DÍA MES AÑO

Banco Agrario de Colombia

Diego Fernando Erazo Ciceri
1006408328

Que es una matriz?

R| Una matriz es una tabla rectangular de números organizada en filas y columnas

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

Una matriz $A \in \mathbb{R}^{n \times m}$ es una arreglo rectangular de numeros a_{ij} con m filas y n columnas.
Si $m = n$ la llamos cuadrada.
Operaciones basicas:

- Suma y producto escalar: Ambas se hacen elemento a elemento
- Producto matricial: $C = AB$ si $A \in \mathbb{R}^{m \times p}$, $B \in \mathbb{R}^{p \times n}$ entonces $C \in \mathbb{R}^{m \times n}$ con $(AB)_{ij} = \sum_{k=1}^{p} a_{ik} b_{kj}$.
- Transpuesta: A^T se intercambian las filas con las columnas $(A^T)_{ij} = a_{ji}$
- Identida I_n: La matriz que deja vectores iguales $I_n x = x$
- Inversa A^{-1}: Dado caso que exista $A \cdot A^{-1} = I$

Crecer juntos es posible

DÍA MES AÑO

- Matriz diagonal : $A = A^T$ si es simetrica
- Matriz ortogonal : $Q^T Q = I$ si todos los valores propios son mayores a cero
- Rango : Numeros de columnas independientes. Es la dimension de la imagen
- Núcleo : Vectores x tales que $Ax = 0$
- Traza : $tr(A)$ es la suma de la diagonal
- Norma de Frobenius : $\|A\|_F = \sqrt{\Sigma_{ij} a_{ij}^2}$ que es $\sqrt{tr(A^T A)}$

Que es un determinante?

Para una matriz cuadrad $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ el $\det(A)$ es un escalar que mide cuanto escala volumenes la transformacion lineal A

- $\|A^{2\times2}\| = \det(A^{2\times2})$ siendo $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ entonces $\det(A) = ad - bc$
- $\det(I) = 1$
- $\det(AB) = \det(A) \cdot \det(B)$
- $\det(A^T) = \det(A)$
- A es invertible, entonces $\det(A) \neq 0$

DÍA MES AÑO

- Si P es una matriz de permutación, $\det(P) = \pm 1$
- Relación con eigenvalores

Si A tiene eigenvalores $\lambda_1 \dots \lambda_n$, entonces $\det(A) = \prod_{i=1}^{n} \lambda_i$
esto enlaza determinantes y comportamiento dinámico A

- Determinante Jacobi:

$$d(\det A) = \det(A)\, tr(A^{-1}\, dA)$$

$$d(\log \det A) = tr(A^{-1}\, dA)$$

Derivadas y gradientes

Para $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ usamos $f'(x)$

Para $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ el gradiente es el vector de derivadas parciales

$$\nabla f(x) = \begin{bmatrix} \frac{df}{dx_1} \\ \vdots \\ \frac{df}{dx_n} \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^n$$

En la dirección de máximo aumento local para un pequeño desplazamiento δx

$$f(x + \delta x) \approx f(x) + \nabla f(x)^T \delta x$$

DÍA MES AÑO

- Jacobiano:

Para $f: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ la Jacobiana $J \in \mathbb{R}^{m \times n}$ tiene entradas $J_{ij} = \frac{\partial f_i}{\partial x_j}$

- Derivadas direccional y total

En dirección v: $D_v f(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+hv) - f(x)}{h} = \nabla f(x)^T v$

En total si las entradas dependen entre sí.

- Hessiana

H para $f: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ es la matriz de segundas derivadas

$H_{ij} = \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}$ es simétrica si f es suficientemente suave

Identidades comunes y derivaciones

- $f(x) = a^T x$ con $a \in \mathbb{R}^n$

$$f(x) = \sum_{i=1}^{n} a_i x_i$$

$$\frac{\partial f}{\partial x_k} = a_k$$

$$\nabla_x (a^T x) = a$$

DÍA MES AÑO

Banco Agrario de Colombia

- $f(x) = x^T x = \sum_i x_i^2$

$$\frac{d}{dx_k}(x^T x) = 2x_k$$

$$\nabla_x (x^T x) = 2x$$

- $f(x) = x^T A^{n\times n}_x$

$$x^T A x = \sum_{ij} a_{ij} x_i x_j ;$$

$$\frac{d}{dx_k} \sum_{ij} a_{ij} x_i x_j = \sum_j a_{kj} x_j + \sum_i a_{ik} x_i$$

$$= (Ax)_k + (A^T x)_k$$

$$\nabla_x (x^T A x) = (A + A^T) x$$

- $f: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ y $f(x) = Ax$

$J = \frac{df}{dx} = A$. Esto obedece a la definición por entradas $\frac{d(Ax)_i}{dx_j} = a_{ij}$

- Derivada de la traza

$$\frac{d}{dx} tr(A^T x) = A$$

DÍA MES AÑO

Banco Agrario de Colombia

- Derivada del determinante y del log-determinante

Identidad diferencial

$$d(\log \det X) = \operatorname{tra}(X^{-1} dX)$$

de aquí se obtiene la deriva de $\log \det X$

$$\nabla_X \log \det X = (X^{-1})^T$$

Derivada de $\det X$

$$d(\det X) = \det(X)\, d(\log \det X)$$

$$= \det(X)\, \operatorname{tr}(X^{-1} dX$$

$$\nabla_X \det X = \det(X)\,(X^{-1})^T$$