論理学からはじめる数学: 第 4 講

川井新

2019 年 7 月 14 日

1　簡約と計算

式の一部をいっそう簡単な式に置き換える操作を**簡約**という。たとえば、$1+2$ という式を 3 という式で置き換えることは簡約である。また、$f(x)=x^2+3x+4$ という関数定義があったとき、$f(3)$ に対して、関数 f の定義を展開して $3^2+3\cdot 3+4$ という式で置き換えることも簡約である。この式のなかで簡約を繰り返すと以下のようになる。

$$\begin{aligned} f(1+2) &= (1+2)^2+3\cdot(1+2)+4 \\ &= 3^2+3\cdot 3+4 \\ &= 9+9+4 \\ &= 22 \end{aligned}$$

一般に簡約を繰り返すことで、式の値を求めることができる。

ラムダ計算は、関数の計算についての理論である。そのなかで、基本的な概念は関数であり、すべてのものは関数として表現され、計算は簡約により定義される。

ラムダ計算に踏み入る前にすこし予備考察をしよう。

2　再帰

x の階乗を計算する関数 $fact(x)=x!$ は再帰的に定義できる。

$$\begin{aligned} &fact(0)=1 \\ &fact(x+1)=(x+1)\cdot fact(x) \end{aligned}$$

この定義は、そのまま $f(x)$ の値を求めるために用いることができる。

$$
\begin{aligned}
fact(3) &= 3 \cdot fact(2) \\
&= 3 \cdot (2 \cdot fact(1)) \\
&= 3 \cdot (2 \cdot (1 \cdot fact(0))) \\
&= 3 \cdot (2 \cdot (1 \cdot 1)) \\
&= \cdots \\
&= 6
\end{aligned}
$$

$fact(x+1)$ の定義のなかで $fact$ 自身を参照しているので、このような定義を**再帰的定義**という[*1]。一般的に計算可能と言われている関数[*2]はすべて再帰的に定義可能である。

3 ラムダ式

つぎのように義される関数 $twice(f, x)$ を考える。

$$twice(f, x) = f(f(x))$$

$twice$ の最初の引数 f はひとつの引数をもつ関数である。

$$
\begin{aligned}
twice(fact, 3) &= fact(fact(3)) \\
&= fact(6) \\
&= 720
\end{aligned}
$$

$twice$ を用いて 2^{2^3} を計算するには、$exp2(x) = 2^x$ という関数 $exp2$ を準備し、$twice(exp2, 3)$ を計算する。しかし、使い捨ての関数をそのつど定義するのも手間であり、名前不足にもなる。このばあい、「x に 2^x を対応させる関数」を直接に表す記法があったほうが便利で自然である。そのような記法が**ラムダ式**である。

x に 2^x を対応させる関数は、

$$\lambda(x)2^x$$

というラムダ式によって表すことができる。

$twice(\lambda(x)2^x, 3)$ の値を求めよう。

$$
\begin{aligned}
twice(\lambda(x)2^x) &= (\lambda(x)2^x(\lambda(x)2^x)(3)) \\
&= (\lambda(x)2^x)(2^3) \\
&= (\lambda(x)2^x)(8) \\
&= 2^8 \\
&= 256
\end{aligned}
$$

関数 add を $add(x) = \lambda(y)x + y$ と定義する。add は x に $\lambda(y)x + y$ という関数を対応させる関数である。

[*1] $fact$ のばあい、0 で値を直接、定めている。この部分を Base case という

[*2] Church-Turing の定立で調べるといい。

$$
\begin{aligned}
(add(3))(4) &= (\lambda(y)3 + y)(4) \\
&= 3 + 4 \\
&= 7
\end{aligned}
$$

一般に、二引数の関数 $f(x, y)$ に対して、関数 g を $g(x) = \lambda(y)f(x, y)$ と定義する。g は一引数関数であり、引数に適用されると一引数関数が求まるようなものである。このような関数 g を f の**カリー化された関数** (curried function) という。カリー化を用いると、二引数の関数を、したがって、n 引数 (n は二以上の自然数) の関数を一引数の関数だけで表現できる。したがって、基礎概念として採用する関数は一引数の関数でよさそうである。

4 ラムダ項

ラムダ項の定義を思い出そう。

1. 変数 $x, y, z \ldots$ はラムダ項である。
2. M と N がラムダ項なら、(MN) はラムダ項である（「適用」）。
3. M がラムダ項で x が変数なら、$(\lambda x.M)$ はラムダ項である（「抽象」）。

ラムダ項はラムダ式にしたがってつぎのように読める。

ラムダ式	ラムダ項
$\lambda(x)$	$\lambda x.$
$M(N)$	MN

$\lambda x.2^x$ などのなかの x は $\sum_{i=0}^{10} i(i-1)$ の i や $\int_0^\pi \sin x dx$ の x と同じように文字を入れ替えても式の意味・役割は変わらない。束縛変数を置き換えてうつる構文上の合同関係を α-同値という。ふたつのラムダ項 M と N とが α-同値であることを $M =_\alpha N$ と表す。たとえば、$\lambda x.fxz =_\alpha \lambda y.fyz$ である。

M 内の x の出現にラムダ項 N に代入したものを $M[x := N]$ とかく。単純なばあいには、M の中の x をすべて N に置き換えれば代入を得られる。代入は束縛関係を保つ必要があり、一般のばあいは以下のように帰納的に定義される。

定義 1. *代入を帰納的に定義する:*

1. $x[x := N] \equiv N$
2. $N[x := N] \equiv M$ *(x が M に自由に出現しないとき)*
3. $(QR)[x := N] \equiv (Q[x := N]R[x := N])$
4. $(\lambda y.Q)[x := N] \equiv \lambda y.Q[x := N]$ *(y が N に自由に出現しないとき)*
5. $(\lambda y.Q)[x := N] \equiv \lambda z.Q[y := z][x := N]$ *(ここで z は $N(\lambda xy.Q)$ に出現しない変数)*

5　β-簡約

ラムダ式 $(\lambda(x)2^x)(3)$ は、2^3 に等しいと考えらて置き換えられ、さらに簡単な式である 8 に置き換えられた。ラムダ項についてもラムダ計算では $(\lambda x.M)N$ というラムダ項をラムダ項 $M[x := N]$ に等しいと考える。この書き換えを β-**簡約** (β-reduction) という。

β-簡約は、つぎの四つの規則から導かれるラムダ項の間の二項関係として、帰納的に定義できる。

$$\frac{}{(\lambda x.M)N \to_1 M[x := N]}\ \mathrm{Beta}$$

$$\frac{M \to_1 M'}{MN \to_1 M'N}\ \mathrm{AppL} \qquad \frac{N \to_1 N'}{MN \to_1 MN'}\ \mathrm{AppR} \qquad \frac{M \to_1 M'}{\lambda x.M \to_1 \lambda x.M'}\ \mathrm{Lam}$$

以上の規則にしたがって $M \to_1 N$ が導かれるとき、$M \to_{1\beta} N$ と書く。

簡約の具体例を確認しよう。

$$\begin{aligned}(\lambda x.x)(\lambda y.y) &\to_{1\beta} (\lambda y.y)(\lambda y.y)\\ &\to_{1\beta} \lambda y.y\end{aligned}$$

この列の右端の $\lambda y.y$ のようにこれ以上 β-簡約できないラムダ項を β-正規形という。

β-簡約、β-正規形をそれぞれ簡単に簡約、正規形ということがある。

β-簡約で連なるラムダ項の列を β-**簡約列** (β-reduction sequence) という。

$$M_1 \to_{1\beta} M_2 \to_{1\beta} M_3 \to_{1\beta} \cdots \to_{1\beta} M$$

うえの β-簡約列のように、M_1 と M とを結ぶラムダ項の列で隣り合うラムダ項間に二項関係 $\to_{1\beta}$ が成立しているとき、$M_1 \to_\beta M$ と書く。

演習 1. つぎのラムダ項を求めよ。

1. $(\lambda y.x(\lambda x.x))[x := (\lambda x.xy)]$
2. $(y(\lambda z.zy))[y := (\lambda x.xz)]$

演習 2. つぎのラムダ項を β-簡約してその性質を考えよ。

1. $(\lambda x.xx)(\lambda x.xx)$
2. $(\lambda fx.x)MN$
3. $(\lambda fx.f(f(f(fx))))MN$
4. $(\lambda nfx.f(nfx))(\lambda fx.f(f(f(f(x)))))$

参考文献

[1] 萩谷・西崎『論理と計算のしくみ』、岩波、2007 年
[2] 古森・小野『現代数理論理学序説』、日本評論、2010 年

[3]