論理学からはじめる数学: 第 3 講

川井新

2019 年 7 月 1 日

1 証明の掟

数学の証明の掟: 証明で用いた条件を定理内で明示せよ

証明図の掟: 木のいちばん上の式 (仮定) はすべて落とされなければならない。

証明図が掟を守っているのか一見、わかりにくい。そこで仮定の式に文字 $x, y, z, \ldots$ を用いてラベルを付け、以下のように規則にラベルの使い方もハンドルする。

このとき、掟を守ったラベルと掟を破ったラベルを性格づけられる。

2 ラムダ項

ラベルの正体は、ラムダ項である。

Definition 1. ラムダ項のフォーマルな定義は以下で与えられる*:*

1. 変数 $x, y, z \ldots$ はラムダ項である。
2. M と N がラムダ項なら、(MN) はラムダ項である(「適用」)。
3. M がラムダ項で x が変数なら、$(\lambda x.M)$ はラムダ項である(「抽象」)。
4. 以上でわかるものだけがラムダ項である。

この定義では、(1) でもっとも簡単なラムダ項を与え、(2) - (3) でこれらから新しいラムダ項を作り出す規則を与えている。このような定義を帰納的定義という。

適用 (application) が除去規則に、抽象 (abstraction) が導入規則に対応する。

ある表現のなかに同じ記号が複数回現れるとき、その現れる場所を含めて指定し区別したいことがある。場所を含めた指定を、出現 (occurrnce) という。たとえば、$x(\lambda x.(\lambda y.(xz)))$ には変数 x の出現は 3 回あり、z の出現は 1 回である。

ラムダ項 Q のなかのラムダ項 $\lambda x.M$ の出現で、この M の出現を λx の作用域 (scope) という。

ラムダ項 Q のなかの変数 x の出現が束縛された (bound) 出現であるとは、その出現が λx の作用域か λx のなかにあること。束縛されていない変数の出現を自由な (free) 出現という。

すべての変数の出現が束縛されているラムダ項を閉項 (closed term) という。

3 閉項と証明図

4 証明図の正規化定理のインフォーマルな紹介

補題 ok 性: 補題を使って証明していいのは、そのとき直接証明が可能であるから。
このことをわれわれは、日常の数学で用いている。

Theorem 1 (正規化定理)**.** どんな証明図も正規な証明図に、決められたアルゴリズムで書き換えられる。

5 証明図の書き方

6 正規な証明図の性質、ありがたみ