論理学からはじめる数学 : 第 2 講レジュメ

川井 新

1. 推論規則と論理結合子の使われ方

前回、証明と定理の関係として、「条件 α から結論 β に至る推論があれば、定理「α ならば β」にかんする証明があることになる」と、数学における「ならば」の使用例を考察した。われわれは一旦、インフォーマルに $\rightarrow$ という記号を導入して、$\rightarrow$ が自然言語の「ならば (imply)」をシミュレートしているとした。しかしわれわれは、形式的な体系をつくり、その体系が実際の (このばあいは「ならば」の) 使用のされ方をきちんとシミュレートできているかを考察するのであった。そこで今回は、$\rightarrow$ にかんする**導入規則**と**除去規則**という推論規則、つまり論理結合子の「使い方」を定める規則を定義する。

論理結合子とは、

2. $\rightarrow$ の導入規則と除去規則

$\rightarrow$ は、仮定 (前提、条件) から結論を導出したとき、前提と結論を結びつける役割をもつ。

$$\frac{\begin{array}{c}\alpha\\ \vdots\end{array}}{\alpha \rightarrow \beta}$$

$\cdots$ は途中の推論の省略である。この規則は、α と β の間に新しく $\rightarrow$ 記号を導入するので、$\rightarrow$ の**導入規則**と呼ばれる。

$\rightarrow$ の導入規則は、「仮定 α から結論 β に至る推論があれば、定理 $\alpha \rightarrow \beta$ を主張してよい」と数学における推論のシミュレーションになっている。ところで数学での推論には、「α ならば β が成立しているもとで α も成立しているとき、β を主張してもいい」という約束もある。

これをシミュレートしているレベルで規則にすると、以下のようになる。

$$\frac{\alpha \rightarrow \beta \qquad \alpha}{\beta}$$

この規則を、いままで記号 $\rightarrow$ を含んでいた論理式から記号 $\rightarrow$ を除去する規則として、$\rightarrow$ の**除去規則**という。

このふたつの規則のみからなる体系を**最小命題論理の $\to$ 断片**と呼ぶ[*1]。

推論規則を木状に並べた図形を**証明図**といい、証明図が実際の推論のシミュレーションである。

以下に具体例を示す。

$$
\dfrac{\dfrac{\dfrac{\alpha \to \beta \qquad \alpha}{\beta \to \gamma} \qquad \dfrac{\alpha \to \beta \qquad \alpha}{\beta}}{\alpha \to \gamma}}{\dfrac{(\alpha \to \beta) \to \alpha \to \gamma}{(\alpha \to \beta \to \gamma) \to (\alpha \to \beta) \to \alpha \to \gamma}}
$$

ここで用語を整理しておこう。木の一番上の論理式を証明図の**仮定**といい、一番下の論理式を証明図の**結論**？という。上の証明図を例にとると、$\alpha \to \beta$ と $\beta \to \gamma$ と α が仮定であり、$(\alpha \to \beta \to \gamma) \to (\alpha \to \beta) \to \alpha \to \gamma$ が結論である。また、結論 δ をもつ証明図のことを **δ に至る証明図**などという。

なお、論理式の括弧は右から補う。つまり、$(\alpha \to \beta \to \gamma) \to (\alpha \to \beta) \to \alpha \to \gamma$ は、$(\alpha \to (\beta \to \gamma)) \to ((\alpha \to \beta) \to (\alpha \to \gamma))$ の括弧を省略したものである[*2]。

3. 仮定の discharge

$\to$ の導入規則が意味するところは、α から β を推論できたらそれをまとめて $\alpha \to \beta$ の証明があるとする、ということであった。

前節の証明図の例のように

4. 帰納的定義

5. 証明木の定義と具体例

1「$\to$ 断片」の意味するところは、最小命題論理という体系の中でも論理結合子として $\to$ しか持たない体系ということである。以降、この体系を基礎として新しい論理結合子を付け加えることで最小命題論理の体系を作っていく。

2 以降、論理式をみるたびに括弧を補った式を書き下してみることは論理式になれるいい練習になるであろう。

6. 複数の仮定の discharge と 0 個の仮定の discharge

7. References

- 古森・小野『現代数理論理学序説』、日本評論社、2010 年
- 萩谷・西崎『論理と計算のしくみ』、岩波、2007 年
- 戸次大介『数理論理学』、東京大学出版会、2012 年
- 矢田部俊介「論理学上級」、京都大学講義