① a) Sei X ein Zufallsvektor $X = \begin{pmatrix} X_1 \\ X_2 \\ \vdots \\ X_n \end{pmatrix}$

und $\mathrm{Cov}(X) = E\left((X-\mu)(X-\mu)^T \right)$

$$= \begin{pmatrix} \mathrm{Var}(X_1) & \mathrm{Cov}(X_1,X_2) & \cdots & \mathrm{Cov}(X_1,X_n) \\ \mathrm{Cov}(X_2,X_1) & \mathrm{Var}(X_2) & \cdots & \mathrm{Cov}(X_2,X_n) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \\ \mathrm{Cov}(X_n,X_1) & \mathrm{Cov}(X_n,X_2) & \cdots & \mathrm{Var}(X_n) \end{pmatrix}$$

mit: $\mathrm{Cov}(X_i, X_j) = \mathrm{Cov}(X_j, X_i)$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} \mathrm{Var}(X_1) & \mathrm{Cov}(X_2,X_1) & \cdots & \mathrm{Cov}(X_n,X_1) \\ \mathrm{Cov}(X_1,X_2) & \mathrm{Var}(X_2) & \cdots & \mathrm{Cov}(X_n,X_2) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \\ \mathrm{Cov}(X_1,X_n) & \mathrm{Cov}(X_2,X_n) & & \mathrm{Var}(X_n) \end{pmatrix} = \mathrm{Cov}(X)^T$$

$\square$

b) $|\rho_{XY}| \leq 1 \iff \left| \frac{\mathrm{Cov}(X,Y)}{\underbrace{\sqrt{\mathrm{Var}(X)\,\mathrm{Var}(Y)}}_{\geq 0}} \right| \leq 1$

$\iff \frac{|\mathrm{Cov}(X,Y)|}{\sqrt{\mathrm{Var}(X)\,\mathrm{Var}(Y)}} \leq 1 \iff |\mathrm{Cov}(X,Y)| \leq \sqrt{\mathrm{Var}(X)\,\mathrm{Var}(Y)}$

$$\iff \underbrace{|\mathrm{Cov}(X,Y)|^2 \leq \mathrm{Var}(X)\,\mathrm{Var}(Y)}_{\text{Cauchy-Schwarz Ungleichung}}$$