Ejemplos de ajuste de curvas

Profesor
Edgar Miguel Vargas Chaparro
Monitor
Sebastian Guerrero Salinas

Rectas de regresión en mínimos cuadrados

- Se va a calcular la recta de regresión para el conjunto de datos $(-1, 10), (0, 9), (1, 7), (2, 5), (3, 4), (4, 3), (5, 0), (6, -1)$. Teniendo en cuenta las ecuaciones normales de Gauss:

$$\left(\sum_{k=1}^{N} x_k^2\right) A + \left(\sum_{k=1}^{N} x_k\right) B = \sum_{k=1}^{N} x_k y_k,$$

$$\left(\sum_{k=1}^{N} x_k\right) A + NB = \sum_{k=1}^{N} y_k$$

Rectas de regresión en mínimos cuadrados

Y el cálculo de los coeficientes de las ecuaciones normales de Gauss:

x_k	y_k	x_k^2	$x_k y_k$
-1	10	1	-10
0	9	0	0
1	7	1	7
2	5	4	10
3	4	9	12
4	3	16	12
5	0	25	0
6	-1	36	-6
20	37	92	25

Tabla: Coeficientes ecuaciones normales Gauss

Rectas de regresión en mínimos cuadrados

- Las sumas necesarias para establecer las ecuaciones normales se obtienen fácilmente usando los valores de la tabla de coeficientes. El sistema para A y B es, entonces,

$$92A + 20B = 25$$

$$20A + 8B = 37$$

Rectas de regresión en mínimos cuadrados

- Y cuya solución es $A \approx -1.6071429$ y $B \approx 8.6428571$. Por tanto, la recta de regresión en mínimos cuadrados es

$$y = -1.6071429x + 8.6428571$$

Rectas de regresión en mínimos cuadrados

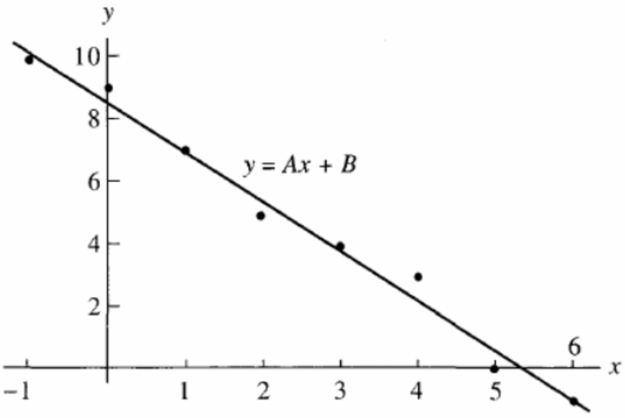

Figura: La recta de regresión $y = -1.6071429x + 8.6428571$

Ajuste potencial

Con el objetivo de medir la aceleración de la gravedad, se han recogido unos datos experimentales sobre el tiempo en que tarda en llegar al suelo un cuerpo, según la altura desde la que se lo deja caer:

Tiempo , t_k	Distancia, d_k	$d_k t_k^2$	t_k^4
0.200	0.1960	0.00784	0.0016
0.400	0.7850	0.12560	0.0256
0.600	1.7665	0.63594	0.1296
0.800	3.1405	2.00992	0.4096
1.000	4.9075	4.90750	1.0000
		7.68680	1.5664

Tabla: Coeficientes para ajuste potencial

Ajuste potencial

- La relación funcional es $d = \frac{1}{2}gt^2$, donde d es la distancia de caída medida en metros y t es el tiempo medido en segundos. Vamos a aproximar con estos datos el valor de la aceleración de la gravedad g.
- Usamos los valores dados en la tabla de cálculo de los coeficientes para un ajuste potencial para calcular las sumas que necesitamos en la fórmula

Ajuste potencial

$$A = \left(\sum_{k=1}^{N} x_k^M y_k\right) \Big/ \left(\sum_{k=1}^{N} x_k^{2M}\right)$$

Siendo $M = 2$ el exponente que hemos tomado.

- El coeficiente es $A = 7.68680/1.5664 = 4.9073$ y obtenemos la curva de ajuste $d = 4.9073t^2$ con lo cual $g \approx 2A = 9.8146\ m/s^2$

Método de linealización de los datos

Se usará el método de linealización de los datos para hallar un ajuste exponencial $y = Ce^{Ax}$ a los datos $(0, 1.5)$, $(1, 2.5)$, $(2, 3.5)$, $(3, 5.0)$ y $(4, 7.5)$.

- Aplicando el cambio de variables $Y = AX + B$ a los datos originales se obtiene:

$$
\begin{aligned}
&\{(X_k, Y_k)\} \\
&= \{(0, ln(1.5)), (1, ln(2.5)), (2, ln(3.5)), (3, ln(5.0))(4, ln(7.5))\} \\
&= \{(0, 0.405465), (1, 0.916291), (2, 1.252763), \\
&(3, 1.609438), (4, 2.014903)\}
\end{aligned}
$$

- Los puntos transformados aparentar estar alineados, como se muestra en la figura:

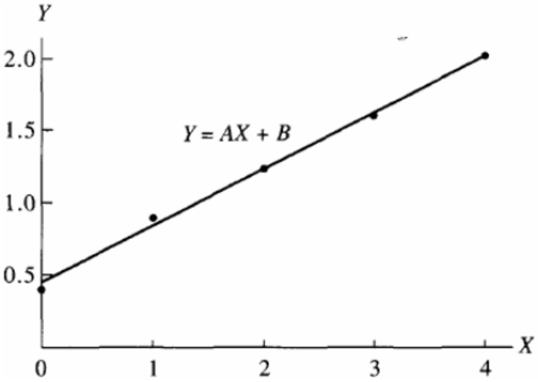

Figura: Datos linealizados $\{(X_k, Y_k)\}$

Método de linealización de los datos

- Vamos a comprobar que la recta de regresión $Y = AX + B$ para los puntos anteriormente calculados es:

$$Y = 0.391202X + 0.457367$$

Método de linealización de los datos

- Las operaciones necesarias para el cálculo de los coeficientes de las ecuaciones normales de Gauss se muestra en la tabla:

x_k	y_k	X_k	$Y_k = ln(y_k)$	X_k^2	$X_k Y_k$
0.0	1.5	0.0	0.405465	0.0	0.000000
1.0	2.5	1.0	0.916291	1.0	0.916291
2.0	3.5	2.0	1.252763	4.0	2.505526
3.0	5.0	3.0	1.609438	9.0	4.828314
4.0	7.5	4.0	2.014903	16.0	8.059612
		$10 = \sum X_k$	$6.198860 = \sum Y_k$	$30.0 = \sum X_k^2$	$16.309743 = \sum X_k Y_k$

Tabla: Coeficientes de las ecuaciones normales de Gauss para datos linealizados

Método de linealización de los datos

- Las ecuaciones normales son, entonces:

$$30A + 10B = 16.309742$$

$$10A + 5B = 6.198860$$

- Su solución es, como ya se ha dicho, $A = 0.3912023$ y $B = 0.457367$

Método de linealización de los datos

- Finalmente, se obtiene el valor de C que es $C = e^{0.457367} = 1.579910$.
  Sustituyendo los valores A y C en $y = Ce^{Ax}$ se obtiene el ajuste exponencial donde $y = 1.579910e^{0.3912023x}$.

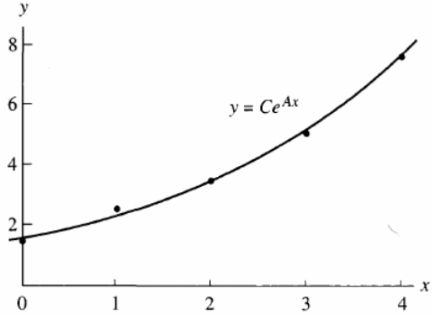

Figura: Ajuste exponencial $y = 1.579910e^{0.3912023x}$ con el método de linealización de datos

Parábola óptima en mínimos cuadrados

Se determinará la parábola óptima en mínimos cuadrados para los cuatro puntos $(-3, 3)$, $(0, 1)$, $(2, 1)$ y $(4, 3)$

- Se tiene la tabla

x_k	y_k	x_k^2	x_k^3	x_k^4	$x_k y_k$	$x_k^2 y_k$
-3	3	9	-27	81	-9	27
0	1	0	0	0	0	0
2	1	4	8	16	2	4
4	3	16	64	256	12	48
3	8	29	45	353	5	79

Tabla: Coeficientes para parábola óptima

Parábola óptima en mínimos cuadrados

- En la tabla se muestran los cálculos necesarios para construir el sistema lineal que viene dado por

$$353A + 45B + 29C = 79$$

$$45A + 29B + 3C = 5$$

$$29A + 3B + 4C = 8$$

Parábola óptima en mínimos cuadrados

- La solución es $A = 585/3278$, $B = -631/3278$ y $C = 1394/1639$, y la parábola que se busca es

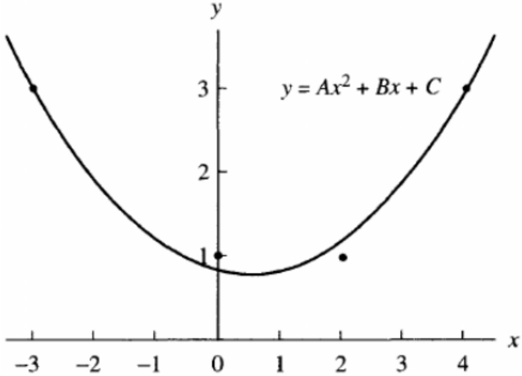

Figura: La parábola óptima en mínimos cuadrados

Parábola óptima en mínimos cuadrados

$$y = \frac{585}{3278}x^2 - \frac{631}{3278}x + \frac{1394}{1639}$$
$$= 0.178462x^2 - 0.192495x + 0.850519$$