OrganonClass: viaLogic -Lesson 3-

最小命題論理の→断片：証明の掟

<u>数学の証明の掟</u>……証明で用いた条件を定理内で明示せよ。

<u>証明図の掟</u>……木のいちばん上の式（仮定）はすべて落とされなければならない。

<u>掟の守り方</u>

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\alpha\to\beta\to\gamma \quad \alpha}{\beta\to\gamma} \qquad \dfrac{\alpha\to\beta \quad \alpha}{\beta}}{\gamma}}{\alpha\to\gamma}}{(\alpha\to\beta)\to\alpha\to\gamma}}{(\alpha\to\beta\to\gamma)\to(\alpha\to\beta)\to\alpha\to\gamma}$$

　うえの証明図が掟を守っているか一見わかりにくい。そこで仮定の論理式に文字 $x, y, z, \cdots$ を用いてラベルを付け、規則で

$$\dfrac{\begin{matrix} x:\alpha \\ \vdots \\ M:\beta \end{matrix}}{(\lambda x.M):\alpha\to\beta}\,\lambda x \qquad\qquad \dfrac{M:\alpha\to\beta \quad N:\alpha}{(MN):\beta}$$

とラベルの使い方を定める。　すると掟は

*　「証明図の最後の論理式がもつラベル Q 内の任意の文字 x は、すくなくとも一回 Q 内で

$$\lambda x$$

というかたちで現れなければならない」

となる。このラベル※を とりあえず <u>λ-項</u> とよぼう。

証明図の例（改）

さきの $(\alpha\to\beta\to\gamma)\to(\alpha\to\beta)\to\alpha\to\gamma$ に至る証明図をλ-項をつけて書き直す:

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{x:\alpha\to\beta\to\gamma \qquad z:\alpha}{(xz):\beta\to\gamma} \qquad \dfrac{y:\alpha\to\beta \qquad z:\alpha}{(yz):\beta}}{((xz)(yz)):\gamma}}{\lambda z.(xz)(yz):\alpha\to\gamma}\,\lambda z}{\lambda y.(\lambda z.((xz)(yz))):(\alpha\to\beta)\to\alpha\to\gamma}\,\lambda y}{\lambda x.(\lambda y.(\lambda z.((xz)(yz)))):(\alpha\to\beta\to\gamma)\to(\alpha\to\beta)\to\alpha\to\gamma}\,\lambda x$$

実際, 'x','y','z' に対して 'λx', 'λy', 'λz' が現れている.

掟を守ったλ-項の例

$\lambda x.x$

$\lambda x.(\lambda y.((xy)y)$

$(\lambda x.x)(\lambda x.(\lambda y.((xy)y)))$

掟を破ったλ-項の例

$x(\lambda x.x)$

$\lambda x.y$

$(\lambda x.x)y$

x'

注意

前頁の(*)は精確ではない。量化子'∀'の自由変数と束縛変数とを理解しているなら, 'λ'によってすべての $x, y, z, \ldots$ が束縛されていることが, 掟の正体であり, そのような λ-項を閉項という. ラムダ計算を改めて扱うときに詳述する.//

OrganonClass: viaLogic -Lesson 3-

正規化定理

補題OK性 …… 補題を使って証明していいのは，そのとき直接証明が可能であるから。

↳ このことをわれわれは日常の数学で用いている。

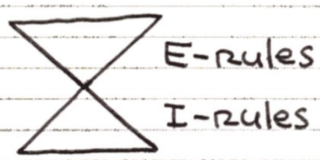
論理レベルの補題OK性（局所）

$$\dfrac{\dfrac{\begin{array}{c}x:\alpha\\ \vdots\\ M:\beta\end{array}}{\lambda x.M:\alpha\to\beta}\qquad x:\alpha}{(\lambda x.M)x:\beta} \quad\Longrightarrow\quad \begin{array}{c}x:\alpha\\ \vdots\\ M:\beta\end{array}$$

という変形をしていいということ。

論理レベルの補題OK性（大局）

どんな証明図のうえの変形のけっか



というかたちになること。 つまり，証明図の上側は除去規則のみから，下側は導入規則のみからなるかたちである。

↳ このような証明図を 正規な証明図 という。

正規化定理

- どんな証明図も正規な証明図に書き換えられる。
- 書き換えのアルゴリズムが決まっている。 □

この定理のフォーマルな証明はのちに与えられる。

OrganonClass: viaLogic -Lesson 3-

(正規な)証明図の書き方

→にかんし, 効率的に正規な証明図を書く一般的方法がある.

論理式 $\alpha \to ((\alpha \to \beta) \to \beta)$ を例にとる.
まず,「最後に導入された論理結合子」に着目する. $\alpha \to ((\alpha \to \beta) \to \beta)$ を証明するためには, →のI-ruleを使ったはずであり, そのばあい式のかたちからしてI-ruleは α と $(\alpha \to \beta) \to \beta$ に適用されている。つまり,

$$\alpha \to ((\alpha \to \beta) \to \beta)$$

でミドリで囲った結合子→が「最後に導入された論理結合子」である. このとき, 証明図はつぎのかたちをしている:

$$\dfrac{\begin{array}{c}[\alpha] \\ \vdots \\ (\alpha \to \beta) \to \beta\end{array}}{\alpha \to ((\alpha \to \beta) \to \beta}$$

つぎに $(\alpha \to \beta) \to \beta$ について同様に考える. I-ruleは $(\alpha \to \beta)$ と β に適用され, 証明図はつぎのかたちをしている

$$\dfrac{\dfrac{\begin{array}{c}[\alpha] \qquad [\alpha \to \beta] \\ \beta\end{array}}{(\alpha \to \beta) \to \beta}}{\alpha \to ((\alpha \to \beta) \to \beta)}$$

よって, α と $\alpha \to \beta$ を仮定して β を推論する必要がある. しかし, これはE-ruleを用いて一発でできる:

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{y : \alpha \to \beta \qquad x : \alpha}{(yx) : \beta}}{(\lambda y.(yx)) : (\alpha \to \beta) \to \beta}\,\lambda y}{\lambda x.(\lambda y.(yx)) : \alpha \to ((\alpha \to \beta) \to \beta)}\,\lambda x$$

このように証明したい式のかたちから, その一つ前のステップの式のかたちを逆算することで, 一発で証明図をかける.

20 June 2019 μ1170 :

前頁の証明図は，ふたつの部分からできていた：

- 仮定にE-Ruleを適用し，これ以上分解できないβまで分解する
- そののち，I-Ruleを適用し，仮定を落としていく

$$\frac{\alpha\to\beta \quad \alpha}{\beta}$$

と

$$\cfrac{\cfrac{\beta}{(\alpha\to\beta)\to\beta}}{\alpha\to((\alpha\to\beta)\to\beta)}$$

とである．これが正規な証明図である

正規な証明図の性質，ありがたみ

- 前提が結論を主張するための明らかな根拠であるとき，日常的にわれわれはその議論・推論が論理的であると考える．
- それらをシミュレートした形式体系が「論理的体系」であるために，結論を仮定に~~換~~還元できて欲しい．
- 「回り道のない」正規な証明図はその要請をみたしている．
- どんな証明図も正規な証明図に変形できること（正規化定理）は，さらに，その形式体系内のどんな推論・演繹も正しいなら結論を仮定に還元できることを保証する（補題外性のシミュレートレベルでの正当化）．