Métodos Iterativos : Jacobi y Gauss - Seidel

Supongamos que tenemos un sistema de ecuaciones lineales:

$$\begin{array}{lcl}
a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1j}x_j + \dots + a_{1N}x_N & = & b_1 \\
a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2j}x_j + \dots + a_{2N}x_N & = & b_2 \\
\vdots & & \vdots \\
a_{j1}x_1 + a_{j2}x_2 + \dots + a_{jj}x_j + \dots + a_{jN}x_N & = & b_j \\
\vdots & & \vdots \\
a_{N1}x_1 + a_{N2}x_2 + \dots + a_{Nj}x_j + \dots + a_{NN}x_N & = & b_N
\end{array} \qquad (9)$$

→ Sea:

$\mathbb{P}_0 = (x_1^{(0)}, x_2^{(0)}, \dots, x_j^{(0)}, \dots, x_N^{(0)})$ el punto o vector de partida,

y $\mathbb{P}_K = (x_1^{(K)}, x_2^{(K)}, \dots, x_j^{(K)}, \dots, x_N^{(K)})$ el K-ésimo punto obtenido,

de manera que el siguiente punto es:

$$\mathbb{P}_{K+1} = (x_1^{(K+1)}, x_2^{(K+1)}, \dots, x_j^{(K+1)}, \dots, x_N^{(K+1)})$$

→ Las fórmulas de iteración usan la fila j-ésima de (9) para despejar $x_j^{(K+1)}$ como una combinación lineal de los valores previamente obtenidos:

Método Iterativo de Jacobi:

$$x_j^{(K+1)} = \frac{b_j - a_{j1}x_1^{(K)} - \dots - a_{j\,j-1}x_{j-1}^{(K)} - a_{j\,j+1}x_{j+1}^{(K)} - \dots - a_{jN}x_N^{(K)}}{a_{jj}} \; ; \; j = 1, 2, \dots, N \qquad (10)$$

- Se usan todas las coordenadas del punto anterior en la obtención de las coordenadas del punto siguiente.

Método Iterativo de Gauss - Seidel:

$$x_j^{(K+1)} = \frac{b_j - a_{j1}x_1^{(K+1)} - \dots - a_{j\,j-1}x_{j-1}^{(K+1)} - a_{j\,j+1}x_{j+1}^{(K)} - \dots - a_{jN}x_N^{(K)}}{a_{jj}} \; ; \; j = 1, 2, \dots, N \qquad (11)$$

- Se emplean las coordenadas nuevas conforme se van generando.

Def: Se dice que una matriz $\mathbb{A}$ de orden $N \times N$ es de diagonal estrictamente dominante (DED) cuando:

$$|a_{KK}| > \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq K}}^{N} |a_{Kj}| \quad ; \quad K = 1, 2, \dots, N$$

En cada fila de la matriz, el tamaño del elemento que está en la diagonal principal debe ser mayor que la suma de los tamaños de todos los demás elementos de la fila.

Teorema: (Método Iterativo de Jacobi). Sea $\mathbb{A}$ una matriz de DED $\Rightarrow$ el sistema de ecuaciones lineales $\mathbb{A}\mathbb{X} = \mathbb{B}$ tiene solución única $\mathbb{X} = \mathbb{P}$. Además, el proceso iterativo dado por (10) produce una sucesión de vectores $\{\mathbb{P}_K\}$ que converge a $\mathbb{P}$ cualquiera que sea el vector de partida $\mathbb{P}_0$.

- Puede probarse que el método iterativo de Gauss - Seidel también converge cuando la matriz $\mathbb{A}$ es de DED (así como para matrices simétricas definidas positivas).

- Normalmente, el método de Gauss - Seidel converge más rápidamente que el de Jacobi, por lo que es el que se suele preferir.

- Se dan casos, sin embargo, en los que el método de Jacobi converge pero el de Gauss - Seidel no.

✓ Convergencia: Para determinar si una sucesión $\{\mathbb{P}_K\}$ converge a $\mathbb{P}$, es necesario tener una medida de la cercanía entre vectores. La distancia euclídea entre $\mathbb{P} = (x_1, x_2, \dots, x_N)$ y $\mathbb{Q} = (y_1, y_2, \dots, y_N)$ está dada por:

$$\| \mathbb{P} - \mathbb{Q} \| = \left(\sum_{j=1}^{N} (x_j - y_j)^2 \right)^{1/2}$$

(Jacobi)

Ejemplo: Consideremos el sistema de ecuaciones:

$$\begin{aligned} 4x - y + z &= 7 \\ 4x - 8y + z &= -21 \\ -2x + y + 5z &= 15 \end{aligned} \qquad \text{Solución: } (2, 4, 3) \qquad (1)$$

Estas ecuaciones las podemos escribir como:

$$x = \frac{7 + y - z}{4}$$

$$y = \frac{21 + 4x + z}{8} \qquad (2)$$

$$z = \frac{15 + 2x - y}{5}$$

Lo que sugiere el siguiente proceso iterativo:

$$x_{K+1} = \frac{7 + y_K - z_K}{4}$$

$$y_{K+1} = \frac{21 + 4x_K + z_K}{8} \qquad (3)$$

$$z_{K+1} = \frac{15 + 2x_K - y_K}{5}$$

Sustituyendo $\mathbb{P}_0 = (x_0, y_0, z_0) = (1, 2, 2)$ en el lado derecho de (3) obtenemos:

$$x_1 = \frac{7+2-2}{4} = 1,75$$

$$y_1 = \frac{21+4+2}{8} = 3,375$$

$$z_1 = \frac{15+2-2}{5} = 3,00$$

El nuevo punto $\mathbb{P}_1 = (1.75, 3.375, 3.00)$ está más cerca de $(2, 4, 3)$ que $\mathbb{P}_0$.

K	x_K	y_K	z_K
0	1.0	2.0	2.0
1	1,75	3,375	3.0
2	1,84375	3,875	3,025
3	1,9625	3,925	2,9625
⋮	⋮	⋮	⋮
15	1,99999993	3,99999925	2,99999993
⋮	⋮	⋮	⋮
19	2.00000000	4.00000000	3.00000000

Los puntos $\{\mathbb{P}_K\}$ generados por (3) convergen a $(2,4,3)$

D.E.D de (1):

$$\left.\begin{array}{lll} \cdot\ 1a.\ \text{fila}: & |4| > |-1| + |1| \\ \cdot\ 2a.\ \text{fila}: & |-8| > |4| + |1| \\ \cdot\ 3a.\ \text{fila}: & |5| > |-2| + |1| \end{array}\right\} \Rightarrow$$

La matriz de coeficientes $\mathbb{A}$ del sistema (1) es de D.E.D.

Ejemplo: (Gauss - Seidel): Consideremos el sistema de ecuaciones de (1) y el proceso iterativo, llamado método de Gauss-Seidel, sugerido por (11):

$$\begin{aligned} x_{K+1} &= \frac{7+y_K-z_K}{4} \\ y_{K+1} &= \frac{21+4x_{K+1}+z_K}{8} \\ z_{K+1} &= \frac{15+2x_{K+1}-y_{K+1}}{5} \end{aligned} \qquad (7)$$

Empezamos con $\mathbb{P}_0 = (x_0, y_0, z_0) = (1, 2, 2)$

Sustituyendo $y_0 = 2$ y $z_0 = 2$ en la primera ecuación de (7) obtenemos:

$$x_1 = \frac{7+2-2}{4} = 1,75$$

Sustituyendo ahora $x_1 = 1,75$ y $z_0 = 2$ en la segunda ecuación de (7) obtenemos:

$$y_1 = \frac{21 + 4(1,75) + 2}{8} = 3,75$$

Finalmente, sustituyendo $x_1 = 1,75$ y $y_1 = 3,75$ en la tercera ecuación de (7) se tiene:

$$z_1 = \frac{15 + 2(1.75) - 3,75}{5} = 2,95$$

El nuevo punto $\mathbb{P}_1 = (1,75,\ 3.75,\ 2,95)$ está más cerca de $(2, 4, 3)$ que $\mathbb{P}_0$ y es mejor que el punto obtenido en el ejemplo anterior.

K	x_K	y_K	z_K
0	1.0	2.0	2.0
1	1.75	3,75	2,95
2	1.95	3.56875	2,98623
3	1.995625	3,99609375	2,99903125
⋮	⋮	⋮	⋮
8	1,99999985	3,99999988	2.99999996
9	1,99999998	3,99999999	3,00000000
10	2,00000000	4,00000000	3,00000000

Los puntos $\{\mathbb{P}_K\}$ generados por (7) convergen a $(2,4,3)$