Ejemplos de integración numérica

Profesor
Edgar Miguel Vargas Chaparro
Monitor
Sebastian Guerrero Salinas

Fórmulas de Cuadratura de Newton-Cotes

Se desea integrar la función $f(x) = 1 + e^{-x} sin(4x)$ en el intervalo $[a, b] = [0, 1]$

- Para dicho cálculo se aplicarán las fórmulas:

$$\int_{x_0}^{x_1} f(x)dx \approx \frac{h}{2}(f_0 + f_1) \qquad \text{Regla del trapecio} \qquad (1)$$

$$\int_{x_0}^{x_2} f(x)dx \approx \frac{h}{3}(f_0 + 4f_1 + f_2) \qquad \text{Regla de Simpson} \qquad (2)$$

Fórmulas de Cuadratura de Newton-Cotes

$$\int_{x_0}^{x_3} f(x)dx \approx \frac{3h}{8}(f_0 + 3f_1 + 3f_2 + f_3) \qquad \text{Regla } \frac{3}{8} \text{ de Simpson} \quad (3)$$

$$\int_{x_0}^{x_4} f(x)dx \approx \frac{2h}{45}(7f_0 + 32f_1 + 12f_2 + 32f_3 + 7f_4) \quad \text{Regla de Boole} \quad (4)$$

Fórmulas de Cuadratura de Newton-Cotes

- Para la regla del trapecio tenemos $h = 1$ y el resultado es

$$\int_0^1 f(x)dx \approx \frac{1}{2}(f(0) + f(1))$$

$$= \frac{1}{2}(1.00000 + 0.72159) = 0.86079$$

Fórmulas de Cuadratura de Newton-Cotes

- Para la regla de Simpson tenemos $h = \frac{1}{2}$ y el resultado es

$$\int_0^1 f(x)dx \approx \frac{1/2}{3}(f(0) + 4f\left(\tfrac{1}{2}\right) + f(1))$$

$$= \frac{1}{6}(1.00000 + 4(1.55152) + 0.72159) = 1.32128$$

Fórmulas de Cuadratura de Newton-Cotes

- Para la regla $\frac{3}{8}$ de Simpson tenemos $h = \frac{1}{3}$ y el resultado es

$$\int_0^1 f(x)dx \approx \frac{3(1/3)}{8}(f(0) + 3f(\tfrac{1}{3}) + 3f(\tfrac{2}{3}) + f(1))$$

$$= \frac{1}{8}(1.00000 + 3(1.69642) + 3(1.23447) + 0.72159) = 1.31440$$

- Para la regla de Boole tenemos $h = \frac{1}{4}$ y el resultado es

$$\int_0^1 f(x)dx \approx \frac{2(1/4)}{45}(7f(0)+32f(\tfrac{1}{4})+12f(\tfrac{1}{2})+32f(\tfrac{3}{4}))+7f(1)$$

$$= \frac{1}{90}(7(1.00000) + 32(1.65534) + 12(1.55152) +$$

$$32(1.06666) + 7(0.72159)) = 1.30859$$

- El valor exacto de esta integral definida es

$$\int_0^1 f(x)dx = \frac{21e - 4cos(4) - sin(4)}{17e} = 1.3082506046426$$

- Así que la aproximación 1.30859 dada por la regla de Boole es la mejor.
- Las áreas limitadas por cada uno de los polinomios interpoladores de Lagrange $P_1(x)$, $P_2(x)$, $P_3(x)$ y $P_4(x)$ se muestran a continuación:

Fórmulas de Cuadratura de Newton-Cotes

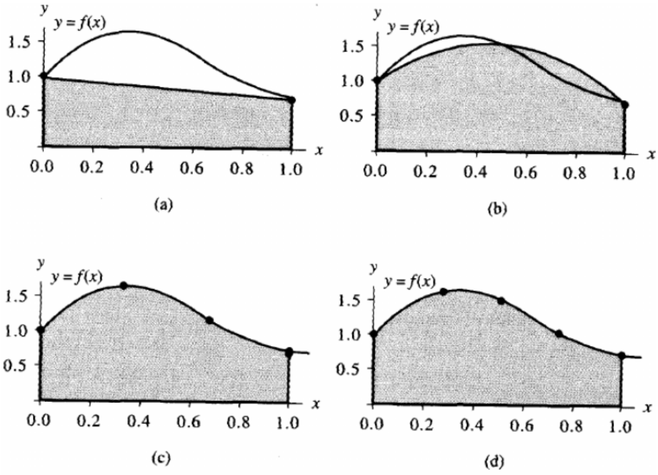

Figura: Representación de reglas de trapecio, Simpson, $\frac{3}{8}$ de Simpson y Boole con sus respectivas aproximaciones

Reglas compuestas del trapecio y de Simpson

Consideremos $f(x) = 2 + sin(2\sqrt{x})$

- Vamos a usar la regla compuesta del trapecio con 11 nodos para calcular una aproximación a la integral de $f(x)$ en el intervalo $[1, 6]$
- Para generar los once nodos, tomamos $M = 10$, con lo que $h = (6-1)/10 = 1/2$. Usando la fórmula

$$T(f, h) = \frac{h}{2}(f(a) + f(b)) + h\sum_{k=1}^{M-1} f(x_k) \tag{5}$$

los cálculos son

$$T(f,\frac{1}{2})=\frac{1/2}{2}(f(1)+f(6))$$

$$+\frac{1}{2}(f(\tfrac{3}{2})+f(2)+f(\tfrac{5}{2})+f(3)+f(\tfrac{7}{2})+f(4)+f(\tfrac{9}{2})+f(5)+f(\tfrac{11}{2}))$$

$$=\frac{1}{4}(2.90929743+1.01735756)$$

$$+\frac{1}{2}(2.63815764+2.30807174+1.97931647+1.68305284$$

$$+1.43530410+1.24319750+1.10831775+1.02872220+1.00024140)$$

$$=\frac{1}{4}(3.92665499)+\frac{1}{2}(14.42438165)$$

$$=0.98166375+7.21219083=8.19385457$$

Reglas compuestas del trapecio y de Simpson

Consideremos $f(x) = 2 + sin(2\sqrt{x})$

- Vamos a usar la regla compuesta de Simpson con 11 nodos para calcular una aproximación a la integral de $f(x)$ en el intervalo $[1, 6]$
- Para generar los once nodos, tomamos $M = 5$, con lo cual se tiene $h = (6 - 1)/10 = 1/2$. Usando la fórmula

$$S(f, h) = \frac{h}{3}(f(a) + f(b)) + \frac{2h}{3}\sum_{k=1}^{M-1} f(x_{2k}) + \frac{4h}{3}\sum_{k=1}^{M} f(x_{2k-1}) \tag{6}$$

los cálculos son

Reglas compuestas del trapecio y de Simpson

$$S(f,\frac{1}{2}) = \frac{1}{6}(f(1)+f(6)) + \frac{1}{3}(f(2)+f(3)+f(4)+f(5))$$

$$+\frac{2}{3}(f(\tfrac{3}{2})+f(\tfrac{5}{2})+f(\tfrac{7}{2})+f(\tfrac{9}{2})+f(\tfrac{11}{2}))$$

$$= \frac{1}{6}(2.90929743 + 1.01735756)$$

$$+\frac{1}{3}(2.30807174 + 1.68305284 + 1.24319750 + 1.02872220)$$

$$+\frac{2}{3}(2.63815764+1.97931647+1.43530410+1.10831775+1.00024140)$$

$$= \frac{1}{6}(3.92665499) + \frac{1}{3}(6.26304429) + \frac{2}{3}(8.16133735)$$

$$= 0.65444250 + 2.08768143 + 5.44089157 = 8.18301550$$

Reglas compuestas del trapecio y de Simpson

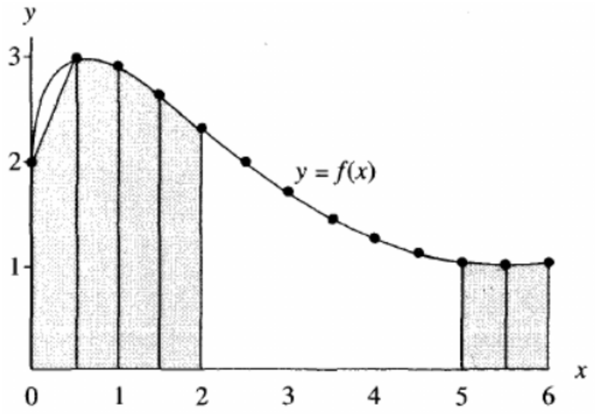

Figura: Aproximación al área limitada por la curva $y = 2 + sin(2\sqrt{x})$ mediante la regla compuesta del trapecio

Reglas compuestas del trapecio y de Simpson

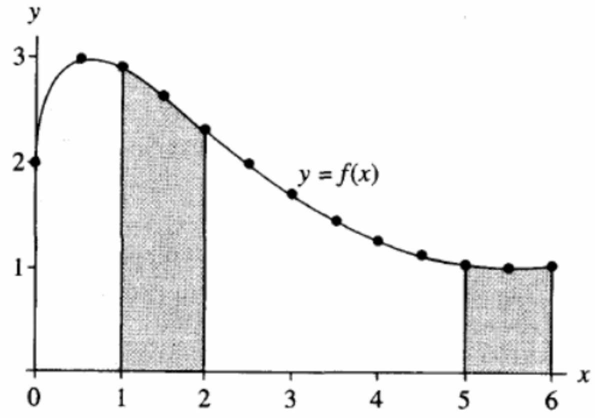

Figura: Aproximación al área limitada por la curva $y = 2 + sin(2\sqrt{x})$ mediante la regla compuesta de Simpson