# Ejemplos de derivación numérica

Profesor
Edgar Miguel Vargas Chaparro
Monitor
Sebastian Guerrero Salinas

# El límite del cociente incremental

- Para $f(x) = e^x$ y $x = 1$, vamos a calcular los cocientes incrementales $D_k$ usando los incrementos $h_k = 10^{-k}$ para $k = 1, 2, ..., 10$; arrastraremos nueve cifras decimales en todas las operaciones.
- En la siguiente tabla, se muestran los valores $f(1 + h_k)$ y $(f(1 + h_k) - f(1))/h_k$ que se utilizan para calcular $D_k$.

# El límite del cociente incremental

| $h_k$ | $f_k = f(1+h_k)$ | $f_k - e$ | $D_k = (f_k - e)/h_k$ |
|---|---|---|---|
| $h_1 = 0,1$ | $3,004166024$ | $0,285884196$ | $2,858841960$ |
| $h_2 = 0,01$ | $2,745601015$ | $0,027319187$ | $2,731918700$ |
| $h_3 = 0,001$ | $2,721001470$ | $0,002719642$ | $2,719642000$ |
| $h_4 = 0,0001$ | $2,718553670$ | $0,000271842$ | $2,718420000$ |
| $h_5 = 0,00001$ | $2,718309011$ | $0,000027183$ | $2,718300000$ |
| $h_6 = 10^{-6}$ | $2,718284547$ | $0,000002719$ | $2,719000000$ |
| $h_7 = 10^{-7}$ | $2,718282100$ | $0,000000272$ | $2,720000000$ |
| $h_8 = 10^{-8}$ | $2,718281856$ | $0,000000028$ | $2,800000000$ |
| $h_9 = 10^{-9}$ | $2,718281831$ | $0,000000003$ | $3,000000000$ |
| $h_{10} = 10^{-10}$ | $2,718281828$ | $0,000000000$ | $0,000000000$ |

Tabla: Cálculo de los cocientes incrementales $D_k = (e^{1+h_k} - e)/h_k$

# El límite del cociente incremental

- El incremento mayor $h_1 = 0,1$ no proporciona una buena aproximación $D_1 \approx f'(1)$ porque $h_1$ es demasiado grande; el cociente incremental es la pendiente de una recta secante que pasa por dos puntos que no están suficientemente cerca

# El límite del cociente incremental

- Por otro lado, cuando se usa la fórmula

$$D_k = \frac{f(x+h_k) - f(x)}{h_k}; \; k = 1, 2, \ldots$$

trabajando con una precisión fija de nueve cifras decimales, $h_9$ proporciona la aproximación $D_9 = 3$ y $h_{10}$ proporciona $D_{10} = 0$.

- Si $h_k$ es demasiado pequeño, entonces los valores de la función $f(x+h_k)$ y $f(x)$ están demasiado cerca y puede aparecer el problema de la pérdida de cifras significativas debido a la substracción de cantidades que son casi iguales.

# El límite del cociente incremental

- El valor $h_{10} = 10^{-10}$ es tan pequeño que los valores $f(x + h_{10})$ y $f(x)$ almacenados por el computador son iguales y, en consecuencia, el cociente incremental calculado es cero.
- Así, en este ejemplo, el valor exacto del límite es $f'(1) \approx 2,718281828$ y puede observarse que el valor $h_5 = 10^{-5}$ es el que da la mejor aproximación $D_5 = 2,7183$.

# Fórmulas de diferencias centradas, progresivas y regresivas

Sea $f(x) = cos(x)$

- Se utilizarán las fórmulas

$$f'(x) \approx \frac{f(x+h) - f(x-h)}{2h} \tag{1}$$

$$f'(x) \approx \frac{-f(x+2h) + 8f(x+h) - 8f(x-h) + f(x-2h)}{12h} \tag{2}$$

Con incrementos $h = 0.1, 0.01, 0.001$ y $0.0001$ para calcular aproximaciones a $f'(0.8)$. Se trabajará con nueve cifras decimales significativas

# Fórmulas de diferencias centradas, progresivas y regresivas

- Se compararán los valores obtenidos con el exacto $f'(0.8) = -sin(0.8)$.
- Usando la fórmula (1) con $h = 0.01$, obtenemos

$$f'(0.8) \approx \frac{f(0.81) - f(0.79)}{0.02} \approx \frac{0.689498433 - 0.703845316}{0.02}$$

$$\approx -0.717344150$$

# Fórmulas de diferencias centradas, progresivas y regresivas

- Usando la fórmula (2) con $h = 0.01$, obtenemos

$$f'(0.8) \approx \frac{-f(0.82) + 8f(0.81) - 8f(0.79) + f(0.78)}{0.12}$$

$$\approx \frac{-0.682221207 + 8(0.689498433) - 8(0.703845316) + 0.710913538}{0.12}$$

$$\approx -0.717356108$$

# Fórmulas de diferencias centradas, progresivas y regresivas

- El error en las aproximaciones proporcionadas por las fórmulas (1) y (2) resulta ser $-0.000011941$ y $0.000000017$, respectivamente. Vemos que, en este ejemplo, la fórmula (2) proporciona una aproximación a $f'(0.8)$ mejor que la que proporciona la fórmula (1) cuando $h = 0.01$ pero no cuando $h = 0.0001$ como se puede ver en la tabla a continuación.

# Fórmulas de diferencias centradas, progresivas y regresivas

| Incre | Aproximación fórmula (1) | Error fórmula (1) | Aproximación fórmula (2) | Error fórmula (2) |
|---|---|---|---|---|
| 0.1 | -0.716161095 | -0.001194996 | -0.717353703 | -0.000002389 |
| 0.01 | -0.717344150 | -0.000011941 | -0.717356108 | 0.000000017 |
| 0.001 | -0.717356000 | -0.000000091 | -0.717356167 | 0.000000076 |
| 0.0001 | -0.717360000 | -0.000003909 | -0.717360833 | 0.000004742 |

Tabla: Derivación numérica mediante las fórmulas (1) y (2)

# Fórmulas de diferencias centradas, progresivas y regresivas

Nuevamente tomamos $f(x) = cos(x)$

- Se utilizará la fórmula

$$f''(x_0) \approx \frac{f_1 - 2f_0 + f_{-1}}{h^2} \tag{3}$$

  Con $h = 0.1, 0.01$ y $0.001$ para calcular aproximaciones a $f''(0.8)$. Se trabajará con nueve cifras decimales.

- Luego, se compararán estas aproximaciones con el valor exacto de la segunda derivada, que es $f''(0.8) = -cos(0.8)$

## Fórmulas de diferencias centradas, progresivas y regresivas

- Los cálculos cuando $h = 0.01$ son:

$$f''(0.8) \approx \frac{f(0.81) - 2f(0.80) + f(0.79)}{0.0001}$$
$$\approx \frac{0.689498433 - 2(0.696706709) + 0.703845316}{0.0001}$$
$$\approx -0.696690000$$

# Fórmulas de diferencias centradas, progresivas y regresivas

- El error de la aproximación obtenida es $-0.000016709$. El resto de los cálculos se resumen en la tabla a continuación.

| **Incremento** | **Aproximación fórmula (3)** | **Error fórmula (3)** |
|---|---|---|
| $h = 0.1$ | $-0.696126300$ | $-0.000580409$ |
| $h = 0.01$ | $-0.696690000$ | $-0.000016709$ |
| $h = 0.001$ | $-0.696000000$ | $-0.000706709$ |

Tabla: Aproximaciones numéricas a $f''(x)$

# Fórmulas de diferencias centradas, progresivas y regresivas

Continuamos con $f(x) = cos(x)$

- Ahora utilizando la fórmula

$$f''(x_0) = \frac{-f_2 + 16f_1 - 30f_0 + 16f_{-1} - f_{-2}}{12h^2} \tag{4}$$

  Con $h = 1.0, 0.1$ y $0.01$ para calcular aproximaciones a $f''(0.8)$. Se trabajará con nueve cifras decimales significativas.

- Luego, se compararán estas aproximaciones con el valor exacto de la segunda derivada, que es $f''(0.8) = -cos(0.8)$

# Fórmulas de diferencias centradas, progresivas y regresivas

- Se realizarán los cálculos con $h = 0.1$:

$$f''(0.8) \approx \frac{-f(1.0) + 16f(0.9) - 30f(0.8) + 16f(0.7) - f(0.6)}{0.12}$$

$$\approx \frac{-0.540302306 + 9.945759488 - 20.90120127 + 12.23747499 - 0.825335615}{0.12}$$

$$\approx -0.696705958$$

El resto se recoge en la siguiente tabla:

# Fórmulas de diferencias centradas, progresivas y regresivas

| Incremento | Aproximación fórmula (4) | Error fórmula (4) |
|---|---|---|
| $h = 1.0$ | $-0.689625413$ | $-0.007081296$ |
| $h = 0.1$ | $-0.696705958$ | $-0.000000751$ |
| $h = 0.01$ | $-0.696690000$ | $-0.000016709$ |

Tabla: Aproximaciones numéricas a $f''(x)$

# Derivada del polinomio interpolador de Newton

Con $N = 4$:

- Si los cinco nodos son $t_k = x + hk$ para $k = 0, 1, 2, 3$ y $4$, entonces la fórmula:

$$P'(t_0) = a_1 + a_2(t_0 - t_1) + a_3(t_0 - t_1)(t_0 - t_2) + \ldots \\ + a_N(t_0 - t_1)(t_0 - t_2)(t_0 - t_3) \ldots (t_0 - t_{N-1}) \tag{5}$$

Es una manera equivalente de calcular la fórmula de diferencias progresivas para aproximar $f'(x)$ de orden $O(h^4)$

# Derivada del polinomio interpolador de Newton

- Si los cinco nodos $\{t_k\}$ son $t_0 = x,\ t_1 = x + h,\ t_2 = x - h,\ t_3 = x + 2h$ y $t_4 = x - 2h$, entonces (5) es la fórmula de diferencias centradas para aproximar $f'(x)$ de orden $O(h^4)$.
- Cuando los nodos son $t_k = x - kh$, entonces (5) es la fórmula de diferencias regresivas para aproximar $f'(x)$ de orden $O(h^4)$.