UTPL

La Universidad Católica de Loja

Modalidad Abierta y a Distancia

Análisis Matemático Multivariado

Guía didáctica

Índice
Primer bimestre
Segundo bimestre
Solucionario
Glosario
Referencias bibliográficas

UTPL

Departamento de Química y Ciencias

Sección departamental de Fisicoquímica y Matemáticas

Análisis Matemático Multivariado

Guía didáctica

Autora:

Andrade Pazmiño Elsa Geovany

MATE_2029

Asesoría virtual
www.utpl.edu.ec

Análisis Matemático Multivariado
Guía didáctica
Andrade Pazmiño Elsa Geovany

Universidad Técnica Particular de Loja

Diagramación y diseño digital:
Ediloja Cía. Ltda.
Telefax: 593-7-2611418.
San Cayetano Alto s/n.
www.ediloja.com.ec
edilojainfo@ediloja.com.ec
Loja-Ecuador

ISBN digital - 978-9942-25-631-7

22 de abril, 2020

Índice

1. Datos de información

1.1. Presentación de la asignatura

1.2. Competencias genéricas de la UTPL

- Orientación a la innovación y a la planificación.
- Pensamiento crítico y reflexivo.
- Comportamiento ético.
- Organización y planificación del tiempo.

Índice
Primer bimestre
Segundo bimestre
Solucionario
Glosario
Referencias bibliográficas

1.3. Competencias específicas de la carrera

Economía

- Desarrolla el pensamiento matemático y estadístico para la aplicación y análisis de aspectos económicos.

Finanzas

- Aplica herramientas estadísticas, contables, económicas y financieras para la medición de los beneficios y riesgos a los que se enfrentan los actores del sistema económico-financiero.

Logística y transporte

- Aplica fundamentos de matemáticas, ciencia e ingeniería en el campo de la logística y transporte.
- Resuelve problemas de ingeniería en logística y transporte.
- Asume pensamiento crítico y reflexivo.

1.4. Problemática que aborda la asignatura

La asignatura es de vital importancia, ya que prepara y profesionaliza a quien la sigue con métodos científicos para que facilite a la sociedad y al sistema económico con conocimientos administrativos, contables, estadísticos y matemáticos para la toma de decisiones acertadas en la asignación de recursos que muchas veces son limitados. Su desconocimiento podría ser nefasto en el desarrollo profesional y por ende en el aporte hacia las empresas que el país requiere.

En este caso, los problemas a investigar serán los inherentes a las actividades económicas (producción, circulación, distribución y consumo): el funcionamiento del mercado y el comportamiento de los agentes económicos y la falta de planificación de opciones de desarrollo ambientalmente adecuadas y sustentables, relativos a:

- La estructura y funcionamiento de los sectores económicos.
- El funcionamiento del mercado con énfasis en las MYPIMES.
- El funcionamiento macroeconómico de la economía.

Desde la investigación, el aporte para el estudiante es conocer y comprender los métodos de intervención o actuación profesional. Para ello, el estudiante deber ser capaz de integrar todos los aprendizajes adquiridos, así como de reconocer los objetos de actuación de la profesión y abordar las acciones de investigación-intervención que exigen las problemáticas profesionales.

2. Metodología de aprendizaje

Análisis Matemático Multivariado es una asignatura importante dentro de la malla curricular de las carreras de Economía, Finanzas, Logística y Transporte, por lo que la Universidad busca los métodos y recursos necesarios para optimizar el proceso de enseñanza-aprendizaje de sus estudiantes. Es así que la Guía Didáctica se convierte en el eje central del proceso y es elaborada para encaminar y facilitar al estudiante con los contenidos de la materia, ya que le proporciona orientación a lo largo del ciclo académico en cada una de las unidades, y con actividades activas y colaborativas que le permitirán lograr un aprendizaje significativo.

Índice
Primer bimestre
Segundo bimestre
Solucionario
Glosario
Referencias bibliográficas

Las actividades se basan en la metodología centrada en el aprendizaje basado en problemas, de tal forma que al representar situaciones de la vida real, el estudiante haga uso de esta asignatura para obtener respuestas a aspectos donde intervengan situaciones con variables diferentes y pueda emitir conclusiones y criterios para una eficiente toma de decisiones.

El proceso a seguir es el siguiente:

- Familiarizarse con el sistema de aprendizaje de la universidad, el cual se encuentra distribuido de la siguiente forma:

Componentes de aprendizaje	Siglas	Porcentaje 100%
Aprendizaje en contacto con el docente	ACD	35
Aprendizaje práctico experimental	APE	30
Aprendizaje autónomo	AA	35

- Realizar una revisión minuciosa del plan docente, ya que ahí se detallan los contenidos a ser abordados tanto en primer bimestre como en el segundo; también se encuentran las actividades propuestas para lograr el aprendizaje.

- Para el estudio de esta asignatura es necesario crear un ambiente propicio que facilite el razonamiento. Es preferible estar libre de distracciones.

- Distribuir el tiempo en este sistema de estudio a distancia es clave: a cada asignatura debe entregársele un tiempo prudente para concluir con el estudio de todas las unidades. Recuerde que cada asignatura expone una actividad por semana y esta debe ser entregada para su calificación en el periodo previsto.

- Es necesario organizar sus actividades laborales y familiares de tal manera que permitan incluir la disponibilidad de por lo menos una hora diaria para el desarrollo de las tareas propuestas de esta asignatura. Debe tomar en cuenta que son 4 unidades para el primer bimestre y 3 para el segundo bimestre, y junto con la revisión del plan docente, donde se detallan las actividades a realizar, debe establecer un calendario para el estudio y desarrollo de las mismas.
- Participar de las actividades sincrónicas y asíncronas propuestas en el plan docente, en el cual constan las fechas para su realización.

Las aplicaciones de estas recomendaciones contribuirán en el proceso de aprendizaje. Recuerde que con esfuerzo y perseverancia se llega a la meta. Los tutores siempre estarán atentos a sus inquietudes en torno a esta asignatura.

3. Orientaciones didácticas por resultados de aprendizaje

Primer bimestre

Resultado de aprendizaje 1

Conoce las definiciones de funciones en varias variables y las de función vectorial

Contenidos, recursos y actividades de aprendizaje

Semana 1

Unidad 1. Funciones univariadas

1.1. Subtema

- Nociones generales
- Dominio y rango
- Tipos de funciones

1.2. Subtema

- Características de las funciones
- Propiedades

Actividades de aprendizaje recomendadas

En esta fase de adquisición del conocimiento se sugiere buscar la manera de estar en contacto con el tutor, ya que él orientará el aprendizaje de la semana sugiriendo las lecturas específicas, ejercicios y recursos hacia donde usted debe proyectarse.

Usted puede hacer uso de la tutoría en el día y hora que el docente haya planificado; puede contactarse por medio del correo electrónico o hacer uso de la mensajería que dispone la plataforma en su aula virtual.

Índice
Primer bimestre
Segundo bimestre
Solucionario
Glosario
Referencias bibliográficas

El docente tutor, mediante anuncios académicos, recordará las actividades de la semana; orientará los recursos que usted debe estudiar, y guiará el trabajo que deberá ejecutar. Recuerde que semanalmente tiene actividades y algunas de ellas tienen una calificación específica.

Para ampliar sus conocimientos se sugiere la visualización de los siguientes vídeos:

- Introducción a las funciones, Cuenca, L. (2019): recuperado en: https://www.youtube.com/watch?v=nHx4d__KSAg

Otro aspecto importante que le ayudará a adquirir las destrezas necesarias en este tema de funciones es la realización de los ejercicios que usted puede practicar en el documento de apoyo del REA 1 que contiene ejercicios propuestos.

- REA 1, CUENCA, L., FUNDAMENTOS MATEMÁTICOS, UTPL (2018)

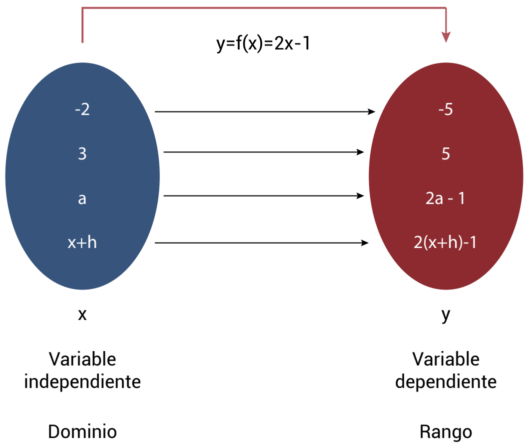


Figura 1. Dominio y rango

Usted puede ayudarse y representar las diferentes funciones utilizando el siguiente recurso interactivo que le permitirá visualizar el rango y el dominio, el cual está disponible a través de este enlace: https://www.geogebra.org/m/mddqwp72

Índice
Primer bimestre
Segundo bimestre
Solucionario
Glosario
Referencias bibliográficas

Contenidos, recursos y actividades de aprendizaje

Resultado de aprendizaje 2

Determina cuándo una función tiene límite en un punto.

Semana 2

Unidad 1. Límites de funciones univariadas

1.3. Subtema

- Límites y continuidad

1.4. Subtema

- Propiedades

Actividades de aprendizaje recomendadas

El contacto con el docente es una actividad que usted debe mantener, ya sea por mensaje o haciendo uso de las tutorías. Recuerde que él orientará su trabajo, indicará el uso de los recursos educativos y ampliará los conocimientos disipando las dudas que podrían presentarse en este tema.

No se descuide de la planificación y de acuerdo a ello organice su tiempo. Recuerde que en cada semana se recomiendan 9 horas de trabajo, distribuidas en aprendizaje en contacto con el docente, aprendizaje práctico experimental y aprendizaje autónomo.

Usted puede ampliar este tema con los videos:

- Introducción a los límites. Ayala.,(2018) Recuperado de: https://www.youtube.com/watch?v=rzKVTQAGWQw&list=PLWyONXRtuelSji_GLZ3c6CLCTUAWfv8Nj
- Recuperado de: https://www.youtube.com/watch?v=zZR7cQVYmNc&list=PLWyONXRtuelSji_GLZ3c6CLCTUAWfv8Nj&index=2
- Recuperado en: https://www.youtube.com/watch?v=M7UAJ3qdTqU&list=PLWyONXRtuelSji_GLZ3c6CLCTUAWfv8Nj&index=3

Después de haber revisado y tener la idea intuitiva se sugiere leer el Recurso educativo REA 2.

REA 2- Yépez, c, Guía didáctica de cálculo UTPL- D15307-. (2015)

Revisada la teoría del recurso educativo, amplíe sus conocimientos revisando los vídeos siguientes que tratan de los límites y sus propiedades.

- Propiedades de los límites. Ayala., (2018) Recuperado de: https://www.youtube.com/watch?v=Q6CC4brfomg&list=PLWyONXRtuelSji_GLZ3c6CLCTUAWfv8Nj&index=4

- Recuperado en: https://www.youtube.com/watch?v=8pBjb3aAsiw&list=PLWyONXRtuelSji_GLZ3c6CLCTUAWfv8Nj&index=5

Refuerce sus conocimientos realizando los siguientes ejercicios de límites propuestos.

REA 2-1-A-Prácticas-CDI-I-Calculodiferencial e integral-Selección de ejercicios-. (2019.) Enlace https://tecdigital.tec.ac.cr/revistamatematica/Libros/practicas/A-Practicas-CDI-I-2019.pdf

Contenidos, recursos y actividades de aprendizaje

Resultado de aprendizaje 3

Conoce las definiciones de funciones de varias variables y las de función vectorial.

Semana 3

Índice
Primer bimestre
Segundo bimestre
Solucionario
Glosario
Referencias bibliográficas

Unidad 2. Sistemas de coordenadas y vectores

2.1. Subtema

- Producto escalar

2.2. Subtema

- Producto vectorial

Actividades de aprendizaje recomendadas

Busque estar en contacto con el tutor. Recuerde que él orientará su aprendizaje sugiriendo las lecturas específicas, ejercicios y recursos hacia donde usted debe proyectarse. Como se trabajará en sistemas coordenados R^2 y R^3, se recomienda hacer uso de la aplicación GeoGebra.

El texto de Walter Mora que se usa como libro base, en sus capítulos 2 y 3, le ayudará con la comprensión y graficación de las curvas de nivel.

Esté pendiente de los horarios de las tutorías, así como también de los anuncios, ya que el docente tutor hará uso de este medio para informar sobre aspectos inherentes a la materia.

Recuerde que tiene semanalmente actividades que realizar y algunas de ellas tienen una calificación específica.

Puede además apoyarse en el recurso educativo REA 3

REA 3: Puchaicela, P., Guía didáctica de álgebra lineal- UTPL- (2015)

Recuperado de:

Recuerde que el **producto escalar** se determina mediante la relación:

$$|\vec{u}| = \sqrt{\vec{u}\,.\vec{u}} = \sqrt{u_1.u_1 + u_2.u_2} = \sqrt{{u_1}^2 + {u_2}^2}$$

Que permite la obtención de un número.

Ejemplo:

$$\vec{u} = (3,0) \qquad \vec{v} = (5,5)$$

$$|\vec{u}| = \sqrt{\vec{u}\,.\vec{u}} = \sqrt{3.3 + 0.0} = \sqrt{3^2 + 0^2} = 3$$

$$|\vec{v}| = \sqrt{\vec{v}\,.\vec{v}} = \sqrt{5.5 + 5.5} = \sqrt{5^2 + 5^2} = \sqrt{25 + 25} = \sqrt{50} = 5\sqrt{2}$$

Con base en estos vectores se puede encontrar el ángulo donde se utilizará la siguiente expresión analítica:

$$cos\alpha = \frac{u_1\,.v_1 + u_2.v_2}{\sqrt{{u_1}^2 + {u_2}^2}.\sqrt{{v_1}^2 + {v_2}^2}}$$

Índice
Primer bimestre
Segundo bimestre
Solucionario
Glosario
Referencias bibliográficas

$$\vec{u} = (3,0) \qquad \vec{v} = (5,5)$$

$$\cos\alpha = \frac{u_1 . v_1 + u_2 . v_2}{\sqrt{{u_1}^2 + {u_2}^2} . \sqrt{{v_1}^2 + {v_2}^2}} = \frac{3.5 + 0.5}{\sqrt{3^2 + 0^2} . \sqrt{5^2 + 5^2}} = \frac{15}{3.5\sqrt{2}} . \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

Entonces:

a= 45°

Además, con el producto punto se puede determinar la ortogonalidad de los vectores. Con base en el ejemplo dado se tiene la condición analítica que es:

$$\vec{u} . \vec{v} = 0 \; Entonces \; son \; perpendiculares.$$

$$u_1 . v_1 + u_2 . v_2 = 0$$

$$\vec{u} = (3,0) \qquad \vec{v} = (5,5)$$

$$u_1 . v_1 + u_2 . v_2 = 3.5 + 0.5 = 15 + 0 = 15 \; Entonces \; no \; son \; perpendiculares.$$

El producto vectorial da como resultado otro vector cuya dirección es perpendicular a los vectores y su sentido es igual al avance de un sacacorchos al girar de *u* a *v*.

$$|\vec{u} x \vec{v}| = |\vec{u}||\vec{v}| sen\ \alpha$$

El producto vectorial puede ser expresado en forma de determinante:

$$\vec{u}x\vec{v} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ u_1 & u_2 & u_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} u_2 & u_3 \\ v_2 & v_3 \end{vmatrix}\vec{i} - \begin{vmatrix} u_1 & u_3 \\ v_1 & v_3 \end{vmatrix}\vec{j} + \begin{vmatrix} u_1 & u_2 \\ v_1 & v_2 \end{vmatrix}\vec{k}$$

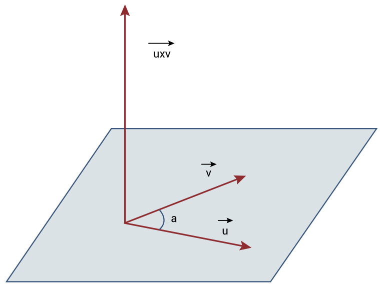


Figura 2. Producto vectorial

Ejemplo:

Calcular el producto vectorial de los vectores:

$$\vec{u} = (1,2,3) \;\; y \;\; \vec{v} = (-1,1,2)$$

$$\vec{u}x\vec{v} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & 2 & 3 \\ -1 & 1 & 2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 2 \end{vmatrix}\vec{i} - \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ -1 & 2 \end{vmatrix}\vec{j} + \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 1 \end{vmatrix}\vec{k}$$

$$= (4-3)\vec{i} - (2+3)\vec{j} + (1+2)\vec{k} = 1\vec{i} - 5\vec{j} + 3\vec{k}$$

En el siguiente ejemplo se realizará el producto vectorial entre dos vectores, además se comprobará que el vector encontrado es ortogonal a los vectores dados.

Índice
Primer bimestre
Segundo bimestre
Solucionario
Glosario
Referencias bibliográficas

$$\vec{u} = (3, -1{,}1) \ \ y \ \ \vec{v} = (1{,}1{,}1)$$

$$\vec{u}x\vec{v} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 3 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix}\vec{i} - \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix}\vec{j} + \begin{vmatrix} 3 & -1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix}\vec{k}$$

$$= (-1-1)\vec{i} - (3-1)\vec{j} + (3+1)\vec{k} = -2\vec{i} - 2\vec{j} + 4\vec{k}$$

$$(\vec{u}x\vec{v})^{\perp}\vec{u} = (-2, -2{,}4).\ (3, -1{,}1) = -6 + 2 + 4 = 0$$

$$(\vec{u}x\vec{v})^{\perp}\vec{v} = (-2, -2{,}4).\ (1{,}1{,}1) = -2 - 2 + 4 = 0$$

Entonces el producto vectorial entre $(\vec{u}x\vec{v})$ es ortogonal a los vectores $\vec{u} \ y \ \vec{v}$

Dentro de las aplicaciones se tiene el cálculo del área de un paralelogramo que se puede determinar mediante la relación:

$$A = \ |\vec{u}\ |.h = |\vec{u}||\vec{v}|sen\ \alpha = |\vec{u}x\vec{v}|$$

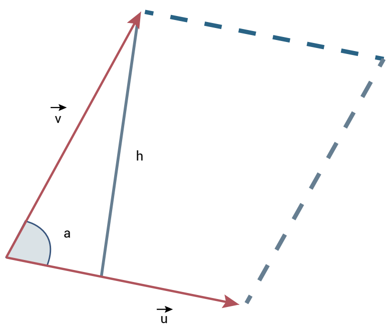


Figura 3. Producto vectorial

Ejemplo:

$$\vec{u} = (3,1,-1) \;\; y \;\; \vec{v} = (2,3,4)$$

$$\vec{u} x \vec{v} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 3 & 1 & -1 \\ 2 & 3 & 4 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} \vec{i} - \begin{vmatrix} 3 & -1 \\ 2 & 4 \end{vmatrix} \vec{j} + \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} \vec{k}$$

$$= (4+3)\vec{i} - (12+2)\vec{j} + (9-2)\vec{k} = 7\vec{i} - 14\vec{j} + 7\vec{k}$$

$$A = |\vec{u} x \vec{v}| = \sqrt{7^2 + 14^2 + 7^2} = \sqrt{294}\, u^2$$

Puede ampliar sus conocimientos visualizando el siguiente video donde se explica el significado de vectores.

Vectores. Rivera, R. (2012). Recuperado de:

UTPL VECTORES [(GESTIÓN AMBIENTAL)(FÍSICA PARA CIENCIAS BIOLÓGICAS)]

Después de la lectura del documento REA 3 y luego de haber visualizado el video, se puede reforzar el tema con los ejercicios que se encuentran en el recurso educativo REA 3-1-EJERCICIOS.

REA 3-1: Kolman, B., Álgebra lineal. - (2013).

Contenidos, recursos y actividades de aprendizaje

Resultado de aprendizaje 4	Conoce las definiciones de funciones de varias variables y las de función vectorial.

Semana 4

Unidad 3. Funciones de dos variables

3.1. Subtema

- Definiciones Generales

3.2. Subtema

- Dominio y rango

Actividades de aprendizaje recomendadas

El contacto con el docente es una actividad que debe mantener, ya sea por mensaje o haciendo uso de las tutorías. Lea las lecturas, el texto base y la guía didáctica que le sugiera el docente tutor; manténgase siempre informado de las actividades colocadas en los anuncios académicos. Recuerde las tutorías virtuales, ya que son espacios donde el docente tutor aclarará inquietudes.

Como apoyo revise los siguientes vídeos:

Análisis matemático multivariado. Ayala., (2018) Recuperado de: https://bit.ly/3miqlsr

Además, el texto base tiene los contenidos teóricos y prácticos que pueden apoyar su aprendizaje.

REA 3: Mora, W., Cálculo en varias variables. (2019).

Usted puede ayudarse y representar las diferentes funciones utilizando el siguiente recurso interactivo que le permitirá visualizar el rango y el dominio. Está disponible a través del siguiente enlace: https://www.geogebra.org/m/mddqwp72

Puede reforzar su conocimiento de graficación de funciones de varias variables apoyándose en el siguiente vídeo.

Graficación de funciones de varias variables. Ayala., (2018). Remitirse al libro de Walter Mora

Contenidos, recursos y actividades de aprendizaje

Resultado de aprendizaje 5 | Determina el tipo de funciones, sus características principales y su importancia.

Semana 5

Índice
Primer bimestre
Segundo bimestre
Solucionario
Glosario
Referencias bibliográficas

3.3. Subtema

- Curvas de nivel

Actividades de aprendizaje recomendadas

El texto de Walter Mora, en la unidad 3, le orienta sobre cómo graficar y visualizar las curvas de nivel. Además, el docente tutor guiará su aprendizaje en este tema. Recuerde: usted cuenta con el servicio de mensajes, anuncios y horarios de tutorías.

Además, para ampliar un poco más en el tema, debe saber:

Definición: El origen etimológico de curva de nivel es el análisis detallado de las dos palabras principales que le dan forma.

La primera es “curva”, palabra que se deriva del latín *curvus* y que significa “curvado”.

La segunda es “nivel”, que viene del latín *libella* y que significa “pequeña balanza”.

El término “curva de nivel” se emplea para explicar situaciones topográficas, ya que los puntos de terreno que se unen se encuentran formando una línea, y a la misma altura.

Entonces, con base en lo explicado, se podría afirmar que “una curva de nivel es la línea que une los puntos de un mapa que tienen idéntica altura”. Una curva de nivel estudia secciones representadas en un mapa o gráfico tridimensional.

Índice
Primer bimestre
Segundo bimestre
Solucionario
Glosario
Referencias bibliográficas

Página web: Aristasur

Recuperado de: aristasur.com/contenido/que-son-las-curvas-de-nivel-en-un-mapa-topografico

Matemáticamente las curvas de nivel son espacios en R^2 y R^3 definidos por

$F(x, y, z) = 0$. Geométricamente corresponden a la proyección sobre el plano xy, del corte del plano $z = c$ con la superficie S.

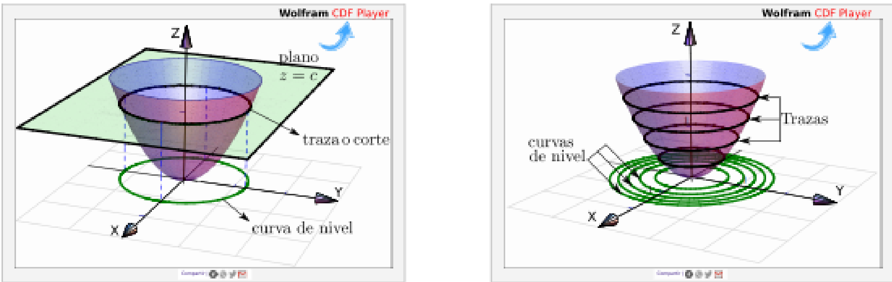


Figura 4. Curvas de nivel. Mora, W. (2019)
Gráficos tomados de: REA 3- Mora, W., Cálculo en varias variables-. (2019).

Contenidos, recursos y actividades de aprendizaje

Resultado de aprendizaje 6

Determina cuándo una función tiene límite en un punto.

Semana 6

Índice
Primer bimestre
Segundo bimestre
Solucionario
Glosario
Referencias bibliográficas

3.4. Subtema

- Límites y continuidad

Actividades de aprendizaje recomendadas

El contacto con el docente debe mantener siempre, ya sea por mensaje o haciendo uso de las tutorías. Recuerde que él orientará su trabajo, indicará el uso de los recursos educativos y ampliará los conocimientos, disipando las dudas que podrían presentarse en este tema. Además, le informará sobre actividades síncronas planificadas y calificadas.

En este tema recuerde que la continuidad se expresa como:

“Toda función de varias variables que se puede construir a partir de funciones continuas por operaciones de adición, sustracción, multiplicación, división y composición de funciones es continua allí donde está definida”. (Sydsaeter,K. 2012)

Ejemplo:

$$f_{(x,y)} = \frac{xy - 3}{x^2 + y^2 - 4}$$

Usted puede ayudarse y representar las diferentes funciones utilizando el siguiente recurso interactivo que le permitirá visualizar la función y determinar su continuidad. Este recurso está disponible a través del siguiente enlace:

https://www.geogebra.org/m/mddqwp72

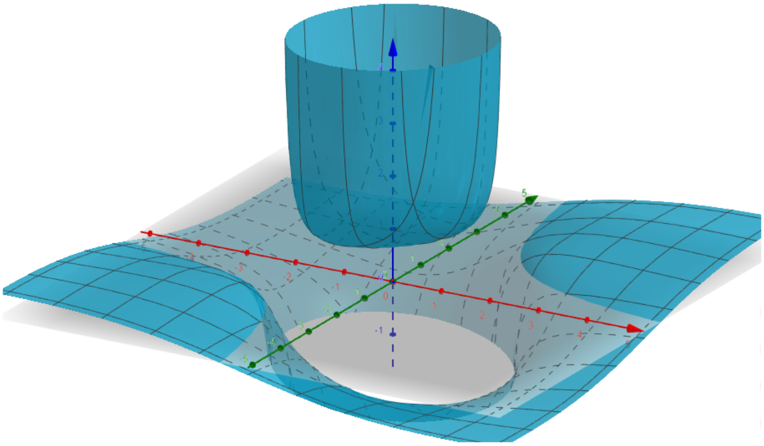


Figura 5. Limites. Andrade, E. (2020)

La función *f* está definida y es continua para todo (*x,y*) excepto para los valores de la circunferencia $x^2+y^2=4$

En el estudio de los límites la función de varias variables es mucho más compleja que en el de funciones de una sola variable, pues en este caso solo existen dos caminos para llegar al punto denominado límite y es por la izquierda y por la derecha, pero en el de funciones de varias variables existe un infinito número de caminos.

Ejemplo:

$$f(x,y) = \frac{x^4}{x^4 + 3y^4}$$

Usted puede ayudarse y representar las diferentes funciones utilizando el siguiente recurso interactivo, que le permitirá visualizar la función y determinar su límite. Este recurso está disponible a través del siguiente enlace:

https://www.geogebra.org/m/mddqwp72

Índice
Primer bimestre
Segundo bimestre
Solucionario
Glosario
Referencias bibliográficas

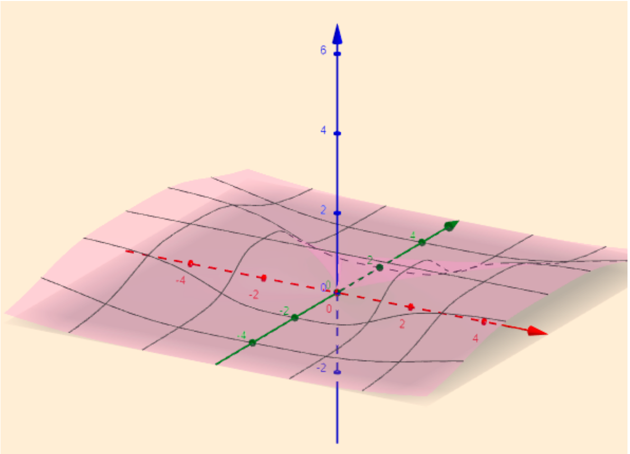


Figura 6. Problema. Andrade, E. (2020)

x/y	-1	-0.8	-0.6	-0.4	-0.2	0	0.2	0.4	0.6	0.8	1
-1	0.250	0.449	0.720	0.929	0.995	1.000	0.995	0.929	0.720	0.449	0.250
-0.8	0.120	0.250	0.513	0.842	0.988	1.000	0.988	0.842	0.513	0.250	0.120
-0.6	0.041	0.095	0.250	0.628	0.964	1.000	0.964	0.628	0.250	0.095	0.041
-0.4	0.008	0.020	0.062	0.250	0.842	1.000	0.842	0.250	0.062	0.020	0.008
-0.2	0.001	0.001	0.004	0.020	0.250	1.000	0.250	0.020	0.004	0.001	0.001
0	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000		0.000	0.000	0.000	0.000	0.000
0.2	0.001	0.001	0.004	0.020	0.250	1.000	0.250	0.020	0.004	0.001	0.001
0.4	0.008	0.020	0.062	0.250	0.842	1.000	0.842	0.250	0.062	0.020	0.008
0.6	0.041	0.095	0.250	0.628	0.964	1.000	0.964	0.628	0.250	0.095	0.041
0.8	0.120	0.250	0.513	0.842	0.988	1.000	0.988	0.842	0.513	0.250	0.120
1	0.250	0.449	0.720	0.929	0.995	1.000	0.995	0.929	0.720	0.449	0.250

En esta tabla se observa que en el punto (0,0) la función no existe y que en los puntos cercanos al origen, al acercarse por la derecha, por la izquierda, por arriba y por abajo son distintos. Se puede concluir que el límite de $f(x,y) = \frac{x^4}{x^4+3y^4}$ no existe.

Se cumple el teorema. (Villalobos,2014).

Otro ejemplo del cálculo de límites es tomando en cuenta el proceso de resolución, es decir, los limites reiterados. Recuerde el teorema para funciones de varias variables: “si los límites reiterados son diferentes entonces no existe límite”.

$$\mathit{lim}_{(x,y)\to(0.0)} \frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2} = \frac{0^2 - 0^2}{0^2 + 0^2} = \frac{0}{0}$$

Como tenemos una expresión 0/0 es necesario calcular los límites reiterados, que son el cálculo de cada límite con respecto a cada variable.

$$\mathit{lim}_{x\to 0}\left(\lim_{y\to 0}\frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2}\right) = \lim_{x\to 0}\left(\frac{x^2 - 0}{x^2 + 0}\right) = \lim_{x\to 0}\frac{x^2}{x^2} = \lim_{x\to 0} 1 = 1$$

$$\mathit{lim}_{y\to 0}\left(\lim_{x\to 0}\frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2}\right) = \lim_{y\to 0}\left(\frac{0 - y^2}{0 + y^2}\right) = \lim_{y\to 0}\frac{-y^2}{y^2} = \lim_{x\to 0} -1 = -1$$

Como se observa, los límites son diferentes, y según el teorema, solo existe límite cuando los límites reiterados son iguales. En este caso, entonces, no existe el límite.

Contenidos, recursos y actividades de aprendizaje

Resultado de aprendizaje 7

Calcula la expresión matricial de la derivada de funciones vectoriales.

Semana 7

Unidad 4. Derivadas parciales

4.1. Subtema

- Introducción a la derivada parcial
- Derivadas ordinarias

4.2. Subtema

- Derivadas de primer orden

Actividades de aprendizaje recomendadas

Analice el capítulo 5 del texto base de Walter Mora, que trata específicamente de derivadas parciales. Analice los contenidos y familiarícese con las propiedades. El docente tutor le guiará en cuanto a la metodología de resolución de ejercicios. No pierda de vista los anuncios académicos, donde se pondrán las orientaciones académicas específicas sobre este tema y ejercicios de soporte.

Como apoyo se le sugiere revisar las definiciones básicas, procesos y reglas de la derivación. Se le recomienda también leer el recurso educativo REA 7.

REA 7- Yépez, C, Derivación- Guía didáctica de cálculo UTPL-D15307,(2015).

Se le solicita revisar los siguientes videos donde encontrará la explicación de la noción de "derivada" desde el punto de vista geométrico.

- Definición de la derivada desde el punto de vista geométrico I. Ayala., (2018). Recuperado en: 20. Definicion de derivada desde el punto de vista geométrico 1/2
- Definición de la derivada desde el punto de vista geométrico II. Ayala., (2018). Recuperado en: 21. Definicion de derivada desde el punto de vista geométrico 2/2
- Reglas básicas de la derivación. Ayala., (2018). Recuperado en: 26. Reglas básicas de derivación, constante y x^n

Complementando el estudio de la asignatura, ahora se verá el tema de las derivadas parciales. Para esto se le solicita recurrir al texto base.

REA 3: Mora, W., Cálculo en varias variables-. (2019).

Se colocarán varios ejemplos donde se resuelvan derivadas parciales.

Ejemplo:

$f(x,y) = x^2 + y^2 - 6x + 3y$ $\frac{df}{dx} = 2x + 0 - 6 + 0$ $\frac{df}{dx} = 2x - 6$ $\frac{df}{dy} = 0 + 2y - 0 + 3$ $\frac{df}{dy} = 2y + 3$	Esta es una función con dos variables: *x* y *y*. Se debe derivar la función con respecto a cada una de las variables. Si se lo hace con respecto a *x*, todo lo que contenga *y* es constante. Por lo tanto, la derivada de una constante es 0. Si se lo hace con respecto a *y*, todo lo que contenga *x* es constante. Por lo tanto, la derivada de una constante es 0.

Ejemplo:

$f(x,y) = 3x^2 + 4y^2 - 7x + 8y$ $\frac{df}{dx} = 6x + 0 - 7 + 0$ $\frac{df}{dx} = 6x - 7$ $\frac{df}{dy} = 0 + 8y - 0 + 8$ $\frac{df}{dy} = 8y + 8$	Esta es una función con dos variables: *x* y *y*. Se debe derivar la función con respecto a cada una de las variables. Si se lo hace con respecto a *x*, todo lo que contenga *y* es constante. Por lo tanto, la derivada de una constante es 0. Si se lo hace con respecto a *y*, todo lo que contenga *x* es constante. Por lo tanto, la derivada de una constante es 0.

Índice
Primer bimestre
Segundo bimestre
Solucionario
Glosario
Referencias bibliográficas

Es necesario reforzar el tema, para esto puede ayudarse en los ejercicios que le propongo. También puede ayudarse con el texto base de Walter Mora o su docente autor subirá a la plataforma ejercicios que le ayuden a fortificar este tema.

Actividades finales del bimestre

Semana 8

Contenidos, recursos y actividades de aprendizaje

Resultado de aprendizaje 8	Conozca los contenidos desarrollados en las semanas anteriores.

- **Repaso general**

Índice
Primer bimestre
Segundo bimestre
Solucionario
Glosario
Referencias bibliográficas

Actividades de aprendizaje recomendadas

Realice un análisis pormenorizado del capítulo 5 del texto base de Walter Mora que trata específicamente de derivadas parciales: primera y segunda derivada. Analice los contenidos y familiarícese con las propiedades. El docente tutor le guiará en cuanto a la metodología de resolución de ejercicios. No pierda de vista los anuncios académicos donde se pondrá las orientaciones académicas específicas sobre este tema y ejercicios de apoyo.

Revise cada una de las unidades vistas y realice ejercicios que le permitan visualizar las propiedades y procesos de cada uno de los temas. También revise los cuestionarios y actividades ejecutadas. Mantenga contacto con su docente tutor. Esta es una semana importante, en la que todas sus dudas deben ser aclaradas.

Segundo bimestre

Resultado de aprendizaje 9

Calcula la expresión matricial de la derivada de funciones vectoriales.

Contenidos, recursos y actividades de aprendizaje

Semana 9

4.3. Subtema

- Derivadas de segundo orden

Actividades de aprendizaje recomendadas

Estimado estudiante, inicia la segunda mitad de este ciclo académico, por lo que debe estar lo suficientemente claro en lo que son las derivadas parciales, sus propiedades y su proceso. Se ha estudiado la derivación implícita y la derivación de primer nivel; ahora se verán las derivadas de segundo orden que son muy importantes para determinar máximos y mínimos en el siguiente tema. No se olvide que es importante interactuar con el docente tutor y que tiene el servicio de mensajes de la plataforma y la tutoría en el horario ya establecido. El texto de Walter Mora contiene los contenidos de apoyo para esta unidad.

Observe el proceso de resolución de derivadas de primer y segundo orden de una función Multivariable:

Ejemplo:

Dada la función z(x,y) = $x^2 + xy + y^2 - 6x + 2$

Derivadas de primer orden	
$\frac{dz}{dx} = 2x + y - 6$	Al derivar en *x* la *y* es un valor constante.
$\frac{dz}{dy} = x + 2y$	Al derivar en *y* la *x* es un valor constante.
Derivadas de segundo orden	
$\frac{d^2z}{dx^2} = 2$	Derivo el resultado de la primera derivada con respecto a *x*.
$\frac{d^2z}{dy^2} = 2$	Derivo el resultado de la primera derivada con respecto a *y*.
Derivación de segundo orden mixtas o cruzadas	
$\frac{d^2z}{dxdy} = 1$	De la primera derivada en *x* de la función *z* derivamos ahora con respecto a *y*.
$\frac{d^2z}{dydx} = 1$	De la primera derivada en *y* de la función *z* derivamos ahora con respecto a *x*.

Ejemplo:

Dada la función z(x,y) = 2x² + 3xy + 3/2y² - 10x + 2 - 9y

Derivadas de primer orden	
$\frac{dz}{dx} = 4x + 3y - 10$	Al derivar en *x* la *y* es un valor constante.
$\frac{dz}{dy} = 3x + 3y - 9$	Al derivar en *y* la *x* es un valor constante.
Derivadas de segundo orden	
$\frac{d^2z}{dx^2} = 4$	Derivo el resultado de la primera derivada con respecto a *x*.
$\frac{d^2z}{dy^2} = 3$	Derivo el resultado de la primera derivada con respecto a *y*.
Derivación de segundo orden mixtas o cruzadas	
$\frac{d^2z}{dxdy} = 3$	De la primera derivada en *x* de la función *z* derivamos ahora con respecto a *y*.
$\frac{d^2z}{dydx} = 3$	De la primera derivada en *y* de la función *z* derivamos ahora con respecto a *x*.

Ejemplo:

Dada la función z(x,y) + x² + 9y -3y² - 8x +3xy

Derivadas de primer orden	
$\frac{dz}{dx} = 2x + 3y - 8$	Al derivar en *x* la *y* es un valor constante.
$\frac{dz}{dy} = 3x - 6y + 9$	Al derivar en *y* la *x* es un valor constante.
Derivadas de segundo orden	
$\frac{d^2z}{dx^2} = 2$	Derivo el resultado de la primera derivada con respecto a *x*.
$\frac{d^2z}{dy^2} = -6$	Derivo el resultado de la primera derivada con respecto a *y*.

Derivadas de primer orden	
Derivación de segundo orden mixtas o cruzadas	
$\frac{d^2z}{dxdy} = 3$	De la primera derivada en *x* de la función *z* derivamos ahora con respecto a *y*.
$\frac{d^2z}{dydx} = 3$	De la primera derivada en *y* de la función *z* derivamos ahora con respecto a *x*.

- Derivadas parciales. Ayala., (2020) Recuperado de: 93. Derivadas parciales de segundo orden

Semana 10

Contenidos, recursos y actividades de aprendizaje

Resultado de aprendizaje 10

Determina los máximos y mínimos de una función y aplíquelos a problemas de optimización.

Unidad 5. Máximos y mínimos de una función real de dos variables

5.1. Subtema

- Criterio de la primera y segunda derivadas

Actividades de aprendizaje recomendadas

En este capítulo vamos a revisar los máximos y los mínimos de las funciones multivariadas. Se le recomienda revisar el texto guía de Walter Mora, La guía didáctica virtualizada y los videos que más adelante se detallarán. Lea, analice y saque sus propias anotaciones sobre este tema.

Revisados estos recursos, es necesario recordar que una de las aplicaciones de la derivada es el determinar los máximos y los mínimos relativos para aplicarlos en los problemas propios de la carrera.

Para encontrar máximos y mínimos relativos y punto silla de funciones de varias variables, se puede recurrir a varios métodos. Estos son los más conocidos:

Índice
Primer bimestre
Segundo bimestre
Solucionario
Glosario
Referencias bibliográficas

- El método del discriminante hessiano o matriz hessiana
- El método de los multiplicadores de Lagrange.
- El teorema o fórmula de Taylor es una aproximación polinómica de una función *n* veces derivable en un punto específico. Es decir, es una suma finita de derivadas locales evaluadas en un punto.

El método del discriminante hessiano o matriz hessiana surge a partir de estudios realizados por Hess, matemático alemán, en el año de 1844. Él introdujo "los jacobianos", expresiones que denotan cambios de variable en las integrales múltiples.

Para trabajar con esta matriz es necesario conocer el proceso de obtención de las derivadas de primer y segundo orden, ya que estos valores forman parte de la matriz.

Primer orden	Segundo orden
$fx = \frac{df}{dx}$	$fxx = \frac{d^2f}{dx^2}$
$fy = \frac{df}{dy}$	$fyy = \frac{d^2f}{dy^2}$
	$fxy = \frac{d^2f}{dxdy}$
	$fyx = \frac{d^2f}{dydx}$

Con estos primeros resultados se puede formar la matriz hessiana, la cual ayudará a determinar máximos y mínimos de funciones multivariables.

Para dos variables: f(x,y)

$$\begin{vmatrix} fxx & fxy \\ fyx & fyy \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \frac{d^2f}{dx^2} & \frac{d^2f}{dxdy} \\ \frac{d^2f}{dydx} & \frac{d^2f}{dy^2} \end{vmatrix}$$

Para tres variables: f(x,y,z)

$$\begin{vmatrix} fxx & fxy & fxz \\ fyx & fyy & fyz \\ fzx & fzy & fzz \end{vmatrix}$$

En el tema 'matriz hessiana' es necesario revisar los métodos de resolución de determinantes.

Se debe tener claro los siguientes casos:

- Si el determinante es mayor que cero, entonces se procede a verificar si es positivo o negativo.
    - Si *fxx* es positivo o mayor que cero, entonces la función tiene un MÍNIMO LOCAL en el punto crítico.
    - Si *fxx* es negativo o menor que cero, entonces la función tiene un MÁXIMO LOCAL en el punto crítico.
- Si el determinante es menor que cero, entonces se concluye que la función tiene un PUNTO DE SILLA en el punto crítico.
- Si el determinante es igual a cero, EL CRITERIO NO ES CONCLUYENTE, por lo tanto, se debe buscar otra forma de determinar el comportamiento de la función.

Para comprender el proceso de la matriz hessiana analice los procesos del siguiente ejemplo:

Ejemplo:

Dada la función f(x,y,z) = $x^2 + y^2 + 7z^2 - xy$

Derivadas de primer orden		
$\frac{df}{dx} = 2x - y$	$\frac{df}{dy} = 2y - x$	$\frac{df}{dz} = 14z$
Derivadas de segundo orden		
$\frac{d^2f}{dx^2} = 2$	$\frac{d^2f}{dy^2} = 2$	$\frac{d^2f}{dz^2} = 14$
Derivación de segundo orden mixtas o cruzadas		
$\frac{d^2f}{dxdy} = -1$	$\frac{d^2f}{dydx} = -1$	$\frac{d^2f}{dzdx} = 0$
$\frac{d^2f}{dxdz} = 0$	$\frac{d^2f}{dydz} = 0$	$\frac{d^2f}{dzdy} = 0$

$$\begin{vmatrix} \frac{d^2f}{dx^2} & \frac{d^2f}{dxdy} & \frac{d^2f}{dxdz} \\ \frac{d^2f}{dydx} & \frac{d^2f}{dy^2} & \frac{d^2f}{dydz} \\ \frac{d^2f}{dzdx} & \frac{d^2f}{dzdy} & \frac{d^2f}{dz^2} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 14 \end{vmatrix} = 56 - 14 = 42$$

$$42>0$$

Además

$$\frac{d^2f}{dx^2} > 0$$

Se tiene un mínimo local.

Otro método que permite determinar máximos y mínimos son los multiplicadores de Lagrange: método que permite encontrar el máximo o el mínimo de una función multivariable cuando hay restricciones en los valores de entrada.

$$g(x,y,....) = c$$

La función *g* es multivariable y *c* es una constante. La idea de este método es encontrar los puntos en donde las curvas de nivel de *f* y *g* sean tangentes entre sí. Es decir, se debe encontrar los puntos en donde los vectores de los gradientes *f* y *g* sean paralelos entre sí.

Ejemplo:

Emplee el método de los multiplicadores de Lagrange para determinar el máximo de $f(x,y) = 9 - x^2 - y^2$ sujeto a $x + y = 3$

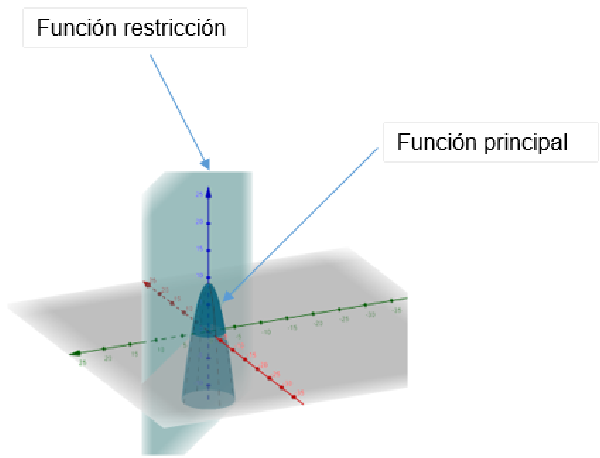


Figura 7. Función Multivariable. Andrade, E. (2020)

f(x,y) = 9 - x2 - y2	Función principal
x + y = 3	Función restricción

Determinar los multiplicadores de acuerdo a las funciones que son las derivadas de primer orden con respecto a *x* y con respecto a *y.*

$$\frac{df}{dx} = \lambda \frac{dg}{dx}$$

$$\frac{df}{dy} = \lambda \frac{dg}{dy}$$

La función *g* (*x*, *y*) igualar a cero

g(x,y) = 0

Se tiene tres ecuaciones con tres incógnitas.

Función principal	f(x,y) = 9 - x^2 - y^2
$\frac{df}{dx}$	$\frac{df}{dx} = -2x$
$\frac{df}{dy}$	$\frac{df}{dy} = -2y$
g(x,y) = 0 x + y - 3 = 0	
$\frac{dg}{dx}$	$\frac{dg}{dx} = 1$
$\frac{dg}{dx}$	$\frac{dg}{dy} = 1$

Reemplazar los valores en los multiplicadores de Lagrange.

$\frac{df}{dx} = \lambda \frac{dg}{dx}$	$-2x = \lambda(1)$
$\frac{df}{dy} = \lambda \frac{dg}{dy}$	$2y = \lambda(1)$
g(x,y) = 0	x + y - 3 = 0

Entonces se tiene tres ecuaciones con tres incógnitas

$$-2x = \lambda$$

$$-2y = \lambda$$

$$x + y - 3 = 0$$

Se puede utilizar cualquier método de resolución.

$$-\cancel{2}x = -\cancel{2}y$$

Entonces, simplificar

$$x = y$$

Reemplazar en

$$x + y - 3 = 0$$

$$x + x - 3 = 0$$

$$2x - 3 = 0$$

$$x = \frac{3}{2} = y$$

Reemplazar estos valores en la función principal, ya que ahí se determinará el máximo solicitado.

$$f(x,y) = 9 - x^2 - y^2$$

$$f\left(\frac{3}{2},\frac{3}{2}\right) = 9 - \left(\frac{3}{2}\right)^2 - \left(\frac{3}{2}\right)^2 = 9 - \frac{9}{4} - \frac{9}{4} = \frac{36-9-9}{4} = \frac{18}{4} = \frac{9}{2}$$

Entonces, se ha determinado que el máximo de la función f(x,y) = 9 - x^2 - y^2 con restricción en x + y = 3 estará en el punto 9/2 y las coordenadas en el espacio serían

$$f(x,y,z) = \left(\frac{3}{2},\frac{3}{2},\frac{9}{2}\right) = Máximo$$

El último método por analizar es la fórmula de Taylor: un teorema que sirve para aproximar cualquier tipo de función en funciones polinómicas. Es decir, es un proceso de derivación de funciones reales de manera iterada: primera, segunda,…, enésima derivada, hasta que en un punto permitirá aproximar la función mediante un polinomio de grado igual o menor a 1.

El teorema analíticamente se explica así: si *f* es una función *n* veces derivable en $a \in R$ entonces llamamos polinomio de Taylor a *f*, de orden *n* en el punto *a*, y se nota por T_n (f,a) (x) o bien T_N (X) al polinomio:

$$T_n(f,a)(x) = f(a) + f'(a)(x-a) + \frac{f''(a)(x-a)^2}{2} + \frac{f'''(a)(x-a)^3}{3!} + \cdots + \frac{f^n(a)(x-a)^n}{n!}$$

Esta fórmula es muy importante en las carreras de economía, finanzas y logística, porque se aplica en activos y productos financieros, en los cuales su precio se expresa como una función no lineal.

Ejemplo:

Precio de un título de deuda corto plazo es una función no lineal que depende de los tipos de interés.

Ejemplo:

Las opciones donde los factores de riesgo como la rentabilidad son funciones no lineales.

Ejemplo:

El cálculo de la duración de un bono es un polinomio de Taylor de primer grado.

Ejemplo:

Dada la función f(x) = $2x^3$ - 4ln (x), determinar el segundo orden de la aproximación de Taylor de la función en un punto $x_0 = 1$.

En este ejemplo se demostrará la aplicación de la fórmula de Taylor y su desarrollo en el proceso de resolución:

La fórmula general es:

$$T_n(f,a)(x) = f(a) + f'(a)(x-a) + \frac{f''(a)(x-a)^2}{2!} + \frac{f'''(a)(x-a)^3}{3!} + \cdots + \frac{f^n(a)(x-a)^n}{n!}$$

Se pide determinar el segundo orden:

$P_{1(x)} = f(a) + f'(a)(x-a)$ esta expresión sería primer orden.

$P_{2(x)} = f(a) + f'(a)(x-a) + \frac{f''(a)(x-a)^2}{2!}$ esta expresión es segundo orden.

Según la expresión segunda que indica el polinomio de segundo orden, se debe obtener la primera y segunda derivada de la función.

Índice
Primer bimestre
Segundo bimestre
Solucionario
Glosario
Referencias bibliográficas

f (x) = $2x^3$ - 4ln (x)	
$\frac{df}{dx} = 6x^2 - \frac{4}{x} = 6x^2 - 4x^{-1}$	Primera derivada
$\frac{d^2f}{dx^2} = 12x + 4x^{-2}$	Segunda derivada

Como se pide en el punto x_0 = 1 se tiene:

f (x) = $2x^3$ - 4ln (x)	f (1) = $2(1)^3$ - 4ln (1) = 2
$\frac{df}{dx} = 6x^2 - 4x^{-1}$	$\frac{df}{d(1)} = 6(1)^2 - 4(1)^{-1} = 6 - 4 = 2$
$\frac{d^2f}{dx^2} = 12x + 4x^{-2}$	$\frac{d^2f}{d(1)^2} = 12(1) + 4(1)^{-2} = 12 + 4 = 16$

Con estos valores reemplazar en la fórmula de Taylor hasta el nivel 2:

$$P_{2(x)} = f(a) + f'(a)(x-a) + \frac{f''(a)(x-a)^2}{2}$$

$$P_{2(x)} = f(1) + f'(1)(x-1) + \frac{f''(1)(x-1)^2}{2!}$$

$$P_{2(x)} = 2 + 2(x-1) + \frac{16(x-1)^2}{2!}$$

$$= 2 + 2x - 2 + \frac{16(x^2 - 2x + 1)}{2 \cdot 1}$$

$$= 2 + 2x - 2 + 8(x^2 - 2x + 1)$$

$$= 2 + 2x - 2 + 8x^2 - 16x + 8$$

$$= 8x^2 - 14x + 8$$

Con este polinomio encontrado y buscar aproximaciones a $x_0 = 1$ y analizar:

Función original: $f(x) = 2x^3 - 4\ln(x)$	$x_0 = 1$ $f(1) = 2(1)^3 - 4\ln(1) = 2$
Aproximación de Taylor: $P_{(2)} = 8x^2 - 14x + 8$	$x_0 = 1$ $8x^2 - 14x + 8$ $= 8(1)^2 - 14(1) + 8$ $= 8 - 14 + 8 = 2$
Función original: $f(x) = 2x^3 - 4\ln(x)$	$x_0 = 1.05$ $f(1) = 2(1.05)^3 - 4\ln(1.05) = 2.12008$
Aproximación de Taylor: $P_{(2)} = 8x^2 - 14x + 8$	$x_0 = 1.05$ $8x^2 - 14x + 8$ $= 8(1.05)^2 - 14(1.05) + 8 = 2.12$
Función original: $f(x) = 2x^3 - 4\ln(x)$	$x_0 = 1.1$ $f(1) = 2(1.1)^3 - 4\ln(1.1) = 2.280759$
Aproximación de Taylor: $P_{(2)} = 8x^2 - 14x + 8$	$x_0 = 1.1$ $8x^2 - 14x + 8$ $= 8(1.1)^2 - 14(1.1) + 8 = 2.28$

En el primer caso, cuando $x_0 = 1$, se ve que tanto la función original como la aproximación de Taylor dan el mismo resultado. Esto se debe a la composición del polinomio de Taylor que se ha creado mediante el uso de las derivadas locales. Estas derivadas se han evaluado en un punto concreto, $x_0 = 1$, para poder obtener un valor y crear el polinomio.

Índice
Primer bimestre
Segundo bimestre
Solucionario
Glosario
Referencias bibliográficas

Entonces, cuanto más alejado de ese punto concreto, $x_0 = 1$, menos apropiada será la aproximación para la función no lineal original. En los casos donde $x_0 = 1{,}05$ y $x_0 = 1{,}1$ hay una diferencia significativa entre el resultado de la función original y la aproximación de Taylor.

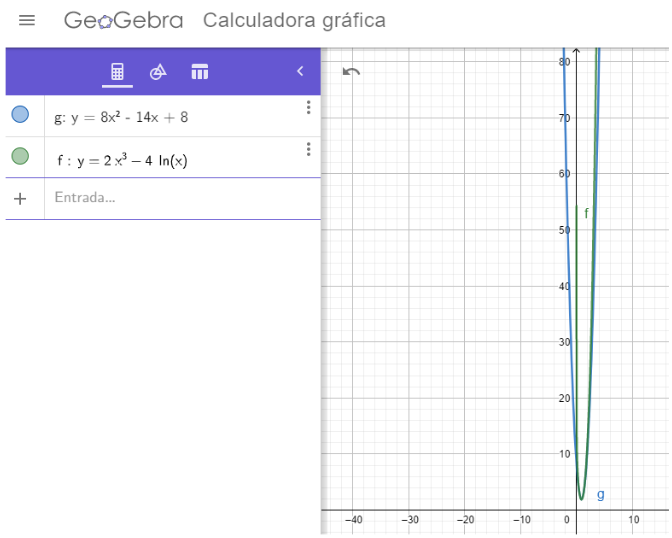


Figura 8. Aproximaciones. Andrade, E. (2020)

Podemos en este punto ampliar el tema con

- Máximo y mínimos Multivariables. Ayala., (2020) Recuperado de: https://bit.ly/33oXQRo
- Máximo y mínimos Multivariables. Ayala., (2020) Recuperado de: https://bit.ly/2Zzy8II

Semana 11

Contenidos, recursos y actividades de aprendizaje

Resultado de aprendizaje 11

Conoce las definiciones de integrales de funciones de varias variables.

Unidad 6. Integrales múltiples

6.1. Subtema

- Nociones generales

Actividades de aprendizaje recomendadas

En esta fase de adquisición de conocimiento se sugiere estar en contacto con el tutor, ya que él orientará el aprendizaje de la semana y sugerirá las lecturas específicas, ejercicios y recursos hacia donde usted debe proyectarse. Recuerde que comenzamos un tema nuevo: Integrales multivariadas.

Haga uso de la tutoría en el día y hora que el docente haya planificado. Puede contactarse por medio del correo electrónico o hacer uso de la mensajería que dispone la plataforma en su aula virtual.

En este tema debe recordar lo que es integración univariable *y* las características, propiedades y aplicaciones que este tema necesita, ya que son pre requisitos para la integración multivariable.

Para recordar este tema se sugiere la visualización de los siguientes vídeos:

- Integral de línea. Ayala., (2018) Recuperado de: 76. Integral de Linea de una función vectorial escalar
- Integral de línea. Ayala., (2018) Recuperado de: https://bit.ly/3irEt08

Idea intuitiva de integración

Un pintor debe determinar cuánta pintura utilizará en un trabajo. Aproximadamente, un galón de pintura cubrirá cierto número de pies cuadrados. La clave es determinar el área de la superficie a pintar.

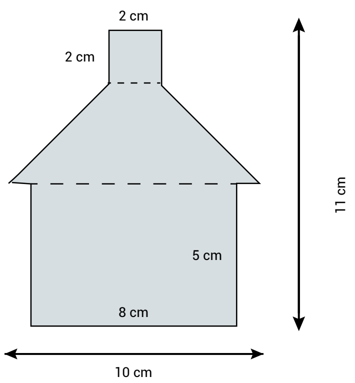


Figura 9. Figuras regulares

Índice
Primer bimestre
Segundo bimestre
Solucionario
Glosario
Referencias bibliográficas

Por lo general, esto solo requiere de aritmética simple, porque las paredes y los techos son rectangulares, por lo que el área total es una suma de productos de base por altura.

En términos generales, calcular áreas de figuras regulares es fácil porque cumplen con fórmulas específicas:

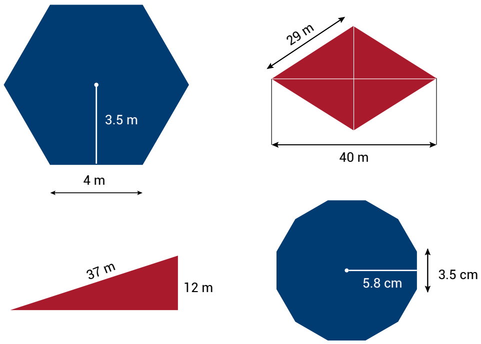


Figura 10. Figuras regulares 2

Pero si tenemos figuras irregulares como por ejemplo:

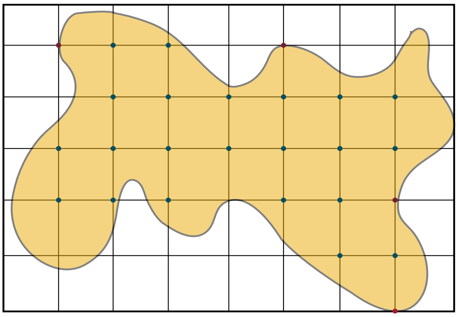


Figura 11. Figura irregular

Los matemáticos buscaron la forma de reducir la figura en rectángulos pequeños y sumarlos. Mientras más pequeños eran estos, más exacta era la suma de sus áreas.

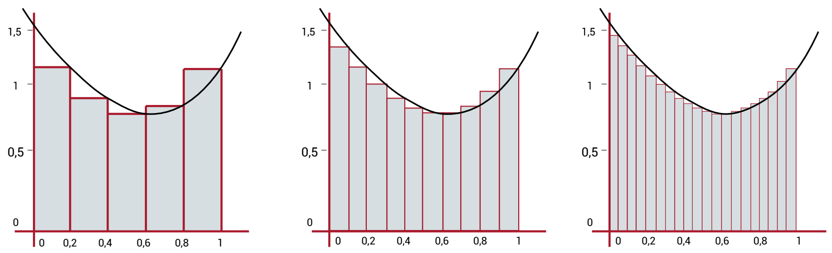


Figura 12. Sumas de Riemann

$$S = \sum_{i=1}^{n} f(x_i)(x_i - x_{i-1})$$

¿Se imaginan lo que sería calcular el área de un terreno de varios metros reduciéndola en rectángulos pequeños? Sería un trabajo extenso y agotador, por lo que Bernhard Riemann vinculó las sumas a una integral definida que permitía calcular el área bajo una curva. Este método es útil cuando no se puede utilizar el teorema fundamental del cálculo.

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{n \to \infty} \sum_{k=1}^{n} f(a + k \triangle x) \triangle x$$

Con los aportes de matemáticos de renombre como Arquímedes, René Descartes, Isaac Newton, Gottfried Leibniz e Isaac Barrow fue posible generar el teorema fundamental del cálculo integral que propone que la derivación y la integración son procesos inversos.

El teorema fundamental del cálculo indica que la derivación y la integración son operaciones inversas, porque al integrar una función continua y luego derivarla se recupera la función original.

$$\int_a^b f(x)dx = F(x) = F(b) - F(a)$$

Donde:

F(x) = anti derivada de *f(x),* si la derivamos entonces

Ejemplo:

$$\int_0^2 x^2 dx = \left(\frac{x^3}{3}\right)\begin{matrix}2\\0\end{matrix} = \frac{2^3}{3} - \frac{0^3}{3} = \frac{8}{3}$$

$$F(x) = antiderivada = \frac{x^3}{3}$$

$$si\ derivamos\ F(x) entonces\ F'(x) = \frac{3x^2}{3} = x^2$$

Como conclusión se puede decir que:

- Una integral es una generalización de la suma de infinitos sumandos, infinitesimalmente pequeños.
- Es una suma continua.
- La integral es la operación inversa a la derivada.
- El cálculo integral está encuadrado en el cálculo infinitesimal, donde el proceso de integración y derivación están íntimamente ligados.
- Se utiliza principalmente para el cálculo de áreas y volúmenes de regiones y de sólidos de revolución.

Las integrales pueden ser:

- El área se encuentra entre límites definidos.

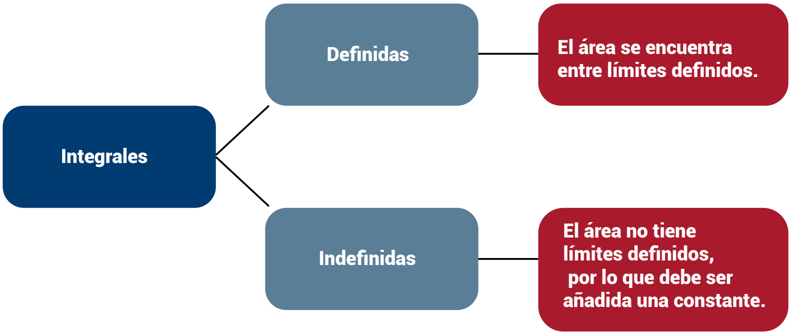


Figura 13. Tipos de Integrales. Andrade, E. (2020)

En cuanto a las propiedades y métodos de integración se recomienda estudiar el recurso educativo REA 2.

REA 6- Yépez, C, Guía didáctica de cálculo UTPL- D15307-. (2015)

Todos estos conocimientos son prerrequisitos para el estudio de la Integración múltiple, que es el tema que estudia la resolución de integrales de dos o tres variables.

- Introducción a la integración. Ayala., (2018) Recuperado de:

  Enlace 1

  Enlace 2

  Enlace 3

- Reglas de integración Ayala., (2018) Recuperado de:

  Enlace 1

  Enlace 2

  Enlace 3

Recuerde:

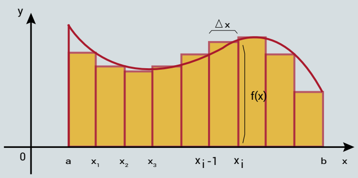
Integración simple	Suma de Riemann
	$\int_a^b f(x)dx = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1} f(a+k\Delta x)\Delta x$

Figura 14. Suma de Riemann

En la integral definida se trabaja con una función *f(x)* que al integrarla permite determinar el área bajo esa curva. Se trabaja en el plano bidimensional.

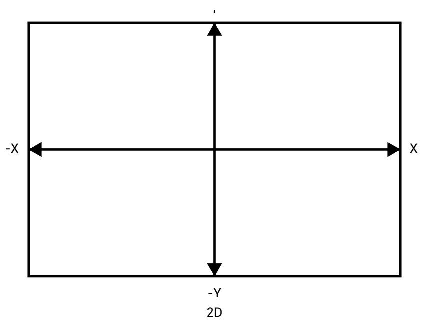


Figura 15. Plano bidimensional

Índice
Primer bimestre
Segundo bimestre
Solucionario
Glosario
Referencias bibliográficas

En la integral multivariable se trabaja con una función *f* (*x*, *y*), de tal manera que al integrarla va a permitir encontrar un volumen, pues ahora se trabaja en el plano tridimensional.

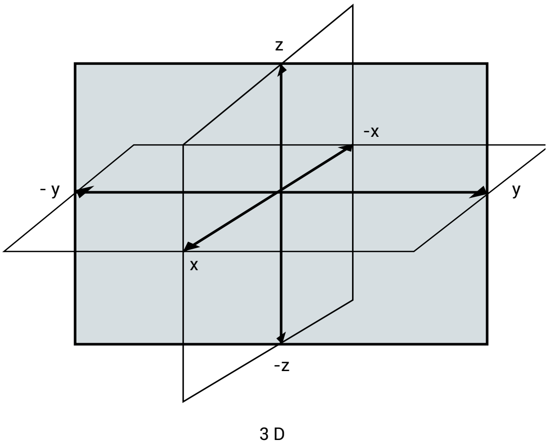


Figura 16. Plano Tridimensional

Se toma como base una lámina en el plano tridimensional; esta se proyecta en el plano bidimensional (*x*,*y*).

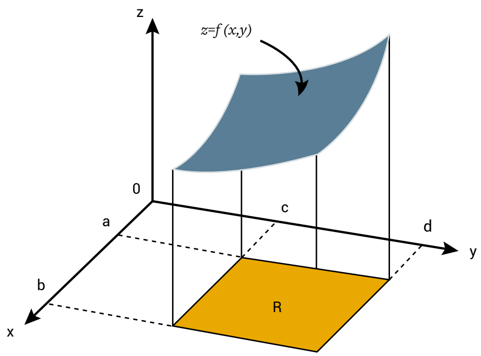


Figura 17. Idea intuitiva multivariable

Siguiendo la idea de Riemann, el área se divide en subrectángulos. Mientras más pequeños, más próximos están a su valor.

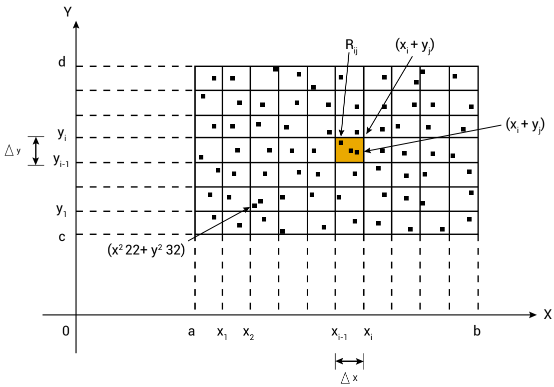


Figura 18. Idea intuitiva multivariable 2

Si esto se extiende en el eje *z*, se obtiene un volumen. La suma de muchos prismas rectangulares permitirá el cálculo aproximado del volumen.

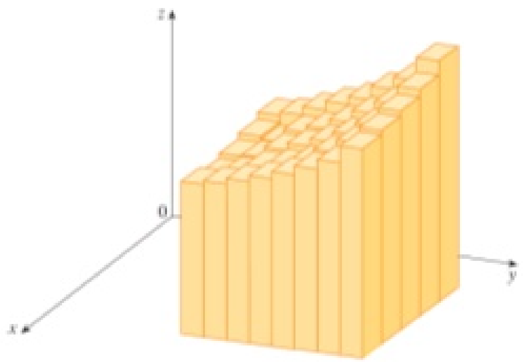


Figura 19. Idea intuitiva multivariable 3

Si *n* crece, las aproximaciones mediante sumas de Riemann tienden al volumen total del sólido.

Si las sumas de Riemann de *f* tienen un límite (que se toma sobre todas las posibles mallas rectangulares contenidas en la región R), *f* es integrable.

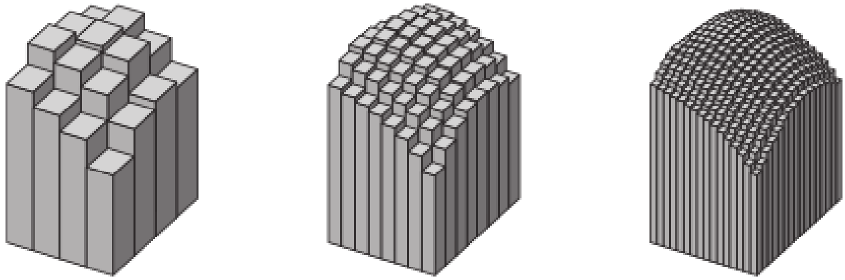


Figura 20. Idea intuitiva multivariable 4

$$\iint f(x,y)dA = \lim_{\|M\|\to 0} \sum_{i=1}^{n} f(x_i,y_i)\Delta A_i \qquad con\; n = Card(M)$$

Las integrales definidas de funciones con dos variables se llaman integrales dobles definidas. Estas involucran la integración sobre una región en el plano. Revise el capítulo 7 del texto base.

REA 6- Mora, W., Cálculo en varias variables. (2019).

Semana 12

Índice
Primer bimestre
Segundo bimestre
Solucionario
Glosario
Referencias bibliográficas

Contenidos, recursos y actividades de aprendizaje

Resultado de aprendizaje 12	Determina el tipo de integrales, sus características principales y su importancia.

6.2. Subtema

- Integrales iteradas

Actividades de aprendizaje recomendadas

Con esta base del conocimiento y si tiene inquietudes se le sugiere estar en contacto con el tutor, ya que él orientará el aprendizaje de esta semana y le indicará las lecturas específicas, ejercicios y recursos que debe revisar. Recuerde que seguimos estudiando Integrales multivariadas.

Haga uso de la tutoría. Puede contactarse por medio del correo electrónico o hacer uso de la mensajería que dispone la plataforma en su aula virtual.

Se tiene una idea general de la integración multivariable, pero, a continuación, se especificará el significado de integrales iteradas.

Una idea global de fácil comprensión es el hecho de que una integral múltiple se resuelve por medio de integrales iteradas. Esto quiere decir que si f es integrable en $R = (a, b) \times (c, d)$, se puede interpretar que la integral iterada es como un proceso sucesivo de integración que cumple con las siguientes relaciones:

$$\iint f(x,y)dxdy = \int\left[\int f(x,y)dx\right]dy$$

$$\iint f(x,y)dydx = \int\left[\int f(x,y)dy\right]dx$$

Al evaluar la integral doble por medio de integrales iteradas llegamos al teorema de Fubini: "Sea *f* una función continua en una región *R* cerrada y acotada entonces":

$$\int\int_R f(x,y)\,dA = \int_c^d\int_a^b f(x,y)\,dx\,dy = \int_a^b\int_c^d f(x,y)\,dydx$$

Lo anterior muestra que el valor de la integral doble es independiente del orden elegido para calcular las integrales iteradas. Si se integra primero la variable interna dejando constante la otra y luego la externa, el resultado no será alterado.

Si los límites de estas integrales fueran funciones, también se debe aplicar el teorema de Fubini:

Sean $R = \{(x,y)\epsilon R^2 \; tal \; que \; a \le x \le b \quad y \quad g_1(x) \le y \le g_2(x)\}$con g_1 y g_2 funciones continuas en $[a,b]$. Si *f* es continua en *R* entonces:

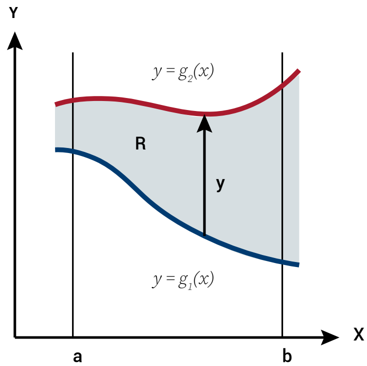


Figura 21. Teorema de Fubini

$$\int\int f(x,y)dA = \int_a^b \int_{g_1(x)}^{g_2(x)} f(x,y)dydx = \int_a^b \left[\int_{g_1(x)}^{g_2(x)} f(x,y)dy\right] dx$$

Sean $R = \{(x,y)\epsilon R^2 tal\ que\ p \leq x \leq q \quad y \quad h_1(x) \leq x \leq h_2(x)\}$ con $h_1 \quad y \quad h_2$ funciones continuas en $[p,q]$. Si *f* es continua en *R* entonces:

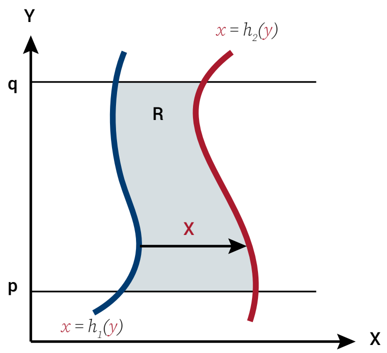


Figura 22. Teorema de Fubini

$$\int\int f(x,y)dA = \int_p^q \int_{h_1(x)}^{h_2(x)} f(x,y)dxdy = \int_a^b \left[\int_{h_1(x)}^{h_2(x)} f(x,y)dx\right] dy$$

Ejemplo:

$$\int_{-1}^{1}\int_{0}^{1-x} (2x+1)dydx = \int_{-1}^{1} (-2x^2 + x + 1)dx = \frac{2}{3}$$

$\int_0^{1-x}(2x+1)dy$ resolvemos como integral iterada definida

$\int_{-1}^{1}(-2x^2 + x + 1)dx$ ese resultado se integra como otra integral iterada definida.

REA 6- Mora, W., Cálculo en varias variables-. (2019).

Índice
Primer bimestre
Segundo bimestre
Solucionario
Glosario
Referencias bibliográficas

Revise el recurso educativo del Magister Marco Ayala

- Integrales iteradas., (2018) Recuperado de: https://www.youtube.com/playlist?list=PLWyONXRtuelTCOdQNldoCLFuuwq4Sxiaa

REA 6- Mora, W., Cálculo en varias variables-. (2019).

Semana 13

Contenidos, recursos y actividades de aprendizaje

Resultado de aprendizaje 13	Determina el tipo de integrales, sus características principales y su importancia.

6.3. Subtema

- Integrales dobles

Actividades de aprendizaje recomendadas

Puede ahondar en el tema analizando el capítulo 7 del texto base de Walter Mora referente a las integrales. Revise los ejercicios desarrollados en los ejemplos. En caso de tener dudas comuníquese con el docente tutor, quien, por medio del chat de tutorías o mensajes de texto, aclarará sus inquietudes.

Ejemplo:

$$\int_0^1\int_2^3 (6x+6y^2)dxdy = \int_0^1 \left(\frac{6x^2}{2}+6xy^2\right)\Big|_{x=2}^{3} dy = \int_0^1 (3x^2+6xy^2)\Big|_{x=2}^{3} dy$$

$$= \int_0^1 [[3(3)^2+6(3)y^2]-[3(2)^2+6(2)y^2]]dy$$

$$= \int_0^1 [27+18y^2-12-12y^2]dy = \int_0^1 [15+6y^2]\,dy$$

$$= 15y + \frac{6y^3}{3}\Big|_0^1 = 15(1)+2(1)-15(0)-2(0)$$

$$= 15 + 2 - 0 - 0 = 17$$

Si cambiamos el orden de resolución de las integrales el resultado es el mismo

$$\int_2^3\int_0^1 (6x+6y^2)\,dxdy = 17$$

Este resultado se justifica con el teorema de Fubini, que asegura que el orden es irrelevante.

Ejemplo:

$$\int_{-1}^{2}\int_{2x^2-2}^{x^2+x} x\,dy\,dx = \int_{-1}^{2}(-x^3+x^2+2x)dx = \left(\frac{-x^4}{4}+\frac{x^3}{3}+\frac{2x^2}{2}\right)_{-1}^{2}$$

$$=\left(\frac{-(2)^4}{4}+\frac{(2)^3}{3}+(2)^2\right)-\left(\frac{-(-1)^4}{4}+\frac{(-1)^3}{3}+(-1)^2\right)$$

$$=\left(\frac{-16}{4}+\frac{8}{3}+4\right)-\left(\frac{-1}{4}-\frac{1}{3}+1\right)=\left(\frac{-48+32+48}{12}\right)-\left(\frac{-3-4+12}{12}\right)$$

$$=\frac{32}{12}-\frac{5}{12}=\frac{27}{12}=\frac{9}{4}$$

Semana 14

Contenidos, recursos y actividades de aprendizaje

Resultado de aprendizaje 14

Calcula el área delimitada entre curvas utilizando integrales dobles.

Índice
Primer bimestre
Segundo bimestre
Solucionario
Glosario
Referencias bibliográficas

Unidad 7. Aplicaciones de las integrales múltiples

7.1. Subtema

- Cálculo de áreas

Actividades de aprendizaje recomendadas

La aplicación de las integrales multivariadas permitirá unificar la teoría con la realidad, con base en los fundamentos matemáticos y cálculo vistos en ciclos anteriores. Por tal razón, habiendo llegado a esta unidad, no debe perderse de las orientaciones académicas de su tutor. Comuníquese por cualquier medio, sea por mensajería o por el chat de tutorías para que él le aclare sus inquietudes.

En esta unidad se aplicarán los conocimientos adquiridos a lo largo del ciclo, en el que aprendera cálculos y procesos de resolución para la obtención de áreas.

Para complementar este tema es necesario saber el proceso de cálculo de la longitud de un arco, donde se efectúan las siguientes operaciones:

- Si se proyecta el arco sobre uno de los ejes coordenados, determinando un cierto intervalo sobre el eje.

Índice
Primer bimestre
Segundo bimestre
Solucionario
Glosario
Referencias bibliográficas

- Se integra la función $\sqrt{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2}$ si se proyecta sobre el eje *x.*
- Se integra la función $\sqrt{1+\left(\frac{dx}{dy}\right)^2}$ si se proyecta sobre el eje *y.*

En una función multivariable el área *S* de una porción *R´* de una superficie *z* = *f*(*x*,*y*) se sigue un procedimiento similar.

- Se proyecta *R´* sobre uno de los planos coordenados determinando una región *R* en dicho plano.
- Se integra la función:

$S = \int\int \sqrt{1+\left(\frac{dz}{dx}\right)^2+\left(\frac{dz}{dy}\right)^2}\, dA$ si se proyecta sobre *x0y*

$S = \int\int \sqrt{1+\left(\frac{dx}{dy}\right)^2+\left(\frac{dx}{dz}\right)^2}\, dA$ si se proyecta sobre *y0z*

$S = \int\int \sqrt{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2+\left(\frac{dy}{dz}\right)^2}\, dA$ si se proyecta sobre *z0x*

Ejemplo:

Hallar el área de la porción de cono $x^2 + y^2 = 3z^2$ situada por encima del plano x0y e interior al cilindro $x^2 + y^2 = 4y$

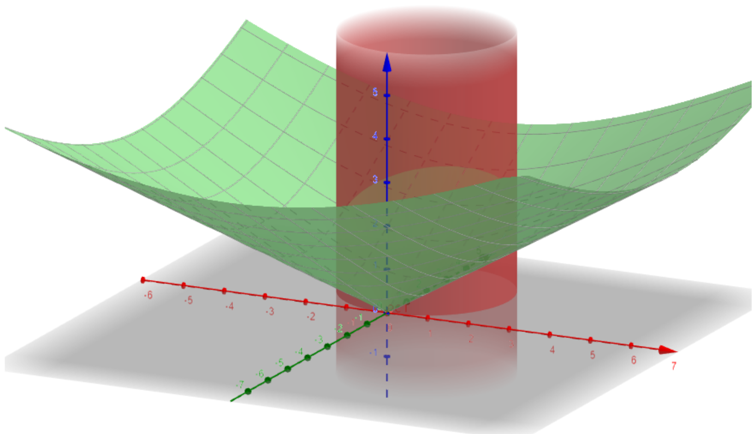


Figura 23. curva $x^2 + y^2 = 3z^2$

La proyección del área perdida sobre el plano y la región limitada por el cilindro $x^2 + y^2 = 4y$ para el cono.

Se proyecta sobre , entonces, usar esta definición:

$$S = \int\int \sqrt{1 + \left(\frac{dz}{dx}\right)^2 + \left(\frac{dz}{dy}\right)^2}\, dA$$

Despejar z= f(x,y)

$$z = \sqrt{\frac{x^2 + y^2}{3}} = \left(\frac{x^2 + y^2}{3}\right)^{\frac{1}{2}}$$

$$\left(\frac{dz}{dx}\right) = \frac{1}{2}\left(\frac{x^2 + y^2}{3}\right)^{-\frac{1}{2}} \frac{2x}{3} = \frac{x}{3} \cdot \frac{1}{\left(\frac{x^2 + y^2}{3}\right)^{\frac{1}{2}}} = \frac{x}{3} \cdot \frac{1}{z} = \frac{x}{3z}$$

$$\left(\frac{dz}{dy}\right) = \frac{1}{2}\left(\frac{x^2 + y^2}{3}\right)^{-\frac{1}{2}} \frac{2y}{3} = \frac{y}{3} \cdot \frac{1}{\left(\frac{x^2 + y^2}{3}\right)^{\frac{1}{2}}} = \frac{y}{3} \cdot \frac{1}{z} = \frac{y}{3z}$$

Aplicar la ecuación

$$S = \int\int \sqrt{1 + \left(\frac{dz}{dx}\right)^2 + \left(\frac{dz}{dy}\right)^2}\, dA$$

$$S = \int\int \sqrt{1 + \left(\frac{x}{3z}\right)^2 + \left(\frac{y}{3z}\right)^2}\, dA$$

$$S = \int\int \sqrt{1 + \frac{x^2}{9z^2} + \frac{y^2}{9z^2}}\, dA$$

$$S = \int\int \sqrt{\frac{9z^2 + x^2 + y^2}{9z^2}}\, dA$$

Pero $x^2 + y^2 = 3z^2$

$$S = \int\int \sqrt{\frac{9z^2 + 3z^2}{9z^2}}\, dA$$

$$S = \int\int \sqrt{\frac{12z^2}{9z^2}}\, dA$$

$$S = \int\int \sqrt{\frac{4}{3}}\, dA = \int\int \frac{2}{\sqrt{3}}\, dA$$

Determinar los límites

$$x^2 + y^2 = 3z^2 \ (1)$$

$$x^2 + y^2 = 4y \ (2)$$

Si x=0 $0^2 + y^2 = 4y$ --- $y = 4$

Si $x = 0$ e $y = 4$ determinar el valor de z.

$$z = \sqrt{\frac{0^2 + 4^2}{3}} = \sqrt{\frac{16}{3}} = \frac{4}{\sqrt{3}} \cdot \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{3}} = \frac{4\sqrt{3}}{3}$$

$$P(x,y,z) = (0,4,\frac{4\sqrt{3}}{3})$$

De $x^2 + y^2 = 4y$ despejar x

$$x = \pm\sqrt{4y - y^2}$$

$$\int_0^4 \int_{-\sqrt{4y-y^2}}^{\sqrt{4y-y^2}} \frac{2}{\sqrt{3}}\, dxdy$$

$$\int_0^4 \frac{2}{\sqrt{3}} \int_{-\sqrt{4y-y^2}}^{\sqrt{4y-y^2}} dx\, dy = \int_0^4 \frac{2}{\sqrt{3}} x \Big|_{-\sqrt{4y-y^2}}^{\sqrt{4y-y^2}} dy$$

$$= \int_0^4 \frac{2}{\sqrt{3}} \left(\sqrt{4y - y^2} - \left(-\sqrt{4y - y^2}\right)\right) dy$$

$$= \int_0^4 \frac{2}{\sqrt{3}} \left(2\sqrt{4y - y^2}\right) dy = \int_0^4 \frac{4}{\sqrt{3}} \left(\sqrt{4y - y^2}\right) dy$$

$$= \frac{4}{\sqrt{3}} \int_0^4 \left(\sqrt{4y - y^2}\right) dy = \frac{4}{\sqrt{3}} \cdot 2\pi = \frac{8\pi}{\sqrt{3}} \cdot \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{3}} = \frac{8\sqrt{3}}{3}\pi$$

Semana 15

Contenidos, recursos y actividades de aprendizaje

Resultado de aprendizaje 15

Calcule el volumen delimitado entre curvas utilizando integrales dobles.

7.2. Subtema

- Cálculo de volúmenes

Actividades de aprendizaje recomendadas

Como último subtema dentro de las aplicaciones de las integrales multivariadas veremos y practicaremos lo referente al cálculo de volúmenes. No se pierda las orientaciones académicas de su tutor; comuníquese por cualquier medio con él, ya sea por mensajería o por el chat de tutorías, para que él aclare sus inquietudes.

Este subtema requiere de los conocimientos adquiridos a lo largo del ciclo. Visualizaremos cálculos y procesos de resolución para la obtención de volúmenes.

Ejemplo:

Calcular por integración doble el volumen del sólido limitado por las superficies.

$$z = 4 - y^2, \quad y = x, z = 0$$

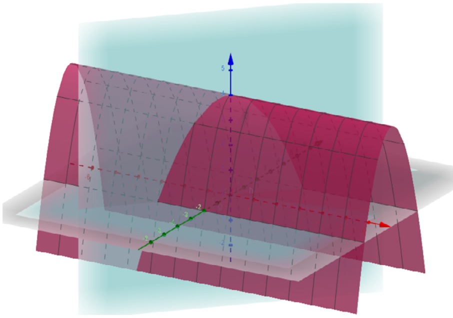


Figura 24. curva $z = 4 - y^2$

Si *R* es el sólido, el volumen *V* se obtiene mediante la integral

$$V = \int_{-2}^{2}\int_{-2}^{x}(4 - y^2)\,dy\,dx$$

$$V = \int_{-2}^{2}\int_{-2}^{x}\left(4y - \frac{y^3}{3}\right)]_{-2}^{x}dx = \int_{-2}^{2}\left(4x - \frac{x^3}{3} + 8 - \frac{8}{3}\right)dx = \frac{64}{3}$$

La intersección de *y* = *x* y *x* = 2 es el punto (2,−2). La intersección de *y* = *x* y *y* = −2 se produce en el punto (−2,−2). Finalmente, *x* = 2 y *y* = −2 se intersecan en (2,−2).

Ejemplo:

Determine el volumen formado por la función z = f(x,y) = 2 - x² en el espacio.

$$R = \{(x, y)\epsilon R^2 tal\ que\ 0 \leq x \leq \sqrt{2};\ 0 \leq y \leq 3\}$$

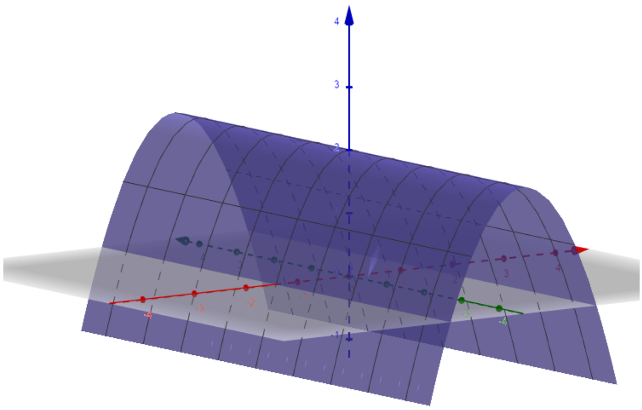


Figura 25. Volumen

$$V = \iint f(x, y)dA = \int_0^{\sqrt{2}} \int_0^3 (2 - x^2)dydx$$

$$V = \int_0^{\sqrt{2}} (2 - x^2)y_0^3\, dx = \int_0^{\sqrt{2}} (2 - x^2)3\, dx$$

$$= \int_0^{\sqrt{2}} (6 - 3x^2)\, dx = (6x - x^3)_0^{\sqrt{2}} = 4\sqrt{2}u^3$$

Actividades finales del bimestre

Semana 16

Resultado de aprendizaje 16	Conoce los contenidos desarrollados en las semanas anteriores

Contenidos, recursos y actividades de aprendizaje

7.3. Subtema

- Repaso general

Actividades de aprendizaje recomendadas

Índice
Primer bimestre
Segundo bimestre
Solucionario
Glosario
Referencias bibliográficas

Esta semana es muy importante, ya que usted debe prepararse para la segunda evaluación presencial, en la que deberá realizar lo siguiente:

- Revisión de los contenidos del segundo bimestre como preparación para la evaluación presencial correspondiente.
- Participar de las tutorías semanales.
- Exponer sus inquietudes académicas.
- Contactarse frecuentemente con su tutor.

4. Solucionario

Cada semana el docente tutor le guiará con las lecturas y los ejercicios tipo correspondientes al tema.

Índice
Primer bimestre
Segundo bimestre
Solucionario
Glosario
Referencias bibliográficas

Índice
Primer bimestre
Segundo bimestre
Solucionario
Glosario
Referencias bibliográficas

5. Glosario

Término	Concepto
Derivada	La derivada de una función $f(x)$ o función derivada de $f(x)$, es aquella función, denotada $f'(x)$, que asocia a cada x la rapidez de cambio de la función original $f(x)$ en ese punto, es decir, su tasa de variación instantánea.
Diferencial	Si $f(x)$ es una función derivable, la diferencial de una función correspondiente al incremento h de la variable independiente es el producto $f'(x).h$
Integral	En la matemática, la integral es el signo que indica la integración y el resultado de integrar una expresión diferencial.
Integral definida	Dada una función $f(x)$ y un intervalo $[a,b]$, la integral definida es igual al área limitada entre la gráfica de $f(x)$, el eje de abscisas y las rectas verticales $x = a$ y $x = b$.
Integral indefinida	Es el conjunto de las infinitas primitivas que puede tener una función.
Función Primitiva	Se dice que una función $F(x)$ es una primitiva de otra función $f(x)$ sobre un intervalo (a, b) si para todo x de (a, b) se tiene que $F'(x) = f(x)$.
Antiderivada	La antiderivada es la función que resulta del proceso inverso de la derivación, es decir, consiste en encontrar una función que, al ser derivada, produce la función dada.
Continuidad	Una función continua es aquella para la cual intuitivamente, para puntos cercanos del dominio se producen pequeñas variaciones en los valores de la función.

Término	Concepto
Discontinuo	Si la función no es continua se dice que es discontinua.
Curva	Es una línea continua de una dimensión, que varía de dirección paulatinamente.
Función	Es una línea continua de una dimensión que varía de dirección paulatinamente.
Intervalo	Se llama intervalo al conjunto de números reales comprendidos entre otros dos dados: *a* y *b* que se llaman extremos del intervalo. Es un conjunto comprendido entre dos valores.
Límite	El límite describe la tendencia de una sucesión o una función, a medida que los parámetros de esa función se acercan a determinado valor.
Perpendicular	Rectas que se cortan formando ángulos rectos.
Análisis univariable	Un análisis univariable analiza la relación entre una variable y otra. Ejemplo: el tabaquismo y la enfermedad coronaria.
Análisis multivariable	Es un tipo de análisis estadístico que trata de evaluar la asociación independiente de una variable con un evento, teniendo también en cuenta la participación simultánea de otras variables. Ejemplo: el análisis multivariable analizará la relación del tabaquismo y la enfermedad coronaria en presencia de otras variables como hipertensión, diabetes, hipercolesterolemia, etc.
Variable	Una variable es la expresión simbólica representativa de un elemento no especificado cuyo valor puede ser modificado.
Vector	Un vector es todo segmento de recta dirigido en el espacio. Cada vector posee las siguientes características: origen, módulo, dirección, sentido.

Índice
Primer bimestre
Segundo bimestre
Solucionario
Glosario
Referencias bibliográficas

6. Referencias bibliográficas

A-PRÁCTICAS-CDI-I-Cálculo Diferencial e Integral, selección de ejercicios con respuestas, (2019).

Ayres, F., Cálculo Diferencial e Integral, (2010)

Haeussler, Ernest F, JR, Matemáticas para la Administración y la Economía, Décimo tercera Edición. 2015. Pearson Educación de México S.A.

Hernández, E. (2009). Calculo diferencial e integral, con aplicaciones, Costa Rica.

Kolman, B., Sistemas de coordenadas y vectores, (2013).

Mora, W., Cálculo en Varias Variables, (2019)

Puchaicela, P, Guía Didáctica de Álgebra Lineal, UTPL, (2015)

Sydsaeter,K., Matemáticas para el análisis económico, (2012)

Villalobos, E. Primer curso de cálculo de varias variables con aplicaciones en Matlab, (2014)

Yépez, C., Guía Didáctica de Cálculo, UTPL, (2015)