones con dominios A y B.

Entonces las operaciones con funciones están definidas como:

- (f + g) (x) = f(x) + g(x) Dominio A ∩ B
- (f - g) (x) = f(x) - g(x) Dominio A ∩ B
- (f . g) (x) = f(x) . g(x) Dominio A ∩ B
- $\frac{f}{g}(x) = \frac{f(x)}{g(x)}\ Dominio\ \{x \in A \cap B / g(x) \neq 0\}$

Analicemos el ejemplo:

Ejemplo 12

Si $f(x) = x^2 + x;\ y\ \ g(x) = x^2$ encontremos

$$(f+g)(x) = f(x) + g(x)$$
$$(f+g)(x) = x^2 + x + x^2$$
$$(f+g)(x) = 2x^2 + x$$
$$(f-g)(x) = f(x) - g(x)$$
$$(f-g)(x) = x^2 + x - x^2$$
$$(f+g)(x) = x$$
$$(f.g)(x) = f(x).g(x)$$
$$(f.g)(x) = (x^2 + x)(x^2)$$
$$(f.g)(x) = x^4 + x^3$$
$$\left(\frac{f}{g}\right)(x) = \frac{f(x)}{g(x)}$$
$$\left(\frac{f}{g}\right)(x) = \frac{x^2 + x}{x^2}$$
$$\left(\frac{f}{g}\right)(x) = \frac{x(x+1)}{x^2}$$
$$\left(\frac{f}{g}\right)(x) = \frac{x+1}{x}$$

2.3.2. Composición de funciones

Dadas dos funciones f y g. La función compuesta f o g, está definida por

(f o g) (x) = f(g(x))

Índice

Primer bimestre

Segundo bimestre

Solucionario

Referencias bibliográficas

Ejemplo 13

Analicemos el siguiente ejemplo, en donde se halla (f o g)(x) y luego (g o f) (x) , con las siguientes funciones: $\boldsymbol{f(x) = x^2 + x}$ y $\boldsymbol{g(x) = x^2}$

$$(f \circ g)(x) = f\big(g(x)\big)$$
$$(f \circ g)(x^2) = x^2 + x$$
$$(f \circ g)(x^2) = (x^2)^2 + x^2$$
$$(f \circ g)(x^2) = x^4 + x^2$$
$$(g \circ f)(x) = g\big(f(x)\big)$$
$$(g \circ f)(x^2 + x) = x^2$$
$$(g \circ f)(x^2 + x) = (x^2 + x)^2$$
$$(g \circ f)(x^2 + x) = x^4 + 2x^3 + x^2$$

2.4. Funciones uno a uno y sus inversas

2.4.1. ¿Cuáles son funciones uno a uno?

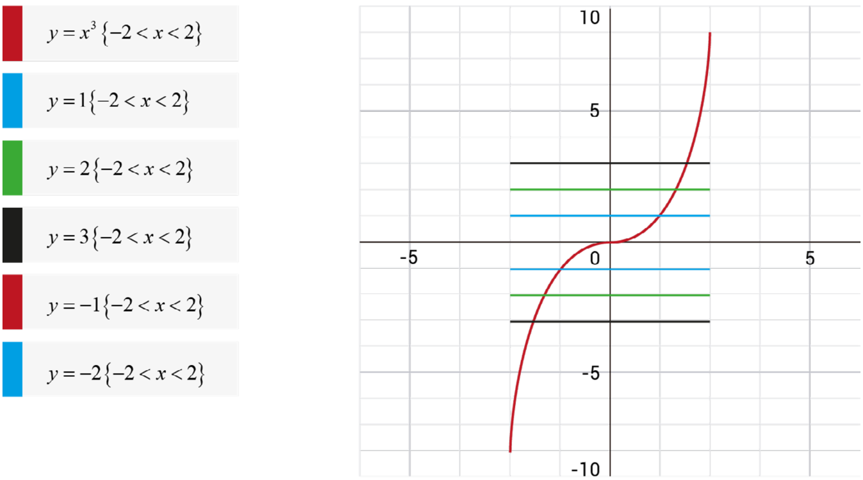
Una función con dominio A, se denomina función uno a uno, si no hay dos elementos de A que tengan la misma imagen, esto es $\boldsymbol{f(x_1) \neq f(x_2)}$ siempre que $\boldsymbol{x_1 \neq x_2}$

Prueba de la recta horizontal

Una función es uno a uno si y solo si no hay una recta horizontal que cruce su gráfica más de una vez.

Ejemplo 14

Analicemos el siguiente ejemplo: ¿La función $f(x) = x^3$ es uno a uno?



Como podemos ver en la gráfica, que ninguna recta horizontal corta la curva más de una vez.

Las líneas horizontales vemos que cortan la grafica una vez, por lo tanto, es una función uno a uno.

2.4.2. ¿Cómo sabemos cuál es la inversa de una función?

Sea f una función uno a uno con dominio A y rango B. Entonces su función inversa f^{-1}, tiene dominio B y rango A y está definida por: $f^{-1}(y) = x \Leftrightarrow f(x) = y$ para cualquier y en B.

2.4.3. ¿Cómo determinar la inversa de una función uno a uno?

1. Escriba y = f(x)
2. Despeje x de esta ecuación en términos de y (si es posible)
3. Intercambie x y y la ecuación resultante es $y = f^{-1}(x)$

Índice
Primer bimestre
Segundo bimestre
Solucionario
Referencias bibliográficas

Ejemplo 15

Analicemos el siguiente ejemplo: y = 3x + 4

$$x = \frac{y - 4}{3}$$

$$y = \frac{x - 4}{3}$$

$$f^{-1}(x) = \frac{x - 4}{3}$$

2.4.4. ¿Cómo se traza la gráfica de la inversa de una función?

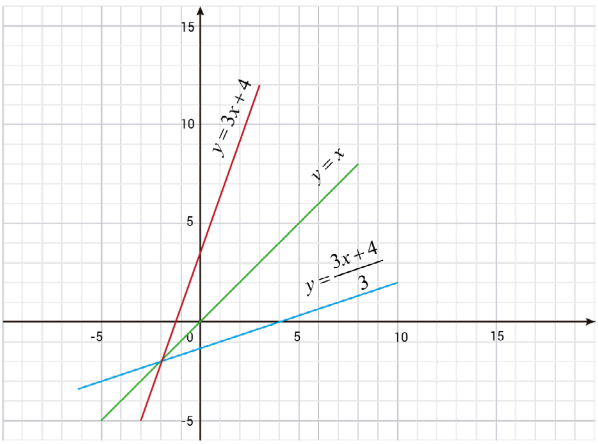
La gráfica de f^{-1} se obtiene al reflejar la gráfica de f en la recta y = x

Grafiquemos el ejemplo anterior

$y = 3x + 4\{-3 < x < 3\}$

$y = \dfrac{x-4}{3}\{-6 < x < 10\}$

$y = x\{-6 < x < 8\}$



Con esta gráfica comprobamos que f^{-1} es el reflejo de f.

Recursos de aprendizaje

Para comprender de mejor manera este apartado le invito a que lea y resuelva las actividades propuestas en las páginas 210-225 del texto básico. Habilite los hipervínculos y mire atentamente los videos de:

- MateFacil, (2015). Operaciones con funciones (suma, diferencia, producto, cociente de funciones).20
- MateFacil, (2015). Composición de funciones 21
- Facultad de Matemáticas UC, (2016). Explicación de las funciones 1 a 1 y sus inversas

Retroalimentación

La información que se encuentra en estos videos permite comprender de manera sencilla las operaciones con funciones: suma diferencia, producto y cociente, las composiciones de funciones y las funciones 1 a 1 y sus inversas.

Con esta información más la adquirida de la lectura del texto básico y la resolución de los ejercicios propuestos, está en condiciones de desarrollar la quinta actividad de aprendizaje recomendada.

Actividades de aprendizaje recomendadas

Resuelva los ejercicios propuestos del

- 7 al 74, páginas 217 del texto básico.
- 7 al 90, páginas 226-227 del texto básico.

Actividades de aprendizaje calificada 5

En su diario de notas resuelva los ejercicios y problemas

Índice
Primer bimestre
Segundo bimestre
Solucionario
Referencias bibliográficas

Para calificación debe presentar resueltos los:

- Problemas del 77 al 84 de la página 218 del texto básico. (7 problemas)
- Problemas del 93 al 101 de las páginas 227-228 del texto básico. (9 problemas)

Estimados estudiantes:

Esta actividad debe cumplir, únicamente, aquel estudiante que no participó de la actividad síncrona.

Desarrolle la autoevaluación 2

Autoevaluación 2

Estimados estudiantes lean comprensivamente, razonen, resuelvan y seleccione la respuesta correcta.

1. Dada la función $f(x) = x^2 - 3$ se desplaza

   a. verticalmente hacia arriba
   b. horizontalmente a la derecha
   c. verticalmente hacia abajo

2. Dada la función $f(x) = (x-5)^2$ se desplaza

   a. horizontalmente a la izquierda
   b. horizontalmente a la derecha
   c. verticalmente hacia abajo.

3. Dada la función $f(x) = x^2 + 8$ se desplaza

   a. verticalmente hacia arriba
   b. horizontalmente a la derecha
   c. verticalmente hacia abajo

4. ¿Cuál de los pares de funciones sus gráficas son reflejo?

   a. $f(x) = x^3$, $f(x) = -x^3$
   b. $f(x) = x^2 + 2$, $f(x) = x^2 - 2$
   c. $f(x) = 4x$, $f(x) = \frac{1}{4}x$

5. En la gráfica de la función $f(x) = 3x^2$ existe

   a. desplazamiento horizontal
   b. estiramiento vertical
   c. estiramiento horizontal.

6. En la gráfica de la función $f(x) = 0.2x^2$ existe

a. estiramiento horizontal
b. reducción horizontal
c. reducción vertical.

7. En la gráfica de la función $f(x) = sin(4x)$ existe

a. estiramiento horizontal
b. reducción horizontal
c. reducción vertical

8. En la gráfica de la función $f(x) = sin(\frac{1}{4}x)$ existe

a. estiramiento horizontal
b. reducción horizontal
c. reducción vertical

9. Dadas las funciones $f(x) = x^2 + x,\ g(x) = x^2$, f + g es:

a. $2x^2$
b. $2x^2 + x$
c. $x^2 + 2x$

10. Dadas las funciones $f(x) = x^2 + x,\ g(x) = x^2$, f - g es:

a. $2x^2 - x$
b. x
c. - x

11. Dadas las funciones $f(x) = x^2 + x,\ g(x) = x^2$, f . g es

a. $x^2 + x + x^2$
b. $x^4 + x^3$
c. x^4

12. Dadas las funciones $f(x) = x^2 + x,\ \ g(x) = x^2$, f/g es

a. $\frac{x^2 - x}{x^2 - 1}$

b. $\frac{x-1}{x}$

c. $\frac{x^2}{x^2 - x}$

13. Dadas las funciones $f(x) = x^2,\ \ g(x) = x + 1$, $f \circ g$ es

a. $x^2 + 2x + 1$
b. $x^2 + x + 1$
c. $x^3 + x^2 + 1$

14. Dadas las funciones $f(x) = x^2,\ \ g(x) = x + 1$, $g \circ f$ es

a. $x^2 + 2x + 1$
b. $x^2 + x$
c. $x^2 + 1$

15. Dada la función $g(x) = x + 1$, $g \circ g$ es

a. $x + 2$
b. $x^2 + x$
c. $x^2 + 1$

16. Dada la función $f(x) = 3x + 5$, $f^{-1}(x)$ es

a. $f^{-1}(x) = \frac{x-3}{5}$

b. $f^{-1}(x) = \frac{x-5}{3}$

c. $f^{-1}(x) = \frac{5(x-3)}{3}$

Índice
Primer bimestre
Segundo bimestre
Solucionario
Referencias bibliográficas

17. Dada la función $f(x) = 3x^3 + 8$, $f^{-1}(x)$ es

a. $f^{-1}(x) = \frac{x-8}{5}$

b. $f^{-1}(x) = \left(\frac{x-8}{3}\right)^3$

c. $f^{-1}(x) = \sqrt[3]{\frac{x-8}{3}}$

18. Dada la función $f(x) = \sqrt{x} + \sqrt{3-x}$ el dominio es

a. $[0, \ \infty[$

b. $[0, \ 3]$

c. $[3, \ \infty]$

19. Dadas las funciones $f(x) = 2x - 3, \ g(x) = 4 - x^2$, al evaluar f(g(0)) es

a. 5

b. 6

c. 7

20. Dadas las funciones $f(x) = 2x - 3, \ g(x) = 4 - x^2$, al evaluar f(g(2)) es

a. -3

b. -4

c. -5

Ir al solucionario

Índice

Primer bimestre

Segundo bimestre

Solucionario

Referencias bibliográficas

Lo estás haciendo muy bien ¡Sigue adelante!

Recuerde que: A través del chat de tutoría y consultas puede aclarar sus dudas e inquietudes con su docente.

Semana 7

Actividades finales del bimestre

Actividad 1: Recupere las 5 actividades desarrolladas durante el primer bimestre.

Actividad 2. Revise que estén correctamente desarrollados.

Actividad 3. Organice un documento que contenga dicha información cuidando la presentación, si lo hizo a mano, puede fotografiar y organizar un documento en PDF.

Actividad 4. Suba el archivo del documento al EVA para la respectiva calificación.

Lo estás haciendo muy bien ¡Sigue adelante!

Recuerde que: A través del chat de tutoría y consultas puede aclarar sus dudas e inquietudes con su docente.

Índice
Primer bimestre
Segundo bimestre
Solucionario
Referencias bibliográficas

Semana 8

Actividad 1. Revise su diario de notas, actividades desarrolladas, autoevaluaciones y estudie todos los contenidos del primer bimestre y participe de la evaluación presencial.

Lo estás haciendo muy bien
¡Sigue adelante!

Recuerde que:
A través del chat de tutoría y consultas puede aclarar sus dudas e inquietudes con su docente.

Segundo bimestre

Resultado de aprendizaje 2

Determina los principios y leyes de las funciones polinomiales y racionales para modelar y resolver problemas del entorno

Contenidos, recursos y actividades de aprendizaje

Estimados estudiantes

Bienvenidos al Segundo Bimestre del curso de Sistemas de conocimiento de funciones polinomiales y racionales y su didáctica, damos inicio ahondando nuestros conocimientos sobre funciones polinomiales y racionales para modelar y resolver problemas del entorno.

Con estos conocimientos, la comprensión de la pedagogía y aplicación de la didáctica estaremos en condiciones de generar aprendizajes significativos en nuestros estudiantes, quienes podrán resolver situaciones de la vida real aplicando la modelización.

Semana 9

Unidad 3. Funciones Polinomiales

3.1. ¿Cómo sabemos que una función es polinomial?

Una función polinomial es aquella que está definida por una expresión con polinomios. Entonces, una función polinomial de grado n es una función de la forma:

$$P(x) = a_n x^n + a_{(n-1)} x^{(n-1)} + \ldots + a_1 x + a_0 \qquad a_n \neq 0$$

Ya hemos estudiado funciones polinomiales de grado 0 y 1, por ejemplo:

$$P(x) = a_n x^0 \quad P(x) = a_n x^1$$
$$P(x) = 5 \qquad P(x) = 5x$$

Estas son funciones cuyas gráficas son rectas.

Estimados estudiantes:

Ahora, estudiemos funciones polinomiales de grado 2, conocidas como funciones cuadráticas.

3.1.1. ¿Cuáles son funciones cuadráticas?

Una función cuadrática es una función polinomial de grado 2, de la forma

$$f(x) = ax^2 + bx + c \qquad a \neq 0$$

Iniciemos el análisis dando valores: a = 1, b = 2, c = 0y sustituimos en

$$f(x) = ax^2 + bx + c$$
$$f(x) = 1x^2 + (0)x + 0$$
$$f(x) = x^2$$

Como sabemos $f(x) = x^2$ representa una parábola, por lo que, toda función cuadrática estará representada por una parábola, en donde podemos aplicar todas las transformaciones estudiadas.

3.1.2. ¿Cómo se convierte a la forma estándar una función cuadrática?

Una función cuadrática $\boldsymbol{f(x) = ax^2 + bx + c}$, se puede expresar en la forma estándar $\boldsymbol{f(x) = a(x - H)^2 + k}$, completando el cuadrado. En esta forma, se debe considerar que:

- Si a > 0 la parábola con vértice (h, k) se abre hacia arriba
- Si a < 0 la parábola con vértice (h, k) se abre hacia abajo

Ejemplo 16

Analicemos el siguiente ejemplo: $\boldsymbol{f(x) = 2x^2 - 12x + 13}$

Completando el cuadrado tenemos:

$$
\begin{aligned}
f(x) &= 2x^2 - 12x + 13 \\
&= (2x^2 - 12x) + 13 \\
&= 2(x^2 - 6x) + 13 \\
&= 2(x^2 - 6x + 9) + 13 - 2(9) \\
&= 2(x-3)^2 - 5
\end{aligned}
$$

De donde h = 3 y k = -5por lo tanto, el vértice es (3, -5)

Ahora determinemos el vértice de la función $\boldsymbol{f(x) = 2x^2 - 12x + 13}$ aplicando las fórmulas.

De, $\boldsymbol{f(x) = 2x^2 - 12x + 13}$ se tiene que: a = 2, b = -12 y c = 13

$$h = \frac{-b}{2a}$$

$$h = \frac{\left(-(-12)\right)}{2(2)}$$

$$h = 3$$

$$k = \frac{-(b^2 - 4ac)}{4a}$$

$$k = \frac{-\left((-12)^2 - 4(2)(13)\right)}{4(2)}$$

$$k = -5$$

Entonces el vértice es (3, -5)

La intersección con el eje, para esto consideramos x = 0.

$$
\begin{aligned}
f(x) &= 2x^2 - 12x + 13 \\
f(0) &= 2(0)^2 - 12(0) + 13 \\
f(0) &= 13
\end{aligned}
$$

La intersección con el eje y es en el punto (0, 13)

Para encontrar las intersecciones con el eje X, se iguala el polinomio a cero y se hallan las raíces.

$$f(x) = 2x^2 - 12x + 13$$

$2x^2 - 12x + 13 = 0$ de donde a = 3, b = -12y c = 13

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

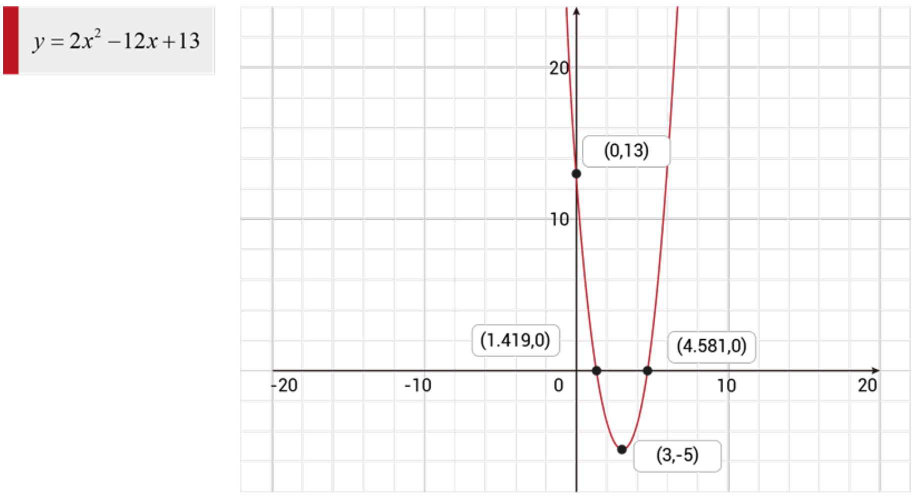
$$x = \frac{-(-12) \pm \sqrt{12^2 - 4(2)(13)}}{2(2)}$$

$$x = \frac{12 \pm \sqrt{40}}{4}$$

$$x_1 = 4.58$$

$$x_2 = 1.42$$

Grafiquemos



Comparamos la gráfica con los cálculos realizados y verificamos los valores del vértice y las intersecciones con los ejes.

3.1.3. ¿Cómo se determinan los valores máximos y mínimos en una función cuadrática?

- Si la gráfica de la función cuadrática se abre hacia arriba el vértice indica un valor mínimo, es decir sí a > 0, entonces el valor mínimo de f es f (h) = k
- Si la gráfica de la función cuadrática se abre hacia abajo el vértice indica un valor máximo, es decir sí a < 0, entonces el valor máximo de f es f (h) = k

Ejemplo 17

Analicemos la función cuadrática $\boldsymbol{f(x) = 5x^2 - 30x + 49}$

Convirtamos en forma estándar

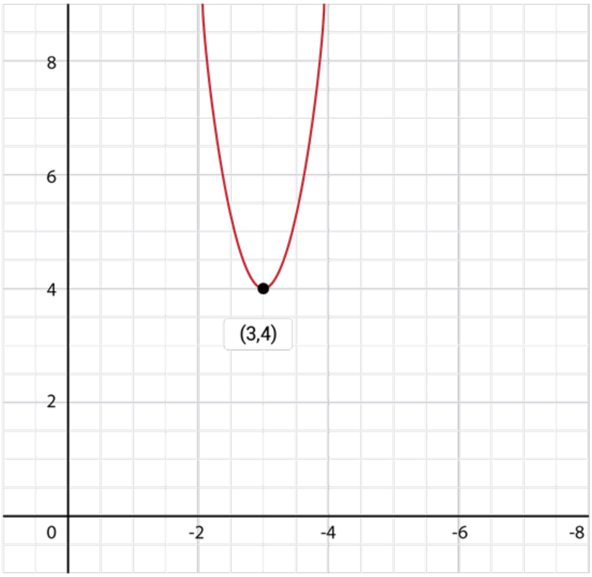
$$\begin{aligned} f(x) &= 5x^2 - 30x + 49 \\ &= (5x^2 - 30x) + 49 \\ &= 5(x^2 - 6x) + 49 \\ &= 5(x^2 - 6x + 9) + 49 - 5(9) \\ &= 5(x-3)^2 + 4 \end{aligned}$$

Analizando los resultados tenemos que:

- a > 0 la parábola se abre hacia arriba con ello, tenemos un valor mínimo.
- Los valores son h = 3 y k = 4, por lo tanto, el vértice es (3, 4)
- El valor mínimo de la función es: f (3) = 4

Verifiquemos con la gráfica

$y = 5x^2 - 30x + 49$



Comparamos la gráfica con los cálculos realizados y verificamos los valores del vértice.

Ejemplo 18

Ahora analicemos la función cuadrática $f(x) = -x^2 + x + 2$

Convirtamos en forma estándar

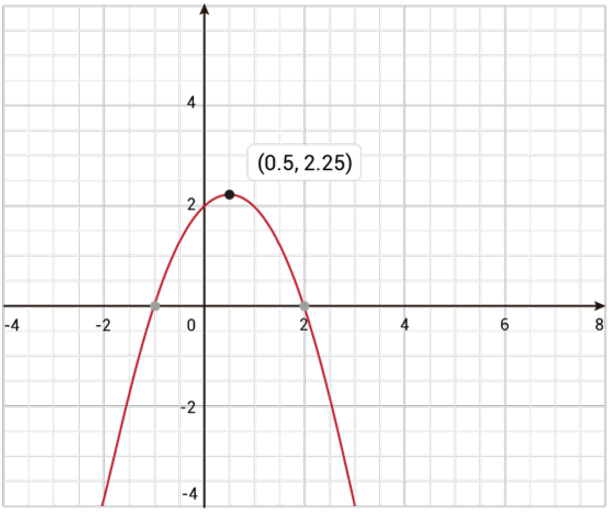
$$
\begin{aligned}
f(x) &= -x^2 + x + 2 \\
&= -(x^2 - x) + 2 \\
&= -\left(x^2 - x + \frac{1}{4}\right) + 2 - (-1)\left(\frac{1}{4}\right) \\
&= -\left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{9}{4}
\end{aligned}
$$

Analizando los resultados tenemos que:

- a < 0 por lo que la parábola se abre hacia abajo con ello, tenemos un **valor máximo**.
- Los valores son $h = \frac{1}{2}$ y $k = \frac{9}{4}$, por lo tanto, el vértice es $\left(\frac{1}{2}, \frac{9}{4}\right)$
- El valor máximo de la función es $f\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{9}{4}$

Verifiquemos con la gráfica

$y = -x^2 + x + 2$



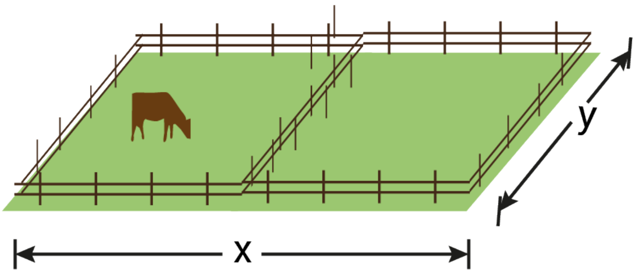
Comparamos la gráfica con los cálculos realizados y verificamos los valores del vértice.

3.2. ¿Cómo se realiza el modelado con funciones cuadráticas?

Muchas situaciones de la vida real se pueden modelizar aplicando funciones cuadráticas.

Ejemplo 19

Analicemos el siguiente ejercicio tomado de Blyde, (2015). “Un granjero desea cercar un terreno rectangular, de modo que su área sea máxima. Tiene 150 metros de cerco. Uno de los lados de terreno está bordeado por un canal. Halle el área máxima del terreno.” (p. 164)



Datos

Longitud del rectángulo, x
Ancho del rectángulo, y
Área del rectángulo, **A**
Perímetro del rectángulo, **P**

P = x + y + x + y, en donde un lado es el largo del canal, por lo que

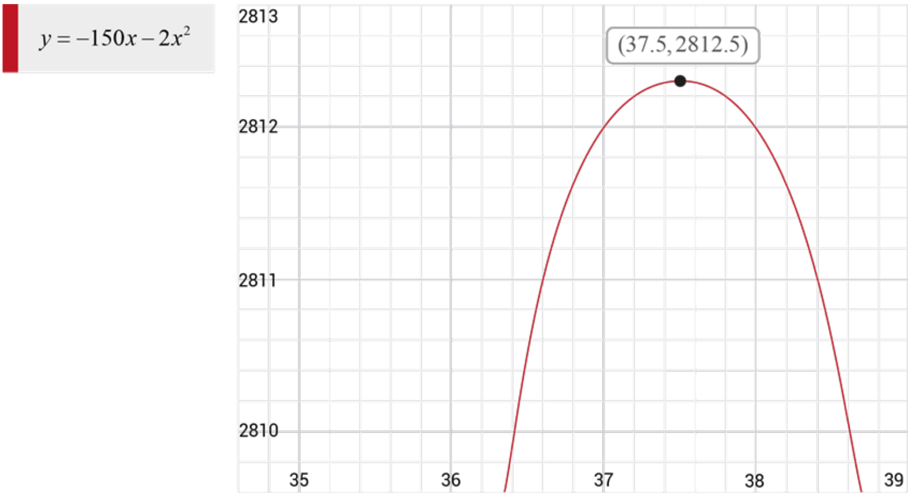
P = x + 2y Sustituyendo P = 500 tenemos:

150 = x + 2y
x = 150 - 2y

Área del rectángulo

A = x . y
A = (150 - 2y)y
$A = 150\,y - 2y^2$

Grafiquemos la función cuadrática



El valor máximo del terreno es $\boldsymbol{f(37.5) = 2812.5m^2}$. Es decir, el área máxima del terrero que se puede cercar es 2812.5 m^2.

Recursos de aprendizaje

Para comprender de mejor manera este apartado le invito a que lea y resuelva las actividades propuestas en las páginas 246-251 del texto básico. Habilite los hipervínculos y mire atentamente los videos de:

- OperaciónExitoEdu, (2011). Forma canónica o estándar de una función cuadrática. 24
- (2012). Máximos y mínimos de funciones cuadráticas. 22
- Fernández, (2014). Modelación de funciones cuadráticas 8

Retroalimentación

La información que se encuentra en estos videos permite comprender de manera sencilla la forma canónica o estándar de una función cuadrática, determinar los máximos y mínimos de funciones cuadráticas y la modelización.

Con esta información más la adquirida de la lectura del texto básico y la resolución de los ejercicios propuestos, está en condiciones de desarrollar la sexta actividad de aprendizaje recomendada.

Actividades de aprendizaje recomendadas

Resuelva los ejercicios propuestos del 9 al 50, páginas 252 del texto básico.

Estimados estudiantes:

Hasta aquí hemos revisado ¿Cómo sabemos que una función es polinomial?, ¿Cuáles son funciones cuadráticas?, ¿Cómo se convierte a la forma estándar una función cuadrática?, ¿Cómo se determinan los valores máximos y mínimos en una función cuadrática? y ¿Cómo se realiza el modelado con funciones cuadráticas?

Ahora le corresponde a usted, sobre la base de su trabajo autónomo, resolver problemas, con lo cual usted tendrá los conocimientos indispensables para enfrentar el proceso de enseñanza-aprendizaje de la matemática.

Por ello, le invito a desarrollar la sexta actividad.

Actividades de aprendizaje calificada 6

En su diario de notas resuelva los ejercicios y problemas

Para calificación debe presentar resueltos los problemas del:

- 51 al 66 de las páginas 252-254 del texto básico. (16 problemas)

Lo estás haciendo muy bien ¡Sigue adelante!

Recuerde que: A través del chat de tutoría y consultas puede aclarar sus dudas e inquietudes con su docente.

Semana 10

3.3. Funciones polinomiales de cualquier grado

Una función polinomial de grado n es una función de la forma

$$P(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0, \qquad donde\ n\ es\ un\ entero\ no\ negativo\ y\ a_n \neq 0$$

3.3.1. ¿A qué llamamos grado de un polinomio?

Es el exponente máximo de las variables en los monomios que lo componen.

Ejemplo 19

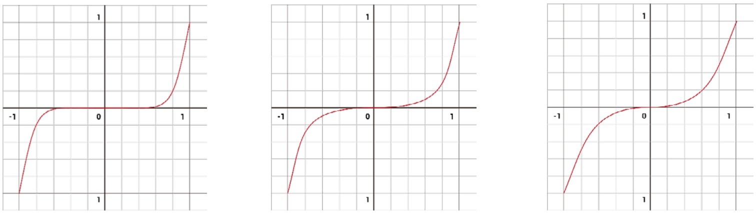
Polinomio	Grado
$2x^3 - 5x^2 + 8$	3
$-5x^2 + 6x + 3x^4 + 8$	4
$3x^8 + 6x^5 + 4x^4 + 2$	8

Índice
Primer bimestre
Segundo bimestre
Solucionario
Referencias bibliográficas

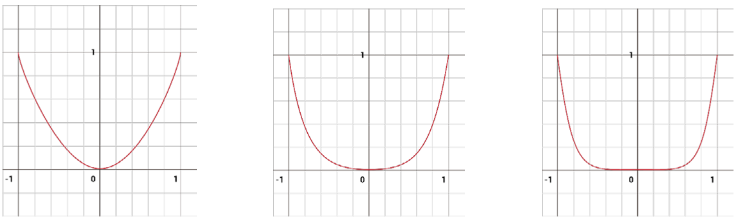
3.3.2. ¿Cuáles son las gráficas de las funciones polinomiales básicas?

Recordemos:

- Cuando n es impar, las gráficas se asemejan a la gráfica de la función cúbica.



- Cuando n es par, las gráficas se asemejan a la gráfica de la función cuadrática.



$y = x^2$ $y = x^4$ $y = x^6$

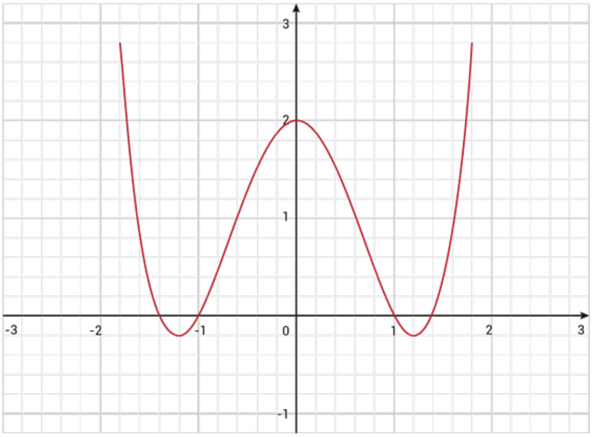
3.3.3. ¿Cómo son las gráficas de las funciones polinomiales de mayor grado?

Mientras mayor sea el grado de un polinomio más complicada puede ser su gráfica, pero considere siempre que, la gráfica de una función polinomial es continua.

Índice
Primer bimestre
Segundo bimestre
Solucionario
Referencias bibliográficas

Ejemplo 20

$y = x^4 - 3x^2 + 2\{-1.8 < x < 1.8\}$

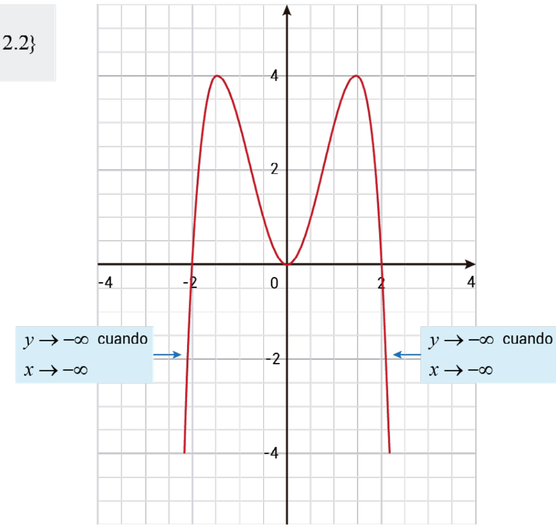


3.3.4. ¿Qué es el comportamiento final de una función polinomial?

Es la descripción de lo que pasa cuando LaTeX: xx se hace grande en la dirección positiva o negativa.

Ejemplo 21

$y = -x^2(x+2)(x-2)\{-2.2 < x < 2.2\}$



3.3.5. ¿Qué significa uso de ceros para trazar la gráfica de polinomios?

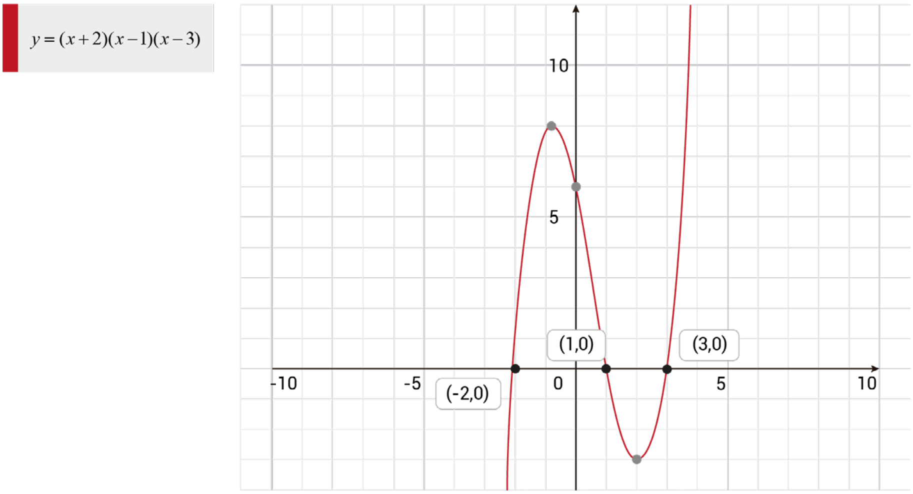
Se denomina ceros a las raíces del polinomio, cuando es igualado a 0, es decir, son las soluciones de la ecuación polinomial y cada cero representa una intersección con el eje x

Para encontrar los ceros, simplemente factorizamos e igualamos a cero el polinomio que define la función.

Ejemplo 22

Analicemos el siguiente ejercicio: $f(x) = (x+2)(x-1)(x-3)$

Tracemos la gráfica de la función



Verifiquemos, encontrando los ceros algebraicamente.

$f(x) = (x+2)(x-1)(x-3)$

Igualamos a 0 y aplicamos el teorema del factor cero que dice: " x.y=0si y solo si x = 0 o y = 0.

$$0 = (x+2)(x-1)(x-3)$$

$$x+2=0 \qquad x-1=0 \qquad x-3=0$$

$$x=-2 \qquad x=1 \qquad x=3$$

Los ceros, es decir las intersecciones con el eje equis se produce en los puntos cuyas abscisas son: x = -2, 1 y 3.

Entonces, los puntos de intersección son (0, -2), (0, 1) y (0, 3), estos puntos determinan los intervalos $(-\infty, -\mathbf{2}), (-\mathbf{2}, \mathbf{1}), (\mathbf{1}, \mathbf{3})$ $\boldsymbol{y}$ $(\mathbf{3}, \infty)$

3.3.6. ¿Para qué sirve el teorema del valor del intermedio para funciones polinomiales?

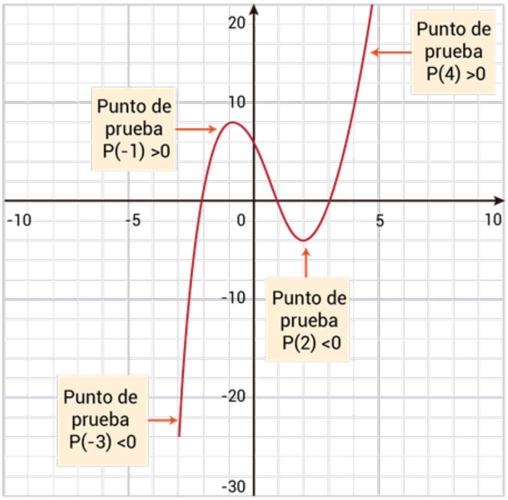
Para analizar esta información e interpretar la gráfica nos apoyamos en el teorema del valor del intermedio para funciones polinomiales, que dice, entre cualesquiera dos ceros sucesivos, los valores de un polinomio son todos positivos o todos negativos.

Ejemplo 23

Analicemos los valores intermedios de cada intervalo en la gráfica de la función:

$$f(x) = (x+2)(x-1)(x-3)$$

$$y = (x+2)(x-1)(x-3)\{-3 < x < 4\}$$



Analicemos la gráfica:

- Con el punto de prueba (-3) del intervalo $(-\infty, -2)$ vemos que la gráfica está por debajo del eje de las x.
- Con el punto de prueba (-1) del intervalo (-2, 1) observamos que la gráfica está por arriba del eje de las x.
- Con el punto de prueba (2) del intervalo (1, 3) miramos que la gráfica está por debajo del eje de las x.
- Con el punto de prueba (4) del intervalo $(3, \infty)$ verificamos que la gráfica está por arriba del eje de las x.

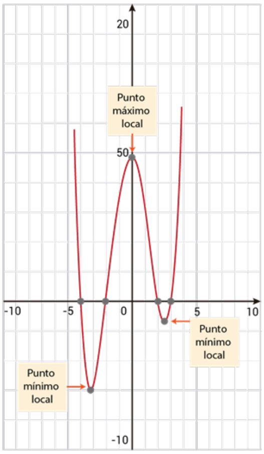
3.3.7. ¿Cómo reconocemos los Máximos y Mínimos locales en una función polinomial?

Si $P(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0$, es un polinomio de grado n, entonces la gráfica de P tiene a lo más n - 1 extremos locales.

Ejemplo 24

Para comprender con mayor facilidad y rapidez analicemos la gráfica de la siguiente función $P_1(x) = x^4 + x^3 - 16x^2 - 4x + 48$; la función es de cuarto grado, por lo tanto, existirán a lo mucho tres extremos locales.

$y = x^4 + x^3 - 16x^2 - 4x + 48\{-4.5 < \ldots$



Recursos de aprendizaje

Para comprender de mejor manera este apartado le invito a que lea y resuelva las actividades propuestas en las páginas 254-265 del texto básico. Habilite los hipervínculos y mire atentamente los videos de:

- Academatica, (2012). Funciones polinomiales. 1
- Math2me, (2010). Hallar los ceros de un polinomio y el teorema del valor intermedio. 23
- Pasos por ingeniería. (6 de mayo de 2019). Máximos y mínimos relativos o también llamados locales. 25

Retroalimentación

La información que se encuentra en estos videos permite comprender de manera sencilla la forma canónica o estándar de una función cuadrática, determinar los máximos y mínimos de funciones cuadráticas y la modelización.

Con esta información más la adquirida de la lectura del texto básico y la resolución de los ejercicios propuestos, está en condiciones de desarrollar la séptima actividad de aprendizaje recomendada.

Actividades de aprendizaje recomendadas

Resuelva los ejercicios propuestos del 5 al 86, páginas 268 del texto básico.

Estimados estudiantes

Hasta aquí, hemos revisado funciones polinomiales de cualquier grado y procesos para alcanzar a desarrollar sus habilidades, destrezas y competencias, en el dominio de las funciones polinomiales.

Le corresponde, en base de su trabajo autónomo, resolver ejercicios y problemas, con lo cual tendrá los conocimientos indispensables para enfrentar el proceso de enseñanza-aprendizaje de la matemática.

Por ello, le invito a desarrollar la séptima actividad.

Actividad de aprendizaje calificada 7

En su diario de notas resuelva los ejercicios y problemas

Para calificación debe presentar resueltos los:

- Problemas del 87 al 90 de la página 268 del texto básico. (4 problemas)

Índice
Primer bimestre
Segundo bimestre
Solucionario
Referencias bibliográficas

Índice
Primer bimestre
Segundo bimestre
Solucionario
Referencias bibliográficas

Estimados estudiantes:

Los felicito por el cumplimiento de las actividades de aprendizaje recomendadas, espero que hayan obtenido buenos resultados. Es momento de participar en la primera actividad de aprendizaje evaluada del segundo bimestre.

Semana 11

3.4. División de Polinomios

Hemos estudiado las funciones polinomiales gráficamente, ahora lo haremos algebraicamente, y como necesitamos factorizar es de vital importancia dividir, iniciamos revisando cómo dividir.

3.4.1. ¿Cómo se realiza la división larga de polinomios?

Recordemos tres ejercicios diferentes para comprender de mejor manera la división larga de polinomios.

Ejemplo 25

1. Dividamos los polinomios $\mathbf{3x^3 + 13x^2 - 13x + 2}$ para 3x - 2; como vemos, el dividendo es un polinomio completo

Índice
Primer bimestre
Segundo bimestre
Solucionario
Referencias bibliográficas

$$
\begin{array}{llll}
 & 3x^3 + 13x^2 - 13x + 2 & | \ (3x-2) \\
 & -3x^2 + 2x^2 & \quad x^2 + 5x - 1 \\
 & 0 \quad + 15x^2 - 13x + 2 & \\
 & \quad -15x^2 + 10x & \\
 & \qquad 0 \quad - 3x \quad + 2 & \\
 & \qquad\qquad 0 &
\end{array}
$$

Es una división exacta porque el resto es cero y su cociente es $\boldsymbol{x^2 + 5x - 1}$

Ejemplo 26

2. Dividamos los polinomios $\boldsymbol{x^4 - 2x^3 - 11x^2 + 30x - 20}$ para $\boldsymbol{x^2 + 3x}$

$$
\begin{array}{ll}
x^4 - 2x^3 - 11x^2 + 30x - 20 & | \ x^2 + 3x \\
-x^4 - 3x^3 & \quad x^2 - 5x + 4 \\
\quad -5x^3 - 11x^2 & \\
\quad\ 5x^3 + 15x^2 & \\
\qquad 4x^2 + 30x - 20 & \\
\qquad -4x^2 - 12x & \\
\qquad\qquad 18x - 20 &
\end{array}
$$

No es una división exacta, porque el resto es (18x -20) y su grado es menor que el divisor, por lo que ya no se puede seguir dividiendo y su cociente es $\boldsymbol{x^2 - 5x + 4}$.

Ejemplo 27

3. Dividamos el polinomio incompleto $\boldsymbol{x^5 + 2x^3 - x - 8}$ para $\boldsymbol{x^2 - 2x + 1}$

$$
\begin{array}{l}
x^5(--)+2x^3(--)-x-8 \quad | \, x^2-2x+1 \\
-x^5+2x^4+x^3 \qquad\qquad\qquad x^3+2x^2+5x+8 \\
0+2x^4+x^3(--)-x-8 \\
\quad -2x^4+4x^3-2x^2 \\
\qquad 0 \;+5x^3-2x^2\;-x\;-8 \\
\qquad\quad -5x^3+10x^2-5x \\
\qquad\qquad 0\;+8x^2-6x \\
\qquad\qquad\quad -8x^2-16x-8 \\
\qquad\qquad\qquad\qquad 10x-16
\end{array}
$$

No es una división exacta, porque el resto es (10x - 16) y su grado es menor que el divisor por lo que no se puede seguir dividiendo y su cociente es $\boldsymbol{x^3+2x^2+5x+8}$

3.4.2. ¿Cómo se realiza la división sintética?

La división sintética es un método rápido para dividir polinomios, se utiliza cuando el divisor es x - c, anotando solo los coeficientes de los términos. Se sugiere seguir los siguientes pasos:

1. Escribimos los coeficientes del dividendo y el divisor.
2. Bajamos el primer término del dividendo.
3. Multiplicamos este término por el coeficiente del divisor.
4. Luego sumamos y repetimos hasta completar.

Ejemplo 28

4. Dividamos el polinomio $\boldsymbol{3x^3+13x^2-13x+2}$ para x - 2; como vemos en este caso, el dividendo es un polinomio completo.

Índice
Primer bimestre
Segundo bimestre
Solucionario
Referencias bibliográficas

$$
\begin{array}{l}
2\ |3+13-13+2 \\
\qquad\quad +6\ \ +38+50 \\
\quad\ 3\ +19+25+52
\end{array}
$$

El cociente es $\mathbf{3x^2+19x+25}$ y el residuo es 52.

Ejemplo 29

5. Dividamos el polinomio $\mathbf{x^5+3x^4-7x^3+2x^2-8x+1}$ para x + 1

$$
\begin{array}{l}
-1|1+3-7+2\ -8\ +1 \\
\qquad\quad -1-2+9-11+19 \\
\quad\ 1+2-9+11-19+20
\end{array}
$$

El cociente es $\mathbf{x^4+2x^3-9x^2+11x-19}$ y el residuo es 20.

Ejemplo 30

6. Dividamos el polinomio $\mathbf{7x^3-x+2}$ para x + 2

Recuerden que cuando nos falta un término colocamos el 0.

$$
\begin{array}{l}
-2|\ 7\quad 0\quad -1+2 \\
\qquad\quad -14+28-54 \\
\qquad 7-14+27-52
\end{array}
$$

El cociente es $\mathbf{7x^2-14x+27}$ y el residuo es -52.

3.4.3. ¿Para qué sirve el teorema del residuo?

Nos dice que utilizando la división sintética podemos evaluar fácilmente polinomios.

Analicemos los siguientes ejercicios:

Índice
Primer bimestre
Segundo bimestre
Solucionario
Referencias bibliográficas

Ejemplo 31

7. Determinemos si 2 es una solución de
$\mathbf{2x^4 - 5x^3 - 14x^2 + 37x - 10}$

$$
\begin{array}{l}
2|2 - 5 - 14 + 37 - 10 \\
\quad\quad 4 - \ 2 - 32 + 10 \\
\ \ 2 - 1 - 16 \ + 5 \quad 0
\end{array}
$$

El cociente es $\mathbf{2x^3 - x^2 - 16x + 5}$, el residuo es 0, por lo tanto, 2 si es solución del polinomio o (x - 2) es un factor de dicho polinomio.

Ejemplo 32

8. Determinemos si 4 es una solución de $\mathbf{5x^3 + 6x^2 - 24x - 16}$

$$
\begin{array}{l}
4|\ 5 + \ 6 \ - \ 24 \ - \ 16 \\
\quad +20 + 104 + 320 \\
\ \ 5 \ + 26 + 80 + 304
\end{array}
$$

El cociente es $\mathbf{5x^2 + 26x + 80x + 80}$, el residuo es 304, por lo que, 4 no es solución del polinomio o (x - 4) no es un factor de dicho polinomio.

Recordemos que en x = 4 expresado como f (4) sustituyendo quedaría:

$$f(x) = 5x^3 + 6x^2 - 24x - 16$$
$$f(4) = 5(4)^3 + 6(4)^2 - 24(4) - 16$$
$$f(4) = 304$$

3.4.4. ¿Para qué sirve el teorema del factor?

Este teorema nos dice que los ceros de los polinomios corresponden a funciones, es decir son soluciones.

Analicemos el ejemplo 6 del texto básico.

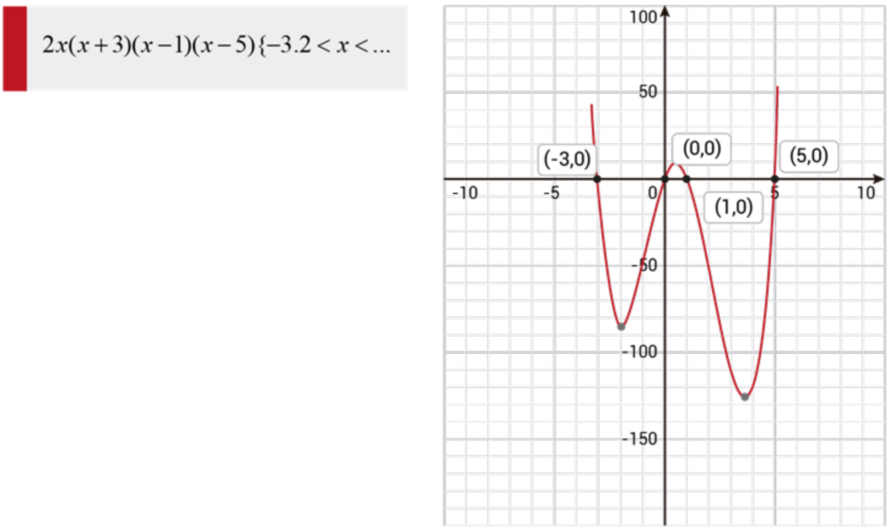
Encontremos un polinomio de grado cuatro que tenga ceros -3, 0, 1, 5, y que el coeficiente de x^3 sea 6.

Por el teorema del factor, (x - (- 3)), (x - 0), (x - 1) y (x - 5)deben ser todos factores de polinomio deseado, entonces

$$P(x) = (x+3)(x-0)(x-1)(x-5)$$
$$P(x) = x^4 - 3x^3 - 13x^2 + 15x$$

El polinomio es de grado 4, con los ceros deseados, pero el coeficiente de x^3 es -3, que no es el que nos pide, por lo tanto, multiplicamos el polinomio por la constante 2 y nos queda:

$$P(x) = (x^4 - 3x^3 - 13x^2 + 15x)(2)$$
$$Q(x) = 2x^4 - 6x^3 - 26x^2 + 30x$$



Es el polinomio con todas las propiedades solicitadas y para verificar grafiquemos la función:

Recursos de aprendizaje

Para comprender de mejor manera este apartado le invito a que lea y resuelva las actividades propuestas en las páginas 269-272 del texto básico. Habilite los hipervínculos y mire atentamente los videos de:

- ElshowelNerd, (2016). División larga de polinomios 6
- Tabares, (2014). División sintética 6
- Vitual, (s.f.). Teorema del residuo ejemplo 1 de 2. 32

Retroalimentación

La información que se encuentra en estos videos permite comprender de manera sencilla la división larga y sintética de polinomios, así como el teorema del residuo.

Con esta información más la adquirida de la lectura del texto básico y la resolución de los ejercicios propuestos, está en condiciones de desarrollar la octava actividad de aprendizaje recomendada.

Actividades de aprendizaje recomendadas

Resuelva los ejercicios propuestos del 3 al 70, páginas 274 del texto básico.

Estimados estudiantes:

Hasta aquí hemos revisado funciones polinomiales de cualquier grado y procesos para alcanzar a desarrollar sus habilidades, destrezas y competencias, en el dominio de las funciones polinomiales.

Le corresponde, en base de su trabajo autónomo, resolver ejercicios y problemas, con lo cual tendrá los conocimientos indispensables para enfrentar el proceso de enseñanza-aprendizaje de la matemática.

Por ello, le invito a desarrollar la octava actividad.

Actividades de aprendizaje calificadas 8

En su diario de notas resuelva los ejercicios y problemas
Para calificación debe presentar resueltos los:

- Ejercicios del 15 al 70 únicamente los múltiplos de 5 página 274 del texto básico. (14 ejercicios)

Estimados estudiantes:

Hemos concluido la tercera unidad, autoevaluemos nuestros conocimientos logrados hasta aquí.

Desarrolle la autoevaluación 3

Autoevaluación 3

Estimados estudiantes lean comprensivamente, razonen, resuelvan y seleccione la respuesta correcta.

1. La función $f(x) = x^2 - 2x + 3$ en forma estándar es:

   a. $(x-2)^2 + 3$
   b. $(x-1)^2 + 2$
   c. $(x-3)^2 + 2$

2. El vértice de la función $f(x) = x^2 - 2x + 3$ es:

   a. (1, 1)
   b. (2, 1)
   c. (1, 2)

3. La intersección de la función $f(x) = x^2 - 2x + 3$ con el eje y es:

   a. 3
   b. 4
   c. 5

4. La función $f(x) = 3x^2 - 6x + 1$ en forma estándar es:

   a. $2(x-2)^2 + 3$
   b. $3(x-1)^2 - 2$
   c. $6(x-3)^2 + 2$

5. El vértice de la función $f(x) = 3x^2 - 6x + 1$ es:

a. (1, 1)
b. (2, 1)
c. (1, -2)

6. La intersección de la función $f(x) = 3x^2 - 6x + 1$ con el eje y es:

a. 4
b. 3
c. 1

7. El valor mínimo de la función $f(x) = 3x^2 - 6x + 1$ es:

a. -3
b. -2
c. -1

8. La intersección de la función $f(x) = -5x^4 + 5$ con el eje x es:

a. (-1,0) y (1, 0)
b. (0, -1) y (0, 1)
c. (-1, -1) y (1, 1)

9. La factorización la función $f(x) = x^3 - x^2 - 6x$ es:

a. $(x+1)(x+3)(x+2)$
b. $2(x-3)(x+2)$
c. $x(x-3)(x+2)$

10. Los ceros de la función $f(x) = x^3 - x^2 - 6x$ son:

a. 1, 2, 3
b. 0, -1, 2
c. 0, -2, 3

11. La factorización la función $f(x) = x^4 - 3x^3 + 2x^2$ es:

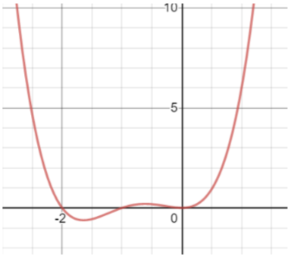
a. $(x+1)(x+3)(x+2)$
b. $x^2(x-2)(x-1)$
c. $x(x-3)(x+2)$

12. Los ceros de la función $f(x) = x^4 - 3x^3 + 2x^2$ son:

a. 0, 2, 3
b. 0, 1, 2
c. 0, -2, 3

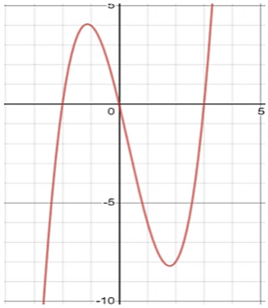
13. La gráfica de la función $f(x) = x^4 - 3x^3 + 2x^2$ es

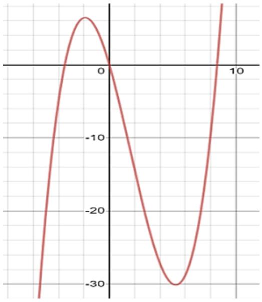
a. 

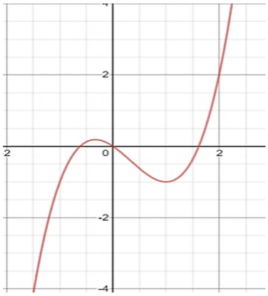
b. 

c. 

14. La gráfica de la función $f(x) = x^3 - x^2 - 6x$ es

a. 

b. 

c. 

15. ¿Cuántos mínimos locales tiene la función $f(x) = x^4 - 5x^2 + 4$?

a. 1
b. 2
c. 3

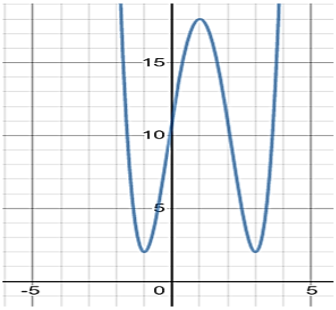
16. ¿Cuántos máximos y mínimos locales tiene la función $f(x) = 1.2x^5 + 3.75x^4 - 7x^3 - 15x^2 + 18x$?

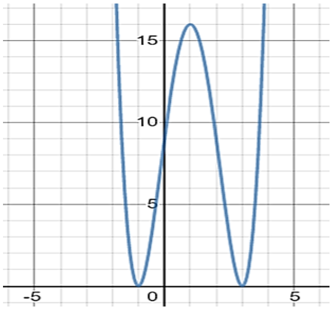
a. 3
b. 4
c. 5

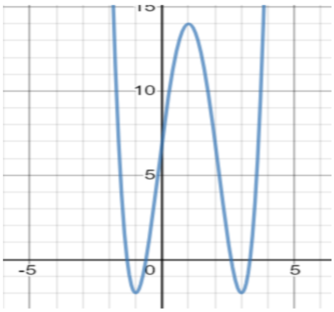
17. ¿Cuántos mínimos locales tiene la función $f(x) = x^4 - 5x^2 + 4$?

a. 1
b. 2
c. 3

18. La gráfica de la función $f(x) = (x-3)^2(x+1)^2$ es:

a. 

b. 

c. 

19. Los ceros de la función $f(x) = -2x(x-2)^2$ son

a. 0, 2
b. 0, 1
c. 0, -2

20. La función $f(x) = x^3 - 8$ se desplaza hacia

a. Arriba
b. La derecha
c. Abajo

Ir al solucionario

Lo estás haciendo muy bien
¡Sigue adelante!

Recuerde que:
A través del chat de tutoría y consultas puede aclarar sus dudas e inquietudes con su docente.

Índice
Primer bimestre
Segundo bimestre
Solucionario
Referencias bibliográficas

Índice
Primer bimestre
Segundo bimestre
Solucionario
Referencias bibliográficas

Semana 12

Estimados estudiantes bienvenidos a la cuarta y última unidad.

Unidad 4. Funciones Racionales

4.1. Ceros reales de polinomios

Ahora estudiaremos algunos métodos algebraicos que nos ayuden a encontrar los ceros reales de un polinomio y, por tanto, factorizar el polinomio.

4.1.1. ¿Cuáles son los ceros racionales de polinomios?

Para comprender cuáles son los ceros racionales de un polinomio analicemos el siguiente polinomio $\boldsymbol{P(x) = x^3 - 3x + 2}$

- Cualquier cero debe ser un divisor del valor constante 2.
- Los ceros posibles son $\boldsymbol{\pm 1 \ y \ \pm 2}$

Verifiquemos cuales son los ceros racionales

$$P(1) = (1)^3 - 3(1) + 2 \qquad P(-1) = (-1)^3 - 3(-1) + 2$$
$$P(1) = 1 - 3 + 2 \qquad P(-1) = -1 + 3 + 2$$

$P(1) = 0$ $\qquad$ $P(-1) = 4$

$P(2) = (2)^3 - 3(2) + 2$ $\qquad$ $P(-2) = (-2)^3 - 3(-2) + 2$

$P(2) = 8 - 6 + 2$ $\qquad$ $P(-2) = -8 + 6 + 2$

$P(2) = 4$ $\qquad$ $P(-2) = 0$

Entonces, los ceros racionales son 1 y -2.

4.1.2. ¿Cuál es la regla de los signos de Descartes?

En la página 274 del Texto básico encontramos que:

Sea **P** un polinomio con coeficientes reales.

1. El número de ceros reales posibles de **P (x)**es igual al número de variaciones en signo en **P (x)** o es menor a este último número, en un número entero par.

2. El número de ceros reales posibles de **P (x)** es igual al número de variaciones en signo en **P (-x)** o es menor a este último número, en un número entero par.

4.1.3. ¿Cómo se utiliza el Teorema de los límites superior e inferior?

En la página 279 del Texto básico encontramos que:

Sea **P** un polinomio con coeficientes reales.

1. Si dividimos **P (x)** entre $x - b\ (con\ b > 0)$ usando división sintética, y si el renglón que contiene el cociente y el residuo no tiene una entrada negativa, entonces b es un límite superior para los ceros reales de **P**.

2. Si dividimos **P (x)** entre $\boldsymbol{x - a\ (con\ a < 0)}$ usando división sintética, y si el renglón que contiene el cociente y el residuo tiene entradas que se alternan negativas y positivas, entonces x es un límite inferior para los ceros reales de **P**.

Para comprender analicemos el siguiente ejercicio:

$\boldsymbol{P(x) = x^4 + 4x^3 + 3x^2 + 7x - 5}$ son mayores o iguales a -4.

Utilizando la división sintética.

$$
\begin{array}{r|rrrrr}
-4 & 1 & +4 & +3 & +7 & -5 \\
 & & -4 & 0 & -12 & +20 \\
 & 1 & 0 & +3 & -5 & +15
\end{array}
$$

Dado que 0 se puede considerar positivo o negativo, el signo de las entradas se alterna. Entonces -4 es un límite inferior de los ceros reales de **P**.

4.1.4. ¿Cómo se usa el álgebra y calculadoras para resolver ecuaciones con polinomios?

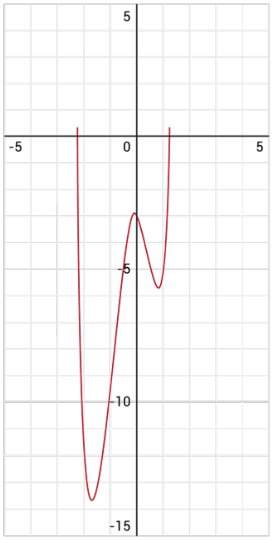
Encontremos todas las soluciones reales de la siguiente ecuación, redondeadas al décimo más cercano:

$$3x^4 + 4x^3 - 7x^2 - 2x - 3 = 0$$
$$P(x) = 3x^4 + 4x^3 - 7x^2 - 2x - 3$$

Grafiquemos la función

Índice
Primer bimestre
Segundo bimestre
Solucionario
Referencias bibliográficas

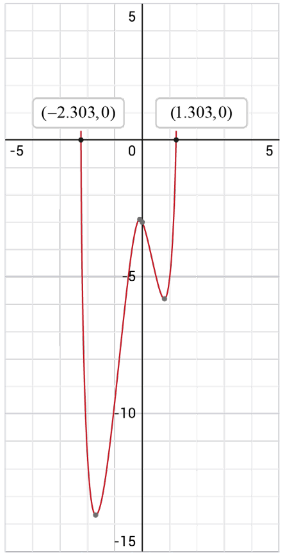
$3x^4 + 4x^3 - 7x2 - 2x - 3\{-2.31 < x...$



Como podemos ver:

- Todas las soluciones se encuentran entre -3 y 2.
- El rectángulo de vista $[-15, 15]$ y $[-15, 5]$, contiene todos los puntos de intersección de *x* de ***P***
- Tiene dos puntos de intersección con el eje x uno entre -3 y -2 y otro entre 1 y 2.

$3x^4 + 4x^3 - 7x^2 - 2x - 3\{-2.31 < x...$



- Haciendo un acercamiento en la gráfica verificamos que las soluciones son -2.3 y 1.3

Recursos de aprendizaje

Para comprender de mejor manera este apartado le invito a que lea y resuelva las actividades propuestas en las páginas 275-284 del texto básico.

Habilite el hipervínculo y mire atentamente el video de Avirmat uprm, (2016). Teorema de los ceros racionales.

Retroalimentación

La información que se encuentra en estos videos permite comprender de manera sencilla el teorema de los ceros racionales.

Con esta información más la adquirida de la lectura del texto básico y la resolución de los ejercicios propuestos, está en condiciones de desarrollar la novena actividad de aprendizaje recomendada.

Actividades de aprendizaje recomendadas

Resuelva los ejercicios propuestos del 5 al 98, páginas 285 del texto básico.

Estimados estudiantes:

Hasta aquí, hemos revisado los ceros reales en funciones polinomiales para alcanzar a desarrollar sus competencias, habilidades y destrezas en el dominio de las funciones polinomiales.

Le corresponde, en base de su trabajo autónomo, resolver ejercicios y problemas, con lo cual tendrá los conocimientos indispensables para enfrentar el proceso de enseñanza-aprendizaje de la matemática.

Por ello, le invito a desarrollar la novena actividad.

Actividad de aprendizaje calificada 9

En su diario de notas resuelva los ejercicios y problemas
Para calificación debe presentar resueltos los:

- Ejercicios del 99 al 105 únicamente los impares de la página 286 del texto básico. (5 problemas)

Semana 13

4.2. Ceros complejos y Teorema Fundamental del Álgebra

Ya estudiamos que un polinomio de grado puede tener como máximo n ceros reales.

En el sistema de números complejos un polinomio de grado n tiene exactamente ceros y por tanto se puede factorizar en exactamente n factores lineales.

Esta situación es una consecuencia del Teorema Fundamental del Álgebra que fue demostrado por C. F. Gauss en 1799. (Stewart, Redlin, y Watson, 2017, p. 287)

4.2.1. ¿Cuál es el Teorema Fundamental del Álgebra?

"Todo polinomio $P(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0;\ (n \geq\ 1, a_n \neq 0)$, con coeficientes complejos tiene al menos un cero complejo". (Stewart, Redlin, y Watson, 2017, p. 287)

Sabemos que, a cualquier número real también es un número complejo, por lo que, el teorema también se aplica a polinomios con coeficientes reales.

"Juntos, el teorema fundamental del álgebra y el teorema del factor demuestran que un polinomio se puede factorizar completamente en factores lineales". (Ibíd. 287)

Índice

Primer bimestre

Segundo bimestre

Solucionario

Referencias bibliográficas

4.2.2. ¿Cuál es el Teorema de factorización completa?

"Si **P (x)** es un polinomio de grado $\boldsymbol{n \geq 1}$, entonces existen números complejos $\boldsymbol{a, c_1, c_2, \dots, c_n}$ $\boldsymbol{(con\ a \neq 0)}$, tal que: $\boldsymbol{P(x) = a(x - c_1)(c - c_2)\dots(x - c_n)}$" (Ibíd. p.287)

4.2.3. ¿Cómo se factoriza un polinomio completamente?

Para comprender analicemos el ejercicio resuelto del texto básico página 288.

Sea $\boldsymbol{P(x) = x^3 - 3x^2 + x - 3}$

a. Encuentre todos los ceros de **P**
b. Encuentre la factorización completa de **P**

Factorizamos **P**

$$\begin{aligned} P(x) &= x^3 - 3x^2 + x - 3 \\ &= x^2(x-3) + (x-3) \\ &= (x-3)(x^2+1) \end{aligned}$$

a. Para encontrar los ceros igualamos a 0.

$$(x-3)(x^2+1) = 0$$

$$(x-3) = 0 \qquad (x^2+1) = 0$$

$$x = 3 \qquad x = \sqrt{-1}$$

$$x = i \quad ; \quad x = -i$$

Los ceros son:

- Es cero cuando x = 3
- Es cero cuando x = i o x = -i

b. Dado que los ceros son 3, i - i aclara si está bien la ecuación la factorización completa de **P** es

$$P(x) = (x-3)\big(x-(-i)\big)$$
$$= (x-3)(x-i)(x+i)$$

Recuerden que, para encontrar realmente los ceros complejos de un polinomio de grado n por lo general, factorizamos tanto como sea posible y luego, usamos la fórmula cuadrática en partes cuando no se pueda factorizar más.

4.2.4. ¿Cómo se encuentran los ceros y sus multiplicidades?

Los ceros, no necesariamente pueden ser todos diferentes, sin un factor aparece varias veces en la factorización completa entonces, las veces que se repite se conoce como multiplicidad.

Sabemos que el polinomio **P** tiene un mismo número de ceros que su grado.

Por ejemplo, el polinomio de grado 8 tiene 8 ceros, siempre que contemos las multiplicidades, esta afirmación se verifica en el teorema de ceros.

4.2.5. ¿Cuál es el teorema de ceros?

"Todo polinomio de grado $\boldsymbol{n \geq 1}$ tiene exactamente n ceros, siempre que un cero de multiplicidad k se encuentra k veces". (Stewart, Redlin y Watson, 2017, p. 288)

Analicemos el ejemplo de la página 291.

Encontremos todos los ceros del polinomio
$\boldsymbol{P(x) = 3x^4 - 2x^3 - x^2 - 12\,x - 4}$

Por el teorema de ceros tenemos la lista de posibles ceros racionales:

$$\pm 1, \pm 2, \pm 4, \pm\frac{1}{3}, \pm\frac{2}{3}, \pm\frac{4}{3}$$

Al comprobarlos usando la división sintética encontramos que $\mathbf{2}\ \boldsymbol{y}\ -\frac{\mathbf{1}}{\mathbf{3}}$ son ceros y obtenemos la factorización completa

$$\begin{aligned} P(x) &= 3x^4 - 2x^3 - x^2 - 12x - 4 \\ &= (x-2)(3x^3 + 4x^2 + 7x + 2) \\ &= (x-2)\left(x+\frac{1}{3}\right)(3x^2 + 3x + 6) \end{aligned}$$

$$P(x) = 3(x-2)\left(x+\frac{1}{3}\right)(x^2 + x + 2)$$

Determinamos los ceros del factor $(x^2 + x + 2)$

$$3(x-2)\left(x+\frac{1}{3}\right)(x^2 + x + 2) = 0$$

$$x^2 + x + 2 = 0$$

$$x = \frac{-2 \pm \sqrt{1-8}}{2}$$

$$x = -\frac{1}{2} \pm i\frac{\sqrt{7}}{2}$$

Los ceros de **P (x)** son:

$$2, -\frac{1}{3}, -\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{7}}{2}, -\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{7}}{2}$$

4.2.6. ¿Los ceros complejos se presentan en pares conjugados?

Por lo estudiado hasta el momento, los ceros complejos de los polinomios con coeficientes reales se presentan en pares.

Siempre que **a + bi** es un cero, su complejo conjugado **a - bi** también es un cero.

4.2.7. ¿Cuál es el teorema de ceros conjugados?

"Si el polinomio P tiene coeficientes reales y si el número complejo es un cero de P entonces su complejo conjugado z también es un cero de P. (Stewart, Redlin, y Watson, 2017, p. 291)

Analicemos el ejemplo de la página 292 del texto básico.

Encuentre un polinomio P (x) de grado 3 que tenga coeficientes enteros y ceros $\frac{1}{2}$ y 3 - i

Dado que 3 - i, es un cero, entonces por el teorema de ceros conjugados también lo es 3 + i

Con esto, el polinomio **P (x)** que buscamos, tiene la forma:

$$\begin{aligned}
P(x) &= a\left(x-\frac{1}{2}\right)[x-(3-i)][x-(3+i)] \\
&= a\left(x-\frac{1}{2}\right)[(x-3)+i][(x-3)-i] \\
&= a\left(x-\frac{1}{2}\right)[(x-3)^2-i^2] \\
&= a\left(x-\frac{1}{2}\right)[x^2-6x+9+1] \\
&= a\left(x^3-\frac{13}{2}x^2+13x-5\right)
\end{aligned}$$

Para hacer que los coeficientes sean enteros multiplicamos por a = 2, así:

$$\boldsymbol{P(x) = 2x^3 - 13x^2 + 26x - 10}$$

Otro polinomio que satisfaga las condiciones dadas, simplemente debe ser un múltiplo de este.

4.2.8. ¿Qué son los factores lineales y cuadráticos?

"Todo polinomio con coeficientes reales pueden ser factorizados como un producto de factores lineales y cuadráticos irreducibles con coeficientes reales". (Stewart, Redlin, y Watson, 2017, p. 292).

Para comprender, analicemos el ejercicio resuelto del texto básico página 293.

Sea: $\boldsymbol{P(x) = x^4 + 2x^2 - 8}$

a. Factorizamos P en factores lineales y cuadráticos irreducibles con coeficientes reales.

$$P(x) = x^4 + 2x^2 - 8$$
$$P(x) = (x^2 - 2)(x^2 + 4)$$
$$P(x) = \left(x - \sqrt{2}\right)\left(x + \sqrt{2}\right)(x^2 + 4)$$

b. Factorice completamente en factores lineales con coeficientes reales.

$$P(x) = \left(x - \sqrt{2}\right)\left(x + \sqrt{2}\right)(x^2 + 4)$$
$$P(x) = \left(x - \sqrt{2}\right)\left(x + \sqrt{2}\right)(x - 2i)(x + 2i)$$

Recursos de aprendizaje

Para comprender de mejor manera este apartado le invito a que lea y resuelva las actividades propuestas en las páginas 287-293 del texto básico.

Habilite el hipervínculo y mire atentamente el video de Avirmat uprm, (2016). Teorema fundamental del álgebra

Retroalimentación

La información que se encuentra en estos videos permite comprender de manera sencilla el teorema fundamental del álgebra "Si **P (x)** es un polinomio de grado $n \geq 1$, entonces existen números complejos $a, c_1, c_2, \dots, c_n$ $(con\ a \neq 0)$, tal que: $P(x) = a(x - c_1)(c - c_2)\dots(x - c_n)$".

Con esta información más la adquirida de la lectura del texto básico y la resolución de los ejercicios propuestos, está en condiciones de desarrollar la décima actividad de aprendizaje recomendada.

Actividades de aprendizaje recomendadas

Resuelva los ejercicios propuestos del 7 al 70, páginas 293-294 del texto básico.

Estimados estudiantes:

Hasta aquí, hemos revisado los ceros complejos y el teorema fundamental del álgebra para alcanzar a desarrollar sus destrezas, habilidades y competencias en el dominio de las funciones polinomiales.

Le corresponde, en base de su trabajo autónomo, resolver ejercicios y problemas, con lo cual tendrá los conocimientos indispensables para enfrentar el proceso de enseñanza-aprendizaje de la matemática.

Por ello, le invito a desarrollar la décima actividad.

Actividades de aprendizaje calificada 10

En su diario de notas resuelva los ejercicios y problemas.

Para calificación debe presentar resueltos los:

- Problemas del 71 al 74 de la página 294 del texto básico. (4 problemas)

Lo estás haciendo muy bien ¡Sigue adelante!

Recuerde que: A través del chat de tutoría y consultas puede aclarar sus dudas e inquietudes con su docente.

Semana 14

4.3. Funciones racionales

Recordemos que una función racional es una función de la forma $r(x) = \frac{P(x)}{Q(x)}$, donde **P y Q** son funciones polinomiales. Suponemos que **P (x)** y **Q (x)** no tienen factor en común (Stewart, Redlin, y Watson, 2017, p. 295).

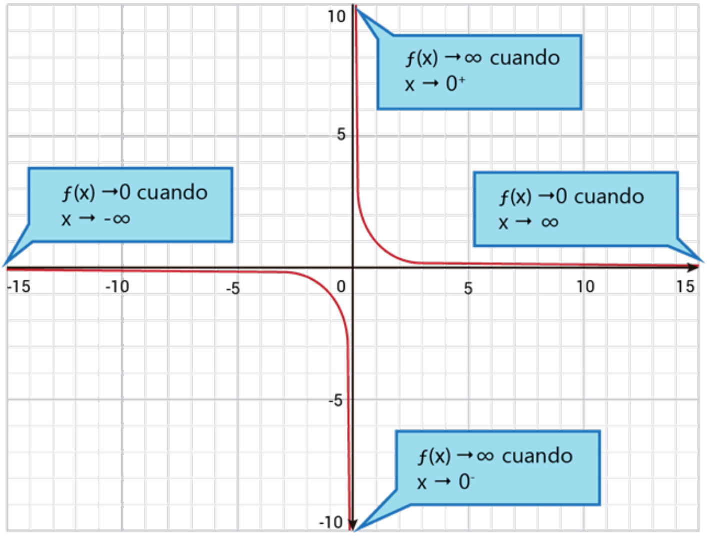
Las gráficas son diferentes a las gráficas de las funciones polinomiales.

Iniciemos nuestro estudio a partir de la gráfica de la función

$$y = \frac{1}{x}$$

Índice
Primer bimestre
Segundo bimestre
Solucionario
Referencias bibliográficas

$y = \frac{1}{x}$



La función está definida para todos los valores de, que no sean 0, de modo que:

- El dominio es $\{x/x \neq 0\}$
- El rango es $\{y/y \neq 0\}$

4.3.1. ¿Qué son las asíntotas?

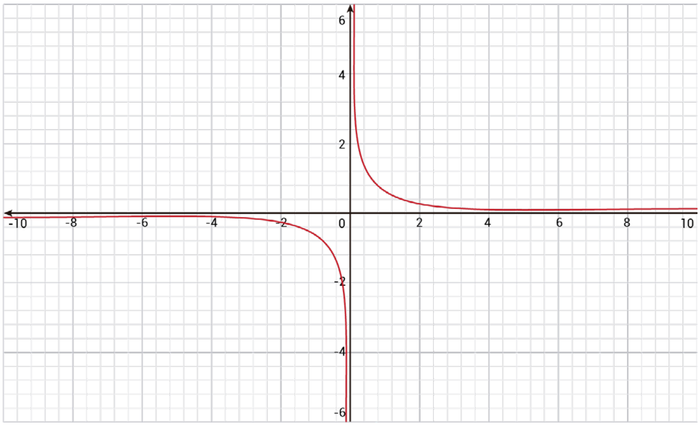
El dominio de una función racional está formado por todos los números reales excepto aquellos para los cuales el denominador es cero.

Al hacer la gráfica de una función racional debemos poner especial atención al comportamiento de la gráfica cerca de esos valores x

Observemos la gráfica de la función $f(x) = \frac{1}{x}$

Índice
Primer bimestre
Segundo bimestre
Solucionario
Referencias bibliográficas

$$y = \frac{1}{3}$$



Solución. La función f no está de finida para x = 0. Las tablas siguientes muestran que cuan x se acerca a cero el valor de la f (x) es grande y cuanto más se acerque x a cero, más grande se hace la f (x).

x	f (x)
0,1	10
0,01	100
0,00001	100 000
Se aproxima a 0^-	Se aproxima a $-\infty$

x	f (x)
-0,1	-10
-0,01	-100
-0,00001	-100 000
Se aproxima a 0^+	Se aproxima a ∞

4.3.2. ¿Cómo realizar las transformaciones de $y = \frac{1}{x}$?

Recordemos las transformaciones estudiadas, tales como: desplazar, estirar, girar se pueden trazar la gráfica de la función racional de la forma $\boldsymbol{r(x) = \frac{ax+b}{cx+d}}$ al desplazar, estirar o reflejar la gráfica $\boldsymbol{f(x) = \frac{1}{x}}$ (estas funciones se denominan transformaciones fraccionarias lineales)

Analicemos el ejemplo 2 del texto básico, página 297.

a. Tracemos la gráfica de la función $\boldsymbol{r(x) = \frac{2}{x-3}}$

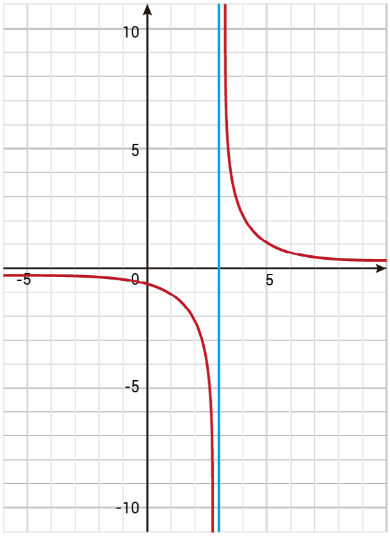
Sabemos que $\boldsymbol{f(x) = \frac{1}{x}}$, entonces expresemos r en términos de r.

Factoricemos o extraigamos el factor 2:

$$r(x) = \frac{2}{x-3}$$

$$= 2\left(\frac{1}{x-3}\right)$$

Expresemos r en términos de f. Dado que $\boldsymbol{f(x) = \frac{1}{x}}$, se tiene:
$\boldsymbol{r(x) = 2(f(x-3))}$



Con ello determinamos que la gráfica:

- Se desplaza 3 unidades a la derecha.
- Se estira verticalmente en factor 2.
- Tiene asíntota vertical $x = 3$
- Tiene asíntota horizontal $y = 0$
- El Dominio es $\{x/x \neq 3\}$
- El rango es $\{y/y \neq 0\}$

b. Tracemos la gráfica de la función $s(x) = \frac{3x+5}{x+2}$

Sabemos que $f(x) = \frac{1}{x}$, entonces expresemos s en términos de f.

$3x + 5 \;|(x + 2)$

$-3x - 6 \quad 3$

$\quad 0 \;\; - 1$

Expresemos s en términos de f dado que $f(x) = \frac{1}{x}$

Índice
Primer bimestre
Segundo bimestre
Solucionario
Referencias bibliográficas

$$s(x) = 3 - \frac{1}{x+2}$$

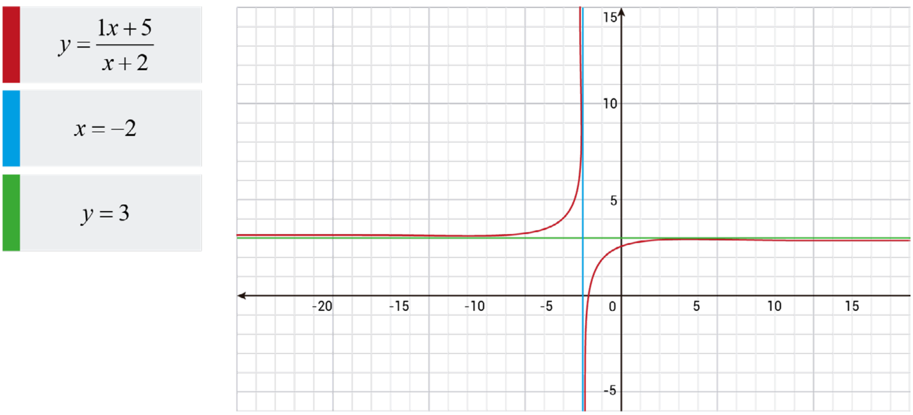
$$s(x) = -\frac{1}{x+2} + 3$$

$$s(x) = -f(x+2) + 3$$

Con ello determinamos que la gráfica:

- Se desplaza 2 unidades a la izquierda.
- Se refleja en el eje x, se desplaza 3 unidades hacia arriba.
- Tiene asíntota vertical x = 2.
- Tiene asíntota horizontal y - 3.
- El Dominio es $\{x/x \neq -2\}$
- El rango es $\{y/y \neq 3\}$

Verifiquemos con la gráfica de la función.



4.3.3. ¿Cómo se determinan las Asíntotas de funciones racionales?

Para trazar las gráficas de funciones más complicadas necesitamos dar una mirada más rigurosa al comportamiento de una función racional cerca de sus asíntotas horizontal y vertical.

Para ello, analicemos el ejemplo 4 de la página 300 del texto básico.

Encuentre las asíntotas horizontal y vertical de la función:

$$r(x) = \frac{3x^2 - 2x - 1}{2x^2 + 3x - 2}$$

Factoricemos el divisor

$$r(x) = \frac{3x^2 - 2x - 1}{2x^2 + 3x - 2}$$

$$r(x) = \frac{(3x^2 - 2x - 1)}{(2x - 1)(x + 2)}$$

Igualando a 0 y despejando tenemos:

$$x = \frac{1}{2}$$

$$x = -2$$

- Tiene asíntotas verticales

$$x = \frac{1}{2}$$

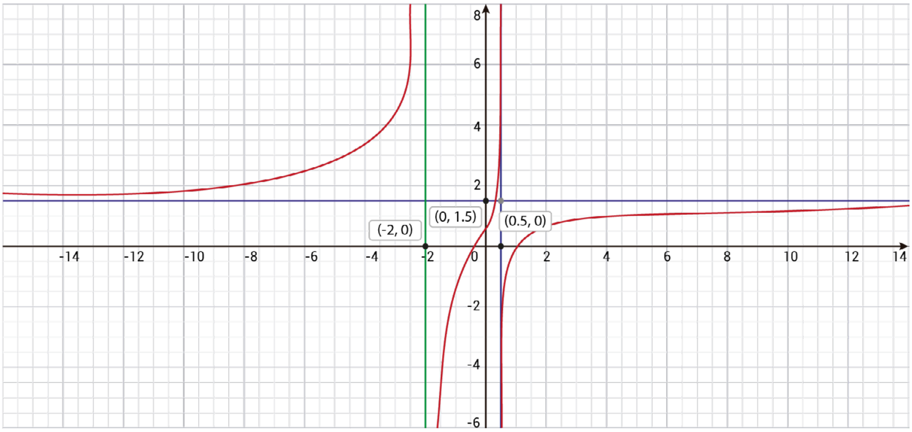
$$x = -2$$

Como el grado de los exponentes del numerador y denominador son iguales entonces:

$$\frac{\boldsymbol{coeficiente\ principal\ del\ numerador}}{\boldsymbol{coeficiente\ principal\ del\ denominador}} = \frac{\mathbf{3}}{\mathbf{2}},$$

por lo tanto, la asíntota horizontal es la recta $\boldsymbol{y} = \frac{\mathbf{3}}{\mathbf{2}}$

Verifiquemos con la gráfica de la función



4.3.4. ¿Cómo se grafican las funciones racionales?

Recordemos que las asíntotas son muy importantes para trazar las gráficas de funciones racionales y podemos seguir los siguientes pasos:

1. Factorizar
2. Determinar los puntos de intersección.
3. Identificamos las asíntotas verticales.
4. Identificamos las asíntotas horizontales.
5. Trazar la gráfica.

Analicemos el ejemplo 6 de las páginas 302-303 del texto básico.

Trace la gráfica de $r(x) = \frac{x^2-4}{2x^2+2x}$, e indique el dominio y el rango.

1. Factorizamos

$$r(x) = \frac{x^2 - 4}{2x^2 + 2x}$$

$$y = \frac{(x+2)(x-2)}{2x(x+1)}$$

2. Puntos de intersección

Intersección con el eje x

$x + 2 = 0 \qquad x - 2 = 0$

$x = -2 \qquad x = 2$

Intersección con el eje y

$$r(x) = \frac{x^2-4}{2x^2+2x}$$

$$y = \frac{0-4}{2(0)(0+1)}$$

$$y = \frac{4}{0}$$

$$y = \textit{no está definido}$$

3. Asíntota vertical

$2x(x+1) = 0$

$2x = 0 \qquad x + 1 = 0$

$x = 0 \qquad x = -1$

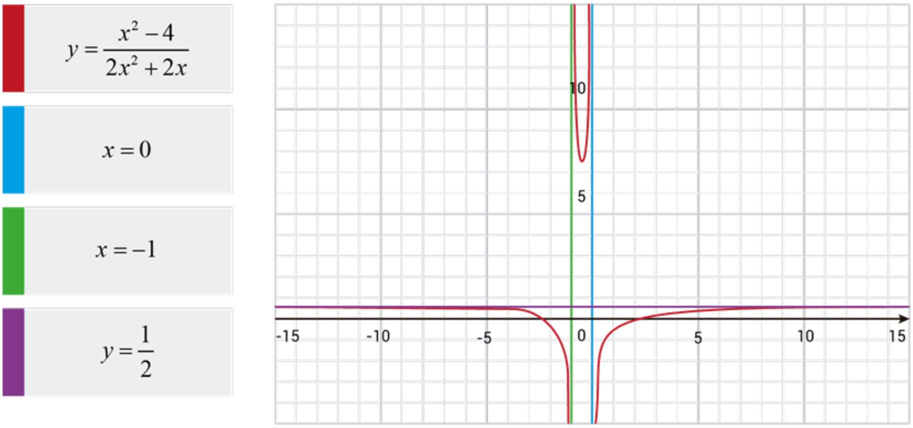
Cuando $x \rightarrow$	-1^-	-1^+	0^-	0^+
El signo de $y = \frac{(x+2)(x-2)}{2x(x+1)}$ es:	$\frac{(+)(-)}{(-)(-)}$	$\frac{(+)(-)}{(-)(+)}$	$\frac{(+)(-)}{(-)(+)}$	$\frac{(+)(-)}{(+)(+)}$
Entonces $y \rightarrow$	$-\infty$	∞	∞	$-\infty$

4. Asíntota horizontal

Como el grado de los exponentes del numerador y denominador son iguales entonces: $\frac{\textit{coeficiente principal del numerador}}{\textit{coeficiente principal del denominador}} = \frac{1}{2}$, por lo tanto, la asíntota horizontal es la recta $y = \frac{1}{2}$

Índice
Primer bimestre
Segundo bimestre
Solucionario
Referencias bibliográficas

5. Gráfica de la función



El dominio es $\left\{\frac{x}{x} \neq -1, x \neq 0\right\}$

El rango es $\left\{y/y < \frac{1}{2} \; o \; y > 7.5\right\}$

4.3.5. ¿Cómo se determinan las asíntotas inclinadas y comportamiento final?

En la página 305 del texto básico encontramos cómo determinar asíntotas inclinadas, así:

Si, $r(x) = \frac{P(x)}{Q(x)}$ es una función racional en la que el grado del numerador es uno más que el grado del numerador, podemos usar el algoritmo de división para expresar la función en la forma:

$$r(x) = ax + b + \frac{P(x)}{Q(x)}$$

Donde el grado de P es menor que el grado de **Q** y $a \neq 0$.

Índice
Primer bimestre
Segundo bimestre
Solucionario
Referencias bibliográficas

Esto significa que, cuando $x \to \pm\infty$, $\frac{P(x)}{Q(x)} \to 0$, de modo que para valores grandes de $|x|$ la gráfica de $y = r(x)$ se aproxima a la gráfica de $y = ax + b$, la cual es una asíntota inclinada o una asíntota oblicua.

Analicemos el ejemplo 9 página 305 texto básico.

Tracemos la gráfica de la función racional $r(x) = \frac{x^2-4x-5}{x-3}$

1. Factorizamos

$$r(x) = \frac{x^2 - 4x - 5}{x - 3}$$

$$r(x) = \frac{(x+1)(x-5)}{x-3}$$

2. Puntos de intersección

Intersección con el eje x

$$(x+1)(x-5) = 0$$

$$x + 1 = 0 \qquad x - 5 = 0$$

$$x = -1 \qquad x = 5$$

Intersección con el eje y

$$r(0) = \frac{0^2-4(0)-5}{0-3}$$

$$r(0) = \frac{5}{3}$$

3. Asíntota vertical

$$x - 3 = 0$$

$$x = 3$$

4. Asíntota horizontal

Ninguna porque el grado del numerador es mayor que el grado del denominador.

5. Asíntota inclinada

Dado que el grado del numerador es uno más que el grado del denominador, la función tiene asíntota inclinada.

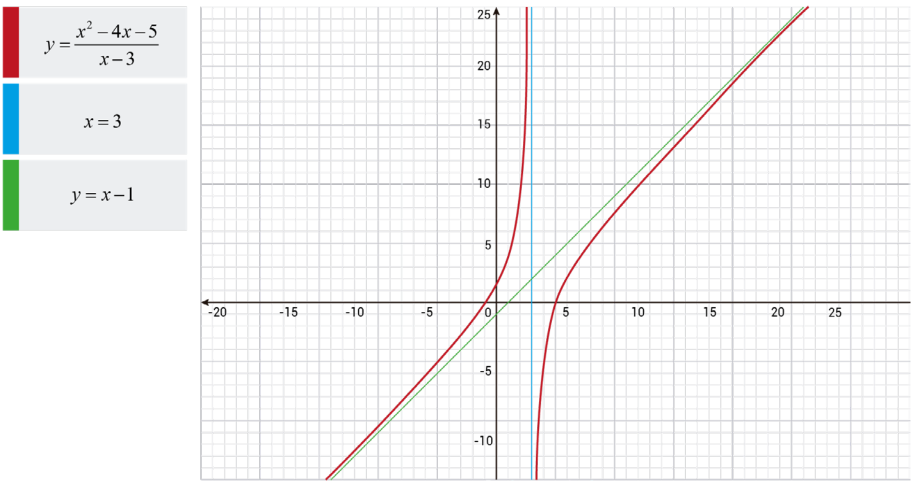
Aplicando la división larga

$$
\begin{array}{rl}
x^2 - 4x - 5 & |\ x - 3 \\
-x^2 + 3x \quad\quad & \quad x - 1 \\
0 \ - x \ \ - 5 & \\
+x - 3 & \\
-8 &
\end{array}
$$

$$r(x) = x - 1 - \frac{8}{x} - 3$$

La asíntota inclinada es $\boldsymbol{y = x - 1}$

Gráfica de la función



Recursos de aprendizaje

Para comprender de mejor manera este apartado le invito a que lea y resuelva las actividades propuestas en las páginas 295-307 del texto básico. Habilite los hipervínculos y mire atentamente los videos de

- Julioprofe, (2016). Dominio y rango de una función racional 10
- Matemovil, (2017). Asíntotas de una función: Verticales, horizontales y oblicuas.

Retroalimentación

La información que se encuentra en estos videos permite comprender de manera sencilla el Dominio y rango de una función racional, así como también las Asíntotas de una función: Verticales, horizontales y oblicuas.

Con esta información más la adquirida de la lectura del texto básico y la resolución de los ejercicios propuestos, está en condiciones de desarrollar la onceava actividad de aprendizaje recomendada.

Actividades de aprendizaje recomendadas

Resuelva los ejercicios propuestos del 9 al 85, páginas 307-309 del texto básico.

Estimados estudiantes:

Hasta aquí, hemos revisado lo que son funciones racionales para alcanzar a desarrollar sus habilidades, destrezas y competencias, en el dominio de las funciones polinomiales.

Le corresponde, con base de su trabajo autónomo, resolver ejercicios y problemas, con lo cual tendrá los conocimientos indispensables para enfrentar el proceso de enseñanza-aprendizaje de la matemática.

Por ello, le invito a desarrollar la onceava actividad.

Actividad de aprendizaje calificada 11

En su diario de notas resuelva los ejercicios y problemas.

Para calificación debe presentar resueltos los:

- Problemas del 87 al 92 de la página 310 del texto básico. (5 problemas)

Estimados estudiantes:

Muy bien, continuemos nuestros estudios, ahora analicemos el último tema. ¿Cuáles son desigualdades polinomiales y desigualdades de funciones racionales?

4.4. Desigualdades polinomiales y racionales

4.4.1. ¿Cómo graficamos desigualdades de polinomios?

En la página 311 del texto básico encontramos cómo se grafican desigualdades de polinomios, se dice:

Que una consecuencia importante del teorema del valor intermedio es que los valores de una función P no cambian de signo entre ceros sucesivos. En otras palabras, los valores de entre ceros sucesivos son todos positivos o todos negativos.

Gráficamente, esto significa que entre los puntos de intersección X , la gráfica de P está totalmente arriba o abajo del eje X , esta propiedad de polinomios que nos permiten resolver desigualdades de polinomios como $P(x) \geq 0$, al encontrar los ceros del polinomio y utilizar los puntos de prueba entre ceros sucesivos para determinar los intervalos que satisfacen la desigualdad.

Para ello, siga los pasos:

1. Pasar todos los términos a un lado.
2. Factorizar el polinomio.
3. Encontrar los intervalos.
4. Hacer una tabla o diagrama.
5. Resolver

Analicemos el ejemplo 2 de la página 312 del texto básico.

Resolvamos la desigualdad $3x^4 - x^2 - 4 < 2x^3 + 12x$

1. Pasar todos los términos a un lado.

$$3x^4 - x^2 - 4 < 2x^3 + 12x$$
$$3x^4 - 2x^3 - x^2 - 12x - 4 < 0$$

2. Factoricemos el polinomio.

$$3x^4 - 2x^3 - x^2 - 12x - 4 < 0$$
$$(x-2)(3x+1)(x^2+x+2) < 0$$

3. Encontremos los intervalos.

$$(x-2)(3x+1)(x^2+x+2) = 0$$

$x - 2 = 0$ $\quad$ $3x + 1 = 0$ $\quad$ $x^2 + x + 2 = 0$

$x = 2$ $\quad$ $x = -\frac{1}{3}$ No tiene ceros reales

Los intervalos determinados por los ceros del polinomio son:

$$\left(-\infty,-\frac{1}{3}\right),\ \left(-\frac{1}{3},2\right),\ (2,\infty)$$

4. Hagamos una tabla o diagrama.

		-1/3	2
Signo de x-2	-	-	+
Signo de 3x + 1	-	+	+
Signo de x2 + x + 2	+	+	+
Signo de $(x-2)(3x+1)(x^2+x+2)$	+	-	+

5. Resolvamos

En el diagrama vemos que la desigualdad se cumple en el intervalo $\left(-\frac{1}{3},2\right)$

4.4.2. ¿Cómo graficamos desigualdades de funciones racionales?

En la página 313 del texto básico encontramos cómo se grafican desigualdades de funciones racionales, se dice:

A diferencia de las funciones polinomiales, las funciones racionales no son necesariamente continuas.

Las asíntotas verticales de una función racional dividen la gráfica en diferentes “ramas”. Por tanto, los intervalos en los cuales no cambia están determinados por las asíntotas verticales, así como por los ceros. Esta es la razón de la siguiente definición:

“Si $r(x) = \frac{P(x)}{Q(x)}$ es una función racional, los puntos de corte de r son los valores de X para los cuales se satisface ya sea P (X) =0 o Q(X) = 0. (Stewart, Redlin, y Watson, 2017, p. 302)

En otras palabras, los puntos de corte de r son los ceros del numerador y los ceros del denominador.

Para resolver una desigualdad racional como r (x)> 0 utilizamos los puntos de prueba entre los sucesivos puntos de corte para determinar los intervalos que satisfacen la desigualdad. Sigamos los siguientes pasos:

1. Pasar todos los términos a un lado.
2. Factorizar el numerador y el denominador.
3. Encontrar los intervalos.
4. Hacer una tabla o diagrama.
5. Resolver

Analicemos el ejemplo 4 de la página 314 del texto básico.

Resolvamos la desigualdad

$$\frac{(2-x)(2+x)}{(x-3)(x+1)} \geq 0$$

Factorizar el numerador y el denominador

Al factorizar el numerador y denominador obtenemos los ceros del numerador 2 y -2 y los ceros del denominador -1 y 3, entonces los puntos de corte son -2, -1, 2 y 3

Encontrar los intervalos.

Los intervalos determinados por los puntos de corte son:

(- ∞, -2), (-2, -1), (-1, 2), (2, 3), (3, ∞)

1. Hacer una tabla o diagrama.

		-2		-1		2		3	
Signo de $2 - x$	+		+		+		-		-
Signo de $2 + x$	-		+		+		+		+
Signo de $x - 3$	-		-		-		-		+
Signo de $x + 1$	-		-		+		+		+
Signo de $\frac{(2-x)(2+x)}{(x-3)(x+1)}$	-		+		-		-		-

2. Resolver

En el diagrama vemos que la desigualdad se cumple en los intervalos $(-2,-1)\ y\ (2,3)$.

Al verificar los puntos finales vemos que -2 y 2 satisfacen también la desigualdad, por lo que la solución es $[-2,-1] \cup [2,3]$

Estimados estudiantes

Hemos concluido la cuarta unidad.

Autoevaluemos nuestros conocimientos logrados hasta aquí.

Desarrolle la Autoevaluación 4

Estimados estudiantes:

Los felicito por el cumplimiento de las actividades de aprendizaje recomendadas, espero que hayan obtenido buenos resultados.

Es momento de participar en la segunda actividad de aprendizajes evaluada.

Índice
Primer bimestre
Segundo bimestre
Solucionario
Referencias bibliográficas

Autoevaluación 4

Estimados estudiantes lean comprensivamente, razonen, resuelvan y seleccione la respuesta correcta.

1. Dados los polinomios $P(x) = 2x^2 - 5x - 7, \quad D(x) = x - 2$ ¿Cuál es la división correcta?

a.
$$\begin{array}{l|l}
2x^2 - 5x - 7 & \underline{x - 2} \\
\underline{-2x^2 + 4x \quad} & 2x - 1 \\
0 \quad -x - 7 & \\
\underline{\qquad +x - 2} & \\
\qquad 0 - 9 &
\end{array}$$

b.
$$\begin{array}{l|l}
2x^2 - 5x - 7 & \underline{x - 2} \\
\underline{-2x^2 + 4x \quad} & 2x - 9 \\
0 \quad -9x - 7 & \\
\underline{\qquad +x - 2} & \\
\qquad 0 - 9 &
\end{array}$$

c.
$$\begin{array}{l|l}
2x^2 - 5x - 7 & \underline{x - 2} \\
\underline{-2x^2 + 4x \quad} & 2x - 1 \\
0 \quad -x - 7 & \\
\underline{\qquad +x - 7} & \\
\qquad 0 &
\end{array}$$

2. Dados los polinomios

$P(x) = 3x^3 + 9x^2 - 5x - 1, \quad D(x) = x + 4$ ¿Cuál es la división correcta?

a.

$$\begin{array}{l|l} 3x^3 + 9x^2 - 5x - 1 & \underline{x+4} \\ \underline{-3x^3 - 12x^2} & 3x^2 - 3x + 7 \\ 0 - 3x^2 - 5x - 1 & \\ \underline{+3x^2 + 12x} & \\ 0 \quad +7x - 1 & \\ \underline{-7x - 28} & \\ 0 - 29 & \end{array}$$

b.

$$\begin{array}{l|l} 3x^3 + 9x^2 - 5x - 1 & \underline{x+4} \\ \underline{-3x^3 - 12x^2} & 3x^2 - 3x + 7 \\ 0 - 3x^2 - 5x - 1 & \\ \underline{+3x^2 + 12x} & \\ 0 \quad +7x - 1 & \\ \underline{-7x + 1} & \\ 0 & \end{array}$$

c.

$$\begin{array}{l|l} 3x^3 + 9x^2 - 5x - 1 & \underline{x+4} \\ \underline{-3x^3 - 12x^2} & 3x^2 - 3x + 1 \\ 0 - 3x^2 - 5x - 1 & \\ \underline{+3x^2 + 12x} & \\ 0 \quad +7x - 1 & \\ \underline{-7x + 1} & \\ 0 & \end{array}$$

3. Dados los polinomios
$P(x) = 2x^4 - x^3 + 9x^2, \quad D(x) = x^2 + 4$ ¿Cuál es la división correcta?

$$
\begin{array}{l|l}
2x^4 - x^3 + 9x^2 & \underline{x^2 + 4} \\
\underline{-2x^4 \ldots\ldots\ldots - 8x^2} & 2x^2 + 1 \\
0 \quad -x^3 + x^2 & \\
\underline{\quad +x^3 \ldots\ldots\ldots} & \\
\quad 0 + x^2 & \\
\underline{\quad -x^2 + 4} & \\
\quad 0 \quad +4 &
\end{array}
$$

a.

$$
\begin{array}{l|l}
2x^4 - x^3 + 9x^2 & \underline{x^2 + 4} \\
\underline{-2x^4 \ldots\ldots\ldots - 8x^2} & 2x^2 - x \\
0 \quad -x^3 + x^2 & \\
\underline{\quad +x^3 \ldots\ldots\ldots} & \\
\quad 0 + x^2 & \\
\underline{\quad -x^2} & \\
\quad 0 &
\end{array}
$$

b.

$$
\begin{array}{l|l}
2x^4 - x^3 + 9x^2 & \underline{x^2 + 4} \\
\underline{-2x^4 \ldots\ldots\ldots - 8x^2} & 2x^2 - x + 1 \\
0 \quad -x^3 + x^2 & \\
\underline{\quad +x^3 \ldots\ldots + 4x} & \\
\quad 0 + x^2 + 4x & \\
\underline{\quad -x^2 \ldots\ldots\ldots - 4} & \\
\quad 0 \quad +4x - 4 &
\end{array}
$$

c.

4. Dados los polinomios $P(x) = -x^3 - 2x + 6, \quad D(x) = x + 1$
¿Cuál es la división correcta?

a.
$$\begin{array}{r|rrrr} -1 & -1 & 0 & -2 & +6 \\ & & -1 & +1 & +1 \\ \hline & 1 & -1 & -1 & +7 \end{array}$$

b.
$$\begin{array}{r|rrrr} -1 & -1 & 0 & -2 & +6 \\ & & -1 & +1 & -6 \\ \hline & 1 & -1 & -1 & 0 \end{array}$$

c.
$$\begin{array}{r|rrrr} -1 & -1 & 0 & -2 & +6 \\ & & -1 & +1 & +1 \\ \hline & 1 & -1 & -3 & +7 \end{array}$$

5. Dados los polinomios $P(x) = x^4 + 2x^3 - 10x, D(x) = x - 3$
¿Cuál es la división correcta?

a.
$$\begin{array}{r|rrrr} -3 & 1 & 2 & 0 & -10 \\ & & -3 & 15 & 45 \\ \hline & 1 & -1 & 15 & 35 \end{array}$$

b.
$$\begin{array}{r|rrrr} 3 & 1 & 2 & 0 & -10 \\ & & 3 & 15 & 45 \\ \hline & 1 & 5 & 15 & 35 \end{array}$$

c.
$$\begin{array}{r|rrrr} 3 & 1 & 2 & 0 & -10 \\ & & 3 & 15 & 10 \\ \hline & 1 & 5 & 15 & 0 \end{array}$$

6. El cociente y el residuo de $\frac{x^2-3x+7}{x-2}$, es:

a. Cociente $x-1$, residuo 5
b. Cociente $x+1$, residuo 2
c. Cociente $x-1$, residuo 0

7. El cociente y el residuo de $\frac{-x^2+x-4}{x+1}$ es:

a. Cociente $x+2$, residuo 0
b. Cociente $x-1$, residuo -2
c. Cociente $-x+2$, residuo -6

8. Los posibles ceros racionales del polinomio $P(x)=x^3-4x^2+3$ son:

a. $\pm1,\ \pm2,\ \pm3$
b. $\pm1,\ \pm2, \pm4$
c. $\pm1,\ \pm3, \pm5$

9. Los posibles ceros racionales del polinomio $P(x)=x^4-3x^3-6x+8$, son:

a. ±1, ±2, ±3
b. ±1, ±3, ±4,
c. ±1, ±2, ±4, ±8

10. El dominio de la función $P(x)=\frac{1}{x-1}$, es

a. $\{x/x\neq1\}$
b. $\{x/x\neq2\}$
c. $\{x/x\neq-1\}$

11. El rango de la función $P(x) = \frac{1}{x-1}$, es

a. $\{x/x \neq 0\}$
b. $\{x/x \neq 1\}$
c. $\{x/x \neq 2\}$

12. Las asíntotas de la función $P(x) = \frac{3x^2-12x+13}{x^2-4x+4}$ son

a. Asíntota vertical $x = 1$ asíntota horizontal $y = 2$
b. Asíntota vertical $x = 3$ asíntota horizontal $y = 1$
c. Asíntota vertical $x = 2$ asíntota horizontal $y = 3$

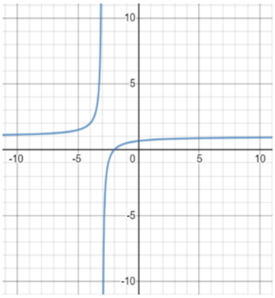
13. Las asíntotas de la función $P(x) = \frac{4x-8}{(x-4)(x+1)}$son

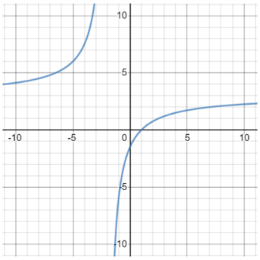
a. Asíntota vertical $x = -1$ y 4 asíntotas horizontales $y = 0$
b. Asíntota vertical $x = -1$ y 0 asíntotas horizontales $y = 0$
c. Asíntota vertical $x = -1$ y 1 asíntotas horizontales $y = 1$

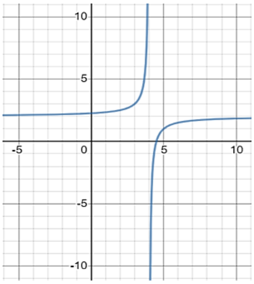
14. Las intersecciones de la función $P(x) = \frac{x^2+4x-5}{x^2+x-2}$, son

a. Con el eje x, $(5,\ 0)$ y con el eje y, $\left(0,\ \frac{2}{5}\right)$
b. Con el eje x, $(-5,\ 0)$ y con el eje y, $\left(0,\ \frac{5}{2}\right)$
c. Con el eje x, $(0,\ 5)$ y con el eje y, $(0,\ 2)$

15. La gráfica de la función $r(x) = \frac{2x-9}{x+4}$ es

a. 

b. 

c. 

16. La solución de la desigualdad $(x-3)(x+5)(2x+5) < 0$, está:

a. $(-\infty, -5) \cup \left(-\frac{5}{2}, 3\right)$

b. $[-\infty, 0] \cup \left[-\frac{5}{2}, \infty\right]$

c. $[-\infty, 3] \cup [3, \infty]$

17. La solución de la desigualdad $\frac{x-1}{x-10} < 0$, está

a. $(10, \infty)$
b. $(1, 10)$
c. $[-\infty, 0]$

18. La solución de la desigualdad $\frac{6}{x-1} - \frac{6}{x} \geq 0$, está

a. $[-\infty, 0] \cup [1, \infty]$
b. $(-\infty,\ 0) \cup (-1,\ \infty)$
c. $[-\infty, 0] \cup [0, \infty]$

19. El dominio de la función $f(x) = \sqrt{6 + x - x^2}$, es

a. $[2,3]$
b. $[-2,3]$
c. $[-2,2]$

20. El dominio de la función $f(x) = \sqrt{\frac{5+x}{5-x}}$, es

a. $[-5,\ 5]$
b. $[-5,\ 5[$
c. $[-2,2]$

Ir al solucionario

Índice
Primer bimestre
Segundo bimestre
Solucionario
Referencias bibliográficas

Semana 15

Muy bien, hemos concluido el segundo bimestre.

¡Revise su diario de notas, actividades desarrolladas, autoevaluaciones, prepárese con responsabilidad y demuestre en la evaluación sus habilidades, destrezas y competencias, alcanzadas en el dominio de las matemáticas!

Actividades finales del bimestre

Actividad 1. Recupere las actividades 6, 7, 8, 9, 10 y 11 desarrolladas durante el segundo bimestre.

Actividad 2. Revise que estén correctamente desarrollados

Actividad 3. Organice un documento que contenga dicha información cuidando la presentación; si lo hizo a mano, puede fotografiar y organizar un documento en PDF.

Actividad 4. Suba el archivo del documento al EVA para calificación.

Estimados estudiantes:

Esta actividad debe cumplir, únicamente, aquel estudiante que no participó de la actividad síncrona.

Lo estás haciendo muy bien ¡Sigue adelante!

Recuerde que: A través del chat de tutoría y consultas puede aclarar sus dudas e inquietudes con su docente.

Semana 16

Actividad 1. Revise su diario de notas, actividades desarrolladas, autoevaluaciones y estudie todos los contenidos del segundo bimestre.

Actividad 2. Participe de la evaluación presencial.

4. Solucionario

Autoevaluación 1		
Pregunta	**Respuesta**	**Retroalimentación**
1	b	Al sustituir 3 en la variable x tenemos $x^2 - 6$ $(3)^2 - 6$ - 3 Revise las páginas 150-152 del texto básico
2	b	Al sustituir 3 en la variable x tenemos 2x - 3 2 (5) - 3 -7 Revise las páginas 150-152 del texto básico
3	a	Al sustituir (x + 2)en la variable x tenemos $x^2 + 1$ $(x + 2)^2 + 1$ $x^2 + 4x + 4 + 1$ $= x^2 + 4x + 5$ Revise las páginas 150-152 del texto básico
4	b	La función está dada por una expresión algebraica y el dominio no está especificado explícitamente, entonces por convención el dominio de la función es el conjunto de todos los números reales $\mathbb{R}$ Revise la página 153 del texto básico
5	b	La función está dada por una expresión algebraica y el dominio no está especificado explícitamente, entonces por convención el dominio de la función es el conjunto de todos los números reales $\mathbb{R}$.

Autoevaluación 1		
Pregunta	**Respuesta**	**Retroalimentación**
6	c	La función f no está definida en x - 3, de modo que su dominio es $\{x/x \neq 4\}$ Revise la página 153 del texto básico
7	b	Al factorizar e igual a cero el denominador encontramos que la función f no está definida en x - 3, y x - 2 de modo que su dominio es $\{x/x \neq -3, x \neq 2\}$ Revise la página 153 del texto básico
8	c	Utilice la calculadora gráficadora y verifique. Revise la página 161 del texto básico
9	c	Utilice la calculadora gráficadora y verifique. Revise la página 161 del texto básico
10	b	Porque la recta vertical cruza más de una vez la gráfica Revise la página 164 del texto básico
11	c	No es función porque no se puede despejar y en términos de x Revise el literal b del ejemplo 9 de la página 165 del texto básico.
12	c	Si trazamos una línea desde el -1 verificamos que se corta en el punto -3. Revise la página 170 del texto básico.
13	b	Observamos la gráfica y verificamos que inicia en -2 y termina +2 Revise la página 170 del texto básico.
14	b	Observamos la gráfica en el eje y, verificamos que inicia 0 en 0 y termina -4 Revise la página 170 del texto básico.
15	c	Observamos la gráfica y verificamos que el punto (-1, 2) es el máximo local. Revise la página 175-177 del texto básico.
16	b	Observamos la gráfica y verificamos que el punto (1,-2) es el mínimo local. Revise la página 175-177 del texto básico.
17	b	Observamos la gráfica y verificamos que en el intervalo $\{-2 < x < 0\}$ es decreciente Revise la página 173-174 del texto básico.

Autoevaluación 1		
Pregunta	**Respuesta**	**Retroalimentación**
18	a	Observamos la gráfica y verificamos que en el intervalo $\{0 < x < 1\}$ es creciente. Revise la página 173-174 del texto básico.
19	c	Para la función lineal f (x) = 2x - 6 la pendiente es 2. Revise la página 192 del texto básico
20	a	Para la función lineal f (x) = 2x - 6 la intersección con el eje y es -6. Revise la página 192 del texto básico.

Ir a la autoevaluación

Índice

Primer bimestre

Segundo bimestre

Solucionario

Referencias bibliográficas

Autoevaluación 2		
Pregunta	**Respuesta**	**Retroalimentación**
1	c	Utilizando la calculadora gráficadora verificamos que se desplaza verticalmente hacia abajo. Revise las páginas 198-200 del texto básico.
2	b	Utilizando la calculadora gráficadora verificamos que se desplaza horizontalmente hacia la derecha. Revise las páginas 198-200 del texto básico.
3	a	Utilizando la calculadora gráficadora verificamos que se desplaza verticalmente hacia arriba. Revise las páginas 198-200 del texto básico.
4	a	Utilizando la calculadora gráficadora verificamos que las funciones $f(x) = x^3$, $f(x) = -x^3$ son reflejo Revise las páginas 200-201 del texto básico.
5	b	Utilizando la calculadora gráficadora verificamos que existe un estiramiento vertical Revise las páginas 202-203 del texto básico.
6	c	Utilizando la calculadora gráficadora verificamos que existe una reducción vertical. Revise las páginas 202-203 del texto básico.
7	b	Utilizando la calculadora gráficadora verificamos que existe una reducción horizontal. Revise las páginas 202-203 del texto básico.
8	a	Utilizando la calculadora gráficadora verificamos que existe un estiramiento horizontal. Revise las páginas 202-203 del texto básico
9	b	Se verifica al sumar las funciones. Revise las páginas 210-211 del texto básico.
10	c	Se verifica al restar las funciones. Revise las páginas 210-211 del texto básico
11	b	Se verifica al multiplicar las funciones. Revise las páginas 210-211 del texto básico.
12	b	Se verifica al dividir las funciones. Revise las páginas 210-211 del texto básico.
13	a	Se verifica al encontrar la composición funciones. Revise las páginas 212-214 del texto básico.
14	c	Se verifica al encontrar la composición funciones. Revise las páginas 212-214 del texto básico.

Autoevaluación 2		
Pregunta	**Respuesta**	**Retroalimentación**
15	a	Se verifica al encontrar la composición funciones. Revise las páginas 212-214 del texto básico
16	b	Se verifica al encontrar la inversa de la función. Revise la páginas 220-223 del texto básico.
17	c	Se verifica al encontrar la inversa de la función. Revise las páginas 220-223 del texto básico.
18	b	Verificamos utilizando la calculadora gráficadora
19	a	Se verifica al encontrar la composición funciones. Revise las páginas 212-214 del texto básico
20	a	Se verifica al encontrar la composición funciones. Revise las páginas 212-214 del texto básico

Ir a la autoevaluación

Índice
Primer bimestre
Segundo bimestre
Solucionario
Referencias bibliográficas

Autoevaluación 3		
Pregunta	**Respuesta**	**Retroalimentación**
1	b	Se verifica al realizar el proceso de convertir a la forma estándar una función cuadrática 1. Factorizamos 2. Completamos el cuadrado 3. Factorizamos y simplificamos. Revise las páginas 246-247 del texto básico.
2	c	Se verifica utilizando la calculadora gráficadora. Revise las páginas 246-247 del texto básico.
3	a	Se verifica utilizando la calculadora gráficadora. Revise las páginas 246-247 del texto básico.
4	b	Se verifica al realizar el proceso de convertir a la forma estándar una función cuadrática 1. Factorizamos 2. Completamos el cuadrado 3. Factorizamos y simplificamos. Revise las páginas 246-247 del texto básico.
5	c	Se verifica utilizando la calculadora gráficadora. Revise las páginas 246-247 del texto básico.
6	c	Se verifica utilizando la calculadora gráficadora. Revise las páginas 246-247 del texto básico.
7	b	Se verifica utilizando la calculadora gráficadora. Revise las páginas 247-249 del texto básico.
8	a	Se verifica utilizando la calculadora gráficadora. Revise las páginas 246-247 del texto básico.
9	c	Se verifica aplicando los principios de factorización. Revise las páginas 258-263 del texto básico.
10	c	Se verifica aplicando la factorización igualando a cero. Revise las páginas 258-263 del texto básico.
11	b	Se verifica aplicando los principios de factorización. Revise las páginas 258-263 del texto básico
12	b	Se verifica aplicando los principios de factorización e igualando a cero. Revise las páginas 258-263 del texto básico.
13	c	Se verifica utilizando la calculadora gráficadora. Revise las páginas 256-257 del texto básico.
14	a	Se verifica utilizando la calculadora gráficadora. Revise las páginas 256-257 del texto básico

Autoevaluación 3		
Pregunta	**Respuesta**	**Retroalimentación**
15	b	Se verifica utilizando la calculadora gráficadora. Revise las páginas 264-265 del texto básico
16	b	Se verifica utilizando la calculadora gráficadora. Revise las páginas 264-265 del texto básico.
17	b	Se verifica utilizando la calculadora gráficadora. Revise las páginas 264-265 del texto básico.
18	b	Se verifica utilizando la calculadora gráficadora. Revise las páginas 263 del texto básico.
19	a	Se verifica utilizando la calculadora gráficadora. Revise las páginas 258-262 del texto básico
20	c	Se verifica utilizando la calculadora gráficadora.

Ir a la autoevaluación

Índice
Primer bimestre
Segundo bimestre
Solucionario
Referencias bibliográficas

Autoevaluación 4		
Pregunta	**Respuesta**	**Retroalimentación**
1	a	Se verifica aplicando el proceso de la división larga de polinomios. Revise las páginas 269-270 del texto básico.
2	a	Se verifica aplicando el proceso de la división larga de polinomios. Revise las páginas 269-270 del texto básico.
3	c	Se verifica aplicando el proceso de la división larga de polinomios. Revise las páginas 269-270 del texto básico.
4	a	Se verifica aplicando el proceso de la división sintética de polinomios. Revise las páginas 270-271 del texto básico.
5	b	Se verifica aplicando el proceso de la división sintética de polinomios. Revise las páginas 270-271 del texto básico.
6	a	Se verifica aplicando el proceso de la división sintética de polinomios. Revise las páginas 270-271 del texto básico.
7	c	Se verifica aplicando el proceso de la división sintética de polinomios. Revise las páginas 270-271 del texto básico.
8	a	Se verifica aplicando el teorema del factor. Revise las páginas 272-273 del texto básico.
9	c	Se verifica aplicando el proceso del teorema del factor. Revise las páginas 272-273 del texto básico.
10	a	La función f no está definida en x - 1, de modo que su dominio es $\{x/x \neq 1\}$ Revise la página 153 del texto básico.
11	a	Utilizando la gráfica se verifica Revise la página 153 del texto básico.
12	c	Se verifica utilizando la calculadora gráficadora. Revise las páginas 298-300 del texto básico.
13	a	Se verifica con la gráfica, utilizando la calculadora gráficadora. Revise las páginas 298-300 del texto básico.

Autoevaluación 4		
Pregunta	**Respuesta**	**Retroalimentación**
14	b	Se verifica con la gráfica utilizando la calculadora gráficadora. Revise las páginas 298-300 del texto básico.
15	c	Se verifica con la gráfica utilizando la calculadora gráficadora
16	a	Se verifica con la gráfica utilizando la calculadora gráficadora
17	b	Se verifica al factorizar, encontrar los puntos de corte, encontramos los intervalos, creamos el diagrama de signos y resolvemos. Revise las páginas 313-315 del texto básico.
18	b	Se verifica al factorizar, encontrar los puntos de corte, encontramos los intervalos, creamos el diagrama de signos y resolvemos. Revise las páginas 313-315 del texto básico.
19	b	Se verifica con la gráfica utilizando la calculadora gráficador
20	b	Se verifica con la gráfica utilizando la calculadora gráficador

Ir a la autoevaluación

5. Referencias bibliográficas

Academatica, (2012, diciembre 15). Video. *Funciones polinomiales-Comportamiento en el infinito.* https://www.youtube.com/watch?v=cvL5w3lJXoU

Aguilar, E. (2017, octubre 19). Video. *Método de Pólya al resolver problemas de funciones cuadráticas*. https://www.youtube.com/watch?v=aS4FzEeOHIl

Asesorías de mate, (2018, agosto 19). Video. *¿Cómo saber si una gráfica es función o no? | Criterio de la línea vertical.* https://www.youtube.com/watch?v=0CvNjR52Zqw

Avirmat uprm, (2016, mayo 10). Video. *Teorema de los ceros racionales.* https://www.youtube.com/watch?v=BliAFCqtXYs

Blade, T., Fenson, J., Forres, J. y Waldman P, (2015). *Estudios matemáticos. Nivel medio*. Oxford University.

Chacel, R. (s.f.). *George Polya: estrategias para la solución de problemas.* http://ficus.pntic.mec.es/fheb0005/Hojas_varias/Material_de_apoyo/Estrategias%20de%20Polya.pdf

ElshowelNerd, (2016, noviembre 24). Video. *División larga de polinomios.* https://www.youtube.com/watch?v=NErpo9AZXiU

Facultad de Matemáticas UC, (2016, abril 5). Video. *Explicación de las funciones 1 a 1 y sus inversas.* https://www.youtube.com/watch?v=jFq8Z3a4dKM

Fernández, D. (2014, noviembre 23). Video. *Modelación de funciones cuadráticas.* https://www.youtube.com/watch?v=mFICOLOHHnQ

Guzmán, M. (2010, mayo 2). Video. *Estiramiento y comprensión horizontal de funciones.* https://www.youtube.com/watch?v=xA0CC4boZag

Julioprofe, (2016, febrero 16). Video. *Gráfica, dominio y rango de una función racional.* https://www.youtube.com/watch?v=NADZ1qa_zRw

KhanAcademyEspañol, (2015, julio 19). Video. *Modelos lineales. Ejemplo 1*. https://www.youtube.com/watch?v=I8UaSRGI7OA

KhanAcademyEspañol, (2014, mayo 11). Video. *Teorema fundamental del álgebra.* https://www.youtube.com/watch?v=o5Lx_1U2d0k

LOGOS ACADEMY. (2015, julio 24). Video. *Reflexión de una función con respecto a los ejes.*https://www.youtube.com/watch?v=hV2chRfQG8w

Matemáticas profe Alex, (2018, abril 10). Video. *Que es función.* https://www.youtube.com/watch?v=LI7xfe3HoZE

Matemáticas Profe Alex, (2018, mayo 29). Video. *Gráfica de la función lineal | Ejemplo 1.* https://www.youtube.com/watch?v=AoZpzAoC1Qg

Matemáticas Al poder, (2016, enero 26). Video. *Transformación de funciones / desplazamientos.* https://www.youtube.com/watch?v=_QpP8yjDVow

Matematicabasica, (2017, noviembre 23). Video. *Sistema de 2 Ecuaciones Cuadrática y Lineal - Matemática Básica.* https://www.youtube.com/watch?v=wP51YUptSY0

Matemáticas profe Alex, (2018, abril 23). Video. *Funciones pares e impares explicación gráfica*. https://www.youtube.com/watch?v=UlD9kTKo7c8

Math2me, (2017, marzo 19). Video. *Hallar el dominio y rango de una función a partir de su gráfica*. https://www.youtube.com/watch?v=2CYya8dJovg

MateFacil, (2015, octubre 14). Video. *Operaciones con funciones (suma, diferencia, producto, cociente de funciones).* https://www.youtube.com/watch?v=jP1mSfUqpxw

MateFacil. (2015, octubre 14). Video*. Composición de funciones (Método fácil) (Ejemplo 1)*. https://www.youtube.com/watch?v=Qw9GTgSv_94

Matematicatuya, (2012, marzo 11). Video. *Máximos y mínimos de funciones cuadráticas.* https://www.youtube.com/watch?v=PBRwEwqAak4

Matemovil, (2017, noviembre 29). Video. *Asíntotas de una función: Verticales, horizontales y oblicuas.* https://www.youtube.com/watch?v=fuvLZau_K5E

Math2me, (2010, agosto 22). Video. *Hallar los ceros de un polinomio. Ejercicio 1.* https://www.youtube.com/watch?v=ib-r1z_3w0g

OperaciónExitoEdu. (2011, diciembre 16). Video. *Forma canónica o estándar de una función cuadrática Operaciónexito*.com. https://www.youtube.com/watch?v=tnIUrm-sgho

Pasos por ingeniería. (2019, mayo 6). Video. *Máximos y mínimos relativos o también llamados locales.* https://www.youtube.com/watch?v=VAaBLGRsQ-c

Pasos por ingeniería, (2016, octubre 1). Video. *Regla de los signos de descartes – Parte 1/2.* https://www.youtube.com/watch?v=6lI8Z_A4DRM

Pi-ensa Matematik, (2017, junio 26). Video. *Transformación de funciones: alargamientos y contracciones verticales*. https://www.youtube.com/watch?v=tksrQE8N19E

Sebastián, R. (2014, marzo 29). Video. *Funciones: Creciente y decreciente.* https://www.youtube.com/watch?v=6w9EX2nTT8Y

Stewart J., Redlin L. y Watson S. (2017). Precálculo. Matemáticas para el cálculo. Séptima edición. Cengage Learning. México. D.F.

Tabara, J. (2013, diciembre 13). Video. *Desmos y Matemáticas. Inecuaciones y más funciones*. https://www.youtube.com/watch?v=7FS9nAz11mE

Tabares, R. (2014, mayo 10). Video. *División sintética*. https://www.youtube.com/watch?v=JSLoUggC19Y