MÉTODOS ITERATIVOS: JACOBI Y GAUSS-SEIDEL

Supongamos que tenemos un sist. de ecs. lineales

$$\begin{aligned}
a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1j}x_j + \cdots + a_{1N}x_N &= b_1 \\
a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2j}x_j + \cdots + a_{2N}x_N &= b_2 \\
\vdots \qquad & \quad \vdots \\
a_{j1}x_1 + a_{j2}x_2 + \cdots + a_{jj}x_j + \cdots + a_{jN}x_N &= b_j \\
\vdots \qquad & \quad \vdots \\
a_{N1}x_1 + a_{N2}x_2 + \cdots + a_{Nj}x_j + \cdots + a_{NN}x_N &= b_N
\end{aligned} \qquad (9)$$

→ Sea

$\mathbb{P}_0 = (x_1^{(0)}, x_2^{(0)}, \ldots, x_j^{(0)}, \ldots, x_N^{(0)})$ el punto o vector de partida,

y

$\mathbb{P}_k = (x_1^{(k)}, x_2^{(k)}, \ldots, x_j^{(k)}, \ldots, x_N^{(k)})$ el k-ésimo punto obtenido,

de manera que el sgte. punto es:

$$\mathbb{P}_{k+1} = (x_1^{(k+1)}, x_2^{(k+1)}, \ldots, x_j^{(k+1)}, \ldots, x_N^{(k+1)})$$

→ Las fórmulas de iteración usan la fila j-ésima de (9) para despejar $x_j^{(k+1)}$ como una comb. lineal de los valores previamente obtenidos:

Método iterativo de Jacobi:

$$x_j^{(k+1)} = \frac{b_j - a_{j1}x_1^{(k)} - \cdots - a_{j\,j-1}x_{j-1}^{(k)} - a_{j\,j+1}x_{j+1}^{(k)} - \cdots - a_{jN}x_N^{(k)}}{a_{jj}} \; ; \quad j = 1, 2, \ldots, N. \qquad (10)$$

Se usan todas las coord. del punto anterior en la obtención de las coord. del punto nuevo.

Método iterativo de Gauss-Seidel:

$$x_j^{(k+1)} = \frac{b_j - a_{j1}x_1^{(k+1)} - \cdots - a_{j\,j-1}x_{j-1}^{(k+1)} - a_{j\,j+1}x_{j+1}^{(k)} - \cdots - a_{jN}x_N^{(k)}}{a_{jj}} \; ; \quad j = 1, 2, \ldots, N. \qquad (11)$$

Se emplean las coords. nuevas conforme se van generando.

Def.: Se dice que una matriz $\mathbb{A}$ de orden $N \times N$ es de diagonal estrictamente dominante (DED) cuando

$$|a_{kk}| > \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq k}}^{N} |a_{kj}| \quad ; \quad k = 1, 2, \ldots, N \qquad (8)$$

En c/fila de la matriz, el tamaño del elemento que está en la diag. ppal. debe ser mayor que la suma de los tamaños de todos los demás elementos de la fila.

T.: (Método iterativo de Jacobi). Sea $\mathbb{A}$ una matriz de DED. $\Rightarrow$ el sist. de ecs. lineales $\mathbb{A}\mathbb{X} = \mathbb{B}$ tiene sol. única $\mathbb{X} = \mathbb{P}$. Además, el proceso iterativo dado por (10) produce una sucesión de vectores $\{\mathbb{P}_k\}$ que converge a $\mathbb{P}$ cualquiera que sea el vector de partida $\mathbb{P}_0$.

- Puede probarse que el método iterativo de Gauss-Seidel también converge cuando la matriz $\mathbb{A}$ es de DED (así como para matrices simétricas definidas positivas.)

- Normalmente, el método de Gauss-Seidel converge más rápidamente que el de Jacobi, por lo que es el que se suele preferir.

- Se dan casos, sin embargo, en los que el método de Jacobi converge pero el de Gauss-Seidel no.

✓ Convergencia: Para determinar si una sucesión $\{\mathbb{P}_k\}$ converge a $\mathbb{P}$, es necesario tener una medida de la cercanía entre vectores. La distancia euclídea entre $\mathbb{P} = (x_1, x_2, \ldots, x_N)$ y $Q = (y_1, y_2, \ldots, y_N)$ está dada por

$$\|\mathbb{P} - Q\| = \left(\sum_{j=1}^{N} (x_j - y_j)^2 \right)^{1/2}.$$

(Jacobi)

Ej. Consideremos el sist. de ecs.:

$$\begin{aligned} 4x - y + z &= 7 \\ 4x - 8y + z &= -21 \\ -2x + y + 5z &= 15. \end{aligned} \Rightarrow \quad Sol.: (2, 4, 3) \qquad (1)$$

Estas ecs. las podemos escribir como:

$$\begin{aligned} x &= \frac{7 + y - z}{4} \\ y &= \frac{21 + 4x + z}{8} \\ z &= \frac{15 + 2x - y}{5}, \end{aligned} \qquad (2)$$

lo que sugiere el sgte. proceso iterativo:

$$\begin{aligned} x_{k+1} &= \frac{7 + y_k - z_k}{4} \\ y_{k+1} &= \frac{21 + 4x_k + z_k}{8} \\ z_{k+1} &= \frac{15 + 2x_k - y_k}{5}. \end{aligned} \qquad (3)$$

Sustituyendo $\mathbb{P}_0 = (x_0, y_0, z_0) = (1, 2, 2)$ en el lado derecho de (3), obtenemos

$$x_1 = \frac{7+2-2}{4} = 1.75$$

$$y_1 = \frac{21+4+2}{8} = 3.375$$

$$z_1 = \frac{15+2-2}{5} = 3.00$$

El nuevo punto $\mathbb{P}_1 = (1.75, 3.375, 3.00)$ está más cerca de $(2,4,3)$ que $\mathbb{P}_0$.

k	x_k	y_k	z_k
0	1.0	2.0	2.0
1	1.75	3.375	3.0
2	1.84375	3.875	3.025
3	1.9625	3.925	2.9625
⋮	⋮	⋮	⋮
15	1.99999993	3.99999925	2.99999993
⋮	⋮	⋮	⋮
19	2.00000000	4.00000000	3.00000000

Los puntos $\{\mathbb{P}_k\}$ generados por (3) convergen a $(2,4,3)$.

D.E.D. : De (1)

- 1a. fila: $|4| > |-1| + |1|$
- 2a. " : $|-8| > |4| + |1|$
- 3a. " : $|5| > |-2| + |1|$.

$\Rightarrow$ La matriz de coefs. $\mathbb{A}$ del sist. (1) es de DED.

Ej.: (Gauss-Seidel). Consideremos el sist. de ecs. de (1) y el proceso iterativo, llamado método de Gauss-Seidel, sugerido por (2):

$$x_{k+1} = \frac{7 + y_k - z_k}{4}$$

$$y_{k+1} = \frac{21 + 4x_{k+1} + z_k}{8} \qquad (7)$$

$$z_{k+1} = \frac{15 + 2x_{k+1} - y_{k+1}}{5}.$$

Empezamos con $\mathbb{P}_0 = (x_0, y_0, z_0) = (1, 2, 2)$.
Sustituyendo $y_0 = 2$ y $z_0 = 2$ en la 1a. ec. de (7) obtenemos

$$x_1 = \frac{7+2-2}{4} = 1.75$$

Sustituyendo ahora $x_1 = 1.75$ y $z_0 = 2$ en la 2a. ec. de (7) obtenemos

$$y_1 = \frac{21 + 4(1.75) + 2}{8} = 3.75$$

Finalmente, sustituyendo $x_1 = 1.75$ y $y_1 = 3.75$ en la 3a. ec. de (7) obtenemos

$$z_1 = \frac{15 + 2(1.75) - 3.75}{5} = 2.95$$

El nuevo punto $P_1 = (1.75, 3.75, 2.95)$ está más cerca de $(2,4,3)$ que P_0 y es mejor que el punto obtenido en el ej. anterior.

k	x_k	y_k	z_k
0	1.0	2.0	2.0
1	1.75	3.75	2.95
2	1.95	3.96875	2.98625
3	1.995625	3.99609375	2.99903125
⋮	⋮	⋮	⋮
8	1.99999983	3.99999988	2.99999996
9	1.99999998	3.99999999	3.00000000
10	2.00000000	4.00000000	3.00000000

Los puntos $\{P_k\}$ generados por (7) convergen a $(2,4,3)$.