$$P_N(x) = a_0 + a_1(x-x_0) + a_2(x-x_0)(x-x_1) + \dots + a_N(x-x_0)(x-x_1)\cdots(x-x_{N-1}) \quad (5.29)$$

POLINOMIO DE NEWTON EN DIFERENCIAS FINITAS

→ El PIN se ~~puede~~ expresa sintética/ como

$$P_N(x) = \sum_{k=0}^{N} a_k \prod_{i=0}^{k-1}(x-x_i) \quad (5.30)$$

→ Cuando la distancia h entre 2 abcisas cualesquiera es la misma, el PIN puede expresarse con más sencillez: ~~se introduce un nuevo parámetro s, definido~~ [illegible]

✓ Se introduce un nuevo parámetro s, definido en $x = x_0 + sh$

✓ Nótese que

$$x_1 - x_0 = h$$
$$x_2 - x_0 = 2h$$
$$\vdots$$
$$x_i - x_0 = ih$$

✓ y que $x = x_0 + sh \Rightarrow x - x_i = x_0 - x_i + sh = -ih + sh = h(s-i) \quad (*)$

$(0 \le i \le N)$

Por ej. si $i=1$, $x - x_1 = h(s-1)$

" $i=2$, $x - x_2 = h(s-2)$

✓ Sustituyendo $(*)$ en (5.29) se llega a:

$$P_N(x) = P_N(x_0+sh) = \underbrace{a_0}_{F[x_0]} + \underbrace{a_1}_{F[x_0,x_1]} hs + \underbrace{a_2}_{F[x_0,x_1,x_2]} h^2 s(s-1) + \underbrace{a_3}_{F[x_0,x_1,x_2,x_3]} h^3 s(s-1)(s-2) + \dots$$
$$+ \underbrace{a_N}_{F[x_0,x_1,\dots,x_N]} h^N s(s-1)(s-2)\dots(s-(N-1)) \quad (5.31)$$

o en forma compacta

$$P_N(x) = \sum_{k=0}^{N} a_k h^k \prod_{i=0}^{k-1}(s-i) \quad (5.32)$$

Productoria de (5.30) en términos de s y h.

→ (5.32) puede simplificarse más si se introduce el operador lineal Δ, conocido como *operador lineal en diferencias hacia delante* y definido sobre $f(x)$ como

$$\Delta f(x) = f(x+h) - f(x)$$

La 2a. diferencia hacia delante se obtiene así:

$$\Delta(\Delta f(x)) = \Delta^2 f(x) = \Delta(f(x+h) - f(x))$$
$$= \Delta f(x+h) - \Delta f(x)$$
$$= f(x+h+h) - f(x+h) - f(x+h) + f(x)$$
$$= f(x+2h) - 2f(x+h) + f(x).$$

$$\Delta^3 f(x) = \Delta(\Delta f(x+h) - \Delta f(x))$$
$$= \Delta^2 f(x+h) - \Delta^2 f(x)$$

Las diferencias hacia delante de orden superior se generan así:

$$\Delta^i f(x) = \Delta(\Delta^{i-1} f(x)) \rightarrow$$ Diferencias finitas hacia delante.

Información		Diferencias Divididas			
x	$F(x)$	Primeras	Segundas	Terceras	...
x_0	$F[x_0]$				
		$F[x_0,x_1] = \frac{F[x_1]-F[x_0]}{x_1-x_0}$			
x_1	$F[x_1]$		$F[x_0,x_1,x_2] = \frac{F[x_1,x_2]-F[x_0,x_1]}{x_2-x_0}$		
		$F[x_1,x_2] = \frac{F[x_2]-F[x_1]}{x_2-x_1}$		$F[x_0,x_1,x_2,x_3] = \frac{F[x_1,x_2,x_3]-F[x_0,x_1,x_2]}{x_3-x_0}$	...
x_2	$F[x_2]$		$F[x_1,x_2,x_3] = \frac{F[x_2,x_3]-F[x_1,x_2]}{x_3-x_1}$		
		$F[x_2,x_3] = \frac{F[x_3]-F[x_2]}{x_3-x_2}$		$F[x_1,x_2,x_3,x_4] = \frac{F[x_2,x_3,x_4]-F[x_1,x_2,x_3]}{x_4-x_1}$	...
x_3	$F[x_3]$		$F[x_2,x_3,x_4] = \frac{F[x_3,x_4]-F[x_2,x_3]}{x_4-x_2}$		
		$F[x_3,x_4] = \frac{F[x_4]-F[x_3]}{x_4-x_3}$		$F[x_2,x_3,x_4,x_5] = \frac{F[x_3,x_4,x_5]-F[x_2,x_3,x_4]}{x_5-x_2}$	...
x_4	$F[x_4]$		$F[x_3,x_4,x_5] = \frac{F[x_4,x_5]-F[x_3,x_4]}{x_5-x_3}$		
		$F[x_4,x_5] = \frac{F[x_5]-F[x_4]}{x_5-x_4}$			
x_5	$F[x_5]$				

Tabla 5.3 Tabulación General de Diferencias Divididas

✓Al aplicar Δ al 1er. valor funcional $f[x_0]$ de una tabla se tiene:

$$\Delta f(x_0) = f[x_1] - f[x_0] = h f[x_0, x_1] \Rightarrow f[x_0, x_1] = \frac{1}{h} \Delta f(x_0)$$

✓Del mismo modo:

$$f[x_0, x_1, x_2] = \frac{\dfrac{f[x_2] - f[x_1]}{x_2 - x_1} - \dfrac{f[x_1] - f[x_0]}{x_1 - x_0}}{x_2 - x_0} = \frac{f[x_2] - 2f[x_1] + f[x_0]}{2h^2}$$

$$\Rightarrow \quad f[x_0, x_1, x_2] = \frac{1}{2h^2} \Delta^2 f(x_0)$$

✓En gral.:

$$f[x_0, x_1, \ldots, x_N] = \frac{1}{N!\, h^N} \Delta^N f(x_0) \qquad (5.33)$$

✓Consecuente/, al sustituir $f[x_0, x_1, \ldots, x_i]$ $(0 \leq i \leq N)$ en términos de diferencias finitas, (5.31) queda:

$$P_N(x) = P_N(x_0 + sh) = f[x_0] + s\,\Delta f[x_0] + \frac{s(s-1)}{2!} \Delta^2 f[x_0] + \frac{s(s-1)(s-2)}{3!} \Delta^3 f[x_0] + \cdots$$

$$+ \frac{s(s-1)(s-2)\cdots(s-(N-1))}{N!} \Delta^N f[x_0] \qquad (5.35)$$

Polinomio de Newton en Diferencias Finitas Hacia Delante

<u>Ejemplo 5.7</u>: La sgte. tabla proporciona las presiones de vapor en lb/plg² a diferentes temperaturas para el 1-3 butadieno

Puntos	0	1	2	3	4	5
T(°F)	50	60	70	80	90	100
P (lb/plg²)	24.94	30.11	36.05	42.84	50.57	59.30

Aproxime la func. tabulada por el polinomio de Newton en diferencias hacia delante e interpole la presión a la temperatura de 64 °F.

- Se construye la tabla de diferencias hacia delante:

Punto	x_i	$f[x_i]$	$\Delta f[x_i]$	$\Delta^2 f[x_i]$	$\Delta^3 f[x_i]$	$\Delta^4 f[x_i]$
0	50	24.94				
			$\Delta f[x_0] = 5.17$			
1	60	30.11		$\Delta^2 f[x_0] = 0.77$		
			$\Delta f[x_1] = 5.94$		$\Delta^3 f[x_0] = 0.08$	
2	70	36.05		$\Delta^2 f[x_1] = 0.85$		$\Delta^4 f[x_0] = 0.01$
			$\Delta f[x_2] = 6.79$		$\Delta^3 f[x_1] = 0.09$	
3	80	42.84		$\Delta^2 f[x_2] = 0.94$		$\Delta^4 f[x_1] = -0.03$
			$\Delta f[x_3] = 7.73$		$\Delta^3 f[x_2] = 0.06$	
4	90	50.57		$\Delta^2 f[x_3] = 1.00$		
			$\Delta f[x_4] = 8.73$			
5	100	59.30				

- En esta información $h=10$, y el valor por interpolar es 64, así que:

$$x = x_0 + sh \implies s = \frac{x - x_0}{h} = \frac{64-50}{10} = 1.4$$

- Si se deseara aproximar con un polinomio de 1er. grado, se tomarían sólo los 2 1os términos de (5.35):

$$P_1(64) = P_1(50 + 1.4(10))$$
$$P_1(x) = f[x_0] + s\,\Delta f[x_0] = 24.94 + 1.4(5.17) = 32.18.$$

Observar que real/. se está extrapolando, porque $x=64$ queda fuera del intervalo de los puntos que se usaron para formar el pol.

- Intuitiva/., se obtendría una aprox. mejor con los puntos (1) y (2). Sin embargo, (5.35) se desarrolló usando x_0 como pivote y para aplicarla con los puntos (1) y (2) debe modificarse así:

$$P_N(x) = P_N(x_1 + sh) = f[x_1] + s\,\Delta f[x_1] + \frac{s(s-1)}{2!}\Delta^2 f[x_1] + \frac{s(s-1)(s-2)}{3!}\Delta^3 f[x_1] + \cdots \tag{5.36}$$
$$+ \frac{s(s-1)(s-2)\cdots(s-(N-1))}{N!}\Delta^N f[x_1]$$

la cual usa como pivote x_1, y cuyos 1os 2 términos dan la aprox. polinomial de 1er. grado:

$$P_1(x) = f[x_1] + s\,\Delta f[x_1], \text{ donde ahora } s = \frac{x - x_1}{h} = \frac{64-60}{10} = 0.4;$$

$$\implies f(64) \approx P_1(64) = 30.11 + 0.4(5.94) = 32.49$$