Ejemplos de solución de sistemas de ecuaciones lineales

Profesor
Edgar Miguel Vargas Chaparro
Monitor
Sebastian Guerrero Salinas

Sistemas lineales triangulares

Se utilizará el método de sustitución regresiva para resolver el sistema lineal

$$\begin{aligned} 4x_1 - x_2 + 2x_3 + 3x_4 &= 20 \\ -2x_2 + 7x_3 - 4x_4 &= -7 \\ 6x_3 + 5x_4 &= 4 \\ 3x_4 &= 6 \end{aligned}$$

Sistemas lineales triangulares

Despejando x_4 en la última ecuación y se obtiene

$$x_4 = \frac{6}{3} = 2$$

Reemplazando $x_4 = 2$ en la tercera ecuación, obtenemos

$$x_3 = \frac{4 - 5(2)}{6} = -1$$

Sistemas lineales triangulares

Ahora usamos los valores de $x_3 = -1$ y $x_4 = 2$ para despejar x_2 en la segunda ecuación:

$$x_2 = \frac{-7 - 7(-1) + 4(2)}{-2} = -4$$

Finalmente, x_1 se obtiene de la primera ecuación

$$x_1 = \frac{20 + 1(-4) - 2(-1) - 3(2)}{4} = 3$$

Sistemas lineales triangulares

La condición $a_{kk} \neq 0$: es esencial porque en la fórmula

$$x_k = \frac{b_k - \sum_{j=k+1}^{N} a_{kj} x_j}{a_{kk}} \qquad k = N-1, N-2, ..., 1$$

hay que dividir entre a_{kk}. Si este requisito no se cumple, entonces o bien no hay solución o bien hay infinitas soluciones.

Eliminación gaussiana y pivoteo

Vamos a expresar el siguiente sistema en forma de matriz ampliada, luego hallaremos un sistema triangular superior que sea equivalente y, finalmente la solución

$$\begin{aligned} x_1 + 2x_2 + x_3 + 4x_4 &= 13 \\ 2x_1 + 0x_2 + 4x_3 + 3x_4 &= 28 \\ 4x_1 + 2x_2 + 2x_3 + x_4 &= 20 \\ -3x_1 + x_2 + 3x_3 + 2x_4 &= 6 \end{aligned}$$

Eliminación gaussiana y pivoteo

La matriz ampliada es

$$\left[\begin{array}{rrrr|r} \underline{1} & 2 & 1 & 4 & 13 \\ 2 & 0 & 4 & 3 & 28 \\ 4 & 2 & 2 & 1 & 20 \\ -3 & 1 & 3 & 2 & 6 \end{array}\right]$$

La primera fila se usa para eliminar los elementos de la primera columna que están por debajo de la diagonal principal. En este paso, esta primera fila es la fila pivote y su elemento $a_{11} = 1$ es el elemento pivote. Los valores $m_{k1} = a_{k1}/a_{11}$ para $(k = 2, 3, 4)$ son los multiplicadores, o sea, los escalares por los que hay que multiplicar la primera fila para, restando de la fila k-ésima el correspondiente múltiplo de la primera fila, hacer cero el elemento a_{k1}.

Eliminación gaussiana y pivoteo

El resultado de la eliminación es

$$\left[\begin{array}{rrrr|r} 1 & 2 & 1 & 4 & 13 \\ 0 & \underline{\text{-}4} & 2 & -5 & 2 \\ 0 & -6 & -2 & -15 & -32 \\ 0 & 7 & 6 & 14 & 45 \end{array}\right]$$

Ahora, usamos la segunda fila para eliminar los elementos de la segunda columna que están por debajo de la diagonal principal. Esta segunda fila es la fila pivote y los valores $m_{k2} = a_{k2}/a_{22}$ (para $k = 3, 4$) son los multiplicadores.

El resultado de la eliminación es

$$\left[\begin{array}{rrrr|r} 1 & 2 & 1 & 4 & 13 \\ 0 & -4 & 2 & -5 & 2 \\ 0 & 0 & \underline{\textbf{-5}} & -7{,}5 & -35 \\ 0 & 0 & 9{,}5 & 5{,}25 & 48{,}5 \end{array}\right]$$

Finalmente, restamos de la cuarta fila la tercera multiplicada por $m_{43} = a_{43}/a_{33} = -1{,}9$.

Eliminación gaussiana y pivoteo

El resultado es el sistema triangular superior:

$$\left[\begin{array}{rrrr|r} 1 & 2 & 1 & 4 & 13 \\ 0 & -4 & 2 & -5 & 2 \\ 0 & 0 & -5 & -7{,}5 & -35 \\ 0 & 0 & 0 & -9 & -18 \end{array}\right]$$

Eliminación gaussiana y pivoteo

Usando el algoritmo de sustitución regresiva para resolver el sistema triangular superior anterior se obtiene

$$x_4 = 2, \qquad x_3 = 4, \qquad x_2 = -1, \qquad x_1 = 3.$$

Eliminación gaussiana y pivoteo

- El proceso anterior es la **eliminación gaussiana o método de eliminación de Gauss** pero se debe modificar para que funcione en casi toda ocasión. El problema que se puede dar es que si $a_{kk} = 0$, entonces no se puede usar la fila k-ésima para eliminar los elementos de la columna k-ésima que están por debajo de la diagonal principal.

Eliminación gaussiana y pivoteo

- Lo que se hace es intercambiar la fila k-ésima con alguna fila posterior para conseguir un elemento pivote que no sea cero; si esto no puede hacerse, entonces la matriz de los coeficientes del sistema es singular y el sistema no tiene solución única

Factorización triangular

Se va a resolver

$$
\begin{aligned}
x_1 + 2x_2 + 4x_3 + x_4 &= 21\\
2x_1 + 8x_2 + 6x_3 + 4x_4 &= 52\\
3x_1 + 10x_2 + 8x_3 + 8x_4 &= 79\\
4x_1 + 12x_2 + 10x_3 + 6x_4 &= 82
\end{aligned}
$$

Factorización triangular

Usando el método descrito antes y sabiendo que la matriz de los coeficientes admite la factorización triangular

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 4 & 1 \\ 2 & 8 & 6 & 4 \\ 3 & 10 & 8 & 8 \\ 4 & 12 & 10 & 6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & 1 & 1 & 0 \\ 4 & 1 & 2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 4 & 1 \\ 0 & 4 & -2 & 2 \\ 0 & 0 & -2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & -6 \end{bmatrix} = \mathbf{LU}$$

Factorización triangular

Usando el algoritmo de sustitución progresiva resolvemos $\boldsymbol{LY} = \boldsymbol{B}$

$$y_1 = 21$$

Usando el algoritmo de sustitución progresiva resolvemos $\boldsymbol{LY} = \boldsymbol{B}$

$$
\begin{aligned}
y_1 &= 21 \\
2y_1 + y_2 &= 52
\end{aligned}
$$

Factorización triangular

Usando el algoritmo de sustitución progresiva resolvemos $\boldsymbol{LY} = \boldsymbol{B}$

$$
\begin{aligned}
y_1 &= 21 \\
2y_1 + y_2 &= 52 \\
3_{y1} + y_2 + y_3 &= 79
\end{aligned}
$$

Factorización triangular

Usando el algoritmo de sustitución progresiva resolvemos $\boldsymbol{LY} = \boldsymbol{B}$

$$
\begin{aligned}
y_1 &= 21 \\
2y_1 + y_2 &= 52 \\
3_{y1} + y_2 + y_3 &= 79 \\
4y_1 + y_2 + 2y_3 + y_4 &= 82,
\end{aligned}
$$

Obteniendo $y_1 = 21$, $y_2 = 52 - 2(21) = 10$, $y_3 = 79 - 3(21) - 10 = 6$ e $y_4 = 82 - 4(21) - 10 - 2(6) = -24$, o sea, $\boldsymbol{Y} = \begin{bmatrix} 21 & 10 & 6 & -24 \end{bmatrix}'$.

Factorización triangular

Ahora escribimos el sistema $\boldsymbol{UX} = \boldsymbol{Y}$.

$$\begin{aligned} x_1 + 2x_2 + 4x_3 + x_4 &= 21 \\ 4x_2 - 2x_3 + 2x_4 &= 10 \\ -2x_3 + 3x_4 &= 6 \\ -6x_4 &= -24 \end{aligned}$$

Con el método de sustitución regresiva, se calcula la solución $x_4 = -24/(-6) = 4$, $x_3 = (6 - 3(4))/(-2) = 3$, $x_2 = (10 - 2(4) + 2(3))/4 = 2$ y $x_1 = 21 - 4 - 4(3) - 2(2) = 1$, o sea $\boldsymbol{X} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \end{bmatrix}'$